Bài toán vận tải

2.6.1 Phát biểu bài toán vận tải

- Có m địa điểm $A_1, A_2, \ldots, A_m$ cùng sản xuất một loại hàng hóa với các lượng hàng tương ứng là $a_1, a_2, \ldots, a_m$.
- Có n nơi tiêu thụ loại hàng đó là $B_1, B_2, \ldots B_n$ với các yêu cầu tương ứng là $b_1, b_2, \ldots, b_n$.
- Gọi A_i là điểm phát thứ i, i=1,..,m
- B_j là điểm thu thứ j, j=1,..,n
- Hàng có thể chở từ vị trí bất kỳ (i) đến điểm thu bất kì(j)
- Cij là chi phí chuyện chở một đơn vị hàng từ điểm phát (i)tới điểm thu (j)
- Xij là lượng hàng vận chuyển từ (i) tới (j)

Bài toán

- Bài toán đặt ra là xác định những đại lượng xij cho mọi con đường (i,j) sao cho tổng chi phí chuyên chở là nhỏ nhất với giả thiết là:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Lượng hàng phát ra bằng đúng lượng hàng yêu cầu(điều kiện cân bằng thu phát)

ma trận phương án,
ma trận cước phí dưới dạng véctơ:

$$x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}; x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}; \ldots; x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})$$

$$c = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}; c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2n}; \ldots; c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mn})$$

$$b = (a_1, a_2, \ldots, a_m; b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

$$A = \left[\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}\right] \begin{array}{l} \left.\rule{0pt}{4em}\right\} m \text{ hàng} \\ \left.\rule{0pt}{4em}\right\} n \text{ hàng} \end{array}$$

$$(m+n) \times m.n$$

Mô tả bài toán

B_j / A_i	b1	b2	b3	…	bn
a1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	… …	c_{1n} x_{1n}
a2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	… …	c_{2n} x_{2n}
…	… …	… …	… …	… …	… …
am	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	… …	c_{mn} x_{mn}

Mô tả : m hàng, n cột, ô (i, j) ghi c_{ij} cho trước, ước lượng x_{ij} của phương án x

Dạng toán học

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,...,m \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,...,n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,..,m, j = 1,...,n$$

Điều kiện $a_i, b_j > 0$ **và** $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

