Giải. Với $n \geq 3$, xét cột đầu tiên của bàn cờ $2 \times n$. Có thể phủ cột này theo hai cách.

1) Bằng một domino dọc: phần còn lại, là bàn cờ $2 \times (n-1)$, có a_{n-1} cách phủ.

2) Bằng hai domino ngang để phủ cả hai cột đầu bên trái: phần còn lại, là bàn cờ $2 \times (n-2)$, có a_{n-2} cách phủ.

Theo quy tắc cộng, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ \forall n \geq 3$, trong đó $a_1 = 1, a_2 = 2$. Giải hệ thức này, được

$$\begin{aligned}
a_n &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\Big) + \Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\Big) \\
&= \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big(\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\Big) - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big(\frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big],
\end{aligned}$$

□

Trong ví dụ trên $a_n = F_{n+1}$.

Sử dụng tính chất của số Fibonacci [có thể chứng minh bằng nguyên lý quy nạp],

$$F_n > \alpha^{n-2}, \ \forall n \geq 3, \ \text{với } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

Gabriel Lamé* đã chứng minh

Ví dụ 9.15 (Định lý Lamé)**.** Cho $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a, b \geq 2$. Số phép chia dùng trong thuật toán Euclid để tìm ước chung lớn nhất của a và b không quá 5 lần số chữ số của b.

Giải. Đặt $r_0 = a$ và $r_1 = b$, ta có

$$\begin{aligned}
r_0 &= r_1 q_1 + r_2, && 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3, && 0 < r_3 < r_2 \\
r_2 &= r_3 q_3 + r_4, && 0 < r_4 < r_3 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n, && 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= r_n q_n.
\end{aligned}$$

Khi đó, $\gcd(a, b) = r_n$, là phần dư khác không cuối cùng, và thuật toán thực hiện n phép chia.

*Gabriel Lamé, 1795–1870, nhà toán học Pháp

Ta thấy, $q_i \geq 1,\ \forall i = \overline{1,n}$. Riêng $q_n \geq 2$, vì $r_{n-1} = r_n q_n$ mà $0 < r_n < r_{n-1}$. Như vậy

$$\begin{aligned}
r_n > 0 \Rightarrow r_n &\geq 1 = F_2 \\
r_{n-1} = r_n q_n &\geq 1 \cdot 2 = 2 = F_3 \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n &\geq F_3 \cdot 1 + F_2 = F_4 \\
r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-2} + r_{n-1} &\geq F_4 \cdot 1 + F_3 = F_5 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
r_2 = r_3 q_3 + r_4 &\geq F_{n-1} \cdot 1 + F_{n-2} = F_n \\
b = r_1 = r_2 q_2 + r_3 &\geq F_n \cdot 1 + F_{n-1} = F_{n+1}
\end{aligned}$$

Dẫn đến

$$\begin{aligned}
&b \geq F_{n+1} > \alpha^{(n+1)-2} = \alpha^{n-1} \\
&\Rightarrow n - 1 < \log_\alpha b = \log_\alpha 10 \cdot \log_{10} b = 4.784971 \log_{10} b < 5\log_{10} b.
\end{aligned}$$

Nếu b có k chữ số, thì $10^{k-1} \leq b < 10^k$, nên $\log_{10} b < k$. Do đó $n - 1 < 5k$, hay $n \leq 5k$, tức là số phép chia trong thuật toán Euclid không quá 5 lần số chữ số của b. □

Ví dụ 9.16. Tìm hệ thức đệ quy của a_n, là số xâu nhị phân độ dài n không có các số 0 liên tiếp.

Giải. **Cách 1:** Với mỗi xâu đếm bởi a_n, có hai khả năng:

1) Số đầu là 1, thì phần còn lại là xâu độ dài $n - 1$ không có các số 0 liên tiếp. Số xâu như vậy là a_{n-1}.
2) Số đầu là 0, thì số thứ hai phải là 1, và phần còn lại là xâu độ dài $n - 2$ không có các số 0 liên tiếp. Số các xâu như vậy là a_{n-2}.

Theo quy tắc cộng, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ \forall n \geq 3$. Ta xác định thêm $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

Cách 2: Cách này sử dụng các biến phụ. Trong các xâu đếm bởi a_n, đặt $a_n^{(0)}$ là số xâu số đầu là 0, và $a_n^{(1)}$ là số xâu có số đầu là 1. Khi đó $a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)}$. Vì mỗi xâu dạng $1s$ đếm bởi $a_n^{(1)}$ khi và chỉ khi xâu s đếm bởi a_{n-1}, nên $a_n^{(1)} = a_{n-1}$.

Với mỗi xâu đếm bởi a_n, có hai khả năng:

1) Số thứ hai là 0, thì số đầu chỉ có thể là 1. Số xâu như vậy là $a_{n-1}^{(0)}$.
2) Số thứ hai là 1, thì số đầu có hai lựa chọn, là 0 hoặc 1. Số xâu như vậy là $2a_{n-1}^{(1)}$.