1 Khái niệm khoảng phân ly nghiệm

- Khái niệm: Khoảng $(a;b)$ được gọi là một khoảng phân ly nghiệm $\overline{x}$ của phương trình $f\left(x\right)=0$ nếu trong khoảng đó phương trình $f\left(x\right)=0$ chỉ chứa một nghiệm thực $\overline{x}$ duy nhất.
- Định lý: Khoảng (a,b) được gọi là một khoảng phân ly nghiệm $\overline{x}$ của phương trình $f\left(x\right)=0$ nếu $f(a)f(b)<0$ và $f\left(x\right)=0$ là hàm số đơn điệu liên tục trong $[a,b]$.
- Sai số tổng quát: Giả sử hàm $f\left(x\right)=0$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong (a,b). Nếu x_n là nghiệm gần đúng của nghiệm $\overline{x}$ và $m=\min\left|f'\left(x\right)\right|$ thì công thức đánh giá sai số tổng quát là

$$\left|x_n-\overline{x}\right|\le\frac{\left|f\left(x_n\right)\right|}{m}$$

2 Phương pháp chia đôi

2.1 Cách giải

Cho phương trình $f\left(x\right)=0$, $f\left(x\right)$ liên tục và trái dấu tại 2 đầu $[a,b]$. Giả sử $f\left(a\right)<0$, $f\left(b\right)>0$ (nếu ngược lại thì xét $-f\left(x\right)=0$). Cách tìm nghiệm $\overline{x}$.
Đặt $[a_0,b_0]=[a,b]$ và lập các khoảng lồng nhau $\left[a_i,b_i\right]$, $(i=1,2,3,\ldots)$

$$[a_i,b_i]=\begin{cases} a_{i-1}\ ,\ \frac{(a_{i-1}+b_{i-1})}{2} & \text{nếu } f\left(\frac{(a_{i-1}+b_{i-1})}{2}\right)>0\\ \frac{(a_{i-1}+b_{i-1})}{2}\ ,\ b_{i-1} & \text{nếu } f\left(\frac{(a_{i-1}+b_{i-1})}{2}\right)<0\end{cases}$$

2.2 Sai số

$$\left|x_n-\overline{x}\right|\le\frac{b-a}{2^{n+1}}$$

3 Phương pháp lặp đơn

3.1 Cách giải

Biến đổi tương đương:

$$f(x)=0\Leftrightarrow x=g(x)$$

Chọn giá trị ban đầu $x_n\in(a,b)$. Xây dựng dãy xấp xỉ nghiệm theo công thức truy hồi

$$x_n=g(x_{n-1})$$

Nếu dãy này hội tụ, ta được

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\overline{x}$$

3.2 Điều kiện hội tụ

Hàm $g(x)$ xác định, khả vi trên $[a,b]$

$$\begin{array}{rrcl} g: & R & \longrightarrow & R \\ & [a,b] & \longmapsto & [a,b] \end{array}$$

Khi đó nếu $\exists q > 0$ sao cho

$$\left|g'(x)\right| \leq q < 1, \forall x \in (a,b)$$

thì:
+ Quá trình lặp hội tụ đến nghiệm không phụ thuộc vào $\forall x_0 \in [a,b]$.
+ Giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ là nghiệm duy nhất trên (a,b).

3.3 Sai số

- Sai số hậu nghiệm:

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}|$$

- Sai số tiên nghiệm:

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|$$

4 Phương pháp tiếp tuyến (Phương pháp Newton)

4.0.1 Cách giải

Công thức lặp

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

4.1 Điều kiện hội tụ

Giả sử $[a,b]$ là khoảng nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Đạo hàm $f'(x)$ và $f''(x)$ liên tục, không đổi dấu, không triệt tiêu trên $[a,b]$. Khi đó ta chọn xấp xỉ nghiệm ban đầu $x_0 \in [a,b]$ sao cho $f(x_0)\,f''(x) > 0$ thì dãy số hội tụ đơn điệu đến nghiệm đúng của phương trình $f(x) = 0$

4.2 Sai số

$\forall x \in [a,b]$ nếu tồn tại m, M thỏa mãn

$$\left|f'(x)\right| \geq m > 0$$

$$\left|f''(x)\right| \leq M$$

Khi đó ta có

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$$

5 Phương pháp dây cung

5.1 Cách giải

Công thức lặp

$$x_n = x_{n-1} - \frac{\alpha - x_{n-1}}{f(\alpha) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1})$$

5.2 Điều kiện hội tụ

Giả sử $[a, b]$ là khoảng nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Đạo hàm $f'(x)$ và $f''(x)$ liên tục, không đổi dấu, không triệt tiêu trên $[a, b]$. Chọn $\alpha = a$ nếu

$$f(a) f''(x) > 0$$

hoặc $\alpha = b$ trong trường hợp ngược lại thì dãy số hội tụ đơn điệu đến nghiệm đúng của phương trình $f(x) = 0$

5.3 Sai số

$\forall x \in [a, b]$ nếu tồn tại m, M thỏa mãn

$$0 < m \leq |f'(x)| \leq M$$

Khi đó ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{M - m}{m} |x_n - x_{n-1}|$$