ôn thi Tốt nghiệp THPT, Đại học, Cao đẳng

Trần Minh Quang
(GV chuyên Toán Trung tâm LTĐH Vĩnh Viễn - TP. HCM)

Phương pháp và bài giải

27 Chủ đề TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN MINH QUANG
(GV chuyên Toán Trung tâm luyện thi Đại học Vĩnh Viễn TP. HCM)

PHƯƠNG PHÁP VÀ BÀI GIẢI 27 CHỦ ĐỀ TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN

- Dành cho học sinh lớp 11 – 12. Ôn thi tốt nghiệp THPT và tuyển sinh vào Đại học – Cao đẳng
- Toán nâng cao dành cho chương trình phân ban

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập – Chế bản: (04) 39714896
Hành chính: (04) 39714899; Tổng Biên tập: (04)39714897;
Fax: (04) 39714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc - Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: NGỌC LÂM
Sửa bài: THÁI VĂN
Trình bày bìa: THÁI HỌC

Đối tác liên kết xuất bản:
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

PHƯƠNG PHÁP VÀ BÀI GIẢI 27 CHỦ ĐỀ TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN
Mã số: 1L - 341ĐH2012
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti Cổ phần Văn hóa Văn Lang – Tp. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 1507 - 2012/CXB/12 - 248/ĐHQGHN, ngày 17/12/2012.
Quyết định xuất bản số: 342LK - TN/QĐ – NXBĐHQGHN ngày 20/12/2012.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2013.

LỜI NÓI ĐẦU

Theo chương trình Phân ban của Bộ Giáo dục và Đào tạo, từ năm 2009 đề thi tốt nghiệp THPT, tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng thì bài toán hình học không gian là bài bắt buộc. Đề toán chủ yếu ở phần tính thể tích các khối đa diện và khối tròn xoay, nhưng để làm được bài toán này học sinh phải nắm vững các dạng toán quan hệ song song, vuông góc của lớp 11.

Hình học không gian là một dạng toán khó, là "nội dung gây khó khăn" cho nhiều học sinh THPT. Chúng tôi biên soạn cuốn sách này nhằm giúp các em giảm tải được khó khăn khi làm toán Hình học không gian. Cuốn sách được trình bày dưới dạng 27 chủ đề toán hình không gian. Các chủ đề đầu nhằm giúp học sinh nắm vững các dạng toán cơ bản ở lớp 11 : tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, góc phẳng nhị diện, khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau ... nhằm để học sinh 12 có thể giải quyết các bài toán thể tích là một dạng toán bắt buộc phải có trong đề thi.

Tác giả trình bày các bài tập có các đề thi tốt nghiệp THPT, đề thi chính thức và dự bị tuyển sinh vào Đại học để các bạn học sinh có thể chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp, tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng đạt kết quả tốt nhất. Mặt khác, trong một bài tác giả gắn trục tọa độ để giải bài toán bằng hình giải tích trong không gian Oxyz.

Tác giả đã hết sức cố gắng, song trong biên soạn có thể còn một số sai sót, rất mong bạn đọc góp ý để cuốn sách được hoàn thiện hơn cho lần tái bản sau. Xin chân thành cảm ơn.

Mọi góp ý xin gửi về Nhà sách Hồng Ân, địa chỉ in ở bìa 4.

Tác giả

Chủ đề 1

TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG CẮT NHAU

1. Tiên đề

a) Có một và chỉ một đường thẳng qua hai điểm phân biệt cho trước.

b) Có một và chỉ một mặt phẳng qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

c) Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

d) Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả điểm chung của hai mặt phẳng đó.

2. Định lí : *Nếu một đường thẳng qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.*

3. Một mặt phẳng được xác định nếu :

a) Qua ba điểm không thẳng hàng.

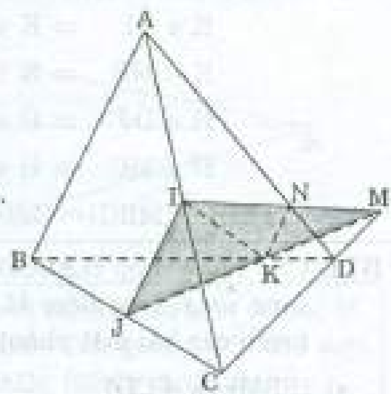
b) Qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.

c) Qua hai đường thẳng cắt nhau.

4. Phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau

Ta đi tìm hai điểm A, B đồng thời nằm trên hai mặt phẳng đã cho. Giao tuyến cần tìm là đường thẳng AB.

BT1. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J là trung điểm AC và BC. Lấy K trên cạnh BD sao cho KD < KB. Tìm các giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với mp (ACD) và mp (ABD).



a) Trên mp (BCD) do KD < KB nên JK cắt CD tại M.

Ta có : $I \in AC \Rightarrow I \in$ mp (ACD)

$M \in CD \Rightarrow M \in$ mp (ACD)

Mặt khác, hiển nhiên I và M $\in$ mp (IJK).

Vậy mp (IJK) $\cap$ mp (ACD) = IM.

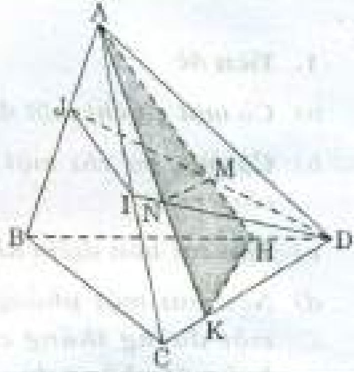
b) Xét mp (ACD). Gọi {N} = IM $\cap$ AD

Lập luận tương tự câu a,

mp (IJK) $\cap$ mp (BAD) = KN ■

BT2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là hai điểm bên trong của ΔABD và ΔACD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :

a) (AMN) và (BCD) b) (DMN) và (ABC)



a) Trên mp (ABD), gọi {H} = AM ∩ BD

Trên mp (ACD), gọi {K} = AN ∩ CD

Do đó : HK = mp (AMN) ∩ mp (BCD).

b) Trên mp (ABD), gọi {J} = DM ∩ AB

Trên mp (ACD), gọi {I} = DN ∩ AC

Do đó : IJ = mp (DMN) ∩ mp (ABC) ■

BT3. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (NDA).

b) Lấy I, J là hai điểm lần lượt nằm trên hai đoạn thẳng AB và AC. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (IJD).

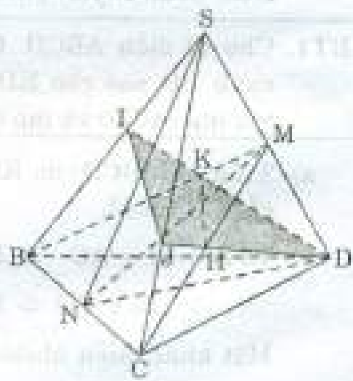
a) Ta có : M ∈ (MBC)

M ∈ AD nên M ∈ (NDA)

N ∈ (NDA)

N ∈ BC nên N ∈ (MBC)

Vậy MN là giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (NDA).



b) Trong mp (ABD) gọi K là giao điểm của BM và DI.

Trong mp (ACD) gọi H là giao điểm của DJ và CM.

K ∈ DI ⇒ K ∈ (IJD)

K ∈ MB ⇒ K ∈ (MBC)

H ∈ DJ ⇒ H ∈ (IJD)

H ∈ MC ⇒ H ∈ (MBC)

Vậy HK = (MBC) ∩ (IJD) ■

BT4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy tứ giác ABCD có hai cạnh đối không song song. Lấy điểm M thuộc miền trong của tam giác SCD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :

a) (SBM) và (SCD) b) (AMB) và SDC).

a) Trong mp (SCD), SM cắt CD tại I.

