4.6.2 Phép cộng số nguyên cùng cơ số

Giả sử $n = \left(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0\right)_b$, $m = \left(b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0\right)_b$. Khi cộng hàng thứ i, ta phải cộng cả phần nhớ r_{i-1} ở hàng $i-1$, rồi ghi ra giá trị s_i cộng được ở hàng này kèm theo phần nhớ r_i:

$$\begin{aligned} s_i &= \left(a_i + b_i + r_{i-1}\right) \bmod b \\ r_i &= \left\lfloor \frac{a_i + b_i + r_{i-1}}{b} \right\rfloor \\ i &= \overline{0, k} \end{aligned} \tag{4.8}$$

trong đó $r_{-1} = 0$. Đặt $s_{k+1} = r_k$, ta có

$$n + m = (s_{k+1} s_k \ldots s_1 s_0)_b.$$

Ví dụ 4.38. Tính $7246_8 + 4735_8$.

Giải.

$$\begin{array}{ccccc} & 7 & 2 & 4 & 6 \\ & 4 & 7 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 4_1 & 2_1 & 0_1 & 3_1 \end{array}$$

Ta được $7246_8 + 4735_8 = 12103_8$.

```python
a = [6, 4, 2, 7]
b = [5, 3, 7, 4]
base = 8

k = len(a)   # = len(b), hơn k lý thuyết 1 đơn vị
r = 0
s = [0] * (k+1)
for i in range(k):
    t = a[i] + b[i] + r
    s[i] = t % base
    r = t // base
s[k] = r


s
```

□

4.6.3 Phép nhân số nguyên cùng cơ số

Bổ đề 4.3. *Trong cơ số b, biểu diễn của nb^i thu được bằng cách thêm i chữ số 0 vào bên phải biểu diễn của b.*

Chứng minh. Giả sử $n = \left(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0\right)_b$. Ta có

$$\begin{aligned}
n &= a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0 \\
\Rightarrow nb^i &= a_k b^{k+i} + a_{k-1} b^{k+i-1} + \cdots + a_1 b^{i+1} + a_0 b^i \\
&= a_k b^{k+i} + a_{k-1} b^{k+i-1} + \cdots + a_1 b^{i+1} + a_0 b^i + 0b^{i-1} + \cdots + 0b + 0 \\
&= \Big(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 \underbrace{00 \dots 0}_{i}\Big)_b
\end{aligned}$$

□

Xét $n = (a_k \dots a_1 a_0)_b$ và $m = (b_l \dots b_1 b_0)_b = \sum_{i=0}^{l} b_i b^i$. Ta có

$$nm = n \sum_{i=0}^{k} b_i b^i = \sum_{i=0}^{k} (nb_i)\, b^i$$

trong đó nb_i có dạng $\left(p^i_{k+1} p^i_k \dots p^i_0\right)_b$. Để tính hàng $j = \overline{0, k}$, ta nhân hàng j của n với b_i, thêm phần nhớ r^i_{j-1} ở hàng $j-1$; sau đó xác định giá trị p^i_j ở hàng này và lưu phần nhớ r^i_j:

$$\begin{aligned}
p^i_j &= \left(a_j b_i + r^i_{j-1}\right) \bmod b \\
r^i_j &= \left(a_j b_i + r^i_{j-1}\right) \operatorname{div} b
\end{aligned}$$

và $p^i_{k+1} = r^i_k$ (lưu ý $r^i_{-1} = 0$).

Gọi $\left(s^i_{k+i+1} s^i_{k+i} \dots s^i_0\right)_b$ là tổng thu được sau bước ứng với b_i. Khi đó

$$\left(s^i_{k+i+1} s^i_{k+i} \dots s^i_0\right)_b = \left(s^{i-1}_{k+i} s^{i-1}_{k+i-1} \dots s^{i-1}_0\right)_b + \Big(p^i_{k+1} p^i_k \dots p^i_0 \underbrace{00 \dots 0}_{i}\Big)_b$$

Ta có i chữ số đầu giữ nguyên: $\forall j = \overline{0, i-1}$

$$s^i_j = s^{i-1}_j$$

Với $k+1$ chữ số tiếp theo: $\forall j = \overline{i, k+i}$

$$\begin{aligned}
s^i_j &= \left(s^{i-1}_j + p^{i-1}_{j-i} + R^i_{j-1}\right) \bmod b \\
R^i_j &= \left(s^{i-1}_j + p^{i-1}_{j-i} + R^i_{j-1}\right) \operatorname{div} b
\end{aligned}$$

và đặt $s^i_{k+i+1} = p^i_{k+1} + R^i_{k+i} = r^i_k + R^i_{k+i}$.

Ví dụ 4.39. Tính $342_5 \times 4213_5$.

Giải.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 3 & 4 & 2 \\
 & & & 4 & 1 & 2 & 3 \\
\cline{4-7}
 & & & 2 & 1_2 & 3_2 & \mathbf{1}_1 \\
 & & 1 & 2_1 & 3_1 & 4_0 & \\
\cline{3-6}
 & & 2 & 0_1 & 0_1 & \mathbf{2}_1 & \\
 & 0 & 3_0 & 4_0 & 2_0 & & \\
\cline{2-5}
 & 1 & 0_1 & 4_0 & \mathbf{2}_0 & & \\
3 & 0_3 & 2_3 & 3_1 & & & \\
\cline{1-4}
\mathbf{3} & \mathbf{1}_0 & \mathbf{3}_0 & \mathbf{2}_1 & & &
\end{array}
$$

Ta được $342_5 \times 4213_5 = 3132\,221_5$.

```
a = [2, 4, 3]
b = [3, 2, 1, 4]
base = 5

k = len(a)   # hơn k lý thuyết 1 đơn vị
l = len(b)   # ... l ..................

s = [0] * (k+l)
for i in range(l):
    r = R = 0
    for j in range(k):
        t = a[j] * b[i] + r
        p = t % base
        r = t // base
        t = s[i+j] + p + R
        s[i+j] = t % base
        R = t // base
    s[k+i] = r + R

s  # [1, 2, 2, 2, 3, 1, 3]
```

□