```python
def summands(n):
    if n == 1:
        return [[1]]

    A = []
    for a in summands(n-1):
        b = a.copy()
        a[-1] += 1
        A.append(a)

        b.append(1)
        A.append(b)
    return A

summands(3)  # [[3], [2, 1], [1, 2], [1, 1, 1]]
```

Ví dụ 9.4. Thuật toán *sắp xếp nổi bọt*:

```python
def BubbleSort(x):               # x = [x_0, x_1, ..., x_{n-1}]
    n = len(x)                   # độ dài của x
    for i in range(n-1):         # duyệt từ đầu, x_0, tới gần cuối, x_{n-2}.
        for j in range(n-1,i,-1):# duyệt từ cuối, x_{n-1} về kế sau x_i, tức x_{i+1}
            if x[j] < x[j-1]:
                x[j-1], x[j] = x[j], x[j-1]  # đổi chỗ
    return x                     # trả về kết quả cho hàm

BubbleSort([7, 9, 2, 5, 8])      # kết quả [2, 5, 7, 8, 9]
```

Đặt a_n là số phép so sánh, cũng là số chu trình tối giản của thuật toán khi sắp xếp dãy n phần tử. Lập hệ thức đệ quy và giải a_n.

Giải. Thuật toán gồm hai giai đoạn:

1) Ứng với $i = 0$, kiểm tra $n-1$ phép so sánh $x_j < x_{j-1}$, với $j = \overline{n-1 \downarrow 1}$, và thực hiện phép đổi chỗ nếu cần. Sau bước này, $x_0 \leq x_i,\ \forall i > 0$.

2) Thực hiện thuật toán nổi bọt cho dãy $n-1$ phần tử $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, mà số phép so sánh là a_{n-1}, theo định nghĩa.

Như vậy, $a_n = (n-1) + a_{n-1}$, và $a_1 = 0$. Do đó $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$. □

```
rsolve( -a(n) + (n-1)+a(n-1) , a(n) , {a(1): 0}).simplify
    ()
```

Ta mô tả chi tiết thuật toán với dãy $x = (7, 9, 2, 5, 8)$ bởi hình sau

$i = 0$	x_0	7		7		7		7	$j = 1$	2
	x_1	9		9		9	$j = 2$	2		7
	x_2	2		2	$j = 3$	2		9		9
	x_3	5	$j = 4$	5		5		5		5
	x_4	8		8		8		8		8
	Bốn phép so sánh và hai phép đổi chỗ									
$i = 1$	x_0	2		2		2		2		
	x_1	7		7		7	$j = 2$	5		
	x_2	9		9	$j = 3$	5		7		
	x_3	5	$j = 4$	5		9		9		
	x_4	8		8		8		8		
	Ba phép so sánh và hai phép đổi chỗ									
$i = 2$	x_0	2		2		2				
	x_1	5		5		5				
	x_2	7		7	$j = 3$	7				
	x_3	9	$j = 4$	8		8				
	x_4	8		9		9				
	Hai phép so sánh và một phép đổi chỗ									
$i = 3$	x_0	2								
	x_1	5								
	x_2	7								
	x_3	8	$j = 4$							
	x_4	9								
	Một phép so sánh và không có phép đổi chỗ									

Ví dụ 9.5. Đặt a_n là số hoán vị của n vật, đánh số từ 1 tới n. Lập hệ thức đệ quy và giải a_n.

Giải. Từ mỗi hoán vị của $n - 1$ vật $1, 2, \dots, n - 1$, ta tạo ra hoán vị của n vật bằng cách xếp vật thứ n vào trước, sau, hoặc chèn vào giữa hoán vị của $n - 1$ vật này. Như vậy, có n vị trí để xếp vật thứ n. Mặt khác, theo định nghĩa, số hoán vị của $n - 1$ vật là a_{n-1}, nên theo quy tắc nhân $a_n = na_{n-1}$, $\forall n \geq 2$. Với $a_1 = 1$, ta tìm được $a_n = n!$. □

Chẳng hạn, cách sinh hoán vị của $\{1, 2\}$ từ $\{1\}$: