



# Bài 3 Giải gần đúng phương trình

# Bài 3 Giải gần đúng phương trình

**3.1 Đặt vấn đề**

**3.2 Nghiệm của phương trình**

**3.3 Phương pháp chia đôi**

**3.4 Phương pháp lặp**

**3.5 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)**

**3.6. Phương pháp dây cung**

## 3.1 Đặt vấn đề

**Tìm nghiệm của phương trình:**

$$f(x) = 0 \quad (3.1)$$

trong đó  $f$  là một hàm đại số hoặc là hàm siêu việt bất kỳ với đối số  $x$ .

Nếu  $f(x)$  là hàm đại số, thì (3.1) có dạng :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0; a_0 \neq 0$$

## 3.2 Nghiệm của phương trình

### Xét phương trình một ẩn

$$f(x) = 0 \quad (3.1)$$

trong đó  $f$  là một hàm số cho trước của đối số  $x$ .

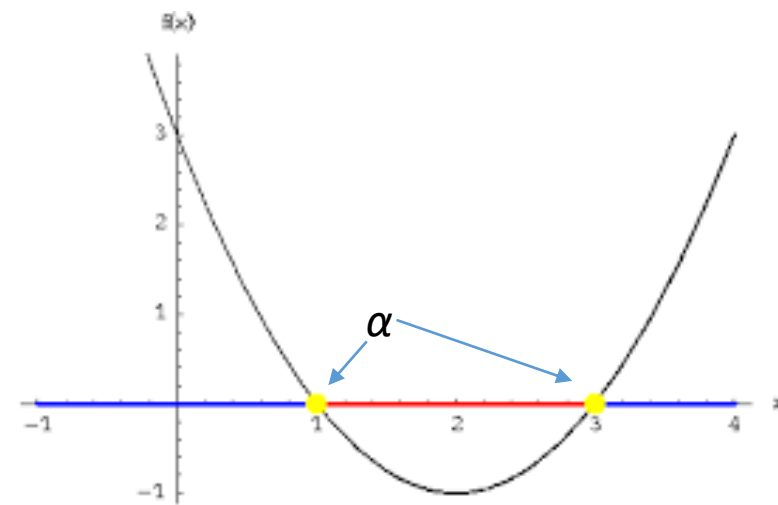
Nghiệm thực của phương trình (3.1) là số thực  $\alpha$  thỏa mãn (3.1) tức là khi thay  $\alpha$  vào  $x$  ở vế trái ta được:

$$f(\alpha) = 0 \quad (3.2)$$

Việc tính gần đúng nghiệm thực của pt (3.1) được tiến hành theo hai bước:

**Bước 1:** Tìm khoảng cách ly nghiệm  $(a, b)$  chỉ chứa 1 và chỉ 1 nghiệm thực của pt (3.1).

**Bước 2:** xuất phát từ khoảng cách ly nghiệm tìm được từ bước 1, tính gần đúng nghiệm thực của pt (3.1) đạt độ chính xác theo yêu cầu được xác định từ trước.



Hình 2-1: Nghiệm của PT.

## 3.2 Nghiệm của phương trình

### Khoảng cách ly nghiệm

$f(x) = 0$  có duy nhất một nghiệm trên  $(a, b)$  nếu thỏa các điều kiện sau:

1.  $f(a)$  là hàm liên tục trên  $(a, b)$
2.  $f(a)$  khác dấu  $f(b) \Leftrightarrow f(a) \times f(b) < 0$
3. Đạo hàm cấp một  $f'(x)$  không đổi dấu trong  $[a, b]$

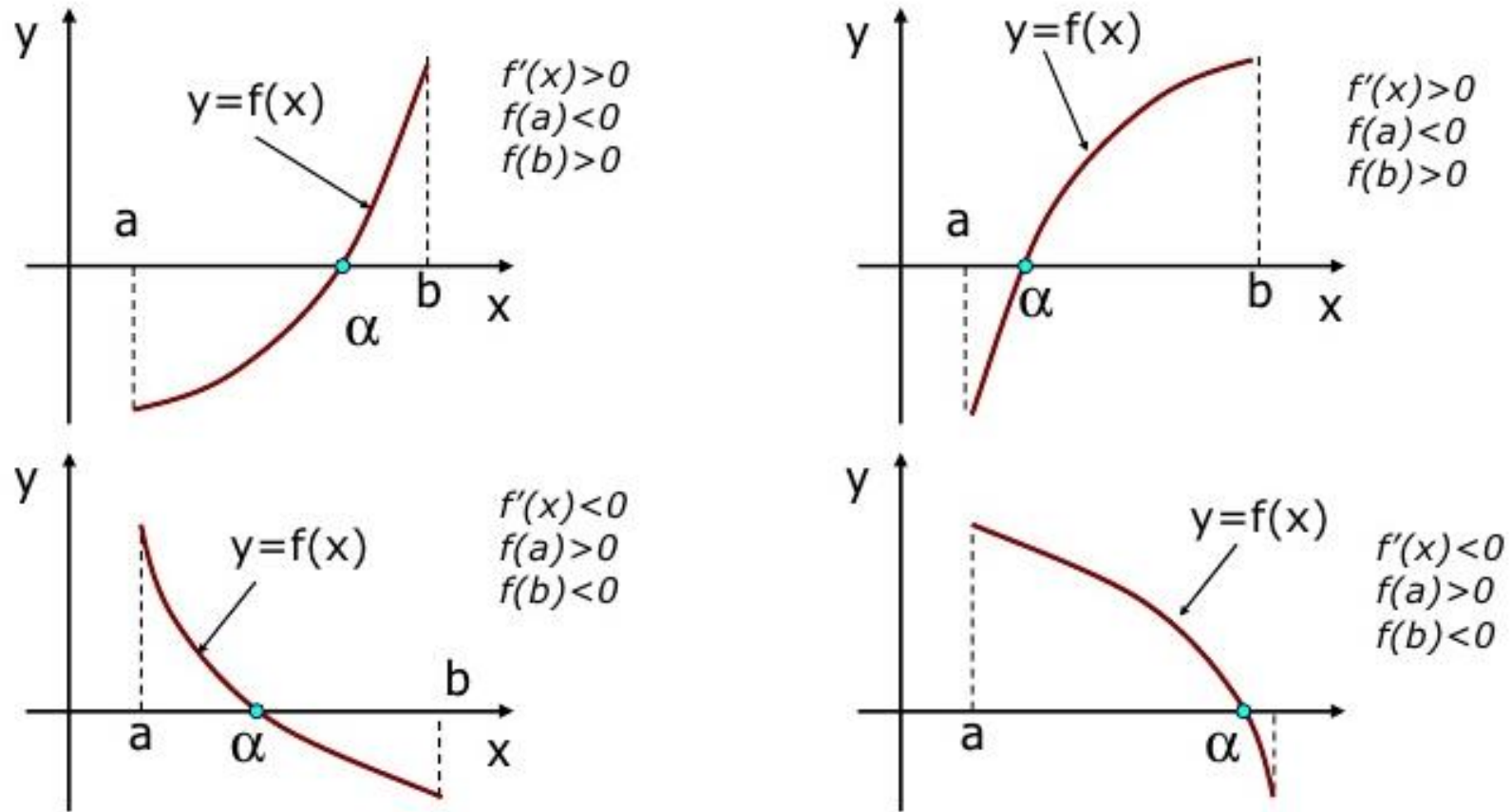
***Khoảng  $(a, b)$  được gọi là khoảng cách ly nghiệm.***

***Có thể xét thêm 1 điều kiện nữa***

3. Đạo hàm cấp hai  $f''(x)$  không đổi dấu trong  $(a, b)$   
 $\Rightarrow$  không có điểm uốn.

## 3.2 Nghiệm của phương trình

### Khoảng cách ly nghiệm



Hình 2-2. khoảng cách ly nghiệm

## 3.2 Nghiệm của phương trình

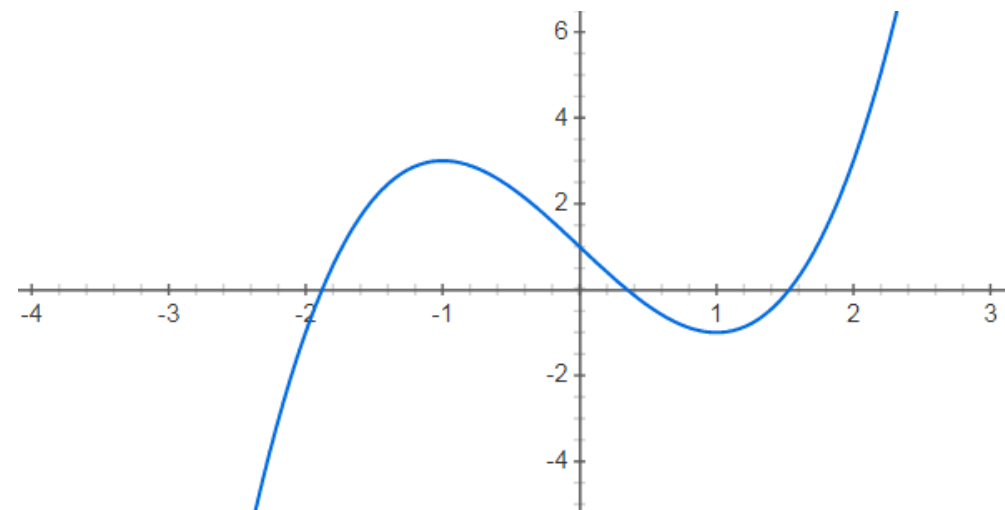
### Cách tìm khoảng cách ly nghiệm

#### 1) Phương pháp giải tích

Lập bảng chia khoảng để xét dấu (hoặc bảng biến thiên).

**Ví dụ 3.1:** xét phương trình  $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	3	1	-1	3	19



Vì phương trình bậc 3 nên có tối đa 3 nghiệm. Từ bảng trên ta có 3 khoảng phân ly nghiệm  $(-2, -1)$ ,  $(0, 1)$  và  $(1, 2)$ .

## 2.2 Nghiệm của phương trình

### Cách tìm khoảng cách ly nghiệm

#### 2) Phương pháp hình học

Đối với những hàm đơn giản ta có thể vẽ hình và dựa trên hình vẽ để xác định các khoảng cách ly.

