Phép Nội Suy và Xấp Xỉ Hàm Số

Phương pháp tính (Trường Đại học Bách khoa Hà Nội)

Phép Nội Suy và Xấp Xỉ Hàm Số

§1. Bài toán Nội suy

Bằng cách nào đó ta thu được bảng số $y_i = f(x_i),\ i = \overline{0,n}\ ;\ x_i \in [a,b]$.

Việc phục hồi hàm số f(x) từ các giá trị trên gọi là phép nội suy.

Ta chọn đa thức để nội suy hàm f(x) vì đa thức là loại hàm đơn giản, luôn có đạo hàm, nguyên hàm và việc tính giá trị cũng đơn giản.

Xây dựng đa thức $P_n(x)$ bậc $\le n$ sao cho $P_n(x_i) = y_i$

Đa thức $P_n(x)$ gọi là đa thức nội suy của hàm $f(x)$. Đa thức này là duy nhất.

Với x cố định, $x \ne x_i$ thì $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ được gọi là sai số tại điểm x.

Người ta đã chứng minh được rằng nếu hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm liên tục đến cấp n+1 thì

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\quad \xi \in [a,b],\ \omega_{n+1}(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)$$

Sau đây là một số công thức tìm đa thức nội suy thường được sử dụng trong thực tế

§2. Đa thức nội suy Lagrange

Giả sử đa thức $P_n(x)$ bậc n sinh ra từ bảng số

$$y_i = f(x_i),\ i = \overline{0,n}\ ;\ x_i \in [a,b]$$

Đa thức cơ sở:

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)},\ j = \overline{0,n}$$

Đa thức nội suy $P_n(x)$ tính bằng:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) y_j$$

Sai số của đa thức nội suy Lagrange:

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

với $M \ge \left|f^{(n+1)}(x)\right|\quad \forall x \in [a,b] \supset x_i\quad ,\ \omega_{n+1}(x) = (x-x_0)\ldots(x-x_n)$

§2. Đa thức nội suy Newton

- ❖ Đa thức nội suy Newton với mốc bất kì
  - Khái niệm về tỉ hiệu:

    Tỉ hiệu cấp 1 của y tại x_i là: $y[x_i,x_j] = \dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$

    Tỉ hiệu cấp 2 của y tại x_i, x_j, x_k là: $y[x_i,x_j,x_k] = \dfrac{y[x_i,x_j] - y[x_j,x_k]}{x_i - x_k}$

  - Đa thức Newton tiến xuất phát từ nút x_0

    $$P_n(x) = y_0 + (x-x_0).y[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1).y[x_0,x_1,x_2] + \ldots$$
    $$+(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}).y[x_0,\ldots,x_n] \qquad (2.1)$$

  - Đa thức Newton lùi xuất phát từ nút x_n

$$P_n(x) = y_n + (x - x_n).y[x_n, x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1}).y[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \ldots$$
$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1).y[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0] \qquad (2.2)$$

❖ Đa thức nội suy Newton với mốc cách đều một đoạn h

- Khái niệm về sai phân:

Ta gọi $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ là sai phân tiến cấp 1

Sai phân tiến của sai phân tiến cấp n-1 là sai phân tiến cấp n, kí hiệu

$$\Delta^n y_0 = \Delta(\Delta^{n-1} y_0) = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0$$

Ta gọi $\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$ là sai phân lùi cấp 1

Sai phân lùi của sai phân lùi cấp n-1 là sai phân lùi cấp n, kí hiệu

$$\nabla^n y_1 = \nabla(\nabla^{n-1} y_1) = \nabla^{n-1} y_1 - \nabla^{n-1} y_0$$

Liên hệ giữa sai phân tiến và sai phân lùi:

$$\Delta^k y_i = \nabla^k y_{i+k}$$

Quá trình tính sai phân tiến được mô tả trong bảng sau:

…	…				
x_{i-2}	y_{i-2}				
		Δy_{i-2}			
x_{i-1}	y_{i-1}		$\Delta^2 y_{i-2}$		
		Δy_{i-1}		$\Delta^3 y_{i-2}$	
x_i	y_i		$\Delta^2 y_{i-1}$		$\Delta^4 y_{i-2}$
		Δy_i		$\Delta^3 y_{i-1}$	
x_{i+1}	y_{i+1}		$\Delta^2 y_i$		
		Δy_{i+1}			
x_{i+2}	y_{i+2}				
…	…				

