Nếu $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên A, thì theo ý (a) và (c) của Định lý 6.7, các lớp tương đương rời nhau theo quan hệ $\mathcal{R}$ cho ta một phân hoạch của A.

Định lý 6.8. *a) Mỗi quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ trên tập A cho ta một phân hoạch của A; và*

b) Mỗi phân hoạch của tập A lại cho ta một quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ trên A.

Định lý 6.9. *Với tập A bất kỳ, có tương ứng 1-1 giữa tập các quan hệ tương đương trên A và tập các phân hoạch của A.*

6.5 Bao đóng của quan hệ

Định nghĩa 6.18. *Cho quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A, và một thuộc tính P nào đó, chẳng hạn phản xạ, đối xứng, bắc cầu. P–bao đóng của $\mathcal{R}$, nếu tồn tại, là quan hệ "nhỏ nhất" trên A chứa $\mathcal{R}$ có tính chất P, theo nghĩa $S \supseteq \mathcal{R}$, và $\mathcal{S}$ là tập con của mọi quan hệ trên A chứa $\mathcal{R}$ có tính chất P.*

$\mathcal{R}$ có bao đóng phản xạ là

$$\mathcal{R} \cup \{(a, a) \mid a \in A\},$$

và bao đóng đối xứng là

$$\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c = \mathcal{R} \cup \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

6.5.1 Bao đóng bắc cầu

Định lý 6.10. *Cho quan hệ $\mathcal{R}$ trên A. Khi đó, với số nguyên dương n, có đường đi độ dài n từ a đến b khi và chỉ khi $(a, b) \in \mathcal{R}$.*

Định nghĩa 6.19. *Cho quan hệ $\mathcal{R}$ trên A. Quan hệ liên thông $\mathcal{R}^*$ chứa các cặp (a, b) sao cho có đường đi từ a đến b trong $\mathcal{R}$.*

$$\mathcal{R}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^n.$$

Định lý 6.11. *Bao đóng bắc cầu của quan hệ $\mathcal{R}$ là quan hệ liên thông $\mathcal{R}^*$.*

Bổ đề 6.1. *Cho tập A cỡ n, và quan hệ $\mathcal{R}$ trên A. Khi đó, nếu trong $\mathcal{R}$, có đường đi từ a đến b, thì cũng có đường đi độ dài không quá n.*

Hệ quả của bổ đề

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \cdots \cup \mathcal{R}^n.$$

Định lý 6.12. *Cho quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập cỡ n, có ma trận biểu diễn $M_{\mathcal{R}}$. Khi đó, ma trận biểu diễn bao đóng bắc cầu $\mathcal{R}^*$ là*

$$M_{\mathcal{R}^*} = M_{\mathcal{R}} + M_{\mathcal{R}}^2 + M_{\mathcal{R}}^3 + \cdots + M_{\mathcal{R}}^n.$$

Thuật toán tìm $M_{\mathcal{R}}^*$ theo công thức trên có phức tạp $O(n^4)$.

Ví dụ 6.42. Cho $A = \{a, b, c, d\}$, và quan hệ $\mathcal{R} = \{(a, b), (a, d), (b, b), (c, a), (d, c)\}$ trên A. Tìm bao đóng bắc cầu $\mathcal{R}^*$ của $\mathcal{R}$.

Giải. Ta có

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow M_{\mathcal{R}}^2 = M_{\mathcal{R}} \cdot M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{R}}^3 = M_{\mathcal{R}} \cdot M_{\mathcal{R}}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_{\mathcal{R}}^4 = M_{\mathcal{R}} \cdot M_{\mathcal{R}}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{R}^*} = M_{\mathcal{R}} + M_{\mathcal{R}}^2 + M_{\mathcal{R}}^3 + M_{\mathcal{R}}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}^* = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\}.$$

□

```python
import numpy as np
M = np.array([[0, 1, 0, 1],
              [0, 1, 0, 0],
              [1, 0, 0, 0],
```

```
                    [0, 0, 1, 0]], dtype=bool)
n = len(M)
A = M.copy()
L = M.copy()
for k in range(2, n+1):
    L = M.dot(L)  # lưu M^k
    A += L        # lưu M + M^2 + ··· + M^k
    print(k, np.array(L, dtype=int))

np.array(A, dtype=int)
```

6.5.2 Thuật toán Warshall

*Xét dãy ma trận $W_k = \left(w_{ij}^k\right)_n$ xác định bởi

1) $W_0 = M_{\mathcal{R}}$, và

2) với $k = 1, 2, \ldots n$,

$$w_{ij}^{(k)} = w_{ij}^{(k-1)} + w_{ik}^{(k-1)} w_{kj}^{(k-1)}$$

Bổ đề 6.2. $w_{ij}^{(k)} = 1$ *khi và chỉ khi có đường đi từ* a_i *tới* a_j *đi qua các điểm thuộc* $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

Bổ đề cho ta $W_n = M_{\mathcal{R}^*}$.
Thuật toán có độ phức tạp $O\left(n^3\right)$.
Trong tính toán, ta lưu ý một số tính chất sau

1) Trong W_{k-1}, w_{ik}^{k-1} và w_{kj}^{k-1} là hình chiếu của w_{ij}^{k-1} lên cột k, hàng k.

2) $w_{ik}^{(k)} = w_{ik}^{(k-1)}$, và $w_{kj}^{(k)} = w_{kj}^{(k-1)}$.

3) Nếu $w_{ij}^{k-1} = 1$ thì $w_{ij}^k = 1$.

4) Nếu $w_{ik}^{k-1} = 0$ hoặc $w_{kj}^{k-1} = 0$ thì $w_{ij}^k = w_{ij}^{k-1}$.

5) Nếu $w_{ik}^{k-1} = w_{kj}^{k-1} = 1$ thì $w_{ij}^k = 1$.

*Thuật toán Warshall đôi khi còn gọi là thuật toán Roy–Warshall, được đưa ra vào năm 1959 bởi Bernard Roy (1934–2017, nhà toán học Pháp), và năm 1960 bởi Stephen Warshall (1935–2006, nhà khoa học máy tính Mỹ)

Ví dụ 6.43. Trong Ví dụ 6.42,

$$W_0 = M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{R}^*} = W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```python
import numpy as np
W = np.array([[0, 1, 0, 1],
              [0, 1, 0, 0],
              [1, 0, 0, 0],
              [0, 0, 1, 0]], dtype=bool)
n = len(W)
for k in range(n):
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            W[i, j] += W[i, k] * W[k, j]
    print(k+1, np.array(W, dtype=int))
```