**Ví dụ 3.2:** xét phương trình  $f(x) = 3^x + 2x - 4 = 0$

Từ phương trình trên ta có thể đưa về phương trình tương đương:

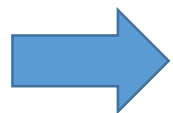
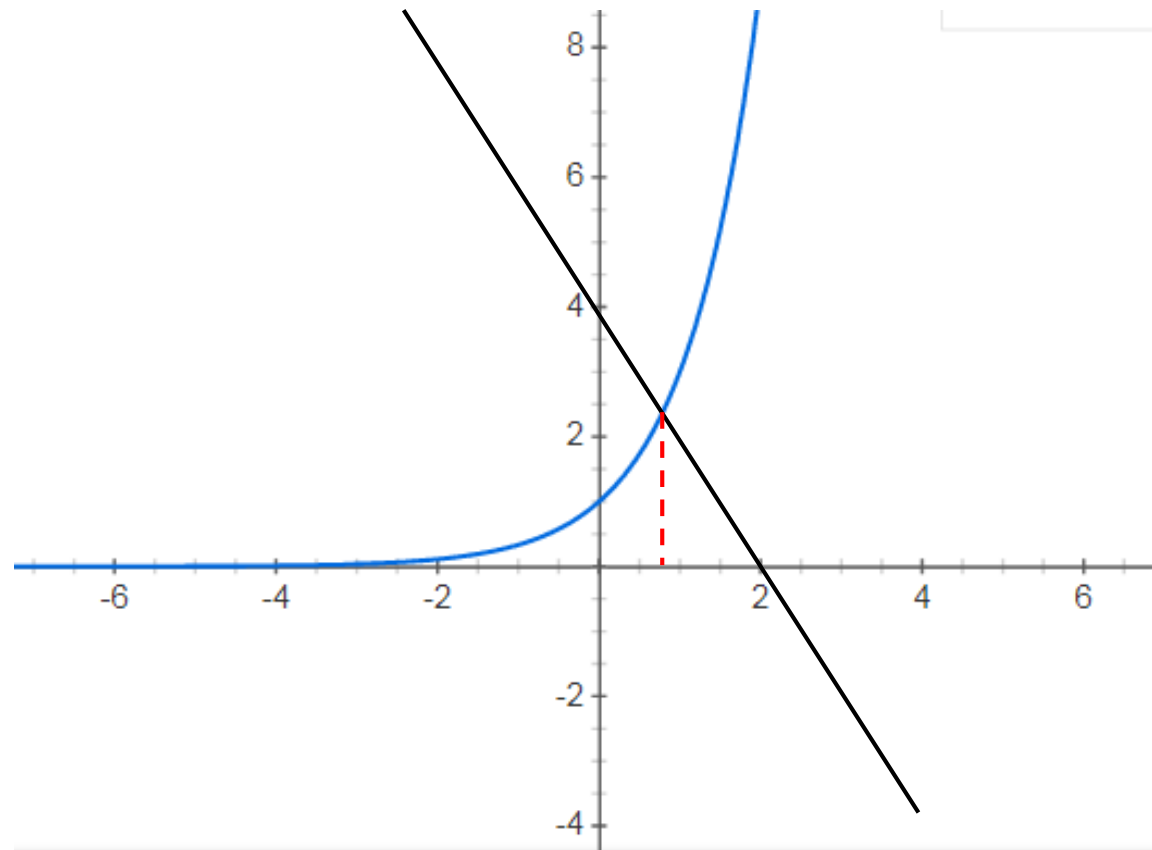
$$3^x = -2x + 4 \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$$

sau đó vẽ 2 đồ thị trên cùng 1 hệ tọa độ. Dựa trên các điểm cắt nhau của 2 đồ thị để xác định khoảng cách ly nghiệm.



## 2.2 Nghiệm của phương trình

**Ví dụ 3.2:** xét phương trình  $f(x) = 3^x + 2x - 4 = 0$



Khoảng cách ly nghiệm (0.5, 1)

## 3.3 Phương pháp chia đôi

### 3.3.1 Ý tưởng

Nếu  $(a, b)$  là khoảng phân li nghiệm (chứa 1 và chỉ 1 nghiệm) của phương trình (3.1) thì

$\left[ a, \frac{a+b}{2} \right]$  hoặc  $\left[ \frac{a+b}{2}, b \right]$  sẽ là khoảng phân li mới.

**Lặp lại quá trình phân li này nhiều lần.**

## 3.3 Phương pháp chia đôi

### 3.3.2 Thuật toán

Gọi  $m$  là điểm giữa  $a$  và  $b$ :  $\mathbf{m} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$

Có 2 trường hợp:

1. Nếu  $\mathbf{f(m)} = \mathbf{0}$ , khi đó  $m$  là nghiệm cần tìm  $\Rightarrow$  dừng thuật toán.

2. Nếu  $\mathbf{f(m)} \neq \mathbf{0}$ , khi đó ta có:

+ Hoặc  $\mathbf{f(a) \times f(m) < 0}$  ta chọn  $m$  là  $b$  mới:  $\mathbf{b = m}$

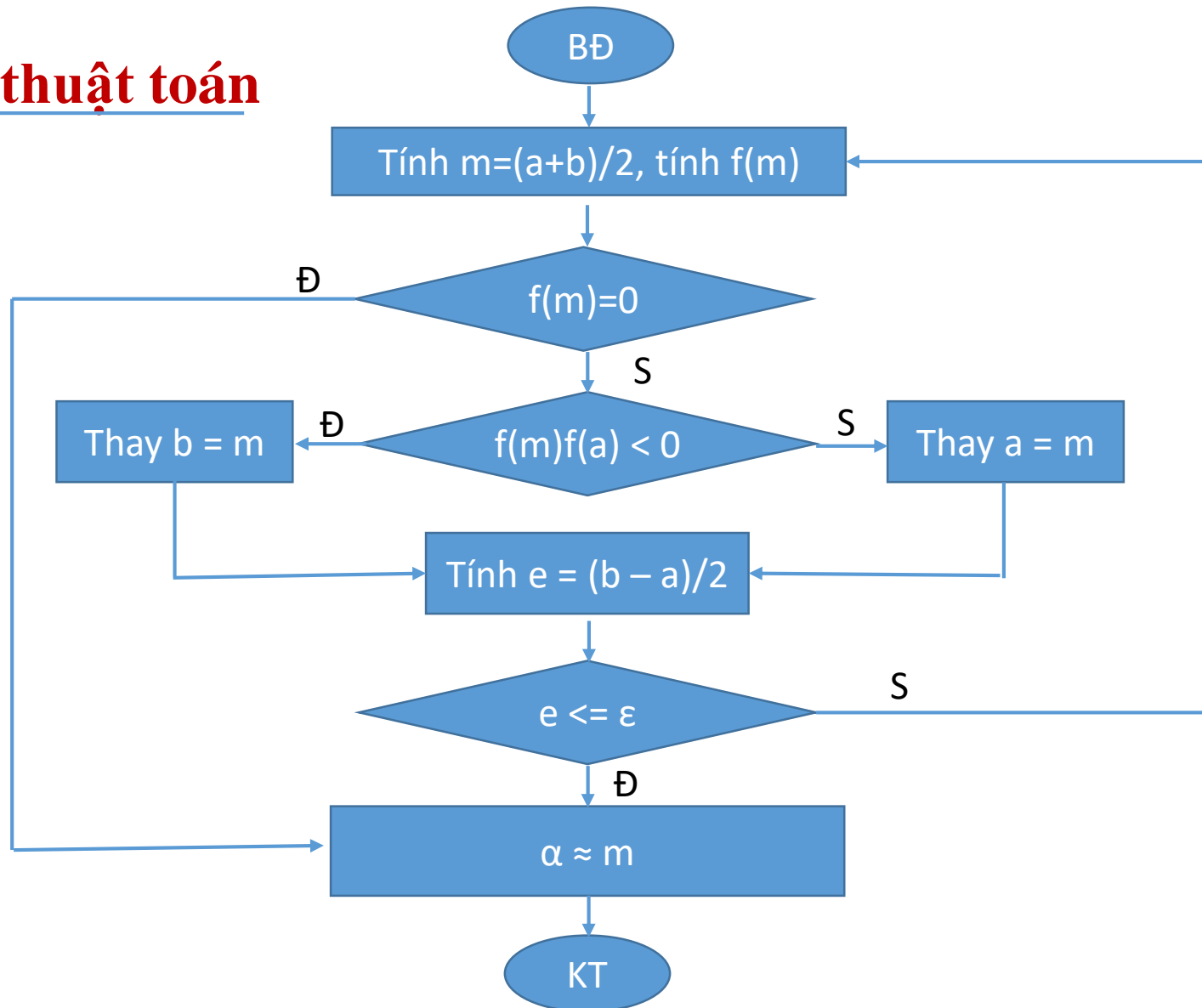
+ Hoặc  $\mathbf{f(m) \times f(b) < 0}$  ta chọn  $m$  là  $a$  mới:  $\mathbf{a = m}$

Và chúng ta lặp lại cho  $(a, b)$  mới.

Quá trình lặp dừng lại khi  $|\mathbf{b - a}|/2 \leq \epsilon$  với  $\epsilon$  độ lệch cho trước và ta chọn  $m$  là nghiệm gần đúng.

## 3.3 Phương pháp chia đôi

### 3.3.3 Sơ đồ thuật toán



## 3.3 Phương pháp chia đôi

### 3.3.4 Sự hội tụ của phương pháp

Khi thực hiện vô hạn lần phương pháp chia đôi cho khoảng  $(a, b)$  thì một trong 2 trường hợp xảy ra:

- Điểm giữa là nghiệm của phương trình (3.1);
- Hoặc ta nhận được một dãy vô hạn các khoảng chồng lên nhau và thu nhỏ dần  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$  sao cho:

$$f(a_n) \times f(b_n) < 0 \text{ và } b_n - a_n = 1/2^n \times (b-a)$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$  tạo nên dãy đơn điệu không giảm và bị chặn bởi  $b$ , còn  $b_1, b_2, \dots, b_n$  tạo nên dãy đơn điệu không tăng và bị chặn bởi  $a$ , nên khi  $n \rightarrow +\infty$  thì:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \alpha$$

Vì hàm  $f(x)$  liên tục nên khi  $n \rightarrow +\infty$ ,  $f(\alpha) = 0$  và  $\alpha$  là nghiệm của hàm  $f$ .

## 3.3 Phương pháp chia đôi

### 3.3.5 Đánh giá sai số

Chúng ta có:

$$a_n \leq \alpha \leq b_n \text{ và } b_n - a_n = \frac{1}{2^n} (b - a) \quad (3.3)$$

Nếu  $a_n$  là nghiệm gần đúng:

$$|a_n - \alpha| \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^n} (b - a) \quad (3.4)$$

Nếu  $b_n$  là nghiệm gần đúng:

$$|b_n - \alpha| \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^n} (b - a) \quad (3.5)$$

Nếu  $(a_n + b_n)/2$  là nghiệm đúng:

$$\left| \frac{a_n + b_n}{2} - \alpha \right| \leq \frac{1}{2} (b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}} (b - a) \quad (3.6)$$

*Chúng ta lấy sai số tuyệt đối giới hạn*

$$\Delta_f = \frac{1}{2} (b_n - a_n) \quad (3.7)$$

## 3.3 Phương pháp chia đôi

### 3.3.6 Ưu/nhược điểm

- Giải thuật đơn giản, dễ lập trình trên máy tính;
- Tốc độ hội tụ chậm.