2.6.2 Tiêu chuẩn nhận biết Phương án cực biên

B_j / A_i	b1	…	b_j	…	bn
a1					
a_i			C_{ij} X_{ij}		
…					
am					

Phương án cực biên

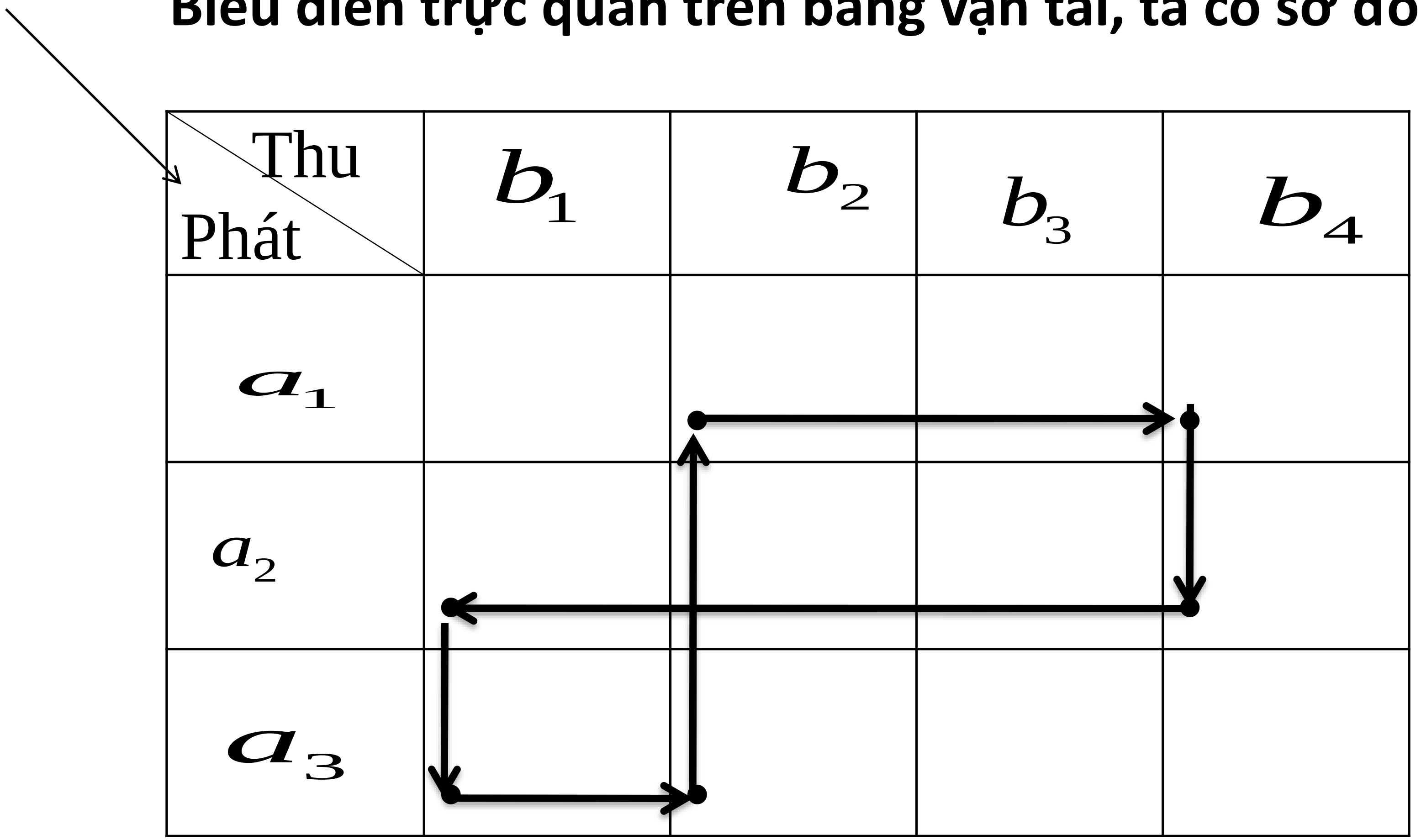
- Một ô (i,j) với $x_{ij}>0$ gọi là ô sử dụng (ô chọn)
- Định nghĩa
- Chu trình là một dãy các ô có sắp thứ tự mà trong đó hai ô (và không quá hai ô) liên tiếp nằm trên cùng hàng hoặc cùng cột.
- Ô đầu tiên và ô cuối cùng của chu trình được coi là hai ô liên tiếp.
- Từ định nghĩa ta thấy số ô trong một chu trình luôn là số chẵn và không nhỏ hơn 4. Có thể mô tả một chu trình dưới dạng:

$$V = \left\{ (i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \ldots, (i_{k-1}, j_k), (i_k, j_k), (i_k, j_1) \right\}$$

Ví dụ : **Ta có vòng**

$$V = \{(1,2), (1,4), (2,4), (2,1), (3,1), 3,2\}$$

Biểu diễn trực quan trên bảng vận tải, ta có sơ đồ sau:



Hệ quả

Hệ quả: Vecto X là phương án cực biên khi và chỉ khi tập các ô sử dụng tương ứng không lập thành chu trình.

Ví dụ về phương án cực biên

$$x^1 = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 40 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & 25 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 20 \\ 15 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 20 \end{bmatrix}$$

X^1 phương án cực biên vì các ô tương ứng với các thành phần x_{ij} không lập thành chu trình

X^2 không là phương án cực biên vì có chứa chu trình.

$$V = \{(2,1), (2,4), (4,4), (4,3), (3,3), (3,1)\}$$

Phương án không thoái hóa

- Gọi X là các ô sử dụng
- $X = \{ (i, j) \mid x_{ij} > 0\}$
- 1 phương án x của bài toán vận tải đã cho được gọi là không thoái hóa nếu $|X| = m+n-1$
- Ngược lại $|X| < m+n-1$ gọi là thoái hóa
- (*Do điều kiện cân bằng thu phát nên phương trình nào trong m+n phương trình cũng là hệ quả của phương trình còn lại. Do đó số phương trình ĐLTT cực đại của hệ là m+n-1)*

Định lý 2.2

- Giả sử X là một phương án của bài toán vận tải và tập G của nó lập thành chu trình, thế thì bao giờ cũng có thể điều chỉnh được X để chuyển sang một phương án mới X’ không xấu hơn mà tập G’ không lập thành chu trình

Thuật toán phá chu trình tập G

Giả sử K là một chu trình của G.

