Cthuc-phuong phap tinh

Phương pháp tính (Trường Đại học Bách khoa Hà Nội)

Date No.

(*) P^2 chia đôi: / Sai số: $\Delta \le \frac{b_0 - a_0}{2^n}$

- Số lần lặp t/m ε: $n \ge \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right)$

- Làm theo bảng

Dấu của $f(a_n)$, $f(b_n)$

VD: $x^3 + x - 4$.

n	a_n	b_n
0 ..	1 (−)	2 (+)
1 ..	1 (−)	1,5 (+)
2 ..	1,25 (−)	1,5 (+)
3 ..	1,375 (−)	1,5 (+)
4 ..		

(*) P^2 lặp đơn. / Sai số: $\Delta \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$

- Số lần lặp t/m ε: $n \ge \log_q\left(\frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}\right)$

Trong đó: $|\varphi'(x)| \le q < 1$

- Cách bấm: $\boxed{Y = f(x) : X = Y}$

VD: Cho $\varphi(x) = \frac{x^3 5}{8}$ hay $x = \frac{x^3 5}{8}$, kpli là (−1,−0,5) vs $x_0 = -1$

-> Bấm: $\underbrace{Y = \frac{x^3 5}{8} : X = Y}_{\text{kết quả}}$

Date No.

(*) P^2 dây cung:

- Sai số: $\Delta \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_{n+1} - x_n|$

Trong đó: $M_1 \ge |f'(x)| \ge m_1 > 0$ $\forall x \in [a;b]$

- Đkiện t/m ε: $|x_{n+1} - x_n| \le \frac{\varepsilon m_1}{M_1 - m}$

- Cách bấm: $Y = X - \frac{(d-X) f(X)}{f(d) - f(X)} : X = Y$

(!) Chọn d $\begin{cases} f(x_0) . f''(x) < 0 \\ f(d) . f''(x) > 0 \end{cases}$

(*) P^2 tiếp tuyến:

- Sai số: $\Delta \le \frac{M_2}{2m_1}(x_{n+1} - x_n)^2$

Trong đó: $M_2 \ge |f''(x)|$
$0 < m_1 \le |f'(x)|$

- Đkiện t/m ε: $|x_{n+1} - x_n| \le \sqrt{\frac{2\varepsilon m_1}{M_2}}$

- Cách bấm: $Y = X - \frac{f(x)}{f'(x)} : X = Y$

(!) $f(x_0) . f''(x) > 0$

Date No.

⑦ Matrận Jacobi cột.

- Sai số: $\Delta \le \frac{q_1^{n}}{1-q_1} \cdot \frac{\max a_{ii}}{\min a_{ii}} \cdot \|x_1 - x_0\|_1$

- Số lần lặp t/m ε: $n \geq \log_{q_1}\left(\frac{\varepsilon(1-q_1)}{\lambda\|x_1-x_0\|_1}\right)$

- Cách bấm:

VD: Sử dụng jacobi cột tính số lần lặp ~~để~~ thỏa mãn t/m ε

$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 30x_2 + 2x_3 = 2 \\ 6x_1 - x_2 + 60x_3 = -4 \end{cases}$ $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\varepsilon = 0,5.10^{-2}$ $\lambda = \frac{60}{10}$ $q_{cột} = \max\left\{\frac{1+6}{10}; \frac{2+1}{30}; \frac{3+2}{60}\right\}$

Nhập:

$D = \frac{10-2B-3C}{10} : E = \frac{2-A-2C}{30} : F = \frac{-4-6A+B}{60}$ $: |D-A| + |E-B| + |F-C|$

$\|x_{m+1} - x_m\|_1$ mbat đầu 0

CACL: B, C, A là 1 (x_0)

. sai số theo chuẩn cột

+) D, E, F là x_1, x_2, x_3

⑦ Gán thêm $A = D : B = E : C = F$ cho lặp tiếp theo

Date No.

⑤ Jacobi hàng

- Sai số: $\Delta \le \frac{q_\infty}{1-q_\infty} \|x_{m+1} - x_m\|_\infty$

$n \geq \log_{q_\infty}\left(\frac{\varepsilon(1-q_\infty)}{\lambda\|x_{m+1}-x_m\|_\infty}\right)$ $\lambda = 1$

- Bấm:

Đoạn đầu bấm như Jacobi cột:

$: |D-A| : |E-B| : |F-C|$

so sánh, thằng nào lớn nhất thì lấy $\|x_{m+1} - x_m\|_\infty$

$q_\infty = \max\left\{\frac{2+3}{10}; \frac{1+2}{30}; \frac{6+1}{60}\right\}$

⑥ Lặp đơn. $X_n = BX_{n-1} + d$.

Bấm ma trận trong máy tính.

Sai số: $\frac{\|B\|_\infty}{1-\|B\|_\infty} \cdot \|x_{n+1} - x_n\|_\infty$

⑦ Gauss Seidel.

