Bài 3 Phương trình phi tuyến

Khoa Công nghệ thông tin

Trường đại học công nghiệp – Hà Nội

Bài 3 Phương trình phi tuyến

2.1 Đặt vấn đề

2.2 Nghiệm của phương trình

2.3 Phương pháp chia đôi

2.4 Phương pháp dây cung

2.5 Phương pháp lặp

2.6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một phương trình

2.1 Đặt vấn đề

Tìm nghiệm của phương trình:

$$\boldsymbol{f(x) = 0} \qquad (2.1)$$

trong đó *f* là một hàm đại số hoặc là hàm siêu việt bất kỳ vời đối số *x*.

Nếu f(x) là hàm đại số, nó được biểu diễn dưới dạng:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0; a_0 \neq 0$$

2.2 Nghiệm của phương trình

Xét phương trình một ẩn

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \qquad (2.1)$$

trong đó *f* là một hàm số cho trước của đối số *x*.

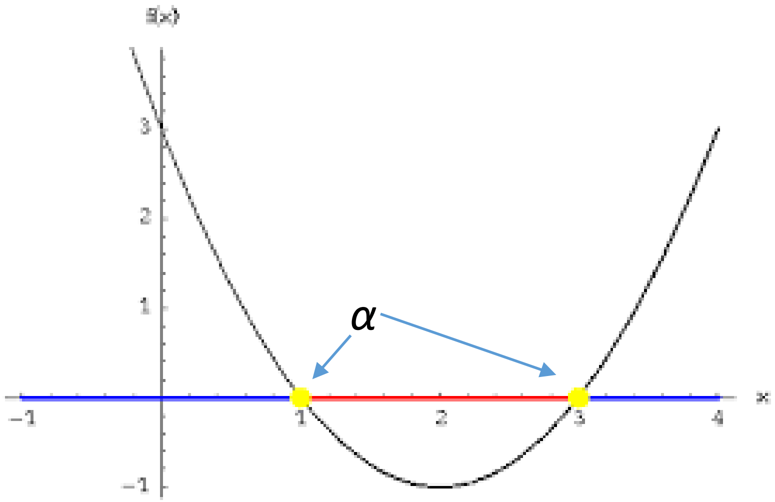
Nghiệm thực của phương trình (2.1) là số thực α thỏa mãn (2.1) tức là khi thay α vào *x* ở vế trái ta được:

$$\boldsymbol{f}(\alpha) = \mathbf{0} \qquad (2.2)$$

Việc tính gần đúng nghiệm thực của pt (2.1) được tiến hành theo hai bước:

Bước 1: Tìm khoảng cách ly nghiệm (*a*, *b*) chỉ chứa 1 và chỉ 1 nghiệm thực của pt (2.1).

Bước 2: xuất phát từ khoảng cách ly nghiệm tìm được từ bước 1, tính gần đúng nghiệm thực của pt (2.1) đạt độ chính xác theo yêu cầu được xác định từ trước.



Hình 2-1: Nghiệm của PT.

2.2 Nghiệm của phương trình

Khoảng cách ly nghiệm

PT $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm trên $[a, b]$ nếu thỏa mãn 3 điều kiện sau:

1. $f(x)$ liên tục trên ***[a, b]***
2. $f(a)$ khác dấu $f(b)$ ⇔ $f(a) \times f(b) < 0$
3. Đạo hàm cấp một $f'(x)$ không đổi dấu trong $[a, b]$

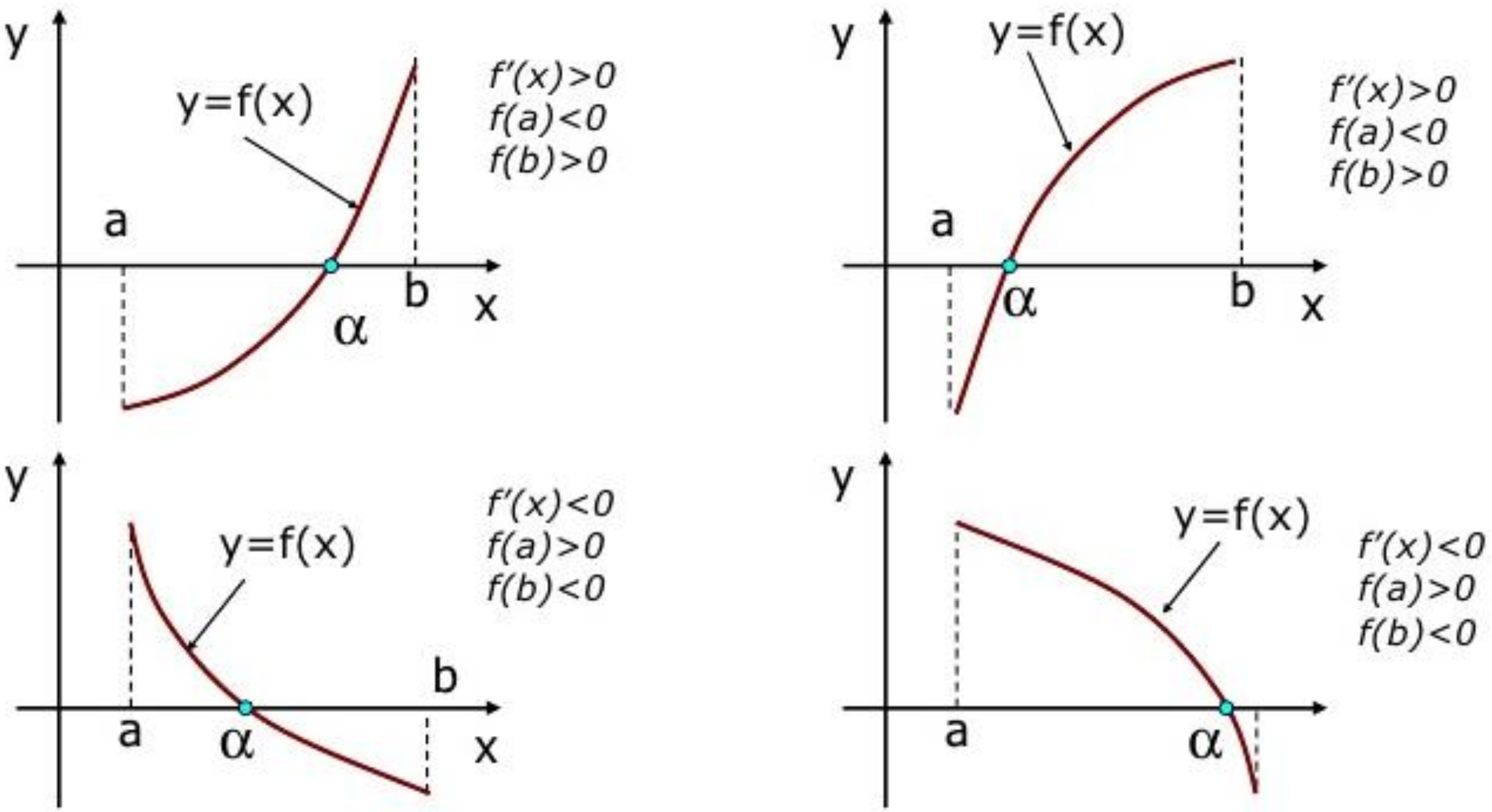
Đoạn [a, b] được gọi là khoảng cách ly nghiêm.

Có thể xét thêm 1 điều kiên nữa

4. Đạo hàm cấp hai $f''(x)$ không đổi dấu trong $[a, b]$
=> không có điểm uốn.

2.2 Nghiệm của phương trình

Khoảng cách ly nghiệm



Hình 2-2. khoảng cách ly nghiệm

2.2 Nghiệm của phương trình

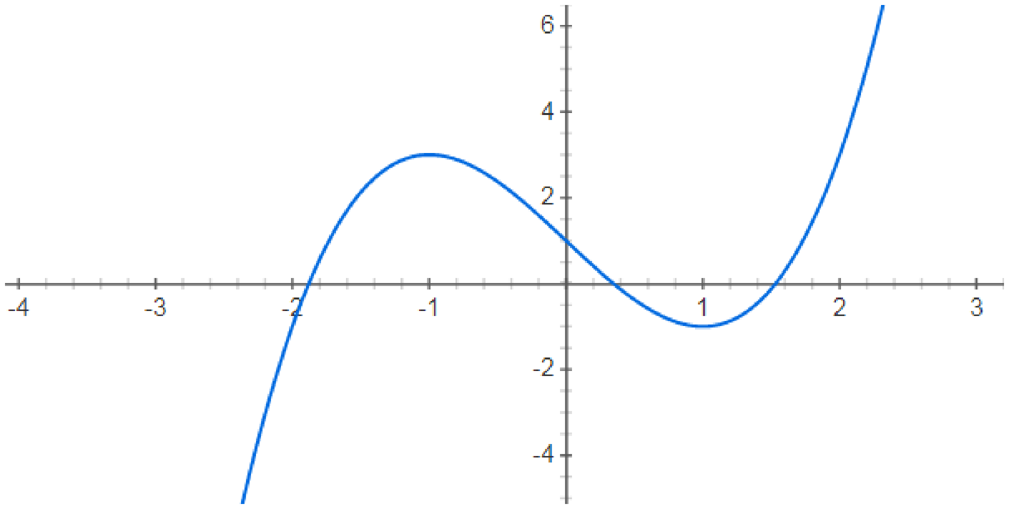
Cách tìm khoảng cách ly nghiệm

1) Phương pháp giải tích

Lập bảng chia khoảng để xét dấu (hoặc bảng biến thiên).

Ví dụ 2.1: xét phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	3	1	-1	3	19



Vì phương trình bậc 3 nên có tối đa 3 nghiệm. Từ bảng trên ta có 3 khoảng phân ly nghiệm [-2, -1], [0, 1] và [1, 2].

2.2 Nghiệm của phương trình

Cách tìm khoảng cách ly nghiệm

2) Phương pháp hình học

Đối với những hàm đơn giản ta có thể vẽ hình và dựa trên hình vẽ để xác định các khoảng cách ly.

Ví dụ 2.2: xét phương trình $f(x) = 3^x + 2x - 4 = 0$

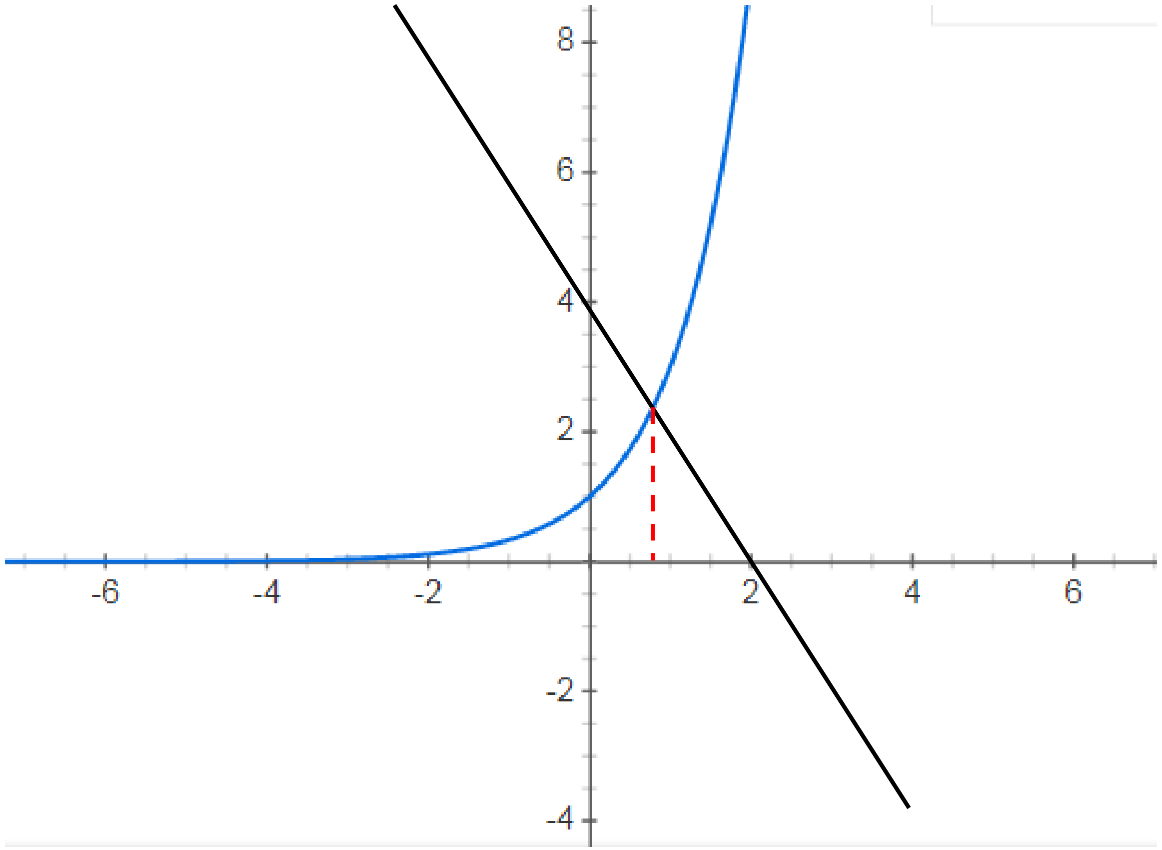
Từ phương trình trên ta có thể đưa về phương trình tương đương:

$$3^x = -2x + 4 \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$$

sau đó vẽ 2 đồ thị trên cùng 1 hệ tọa độ. Dựa trên các điểm cắt nhau của 2 đồ thị để xác định khoảng cách ly nghiệm.