Phân K thành tập các ô chẵn K^+ và tập ô lẻ K^- (xen kẽ nhau)

$$\sum_{(i,j)\in K^+} c_{ij} \le \sum_{(i,j)\in K^-} c_{ij}$$

(Nếu không thì ta quy ước lại các ô chẵn lẻ trên K)

Kí hiệu: $\theta = \min\left\{x_{ij} \middle| (i,j) \in K^-\right\}$

Chuyển X thành X' theo công thức sau:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta, (i,j) \in K^+ \\ x_{ij} - \theta, (i,j) \in K^- \\ x_{ij}, (i,j) \notin K \end{cases}$$

2.6.3 Các phương pháp tìm phương án xuất phát

a. Phương pháp góc Tây – Bắc.

Xuất phát từ góc trên bên trái

X_{11} = min (a_1 , b_1)

*** Nếu x_{11} =a_1 xóa hàng 1**

Bảng mới b_1 ’= b_1 - x_{11} tiếp tục bắt đầu từ ô (2,1)

*** Nếu x_{11} =b_1 xóa cột 1**

Bảng mới a_1 ’= a_1 - x_{11} , tiếp tục bắt đầu từ ô (1,2)

2.6.3 Các phương pháp tìm phương án xuất phát

b. Phương pháp cực tiểu cước phí tối thiểu toàn bảng

Hoàn toàn tương tự như phương pháp trên chỉ khác là mỗi bước không chọn ô góc Tây – Bắc mà chọn ô có cước phí nhỏ nhất

2.6.3 Các phương pháp tìm phương án xuất phát

c. Phương pháp cực tiểu cước phí theo hàng.

Xuất phát từ hàng 1

$C_{1s} = \min C_{1k}$ k=1..n

$X_{1s} = \min (a_1 , b_s)$

*** Nếu $x_{1s} = a_1$ xóa hàng 1 rồi tiếp tục từ dòng 2**

$b_s' = b_s - x_{1s}$

*** Nếu $x_{1s} = b_s$ xóa cột s rồi tiếp tục quá trình**

$a_1' = a_1 - x_{1s}$

2.6.3Các phương pháp tìm phương án xuất phát

d.Phương pháp cực tiểu cước phí theo cột tương tự như cước phí theo hàng nhưng xuất phát là cột 1

2.6.4 Tiêu chuẩn tối ưu

- Định lí 4.1: Phương án X của bài toán vận tải là tối ưu khi và chỉ khi tồn tại các số

u_i,i=1..m và v_j , j = 1..n

Sao cho:

$$u_i + v_j \le c_{ij} \forall (i, j) \in T$$

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{, nếu} \quad x_{ij} > 0$$

Các số u_i và v_j gọi là các thế vị ứng với các điểm phát và thu

Thuật toán tìm nghiệm tối ưu

- Bước 1:Tìm phương án xuất phát.
- Bước 2: Kiểm tra phương án:

- Nếu các ô sử dụng lập thành chu trình thì phải phá vỡ chu trình chuyển phương án xuất phát về phương án cực biên(sử dụng định lí 2.2-Thuật toán phá vỡ chu trình).
- Xác định các thế vị u_i và v_j của các ô thuộc tập X:

$$X = \{(i, j) | x_{ij} > 0\}$$

Với công thức: $u_i + v_j = c_{ij}$ **(ứng với x_{ij} >0)**

Quy tắc

- Cho u_{io}=0 (io dòng đầu hoặc dòng có 1 ô sử dụng)
- Xác định $v_j=c_{ij}-u_{io}$ cho cột j cắt dòng io tại ô sử dụng.
- Xác định $u_i=c_{ij}-v_j$ cho dòng i cắt cột j ở một ô sử dụng.
- Xác định các đại lượng Δ_{ij} **cho các ô(i,j)**

$$(i, j) \notin X$$

Theo công thức: $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$

Quy tắc

- Có 2 khả năng:

