1 Lược đồ Horner

1.1 Chia đa thức cho đơn thức

$$P\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$$

Tìm $Q(x)$ và r: $P(x) = Q(x)(x - c) + r$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
$+$	0	$c.b_{n-1}$	$c.b_{n-2}$	$\dots$	$c.b_1$	$c.b_0$
$c \rightarrow$	$b_{n-1} \nearrow$	$b_{n-2} \nearrow$	b_{n-3}	$\dots$	$b_0 \nearrow$	r

Ví dụ: $P(x) = x^5 + x^4 - 1$, $c = -2$

	1	1	0	0	0	-1
$+$	0	-2	2	-4	8	-16
$c = -2$	1	-1	2	-4	8	-17

Khi đó: $Q(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 8$ và $r = -17$

1.2 Nhân đa thức với đơn thức

$$P\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$$

Tìm $Q(x) = P(x)(x - c)$

$c \rightarrow$	$a_n \searrow$	$a_{n-1} \searrow$	$a_{n-2} \searrow$	$\dots$	$a_1 \searrow$	$a_0 \searrow$	0
-	0	$c.a_n$	$c.a_{n-1}$	$\dots$	$c.a_2$	$c.a_1$	$c.a_0$
	b_{n+1}	b_n	b_{n-1}	$\dots$	b_2	b_1	b_0

Lúc này $Q(x) = b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$
Ví dụ: $P(x) = x^5 + x^4 - 1, c = -2$

$c = -2$	1	1	0	0	0	-1	0
$-$	0	-2	-2	0	0	0	2
	1	3	2	0	0	-1	-2

$\Rightarrow Q(x) = x^6 + 3x^5 + 2x^4 - x - 2$

2 Đa thức nội suy Lagrange

Công thức chung

$\mathcal{L}_n(x) = \omega(x). \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{D_k}$ với $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ và $D_k = \omega'(x_k)(x - x_k)$.

Bảng nội suy

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n	
x_0	$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$\dots$	$x_0 - x_n$	D_0
x_1	$x_1 - x_0$	$x - x_1$	$\dots$	$x_1 - x_n$	D_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$\dots$	$x - x_n$	D_n
					$\omega(x)$

Công thức sai số

Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm đến cấp $n+1$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Đặt $M = \max_{x \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$, ta có:

$$|f(x) - \mathcal{L}_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!} |\omega(x)|$$

Ví dụ

Cho hàm số y xác định bởi:

x	1	2	3	4
$y = e^x$	2,7183	7,3891	20,0855	54,5982

Lập đa thức nội suy, tính gần đúng và đánh giá sai số tại điểm $x = 1,5$.

Giải:

Lập bảng nội suy:

x	1	2	3	4	
1	$x-1$	-1	-2	-3	$6(1-x)$
2	1	$x-2$	-1	-2	$2(x-2)$
3	2	1	$x-3$	-1	$2(3-x)$
4	3	2	1	$x-4$	$6(x-4)$
					$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

$\Rightarrow$ Đa thức nội suy là:

$$\mathcal{L}_3(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \left[\frac{2,7183}{6(1-x)} + \frac{7,3891}{2(x-2)} + \frac{20,0855}{2(3-x)} + \frac{54,5982}{6(x-4)} \right]$$

$y(1,5) \approx \mathcal{L}_3(1,5) = 4,9124$
Có $y^{(4)} = e^x \to M = e^4$
$\Rightarrow |y(1,5) - \mathcal{L}_3(1,5)| \leq \dfrac{e^4}{4!} |(1,5-1)(1,5-2)(1,5-3)(1,5-4)| = 2,1327$

TH đặc biệt: Các điểm nút cách đều nhau với bước $h = x_{k+1} - x_k$

Đặt $q = \dfrac{x - x_0}{h}$, khi đó ta có:

$$\mathcal{L}_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (q-k) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} y_k}{k!\,(n-k)!\,(q-k)}$$

3 Đa thức nội suy newton

Định nghĩa tỷ sai phân

Trên đoạn $[x_k, x_{k+1}]$ ta định nghĩa đại lượng

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

được gọi là tỉ sai phân cấp 1. Tương tự

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

được gọi là tỉ sai phân cấp 2. Bằng quy nạp, ta có tỉ sai phân cấp p

$$f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+p}] - f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p-1}]}{x_{k+p} - x_k}$$

Xây dựng công thức

Vì công thức chung đọc rất khó hiểu nên mình sẽ làm một ví dụ sau: Xây dựng đa thức nội suy Newton:

x	1,0	1,3	1,6	1,9
y	0,76	0,62	0,45	0,28

Giải:
Lập bảng tỷ sai phân:

x_k	$f\left(x_k\right)$	$f\left[x_k, x_{k+1}\right]$	$f\left[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}\right]$	$f\left[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}\right]$
1,0	0,76			
		$\frac{0{,}62-0{,}76}{1{,}3-1} = \frac{-7}{15}$		
$1,3$	0,62		$\frac{\frac{-17}{30}-\frac{-7}{15}}{1{,}6-1} = \frac{-1}{6}$	
		$\frac{0{,}45-0{,}62}{1{,}6-1{,}3} = \frac{-17}{30}$		$\frac{0-\frac{-1}{6}}{1{,}9-1} = \frac{5}{27}$
1.6	0.45		$\frac{\frac{-17}{30}-\frac{-17}{30}}{1{,}9-1{,}3} = 0$	
		$\frac{0{,}28-0{,}45}{1{,}9-1{,}6} = \frac{-17}{30}$		
1,9	0,28			