2.2 Nghiệm của phương trình

Ví dụ 2.2: xét phương trình $f(x) = 3^x + 2x - 4 = 0$



Khoảng cách ly nghiệm [0.5, 1]

2.3 Phương pháp chia đôi

2.3.1 Ý tưởng

Nếu [a, b] là khoảng phân li nghiệm (chứa 1 và chỉ 1 nghiệm) của phương trình (2.1) thì

$\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ hoặc $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ sẽ là khoảng phân li mới.

Lặp lại quá trình phân li này nhiều lần.

2.3 Phương pháp chia đôi

2.3.2 Thuật toán

Gọi m là điểm giữa a và b: **m = (a + b)/2**

Có 2 trường hợp:

1. Nếu **f(m) = 0**, khi đó m là nghiệm cần tìm => dừng thuật toán.

2. Nếu **f(m) ≠ 0**, khi đó ta có:

   + Hoặc **f(a)×f(m) < 0** ta chọn m là b mới: **b = m**

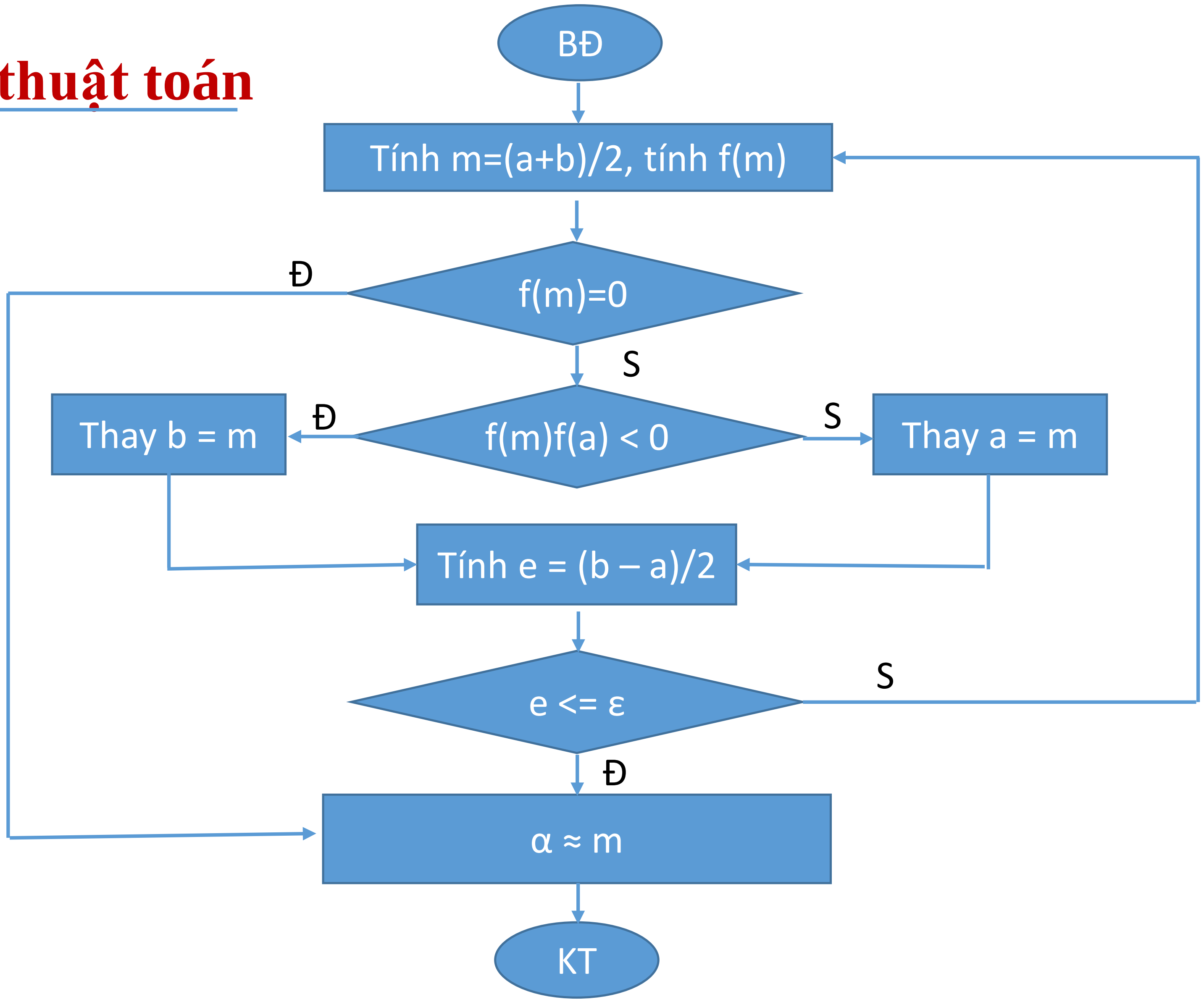
   + Hoặc **f(m)×f(b) < 0** ta chọn m là a mới: **a = m**

   Và chúng ta lặp lại cho [a, b] mới.

Quá trình lặp dừng lại khi |b – a|/2 <= ε với ε độ lệch cho trước và ta chọn m là nghiệm gần đúng.

2.3 Phương pháp chia đôi

2.3.3 Sơ đồ thuật toán



2.3 Phương pháp chia đôi

2.3.4 Sự hội tụ của phương pháp

Khi thực hiện vô hạn lần phương pháp chia đôi cho khoảng (a, b) thì một trong 2 trường hợp xảy ra:

- Điểm giữa là nghiệm của phương trình (2.1);
- Hoặc ta nhận được một dãy vô hạn các khoảng chồng lên nhau và thu nhỏ dẫn $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ sao cho:

  $f(a_n) \times f(b_n) < 0$ và $b_n - a_n = 1/2^n \times (b-a)$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ tạo nên dãy đơn điệu không giảm và bị chặn bởi b, còn $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tạo nên dãy đơn điệu không tang và bị chặn bởi a, nên khi $n \to +\infty$ thì:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \alpha$$

Vì hàm f(x) liên tục nên khi $n \to +\infty$, $f(\alpha) = 0$ và α là nghiệm của hàm f.

2.3 Phương pháp chia đôi

2.3.5 Đánh giá sai số

Chúng ta có: $a_n \leq \alpha \leq b_n$ và $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$ (2.3)

Nếu a_n là nghiệm gần đúng: $|a_n - \alpha| \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$ (2.4)

Nếu b_n là nghiệm gần đúng: $|b_n - \alpha| \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$ (2.5)

Nếu $(a_n + b_n)/2$ là nghiệm đúng: $\left|\frac{a_n + b_n}{2} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$ (2.6)

Chúng ta lấy sai số tuyệt đối giới hạn

$$\Delta_f = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \qquad (2.7)$$

2.3 Phương pháp chia đôi

2.3.6 Ưu/nhược điểm

- Giải thuật đơn giản, dễ lập trình trên máy tính;

- Tốc độ hội tụ chậm.

2.3 Phương pháp chia đôi

Ví dụ 2.3.2:

Tìm nghiệm gần đúng của PT: $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$. Biết khoảng cách ly nghiệm (1,2).

Giải:

Tính: $f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1$; $f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5$; ==> (1,2) là khoảng cách ly nghiệm.

Áp dụng liên tiếp phương pháp chia đôi ta được bảng kết quả sau:

n	a_n	b_n	$m = (a_n + b_n)/2$	f(m)	$b_n - a_n$
0	1	2	1.5	0.875	1
1	1	1.5	1.25	-0.29688	0.5
2	1.25	1.5	1.375	0.22461	0.25
3	1.25	1.375	1.3125	-0.05151	0.125
4	1.3125	1.375	1.34375	0.08261	0.0625
5	1.3125	1.34375	1.32813	0.01458	0.03125
6	1.3125	1.32813	1.32032		0.01563

Lấy nghiệm gần đúng là 1.32032 với sai số:

$$|1.32032 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times 0.01563 = 0.00782$$

Ta có thể lấy nghiệm gần đúng là:

$$\alpha \approx 1.32 \pm 0.008$$

2.3 Phương pháp chia đôi

Ví dụ:2.3.3

Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2$.

Tìm xấp xỉ nghiệm của phương trình trên đoạn [-1.8; -1.2] thỏa yêu cầu sai số bé hơn 0.02 bằng phương pháp chia đôi.

2.3 Phương pháp chia đôi

Ví dụ:2.3.3

Bước 1:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

Bước 2: Kiểm tra đoạn [-1.8; -1.2] là khoảng cách ly nghiệm:

$$f(-1.8) = (-1.8)^4 - 2*(-1.8)^2 = 4.0176$$

$$f(-1.2) = (-1.2)^4 - 2*(-1.2)^2 = -0.8064$$

$$f'(-1.8) = 4*(-1.8)^3 - 4*(-1.8) = -16.128$$

$$f'(-1.2) = 4*(-1.2)^3 - 4*(-1.2) = -2.112$$

Ta thấy f(-1.8)*f(-1.2)<0 và f'(-1.8) cùng dấu với f'(-1.2) nên khoảng đã cho là khoảng cách ly nghiệm.

