1 Tính gần đúng đạo hàm

Bài toán

Cho bảng giá trị

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Tính gần đúng giá trị $f'(x)$ với $x \in [x_0, x_n]$

Ý tưởng:

$f'(x) \approx P'(x)$ trong đó $P(x)$ là Đa thức nội suy sinh ra từ bảng giá trị.
Giả sử trong bảng giá trị các mốc nội suy cách đều nhau một khoảng h.

$$P\left(t\right) = y_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta^j y_0}{j!} t\left(t-1\right)\dots\left(t-j+1\right)$$

Khi đó

$$\left.\frac{dP\left(x\right)}{dx}\right|_{x=\overline{x}} = \left.\frac{dP\left(x\right)}{dt}.\frac{dt}{dx}\right|_{t=\overline{t}=\frac{\overline{x}-x_0}{h}} = \frac{1}{h}P'\left(\overline{t}\right)$$

Ví dụ

Cho

x	50	55	60
y	3,9120	4,0073	4,0943

. Tính $f'(51)$

Giải:

$P\left(t\right) = y_0 + \Delta y_0 t + \dfrac{\Delta^2 y_0}{2!} t\left(t-1\right)$ với $t = \dfrac{x-50}{5}$.

Có:

x	y	Δ	Δ^2
50	3,9120	0,0953	-8,3.10^{-3}
55	4,0073	0,0870	
60	4,0943		

$P\left(t\right) = 3,9120 + 0,0953t - 4,15.10^{-3}t\left(t-1\right)$

$f'\left(51\right) = \dfrac{1}{5}P'\left(0,2\right) = \dfrac{1}{5}\left(0,0953 + 4,15\times 10^{-3} - 8,3.10^{-3}.0,2\right) = 0,019558$

2 Tính gần đúng tích phân

Bài toán

Cho bảng giá trị

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Tính gần đúng $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, $a = x_0$, $b = x_n$

2.1 Công thức hình thang

Gọi $P(x)$ là đa thức nội suy sinh ra từ bảng giá trị. Khi đó $I \approx I^* = \int\limits_a^b P(x)\,dx$.

Giả sử trong bảng giá trị các mốc nội suy cách đều nhau một khoảng h.

$$I_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i) = \frac{h}{2}(y_{i+1} + y_i)$$

$$\Rightarrow I^* = \int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\right]$$

Sai số:

$$|I - I^*| \le \frac{M_2}{12}(b-a)\,h^2 \text{ trong đó } M_2 = \max_{[a,b]}|f''(x)|$$

2.2 Công thức Simpson

Giả sử bảng giá trị có $2n+1$ mốc nội suy $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ cách nhau một khoảng đều là h. Khi đó:

$$I^* = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots y_{2n-1})\right]$$

Sai số:

$$|I - I^*| \le \frac{M_2}{180}(b-a)\,h^4 \text{ trong đó } M_4 = \max_{[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$$