Xử lý ảnh số
Các phép biến đổi ảnh

Chương trình dành cho kỹ sư CNTT

Nguyễn Linh Giang

Các phép biến đổi ảnh

- Biến đổi đơn nguyên (unitary)
- Biến đổi Fourier
- Biến đổi sin, cosin
- Biến đổi Hadamar
- Biến đổi Haar
- Biến đổi K-L

Biến đổi đơn nguyên (unitary)

- Ma trận Unitar và ma trận trực giao
  - Ma trận A là *trực giao* nếu

$$A^{-1} = A^{T} \text{ hay } AA^{T} = I$$

    - Ví dụ: $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

  - Ma trận A là ma trận đơn nguyên (unitary) nếu

$$A^{-1} = A^{*T} \text{ hay } AA^{*T} = I$$

    - Ví dụ: $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{vmatrix}$

  - Ma trận A là thực thì $A = A^{*}$, tính trực giao và tính đơn nguyên trùng nhau.
  - Ma trận A^{*T} còn gọi là A^{H} – ma trận Hermitian

Biến đổi đơn nguyên (unitary)

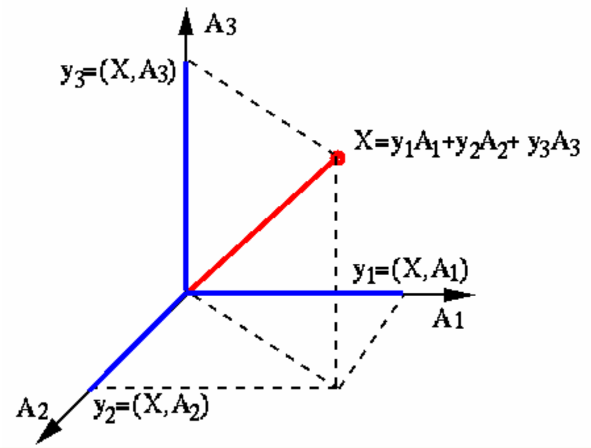
- Biến đổi unitar một chiều (1D-unitary)
  - A ma trận đơn nguyên, $AA^{*T}=I$
  - s(n) = { s(0), s(1), ..., s(n-1)}
  - $S = (s_0, s_1, ..., s_{n-1})^T$
  - Biến đổi đơn nguyên một chiều: $\begin{cases} V = AS \\ S = A^{*T}V \end{cases}$

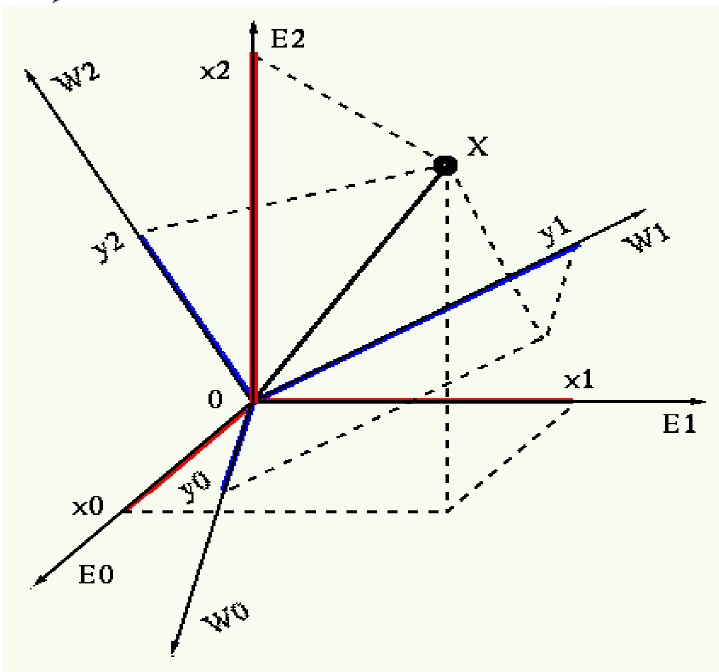
    $S = A^{-1}\, V = A^{*T}\, V = \Sigma_i a_i^{*T}\, v_i$ trong đó

    $a_i^{*T} = (a^*_{i,0}, \ ..., \ a^*_{i,N-1})^T$ – là cội thứ i của ma trận A^{*T} và là hàng thứ i của ma trận A^*
  - a_i^{*T} gọi là vector cơ sở của phép biến đổi đơn nguyên A
  - Phép biến đổi đơn nguyên A phân tích vector S thành tổ hợp tuyến tính của các vector cơ sở với vector hệ số phân tích là V