Dễ thấy $$y[x_0, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} \qquad (2.3)$$

$$y[x_n, \ldots, x_k] = \frac{\nabla^{n-k} y_n}{(n-k)! h^{n-k}} \qquad (2.4)$$

- Đa thức Newton tiến có mốc cách đều

Đặt $x = x_0 + ht$, và thế công thức (2.3) vào (2.1) ta được:

$$P_n(x)\Big|_{x=x_0+ht} = y_0 + t.\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}.\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}.\Delta^n y_0$$

- Đa thức Newton lùi có mốc cách đều

Đặt $x = x_n + ht$, và thế công thức (2.4) vào (2.1) ta được:

$$P_n(x)\Big|_{x=x_n+ht} = y_n + t.\nabla y_n + \frac{t(t+1)}{2!}.\nabla^2 y_n + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}.\nabla^n y_n$$

§2. Phương pháp bình phương tối thiểu

Ở trên, ta đã xấp xỉ hàm $f(x)$ bằng đa thức nội suy xuất phát từ bảng số $y_i = f(x_i)$.

Nhưng thực tế trong nhiều trường hợp, các giá trị y_i đó không có mà chỉ có các giá trị gần đúng. Trong trường hợp này, việc xấp xỉ hàm $f(x)$ bằng đa thức nội suy không còn phù hợp nữa, ta cần xấp xỉ hàm trong dạng khác thiết thực hơn.

Bài toán:

Từ bảng số $y_i \approx f(x_i)$, hãy tìm hàm $\varphi(x) = P_m(x)$ sao cho

$$\phi(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P_m)^2$$ *đạt min*

Phương pháp tính:

Giả sử P_m là đa thức tuyến tính với hệ hàm $\{\varphi_k\} = \{\varphi_0(x), \ldots, \varphi_m(x)\}$

ví dụ $P = a + bx + cx^2$ tuyến tính với hệ hàm $\{1, x, x^2\}$

$\phi(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P_m)^2$ đạt min dẫn tới: $\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial a_1} = 0 \\ \ldots \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial a_m} = 0 \end{cases}$

hệ này tương đương:

$$\begin{cases} a_0.\sum_{i=0}^{n} \varphi_0.\varphi_0(x_i) + a_1.\sum_{i=0}^{n} \varphi_0.\varphi_1(x_i) + \ldots + a_m.\sum_{i=0}^{n} \varphi_0.\varphi_m(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i).y_i \\ a_0.\sum_{i=0}^{n} \varphi_1.\varphi_0(x_i) + a_1.\sum_{i=0}^{n} \varphi_1.\varphi_1(x_i) + \ldots + a_m.\sum_{i=0}^{n} \varphi_1.\varphi_m(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i).y_i \\ \ldots \\ a_0.\sum_{i=0}^{n} \varphi_m.\varphi_0(x_i) + a_1.\sum_{i=0}^{n} \varphi_m.\varphi_1(x_i) + \ldots + a_m.\sum_{i=0}^{n} \varphi_m.\varphi_m(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_m(x_i).y_i \end{cases}$$

Sai Số:

(1): $\sigma_m = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \overline{\varphi}(x_i) \right]^2 \right)^{1/2}$

(2): $\sigma_m = \left[\frac{1}{n} \left(\langle y, y \rangle - \sum_{k=0}^{m} \overline{a_k} \langle \varphi_k, y \rangle \right) \right]^{1/2}$

Áp dụng tìm hàm thực nghiệm:

1. Hàm thực nghiệm dạng $y = a e^{bx}$
   Lấy logarit tự nhiên 2 vế
   $$\ln y = \ln a + bx$$
   Đặt $Y = \ln y,\ A = \ln a,\ \text{B=b},\ X = x$
   Suy ra $Y = A + BX$
   Tìm A và B xuất phát từ bảng số $Y_i \approx \ln y_i = \ln(f(x_i)) = \ln f(X_i) = F(X_i)$
   Cách tìm A và B chính là dạng 1 đã xét.
2. Hàm thực nghiệm dạng $y = ax^b$
   Tương tự như trên, lấy logarit tự nhiên 2 vế thu được
   $$\ln y = \ln a + b \ln x$$
   Đổi biến $Y = \ln y,\ A = \ln a,\ B = b,\ X = \ln x$

ta thu được bảng số $Y_i = \ln y_i$, $X_i = \ln x_i$

Tìm hàm thực nghiệm dưới dạng: $Y = A + BX$