QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH ĐỐI NGẪU

Nội dung:

- Cách chuyển bài toán đối ngẫu.
- Định lý đối ngẫu.
- Áp dụng đơn hình đối ngẫu.
- Phương pháp đơn hình đối ngẫu

Cách chuyển bài toán đối ngẫu

- B1: Bài toán gốc có bao nhiêu ràng buộc thì bài toán đối ngẫu có bấy nhiêu ẩn. (ẩn y_1, y_2, ….. y_n).
- B2: Nếu bài toán gốc f(x)= Max thì f(y)=min. và ngược lại (f(x)= Min thì f(y)=max).
- B3: Chuyển vị hệ số tự do b_i của bài toán gốc thành hệ số c_j trên hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu. Và ngược lại.
- B4: Chuyển vị ma trận hệ số A của bài toán gốc thành ma trận hệ số A^T của bài toán đối ngẫu.

Cách chuyển bài toán đối ngẫu

- B5: Điền dấu

+) Nếu bài toán đối ngẫu f(y)=max:

❖ Thì dấu của ràng buộc trái dấu với biến x_j của bài toán gốc.

❖ Dấu của các biến đối ngẫu (dấu của biến y) cùng dấu với các ràng buộc của bài toán gốc.

Cách chuyển bài toán đối ngẫu

+) Nếu bài toán đối ngẫu f(y)=min:

- ❖Thì dấu của ràng buộc cùng dấu với biến x_j của bài toán gốc.
- ❖Dấu của các biến đối ngẫu (dấu của biến y) trái dấu với các ràng buộc của bài toán gốc.

CHUYỂN BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

Cách chuyển bài toán đối ngẫu: MAX => MIN

$$Z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 5 & y_1 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 \leq 3 & y_2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 6 & y_3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_4 \geq 0$$

,

$$Z' = 5y_1 + 3y_2 + 6y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ -y_1 - y_2 - 3y_3 \leq -2 \\ y_1 + 5y_2 = 1 \\ 2y_1 - y_2 + y_3 \geq -1 \end{cases}$$

$$y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \text{ bất kỳ}$$

Đổi dấu

Cùng dấu

Cách chuyển bài toán đối ngẫu: MIN => MAX

$$Z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{lllll|l}
x_1 & - x_2 & + x_3 & + 5x_4 & \geq 5 & y_1 \\
x_1 & - x_2 & + 3x_3 & & \leq 2 & y_2 \\
x_1 & + x_2 & & - x_4 & = 0 & y_3
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0$$

$$Z' = 5y_1 + 2y_2 + 0y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{ll}
y_1 + y_2 + y_3 & \leq 1 \\
-y_1 - y_2 + y_3 & \geq -2 \\
y_1 + 3y_2 & \leq 1 \\
5y_1 - y_3 & = -1
\end{array}$$

$y_1 \geq 0$, $y_2 \leq 0$, y_3 bất kì

Cùng dấu

Đổi dấu

CHUYỂN BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

Tìm các cặp ràng buộc đối ngẫu

$Z = 1x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min$

$x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 5$	$y_1 \geq 0$
$x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 2$	$y_2 \leq 0$
$x_1 + x_2 - x_4 = 0$	

$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0$

$Z' = 5y_1 + 2y_2 + 0y_3 \to \max$

$y_1 + y_2 + y_3 \leq 1$	$x_1 \geq 0$
$-y_1 - y_2 + y_3 \geq -2$	$x_2 \leq 0$
$y_1 + 3y_2 \leq 1$	$x_3 \geq 0$
$5y_1 - y_3 = -1$	

$y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0$

Các cặp đối ngẫu

CÁC ĐỊNH LÝ ĐỐI NGẪU

ĐỊNH LÝ 1:

Nếu một trong hai bài toán đối ngẫu nhau có P.A.T.Ư thì bài toán kia cũng có P.A.T.Ư và giá trị hàm mục tiêu của chúng bằng nhau(f(X)=f(Y))

HỆ QUẢ 1.

Điều kiện cần và đủ để cho các bài toán đối ngẫu nhau có phương án tối ưu là mỗi bài toán có ít nhất một phương án.

HỆ QUẢ 2.

Điều kiện cần và đủ để cho các bài toán đối ngẫu nhau không có P.A.T.Ư là một bài toán có P.A còn bài toán kia không có P.A.

CÁC ĐỊNH LÝ ĐỐI NGẪU

ĐỊNH LÝ 2 (định lý về độ lệch bù yếu):

Điều kiện cần và đủ để cặp bài toán đối ngẫu nhau có P.A.T.Ư. là trong cặp ràng buộc đối ngẫu, nếu ràng buộc này xảy ra với dấu bất đẳng thức ngặt (“>” hoặc “<“) thì ràng buộc kia xảy ra với dấu đẳng thức.