2.3 Phương pháp chia đôi

Ví dụ:2.3.3

Bước 3:

n	a_n	b_n	m	f(m)	$\|b_n - a_n\|/2$
0	-1.8	-1.2	-1.5	0.5625	0.3
1	-1.5	-1.2	-1.35	-0.32349375	0.15
2	-1.5	-1.35	-1.425	0.062187891	0.075
3	-1.425	-1.35	-1.3875	-0.144085913	0.0375
4	-1.425	-1.3875	-1.40625	-0.044417381	0.01875

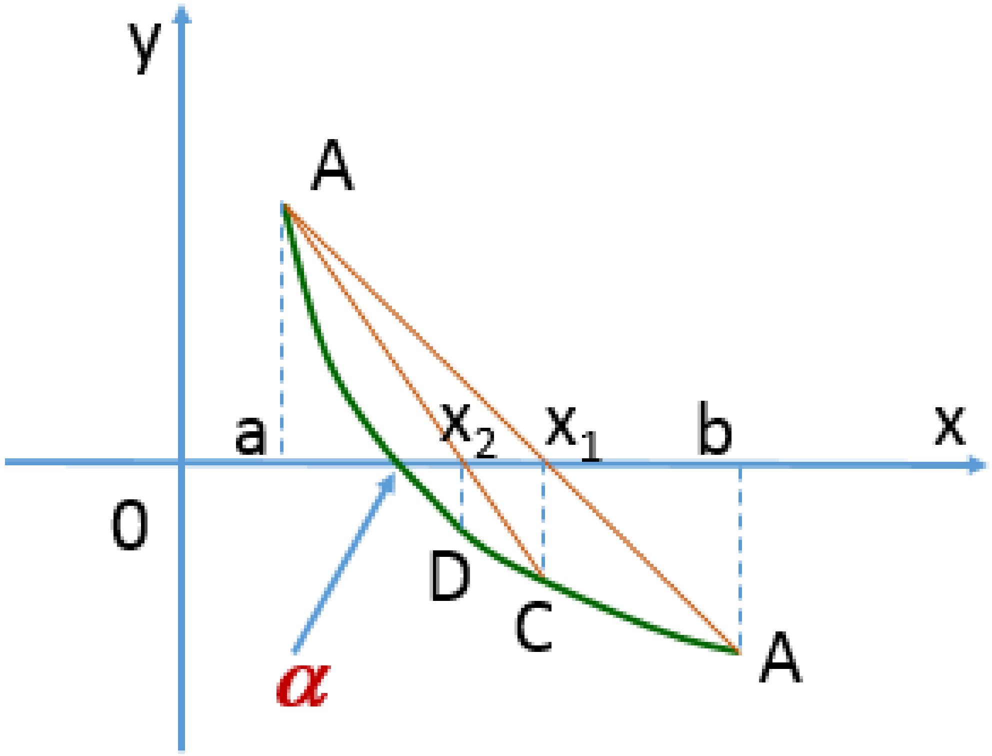
Lấy nghiệm gần đúng là -1.40625 với sai số:

$|-1.40625 - \alpha| \leq 0.01875 < 0.02 \Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = -1.40625 \pm 0.019}$

2.4 Phương pháp dây cung

2.4.1 Ý tưởng

Cho pt $f(x) = 0$, $[a, b]$ là khoảng cách li nghiệm. Nghiệm đúng là α (hình bên). Ý tưởng là thay vì tìm nghiêm đúng trên cung tròn AB thì ta tìm nghiệm gần đúng thông qua dây cung AB (đoạn thẳng AB).

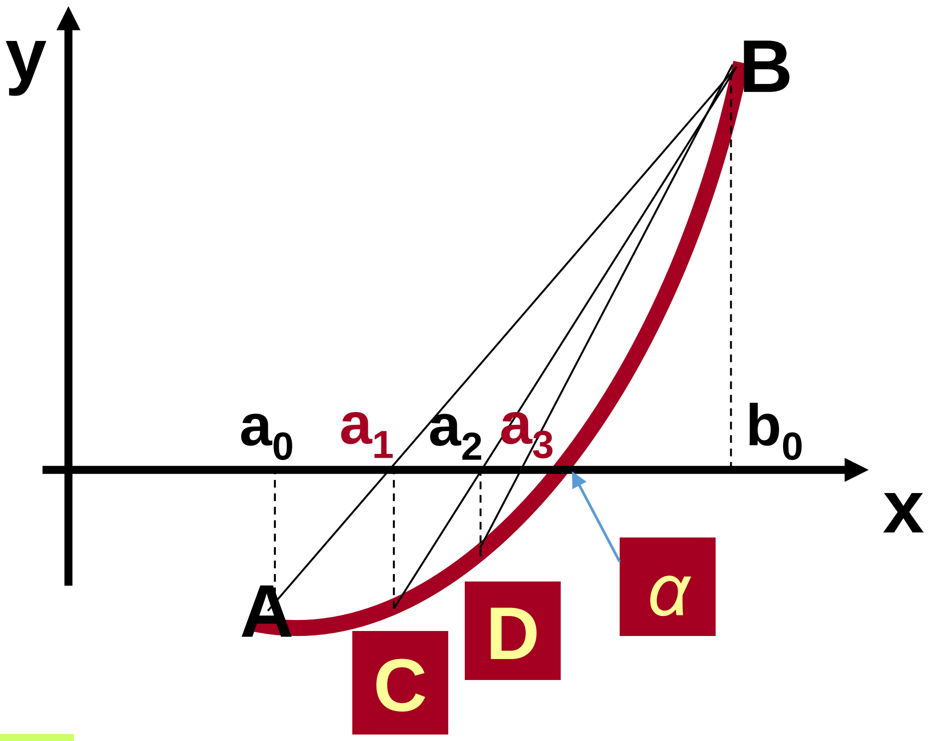


Dây cung AB cắt trục x tại điểm có toạ độ (x1, 0). Nếu $f(a)*f(x_1) < 0$, thay $b = x_1$ ta có khoảng nghiệm mới là (a, x_1). Nếu $f(b)*f(x_1) < 0$, thay $a = x_1$ ta có khoảng nghiệm mới là (x_1, b). Lặp lại trên khoảng nghiệm mới ta được x_2, …

2.4 Phương pháp dây cung

Trình tự thực hiện thông qua 1 ví dụ

Cho pt **f(x)=0**, [a_0, b_0] là khoảng cách ly nghiệm.
Tìm nghiệm gần đúng a_i trong (a_0, b_0).



Lần 1: 1.1- Chọn miền nghiệm (MN) ban đầu $\alpha \in (a_0, b_0)$

1.2- Nối 2 điểm A và B trên đồ thị,

1.3- AB cắt trục hoành tại điểm có hoành độ: , a_1

Lần 2: 2.1-Chọn MN mới: $\alpha \in (a_1, b_0) \subset (a_0, b_0)$

2.2 Nối C với B ta lại tìm được một điểm mới: a_2

….. Lặp lại liên tục nhiều lần.

Lần n: Dừng ở bước n ta thu được nghiệm xấp xỉ $a_n \Rightarrow (\approx) \alpha$

2.4 Phương pháp dây cung

2.4.2 Đường thẳng đi qua 2 điểm

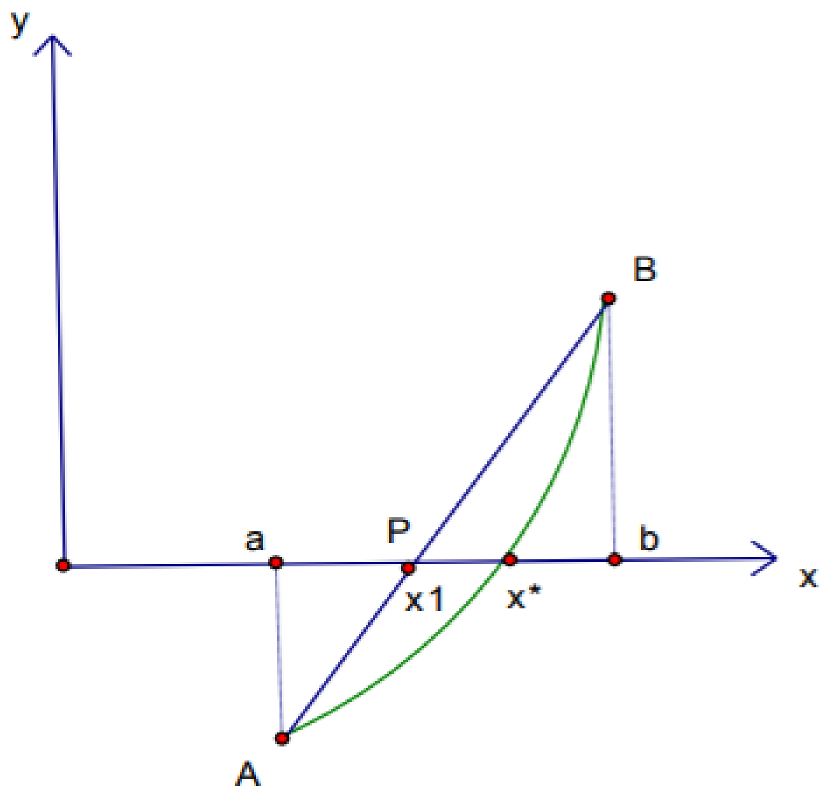
Dây cung AB là đường thẳng đi qua hai điểm A(a,f(a)) và B(b,f(b)).

***Trường hợp 1**: f'(x)f''(x) > 0. $f(a)$ < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0 và f''(x) >0 với ∀x ∈ (a, b) nên phương trình dây cung AB là:*

$$\frac{Y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{X - a}{b - a} \qquad (2.8)$$

Tại P ta có Y = 0 và X = x_1, nên thay vào (2.8) ta có:

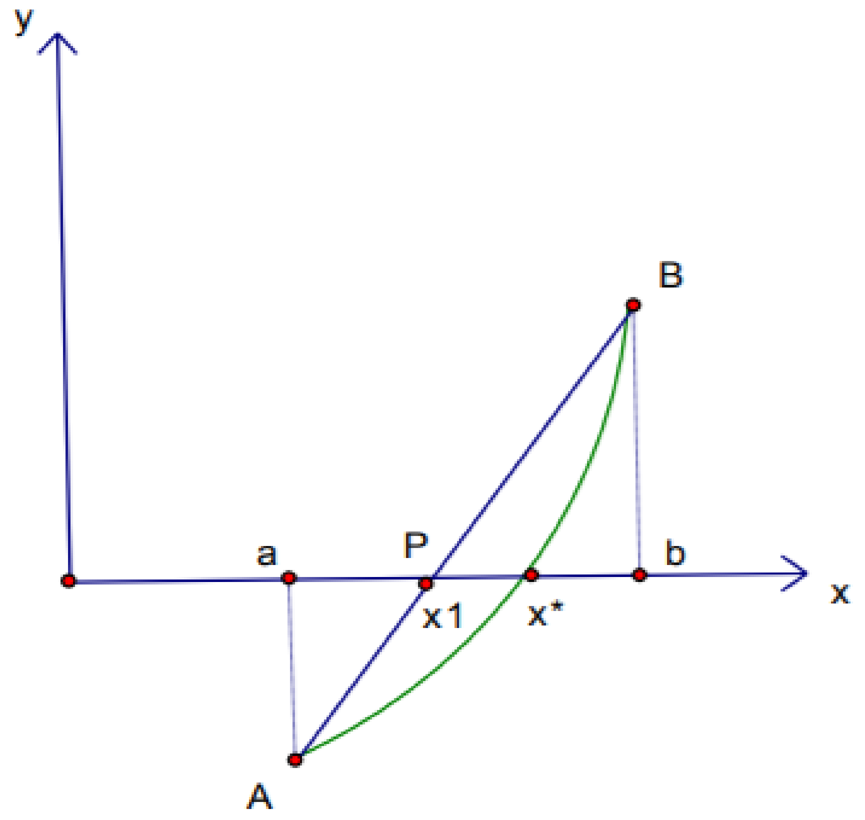
$$\frac{-f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a} \qquad (2.9)$$