## 3.3 Phương pháp chia đôi

### Ví dụ 3.3.2:

Tìm nghiệm gần đúng của PT:  $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ . Biết khoảng cách ly nghiệm (1,2).

**Giải:**

Tính:  $f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1$ ;  $f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5$ ;  $\Rightarrow (1,2)$  là khoảng cách ly nghiệm.

Áp dụng liên tiếp phương pháp chia đôi ta được bảng kết quả sau:

n	$a_n$	$b_n$	$m = (a_n + b_n)/2$	$f(m)$	$b_n - a_n$
0	1	2	1.5	0.875	1
1	1	1.5	1.25	-0.29688	0.5
2	1.25	1.5	1.375	0.22461	0.25
3	1.25	1.375	1.3125	-0.05151	0.125
4	1.3125	1.375	1.34375	0.08261	0.0625
5	1.3125	1.34375	1.32813	0.01458	0.03125
6	1.3125	1.32813	1.32032		0.01563

Lấy nghiệm gần đúng là 1.32032 với sai số:

$$|1.32032 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times 0.01563 = 0.00782$$

Ta có thể lấy nghiệm gần đúng là:

$$\alpha \approx 1.32 \pm 0.008$$



## 3.3 Phương pháp chia đôi

### Ví dụ: 3.3.3

Cho hàm số  $f(x) = x^4 - 2x^2$ .

Tìm xấp xỉ nghiệm của phương trình trên khoảng  $(-1.8; -1.2)$  thỏa yêu cầu sai số bé hơn 0.02 bằng phương pháp chia đôi.

## 3.3 Phương pháp chia đôi

### Ví dụ:3.3.3

**Bước 1:**

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

**Bước 2:** Kiểm tra đoạn  $[-1.8; -1.2]$  là khoảng cách ly nghiệm:

$$f(-1.8) = (-1.8)^4 - 2 * (-1.8)^2 = 4.0176$$

$$f(-1.2) = (-1.2)^4 - 2 * (-1.2)^2 = -0.8064$$

$$f'(-1.8) = 4 * (-1.8)^3 - 4 * (-1.8) = -16.128$$

$$f'(-1.2) = 4 * (-1.2)^3 - 4 * (-1.2) = -2.112$$

Ta thấy  $f(-1.8) * f(-1.2) < 0$  và  $f'(-1.8)$  cùng dấu với  $f'(-1.2)$  nên khoảng đã cho là khoảng cách ly nghiệm.

## 3.3 Phương pháp chia đôi

### Ví dụ: 3.3.3

**Bước 3:**

n	$a_n$	$b_n$	m	f(m)	$ b_n - a_n /2$
0	-1.8	-1.2	-1.5	0.5625	0.3
1	-1.5	-1.2	-1.35	-0.32349375	0.15
2	-1.5	-1.35	-1.425	0.062187891	0.075
3	-1.425	-1.35	-1.3875	-0.144085913	0.0375
4	-1.425	-1.3875	-1.40625	-0.044417381	0.01875

Lấy nghiệm gần đúng là -1.40625 với sai số:

$$|-1.40625 - \alpha| \leq 0.01875 < 0.02 \Rightarrow \alpha = -1.40625 \pm 0.019$$

## 3.4 Phương pháp lặp

### 3.4.1 Ý tưởng

Với phương trình  $f(x) = 0$ , ta biến đổi về phương trình tương đương:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$$

Lấy một giá trị xấp xỉ ban đầu  $x_0$  nào đó, xây dựng các xấp xỉ tiếp theo theo công thức:

$$\mathbf{x}_n = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_{n-1}) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$\boldsymbol{\varphi}$ : được gọi là hàm lặp

### Ví dụ 3.4.1

Cho phương trình:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + 5$$

Biến đổi về phương trình tương đương:

$$\mathbf{x} = 3\mathbf{x}^2 + 5$$



## 3.4 Phương pháp lặp

### Ví dụ 3.4.2

Cho phương trình:

$$f(x) = x^3 - 10x + 5$$

Biến đổi về phương trình tương đương:

$$x = x + (x^3 - 10x + 5)$$

$$x = x^3 - 9x + 5$$



### Ví dụ 3.4.3

Cho phương trình:

$$f(x) = x^2 - x + 5$$

Biến đổi về phương trình tương đương:

$$a) x = x^2 + 5$$

$$b) x = (x - 5)^{1/2}$$

$$c) x = 1 - 5/x \text{ (đk } x \neq 0)$$



## 3.4 Phương pháp lặp

### 3.4.2 Mô tả phương pháp

- Giả sử phương trình  $f(x) = 0$  có khoảng cách ly nghiệm  $(a,b)$ .
- Biến đổi về phương trình tương đương:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \quad (3.21)$$

- Chọn  $x_0$ , **chúng ta có thể chọn  $x_0 = (a + b)/2$** , tính các xấp xỉ tiếp theo theo công thức:

$$\mathbf{x}_n = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_{n-1}) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (3.22)$$

- Đánh giá sai số  $\Delta_n = |x_n - \alpha|$ , đặt:  $q = \max_{x \in [a,b]} \{|\varphi'(x)|\}$  (3.23)

và sai số cần tìm:

$$\Delta_n \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \quad (3.24)$$

## 3.4 Phương pháp lặp

### 3.4.3 Điều kiện của phương pháp

- $(a, b)$  là khoảng cách ly nghiệm của phương trình  $f(x) = 0$  và  $\varphi(x)$ ;
- $\varphi'(x)$  là hàm số liên tục trong  $[a, b]$ ;
- Mọi  $x_n$  tính theo công thức lặp đều thuộc  $[a, b]$ ;
- $|\varphi'(x)| \leq q < 1$  ( $q$  là hằng số) đối với mọi  $x \in [a, b]$ ,  $x_0 \in [a, b]$  thì dãy các nghiệm đúng  $\{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  nhận được từ (3.22), hội tụ đến nghiệm  $\alpha$ .

**Khi sử dụng phương pháp lặp chúng ta sẽ gặp khó khăn trong việc tìm hàm  $\varphi(x)$  vì phải thỏa điều kiện**

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \forall x \in [a, b]$$

## 3.4 Phương pháp lặp

### Ví dụ về điều kiện của phương pháp

Xét phương trình

$$x^3 + x - 1000 = 0$$

khoảng cách ly nghiệm  $[9, 10]$

Nếu đưa phương trình về dạng:

$$x = 1000 - x^3 = g(x)$$

$$g'(x) = -3x^2 \Rightarrow g'(9) = -243; g'(10) = -300$$

$|g'(x)|$  nằm ngoài khoảng cách ly nghiệm.

Chúng ta đưa phương trình về dạng  $x = \sqrt[3]{1000 - x} = g(x)$

$$g'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}} \quad \Rightarrow \quad |g'(x)| < 1$$



## 3.4 Phương pháp lặp

### Cách có thể áp dụng để tìm $\varphi(x)$

- Nếu  $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$  ta đặt  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{M}$  với  $M \geq \max_{x \in [a, b]} \{|f'(x)|\}$
- Nếu  $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$  ta đặt  $\varphi(x) = x + \frac{f(x)}{M}$  với  $M \geq \max_{x \in [a, b]} \{|f'(x)|\}$



Chọn  $M = \max\{|f'(x)|\}$

## 3.4 Phương pháp lặp

### Ví dụ 3.4.4

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

$$f(x) \equiv 5x^3 - 20x + 3 = 0$$

biết khoảng cách ly nghiệm là  $(0,1)$ , độ chính xác yêu cầu là  $10^{-4}$ .

### Giải

**Bước 1:** Tìm phương trình tương đương

$$f'(x) = 15x^2 - 20$$

$$f'(0) = -20$$

$$f'(1) = -5$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = -20 \\ f'(1) = -5 \end{array} \right\} M = \max_{x \in [0,1]} \{|f'(x)|\} = 20 \Rightarrow \varphi(x) = x + \frac{5x^3 - 20x + 3}{20} = \frac{5x^3 + 3}{20}$$

## 3.4 Phương pháp lặp

**Bước 2:** Tìm q

$$\varphi'(x) = \frac{15x^2}{20}$$

$$\varphi'(0) = 0$$

$$\varphi'(1) = \frac{15}{20}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi'(0) = 0 \\ \varphi'(1) = \frac{15}{20} \end{array} \right\} \Rightarrow q = \max_{x \in [0,1]} \{|\varphi'(x)|\} = \frac{15}{20} < 1$$

**Bước 3:** Tính giá trị nghiệm và đánh giá sai số

Chọn  $x_0 = (0 + 1)/2 = 0.5$

Tính giá trị cho  $x_1, x_2, \dots$  theo hàm lặp  $\varphi(x)$

## 3.4 Phương pháp lặp

		Sai số	
$x_0$	0.5	$q/(1-q) \times (x_n - x_{n-1})$	$10^{-4}$
$x_1$	0.18125	0.95625	FALSE
$x_2$	0.151488586	0.089284241	FALSE
$x_3$	0.15086912	0.001858399	FALSE
$x_4$	0.150858502	3.18554E-05	TRUE
$x_5$	0.15085832	5.43769E-07	TRUE

Chúng ta dừng ở  $x_4$  và nghiệm gần đúng của phương trình đã cho với độ chính xác là  $10^{-4}$  là: 0.1509

## 3.4 Phương pháp lặp

### Ví dụ 3.4.5

Cho phương trình  $f(x) = 2x^2 + x - 3$ . Tìm nghiệm gần đúng của phương trình trên đoạn  $[0.5; 1.2]$  bằng phương pháp lặp, dừng khi tìm được nghiệm hoặc sai số bé hơn  $10^{-4}$ . Khởi tạo  $x_0 = 0.85$ .

## 3.4 Phương pháp lặp

### Giải

**Bước 1:** Kiểm tra khoảng phân ly nghiệm

$$f(0.5) = 2*0.5^2 + 0.5 - 3 = -2$$

$$f(1.2) = 2*1.2^2 + 1.2 - 3 = 1.08$$

$$f'(x) = 4x + 1$$

$$f'(0.5) = 4*0.5 + 1 = 3$$

$$f'(1.2) = 4*1.2 + 1 = 5.8$$

Kết luận: Khoảng (0.5; 1.2) là khoảng phân ly nghiệm.

## 3.4 Phương pháp lặp

### Giải

**Bước 2:** Tìm phương trình tương đương

Ta có  $f' > 0$  nên chọn:

$$\varphi(x) = x - (2x^2 + x - 3)/5.8$$

Bởi vì

$$M \geq \max_{x \in [0.5, 1.2]} \{|f'(x)|\} \Rightarrow M = 5.8$$

## 3.4 Phương pháp lặp

### Giải

**Bước 3:** Tìm q và kiểm tra xem hàm  $\varphi$  có thỏa mãn điều kiện hội tụ

$$\varphi'(x) = 1 - (4x + 1)/5.8$$

$$\varphi'(0.5) = 1 - (4*0.5 + 1)/5.8 = 0.482758621$$

$$\varphi'(1.2) = 1 - (4*1.2 + 1)/5.8 = 0$$

$$q = \max\{|\varphi'(0.5)|; |\varphi'(1.2)|\} = 0.482758621$$

$q < 1$  nên hàm  $\varphi$  thỏa điều kiện hội tụ.