Biến đổi đơn nguyên (unitary)

– Ví dụ:
  - với A = I = (..., E_i, ...),
    ta có $s = \sum_i a_i v_i = \sum_i E_i v_i$, trong đó E_i là vector đơn vị cơ sở và bằng:
    E_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)





Biến đổi đơn nguyên (unitary)

- Tính chất của phép biến đổi đơn nguyên:
  - Là phép biến đổi tuyến tính:

$$S_1 \Rightarrow V_1$$

$$S_2 \Rightarrow V_2$$

a, b: const

$$S = aS_1 + bS_2 \Rightarrow V = aV_1 + bV_2$$

  - Định thức và các giá trị riêng của A bằng 1;
  - Phép quay: phép biến đổi đơn nguyên là phép quay vector trong không gian N chiều hay nói cách khác là phép quay hệ trục tọa độ quanh gốc tọa độ trong không gian;

Biến đổi đơn nguyên (unitary)

– Bảo toàn năng lượng (đẳng thức Parseval):

$$||s||^2 = ||v||^2$$

– Năng lượng tập trung:
  - Đối với ảnh thông thường, năng lượng phân bố không đều;
  - Các thành phần biến thiên nhanh chiếm năng lượng nhỏ trong tín hiệu;
  - Nhiều phép biến đổi đơn nguyên tập trung năng lượng ảnh vào một vài thành phần hệ số biến đổi;

– Giải tương quan (decorrelation)
  - Đầu vào là vector có các thành phần tương quan mạnh, qua phép biến đổi nhận được các thành phần tương quan yếu;
  - Ma trận hiệp biến: $E[\,(x - E(x))(x - E(x))^{*T}\,]$
    – Các thành phần nhỏ cách xa đường chéo có tương quan yếu.

Biến đổi đơn nguyên (unitary)

- Biến đổi đơn nguyên hai chiều(2D unitary transform)
  - A - ma trận đơn nguyên: $AA^{*T} = I$
  - *s(m, n)*: ma trận ảnh *S*;
  - *v(k, l):* ma trận hệ số biến đổi *V*;
  - Biến đổi đơn nguyên hai chiều: $\begin{cases} V = ASA^T \\ S = A^{*T}VA^* \end{cases}$
  - Điều kiện trực chuẩn: $\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n)a^*_{k',l'}(m,n) = \delta(k-k', l-l')$
  - Điều kiện đầy đủ của hệ cơ sở: $\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n)a^*_{k,l}(m',n') = \delta(m-m', n-n')$
  - Khai triển biến đổi hai chiều: $\begin{cases} v(k,l) = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} s(m,n)a_{k,l}(m,n) \\ s(k,l) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} v(k,l)a^*_{k,l}(m,n) \end{cases}$

Biến đổi đơn nguyên (unitary)

- Độ phức tạp:
  - Cần N^2 phép toán nhân số phức;
  - Cần N^2 phép cộng số phức;
  - Độ phức tạp $O(N^4)$ đối với ảnh NxN
- Khi ma trận A có các phần tử phân tách được:
  - $a_{k,l}(m,n) = a_k(m)\, b_l(n)$, hay là $a_{k,l}(m,n) = a(k,m)\, b(l,n)$
  - $\{a_k(m)\}_k$ và $\{b_l(n)\}_l$ là tập hợp đầy đủ các vector cơ sở trực chuẩn 1-D
    - Sử dụng các vector này làm các hàng của các ma trận đơn nguyên $A=|a(k,m)|$ và $B=|b(l,n)|$
  - Áp dụng vào các hàng và cột của V , ta có: $V = A\ X\ B^T$
  - Trong nhiều trường hợp, A và B được chọn trùng nhau.
  - Đối với ảnh vuông NxN: $V = AXA^T$; $S = A^H Y A^*$
  - Đối với ảnh chữ nhật MxN: $V = A_M X A_N{}^T$; $S = A_M{}^H Y A_N{}^*$
  - Độ phức tạp tính toán: $\sim O(N^3)$

Biến đổi đơn nguyên (unitary)

- Các hình ảnh cơ sở
  - $S = A^H V A^*$, sau khi khai triển, ta sẽ có:

    $s(m, n) = \sum_k \sum_l a^*(k,m) a^*(l,n) v(k,l)$
  - Dưới dạng ma trận:
    - a^*_k cột thứ k của ma trận A^H
    - a^*_l cột thứ l của ma trận A^H
    - $A_{k,l} = a^*_k (a^*_l)^T$: ma trận hình ảnh cơ sở
    - $S = \sum_k \sum_l A_{k,l} v(k, l)$: khai triển hình ảnh S thành tổ hợp tuyến tính các hình ảnh cơ sở với các hệ số khai triển bằng phần tử tương ứng của ma trận V.