Lúc đó sẽ có 2 cách xây dựng đa thức nội suy Newton:

- Công thức Newton tiến:

$\mathcal{N}_3^{(1)}(x) = 0,76 - \frac{7}{15}(x-1) - \frac{1}{6}(x-1)(x-1,3) + \frac{5}{27}(x-1)(x-1,3)(x-1,6)$

- Công thức Newton lùi:

$\mathcal{N}_3^{(2)}(x) = 0,28 - \frac{17}{30}(x-1,9) + 0(x-1,9)(x-1,6) + \frac{5}{27}(x-1,9)(x-1,6)(x-1,3)$

Công thức tổng quát

- Newton tiến:

$\mathcal{N}_n^{(1)}(x) = y_0 + f\left[x_0, x_1\right](x-x_0) + f\left[x_0, x_1, x_2\right](x-x_0)(x-x_1) + \ldots + f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$

- Newton lùi:

$\mathcal{N}_n^{(2)}(x) = y_n + f\left[x_{n-1}, x_n\right](x-x_n) + f\left[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\right](x-x_n)(x-x_{n-1}) + \ldots + f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right](x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)$

Sai số

$$\mathcal{R}_n(x) = f\left[x, x_0, \ldots, x_n\right](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

hoặc dùng sai số của đa thức nội suy Lagrange

TH đặc biệt: Các điểm nút cách đều nhau với bước $h = x_{k+1} - x_k$

• Định nghĩa sai phân:

Sai phân tiến cấp 1

$$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$$

Sai phân tiến cấp k+1

$$\Delta^{k+1} y_j = \Delta^k y_{j+1} - \Delta^k y_j$$

• Công thức Newton tiến: Đặt $q = \dfrac{x - x_0}{h}$

$$\mathcal{N}_n^{(1)}(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1) + \ldots \frac{\Delta^n y_0}{n!}q(q-1)\ldots(q-n+1)$$

• Công thức Newton lùi: Đặt $p = \dfrac{x - x_n}{h}$

$$\mathcal{N}_n^{(2)}(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}p + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}p(p+1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}p(p+1)\ldots(p+n-1)$$

4 Phương pháp bình phương tối thiểu

Bài toán xấp xỉ thực nghiệm

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

Tìm hàm $f(x)$ xấp xỉ bảng (x_k, y_k) theo phương pháp bình phương tối thiểu để

$$g(f) = \sum \left(f(x_k) - y_k\right)^2 \to \min$$

Hàm f tổng quát rất đa dạng, dưới đây là một số dạng thường gặp

4.1 Dạng $f(x) = Ax + B$

Khi đó

$$g(A, B) = \sum_{k=1}^{n} \left(A + Bx_k - y_k\right)^2$$

Bài toán quy về tìm cực tiểu hàm 2 biến:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial A} g(A,B) = 2\sum\limits_{k=1}^{n}(A + Bx_k - y_k) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial B} g(A,B) = 2\sum\limits_{k=1}^{n}(A + Bx_k - y_k)\,x_k & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} nA + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) B & = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right) B & = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k \end{cases}$$

Ví dụ:

x	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
y	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7

Giải:

Ta có $n = 10$, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 29$, $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k = 39$, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 109$, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k = 140$. Hệ phương trình xác định A, B có dạng:

$$\begin{cases} 10A + 29B & = 39 \\ 29A + 109B & = 140 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0.7671 \\ B = 1.0803 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = 1.0803x + 0.7671$

4.2 Dạng $f(x) = Ax^2 + Bx + C$

Khi đó

$$g\left(A, B, C\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k\right)^2$$

Bài toán quy về tìm cực tiểu hàm 3 biến:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial A} g\left(A, B, C\right) = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \left(A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k\right) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial B} g\left(A, B, C\right) = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \left(A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k\right)x_k & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C} g\left(A, B, C\right) = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \left(A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k\right)x_k^2 & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} nA + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)B + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)C & = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)B + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3\right)C & = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3\right)B + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^4\right)C & = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 y_k \end{cases}$$

4.3 Dạng $f(x) = Ag(x) + Bh(x)$

Khi đó

$$g\left(A, B\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(Ag\left(x_k\right) + Bh\left(x_k\right) - y_k\right)^2$$

Bài toán quy về tìm cực tiểu hàm 2 biến:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial A} g\left(A,B\right) = 2g\left(x_k\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\left(Ag\left(x_k\right)+Bh\left(x_k\right)-y_k\right)^2 & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial B} g\left(A,B\right) = 2h\left(x_k\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\left(Ag\left(x_k\right)+Bh\left(x_k\right)-y_k\right)^2 & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} g^2\left(x_k\right)\right)A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} g\left(x_k\right)h\left(x_k\right)\right)B & = \sum\limits_{k=1}^{n} g\left(x_k\right)y_k \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} g\left(x_k\right)h\left(x_k\right)\right)A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} h^2\left(x_k\right)\right)B & = \sum\limits_{k=1}^{n} h\left(x_k\right)y_k \end{cases}$$

Đối với các dạng khác ta làm tương tự theo cách đưa về bài toán tìm cực tiểu hàm nhiều biến