~~Bấm như phần đầu của Jacobi Seidel, ko cần gán~~

Lấy A làm biến đầu

$A = \frac{1-2B+2C+D}{10} ; B = \frac{10-3A+4C-5D}{30}$

HẢI TIẾN

Date No.

Lagrange

Cách bấm: ví dụ

x	1	1,5	2	2,5
y	2	3	4	3,5

x_0 cho trước

$$L_n(x_0) = \frac{(x_0-E)(x_0-F)(x_0-Y)}{(M-E)(M-F)(M-Y)}$$

Chọn gốc tại $M = 1 \to E, F, Y = 1,5; 2; 2,5$

$\to$ lưu $L_0(x_0) = A$

$M = 1,5 \to E, F, Y = 2; 2,5; 1$

$\to$ lưu $L_1(x_0) = B$

$= C$

$= D$

$\Rightarrow$ $L(x_0) = y_0.\underbrace{A}_{L_0(x_0)} + y_1.\underbrace{B}_{L_1(x_0)} + y_2.\underbrace{C}_{L_2(x_0)} + y_3.\underbrace{D}_{L_3(x_0)}$

$L'(x_0) = y'_0.\underbrace{A}_{L'_0(x_0)} + y_1.B + y_2.C + y_3.D$ . . . . .

+) Sai số:

$$\Delta \leq \frac{M}{(n+1)!}|w_{n+1}(x)|$$

$$M = \max_{\xi \in [x_0; x_n]} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

$w_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_n)$

⚠ $n+1$ là số mốc nội suy

VD bài trên: $n+1 = 4$

HẢI TIẾN

Cho $P_n(x)$: đa thức bậc n.

Date No.

(*) Tính toán thông thường: $n \times \frac{n+1}{2}$ phép nhân; n phép cộng

(*) Dùng Hooner: n phép nhân; n phép cộng

(*) Lược đồ Hooner

+) Nhân: $(x^2+2x+3)(x-2)$

	1	2	3	
2		1x2	2x2	3x2
	1	0	-1	-6

$\to$ Thu được: $x^3 - x - 6$

+) Chia: $(x^3 - x - 6) : (x-2)$

	1	0	-1	-6
2	1	2	3	0

Hạ đầu
Nhân ngang
Cộng chéo

$\to$ Thu được: $x^2 + 2x + 3$

Date No.

(*) Newton

Tiến mốc cách đều

+) $P(x) = P(x_0+th) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$

$t = \frac{x-x_0}{h}$

+) Lùi mốc cách đều:

$P(x) = P(x_n+th) = y_n + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$

$t = \frac{x-x_n}{h}$

Dùng bảng sai phân: $\Delta y_0 = y_1 - y_0$

+) Tiến mốc bất kì

$N(x) = y_0 + TSP_{1(0)}(x-x_0) + TSP_{2(0)}(x-x_0)(x-x_1) \dots$

$\dots + TSP_{n(0)}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$

+) Lùi mốc bất kì:

$M(x) = y_n + TSP_{1(n-1)}(x-x_n) + TSP_{2(n-2)}(x-x_n)(x-x_{n-1}) +$

$\dots + TSP_{n(0)}(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1)$

⚠ $TSP_{1(0)} = \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$; $TSP_{2(0)} = \frac{TSP_{1(0)} - TSP_{1(1)}}{x_0 - x_2}$

HẢI TIẾN

Date No.

(*) Lagrange	Newton
	ko tốn
SP chia: n	$n-1$
SP nhân: n	

(*) BP tối thiểu

⚠ $y = A.e^{Bx}$

ln 2 vế: $xy > 0 \to \ln y = \ln A + Bx$; $xy < 0 \to \ln(-y) = \ln(-A) + Bx$

⚠ $f(x) = A\sqrt{x+1} + Bx$

Giải hpt

$\begin{cases} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle A + \langle \varphi_1; \varphi_2 \rangle B = \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle A + \langle \varphi_2; \varphi_2 \rangle B = \langle f, \varphi_2 \rangle \end{cases}$

$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \sum_{k=0}^{6} \sqrt{x_k+1} . \sqrt{x_k+1}$

$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \sum_{k=0}^{6} \sqrt{x_k+1} . x_k$

$\langle f, \varphi_1 \rangle = \sum_{k=0}^{6} \sqrt{x_k+1}\, y_k$

HẢI TIẾN

Date . . . No.

① CT hình thang:

$$\int_{x}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{1}{2}h\left(y_0+y_n+2(y_1+y_2+\dots+y_{n-1})\right)$$

Sai số:
$$\begin{cases} \Delta \le \dfrac{M_2}{12}(x_n-x_0).h^2 \\ M_2 \geq \max\limits_{[x_0;x_n]} |f''(x)| \\ n \geq \sqrt{\dfrac{M_2(x_n-x_0)^3}{12\varepsilon}} \end{cases}$$

(*) CT simpson.

