5. bài tự học tìm nghiệm gần đúng

Phương pháp tính (Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội)

Chương: TÌM NGHIỆM GẦN ĐÚNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH.

Cho Phương trình $f(x) = 0$. Ta có α - được gọi là nghiệm (chính xác) của phương trình $f(x) = 0$ nếu thỏa mãn $f(\alpha) \equiv 0$. Trong thực tế để tìm nghiệm chính xác tương đối khó khắn, nên ta thường tìm gần đúng nghiệm của phương trình.

I. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình bằng phương pháp Newton.

Các bước thực hiện tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 0$.

B1: Tìm khoảng phân ly nghiệm.(Khoảng Phân ly nghiệm KPL là khoảng (a;b) chứa duy nhất một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$)

1) Dò khoảng chứa nghiệm (a;b) bằng máy tính.
2) Chứng minh khoảng chứa nghiệm (a;b) là KPL theo các điều kiện sau:
   +) $f(a).f(b) < 0$.
   +) Hàm số $y = f(x)$ – luôn liên tục trong khoảng (a;b).
   +) Đạo hàm $y' = f'(x)$ không đổi dấu trên (a;b) (tức là $f'(x) < 0\ \forall x \in (a;b)$ hoặc $f'(x) > 0\ \forall x \in (a;b)$.

Nếu thỏa mãn 3 điều kiện trên thì (a;b) là khoảng phân ly.

B2: Tìm sai số $\boldsymbol{\varepsilon}$ – epsilon (cho trước)

B3: Kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp Newton.

+) Đạo hàm $y' = f'(x)$ không đổi dấu trên (a;b) (tức là $f'(x) < 0\ \forall x \in (a;b)$ hoặc

$f'(x) > 0\ \forall x \in (a;b)$ (Chép lại điều kiện trong KPL).

+) Đạo hàm $y'' = f''(x)$ không đổi dấu trên (a;b) (tức là $f''(x) < 0\ \forall x \in (a;b)$ hoặc

$f''(x) > 0\ \forall x \in (a;b)$.

Nếu 2 điều kiện này thỏa mãn thì Phương pháp Newton được hội tụ.

B4: Tìm dây nghiệm gần đúng: $\boldsymbol{x_0; x_1; x_2 \dots x_{n+1}}$:

+) Chọn điểm ban đầu x_0: 1) Nếu $f(a).f''(x) > 0$ chọn $x_0 = a$.

2) Nếu $f(b).f''(x) > 0$ chọn $x_0 = b$.

+) Tính dẫy nghiệm theo công thức:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ví dụ: Tính gần đúng một nghiệm của phương trình

$$e^{2x} + 3x - 9 = 0$$

bằng phương pháp Newton với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-3}.

Giải :

Đặt: $f(x) = e^{2x} + 3x - 9$

B1: Tìm KPL:

1) Khoảng chứa nghiệm của pt là (0.5;1).
2) Chứng minh khoảng chứa nghiệm (0.5;1).là KPL theo các điều kiện sau:
   +) $f(0.5).f(1) < 0$.
   +) Hàm số $f(x) = e^{2x} + 3x - 9$ – luôn liên tục trong khoảng (0.5;1).
   +) Đạo hàm $f'(x) = 2e^{2x} + 3 > 0$ trên (0.5;1). Tức là $f'(x) = 2e^{2x} + 3$ không đổi dấu.

Vậy cả 3 điều kiện được thỏa mãn, nên (0.5;1) là KPl.

B2: Sai số $\varepsilon = 10^{-3} = 0.001$.

B3: Kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp Newton.

+) Đạo hàm $y' = f'(x) = 2e^{2x} + 3 > 0$ trên (0.5;1). Tức là $y' = f'(x) = 2e^{2x} + 3$ không đổi dấu.

+) Đạo hàm $y'' = f''(x) = 4e^{2x} > 0$ trên (0.5;1). Tức là $y'' = f''(x) = 4e^{2x} > 0$ không đổi dấu.

Vậy 2 điều kiện này thỏa mãn, nên Phương pháp Newton được hội tụ.

B4: Tìm dây nghiệm gần đúng: $x_0; x_1; x_2 \dots x_{n+1}$:

+) Chọn điểm ban đầu x_0: 1) $f(a).f''(x) = f(0.5).f''(x) < 0$ không thỏa mãn.

2) Nếu $f(b).f''(x) = f(1).f''(x) > 0$, nên chọn $x_0 = 1$.