## 3.4 Phương pháp lặp

**Giải**    **Bước 4:** Tìm nghiệm

Chọn  $x_0 = 0.85$

**Lặp 1:**  $x_1 = \varphi(x_0) = 0.85 - (2 \cdot 0.85^2 + 0.85 - 3)/5.8 = 0.971551724$

$$\Delta x_1 = (0.482758621 / (1 - 0.482758621)) \cdot |0.971551724 - 0.85| = 0.113448276$$

**Lặp 2:**  $x_2 = \varphi(x_1) = 0.971551724 - (2 \cdot 0.971551724^2 + 0.971551724 - 3)/5.8 = 0.995797$

$$\Delta x_2 = (0.482758621 / (1 - 0.482758621)) \cdot |0.995797 - 0.971551724| = 0.022628924$$

## 3.4 Phương pháp lặp

### Giải

**Lặp 3:**  $x_3 = \varphi(x_2) = 0.995797 - (2 \cdot 0.995797^2 + 0.995797 - 3)/5.8 = 0.999414$

$$\Delta x_3 = (0.482758621/(1-0.482758621)) \cdot |0.999414 - 0.995797| = 0.003376$$

**Lặp 4:**  $x_4 = \varphi(x_3) = 0.999414 - (2 \cdot 0.999414^2 + 0.999414 - 3)/5.8 = 0.999919$

$$\Delta x_4 = (0.482758621/(1-0.482758621)) \cdot |0.999919 - 0.999414| = 0.000471$$

**Lặp 5:**  $x_5 = \varphi(x_5) = 0.999919 - (2 \cdot 0.999919^2 + 0.999919 - 3)/5.8 = 0.999988825$

$$\Delta x_5 = (0.482758621/(1-0.482758621)) \cdot |0.999988825 - 0.999919| = 0.00006517$$

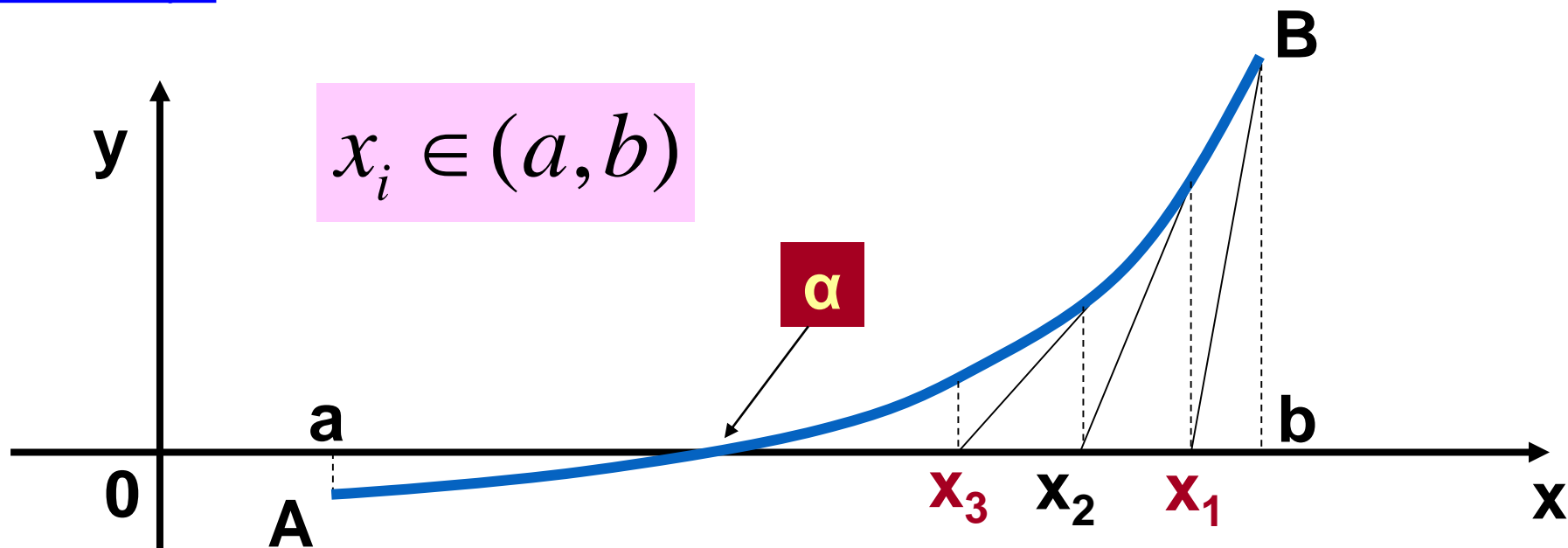
Vậy nghiệm gần đúng là:  $x = 0.999988825 \pm 0.00006517$

## 3.5 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

### 3.5.1 Ý tưởng

Trong khoảng  $(a, b)$ , chúng ta thay đường cong  $y = f(x)$  bằng tiếp tuyến của đường cong tại A hoặc B, nghĩa là xem nghiệm gần đúng của phương trình  $f(x) = 0$  trùng với hoành độ  $x_1$  giữa tiếp tuyến đường cong tại A hoặc B với trục Ox.

### Ví dụ minh họa



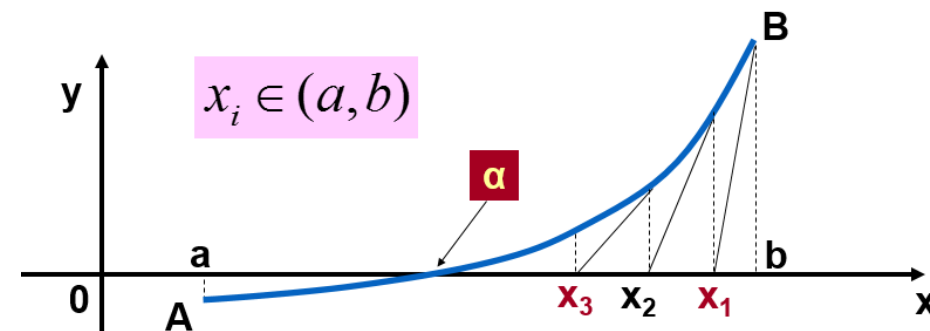
## 3.5 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

### 3.5.2 Mô tả ý tưởng phương pháp

**P/t TT đi qua đường thẳng AB  $\rightarrow$  dạng:  $y = f(x) = ax + b$**

**Lần 1:** 1.1- Chọn miền nghiệm ban (MN) đầu  $(a, b)$

1.2- Từ điểm B trên đồ thị vẽ tiếp tuyến,  
cắt trục hoành tại điểm có hoành độ  $x_1 \rightarrow \alpha$



**Lần 2:** 2.1- Chọn MN mới:  $\alpha \in (x_1, a) \subset (a, b)$

2.2 Tiếp tục vẽ tiếp tuyến  $x_2 \rightarrow \alpha$

..... Lặp lại liên tục nhiều lần

**Lần n:** Dừng ở bước n ta thu được nghiệm xấp xỉ

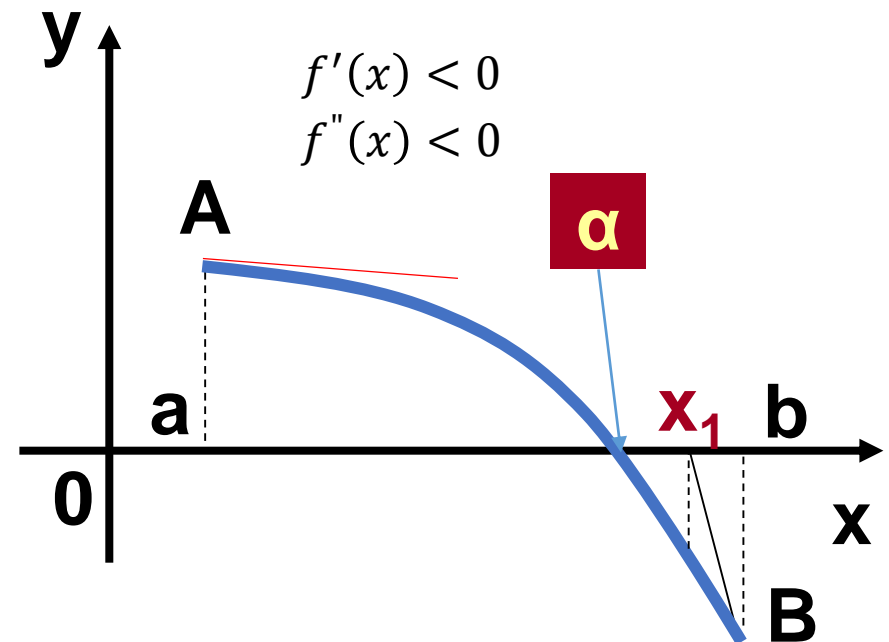
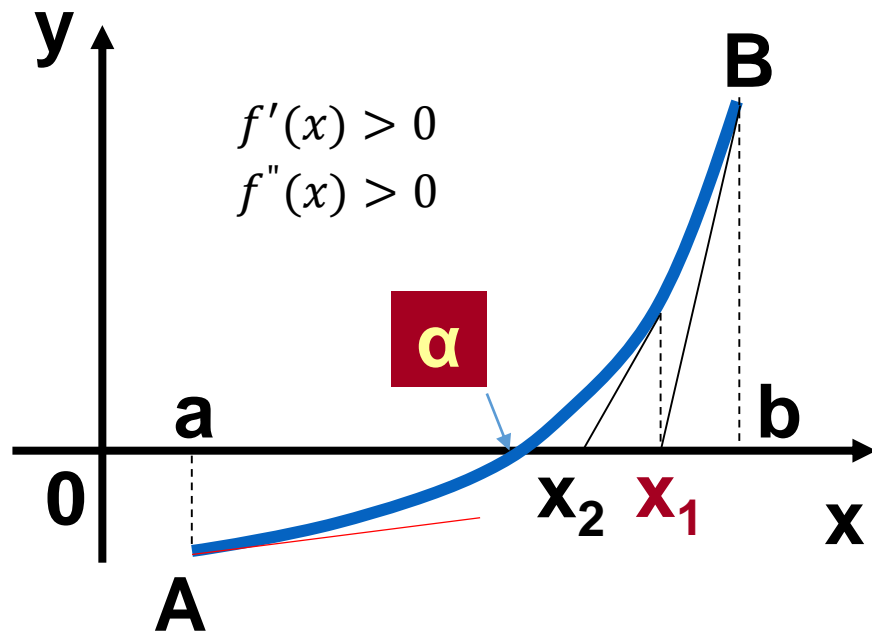
$$x_n \rightarrow \alpha \left( x_n \approx \alpha \right)$$

