câu 1: a) $2x^3-3x^2-12x$ có $f'(x)=6x^2-6x-12$

cho $f'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ xét dấu

	-1		2	
$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow (-\infty, 0), (2, \infty)$ đồng biến, $(-1, 2)$ nghịch biến

$x=-1 \Rightarrow$ cực đại $\Rightarrow f(-1)=7$

$x=2 \Rightarrow$ cực tiểu $\Rightarrow f(2)=-20$

ta có $f''(x)=12x-6 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

xét $f''(x)$

	$\frac{1}{2}$	
$-$		$+$

$\Rightarrow (-\infty, \frac{1}{2})$: lồi, $(\frac{1}{2}, \infty)$: lõm

b) $f(x) = 2 + 3x - x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$, xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
		$-$		$+$		$-$	

Vậy $(-\infty, -1), (1, \infty)$ đồng biến, $(-1, 1)$ nghịch biến

$x = -1 \Rightarrow$ cực tiểu $\Rightarrow f(-1) = 0$

$x = 1 \Rightarrow$ cực đại $\Rightarrow f(1) = 4$

Xét $f''(x) = -6x \Rightarrow x = 0$

xét dấu:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
		$+$		$-$	

$(-\infty, 0)$ lồi, $(0, \infty)$ lõm

c) $f(x) = x^4 - 6x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$ Xét $\;-\;\; -\sqrt{3} \;\; + \;\; 0 \;\; - \;\; +\sqrt{3} \;\; +$

Vậy $(-\infty, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$ nghịch biến, $(-\sqrt{3}, 0); (\sqrt{3}, \infty)$ đồng biến

tại $x = -\sqrt{3} \Rightarrow f(-\sqrt{3}) = -9$ (cực tiểu)

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ (cực đại)

$x = \sqrt{3} \Rightarrow f(\sqrt{3}) = -9$ (cực tiểu)

Xét $f''(x) \Rightarrow 12x^2 - 12 \Rightarrow x = \pm 1$

Xét: $\;+\;\; -1 \;\; - \;\; 1 \;\; +$

$(-\infty, -1)\,(1, \infty)$, lồi.

$(-1, 1)$ lõm.

d) $f(x)=(x^2-1)^3 \Rightarrow f'(x)=6x(x^2-1)^2$

$f'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$ Xét dấu

	-1		0		1	
$-$		$-$		$+$		$+$

Vậy $(-\infty, 0)$ nghịch biến; $(0, \infty)$ đồng biến.

$x=-1$ (không đổi dấu)

$x=1$ (không đổi dấu)

$x=0 \Rightarrow f(0)=-1$ (cực tiểu)

Xét $f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm \frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$

Xét:

	-1		$-\frac{1}{\sqrt{5}}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$		1	
$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

$(-\infty, -1)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(1, \infty)$ lồi

$\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right)$ lõm

Bài 2 a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{1/x} - 1}{1/x}$ khi $x \to \infty$ $\dfrac{1}{x} \to 0^+$ Đặt $\dfrac{1}{x} = t \Rightarrow t \to 0^+$

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^t - 1}{t}$ ta dùng giới hạn cơ bản

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

b) $\lim_{x\to 0} (1-2x)^{1/x} \Rightarrow$ khi $x \to 0$, $\frac{1}{x} \to \pm\infty$

gọi $L = \lim_{x\to 0} (1-2x)^{1/x} \Leftrightarrow \ln(L) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{x}$

Dùng giới hạn cơ bản $\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ $(u \to 0)$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{x} = \lim \frac{-2x+o(x)}{x} = -2$

$\ln L = -2$, $L = e^{-2}$

Vậy $L = e^{-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}$, Khai triển Taylor của $\cos x\ (x=0)$

$\cos x = 1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4-\dfrac{1}{720}x^6+\ldots$

+ thay vào tử số

$\cos x-1+\dfrac{1}{2}x^2=\left(1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4+\ldots\right)-1+\dfrac{1}{2}x^2$