+) Tính dẫy nghiệm theo công thức:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{2x_n} + 3x_n - 9}{2e^{2x_n} + 3}.$$

Kẻ bảng tính :

X_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert \le \varepsilon$
$x_0 = 1$	
$x_1 = 0.9219$	
$x_2 = 0.9164$	$\lvert 0.0055 \rvert > \varepsilon$
$x_3 = 0.9164$	$\lvert 0 \rvert < \varepsilon$
$x_4 = 0.9164$	

Vậy nghiệm gần đúng là $x_3 = 0.9164$

$(\alpha \approx x_3 = 0.9164)$

Ví dụ : Tính gần đúng nghiệm nhỏ hơn 1 của phương trình

$$2\lg(x)-\frac{x}{2}+1=0$$

bằng phương pháp Newton với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-4}.
Giải :

Đặt: $f\left(x\right)=2\lg(x)-\frac{x}{2}+1$

B1: Tìm KPL:

1) Khoảng chứa nghiệm của pt là (0.1;0.5).
2) Chứng minh khoảng chứa nghiệm (0.1;0.5)..là KPL theo các điều kiện sau:

   +) $f\left(0.1\right)=-1.05<0, f\left(0.5\right)=0.148>0\Rightarrow$ $f(0.5).f(0.1)<0$.

   +) Hàm số $f\left(x\right)=2\lg(x)-\frac{x}{2}+1$ – luôn liên tục trong khoảng (0.1;0.5)..

   +) Đạo hàm $f'(x)=\frac{2}{x\ln\left(10\right)}-0.5>0$ trên (0.1;0.5).Tức là $f'(x)=\frac{2}{x\ln\left(10\right)}-0.5$ không đổi dấu.

Vậy cả 3 điều kiện được thỏa mãn, nên (0.1;0.5).là KPl.

B2: Sai số $\varepsilon=10^{-4}=0.0001$.

B3: Kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp Newton.

+) Đạo hàm $f'(x)=\frac{2}{x\ln\left(10\right)}-0.5>0$ trên (0.1;0.5).Tức là $f'(x)=\frac{2}{x\ln\left(10\right)}-0.5$ không đổi dấu.

+) Đạo hàm $y''=f''\left(x\right)=-\frac{2}{x^2\ln\left(10\right)}<0$ trên (0.1;0.5).Tức là $y''=f''\left(x\right)=-\frac{2}{x^2\ln\left(10\right)}$ không đổi dấu.

Vậy 2 điều kiện này thỏa mãn, nên Phương pháp Newton được hội tụ.

B4: Tìm dây nghiệm gần đúng: $x_0; x_1; x_2 \dots x_{n+1}$:

+) Chọn điểm ban đầu x_0: 1) $f(b).f''(x)=f(0.5).f''(x)<0$ không thỏa mãn.

2) Nếu $f(a).f''(x)=f(0.1).f''(x)>0$, nên chọn $x_0=0.1$.

+) Tính dẫy nghiệm theo công thức:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{2\lg(x_n)-\frac{x_n}{2}+1}{\frac{2}{x_n\ln(10)}-0.5}$$

Kẻ bảng tính :

X_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert \le \varepsilon$
$x_0 = 0.1$	
$x_1 = 0.22827$	
$x_2 = 0.34846$	
$x_3 = 0.39359$	
$x_4 = 0.39752$	$\lvert 0.00393 \rvert > \varepsilon$
$x_5 = 0.39754$	$\lvert 0.00002 \rvert < \varepsilon$
$x_6 = 0.39754$	

Vậy nghiệm gần đúng là $x_5 = 0.39754$

$(\alpha \approx x_5 = 0.39754)$

II. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình bằng phương pháp Lặp.

Các bước thực hiện tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 0$.

B1: Tìm khoảng phân ly nghiệm.(Khoảng Phân ly nghiệm KPL là khoảng (a;b) chứa duy nhất một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$)

1) Dò khoảng chứa nghiệm (a;b) bằng máy tính.
2) Chứng minh khoảng chứa nghiệm (a;b) là KPL theo các điều kiện sau:
   +) $f(a).f(b) < 0$.
   +) Hàm số $y = f(x)$ – luôn liên tục trong khoảng (a;b).
   +) Đạo hàm $y' = f'(x)$ không đổi dấu trên (a;b) (tức là $f'(x) < 0\ \forall x \in (a;b)$ hoặc $f'(x) > 0\ \forall x \in (a;b)$.

Nếu thỏa mãn 3 điều kiện trên thì (a;b) là khoảng phân ly.

B2: Tìm sai số ε – epsilon (cho trước)

B3: Tìm hàm lặp.

Từ phương trình $f(x) = 0$ ta viết về dạng: $x = \varphi(x)$ sao cho thỏa mãn điều kiện hội tụ:

$$|\varphi'(x)| < 1 \text{ trong khoảng } (a;b).$$

B4: Tìm dây nghiệm gần đúng: $x_0; x_1; x_2 \ldots x_{n+1}$:

+) Chọn điểm ban đầu x_0: 1) Nếu $\varphi'(x) > 0$ thì chọn $x_0 = a$ hoặc $x_0 = b$.

