Chương 3 - Nội suy - Phương pháp tính chương 3 - Ngô Thu Lương

Phương pháp tính (Trường Đại học Bách khoa Hà Nội)

Chương III : NỘI SUY

1) Nội suy đa thức

2) Nội suy Spline bậc 3

3) Phương pháp bình phương tối thiểu

1.1) Nội suy đa thức theo Lagrange

a) Nội dung : Biết các giá trị $y_i = f(x_i)$ của hàm $y = f(x)$ tại các điểm x_i theo bảng

x	x_0	x_1	x_2	..	..	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	y_2	..	..	y_{n-1}	y_n

Tìm hàm lại hàm $f(x)$

Lời giải : **Vô số hàm**

Tìm $f(x) = P(x)$ chỉ là **đa thức bậc n**

thỏa $P(x_i) = y_i$

Lời giải là **duy nhất**

Các bước tìm đa thức $P(x)$

Bước 1 : Thiết lập **đa thức cơ sở Lagrange**

$$L_i(x) = \prod_{k=0,\, k\neq i}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

Ví dụ : $L_0(x) =$

$$= \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_i)..(x-x_n)}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_{i-1})(x_0-x_i)..(x_0-x_n)}$$

Bước 2 : **Công thức tính P(x)**

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) =$$

$$y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x)$$

b) Sai số :

$$|f(x) - P(x)| \le$$

$$\le \frac{M^{(n+1)}}{(n+1)!} \left| (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \right|$$

c) Nhận xét :

*) Số mốc nội suy càng lớn thì sai số càng nhỏ , tuy nhiên bậc của đa thức sẽ lớn, tính toán sẽ dài .

*)Sai số phụ thuộc vào $M^{(n+1)}$, thực tế không biết vì hàm $f(x)$ chưa biết

*)Đa thức nội suy $P(x)$ là duy nhất

Ví dụ :

Tìm đa thức nội suy P(x) từ bảng số liệu

$$x_0 = -1\,,\ x_1 = 0\,,\ x_2 = 1$$

$$y_0 = \frac{1}{3}\,,\ y_1 = 1\,,\ y_2 = 3$$

Tính gần đúng giá trị của bảng tại $x = 0.7$

Giải : Ta tìm các đa thức Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{[x-(-1)](x-1)}{[0-(-1)](0-1)} = \frac{x^2 - 1}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{[x-(-1)](x-0)}{[1-(-1)](1-0)} = \frac{x^2 + x}{2}$$

$$P(x) = \frac{1}{3}L_0(x) + 1L_1(x) + 3L_2(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{3}$$

$$P(0.7) = \frac{2.(0.7)^2 + 4.(0.7) + 3}{3} = 2.26$$

d) Tỷ sai phân

Tỷ sai phân bậc 0 của f tại x_0 :

$$f[x_0] = f(x_0)$$

Tỷ sai phân bậc 1 của f tại x_0, x_1 :

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

Tỷ sai phân bậc 2 của f tại x_0, x_1, x_2

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Tương tự cho tỷ sai phân bậc cao hơn

e) Bảng tỷ sai phân

x	y	Tỷs/p bậc1	Tỷs/p bậc 2
-1	1/3		
		2/3	
0	1		2/3
		2	
1	3		

f) Nội suy Newton tiến theo bảng tỷ sai phân

Đa thức $P(x)$ có thể tìm dưới dạng

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ..$$
$$.. + a_n(x - x_0)(x - x_1)..(x - x_{n-1})$$

$$a_0 = f[x_0]$$
$$a_1 = f[x_0, x_1]$$
$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$
$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, .., x_k]$$
$$a_n = f[x_0, x_1, x_2, .., x_n]$$

x	y	Tỷs/p bậc1	Tỷs/p bậc 2
-1	1/3		
		2/3	
0	1		2/3
		2	
1	3		

$$P(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x+1) + \frac{2}{3}(x+1)(x-0) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

g) Nội suy Newton lùi

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + ..$$
$$... + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})..(x - x_1)$$

$$a_0 = f[x_n]$$
$$a_1 = f[x_n, x_{n-1}].$$
$$a_2 = f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$$
$$a_k = f[x_n, x_{n-1}, ... x_{n-k+1}, x_{n-k}]$$
$$a_n = f[x_n, x_{n-1}, .. x_3, x_2, x_1, x_0]$$