2.4 Phương pháp dây cung

2.4.2 Đường thẳng đi qua 2 điểm

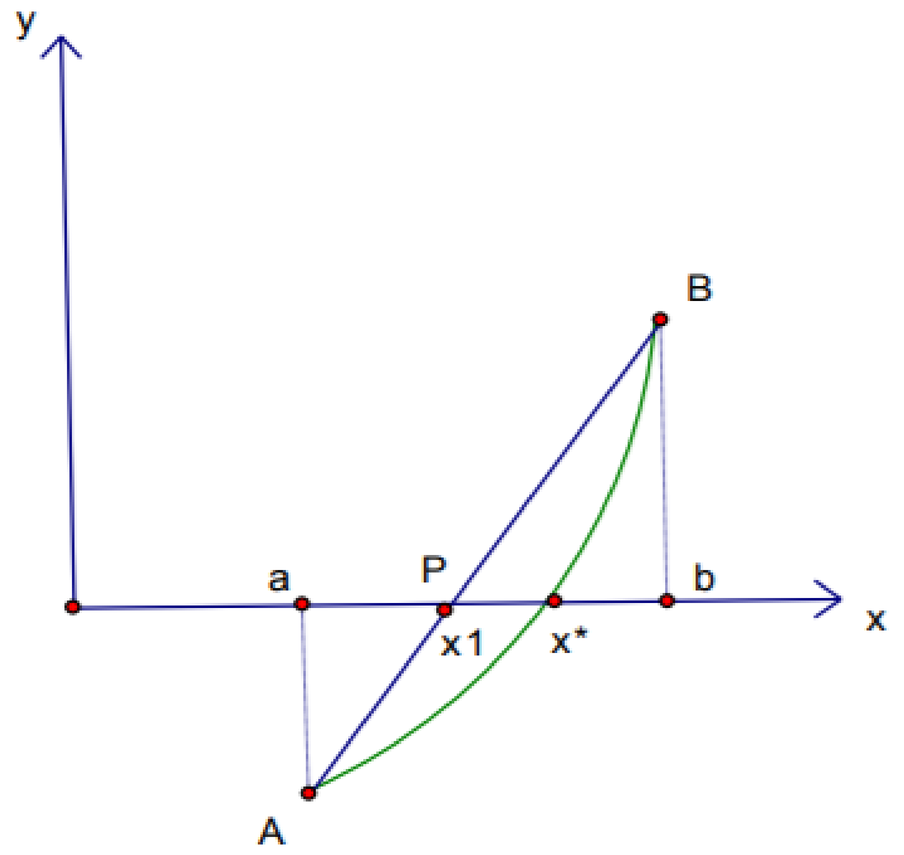
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a - \dfrac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} & (2.10) \\[2ex] x_1 = \dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} & (2.11) \end{cases}$$



2.4 Phương pháp dây cung

Ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ theo hệ thức:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \end{cases} \qquad (2.12)$$

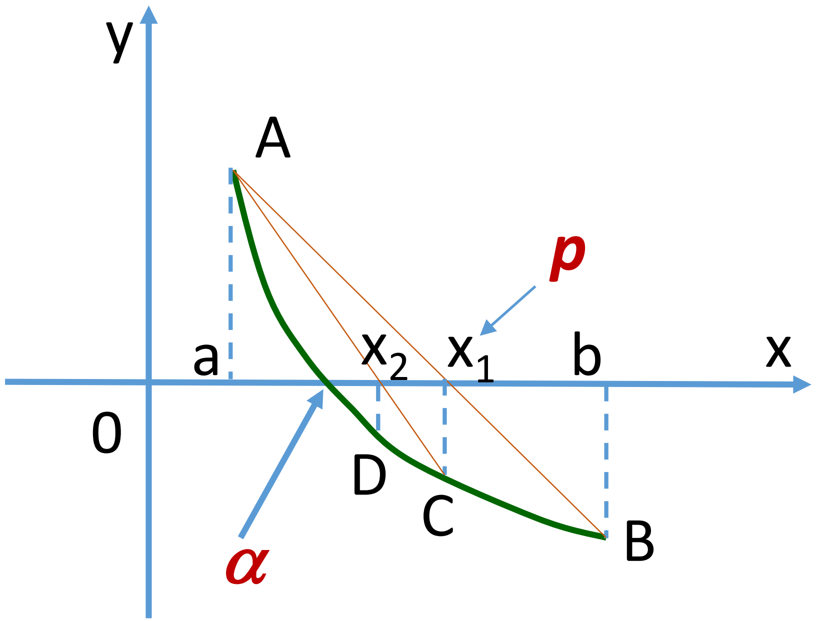


2.4 Phương pháp dây cung

2.4.2 Đường thẳng đi qua 2 điểm

Trường hợp 2: *f'(x)f''(x) < 0.* $f(a) > 0$, *f(b) < 0, f'(x) < 0 và f''(x) >0 với* $\forall x \in (a, b)$ *nên phương trình dây cung AB là:*

$$\frac{Y - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{X - b}{b - a} \qquad (2.13)$$



Tại P ta có Y = 0 và X = x_1, nên thay vào (2.13) ta có:

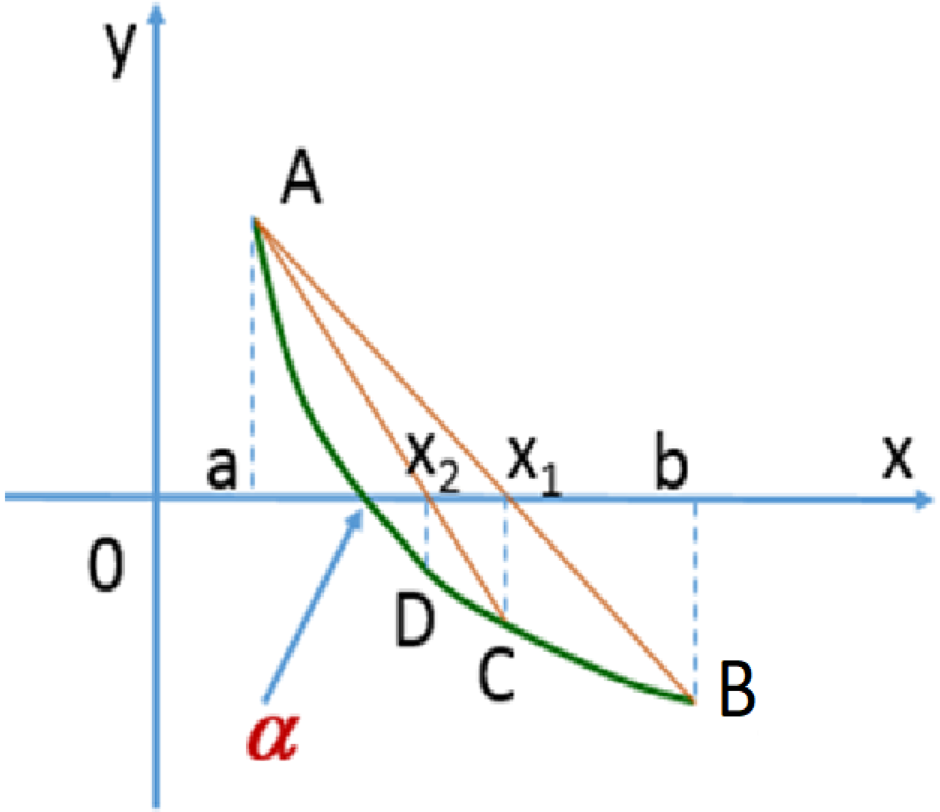
$$\frac{-f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - b}{b - a} \qquad (2.14)$$

2.4 Phương pháp dây cung

Trường hợp 2: ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ theo hệ thức:

$$x_1 = b - \frac{(b-a)f(b)}{f(b)-f(a)} \qquad (2.15)$$

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{(x_n - a)f(x_n)}{f(x_n)-f(a)} \end{cases} \qquad (2.16)$$



2.4 Phương pháp dây cung

Kết hợp trường hợp 1 và 2

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)} \qquad (2.17)$$

$n = 0,1,2, \ldots$

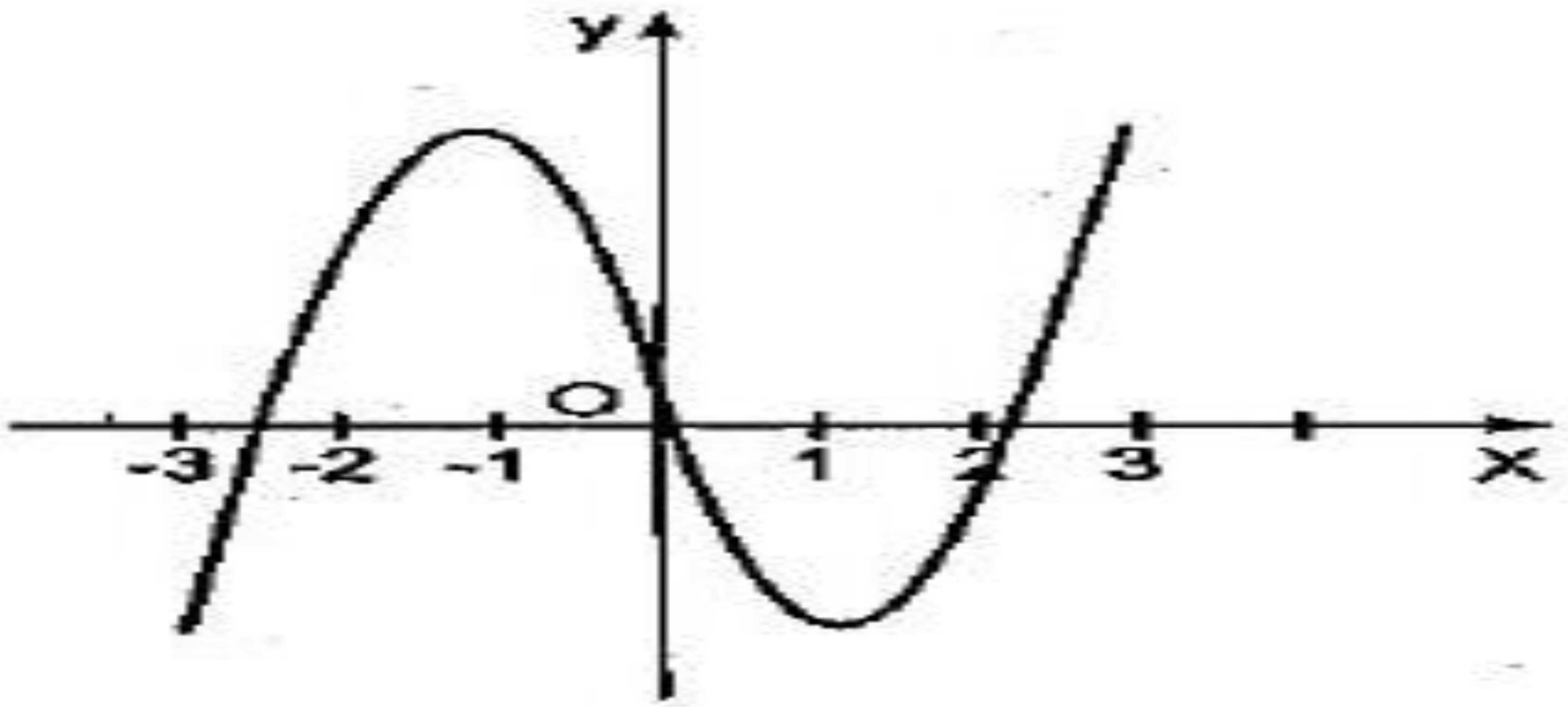
- **d = *b* nếu *f*(*b*) cùng dấu với *f*''(*x*); x_0 = *a*;**
- ***d* = *a* nếu *f*(*a*) cùng dấu với *f*''(*x*); x_0 = *b*;**

2.4 Phương pháp dây cung

Ví dụ 2.4.1

Tìm nghiệm gần đúng của phương trính sau trong đoạn [0, 1]]

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$$



2.4 Phương pháp dây cung

Giải:

$f'(x) = 3x^2 - 6;$

$f'(0) = -6; f'(1) = -3;$

$f''(x) = 6x;$ => f'' dương;

$f(0) = 2 > 0; f(1) = -3 < 0;$

Vì f(0) cùng dấu với f'' nên $x_0 = 1$ và $d = 0$;

Áp dụng CT (2.17)

$$x_1 = 1 - \frac{(-3)(1-0)}{-3-2} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

- d = b nếu f(b) cùng dấu với f''(x); $x_0 = a$;
- d = a nếu f(a) cùng dấu với f''(x); $x_0 = b$;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)}$$

2.4 Phương pháp dây cung

Vì f(0,4) = -0.336 và f(0) = 2 nên nghiệm phải tìm nằm trong khoảng [0; 0.4]. Áp dụng CT (2.17) cho khoảng mới, ta có:

$$x_2 = 0.4 - \frac{-0.336 \times 0.4}{-0.336 - 2} = 0.4 - \frac{0.336 \times 0.4}{0.336 + 2} = 0.342466$$

$f(x_2)$ = -0.01463 và f(0) = 2 nên nghiệm phải tìm nằm trong khoảng [0; 0.342466].