## 3.5 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

### 3.5.3 Nội dung phương pháp

Trường hợp 1:

$$f'(x) \cdot f''(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0; f''(x) > 0 \\ f'(x) < 0; f''(x) < 0 \end{cases}$$



## 3.5 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

### 3.5.3 Nội dung phương pháp

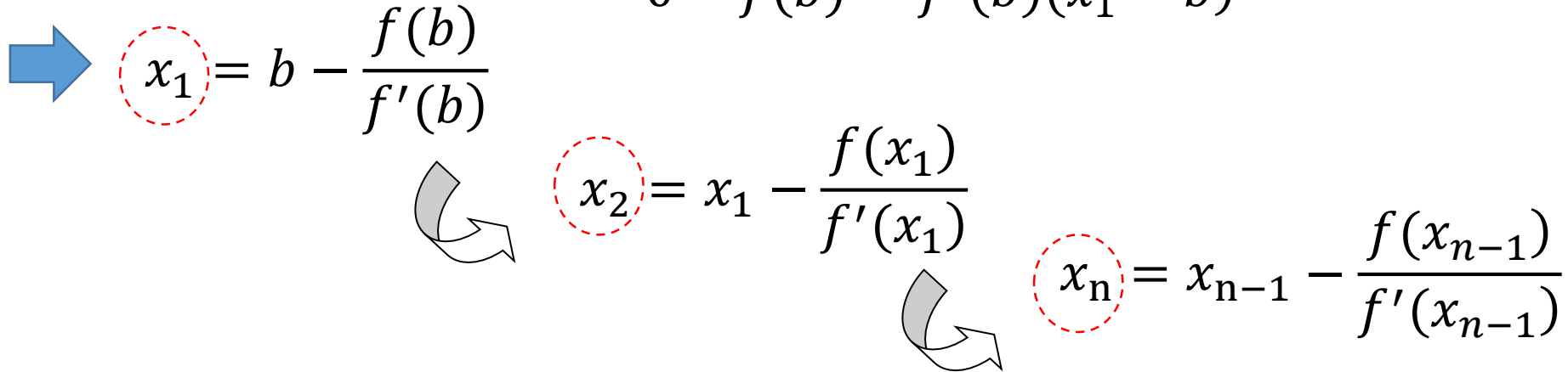
#### Trường hợp 1:

Phương trình tiếp tuyến với đường cong  $y = f(x)$  tại điểm  $B(b, f(b))$  có dạng:

$$y - f(b) = f'(b)(x - b) \quad (3.25)$$

$x_1$  là hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành. Suy ra  $x_1$  là nghiệm của phương trình:

$$0 - f(b) = f'(b)(x_1 - b)$$

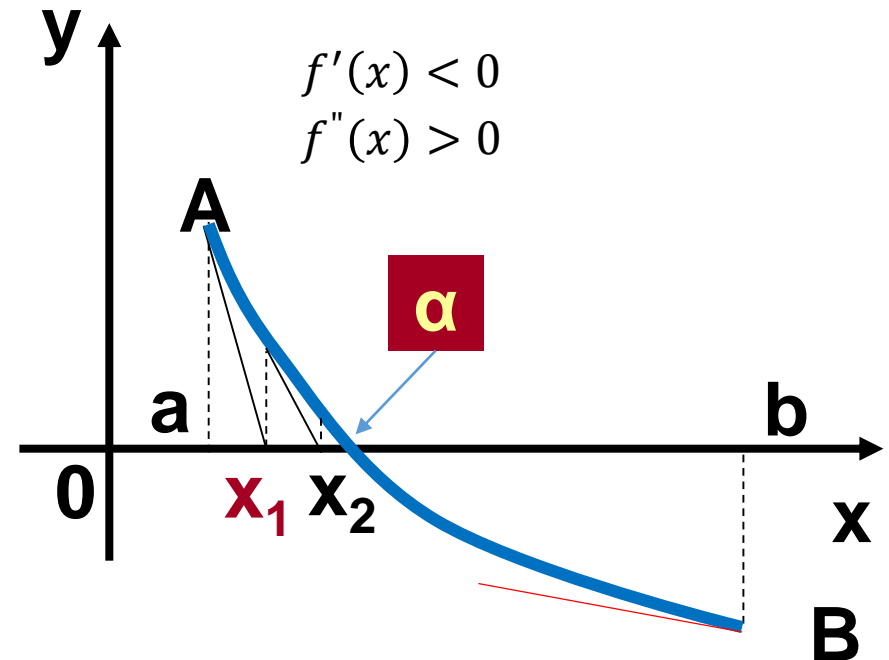
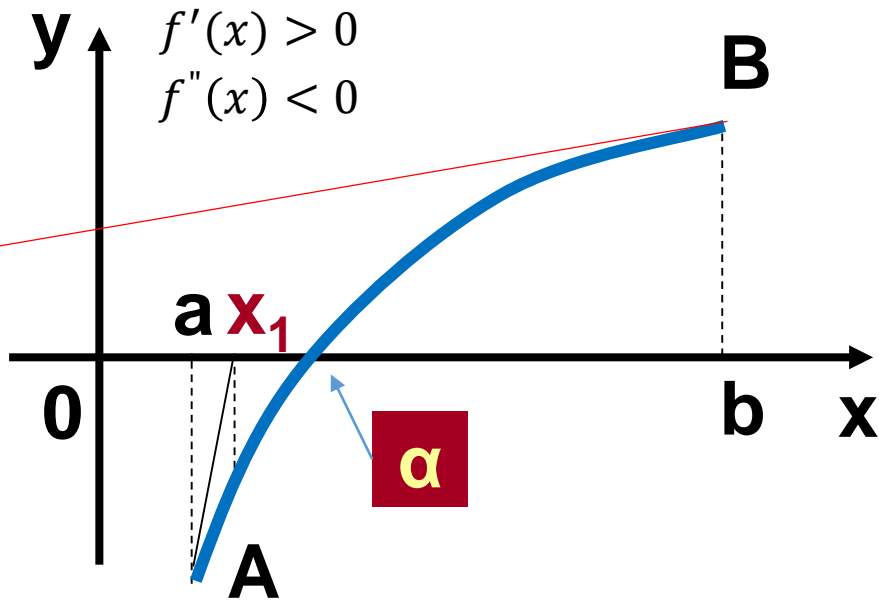

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1 &= b - \frac{f(b)}{f'(b)} \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ x_n &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{aligned}$$

## 3.5 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

### 3.5.3 Nội dung phương pháp

Trường hợp 2:

$$f'(x) \cdot f''(x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0; f''(x) < 0 \\ f'(x) < 0; f''(x) > 0 \end{cases}$$



## 3.5 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

### 3.5.3 Nội dung phương pháp

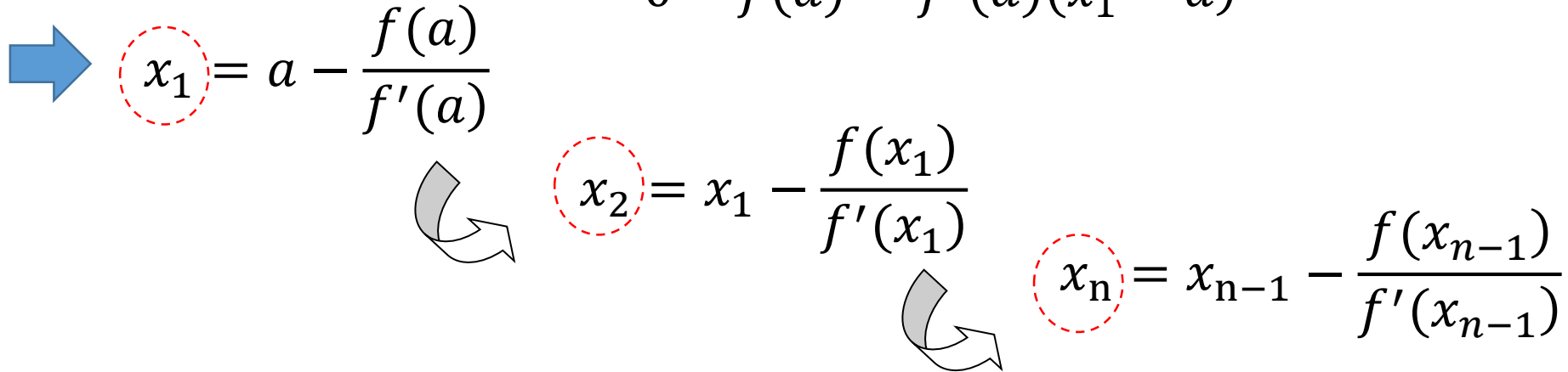
#### Trường hợp 2:

Phương trình tiếp tuyến với đường cong  $y = f(x)$  tại điểm  $A(a, f(a))$  có dạng:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad (3.26)$$

$x_1$  là hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành. Suy ra  $x_1$  là nghiệm của phương trình:

$$0 - f(a) = f'(a)(x_1 - a)$$


$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1 &= a - \frac{f(a)}{f'(a)} \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ x_n &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{aligned}$$



## 3.5 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

### 3.5.3 Nội dung phương pháp

Trường hợp tổng quát

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (3.27)$$

với  $n = 1, 2, \dots$ , và :

- $x_0 = b$  nếu  $f(b)$  và  $f''(x)$  cùng dấu;
- $x_0 = a$  nếu  $f(a)$  và  $f''(x)$  cùng dấu.

## 3.5 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

### Ví dụ 3.5.1

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

$$f(x) \equiv 5x^3 - 20x + 3 = 0$$

biết khoảng cách ly nghiệm là  $(0,1)$ .

### Giải

**Bước 1:** Tính đạo hàm để xác định  $x_0$

$$\begin{array}{l} f'(x) = 15x^2 - 20 \\ f''(x) = 30x \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} f'(0) = -20; f'(1) = -5 \\ f''(0) = 0; f''(1) = 30 \end{array}$$

  $f(0) = 3$ , cùng dấu với  $f''(x)$  nên chọn  $x_0 = 0$ .

## 3.5 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

**Bước 2:** Tìm nghiệm gần đúng của phương trình

Theo công thức (2.27) ta có:

$$x_1 = 0 - \frac{3}{-20} = \frac{3}{20}$$

Áp dụng công thức (2.27) một lần nữa ta có:

$$f(x_1) = f\left(\frac{3}{20}\right) = 5\left(\frac{3}{20}\right)^3 - 20\left(\frac{3}{20}\right) + 3 = 0.016875$$

$$f'(x_1) = f'\left(\frac{3}{20}\right) = 15\left(\frac{3}{20}\right)^2 - 20 = -19.6625$$

$$x_2 = \frac{3}{20} - \frac{0.016875}{-19.6625} = 0.150858233$$

## 3.5 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

### 3.5.4 Đánh giá sai số

Ước lượng sai số : dùng công thức tổng quát

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$$

trong đó:  $0 < m \leq |f'(x_n)|$



$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|}$$

## 3.5 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)

### Ưu/nhược điểm

- Luôn cho nghiệm gần đúng;
- Giải thuật đơn giản;
- Tốc độ hội tụ nhanh;
- Để tính  $x_n$ , ta phải tính giá trị của hàm  $f$  và giá trị của đạo hàm  $f'$  tại điểm  $x_{n-1}$ .

