1. Một xạ thủ dùng 5 viên đạn để thử súng, anh ta thử súng theo nguyên tắc cứ 2 viên liên tiếp trúng bia thì thôi không bắn nữa. Biết xác suất bắn trúng bia là 0,95. Hãy lập bảng phân phối xác suất của số đạn còn thừa.

Giải:

Gọi X là ĐLNN chỉ số viên đạn còn thừa; X={0,1,2,3}. A_i là b/c: Bắn trúng ở viên thứ i, i=1,...,5.

$$P(X=3)=P(A_1A_2)=0,95.0,95=\frac{361}{400} \qquad P(X=2)=P(\overline{A}_1A_2A_3)=0,05.0,95.0,95=\frac{361}{8000}$$

$$P(X=1)=P(A_1\overline{A}_2A_3A_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_3)=\frac{361}{8000}$$

$$P(X=0)=1-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)=\frac{29}{4000}$$

Bảng phân phối xác suất là:

X	**0**	**1**	**2**	**3**
P	29/4000	361/8000	361/8000	361/400

2. Có hai hộp đựng bi, hộp một có 3 bi trắng 1 bi đỏ, hộp có 2 bi trắng và 2 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 bi ở hộp một chuyển sang hộp hai sau đó lấy ngẫu nhiên 2 bi ở hộp hai chuyển về hộp một, sau đó lấy ngẫu nhiên một bi ở hộp một.

a. Tìm xác suất bi lấy ra sau cùng là đỏ

b. Gọi X,Y là biến ngẫu nhiên chỉ số bi trắng tương ứng có ở hộp một và hộp hai sau hai lần chuyển đổi bi, tìm hàm phân phối xác suất của X,Y.

Giải:

a. Gọi A_i là b/c: lấy được i bi đỏ từ H1 chuyển sang H2; i=0,1.

+ B_j là b/c: lấy được j bi đỏ từ H2 chuyển về H1; j=0,1,2.

A là b/c: Viên bi lấy ra sau cùng là bi đỏ.

$$P(A_0B_0)=\frac{C_3^2}{C_4^2}\cdot\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{18}{90} \qquad ; \quad P(A_0B_1)=\frac{C_3^2}{C_4^2}\cdot\frac{C_4^1.C_2^1}{C_6^2}=\frac{24}{90}$$

$P(A_0B_2)=3/90$; $P(A_1B_0)=9/90$; $P(A_1B_1)=27/90$; $P(A_1B_2)=9/90$

$P(A/A_0B_0)=1/4$; $P(A/A_0B_1)=2/4$; $P(A/A_0B_2)=3/4$; $P(A_1B_0)=0$;

$P(A/A_1B_1)=1/4$; $P(A/A_1B_2)=2/4$.

Do đó $P(A)=120/360=1/3$.

b. Tập giá trị của X và Y: $X=\{2,3,4\}$; $Y=\{1,2,3,4\}$

$P[X=2]=P(A_0B_1+A_0B_2+A_1B_2)=P(A_0B_1)+P(A_0B_2)+P(A_1B_2)=36/90$

$P[X=3]=P(A_0B_0)+P(A_1B_1)=45/90$; $P[X=4]=P(A_1B_0)=9/90$

$P[Y=1]=P(P(A_1B_0)=9/90$; $P[Y=2]=P(A_0B_0)+P(A_1B_1)=45/90$;

$P[Y=3]=P(A_0B_1)+P(A_1B_2)=33/90$; $P[Y=4]=P(A_0B_2)=3/90$

3. Có 3 hộp đựng bóng đèn, hộp một có 2 bóng tốt 2 bóng xấu, hộp hai có 3 bóng tốt và 1 bóng xấu, hộp ba có 1 bóng tốt và 1 bóng xấu, lấy ngẫu nhiên 2 bóng ở hộp một và 2 bóng ở hộp hai chuyển sang hộp ba, trộn đều và lấy ngẫu nhiên 1 bóng ở hộp ba

a. Tìm xác suất để bóng lấy ra sau cùng là tốt

b. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số bóng tốt có ở hộp ba sau khi chuyển 2 bóng ở hộp một và 2 bóng ở hộp hai sang, tìm hàm phân phối xác suất của X.