Phép biến đổi Fourier đơn nguyên

- Phép biến đổi Fourier đơn nguyên một chiều:
  - $S = (s_0, s_1, ..., s_{N-1})^T$: vector tín hiệu
  - Ma trận Fourier đơn nguyên

  trong đó $W_N = e^{-j2k\pi n/N}$: vector cơ sở

  - Biến đổi Fourier đơn nguyên 1D:

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\| W_N^{kn} \right\|_{N \times N}$$

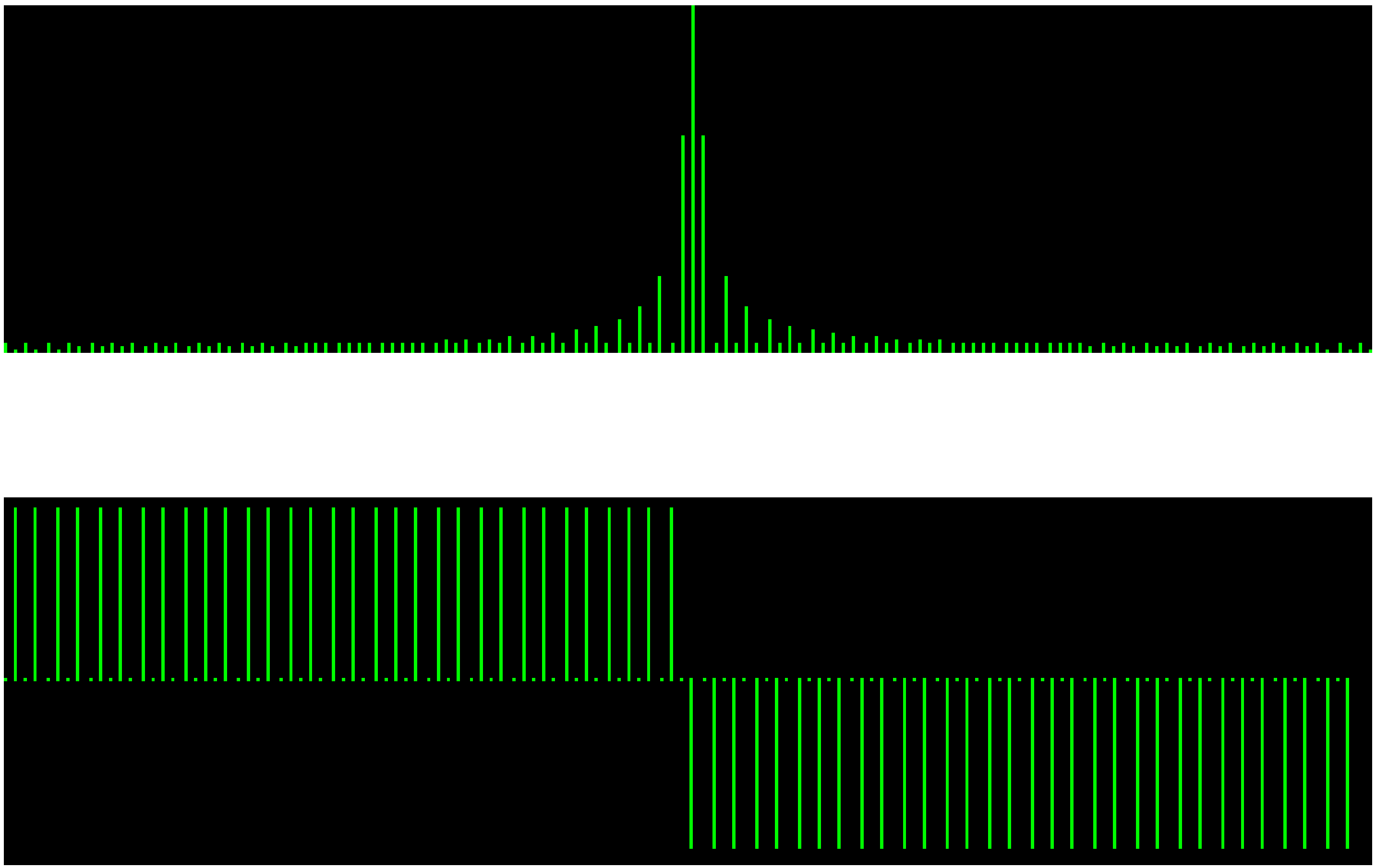
$$\begin{cases} V = FS \\ S = F^{*T} V \end{cases}$$