## 3.6 Phương pháp dây cung

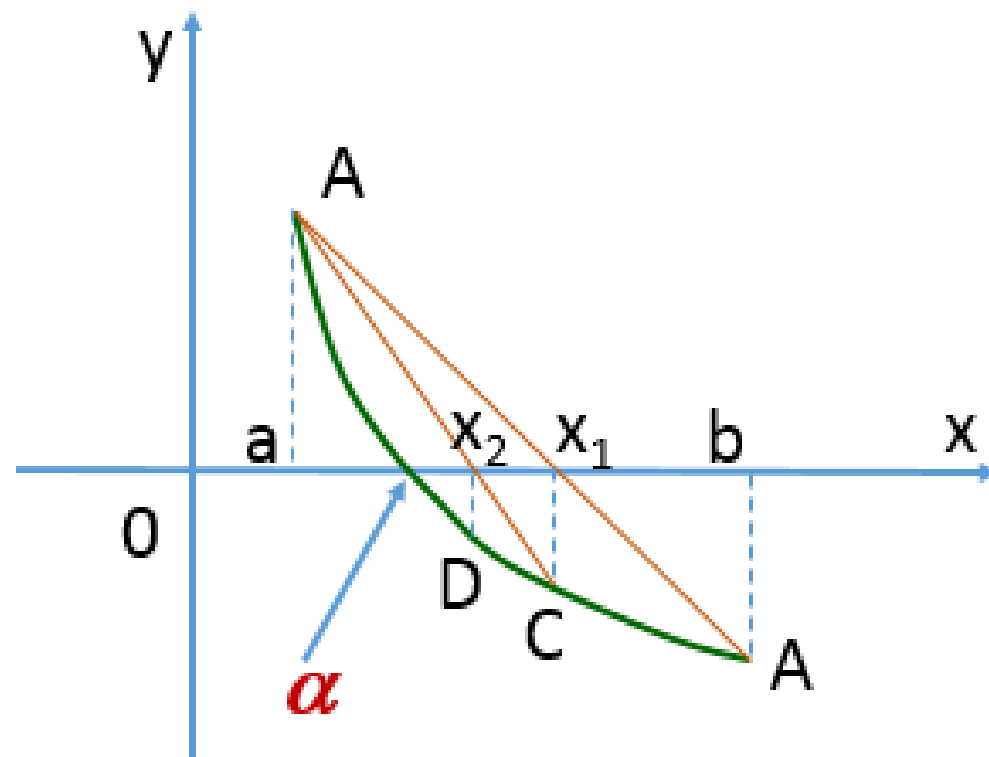
### 3.6.1 Ý tưởng

Cho  $f(x) = 0$ ,  $(a, b)$  là khoảng cách li nghiệm.

Nghiệm đúng là  $\alpha$  (hình bên). Ý tưởng là thay vì tìm nghiệm đúng trên cung tròn AB thì ta tìm nghiệm gần đúng thông qua dây cung AB (đoạn thẳng AB).

Dây cung AB cắt trục x tại điểm có tọa độ  $(x_1, 0)$ .

Nếu  $f(a) \cdot f(x_1) < 0$ , thay  $b = x_1$  ta có khoảng nghiệm mới là  $(a, x_1)$ . Nếu  $f(b) \cdot f(x_1) < 0$ , thay  $a = x_1$  ta có khoảng nghiệm mới là  $(x_1, b)$ . Lặp lại trên khoảng nghiệm mới ta được  $x_2, \dots$



## 3.6 Phương pháp dây cung

### Trình tự thực hiện thông qua 1 ví dụ

Cho pt  $f(x)=0$ ,  $(a_0, b_0)$  là khoảng cách ly nghiệm.  
Tìm nghiệm gần đúng  $a_i$  trong  $(a_0, b_0)$ .

**Lần 1:** 1.1- Chọn miền nghiệm (MN) ban đầu  $\alpha \in (a_0, b_0)$

1.2- Nối 2 điểm A và B trên đồ thị,

1.3- AB cắt trục hoành tại điểm có hoành độ:  $a_1$

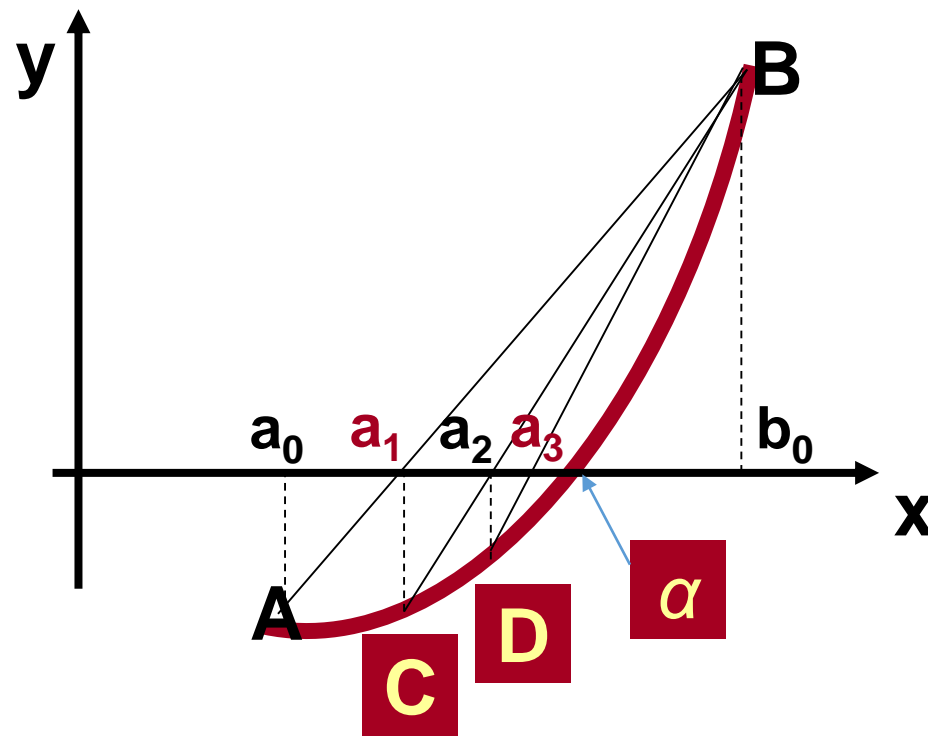
**Lần 2:** 2.1- Chọn MN mới:  $\alpha \in (a_1, b_0) \subset (a_0, b_0)$

2.2 Nối C với B ta lại tìm được một điểm mới:  $a_2$

..... Lặp lại liên tục nhiều lần.

**Lần n:** Dừng ở bước n ta thu được nghiệm xấp xỉ

$$a_n \Rightarrow (\approx) \alpha$$



## 3.6 Phương pháp dây cung

### 3.6.2 Đường thẳng đi qua 2 điểm

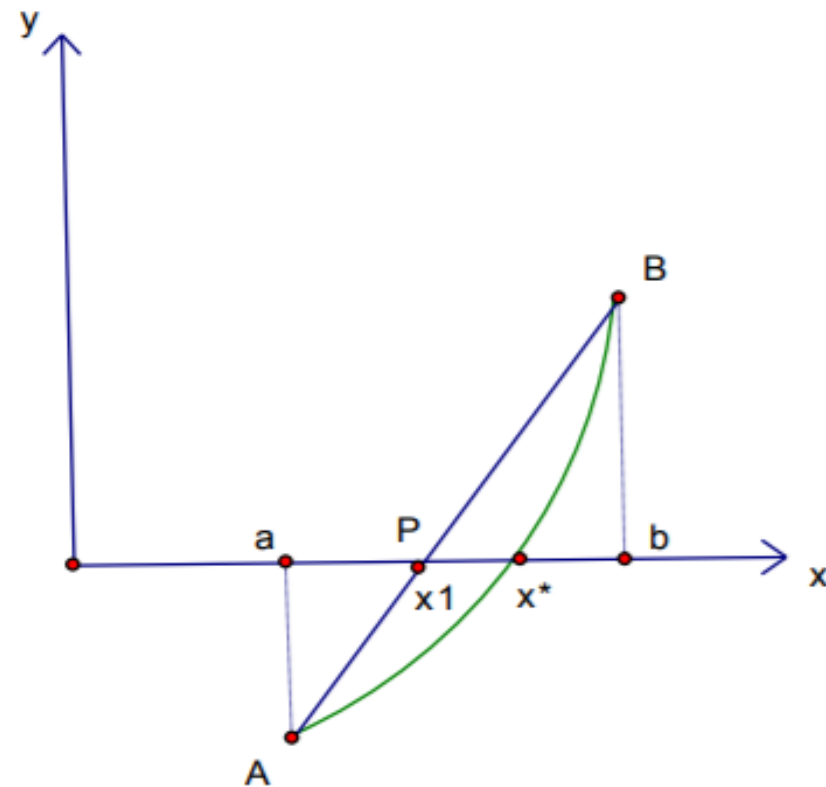
Dây cung AB là đường thẳng đi qua hai điểm  $A(a, f(a))$  và  $B(b, f(b))$ .