Áp dụng CT (2.17) cho khoảng mới, ta có:

$$x_3 = 0.342466 - \frac{-0.01463 \times 0.342466}{-0.01463 - 2} = 0.342466 - \frac{0.0501}{2.01463} = 0.339979$$

2.4 Phương pháp dây cung

2.4.3 Đánh giá sai số

Ước lượng sai số thông qua giá trị tìm được trước đó:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M - m}{m}|x_n - x_{n-1}| \qquad (2.18)$$

trong đó: $0 < m \leq |f'(x)| \leq M < +\infty$

Tính sai số theo công thức đơn giản sau:

$$|x_n - \alpha| < \frac{|f(x_n)|}{m} \qquad (2.19)$$

trong đó: $0 < m \leq |f'(x_n)|$

$$\Rightarrow \quad |x_n - \alpha| < \frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|} \qquad (2.20)$$

2.4 Phương pháp dây cung

2.4.4 Ưu/nhược điểm

- Luôn cho nghiệm gần đúng;

- Giải thuật đơn giản;

- Tốc độ hội tụ chậm.

2.4 Phương pháp dây cung

2.4.5 Thuật toán

Để giảm khối lượng tính toán (không phải tính đạo hàm) chúng ta có thể thực hiện thuật toán dựa trên công thức 2.10 như sau:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$$

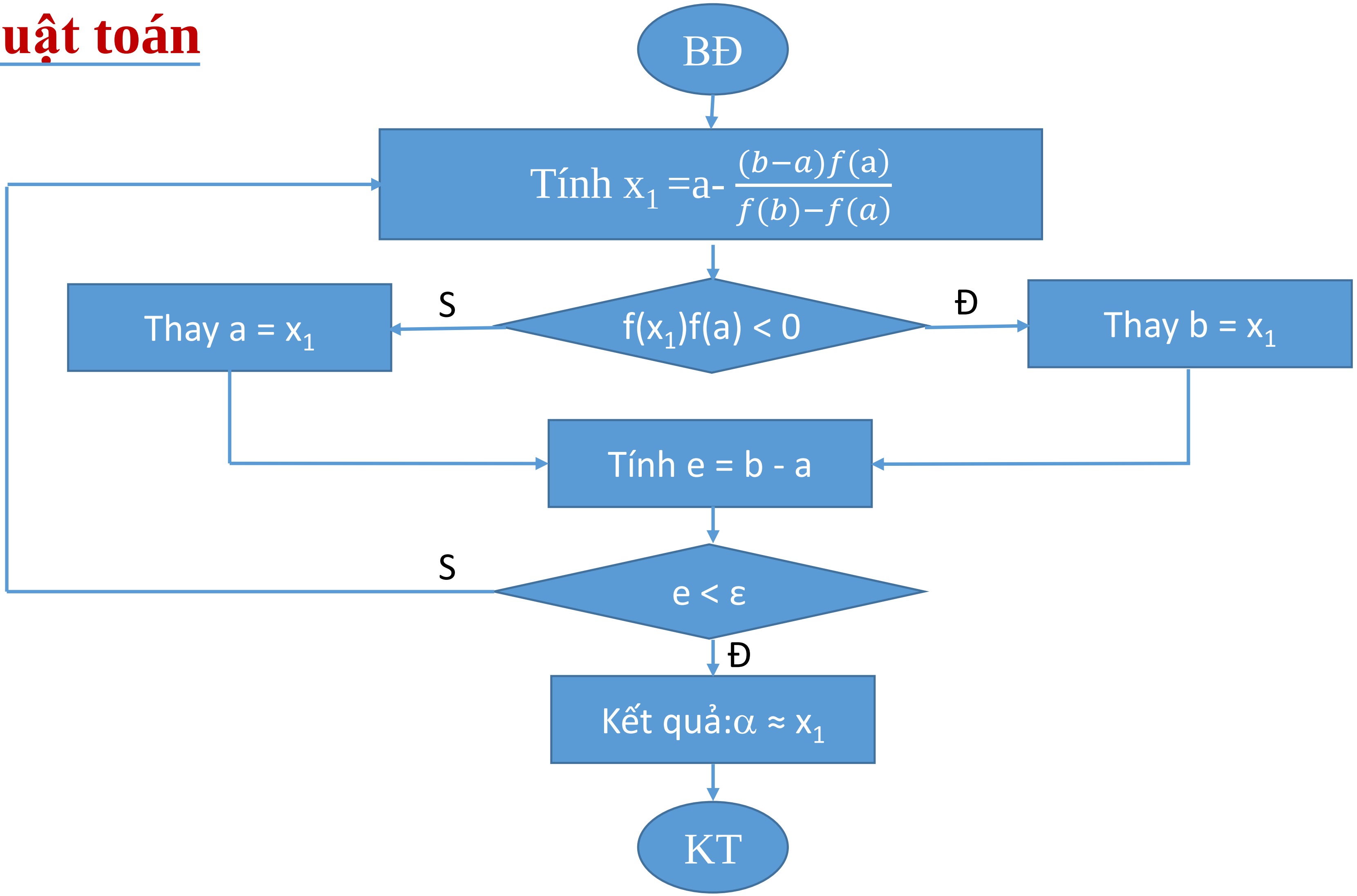
Nếu $f(a)*f(x_1) < 0$, thay $b = x_1$ ta có khoảng nghiệm mới là (a, x_1).

Nếu $f(b)*f(x_1) < 0$, thay $a = x_1$ ta có khoảng nghiệm mới là (x_1, b).

Tính lại x_1 với a hoặc b được cập nhật giá trị mới.

2.4 Phương pháp dây cung

2.4.5 Thuật toán



2.4 Phương pháp dây cung

Ví dụ 2.4.2

Cho hàm số $f(x) = x^4 – 2x^2$.

Tìm xấp xỉ nghiệm của phương trình trên đoạn [-1.8; -1.2] thỏa yêu cầu sai số bé hơn 0.02 bằng phương pháp dây cung.

2.4 Phương pháp dây cung

Ví dụ 2.4.2

Giải: **Bước 1**: Kiểm tra khoảng phân ly nghiệm

- F(x) liên tục trên tập R, vậy nên f(x) liên tục trên [-1.8, -1.2]
- f(-1.8) = -1.8^4 – 2*-1.8^2 = 4.0176

f(-1.2) = -1.2^4 – 2*-1.2^2 = -0.8064

- f'(x) = $4x^3 - 4x$

f'(-1.8) = 4*-1.8^3 -4*-1.8 = -16.128

f'(-1.2) = 4*-1.2^3 -4*-1.2 = -2.112

➢ Kết luận: đoạn [-1.8; -1.2] là đoạn phân ly nghiệm.

2.4 Phương pháp dây cung

Bước 2: Chọn x_0 và d

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)}$$

f'(x) = $4x^3 - 4x$

f''(x) = $12x^2 - 4$

$$|x_n - \alpha| < \frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|}$$

f''(-1.8) = 12*-1.8^2 -4 = 34.88

f''(-1.2) = 12*-1.2^2 -4 = 13.28

Vì f(-1.8) cùng dấu với f'' nên ta chọn d = -1.8 và x_0 = -1.2

$$\Rightarrow x_1 = -1.2 - \frac{f(-1.2)(-1.2 - -1.8)}{f(-1.2) - f(-1.8)}$$

2.4 Phương pháp dây cung

Bước 3: Tìm nghiệm

$$x_1 = -1.2 - \frac{f(-1.2)(-1.2 - -1.8)}{f(-1.2) - f(-1.8)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)}$$

$$x_1 = -1.2 - \frac{-0.8064 \ * 0.6}{-0.8064 - 4.0176}$$

$$|x_n - \alpha| < \frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|}$$

$$x_1 = -1.2 - \frac{-0.48384}{-4.824}$$

$$x_1 = -1.300298507$$

$$\Delta x_1 = \frac{|f(-1.300298507)|}{|f'(-1.300298507)|} = \frac{0.8064}{3.59286} = 0.224445$$

2.4 Phương pháp dây cung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)}$$

Bước 3: Tìm nghiệm

$$x_2 = -1.300298507 - \frac{f(-1.300298507)(-1.300298507 - -1.8)}{f(-1.300298507) - f(-1.8)}$$

$$x_2 = -1.300298507 - \frac{-0.522828231 \ * 0.499701493}{-0.522828231 \ - 4.0176}$$

$$x_2 = -1.300298507 - \frac{-0.261258048}{-4.540428231}$$

$$|x_n - \alpha| < \frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|}$$

$$x_2 = -1.357838905$$

$$\Delta x_2 = \frac{|f(-1.357838905)|}{|f'(-1.357838905)|} = \frac{0.288125607}{4.582578624} = 0.062874122$$

2.5 Phương pháp lặp

2.5.1 Ý tưởng

Với phương trình f(x) = 0, ta biến đổi về phương trình tương đương:

$$\mathbf{x = \varphi(x)}$$

Lấy một giá trị xấp xỉ ban đầu x_0 nào đó, xây dựng các xấp xỉ tiếp theo theo công thức:

$$\mathbf{x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n=1, 2, 3,\ldots)}$$

φ: được gọi là hàm lặp

Ví dụ 2.5.1

Cho phương trình:

$$\mathbf{f(x) = 3x^2 - x + 5}$$

Biến đổi về phương trình tương đương:

$$\mathbf{x = 3x^2 + 5}$$

2.5 Phương pháp lặp

Ví dụ 2.5.2 Cho phương trình:

$$\mathbf{f(x) = x^3 - 10x + 5}$$

Biến đổi về phương trình tương đương:

$$\mathbf{x = x + (x^3 - 10x + 5)}$$

$$\mathbf{x = x^3 - 9x + 5}$$

Ví dụ 2.5.3 Cho phương trình:

$$\mathbf{f(x) = x^2 - x + 5}$$

Biến đổi về phương trình tương đương:

a) $\mathbf{x = x^2 + 5}$

b) $\mathbf{x = (x - 5)^{1/2}}$

c) $\mathbf{x = 1 - 5/x}$ **(đk** $\mathbf{x \neq 0}$**)**

2.5 Phương pháp lặp

2.5.2 Mô tả phương pháp

- Giả sử phương trình f(x) = 0 có khoảng cách ly nghiệm (a,b).
- Biến đổi về phương trình tương đương:

$$\mathbf{x = \varphi(x)} \qquad (2.21)$$

- Chọn x_0, **chúng ta có thể chon x_0 = (a + b)/2**, tính các xấp xỉ tiếp theo theo công thức:

$$\mathbf{x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n=1, 2, 3,\ldots)} \qquad (2.22)$$

- Đánh giá sai số $\Delta_n = |x_n - \alpha|$, đặt: $q = \max\limits_{x \in [a,b]}\{|\varphi'(x)|\}$ (2.23)

và sai số cần tìm:

$$\Delta_n \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \qquad (2.24)$$

2.5 Phương pháp lặp

2.5.3 Điều kiện của phương pháp

- (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình f(x) = 0 và φ(x);
- φ'(x) là hàm số liên tục trong [a, b];
- Mọi x_n tính theo công thức lặp đều thuộc [a, b];
- |φ'(x)| ≤ q <1 (q là hằng số) đối với mọi x ϵ [a, b], x_0 ϵ [a, b] thì dãy các nghiệm đúng $\{x_n\}$, n = 1, 2, 3,…nhận được từ (2.22), hội tụ đến nghiêm α.

Khi sử dụng phương pháp lặp chúng ta sẽ gặp khó khăn trong việc tìm hàm φ(x) vì phải thỏa điều kiện

$$|\varphi'(x)| \le q < 1, \forall x \in [a,b]$$

2.4 Phương pháp lặp

Ví dụ về điều kiện của phương pháp

Xét phương trình

$$x^3 + x - 1000 = 0$$

khoảng cách ly nghiệm [9, 10]

Nếu đưa phương trình về dạng:

$x = 1000 - x^3 = g(x)$

$g'(x) = -3x^2 \Rightarrow g'(9) = -243;\ g'(10) = -300$

$|g'(x)|$ nằm ngoài khoảng cách ly nghiệm.