2) Nếu $\varphi'(x) < 0$ thì chọn x_0 theo nguyên tắc sau:

a) TH1: Nếu $f(a).f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ thì chọn $x_0 = a$.

b) TH2: Nếu $f(b).f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ thì chọn $x_0 = b$.

+) Tính dẫy nghiệm theo công thức:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n); n = 0; 1; 2 \ldots..$$

Ví dụ : Tính gần đúng một nghiệm của phương trình

$$e^{2x} + 3x - 9 = 0$$

bằng phương pháp lặp với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-3}.

Giải :

Đặt: $f(x) = e^{2x} + 3x - 9$

B1: Tìm KPL:

1) Khoảng chứa nghiệm của pt là (0.5;1).
2) Chứng minh khoảng chứa nghiệm (0.5;1).là KPL theo các điều kiện sau:
   +) $f(0.5).f(1) < 0$.
   +) Hàm số $f(x) = e^{2x} + 3x - 9 -$ luôn liên tục trong khoảng (0.5;1).
   +) Đạo hàm $f'(x) = 2e^{2x} + 3 > 0$ trên (0.5;1). Tức là $f'(x) = 2e^{2x} + 3$ không đổi dấu.

Vậy cả 3 điều kiện được thỏa mãn, nên (0.5;1) là KPl.

B2: Sai số $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-3} = 0.001}$.

B3:Tìm hàm lặp:

TH1: Từ phương trình $e^{2x} + 3x - 9 = 0$ Ta viết về dạng $3x = 9 - e^{2x} \leftrightarrow x = \frac{1}{3}(9 - e^{2x}) = \varphi(x)$.

Ta có $|\varphi'(x)| = \left|\frac{1}{3}(0 - 2e^{2x})\right| > 1$ *trên* $(0.5; 1)$ không thỏa mãn điều kiện hội tụ.

TH2: Từ phương trình $e^{2x} + 3x - 9 = 0$ Ta viết về dạng $e^{2x} = 9 - 3x \leftrightarrow \ 2x = \ln(9 - 3x)$

$$x = \frac{1}{2}\ln(9 - 3x) = \varphi(x)$$

Ta có $|\varphi'(x)| = \left|\frac{-3}{2(9-3x)}\right| < 1$ *trên* $(0.5; 1)$ thỏa mãn điều kiện hội tụ.

Vậy hàm lặp là $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\ln(9 - 3x)$

B4 : Tìm dây nghiệm gần đúng: $\boldsymbol{x_0; x_1; x_2 \ldots x_{n+1}}$:

+) Chọn x_0 : Vì $\varphi'(x) = \frac{-3}{2(9-3x)} < 0$, ta xét :

$$f(a).f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(0{,}5).f\left(\frac{0.5+1}{2}\right) > 0\ (Không\ thỏa\ mãn)$$

$$f(b).f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(1).f\left(\frac{0.5+1}{2}\right) < 0 (Thỏa\ mãn)$$

Nên chọn : $x_0 = b = 1$.

+) Tìm dãy nghiệm $x_0; x_1; x_2 \ldots x_{n+1}$: **theo công thức** $x_{n+1} = \varphi(x_n) = \frac{1}{2}ln(9 - 3x_n)$

X_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert \le \varepsilon = 0.001$
$x_0 = 1$	
$x_1 = 0.8959$	
$x_2 = 0.9213$	
$x_3 = 0.9152$	$\lvert 0.006 \rvert > \varepsilon$
$x_4 = 0.9166$	$\lvert 0.002 \rvert$
$x_5 = 0.9163$	$\lvert 0.001 \rvert = \varepsilon$
$x_6 = 0.9164$	

Vậy nghiệm gần đúng cần tìm là $x_5 = 0.916$ (hoặc $\alpha \approx x_5 = 0.916$)

Ví dụ : Tính gần đúng nghiệm nhỏ hơn 1 của phương trình

$$2\lg(x) - \frac{x}{2} + 1 = 0$$

bằng phương pháp lặp với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-4}.

Giải :

Đặt: $f(x) = 2\lg(x) - \frac{x}{2} + 1$

B1: Tìm KPL:

1) Khoảng chứa nghiệm của pt là (0.1;0.5).
2) Chứng minh khoảng chứa nghiệm (0.1;0.5)..là KPL theo các điều kiện sau:

   +) $f(0.1) = -1.05 < 0, f(0.5) = 0.148 > 0 \Rightarrow$ $f(0.5).f(0.1) < 0.$

   +) Hàm số $f(x) = 2\lg(x) - \frac{x}{2} + 1 -$ luôn liên tục trong khoảng (0.1;0.5)..