  - Khai triển phép biến đổi Fourier đơn nguyên 1D:

$$\begin{cases} v(k) = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} s(n) W_N^{nk} \\ s(n) = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} v(k) W_N^{-nk} \end{cases}$$

Phép biến đổi Fourier đơn nguyên

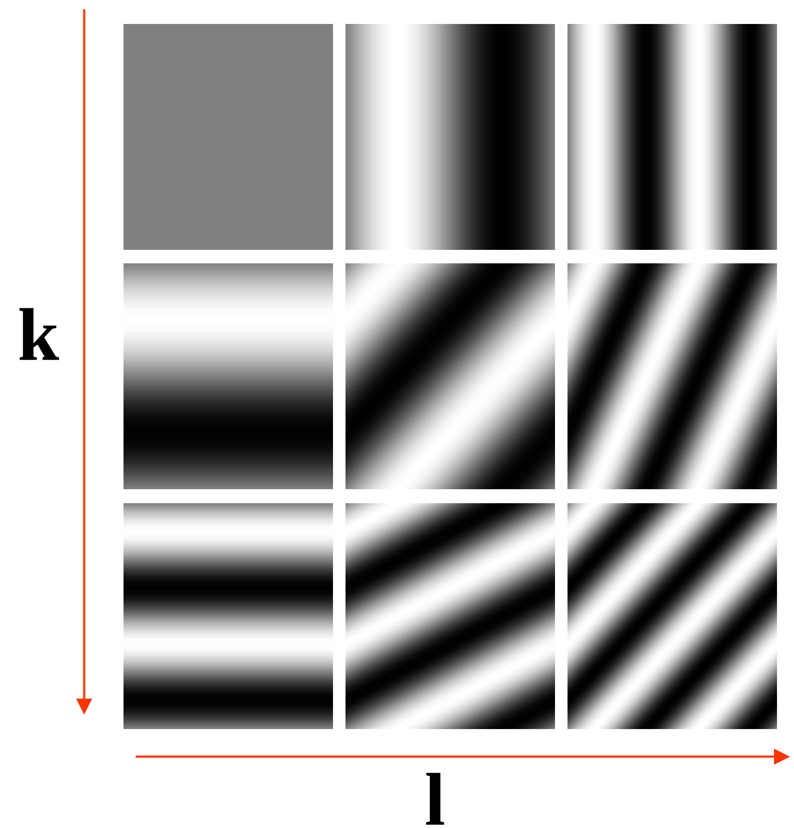
– Ví dụ: s(n) = 1 với 0≤ n ≤64 các hệ số Fourier N=128 điểm:



Phép biến đổi Fourier đơn nguyên

- Phép biến đổi Fourier đơn nguyên hai chiều
  - Ma trận đơn nguyên: $F = F^T$; $F^* = F^{*T}$; $F^* = F^{-1}$
  - $V = FSF$
  - $S = F^*VF^*$
  - Khai triển phép biến đổi 2D Fourier đơn nguyên

$$\begin{cases} v(k,l) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} s(m,n) W_N^{km} W_N^{\mathrm{ln}} \\ s(m,n) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} v(k,l) W_N^{-km} W_N^{-\mathrm{ln}} \end{cases}$$