Chúng ta đưa phương trình về dạng $x = \sqrt[3]{1000 - x} = g(x)$

$$g'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}} \Rightarrow |g'(x)| < 1$$

2.5 Phương pháp lặp

Cách có thể áp dụng để tìm φ(x)

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in [a,b]$ ta đặt $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{M}$ với $M \geq \max\limits_{x\in[a,b]}\{|f'(x)|\}$

- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in [a,b]$ ta đặt $\varphi(x) = x + \dfrac{f(x)}{M}$ với $M \geq \max\limits_{x\in[a,b]}\{|f'(x)|\}$

$\Rightarrow$ Chọn M = max{|$f'(x)$|}

2.5 Phương pháp lặp

Ví dụ 2.5.4

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

$$f(x) \equiv 5x^3 - 20x + 3 = 0$$

biết khoảng cách ly nghiệm là (0,1), độ chính xác yêu cầu là 10^{-4}.

Giải

Bước 1: Tìm phương trình tương đương

$$f'(x) = 15x^2 - 20$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0) = -20 \\ f'(1) = -5 \end{array}\right\} \quad M = \max_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\} = 20 \Rightarrow \varphi(x) = x + \frac{5x^3 - 20x + 3}{20} = \frac{5x^3 + 3}{20}$$

2.5 Phương pháp lặp

Bước 2: Tìm q

$$\varphi'(x) = \frac{\mathbf{15x^2}}{\mathbf{20}}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(0) &= \mathbf{0} \\ \varphi'(1) &= \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{20}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad q = \max_{x\in[0,1]}\{|\varphi'(x)|\} = \frac{15}{20} < 1$$

Bước 3: Tính giá trị nghiệm và đánh giá sai số

Chọn $x_0 = (0 + 1)/2 = 0.5$ Tính: $\mathbf{x_n = \varphi(x_{n-1})}$ **(n=1, 2, 3,…)**

Tính giá trị cho x_1, x_2, …theo hàm lặp $\varphi(x)$

2.5 Phương pháp lặp

Sai số

$\varphi(x)$

x_0	0.5	$q/(1-q)\times(x_n - x_{n-1})$	10^{-4}
x_1	0.18125	0.95625	FALSE
x_2	0.151488586	0.089284241	FALSE
x_3	0.15086912	0.001858399	FALSE
x_4	0.150858502	3.18554E-05	TRUE
x_5	0.15085832	5.43769E-07	TRUE

$\mathbf{x_n = \varphi(x_{n-1})}$ **(n=1, 2, 3,…)**

$$q = \max_{x\in[a,b]}\{|\varphi'(x)|\}$$

$$\Delta_n \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

Chúng ta dừng ở x_4 và nghiệm gần đúng của phương trình đã cho với độ chính xác là 10^{-4} là: 0.1509

2.5 Phương pháp lặp

Ví dụ 2.5.5

Cho phương trình $f(x) = 2x^2 + x - 3$. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình trên đoạn [0.5; 1.2] bằng phương pháp lặp, dừng khi tìm được nghiệm hoặc sai số bé hơn 10^{-4}. Khởi tạo $x_0 = 0.85$.

2.5 Phương pháp lặp

Giải

Bước 1: Kiểm tra khoảng phân ly nghiệm

$f(0.5) = 2*0.5^2 + 0.5 – 3 = -2$

$f(1.2) = 2*1.2^2 + 1.2 – 3 = 1.08$

$f'(x) = 4x + 1$

$f'(0.5) = 4*0.5 + 1 = 3$

$f'(1.2) = 4*1.2 + 1 = 5.8$

Kết luận: đoạn [0.5; 1.2] là đoạn phân ly nghiệm.

2.5 Phương pháp lặp

Giải

Bước 2: Tìm phương trình tương đương

Ta có f' > 0 nên chọn:

$\varphi(x) = x - (2x^2 + x - 3)/5.8$

Bởi vì

$$M >= \max_{x\in[0.5,1.2]}\{|f'(x)|\} \Rightarrow M = 5.8$$

2.5 Phương pháp lặp

Giải

Bước 3: Tìm q và kiểm tra xem hàm φ có thỏa mãn điều kiện hội tụ

$$\varphi'(x) = 1 – (4x + 1)/5.8$$

$$\varphi'(0.5) = 1 – (4*0.5 + 1)/5.8 = 0.482758621$$

$$\varphi'(1.2) = 1 – (4*1.2 + 1)/5.8 = 0$$

$$q = \max\{|\varphi'(0.5)|;|\varphi'(1.2)|\} = 0.482758621$$

$q < 1$ nên hàm φ thỏa điều kiện hội tụ.

2.5 Phương pháp lặp

Giải **Bước 4**: Tìm nghiệm

Chọn $x_0 = 0.85$

Lặp 1: $x_1 = \varphi(x_0) = 0.85 – (2*0.85^2 + 0.85 – 3)/5.8 = 0.971551724$

$\Delta x_1 = (0.482758621/(1-0.482758621))*|0.971551724 - 0.85| = 0.113448276$

Lặp 2: $x_2 = \varphi(x_1) = 0.971551724 – (2*0.971551724^2 + 0.971551724 – 3)/5.8 = 0.995797$

$\Delta x_2 = (0.482758621/(1-0.482758621))*|0.995797 - 0.971551724| = 0.022628924$

2.5 Phương pháp lặp

Giải

Lặp 3: $x_3 = \varphi(x_2)$ = 0.995797 – (2*0.995797 ^2 + 0.995797 – 3)/5.8 = 0.999414

Δx_3 = (0.482758621/(1-0.482758621))*|0.999414 - 0.995797| = 0.003376

Lặp 4: $x_4 = \varphi(x_3)$ = 0.999414 – (2*0.999414^2 + 0.999414 – 3)/5.8 = 0.999919

Δx_4 = (0.482758621/(1-0.482758621))*| 0.999919 - 0.999414| = 0.000471

Lặp 5: $x_5 = \varphi(x_5)$ = 0.999919 – (2*0.999919^2 + 0.999919 – 3)/5.8 = 0.999988825

Δx_5 = (0.482758621/(1-0.482758621))*| 0.999988825 - 0.999919| = 0.00006517

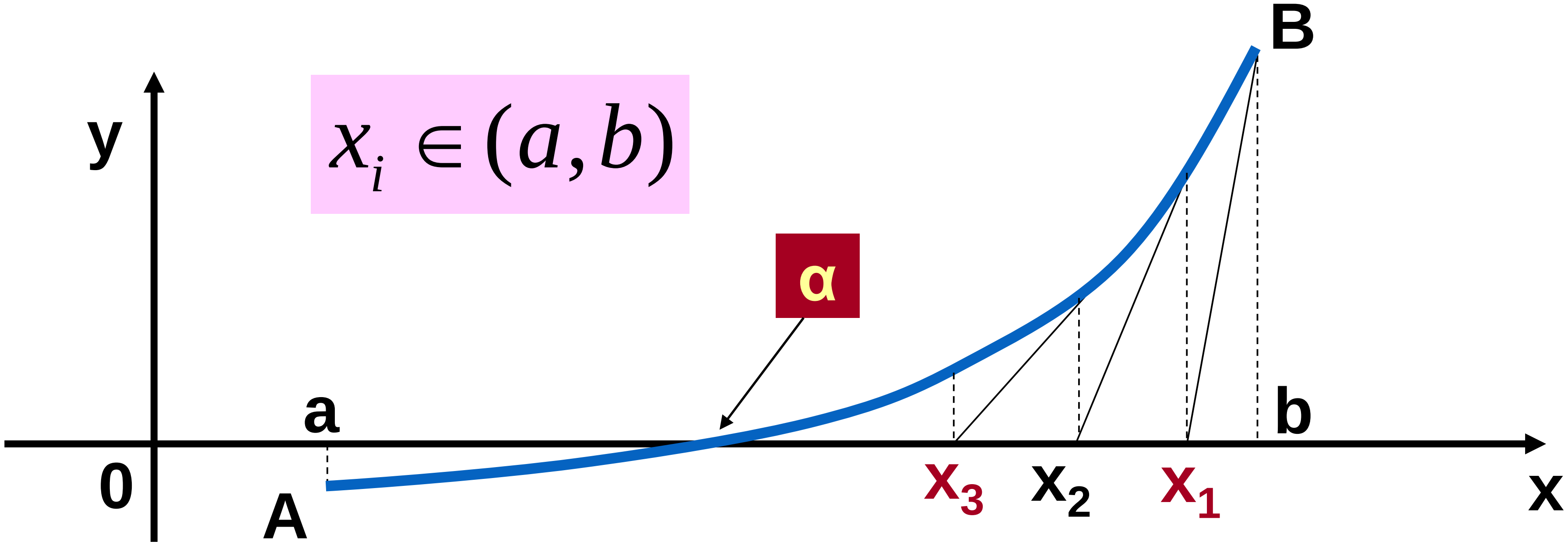
Vậy nghiệm gần đúng là: x = 0.999988825 ± 0.00006517

2.6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

2.6.1 Ý tưởng

Trong khoảng [a, b], chúng ta thay đường cong $y = f(x)$ bằng tiếp tuyến của đường cong tại A hoặc B, nghĩa là xem nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 0$ trùng với hoành độ x_1 giữa tiếp tuyến đường cong tại A hoặc B với trúc Ox.

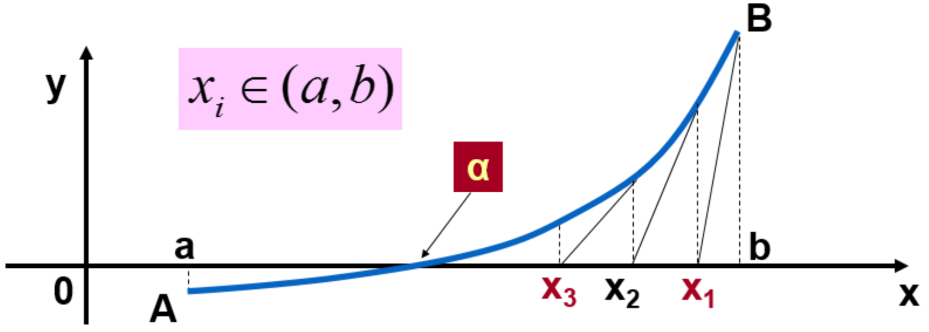
Ví dụ minh họa



2.6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

2.6.2 Mô tả ý tưởng phương pháp

P/t TT đi qua đường thẳng AB → dạng: y = f(x) =ax+b



Lần 1: 1.1- Chọn miền nghiệm ban (MN) đầu (a, b)

1.2- Từ điểm B trên đồ thị vẽ tiếp tuyến,
cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x_1 \to \alpha$