   +) Đạo hàm $f'(x) = \frac{2}{x\ln(10)} - 0.5 > 0$ trên (0.1;0.5).Tức là $f'(x) = \frac{2}{x\ln(10)} - 0.5$ không đổi dấu.

Vậy cả 3 điều kiện được thỏa mãn, nên (0.1;0.5).là KPl.

B2: Sai số $\varepsilon = 10^{-4} = 0.0001$.

B3:Tìm hàm lặp:

TH1: Từ phương trình $2\lg(x) - \frac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4\lg(x) + 2 = \varphi(x)$

Ta có $|\varphi'(x)| = \left|\frac{4}{xln10}\right| > 1$ $trên$ $(0.1\,;0.5)$$không$ $thỏa$ $mãn$ $điều$ $kiện$ $hội$ $tụ$.

TH2: Từ phương trình $2\lg(x)-\frac{x}{2}+1=0 \Leftrightarrow \lg(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=10^{\frac{x}{4}-\frac{1}{2}}=\varphi(x)$

Ta có

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{1}{4} * 10^{\frac{x}{4}-\frac{1}{2}} * \ln(10)\right| < 1 \; trên\ (0.1\,;0.5)\ thỏa\ mãn\ điều\ kiện\ hội\ tụ$$

Vậy hàm lặp là $\varphi(x) = 10^{\frac{x}{4}-\frac{1}{2}}$

B4 : Tìm dây nghiệm gần đúng: $\boldsymbol{x_0}; \boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{x_2} \dots \boldsymbol{x_{n+1}}$:

+) Vì $\varphi'(x) = \frac{1}{4} * 10^{\frac{x}{4}-\frac{1}{2}} * \ln(10) > trên\ \big(0.1\,;0.5\big)\ nên\ chọn\ bất\ kỳ\ x_0 = a = 0.1$

+) Tìm dẫy nghiệm $\boldsymbol{x_0}; \boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{x_2} \dots \boldsymbol{x_{n+1}}$**: theo công thức** $\boldsymbol{x_{n+1}} = \boldsymbol{\varphi(x_n)} = 10^{\frac{x_n}{4}-\frac{1}{2}}$

X_{n+1}	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert \le \varepsilon = 0.0001$
$x_0 = 0.1$	
x_1 =0.33497	
x_2 =0.38348	
x_3 =0.39434	
x_4 =0.39681	
x_5 =0.39738	
x_6 =0.39751	
x_7 =0.39754	|0.00003|< ε

Vậy nghiệm gần đúng cần tìm là x_7 =0.39754**(hoặc $\boldsymbol{\alpha} \approx x_7$ =0.39754)**

$$(5^x)' = 5^x.\ln(5)\,;(\log_3 2x)' = 2.\frac{1}{2xln3};(Cos4x)' = -4\sin 4x$$

Bài tập về nhà :

1) Tính gần đúng một nghiệm của phương trình

$$e^x = -x$$

bằng phương pháp Newton ; lặp với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-2}.

2) Tính gần đúng một nghiệm của phương trình

$$x - e^{-x} = 0$$

bằng phương pháp lặp ; Newton với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-2}.

3) Tính gần đúng một nghiệm dương của phương trình

$$3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 2x - 12 = 0$$

bằng phương pháp Newton với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-5}.

4) Tính gần đúng một nghiệm âm của phương trình

$$3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 2x - 12 = 0$$

bằng phương pháp Newton với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-5}.

5) Tính gần đúng một nghiệm của phương trình

$$\cos x - x = 0$$

bằng phương pháp Newton ; lặp với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-5}.

6) Tính gần đúng một nghiệm lớn hơn 3 của phương trình

$$4x^{\frac{1}{3}} - 2x + 4 = 0$$

bằng phương pháp Newton ; lặp với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-5}.

7) Tính gần đúng một nghiệm âm của phương trình

$$e^{-x} - 3x - 3 = 0$$

bằng phương pháp Newton ; lặp với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-5}.

8) Tính gần đúng một nghiệm của phương trình

$$\cos\left(x^2\right) - x = 0$$

bằng phương pháp Newton với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-5}.

9) Tính gần đúng một nghiệm dương của phương trình

$$2x - 1 + \sin x = 0$$

bằng phương pháp Newton ; lặp với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-5}.

10) Tính gần đúng một nghiệm dương của phương trình

$$6\sqrt{x} + \frac{1}{2}x - x^2 = 0$$

bằng phương pháp Newton với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-5}

11) Tính gần đúng một nghiệm của phương trình

$$x - 5\cos x = 0$$

bằng phương pháp Newton với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-5}.

12) Tính gần đúng một nghiệm lớn hơn 1 của phương trình

$$2\lg(x) - \frac{x}{2} + 1 = 0$$

bằng phương pháp Newton ; lặp với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-5}.