Rút gọn: $\dfrac{1}{24}x^4+o(x^4)$, Thay vào lim

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}=\dfrac{1}{24}.$

d) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$, nhân liên hợp

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)}{\sqrt{x^2+x} + x} \Rightarrow \frac{(x^2+x) - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

chia tử mẫu cho x

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}$$

Khi $x \to \infty$, $\frac{1}{x} \to 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}$$

Vậy giới hạn $= \frac{1}{2}$.

e). $\lim\limits_{x \to \infty} x^{(\ln 2)/(1+\ln x)} \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln x \dfrac{\ln 2}{1+\ln x}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \ln f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln 2 . \ln x}{1 + \ln x}$ chia tử mẫu cho $\ln x$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln 2}{\frac{1}{\ln x} + 1} \to \dfrac{\ln 2}{1} = \ln 2$

Kết luận $\ln f(x) \to \ln 2 \Leftrightarrow f(x) \to e^{\ln 2} = 2$

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x 3^x}{3^x - 1}$ ta khai triển Taylor gần $x = 0$

$3^x = e^{x\ln 3} = 1 + x\ln 3 + \frac{(x\ln 3)^2}{2!} + \dots$ Thay vào:

tử số: $x \cdot 3^x = x \cdot (1 + x\ln 3 + \dots) = x + x^2\ln 3 \dots$

mẫu: $3^x - 1 = x\ln 3 + \frac{(x\ln 3)^2}{2} + \dots$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + x^2\ln 3 \dots}{x\ln 3 + \frac{(x\ln 3)^2}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1 + x\ln 3 + \dots)}{x(\ln 3 + \frac{(x\ln^2 3)}{2} + \dots)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 + x\ln 3 + \dots}{\ln 3 + \frac{x\ln^2 3}{2} + \dots} \longrightarrow \frac{1}{\ln 3}$$ Vậy giới hạn của $f(x) \to \frac{1}{\ln 3}$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} x(\ln(x+5) - \ln x) \Leftrightarrow x\ln\left(1+\frac{5}{x}\right)$

Đặt $y = \frac{5}{x}$, $x = \frac{5}{y}$, $y \to 0^+$ khi $x \to \infty$

Khi đó $x \cdot \ln\left(1+\frac{5}{x}\right) = \frac{5}{y} \cdot \ln(1+y)$. Sử dụng giới hạn:

$\lim\limits_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ (giới hạn cơ bản)

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} x\ln\left(1+\frac{5}{x}\right) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{5}{y} \cdot \ln(1+y) = 5$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - \ln(2/x)}{3x^2 + 2x}$, tử số: $x^2 - \ln(2/x) = x^2 + \ln 2 - \ln x$

mẫu số: $3x^2 + 2x$

Xét $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + \ln 2 - \ln x}{3x^2 + 2x}$ chia tử mẫu cho x^2

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + \frac{\ln 2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}}{3 + \frac{2}{x}}$ khi $x \to \infty$, $\dfrac{\ln x}{x^2} \to 0$, $\dfrac{1}{x} \to 0$, $\dfrac{1}{x^2} \to 0$

Vậy $\dfrac{1 + 0 - 0}{3 + 0} = \dfrac{1}{3}$

Vậy giới hạn của $f(x) \to \dfrac{1}{3}$

1) $\lim_{x \to \infty} (e^x + x)^{1/x}$ khi $x \to \infty$ e^x luôn tăng nhanh hơn x nên $(e^x + x) \approx e^x$

$\Leftrightarrow (e^x + x)^{1/x} \approx (e^x)^{1/x} \Leftrightarrow e^{x \cdot \frac{1}{x}} = e^1 = e$

Vậy $\lim_{x \to \infty} (e^x + x)^{1/x} \to e$.

j) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ khi $x \to 0^+$, $\frac{1}{x} \to +\infty$, $e^x - 1 \to +\infty$

Đây là dạng vô định

$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - 1}{x(e^x - 1)}$, khai triển Taylor khi x gần 0

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \to e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \cdots$

Vậy tử số: $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$

mẫu số: $x(e^x - 1) = x\left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots\right) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \cdots$

Lấy giới hạn, $\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} + \cdots}{x^2 + \cdots} = \frac{1}{2}$.