Giải:

a. Gọi A_i và B_j lần lượt là các b/c: lấy được i bóng tốt từ H1 và j bóng tốt từ H2 chuyển sang H3; i,j=1,2.

+ a_i và b_j lần lượt là các b/c: lấy được i bóng xấu từ H1 và j bóng xấu từ H2 chuyển sang H3; i=1,2 ; j=1.

A là b/c : Bóng lấy sau cùng là tốt

$$P(A_2B_2)=\frac{C_2^2}{C_4^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{3}{36} \qquad P(a_2B_1b_1)=\frac{C_2^2}{C_4^2}\cdot\frac{C_3^1.C_1^1}{C_4^2}=\frac{3}{36}$$

$$P(a_2B_2)=\frac{C_2^2}{C_4^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{3}{36} \qquad P(A_1a_1B_1b_1)=\frac{C_2^1.C_2^1}{C_4^2}\cdot\frac{C_3^1.C_1^1}{C_4^2}=\frac{12}{36}$$

$P(A_2B_1b_1) = \dfrac{C_2^2}{C_4^2} \cdot \dfrac{C_3^1.C_1^1}{C_4^2} = \dfrac{3}{36}$ $\qquad$ $P(A_1a_1B_2) = \dfrac{C_2^1.C_2^1}{C_4^2} \cdot \dfrac{C_3^2}{C_4^2} = \dfrac{12}{36}$

$P(A/A_1)=5/7$; $P(A/A_2)=4/7$; $P(A/A_3)=3/7$;

$P(A/A_4)=2/7$; $P(A/A_5)=4/7$; $P(A/A_6)=3/7$.

Vậy $P(A)=126/252=1/2$

b. Tập giá trị của X: $X=\{2,3,4,5\}$

$P[X=2]=P(A_4)=3/36$; $P[X=3]=P(A_3)+P(A_6)=15/36$;

$P[X=4]=P(A_2)+P(A_5)=15/36$; $P[X=5]=P(A_1)=3/36$

Ta được bảng phân phối xác suất của X:

X	**2**	**3**	**4**	**5**
P	3/36	15/36	15/36	3/36

4. Cho ĐLNN liên tục X có hàm phân phối xác suất như sau:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & khi \quad x \le -1 \\ a + b.\arcsin x & khi \quad -1 < x \le 1 \\ 1 & khi \quad x > 1 \end{cases}$$

a. Xác định hằng số a,b

b. Tìm hàm mật độ xác suất f(x)

Giải:

Vì X là ĐLNN liên tục nên F(x) là hàm liên tục với mọi x.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} F(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} F(x) = F(-1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = F(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b.\arcsin(-1) = 0 \\ 1 = a + b.\arcsin(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/\pi \end{cases}$$

b/ $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & khi \quad x \notin (-1;1] \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & khi \quad x \in (-1;1] \end{cases}$

5. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & khi \quad x \notin \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \\ a.\cos x & khi \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

a. Xác định hệ số a

b. Tìm hàm phân phối xác suất F(x)

c. Tính $P\left(0 \le X \le \frac{\pi}{4}\right)$.

Giải: - Kiểm tra 2 điều kiện của hàm mật độ:

$(1): \ f(x) \ge 0; \forall x \in (-\infty, +\infty) \qquad \Leftrightarrow a.\cos x \ge 0, \quad x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow a \ge 0$

$(2) \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad \Leftrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a.\cos x\, dx = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

b)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad = \begin{cases} 0 \quad khi \quad x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ \displaystyle\int_{-\pi/2}^{x} \frac{\sin x}{2}dx = \frac{1}{2}(\text{sinx}+1) \quad khi \ -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1 \quad khi \quad x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

c/ $P\left(0 \le X \le \dfrac{\pi}{4}\right) = F(\dfrac{\pi}{4}) - \text{F}(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