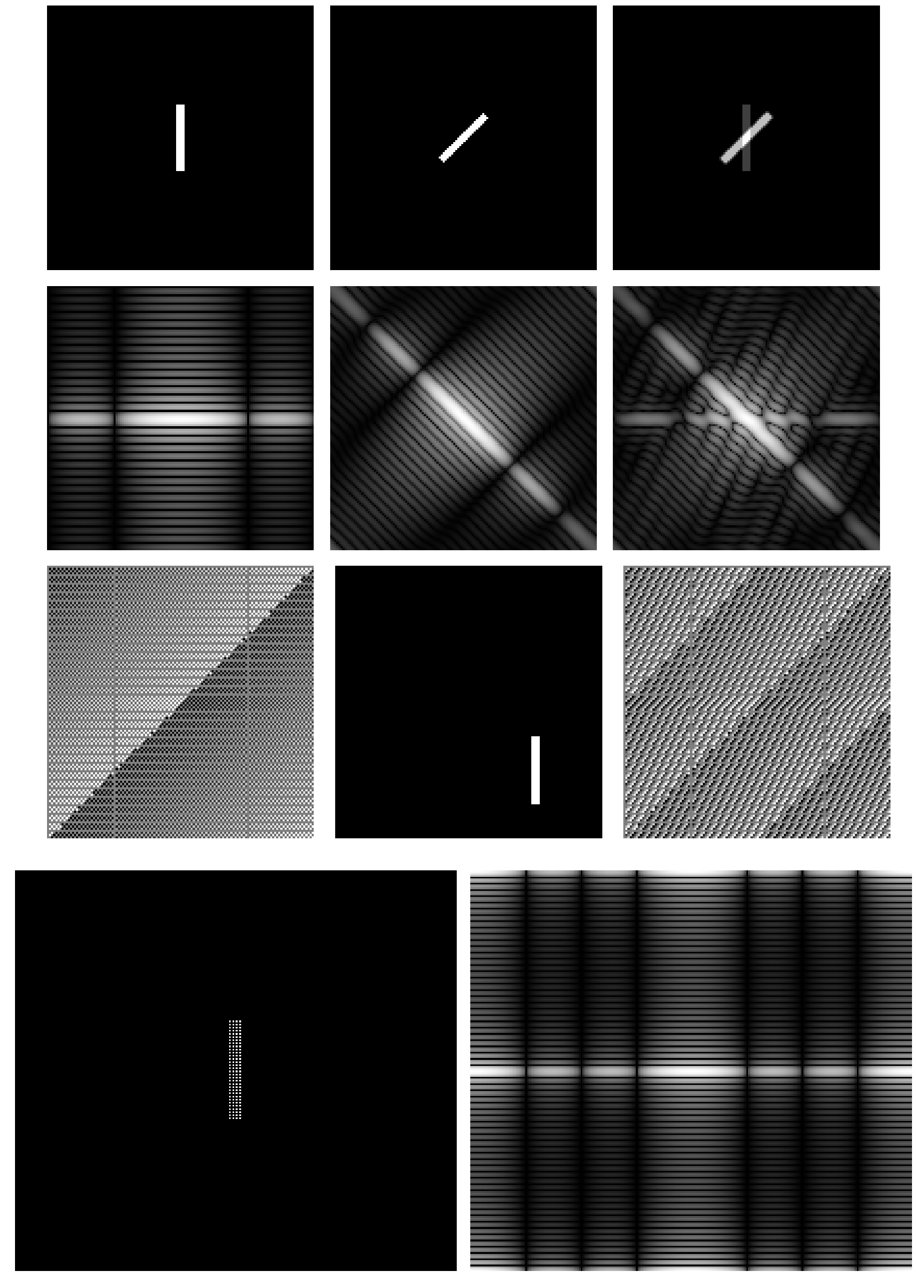


Phép biến đổi Fourier đơn nguyên

- Tính chất của phép biến đổi Fourier đơn nguyên
  - Tính tuyến tính;
  - Biến đổi Fourier của tín hiệu bị dịch
  - Phép quay: khi tín hiệu bị quay một góc θ, phổ của tín hiệu cũng bị quay đi cùng một góc;
  - Khai triển:

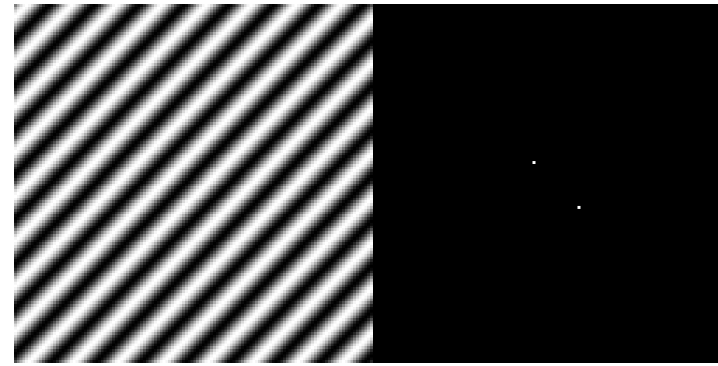
$$g(m',n') = \begin{cases} f\left(\dfrac{m}{p}, \dfrac{n}{p}\right) & , m, n \vdots p \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