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\dots+y_{2n-2})+4(y_1+y_3+\dots y_{2n-1})\right)$$

Sai số:
$$\begin{cases} \Delta \le \dfrac{M_4}{180}(x_{2n}-x_0)h^4 \\ M \geq \max\limits_{[x_0;x_{2n}]} |f^{(4)}(x)| \\ n \geq \sqrt[4]{\dfrac{M_4(x_{2n}-x_0)^5}{180\,\varepsilon}} \end{cases}$$

(!) thang: n nguyên, gần nhất
simp: n chẵn, gần nhất

Date . . . No.

(*) Tìm đạo hàm ước cấp

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{f^{n}(x+F)-f^{n}(x)}{F}$$

$F = 10^{-8}$

(*) Euler hiện:

$\underbrace{A = y + hf(x,y)}_{\text{kquả}} : X = X + h : y = A$

(*) Euler ẩn:

$A = Y + hf(x,y) : X = X+h : \underbrace{B = Y + h.f(X;A)}_{\text{KQ}}$

$: y = B$

(*) Euler cải tiến:

$A = h.f(x,y) : X = X+h : B = h.f(x, y+A)$

$\underbrace{: y = y + \frac{A+B}{2}}_{\text{KQ}}$

HẢI TIẾN

Date ... No.

(*) RK3

$k_1 = hf(x_k; y_k) \rightarrow A$

$k_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}; y_k + \frac{A}{2}) \rightarrow B$

$k_3 = hf(x_k + h; y_k - A + 2B) \rightarrow C$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(A + 4B + C)$$

(*) RK4

$k_1 = h.f(x_k; y_k) \rightarrow A$

$k_2 = h.f(x_k + \frac{h}{2}; y_k + \frac{A}{2}) \rightarrow B$

$k_3 = h.f(x_k + \frac{h}{2}; y_k + \frac{B}{2}) \rightarrow C$

$k_4 = h.f(x_k + h; y_k + C) \rightarrow D$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(A + 2B + 2C + D)$$

HẢI TIẾN

Sai số

Date ... No.

- Sai số giá trị ~~...~~ tuyệt đối: Δa: $|a - a^*| \leq \Delta a$
- " tương đối: $\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$
- Ước lượng trên: $a + \Delta a > a^*$
- " dưới: $a - \Delta a < a^*$

(1) Ng lí đồng đều:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ \Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i \end{cases}$$

VD1: $V = \frac{4}{3}\pi . r^3$

Cho $r = 10mm$, $\Delta r = 0{,}01mm$, $\pi = 3{,}14$, $\Delta\pi = 0{,}01$. Tính ΔV

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial V}{\partial \pi}\right| = \frac{4}{3}r^3 \text{ (đạo hàm theo } \pi) \\ \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| = 4\pi r^2 \text{ (đạo hàm theo r)} \end{cases} \Rightarrow \Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial \pi}\right| . \Delta\pi + \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| . \Delta r$$

$$= \frac{4}{3}r^2 . 0{,}01 + 4\pi r^2 \times 0{,}01$$

Thay $r = 10mm \rightarrow \Delta V = 25{,}88970395 \,(mm^3)$

VD2: Cho $\Delta V = 10^{-6}$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $R = 10mm$, $\pi = 3{,}14$. Tính $\Delta\pi$, ΔR

$$\left|\frac{\partial V}{\partial \pi}\right| = \frac{4}{3}R^3 \quad ; \quad \left|\frac{\partial V}{\partial R}\right| = 4\pi R^2$$

HẢI TIẾN

Date . . . No.

$\Rightarrow \Delta R = \dfrac{\Delta V}{n\left|\dfrac{\partial f}{\partial R}\right|} = 3{,}75.10^{-10}$

$\Delta r = \dfrac{\Delta V}{n\left|\dfrac{\partial f}{\partial R}\right|} = 3{,}9788735 \cdot 10^{-10}$

n = 2 ứng vs 2 ẩn cần tìm R, r
n = x ứng vs x ẩn cần tìm

VD3: Tính và xét chữ số đáng tin của $A = \frac{1}{3}a^4$ vs a

$a = 2{,}38256$, $\delta a = 0{,}016$

$A = \frac{1}{3}a^4 \rightarrow \left|\frac{\partial A}{\partial a}\right| = \frac{4}{3}a^3$

$\rightarrow \Delta A = \frac{4}{3}a^3 . \Delta a = \frac{4}{3}a^3 . \delta a . |a| = \frac{4}{3}a^4 . \delta a$

$= 0{,}4296493 \times 10^{-2}$

Ta thấy $0{,}5.10^{-3} < \Delta A < 0{,}5.10^{-2}$

$\hookrightarrow$ A có 2 chữ số đáng tin sau dấu phẩy

$A = \frac{1}{3}a^4 = 10{,}74123283$

$\rightarrow$ Các chữ số đáng tin 1, 0, 7, 4.

⚠ Chữ số đáng tin: $\Delta a \leq \frac{1}{2}.10^{s}$

$\rightarrow a_s$ là chữ số tin tưởng

$a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots a_{-m}$

HẢI TIẾN