Ví dụ:

Cặp ràng buộc đối ngẫu: $x_1 \geq 0$ & $y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 4$

Với $X^*=(1; 5/2; 0) \Rightarrow x_1 = 1$.

Thay vào vế trái được: $1>0 \Rightarrow y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 4$

CÁC ĐỊNH LÝ ĐỐI NGẪU

ĐỊNH LÝ 3.(định lý về độ lệch bù mạnh)

Nếu cặp bài toán đối ngẫu nhau có P.A.T.Ư. thì tồn tại một cặp phương án sao cho trong các cặp đối ngẫu, nếu ràng buộc này xảy ra với dấu đẳng thức thì ràng buộc kia xảy ra với dấu bất đẳng thức ngặt.

Ví dụ:

Cặp ràng buộc đối ngẫu: $x_1 \geq 0$ & $y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 4$

Với X*=(0; 5/2 ;0) => $x_1 = 0$.

Thay vào vế trái được: 0=0 => $y_1 + 3y_2 + 2y_3 > 4$

ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ ĐỐI NGẪU

dựa vào định lý độ lệch bù (định lý đối ngẫu). Kiểm tra xem phương án X* có phải là phương án tối ưu của bài toán gốc không?:

Phương án X*= (0,5/2,0)

-> $x_1 = 0$, $x_2 = 5/2$, $x_3 = 0$

Đem thế vào các phương trình ràng buộc đối ngẫu ta sẽ có hệ phương trình để tìm y

Cặp ràng buộc đối ngẫu:

$x_1 \geq 0$ & $y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 4$

$x_2 \geq 0$ & $2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 6$

$x_3 \geq 0$ & $-3y_1 + 1y_2 + 5y_3 \geq 8$

$x_1 + 2x_2 – 3x_3 \leq 12$ & $y_1 \geq 0$

$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ & $y_2 \geq 0$

$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 5$ & $y_3 \geq 0$

Theo nguyên tắc khi thế vào, nếu 1 vế xảy ra bất đẳng thức thì vế còn lại sẽ là dấu “=“

ở đây ta có phương án X vì vậy sẽ thế vào tất cả x, để tìm ra hệ phương trình y

Kiểm tra x* có phải là phương án tối ưu của bài toán QHTT đã cho không?

❖ Kiểm tra xem x* có là phương án của bài toán không?

✓ Thay x* vào các cặp ràng buộc:

1)Nếu không thỏa mãn các ràng buộc kết luận: x* không phải là phương án.

2) Nếu là phương án thì tiếp tục thực hiện những bước sau:

- B1: Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra cặp ràng buộc đối ngẫu.
- B2: Áp dụng định lý đối ngẫu (định lý đô lệch bù) để đưa ra hệ phương trình ẩn y.
- B3: Giải hệ phương trình ẩn y, tìm được nghiệm y
- B4: Thay nghiệm y vào f(y).

Thay x* vào f(x). Nếu f(y)=f(x*) thì kết luận: phương án x* là phương án tối ưu. Ngược lại x* không phải là phương án tối ưu.

ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ ĐỐI NGẪU

Phương án X*= (0,5/2,0)

-> $x_1 = 0,\ x_2 = 5/2,\ x_3 = 0$

Cặp ràng buộc đối ngẫu:

$x_1 \geq 0$ & $y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 4$

$x_2 \geq 0$ & $2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 6$

$x_3 \geq 0$ & $-3y_1 + y_2 + 5y_3 \geq 8$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 12$ & $y_1 \geq 0$

$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ & $y_2 \geq 0$

$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 5$ & $y_3 \geq 0$

$x_1 = 0$ -> không

$x_2 = 5/2 > 0$ -> lấy vế sau

$2y_1 + y_2 + 2y_3 = 6$ (1)

$x_3 = 0$ -> không

$2*5/2 = 5 < 12$ -> lấy vế sau

$y_1 = 0$ (2)

$1*5/2 < 4$ -> lấy vế sau

$y_2 = 0$ (3)

$2*5/2=5=5$ -> Không

ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ ĐỐI NGẪU

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình để tính y:

$2y_1 + y_2 + 2y_3 = 6$

$y_1 = 0$ -> $Y^o = (0, 0, 3)$

$y_2 = 0$

Ta thấy Yo = (0, 0, 3) thỏa các ràng buộc còn lại của bài tập nên nó tối ưu

và Zmin = 15

Ví dụ 4.2

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 + x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_6 = 7 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6} \end{cases}$$

Đáp án: x*=(0,19/5,0,4/5,0,0). F(x*)= 99/5

Áp dụng định lý độ lệch bù để kiểm tra xem phương án x* có phải là phương án tối ưu của bài toán trên không?

- Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra cặp ràng buộc đối ngẫu
- Áp dụng định lý độ lệch bù ta có:
- x_2= 19/5 có (2), và x_4=4/5 có (4). nên ta có:
  - » $y_2<=3$
  - » $2y_1+y_2+y_3=5$ (2)
  - » $-y_1-4y_2+2y_3<=-7$
  - » $3y_1-y_2+4y_3=1$ (4)
  - » $Y_1>=0$
  - » $Y_3<=0$
  - » Đặt y_3=t, (t<=0) nên ta có $y_3<=0$, $y_1=(6-5t)/5$, $y_2=(13+5t)/5$. từ hệ pt (2), và(4)
- Thay f(y)=10(6-5t)/5+3. (13+5t)/5+7t=99/5

ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU

Tiêu chuẩn tối ưu và thuật toán đơn hình đối ngẫu:

- Thuật toán đơn hình đối ngẫu là ta áp dụng thuật toán đơn hình để giải bài toán đối ngẫu nhưng ta lại diễn ra quá trình đó trong bài toán gốc, từ đó tìm được nghiệm của bài toán gốc.
- Cho bài toán (P) và bài toán đối ngẫu của (P) là (P'):

$<c, x> = Z(\min)$	$<b, y> = W(\max)$
$(P)\ \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$	$(P')\ \{A'y \leq c$

- Giả sử có phương án cực biên của (P') là y_0 khi đó y_0 phải thỏa mãn điều kiện sau:

$\mathbf{<A_j , y_0> = c_j}$, (j thuộc vào cơ sở J) và mặt khác

$<A_k , y_0> < c_k$, (k không thuộc vào J)

- Ta xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sum_{j\in J} x_j A_j = b \\ x_k = 0, k \notin J \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình ta được nghiệm X (x_j)- Gọi là giả phương án của (P).

  tương ứng thì các x_j gọi là các biến cơ sở của giả phương án với cơ sở đối ngẫu A_j .

- **<u>Chú ý:</u>** đối với giả phương án x và phương án cực biên y_0 ta luôn có:

$$\Delta_k \le 0, \forall k \notin J$$

Dạng bài toán tìm giả phương án

1. Chuyển bài toán về dạng chính tắc và xét !!!!
2. Viết bài toán đối ngẫu.
3. Tìm cơ sở J={ j | hệ A_j độc lập tuyến tính}.
4. Giải hệ : $\boldsymbol{<A_j , y_0 > = c_j}$, ($j \in J$) .

   => Tìm y_0 ?

5. Kiểm tra: $\Delta_k = \sum_{j \in J} Z_{jk}.c_j - c_k \leq 0$,(k $\notin$ J) ?

6. Giải hệ phương trình: $$\sum_{j \in J} a_{ij}.x_j = b_i$$

   => Giả phương án x_0?

Ví dụ

$$x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 - x_6 = 2 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 12 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5,6 \end{cases}$$

- Viết bài toán đối ngẫu
- từ bài toán đối ngẫu ta dễ thấy một phương án cực biên: y_o=(y_1=1, y_2=-1, y_3=-1)
- với cơ sở A_1,A_2,A_4.
- vì $<A_1,y_o>=1$, $<A_2,y_o>=-1$, $<A_4,y_o>=-2$

Để tìm giả phương án ta phải giải hệ pt:

có nghiệm: x_1=-5/2, x_2=15/2, x_4=9/2

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_4 = 12 \\ 2x_4 = 9 \end{cases}$$

Biến đổi sơ cấp để đưa về hệ véc tơ độc lập tuyến tính theo A_1, A_2,$A_{4.}$ với giả phương án x_1,x_2,x_4 vừa tìm được

- Kẻ bảng đơn hình đối ngẫu và áp dụng thuật toán đối ngẫu để giải bài toán

Bài tập tìm giả phương án

1. $x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 - x_6 = 2 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 12 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 6 \end{cases}$$

2. $-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 \geq -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 21 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$

3. $-x_1 - 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_1 \leq 3 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2. \end{cases}$$

4. $-3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 10 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -3 \\ -x_1 + 4x_3 \geq -2 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

CÁC BƯỚC GIẢI ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU

- **Bước 1**. Lập bảng đơn hình đối ngẫu ban đầu .
- **Bước 2**. Kiểm tra tối ưu: Nếu mọi phần tử trong cột giả phương án đều không âm thì dừng quá trình giải và ta nhận được phương án tối ưu của bài toán đã cho. Trái lại, chuyển sang bước 3.
- **Bước 3**. Nếu $\exists x_j < 0, z_{jk} \geq 0, \forall k \notin J$ bài toán vô nghiệm. ngược lại:

