1 Phương pháp Euler

Chia $[x_0, x]$ thành n đoạn có độ dài $h = \dfrac{x - x_0}{n}$ bởi các mốc $x_0, x_1, \ldots, x_n$

1.1: Công thức Euler hiện

$$\begin{cases} y_o & = y(x_0) \\ y_{i+1} & = y_i + hf(x_i, y_i) \end{cases}$$

1.2: Công thức Euler cải tiến

$$\begin{cases} y_o & = y(x_0) \\ y_{i+1} & = y_i + \dfrac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))\right] \end{cases}$$

Nhận xét:
Sai số 1 bước của CT Euler hiện là $o(h^2)$
Sai số 1 bước của CT Euler cải tiến là $o(h^3)$
Ví dụ:

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y}, \;\; 0 \le x \le 0,2 \; (h = 0,1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Giải gần đúng sử dụng CT Euler cải tiến.
Giải:
Ta có: $f(x, y) = y - \dfrac{2x}{y}$; $x_0 = 0$; $h = 0,1$; $y_0 = 1$; $X = 0,2$

Áp dụng CT Euler cải tiến

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}\left[y_0 - \frac{2x_0}{y_0} + f\left(x_0 + h,\; y_0 + h.\left(y_0 - \frac{2x_0}{y_0}\right)\right)\right] \\ &= 1 + \frac{0,1}{2}\left[1 + f\left(0,1; 1,1\right)\right] \\ &= 1 + \frac{0,1}{2}\left(1 + 1,1 - \frac{2.0,1}{1,1}\right) = 1,0959091 \\ y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_1, y_1\right) + f\left(x_1 + h,\; y_1 + h.f\left(x_1, y_1\right)\right)\right] \\ &= 1,0959091 + \frac{0,1}{2}\left[1,0959091 - \frac{2.0,1}{1,0959091} + f\left(0,2; 1,1872413\right)\right] \\ &= 1,184096 \end{aligned}$$

2 Phương pháp Runge-Kutta 4 nấc (RK4)

Sai số 1 bước là $o(h^5)$)

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}\left(K_1^i + 2K_2^i + 2K_3^i + K_4^i\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{trong đó}\quad & K_1^i = hf(x_i,\, y_i) \\ & K_2^i = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\, y_i + \frac{K_1^i}{2}\right) \\ & K_3^i = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\, y_i + \frac{K_2^i}{2}\right) \\ & K_4^i = hf\left(x_i + h,\, y_i + K_3^i\right) \end{aligned}$$

Ví dụ:

$$\begin{cases} y' = x + y, & 0 \le x \le 0,1 \\ y(0) = 1 & \text{với } \ h = 0,1 \end{cases}$$

Giải:
Ta có: $f(x, y) = x + y$; $x_0 = 0$; $X = 0,1$; $h = 0,1$; $y_0 = 1$.
Áp dụng CT RK4 ta có:

$$\begin{cases} y_0 & = 1; \\ y_1 & = y_0 + \dfrac{1}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{trong đó}\quad & K_1 = hf\left(x_0;\, y_0\right) = 0,1(0+1) = 0,1 \\ & K_2 = hf\left(x_0 + \frac{0,1}{2};\, y_0 + \frac{0,1}{2}\right) = 0,1(0,05 + 1 + 0,05) = 0,11 \\ & K_3 = hf\left(x_0 + \frac{0,1}{2};\, y_0 + \frac{0,11}{2}\right) = 0,1(0,05 + 1 + 0,05) = 0,1105 \\ & K_4 = hf\left(0,1 + x_0;\, y_0 + 0,1105\right) = 0,12105 \end{aligned}$$

Thay số $\Rightarrow y_1 = 1,11034$

3 Hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y,z) \\ z'(x) = g(x,y,z) \\ y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

Lần lượt áp dụng các phương pháp cho mỗi phương trình, chú ý tính nghiệm $(y_i, z_i)^T$ theo thứ tự các nút x_i từ thấp đến cao. Ví dụ khi áp dụng phương pháp Euler, ta có:

$$\begin{cases} y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i,\, y(x_i),\, z(x_i)) \\ z(x_{i+1}) = z(x_i) + hf(x_i,\, y(x_i),\, z(x_i)) \\ y(x_0) = y_0;\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

4 PTVP bậc cao

$$\begin{cases} y''(x) = f_1(x)y' + f_2(x)y + f_3(x) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Thực hiện đổi biến $y' = z \Rightarrow y'' = z$
PTVP được chuyển về hệ:

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = f_1(x)z + f_2(x)y + f_3(x) \\ y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$$