$$l_{n+1} = \frac{l_n}{3}, \text{ với } l_0 = 1.$$

Suy ra $e_n = 3 \cdot 4^n$, và $l_n = \frac{1}{3^n}$. Do đó

$$a_{n+1} = a_n + e_n \times \frac{\sqrt{3}}{4} l_{n+1}^2 = a_n + 3 \cdot 4^n \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 = a_n + \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Giải hệ thức đệ quy với $a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, ta được $a_n = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(\frac{4}{9}\right)^n$. □

Phương pháp đệ quy là lĩnh vực cơ bản của toán rời rạc và phân tích thuật toán. Phương pháp này nảy sinh khi ta muốn giải bài toán bằng cách chia nhỏ, hoặc đưa nó về các bài toán tương tự nhưng cỡ nhỏ hơn. Trong nhiều ngôn ngữ lập trình, điều này được thực hiện bằng cách sử dụng hàm và thủ tục đệ quy, theo quy cách được phép gọi chính nó.

Ví dụ 9.9. Xây dựng và viết mã thuật toán đệ quy tính

a) a^n, với $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Ước chung lớn nhất gcd(a, b) của hai số tự nhiên không đồng thời bằng 0.

Giải. a) Thuật toán đệ quy tính a^n, với $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Với $a^0 = 1$, và $a^n = a \cdot a^{n-1}$, $\forall n \geq 1$, ta có thuật toán đệ quy

Mã 1:

```
def luy_thua(a, n):
  if n == 0:
    return 1
  return a * luy_thua(a, n-1)

luy_thua(2, 10)  # → 1024
```

Mã 2:

```
luy_thua = lambda a, n: 1 if n==0 else a *
    luy_thua(a, n-1)
```

2) Mặt khác, nếu xét phép chia n cho 2, $n = 2n' + r$, trong đó $r = 0$ hoặc 1. Khi đó

$$a^n = a^{2n'+r} = a^r \cdot (a^2)^{n'},$$

ta được phương pháp chia đôi

Mã 1:

```
def luy_thua(a, n):
  if n == 0:
    return 1
  return a**(n%2) * luy_thua(a*a, n//2) # n%2 là r, n//2 là n'
```

Mã 2:

```
luy_thua = lambda a, n: 1 if n==0 else a**(n%2)
     * luy_thua(a*a, n//2)
```

b) Nếu $b = 0$, thì $a \neq 0$, và $\gcd(a, b) = a$. Ngược lại, xét phép chia a cho b, $a = bq + r$, trong đó $q, r \in \mathbb{N}$, $r < b$, thì

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, r) = \gcd(b, a \bmod b).$$

Ta được thuật toán đệ quy

Mã 1:

```
def gcd(a, b):
  if b == 0:
    return a
  else:
    return gcd(b, a % b)

gcd(333, 84)  # → 3
```

Mã 2:

```
gcd = lambda a, b: a if b==0 else gcd(b, a % b)
```

□

Bài tập 9.1

9.1. Tìm quan hệ đệ quy của các cấp số nhân sau

a) $2, 10, 50, 250, \ldots$

b) $6, -18, 54, -162, \ldots$

c) $7, \frac{14}{5}, \frac{28}{25}, \frac{56}{125}, \ldots$

9.2. Giải các hệ thức đệ quy

a) $a_{n+1} - 1.5a_n = 0$

b) $4a_n - 5a_{n-1} = 0$

c) $3a_{n+1} - 4a_n = 0$, $a_1 = 5$

d) $2a_n - 3a_{n-1} = 0$, $a_4 = 81$