Chọn dòng quay: *Đó là dòng đầu tiên từ trên xuống mà nó chứa phần tử âm nhỏ nhất trong cột giả phương án.*

Chọn cột quay: *Chia các phần tử trên dòng ước lượng (cuối mỗi bảng) cho các phần tử tương ứng trên dòng quay, nhưng chỉ chia cho những phần tử âm trên dòng quay. Cột quay là cột đầu tiên từ trái sang phải ứng với số nhỏ nhất trong các tỉ số đó.*

CÁC BƯỚC GIẢI ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU

- **Bước 4**. Biến đổi bảng đơn hình hoàn toàn như trong phương pháp đơn hình(thay đổi biến cơ sở, đổi hệ số mục tiêu tương ứng, xác lập các vectơ đơn vị, biến đổi dòng quay và cuối cùng là biến đổi các dòng khác theo quy tắc hình chữ nhật). Quay trở về bước 2.

Chú ý: Nếu bài toán f(x) ->max thì $\Delta_k \geq 0$ với mọi k
Khi tìm phần tử xoay thì chọn phần tử có thương số lớn nhất

Vấn đề phương án cực biên và cơ sở xuất phát

- Để áp dụng được thuật toán đơn hình đối ngẫu, trước tiên ta phải xác định được 1 phương án cực biên xuất phát cho nó.
- Nếu bài toán dạng chính tắc có 1 cơ sở gồm các vector { $\pm e^i$ }, ta lập bảng đơn hình ứng với cơ sở này, Nếu

  $\Delta_k \leq 0, \forall k \notin J$ thì ta lấy đó làm cơ sở đối ngẫu xuất phát và áp dụng thuật toán.
- Nếu biết một phương án cực biên y của bài toán đối ngẫu của bài toán ở dạng chính tắc, ta cần xác định cơ sở của y, tìm ma trận hệ số phân tích theo cơ sở này và lập bảng đơn hình tương ứng. Nếu

  $\Delta_k \leq 0, \forall k \notin J$ thì ta lấy đó làm cơ sở đối ngẫu xuất phát và áp dụng thuật toán.

Kiểm tra x_j có phải là giả phương án của bài toán theo thuật toán đơn hình đối ngẫu không?

B1: Chuyển bài toán về dạng chính tắc và xét

(1) Nếu ràng buộc có dấu “>=“ thì chuyển về dấu “<=“, rồi cộng thêm ẩn phụ để về dấu “=“.

(2) Thao tác giống đi tìm cơ sở A_j và phương án cực biên xuất phát x_j của thuật toán đơn hình, chỉ khác là b_i có thể <0).

B2: Lập bảng đơn hình. Đối với giả phương án x ta luôn có:

$$\Delta_k \leq 0, \forall k \notin J$$

Với hàm f(x) -> min. Thì x_j là giả phương án,

VÍ DỤ

Ví dụ: Giải BT QHTT sau:

$$f(x) = 15x_1 + 12x_2 + 10x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 160 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 140 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Giải. Đưa bài toán về dạng chính tắc và đổi dấu hai vế các ràng buộc đẳng thức, ta nhận được bài toán:

$$f(x) = 15x_1 + 12x_2 + 10x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -160 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_5 = -140 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

VÍ DỤ

Ta có bảng đơn hình đối ngẫu:

Chọn số âm nhỏ nhất

A_J	c_J	Giả pa x_J	A_1 15	A_2 12	A_3 10	A_4 0	A_5 0
A_4	0	-160	-3	-4	-2	1	0
A_5	0	-140	-1	-2	-3	0	1
Bảng1		0	-15	-12	-10	0	0
A_2	12	40	3/4	1	1/2	-1/4	0
A_5	0	-60	1/2	0	-2	-1/2	1
Bảng2		480	-6	0	-4	-3	0

Chọn thương số nhỏ nhất

-15/-3　　-12/-4　　-10/-2

VÍ DỤ

A_2	12	25	7/8	1	0	-3/8	1/4
A_3	10	30	-1/4	0	1	1/4	-1/2
Bảng 3		600	-7	0	0	-2	-2

Vậy *x*=(0,25,30) với f(x*)=600.*

Yêu cầu lý thuyết

1. Nắm chắc các định lý đối ngẫu mạnh, yếu?
2. Nắm chắc các bớc trong thuật toán đơn hinh đối ngẫu?

Các dạng bài toán về đơn hinh đối ngẫu

1. Chuyển từ bài toán gốc sang bài toán đối ngẫu với nó và ngợc lại.
2. Tim giả phơng án cho bài toán?
3. Chứng minh 1 nghiệm là nghiệm của bài toán đã cho thông qua các định lý?
4. Cho trớc nghiệm tim giả phơng án rồi giải bằng phơng pháp đơn hinh đối ngẫu?

K□T TH□C