6. Các hàm sau đây hàm nào là hàm phân phối xác suất:

a)
$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} & khi \quad x\le 0 \\ 0,8 & khi \quad 0<x\le 1 \\ 1 & khi \quad x>1 \end{cases}$$

Dựa vào tính liên tục của hàm phân phối F(x):

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)=F(0) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=F(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,8=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \\ 1=0,8 \end{cases}$$

Vậy F(x) ko là hàm PPXS của ĐLNN liên tục X nào.

b)
$$F(x)=\begin{cases} 0 & khi \quad x\le -\frac{\pi}{2} \\ \cos x & khi \quad \frac{-\pi}{2}<x\le \frac{\pi}{2} \\ 1 & khi \quad x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\pi/2^+} F(x)=\lim\limits_{x\to -\pi/2^-} F(x)=F(-\pi/2) \\ \lim\limits_{x\to \pi/2^+} F(x)=\lim\limits_{x\to \pi/2^-} F(x)=F(\pi/2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -\pi/2^+} \cos x=0 \\ 1=\cos\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vậy F(x) ko là hàm PPXS của ĐLNN liên tục X nào.

7. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất như sau:

$$f(x)=\begin{cases} a.\ln x & khi \quad 1\le x\le e \\ 0 & khi \quad x\notin [1,e] \end{cases}$$

a. Xác định hệ số a

b. Tìm $P\left(1<X<\frac{3}{2}\right)$.

Giải:

a/ Làm tương tự bài 5, tìm được a = 1.

b/ $P\left(1 < X < \frac{3}{2}\right) = \int\limits_{1}^{3/2} f(x)\,dx = \int\limits_{1}^{3/2} \ln x\,dx = \frac{1}{2}\left(3\ln\frac{3}{2} - 1\right)$

8. Chuyển 5000 chai bia đến nơi tiêu thụ với xác suất để một chai bia vỡ trong quá trình vận chuyển là 0,0002. Tìm xác suất để

a. Có đúng 3 chai vỡ.

b. Số chai bị vỡ không quá 10 chai.

Giải:

- Gọi X là ĐLNN chỉ số chai bia bị vỡ trong quá trình vận chuyển, X~B(5000;0,0002).
- Do n lớn mà xác suất p=0,0002 nhỏ nên X xấp xỉ bởi phân phối Poát-xông với $\lambda = n.p = 1$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, ...$$

a. Xác suất có đúng 3 chai vỡ:

$$P(X = 3) = \frac{e^{-1}.1^3}{3!} =$$

a. Xác suất có không quá 10 chai vỡ:

$$P(X \le 10) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 10) =$$

9. Cho X là ĐLNN với hàm mật độ xác suất xác định như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad khi \quad x \notin \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ a.\sin x \quad khi \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

a. Tìm hàm phân phối xác suất F(X)

b. Tính $P\left(\frac{\pi}{4} < X < \frac{3\pi}{4}\right)$.

Giải:

a) Trước hết, dựa vào 2 điều kiện của hàm mật độ f(x), ta xác định được $a = 1$.

b) Theo định nghĩa của hàm phân phối xác suất F(x), ta có:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad =\begin{cases} 0 \quad khi \quad x\le \pi/2 \\ \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx=-\cos x \quad khi \ \pi/2<x\le\pi \\ 1 \quad khi \quad x>\pi \end{cases}$$

10. Giả sử tuổi thọ của dân cư ở một quốc gia là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất như sau

$$f(\mathrm{t})=\begin{cases} k.t^2(100-t)^2 & \text{nếu} \quad t\in[0,100] \\ 0 & \text{nếu} \quad t\notin[0,100] \end{cases}$$

a. Tìm tham số k

b. Tuổi thọ trung bình của dân cư ở quốc gia đó là bao nhiêu?

c. Tìm tỷ lệ người có tuổi thọ từ 60 đến 70 tuổi.