$\Delta_{ij} \leq 0 \forall (i, j)$ **Thì phương án là tối ưu**

$\Delta_{ij} > 0$ **Với ít nhất một ô (i,j) thì phương án đã cho chưa tối ưu,**
ta có thể điều chỉnh để hạ nữa hàm mục tiêu

Thuật toán

- **Bước 3: Điều chỉnh phương án. Giả sử ô vi phạm tiêu chuẩn là (i*,j*) tức là** $\Delta_{i^*j^*} > 0 \quad (i^*, j^*) \notin G$

(nếu có nhiều ô vi phạm thì chọn) $\max \Delta_{ij}$

Thêm ô(i*,j*) vào G

Ô (i*,j*) sẽ lập với các ô của G một chu trình K duy nhất

Coi ô (i*,j*) là ô chẵn, tức là $(i^*, j^*) \in K^+$

Ta điều chỉnh phương án X thành X' mà tập G' không lập thành chu trình **(Sử dụng định lí 2.2)**

$$x_{i^*,j^*} = x_{i_s j_s} > 0$$ **Với** $$x_{i_s j_s} = \min\left\{x_{ij} \middle| (i, j) \in K^-\right\}$$

$$G' = G \setminus (i_s, j_s) \cup (i^*, j^*)$$

Ví dụ trường hợp cân bằng thu phát

A_i \ B_j	15	21	7	13	3
14	20	16	18	20	17
6	12	15	13	15	16
22	8	10	17	11	13
12	5	12	15	18	17
5	13	14	16	12	16

Phương án cực biên

A_i \ B_j	15	21	7	13	3
14	20 14	16	18	20	17
6	12 1	15 5	13	15	16
22	8	10 16	17 6	11	13
12	5	12	15 1	18 11	17
5	13	14	16	12 2	16 3

Tính thế vị

A_i \ B_j	15	21	7	13	3	
14	20 (14)	16	18	20	17	U1=0
6	12 (1)	15 (5)	13	15	16	U2=-8
22	8	10 (16)	17 (6)	11	13	U3=-13
12	5	12	15 (1)	18 (11)	17	U4=-15
5	13	14	16	12 (2)	16 (3)	U5=-21
	V1=20	V2=23	V3=30	V4=33	V5=37	

Tính Δ_{ij} (viết dưới dạng ma trận)

Ai \ Bj	15	21	7	13	3	
14	20 - 14	16 7	18 12	20 13	17 + 20	U1=0
6	12 + 1	15 - 5	13 9	15 10	16 13	U2=-8
22	8 -1	10 + 16	17 - 6	11 9	13 11	U3=-13
12	5 0	12 -4	15 + 1	18 - 11	17 5	U4=-15
5	13 -14	14 -12	16 -7	12 + 2	16 - 3	U5=-21
	V1=20	V2=23	V3=30	V4=33	V5=37	

Lần lặp 2

Ai \ Bj	15	21	7	13	3	
14	20 - 11	16 7	18 12	20 + 13	17 3	U1=0
6	12 + 4	15 - 2	13 9	15 10	16 -7	U2=-8
22	8 -1	10 + 19	17 - 3	11 9	13 -9	U3=-13
12	5 0	12 -4	15 + 4	18 - 8	17 -15	U4=-15
5	13 -14	14 -12	16 -7	12 5	16 -20	U5=-21
	V1=20	V2=23	V3=30	V4=33	V5=17	

Lần lặp 3

A_i \ B_j	15	21	7	13	3	
14	20 - 9	16 -6	18 -1	20 + 2	17 3	U1=0
6	12 6	15 -13	13 -4	15 -3	16 -7	U2=-8
22	8 12	10 21	17 1	11 9	13 4	U3=0
12	5 + 13	12 -4	15 6	18 - 6	17 -2	U4=-2
5	13 -1	14 -12	16 -7	12 5	16 -7	U5=-8
	V1=20	V2=10	V3=17	V4=20	V5=17	