**Trường hợp 1:**  $f'(x)f''(x) > 0$ .  $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0$  và  $f''(x) > 0$  với  $\forall x \in (a, b)$  nên phương trình dây cung AB là:

$$\frac{Y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{X - a}{b - a} \quad (3.8)$$

Tại P ta có  $Y = 0$  và  $X = x_1$ , nên thay vào (2.8) ta có:

$$\frac{-f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a} \quad (3.9)$$



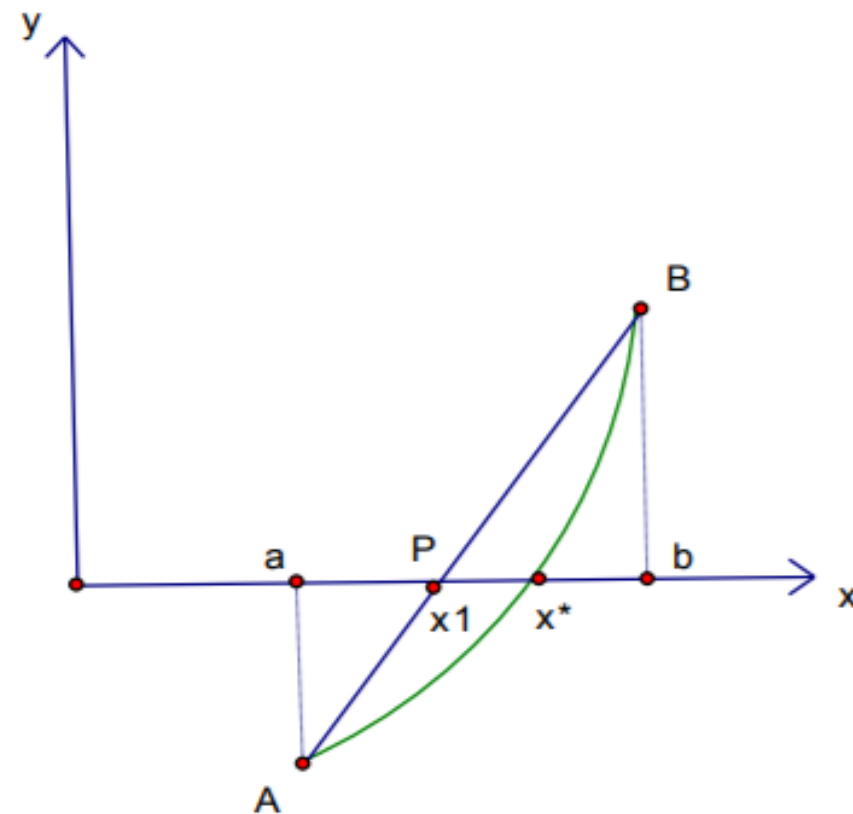


## 3.6 Phương pháp dây cung

### 3.6.2 Đường thẳng đi qua 2 điểm

➔ 
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} \\ x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

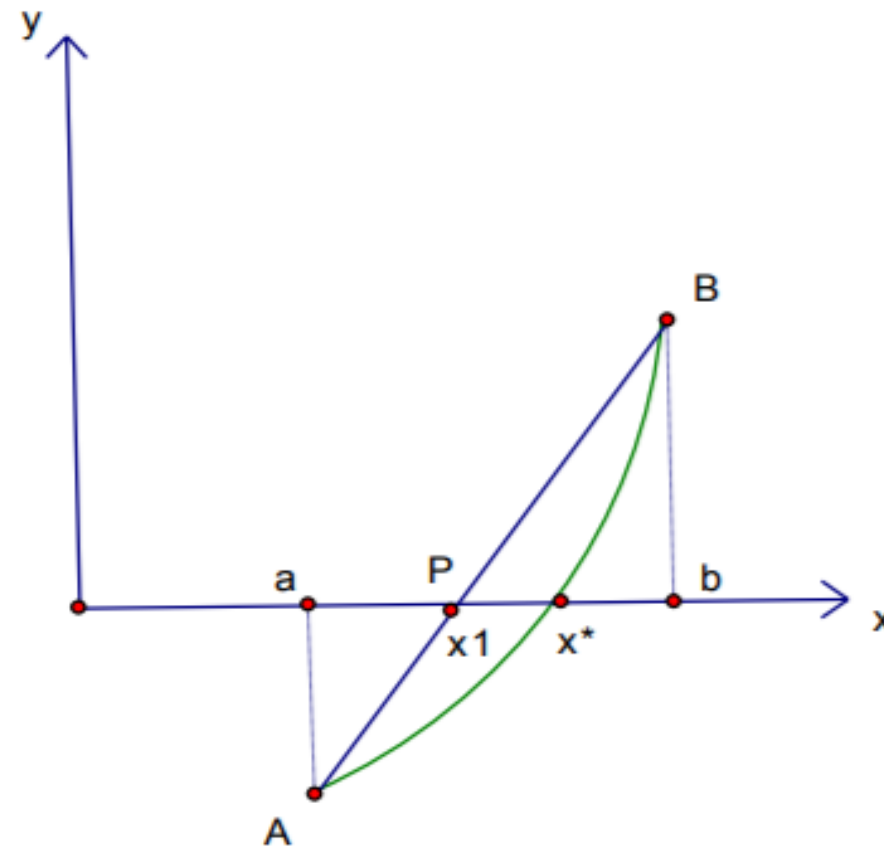
(3.11)



## 3.6 Phương pháp dây cung

Ta xây dựng dãy  $\{x_n\}$  theo hệ thức:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \end{cases} \quad (3.12)$$



## 3.6 Phương pháp dây cung

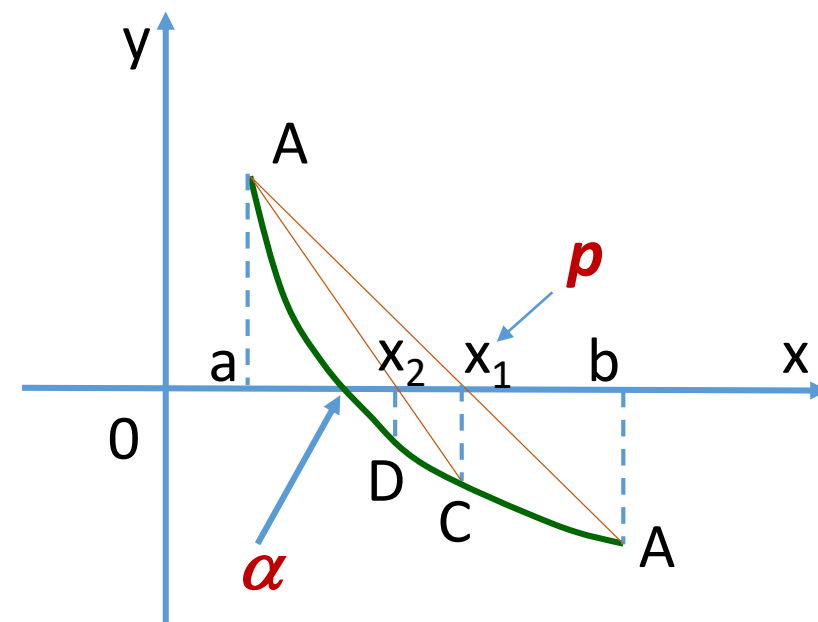
### 3.6.2 Đường thẳng đi qua 2 điểm

**Trường hợp 2:**  $f'(x)f''(x) < 0$ .  $f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0$  và  $f''(x) > 0$  với  $\forall x \in (a, b)$  nên phương trình dây cung AB là:

$$\frac{Y - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{X - b}{b - a} \quad (3.13)$$

Tại P ta có  $Y = 0$  và  $X = x_1$ , nên thay vào (3.13) ta có:

$$\frac{-f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - b}{b - a} \quad (3.14)$$

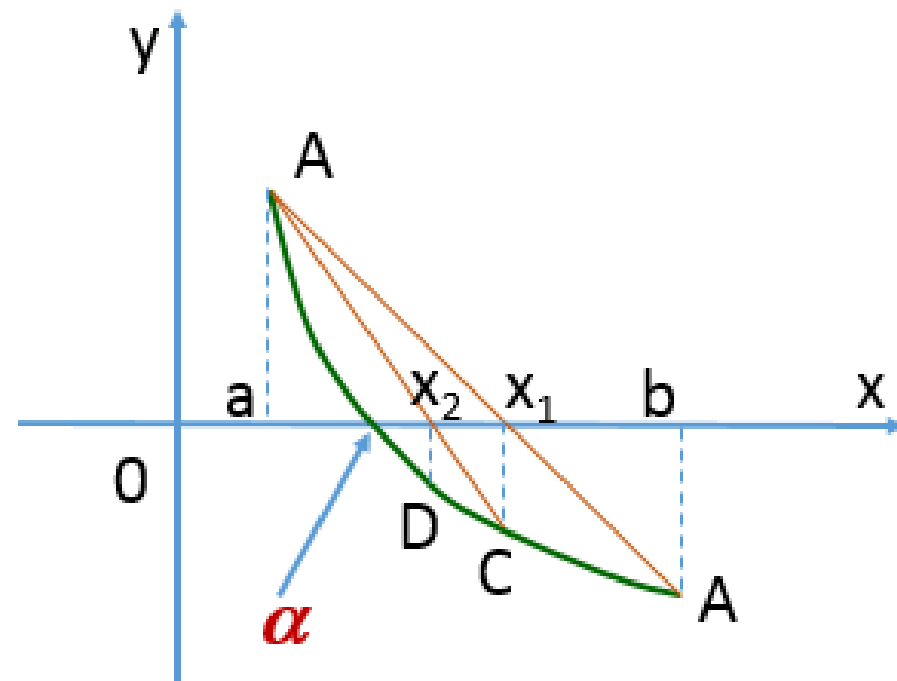


## 3.6 Phương pháp dây cung

**Trường hợp 2:** ta xây dựng dãy  $\{x_n\}$  theo hệ thức:

➔ 
$$x_1 = b - \frac{(b-a)f(b)}{f(b) - f(a)} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - a)f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} \end{cases} \quad (3.16)$$



## 3.6 Phương pháp dây cung

**Kết hợp trường hợp 1 và 2**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)} \quad (3.17)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

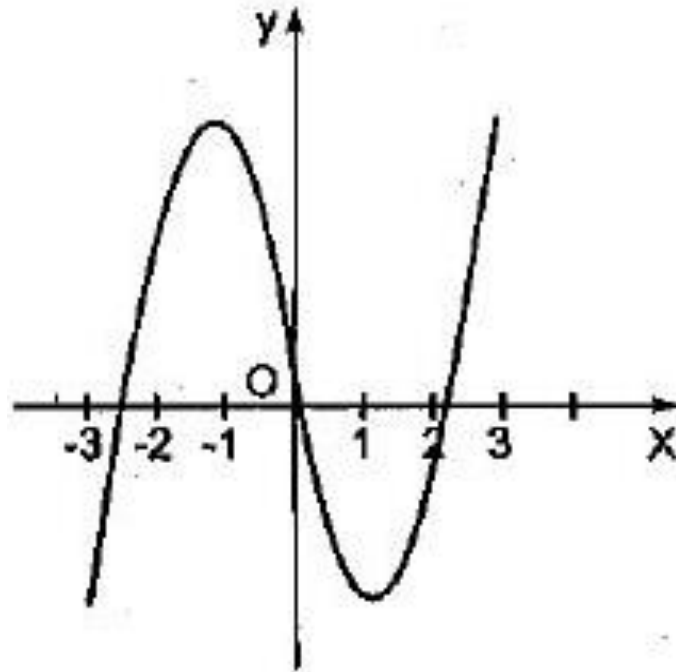
- $d = b$  nếu  $f(b)$  cùng dấu với  $f''(x)$ ;  $x_0 = a$ ;
- $d = a$  nếu  $f(a)$  cùng dấu với  $f''(x)$ ;  $x_0 = b$ ;

## 3.6 Phương pháp dây cung

### Ví dụ 3.6.1

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình sau trong khoảng  $(0, 1)$

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$$



## 3.6 Phương pháp dây cung

### Giải:

$$f'(x) = 3x^2 - 6;$$

$$f'(0) = -6; f'(1) = -3;$$

$$f''(x) = 6x; \Rightarrow f'' \text{ dương};$$

$$f(0) = 2 > 0; f(1) = -3 < 0;$$

Vì  $f(0)$  cùng dấu với  $f''$  nên  $x_0 = 1$  và  $d = 0$ ;

Áp dụng CT (3.17)

$$x_1 = 1 - \frac{(-3)(1 - 0)}{-3 - 2} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

- $d = b$  nếu  $f(b)$  cùng dấu với  $f''(x)$ ;  $x_0 = a$ ;
- $d = a$  nếu  $f(a)$  cùng dấu với  $f''(x)$ ;  $x_0 = b$ ;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)}$$

## 3.6 Phương pháp dây cung

Vì  $f(0,4) = -0.336$  và  $f(0) = 2$  nên nghiệm phải tìm nằm trong khoảng  $[0; 0.4]$ . Áp dụng CT (2.17) cho khoảng mới, ta có:

$$x_2 = 0.4 - \frac{-0.336 \times 0.4}{-0.336 - 2} = 0.4 - \frac{0.336 \times 0.4}{0.336 + 2} = 0.342466$$

$f(x_2) = -0.01463$  và  $f(0) = 2$  nên nghiệm phải tìm nằm trong khoảng  $[0; 0.342466]$ .