-1	1/3		
		2/3	
0	1		2/3
		2	
1	3		

$$P(x) = 3 + 2(x-1) + \frac{2}{3}(x-1)(x-0)$$

$$= \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

2) Nội suy Spline bậc 3

a) Nội dung : Cho bảng số liệu

x	x_0	x_1	x_2	..	..	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	y_2	..	..	y_{n-1}	y_n

Tìm **một hàm** $S(x)$ thỏa các điều kiện :

$S(x)$: Đi qua các điểm đã cho trong bảng

$S(x)$ là **đa thức bậc 3 trên mỗi đoạn nhỏ** $[x_j, x_{j+1}]$

(các đa thức này có các hệ số khác nhau)

Gọi $S_j(x)$ là đa thức trên mỗi đoạn nhỏ $[x_j, x_{j+1}]$

$S_j(x)$ thỏa các điều kiện :

a) $S_j(x_j) = y_j$

$S_j(x_{j+1}) = y_{j+1}$

b) $S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1})$

c) $S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1})$

d) $S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n)$

điều kiện biên tự nhiên

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

$$a_j = y_j$$

$$d_j = \frac{(c_{j+1} - c_j)}{3h_j}$$

$$b_j = \frac{(a_{j+1} - a_j)}{h_j} - \frac{h_j(c_{j+1} + 2c_j)}{3}$$

Để tìm c_j ta giải từ hệ $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & . & . & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \\ . \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ . \\ . \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ví dụ : Nội suy Spline bậc 3 của bảng

$x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$

$y_0 = 0 \quad y_1 = 1 \quad y_2 = 4 \quad y_3 = 0$

$a_0 = y_0 = 0 \quad a_1 = y_1 = 1$

$a_2 = y_2 = 4 \quad a_3 = y_3 = 0$

Các hệ số c_i tính theo hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$b_0 = 0 \quad b_1 = 3 \quad b_2 = 0$

$d_0 = 1 \quad d_1 = -3 \quad d_2 = 2$

Ta có hàm : $S(x) =$

$$\begin{cases} 1(x-0)^3 & 0 \le x \le 1 \\ 1+3(x-1)+3(x-1)^2-3(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \\ 4 \quad -6(x-2)^2+2(x-2)^3 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

Spline với điều kiện biên ràng buộc

$d)\quad S_0^{/}(x_0) = f'(x_0),\ S_{n-1}^{/}(x_n) = f'(x_n)$

trong đó $f'(x_0),\quad f'(x_n)$ là các đại lượng cho trước

$$A=\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & . & . & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0) \\ \dfrac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \dfrac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ .. \\ \dfrac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \dfrac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(x_n) - \dfrac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Ví dụ :

Hàm $S(x)$ Spline bậc 3 nội suy bảng số liệu

x	3	5
y	2.5	6

với điều kiện biên ràng buộc :

$$S'(3) = f'(x_0) = 2 \quad ; \quad S'(5) = f'(x_n) = 0.25$$

Tính giá trị của hàm $S(x)$ tại điểm **$x = 4$**

3) Phương pháp bình phương tối thiểu

Nội dung : Từ bảng số liệu

x	x_1	x_2	..	..	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	..	..	y_{n-1}	y_n

tìm **những hàm số có dạng biết trước**

sao cho tổng bình phương độ lệch so với

bảng số liệu đã cho là nhỏ nhất

$$y = af(x) + bg(x)$$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} f^2(x_i) + b.\sum_{i=1}^{n} g(x_i)f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i.f(x_i) \\ a.\sum_{i=1}^{n} g(x_i)f(x_i) + b\sum_{i=1}^{n} g^2(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i.g(x_i) \end{cases}$$

$$y = a + b\,x$$

$$\begin{cases} a.n + b.\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a.\sum_{i=1}^{n} x_i + b.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i.x_i \end{cases}$$

Ví dụ : Cho bảng số liệu sau

x	0.5	1.0	1.5	2.0
y	2.01	2.98	4.05	4.96

tìm công thức thực nghiệm dạng $y = a + bx$, theo phương pháp bình phương tối thiểu

$$y = a + bx = 1.02 + 1.984\,x$$

Ví dụ : Cho bảng số liệu sau

x	1.0	2.0	3.0	4.0
y	2.01	4.98	10.05	16.96

tìm công thức thực nghiệm dạng $y = a + bx^2$, theo phương pháp bình phương tối thiểu

Cho bảng số liệu

x	0	1	2	3	4
y	2.0	2.2	3.5	4.2	5.3

Tìm hàm $$y = a + \frac{b}{\sqrt{1+x}}$$

theo phương pháp bình phương tối thiểu của bảng trên.