Lần lặp 4

Bj / Ai	15	21	7	13	3	
14	20 - 3	16 -6	18 + 12	20 8	17 3	U1=0
6	12 6	15 -13	13 9	15 -3	16 -7	U2=-8
22	8 12	10 21	17 1	11 9	13 4	U3=0
12	5 + 6	12 -17	15 - 6	18 -17	17 -15	U4=-15
5	13 -1	14 -12	16 6	12 5	16 -7	U5=-8
	V1=20	V2=10	V3=30	V4=20	V5=17	

Lần lặp 5

A_i \ B_j	15	21	7	13	3	
14	20 -11	16 -5	18 3	20 8	17 3	U1=0
6	12 - 6	15 -1	13 + 8	15 8	16 4	U2=3
22	8 0	10 21	17 1	11 8	13 3	U3=-1
12	5 + 9	12 -5	15 - 3	18 -2	17 -4	U4=-4
5	13 -12	14 -11	16 -6	12 5	16 -7	U5=-8
	V1=9	V2=11	V3=18	V4=20	V5=17	

Lần lặp 6

Ai \ Bj	15	21	7	13	3	
14	20 -3	16 -5	18 3	20 8	17 3	U1=0
6	12 - 3	15 -9	13 + 3	15 0	16 -4	U2=-5
22	8 + 8	10 21	17 - 1	11 8	13 3	U3=-1
12	5 12	12 -13	15 -9	18 -10	17 -12	U4=-12
5	13 -4	14 -11	16 -6	12 5	16 -7	U5=-8
	V1=17	V2=11	V3=18	V4=20	V5=17	

Lần lặp 7

B_j \ A_i	15	21	7	13	3	
14	20 -3	16 + 3	18 - 3	20 8	17 3	U1=0
6	12 - 2	15 -1	13 + 4	15 0	16 -4	U2=-5
22	8 + 1	10 - 21	17 -8	11 0	13 -5	U3=-9
12	5 12	12 -5	15 -9	18 -10	17 -12	U4=-12
5	13 -4	14 -3	16 -6	12 5	16 -7	U5=-8
	V1=17	V2=19	V3=18	V4=20	V5=17	

Lần lặp 8

Ai \ Bj	15	21	7	13	3	
14	20 -6	16 + 2	18 1	20 - 8	17 3	U1=0
6	12 -3	15 -4	13 6	15 0	16 -4	U2=-5
22	8 3	10 - 19	17 -5	11 + 3	13 -2	U3=-6
12	5 12	12 -5	15 -6	18 -7	17 -9	U4=-9
5	13 -7	14 -6	16 -6	12 5	16 -7	U5=-8
	V1=14	V2=16	V3=18	V4=20	V5=17	

Lần lặp 9

A_i \ B_j	15	21	7	13	3	
14	20 -6	16 10	18 1	20 -3	17 3	U1=0
6	12 -3	15 -4	13 6	15 -3	16 -4	U2=-5
22	8 3	10 11	17 -5	11 8	13 -2	U3=-6
12	5 12	12 -5	15 -6	18 -10	17 -9	U4=-9
5	13 -4	14 -3	16 -3	12 5	16 -4	U5=-5
	V1=14	V2=16	V3=18	V4=17	V5=17	

Kết quả

Do các $\Delta_{ij} < 0 \forall i, j$ **nên:**

Nghiệm tối ưu: $X = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & 0 & 8 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $f_{min}=649$

So sánh với phương án cực biên

Phương án cực biên: $X = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $f_{min}=914$

Ví dụ 2: Giải bài toán vận tải với số liệu được cho như sau:

$$c = \begin{bmatrix} 8 & 13 & 15 & 11 \\ 7 & 11 & 7 & 9 \\ 14 & 12 & 9 & 8 \\ 18 & 14 & 10 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a = (50 & 40 & 50 & 60) \\ b = (50 & 75 & 50 & 25) \end{matrix}$$

Ta tìm phương án cực biên xuất phát bằng phương pháp cước min. (chi phí nhỏ nhất)

Phương án cực biên tìm được là suy biến, bổ sung một ô – chọn – không, là ô(2,3). Ta tính được hệ thống thế vị.