Áp dụng CT (2.17) cho khoảng mới, ta có:

$$x_3 = 0.342466 - \frac{-0.01463 \times 0.342466}{-0.01463 - 2} = 0.342466 - \frac{0.0501}{2.01463} = 0.339979$$



## 3.6 Phương pháp dây cung

### 3.6.3 Đánh giá sai số

Ước lượng sai số thông qua giá trị tìm được trước đó:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M - m}{m} |x_n - x_{n-1}| \quad (3.18)$$

trong đó:  $0 < m \leq |f'(x)| \leq M < +\infty$

Tính sai số theo công thức đơn giản sau:

$$|x_n - \alpha| < \frac{|f(x_n)|}{m} \quad (3.19)$$

trong đó:  $0 < m \leq |f'(x_n)|$



$$|x_n - \alpha| < \frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|} \quad (3.20)$$

## 3.6 Phương pháp dây cung

### 3.6.4 Ưu/nhược điểm

- Luôn cho nghiệm gần đúng;
- Giải thuật đơn giản;
- Tốc độ hội tụ chậm.

## 3.6 Phương pháp dây cung

### 3.6.5 Thuật toán

Để giảm khối lượng tính toán (không phải tính đạo hàm) chúng ta có thể thực hiện thuật toán dựa trên công thức 3.10 như sau:

$$x_1 = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}$$

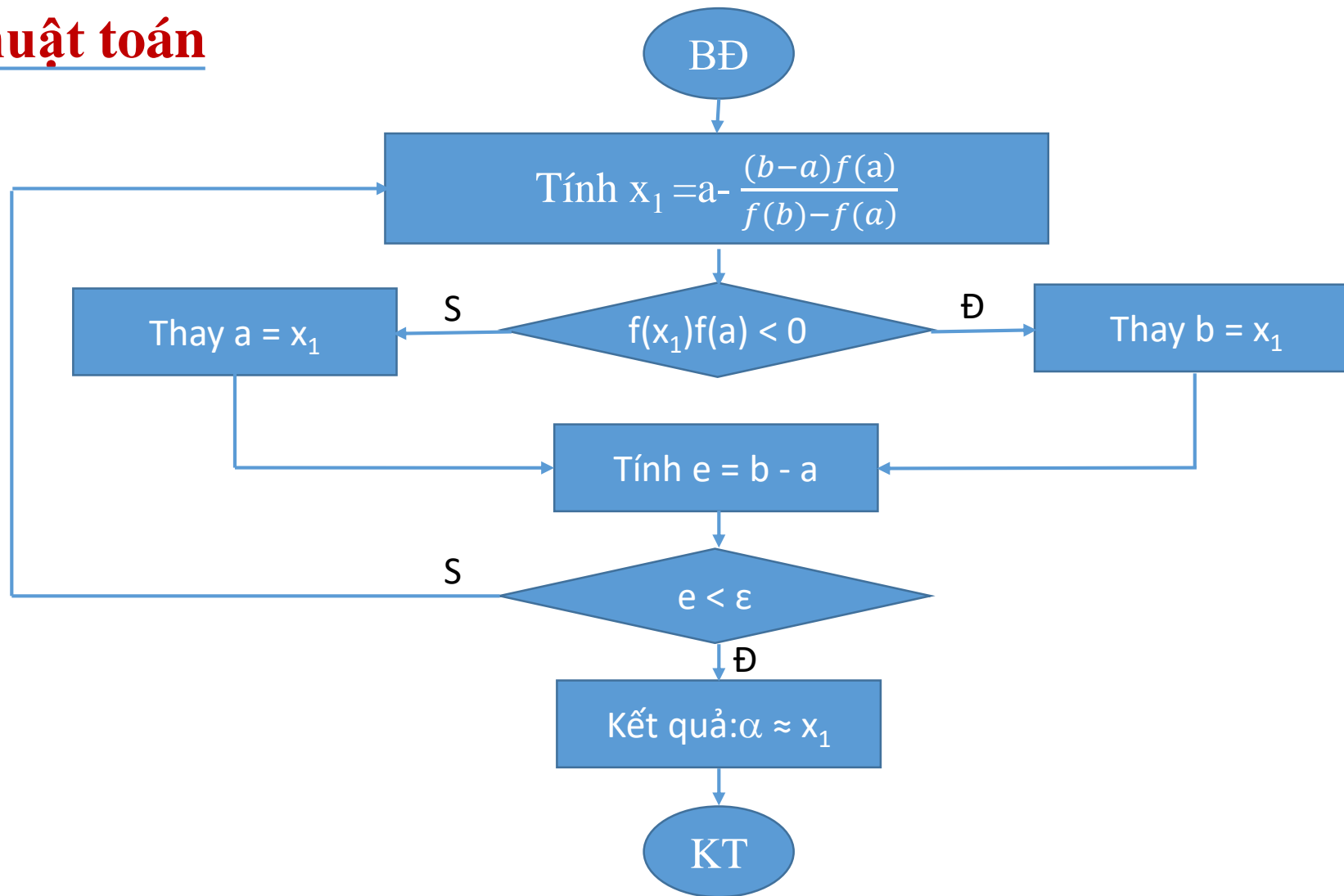
Nếu  $f(a) \cdot f(x_1) < 0$ , thay  $b = x_1$  ta có khoảng nghiệm mới là  $(a, x_1)$ .

Nếu  $f(b) \cdot f(x_1) < 0$ , thay  $a = x_1$  ta có khoảng nghiệm mới là  $(x_1, b)$ .

Tính lại  $x_1$  với  $a$  hoặc  $b$  được cập nhật giá trị mới.

## 3.6 Phương pháp dây cung

### 3.6.5 Thuật toán



## 3.6 Phương pháp dây cung

### Ví dụ 3.6.2

Cho hàm số  $f(x) = x^4 - 2x^2$ .

Tìm xấp xỉ nghiệm của phương trình trên đoạn  $(-1.8; -1.2)$  thỏa yêu cầu sai số bé hơn 0.02 bằng phương pháp dây cung.

## 3.6 Phương pháp dây cung

### Ví dụ 3.6.2

**Giải:**    **Bước 1:** Kiểm tra khoảng phân ly nghiệm

$$f(-1.8) = -1.8^4 - 2 \cdot -1.8^2 = 4.0176$$

$$f(-1.2) = -1.2^4 - 2 \cdot -1.2^2 = -0.8064$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(-1.8) = 4 \cdot -1.8^3 - 4 \cdot -1.8 = -16.128$$

$$f'(-1.2) = 4 \cdot -1.2^3 - 4 \cdot -1.2 = -2.112$$

Kết luận: đoạn  $(-1.8; -1.2)$  là đoạn phân ly nghiệm.

## 3.6 Phương pháp dây cung

**Bước 2:** Chọn  $x_0$  và  $d$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

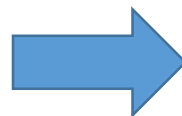
$$f''(-1.8) = 12 \cdot (-1.8)^2 - 4 = 34.88$$

$$f''(-1.2) = 12 \cdot (-1.2)^2 - 4 = 13.28$$

Vì  $f(-1.8)$  cùng dấu với  $f'$  nên ta chọn  $d = -1.8$  và  $x_0 = -1.2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)}$$

$$|x_n - \alpha| < \frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|}$$


$$x_1 = -1.2 - \frac{f(-1.2)(-1.2 - -1.8)}{f(-1.2) - f(-1.8)}$$

## 3.6 Phương pháp dây cung

**Bước 3:** Tìm nghiệm

$$x_1 = -1.2 - \frac{f(-1.2)(-1.2 - -1.8)}{f(-1.2) - f(-1.8)}$$

$$x_1 = -1.2 - \frac{-0.8064 * 0.6}{-0.8064 - 4.0176}$$

$$x_1 = -1.2 - \frac{-0.48384}{-4.824}$$

$$x_1 = -1.300298507$$

$$\Delta x_1 = \frac{|f(-1.300298507)|}{|f'(-1.300298507)|} = \frac{0.8064}{3.59286} = 0.224445$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)}$$

$$|x_n - \alpha| < \frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|}$$



## 3.6 Phương pháp dây cung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)}$$

**Bước 3:** Tìm nghiệm

$$x_2 = -1.300298507 - \frac{f(-1.300298507)(-1.300298507 - -1.8)}{f(-1.300298507) - f(-1.8)}$$

$$x_2 = -1.300298507 - \frac{-0.522828231 * 0.499701493}{-0.522828231 - 4.0176}$$

$$x_2 = -1.300298507 - \frac{-0.261258048}{-4.540428231}$$

$$|x_n - \alpha| < \frac{|f(x_n)|}{|f'(x_n)|}$$

$$x_2 = -1.357838905$$

$$\Delta x_2 = \frac{|f(-1.357838905)|}{|f'(-1.357838905)|} = \frac{0.288125607}{4.582578624} = 0.062874122$$

# Bài tập

**Bài 1:** Tìm nghiệm của phương trình theo 4 phương pháp (chia đôi, dây cung, lặp và tiếp tuyến) trong khoảng cách ly nghiệm:  $[9, 10]$  với sai số tuyệt đối  $10^{-5}$

$$f(x) = x^3 + x - 1000 = 0$$

**Bài 2:** Tìm nghiệm của phương trình theo 4 phương pháp (chia đôi, dây cung, lặp và tiếp tuyến) trong khoảng cách ly nghiệm:  $[0, 1]$  với sai số tuyệt đối  $10^{-5}$

$$f(x) = \sin x - e^{-x} = 0$$

**Bài 3:** Tìm nghiệm gần đúng của phương trình sau với sai số tuyệt đối không quá  $10^{-5}$

$$x^2 - \sin \pi x = 0$$