Lần 2: 2.1-Chọn MN mới: $\alpha \in (x_1, a) \subset (a, b)$

2.2 Tiếp tục vẽ tiếp tuyến $x_2 \to \alpha$

….. Lặp lại liên tục nhiều lần

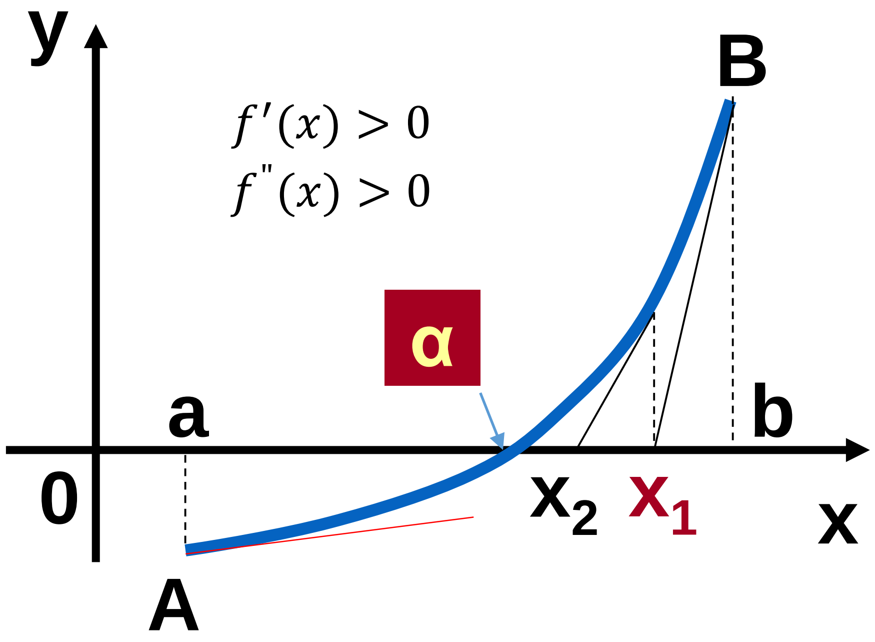
Lần n: Dừng ở bước n ta thu được nghiệm xấp xỉ $x_n \to \alpha \left(x_n \approx \alpha\right)$

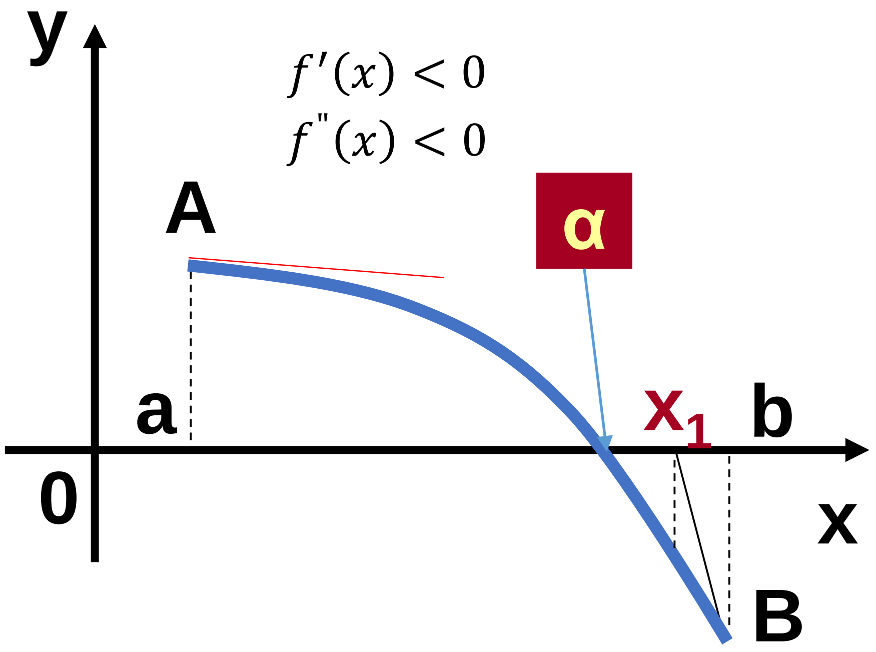
2.6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

2.6.3 Nội dung phương pháp

Trường hợp 1:

$$f'(x).f''(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0; f''(x) > 0 \\ f'(x) < 0; f''(x) < 0 \end{cases}$$





2.6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

2.6.3 Nội dung phương pháp

Trường hợp 1:

Phương tình tiếp tuyến với đường cong y = f(x) tại điểm B(b,f(b)) có dạng:

$$y - f(b) = f'(b)(x - b) \tag{2.25}$$

x_1 là hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành. Suy ra x_1 là nghiệm của phương trình:

$$0 - f(b) = f'(b)(x_1 - b)$$

$$\Rightarrow x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

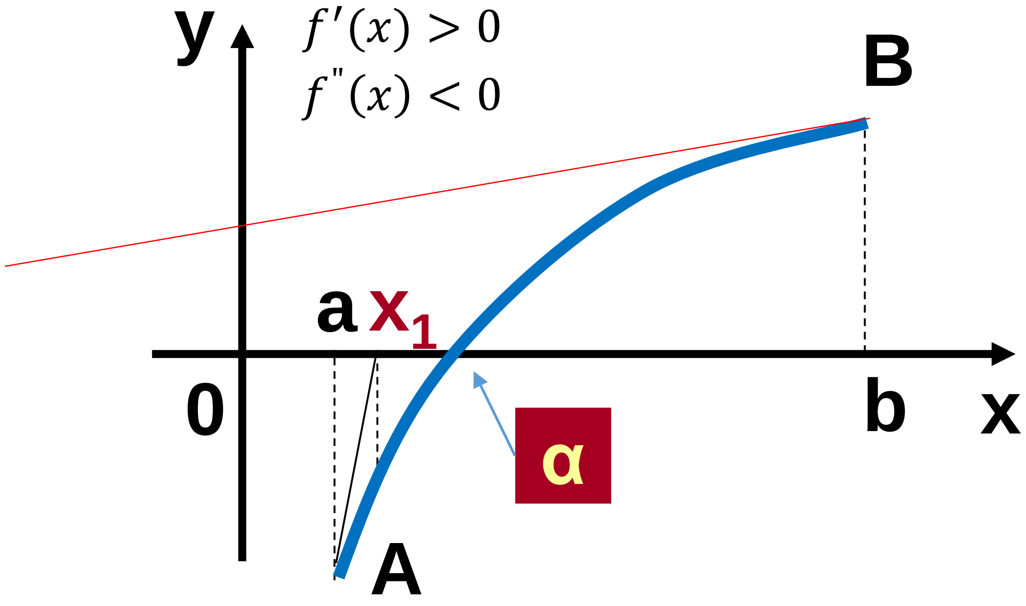
$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

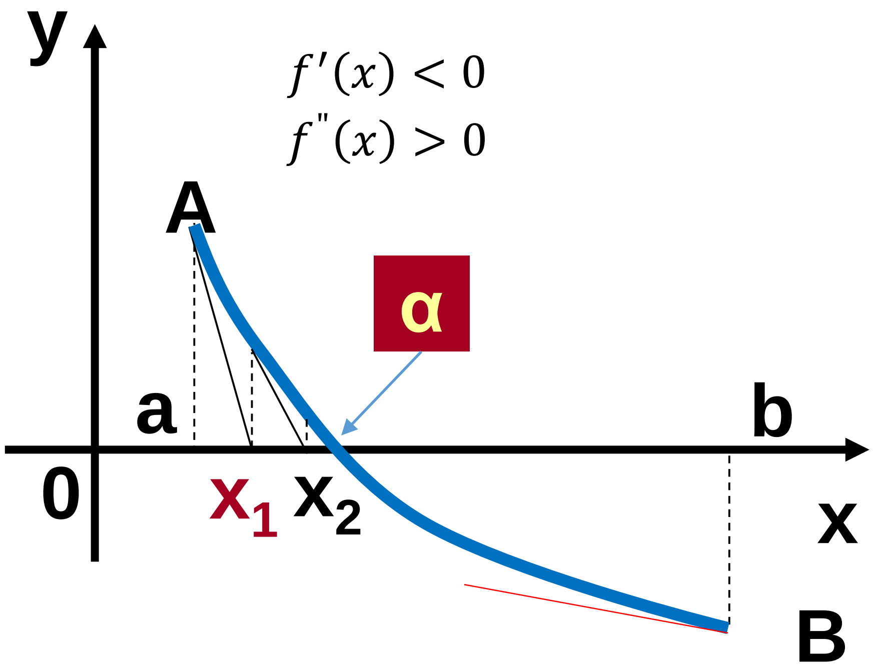
2.6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

2.6.3 Nội dung phương pháp

Trường hợp 2:

$$f'(x).f''(x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0; f''(x) < 0 \\ f'(x) < 0; f''(x) > 0 \end{cases}$$





2.6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

2.6.3 Nội dung phương pháp

Trường hợp 2:

Phương tình tiếp tuyến với đường cong y = f(x) tại điểm A(a,f(a)) có dạng:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \tag{2.26}$$

x_1 là hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành. Suy ra x_1 là nghiệm của phương trình:

$$0 - f(a) = f'(a)(x_1 - a)$$

$$\Rightarrow x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

2.6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

2.6.3 Nội dung phương pháp

Trường hợp tổng quát

$$x_{\mathrm{n}} = x_{\mathrm{n}-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \tag{2.27}$$

với n = 1, 2, …, và :

- x_0 = b nếu f(b) và f''(x) cùng dấu;
- x_0 = a nếu f(a) và f''(x) cùng dấu.

2.6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

Ví dụ 2.6.1

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

$$f(x) \equiv 5x^3 - 20x + 3 = 0$$

biết khoảng cách ly nghiệm là (0,1).

Giải

Bước 1: Tính đạo hàm để xác định x_0

$$f'(x) = 15x^2 - 20 \qquad f'(0) = -20; f'(1) = -5$$

$$f''(x) = 30x \qquad f''(0) = 0; f''(1) = 30$$

➡ f(0) = 3, cùng dấu với f''(x) nên chọn $x_0 = 0$.

2.6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

Bước 2: Tìm nghiệm gần đúng của phương trình

Theo công thức (2.27) ta có:

$$x_1 = 0 - \frac{3}{-20} = \frac{3}{20}$$

Áp dụng công thức (2.27) một lần nữa ta có:

$$f(x_1) = f\left(\frac{3}{20}\right) = 5\left(\frac{3}{20}\right)^3 - 20\left(\frac{3}{20}\right) + 3 = 0.016875$$

$$f'(x_1) = f'\left(\frac{3}{20}\right) = 15\left(\frac{3}{20}\right)^2 - 20 = -19.6625$$

$$\boxed{x_2 = \frac{3}{20} - \frac{0.016875}{-19.6625} = 0.150858233}$$

2.6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

2.6.4 Đánh giá sai số

Ước lượng sai số : dùng công thức tổng quát

$$|x_n - \overline{x}| \le \frac{|f(x_n)|}{m}$$

trong đó: $0 < m \le |f'(x_n)|$

$$\Rightarrow \quad |x_n - \overline{x}| \le \frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|}$$

2.6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

Ưu/nhược điểm

- **Luôn cho nghiệm gần đúng;**

- **Giải thuật đơn giản;**

- **Tốc độ hội tụ nhanh;**

- **Để tính x_n, ta phải tính giá trị của hàm f và giá trị của đạo hàm f' tại điểm x_{n-1}.**

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Bước 1:

Xác định các khoảng cách ly nghiệm. Nếu khoảng cách ly nghiệm được cho trước thì bước này được bỏ qua.

Bước 2:

Thực hiện tìm nghiệm trên các khoảng cách ly nghiệm. Kết quả tính được có thể thể hiện các bước lặp dưới dạng bảng sau:

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Dùng cho phương pháp chia đôi ⇨

n	a_n	b_n	x_n	ε_n
0	a_0 – **(Dấu $f(a_0)$)**	b_0 + **(Dấu $f(b_0)$)**	$(a_0 + b_0)/2$ **Dấu ?**	$(b_0 - a_0)/2$

Dùng cho các phương pháp còn lại ⇨

n	x_n	ε_n
0		

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Phương pháp chia đôi

Gọi m là điểm giữa a và b: **m = (a + b)/2**

Có 2 trường hợp:

1. Nếu **f(m) = 0**, khi đó m là nghiệm cần tìm => dừng thuật toán.

2. Nếu **f(m) ≠ 0**, khi đó ta có:

   + Hoặc **f(a)×f(m) < 0** ta chọn m là b mới: **b = m**

   + Hoặc **f(m)×f(b) < 0** ta chọn m là a mới: **a = m**

   Và chúng ta lặp lại cho [a, b] mới.

Quá trình lặp dừng lại khi |b – a|/2 < ε với ε độ lệch cho trước và ta chọn m là nghiệm gần đúng.