Thu / Phát	50	75	50	25	
50	8 / 10	13 / 40	15	11	U1=0
40	7 / 40	11	7 / 0	9	U2=-1
50	14	12 +	9 / 50	8	U3=1
60	18	14 / 35	10	4 / 25	U4=1
	v1=8	V2=13	V3=8	V4=3	Ô vi phạm (3,2)

Lần lặp 2

8 50	13	15	11	U1=0
7 0	11	7 40	9	U2=-1
14	12 40	9 10	8	U3=1
18	14 35	10 +1	4 25	U4=3
V1=8	V2=11	V3=8	V4=1	

Lần lặp 3

8 50	13	15	11	U1=0
7 0	11	7 40	9	U2=-1
14	12 50	9	8	U3=0
18	14 25	10 10	4 25	U4=2
V1=8	V2=12	V3=8	V4=2	

$$x^1 = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 10 & 25 \end{bmatrix}$$

$$f_{min} = 1.830$$

Nhận xét

$\Delta_{22} = 0$ **với ô(2,2) là ô loại. Lập vòng xuất phát từ ô này với các ô chọn, ta được phương án tối ưu khác**

$$x^2 = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 15 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 25 \end{bmatrix} \quad x^* = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 = \alpha \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 10 & 25 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 15 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 25 \end{bmatrix}$$

Phương án tối ưu tổng quát:

$$= \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25-25\alpha & 15+25\alpha & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 25\alpha & 35-25\alpha & 25 \end{bmatrix} \quad \alpha \in [0,1]$$

Trường hợp không cân bằng thu phát

1 TH1: $\sum a_i > \sum b_j$

- Ta đưa về trường hợp cân bằng thu phát bằng cách thêm một cột thu ảo

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_j$$

- Với $\mathrm{c}_{\mathrm{i,n+1}} = 0 \forall \mathrm{i} = 1,..,\mathrm{m}$

  và giải bài toán

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

Trường hợp không cân bằng thu phát

- Với các ràng buộc

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, i = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,..,n+1$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,..,m, j = 1,\ldots,n+1$$

Trường hợp không cân bằng thu phát

2 TH2: $\sum a_i < \sum b_j$

- Ta đưa về trường hợp cân bằng thu phát bằng cách thêm một hàng phát ảo

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

- Với $c_{m+1,j} = 0, j = 1,\ldots,n$
và giải bài toán

$$\sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

Trường hợp không cân bằng thu phát

- Với các ràng buộc

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,\ldots,m+1$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, j = 1,..,n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,..,m+1, j = 1,\ldots,n$$

Ví dụ

		15	21	7	10	3	
a1	14	20	16	18	20	17	46
a2	6	12	15	13	15	16	
a3	22	8	10	17	11	13	
a4	12	5	12	15	18	17	
a5	5	13	14	16	12	16	
	49						

→

	15 b1	21 b2	7 b3	10 b4	3 b5	3 b6
14	20	16	18	20	17	0
6	12	15	13	15	16	0
22	8	10	17	11	13	0
12	5	12	15	18	17	0
5	13	14	16	12	16	0

Ví dụ

		b1	b2	b3	b4	b5	
		15	21	7	13	3	49
a1	14	20	16	18	20	17	
a2	6	12	15	13	15	16	
a3	22	8	10	17	11	13	
a4	10	5	12	15	18	17	
a5	5	13	14	16	12	16	
	47						

→

		b1	b2	b3	b4	b5	
		15	21	7	13	3	
a1	14	20	16	18	20	17	
a2	6	12	15	13	15	16	
a3	22	8	10	17	11	13	
a4	10	5	12	15	18	17	
a5	5	13	14	16	12	16	
a6	2	0	0	0	0	0	

Dùng thuật toán thế vị để giải bài toán vận tải cân bằng thu phát này, phương án tối ưu của bài toán ban đầu là phương án tối ưu của bài toán mới mà bỏ đi các thành phần thêm vào

Chú ý

- Nếu dùng phương pháp cực tiểu cước phí để tìm phương án cực biên xuất phát thì ta ưu tiên phân phối hàng vào các ô thực trước. Cước phí ở mỗi ô đóng vai trò là hệ số trong hàm mục tiêu của biến tương ứng, các ô giả đóng vai trò là các biến phụ, mà hệ số của các biến phụ phải bằng 0, do đó cước phí tương ứng với các ô giả phải bằng 0.