Giải:

a. Dựa vào 2 điều kiện của hàm mật độ, ta xác định được $k=3/10^{10}$
b. Gọi T là ĐLNN chỉ tuổi thọ của dân cư thì tuổi thọ trung bình của dân cư ở quốc gia đó chính là kỳ vọng E(T). Ta có:

$$\mathrm{E(T)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{t.f(t)dt} \quad =\frac{3}{10^{10}}\int_{0}^{100}\mathrm{t.t^2(100-t)^2dt}=50$$

c. Tỷ lệ người có tuổi thọ từ 60 đến 70 tuổi:

$$\mathrm{P}(60\le \mathrm{T}\le 70)=\int_{60}^{70}\mathrm{f(t)dt}=\frac{3}{10^{10}}\int_{60}^{70}\mathrm{t^2(100-t)^2dt}=0{,}154$$

11. Tiến hành thử độ bền của 4 máy. Mỗi máy chỉ được thử nếu máy trước chịu được phép thử. Biết xác suất chịu được phép thử của mỗi máy đều là 0,9. Lập bảng phân phối số máy được thử.

Giải:

- Gọi X là ĐLNN chỉ số máy được thử; X={1,2,3,4}

A_i là b/c: Máy thứ i chịu được phép thử, i=1,...,4.

$$P(X=1)=P(A_1)=0{,}1 \qquad P(X=2)=P(A_1\overline{A_2})=0{,}9\times0{,}1=0{,}09$$

$$P(X=3)=P(A_1A_2\overline{A_3})=0{,}9\times0{,}9\times0{,}1=0{,}081$$

$$P(X=4)=1-P(\overline{A_1})-P(A_1\overline{A_2})-P(A_1A_2\overline{A_3})=0{,}729$$

Bảng phân phối xác suất:

X	1	2	3	4
P	0,1	0,09	0,081	0,729

12. ĐLNN X có hàm mật độ f(x) được xác định bởi:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} & \text{khi } |x|<a\\ 0 & \text{khi } |x|\ge a\end{cases}$$

a. Tìm hệ số a

b. Tìm $P\left(\frac{a}{2}<X<a\right)$.

Giải:

a) Kiểm tra 2 điều kiện của hàm mật độ:

$$(1):\ f(x)\ge 0;\forall x\in(-\infty,+\infty)$$

$$(2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \qquad \Leftrightarrow a\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=1 \qquad \Leftrightarrow a=\frac{1}{\pi}$$

b. $P\left(\frac{a}{2} < X < a\right) = \int_{a/2}^{a} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{a/2}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$

13. Một người đi săn có 3 viên đạn. Mỗi lần bắn 1 viên, nếu trúng đích hoặc hết đạn thì về ngay. Xác suất trúng đích của mỗi phát đạn là 0,6. Mỗi viên đạn giá 20 nghìn đồng. Tính số tiền tiêu thụ trung bình cho 1 cuộc đi săn.

Giải :

- Gọi X là ĐLNN chỉ số viên đạn đã bắn; X={1,2,3}

A_i là b/c: Bắn trúng ở viên đạn thứ i, i=1,2,3.

$P(X=1) = P(A_1) = 0{,}6$ $\quad$ $P(X=2) = P(\overline{A_1}A_2) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$

$$P(X=3) = 1 - (0{,}6 + 0{,}24) = 0{,}16$$

Bảng phân phối xác suất :

X	**1**	**2**	**3**
P	**0,6**	**0,24**	**0,16**

14. Đại lượng ngẫu nhiên X Có hàm mật độ f(x) được xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}; \text{nếu } |x| < a \\ 0; \quad \text{nếu } |x| \geq a \end{cases}$$

Chứng minh rằng E(X)=0, D(X)= $\frac{a^2}{2}$

Giải: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} x \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = 0$

$$+)\ D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$+)\ E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow D(X) = \frac{a^2}{2}$$