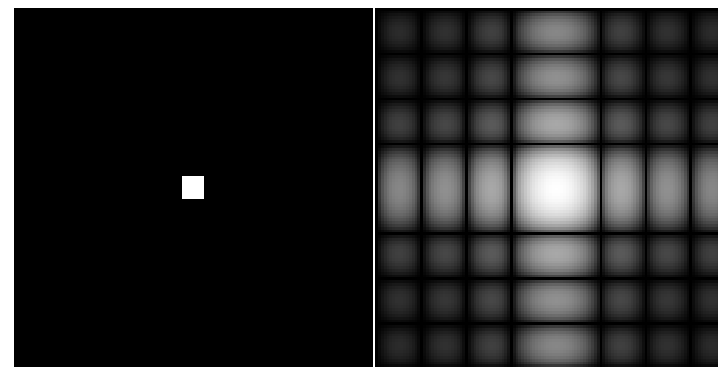
$$G(k,l) = F(k \bmod N, l \bmod N), (u,v) \in [(0,0),(nN,nN)]$$

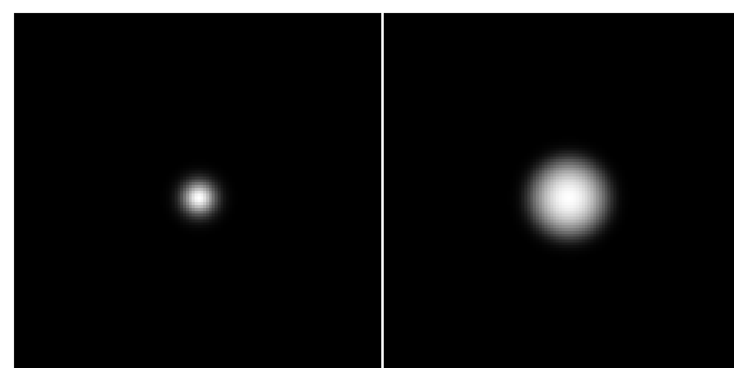


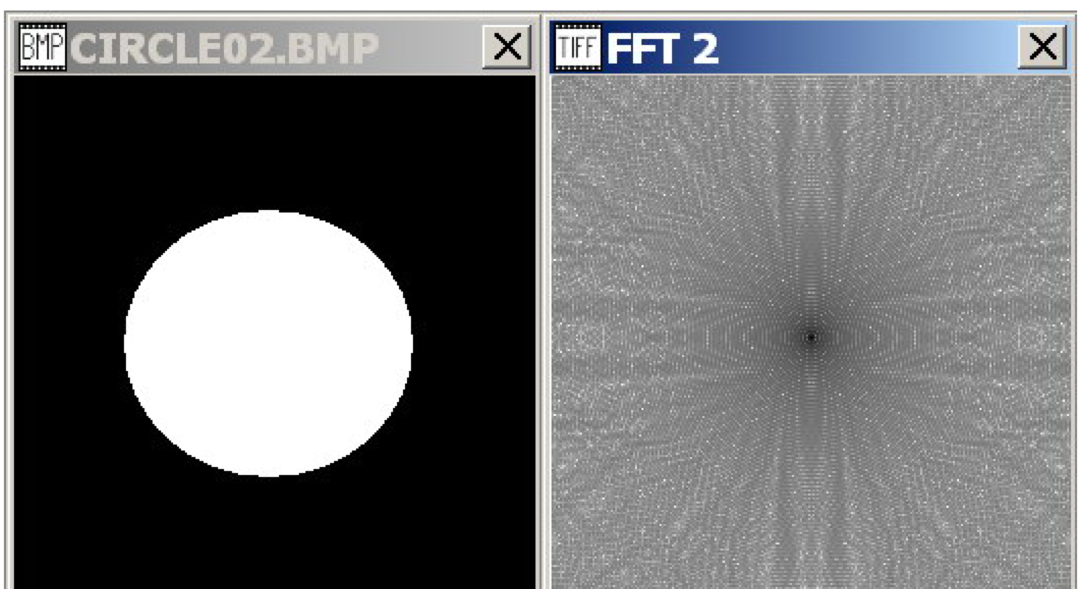
Phép biến đổi Fourier đơn nguyên

- 2D UDFT của một số ảnh đơn giản
  - Hàm hình sin
  - Tín hiệu chữ nhật
  - Hàm Gauss
  - Lọc thông thấp









Phép biến đổi Fourier đơn nguyên