- Về ý nghĩa kinh tế thì lượng hàng ở các ô giả là lượng hàng ở trạm phát(trạm thu) mà không được vận chuyển Do đó không có chi phí vận chuyển

Ví dụ1 : trường hợp phát> thu

Thu / Phát	60	30	20
80	14	18	12
100	12	22	18
50	7	8	9

tổng phát =230> tổng thu =110.

thu / Phát	**60**	**30**	**20**	**120**	
80	14	18 **(-)** 30	12 20	0 **(+)** 30	$u_1 = 0$
100	12 **(+)** 10	22	18	0 **(-)** 90	$u_2 = 0$
50	7**(-)** 50	8 **(+)** +5	9	0	U5= -5
	$v_1 = 12$	$v_2 = 18$	$v_3 = 12$	V4=0	

Lặp lần 2

.

14	18	12 20	0 60	$u_1 = 0$
12 40	22	18	0 60	$u_2 = 0$
7 20	8 30		0	U 3=-5
$v_1 = 12$	$v_2 = 13$	$v_3 = 12$	$v_4 = 0$	

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 40 & 0 & 0 \\ 20 & 30 & 0 \end{bmatrix}$$

Ở bảng 2, mọi $\Delta_{ij} \leq 0$ **bài toán có ph án tối ưu**

và $f(x) = 1100$

Ví dụ 2 : tổng phát =200< tổng thu =250

Thu / Phát	100	50	30	70
80	3	5	6	5
70	4	5	7	8
50	3	4	4	3

Ví dụ 2 : tổng phát =200< tổng thu =250

Thu / Phát	100	50	30	70	
80	3 80	5 -	6 -	5 -	u1=0
70	4 +3 -	5 50	7 20	8	$u_2 = 4$
50	3 20	4 -	4 -	3 30	u3=0
50	*0* -	*0* -	*0* *10*	*0* *40*	*u4=-3*
	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 3$	$v_4 = 3$	ô vi phạm (2,1)

Lặp lần 2

3 80	5	6	5 +1	$u_1 = 0$
4 20	5 50	7 0	8	$u_2 = 1$
3	4	4	3 50	u3= -3
0 -	0 -	0 30	0 20	u4 = - 6
$v_1 = 3$	$v_2 = 4$	$v_3 = 6$	$v_4 = 6$	ô vi phạm (1,4)

Lặp lần 3

3 80	5	6	5 0	$u_1 = 0$
4 20	5 50	7	8	$u_2 = 1$
3	4	4	3 50	u3= -2
0 - 	0 - 	0 30	0 20	u4= -5
$v_1 = 3$	$v_2 = 4$	$v_3 = 5$	$v_4 = 5$	

$$x = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

$$f_{\min} = 720$$

Nội dung ôn tập

- Cho bài toán QHTT:
- a) Giải bài toán bằng phương pháp hình học
- b) Chuyển bài toán về dạng chuẩn tắc, chính tắc.
- Áp dụng thuật toán đơn hình:
- a) Tìm phương án cực biên xuất phát
- b) Kiểm tra phương án xuất phát vừa tìm được (a) đã tối ưu chưa? Tại sao? Nếu chưa tối ưu hãy tìm phương án X2, tính f(x2). Có kết luận gì về phương án X2 này.
- c) Giải bài toán bằng thuật toán đơn hình.

- Áp dụng thuật toán đơn hình đối ngẫu:
- a) Cho phương án Xj, kiểm tra xem xj có phải là phương án cực biên xuất phát? (giả phương án?
- b) Kiểm tra phương án X* có phải là phương án tối ưu không? Tại sao? Bằng định lý độ lệch bù?
- c) Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra cặp ràng buộc đối ngẫu.
- c) Giải bài toán bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu.

Bài toán vận tải

- a) Tìm phương án cực biên xuất phát bằng: góc tây bắc, chi phí nhỏ nhất?
- b) Kiểm tra phương án tìm được (a) đã tối ưu chưa? Tại sao? Nếu chưa hãy tìm phương án X2. tính f(x2). Có kết luận gì về phương án x2.
- c) Giải bài toán vận tải.

Chúc ôn tập tốt và thi đạt điểm tốt