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Phương pháp dây cung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)}$$

n = 0,1,2, …

- d = b nếu f(b) cùng dấu với f''(x); x_0 = a;
- d = a nếu f(a) cùng dấu với f''(x); x_0 = b;

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Phương pháp lặp

- Biến đổi về phương trình tương đương:

$$\mathbf{x = \varphi(x)}$$

- Chọn x_0, **chúng ta có thể chon $x_0 = (a + b)/2$**, tính các xấp xỉ tiếp theo theo công thức:

$$\mathbf{x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n=1, 2, 3, \ldots)}$$

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Phương pháp tiếp tuyến

$$x_{\mathrm{n}} = x_{\mathrm{n}-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

với n = 1, 2, …, và :

- x_0 = b nếu f(b) và f”(x) cùng dấu;
- x_0 = a nếu f(a) và f”(x) cùng dấu.

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Bước 3: **Tính sai số:**

- Phương pháp chia đôi: $$\left|\overline{x} - x_n\right| \le \frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

- Dùng công thức tổng quát cho các phương pháp **dây cung** và **tiếp tuyến**:

$$\left|x_n - \overline{x}\right| \le \frac{\left|f\left(x_n\right)\right|}{m}$$

trong đó: $0 < m \le |f'(x_n)|$

- Phương pháp lặp: $$|x_n - \bar{x}| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

trong đó: $q = \max\limits_{x\in[a,b]}\{|\varphi'(x)|\}$

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Ví dụ 1: Áp dụng phương pháp chia đôi cho phương trình:

$$e^{-x} - \sin x = 0 \text{ trên } [0, 1] \text{ với sai số } \varepsilon = 0.01$$

n	a_n	b_n	x_n	ε_n
0	0 +	1 –	0.5 +	0.5
1	0.5 +	1 –	0.75 –	0.25
2	0.5 +	0.75 –	0.625 –	0.125
3	0.5 +	0.625 –	0.5625 +	0.0625
4	0.5625 +	0.59375 –	0.578125 +	0.015625
5	0.578125 +	0.59375 –	0.5859375 +	0.0078125

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Ví dụ 2: Áp dụng phương pháp lặp cho phương trình:

x – cos$x$ = 0 trên [0, 1] với sai số $\varepsilon = 10^{-5}$

n	x_n	ε_n
0	0	
1	1	5.6667
2	0.5403023059	2.6050
3	0.8575332158	1.7978

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Ví dụ 3: Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

$x - \cos x = 0$ với sai số tuyệt đối $\varepsilon = 10^{-5}$

Bước 1: Xác định các khoảng cách ly nghiệm.

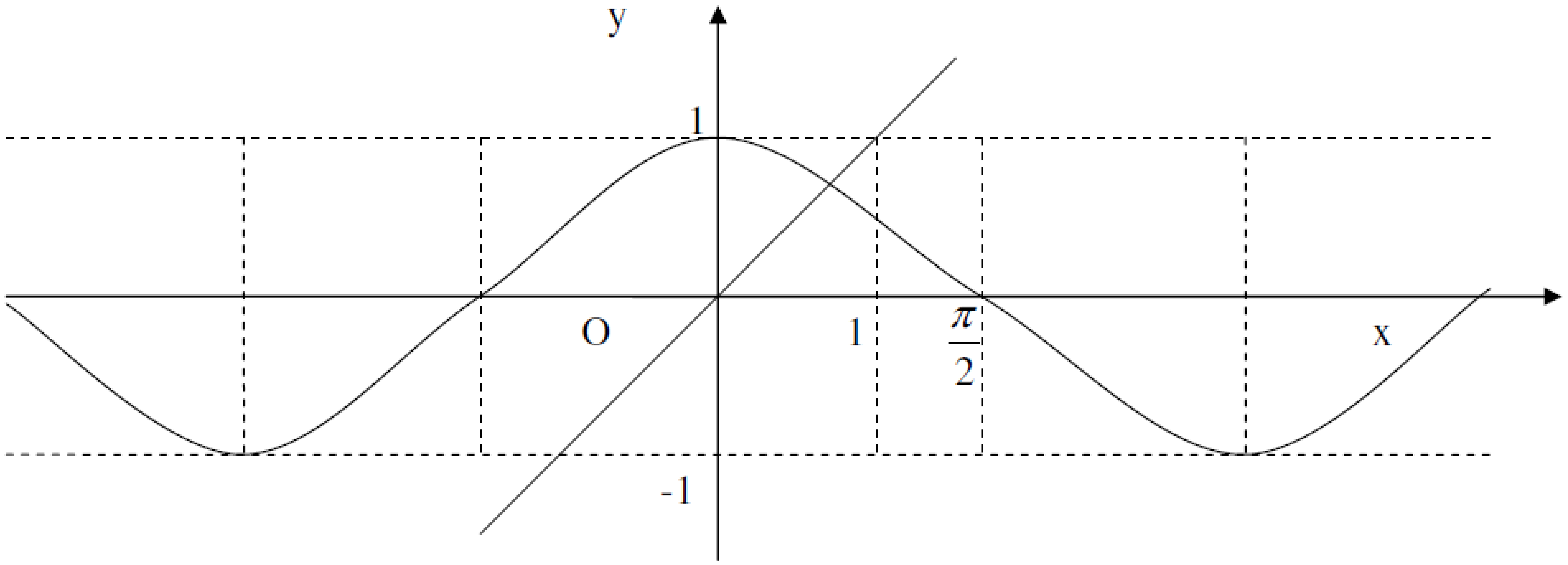
- Vẽ đồ thị để tìm khoảng cách ly nghiệm

Đưa pt về dạng: x = cosx, sau đó vẽ hai đồ thị $y_1(x) = x$ và $y_2(x) = \cos x$ trên cùng một hệ tọa độ. Giao của 2 đồ thị là nghiệm của là nghiệm của pt: x – cosx = 0

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Bước 1: Xác định các khoảng cách ly nghiệm.

- Vẽ đồ thị để tìm khoảng cách ly nghiệm



Khoảng cách ly nghiệm [0, 1]

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Bước 1: Xác định các khoảng cách ly nghiệm.

- Chứng minh các khoảng tìm được là khoảng cách ly nghiệm

$f(0) = 0 – \cos(0) = -1 < 0$

$f(1) = 1 – \cos(1) = 1 - 0.540302306 > 0$

$f'(x) = 1 + \sin x$

$f'(0) = 1 > 0$

$f'(1) = 1 + \sin(1) = 1 + 0.841470985 > 0$

[0, 1] là khoảng cách ly nghiệm

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Ví dụ 4: Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

$3^x + 2x – 4 = 0$ với sai số tuyệt đối $\varepsilon = 10^{-2}$

Bước 1: Xác định các khoảng cách ly nghiệm.

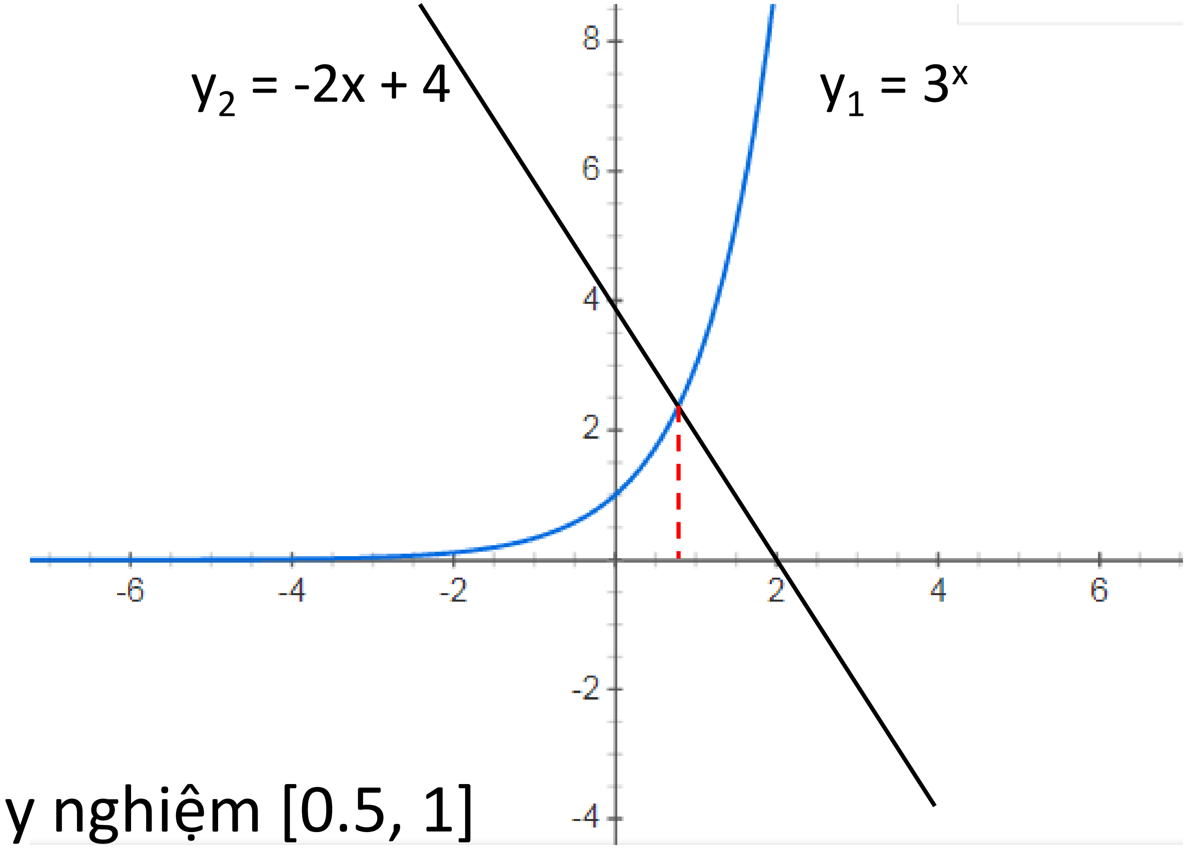
- Vẽ đồ thị để tìm khoảng cách ly nghiệm

Đưa pt về dạng: $3^x = -2x + 4$, sau đó vẽ hai đồ thị $y_1(x) = 3^x$ và $y_2(x) = -2x + 4$ trên cùng một hệ tọa độ. Giao của 2 đồ thị là nghiệm của là nghiệm của phương trình: $3^x + 2x – 4 = 0$

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Bước 1: Xác định các khoảng cách ly nghiệm.

- Vẽ đồ thị để tìm khoảng cách ly nghiệm



Khoảng cách ly nghiệm [0.5, 1]

2.7 Các bước chung tìm nghiệm của một PT

Bước 1: Xác định các khoảng cách ly nghiệm.

- Chứng minh các khoảng tìm được là khoảng cách ly nghiệm

$f(0.5) = 3^{0.5} + 2*0.5 - 4 = -1.267949192 < 0$

$f(1) = 3^{1} + 2*1 – 4 = 1 > 0$

$f'(x) = 3^{x}\ln 3 + 2$

$f'(0.5) = 3.902852302 > 0$

$f'(1) = 3\ln(3) + 2 > 0$

→ **[0.5, 1] là khoảng cách ly nghiệm**

Bài tập

Bài 1: Tìm nghiệm của phương trình theo 4 phương pháp (chia đôi, dây cung, lặp và tiếp tuyên) trong khoảng cách ly nghiệm: [9, 10] với sai số tuyệt đối 10^{-5}

$$f(x) = x^3 + x - 1000 = 0$$

Bài 2: Tìm nghiệm của phương trình theo 4 phương pháp (chia đôi, dây cung, lặp và tiếp tuyên) trong khoảng cách ly nghiệm: [0, 1] với sai số tuyệt đối 10^{-5}

$$f(x) = \sin x - e^{-x} = 0$$

Bài 3: Tìm nghiệm gần đúng của phương trình sau với sai số tuyệt đối không quá 10^{-5}

$$x^2 - \sin \pi x = 0$$