$I \in SM \Rightarrow I \in$ mp (SBM)

$I \in CD \Rightarrow I \in$ mp (SCD)

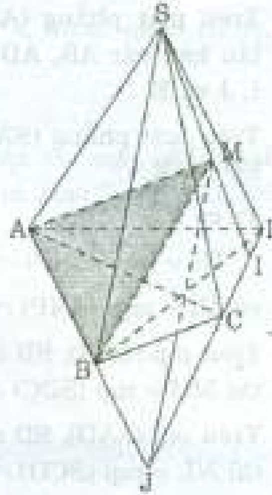
Vậy giao tuyến của hai mp (SCD) và mp (SBM) là SI.

b) Hai mp (ABM) và (SDC) đã có chung điểm M. Trên mp (ABCD), AB cắt CD tại J.

$J \in AB \Rightarrow J \in$ mp (MAB)

$J \in CD \Rightarrow J \in$ mp (SCD)

Vậy giao tuyến của hai mp (ABM) và mp (SDC) là MJ ■



BT5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SD. Lấy P trên cạnh SC mà SP > PC.

Tìm giao tuyến của mp (MNP) lần lượt với các mặt phẳng (SAC), (SAB), (SAD) và (ABCD).

- Trên mp (SBD), gọi $\{I\} = MN \cap SO$

  Mà $SO \subset$ mp (SAC) nên $I \in$ mp (SAC)

  Vậy $PI =$ mp (MNP) $\cap$ mp (SAC).

- Trên mp (SAC), gọi $\{J\} = PI \cap SA$

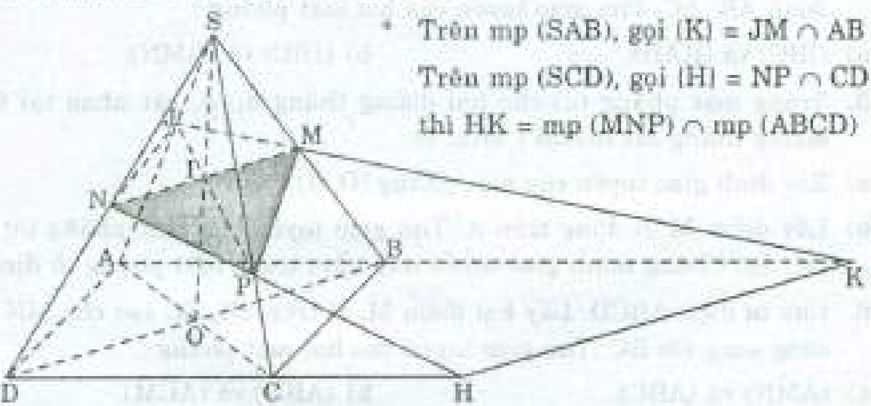
  Vậy $MJ =$ mp (MNP) $\cap$ mp (SAB).

- Dễ thấy $JN =$ mp (MNP) $\cap$ mp (SAD)

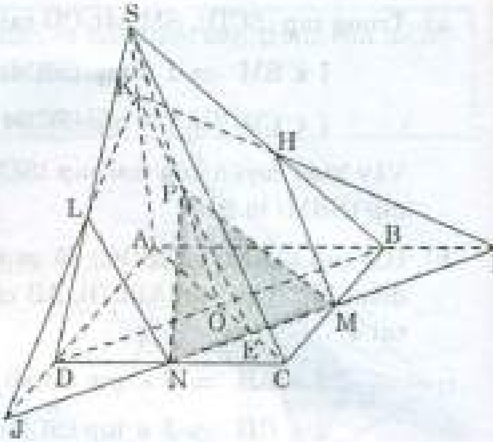
- Trên mp (SAB), gọi $\{K\} = JM \cap AB$

  Trên mp (SCD), gọi $\{H\} = NP \cap CD$

  thì $HK =$ mp (MNP) $\cap$ mp (ABCD) ■



BT6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SO. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SBC) và (SCD).



Trên mặt phẳng (ABCD), MN lần lượt cắt AB, AD và AC tại I, J và E.

Trên mặt phẳng (SAC), SA cắt EP tại K.

Ta có :

IK = mp (MNP) ∩ mp (SAB)

và JK = mp (MNP) ∩ mp (SAD)

Trên mp (SAB), SB cắt IK tại H thì MH = mp (SBC) ∩ mp (MNP)

Trên mp (SAD), SD cắt JK tại L thì NL = mp (SCD) ∩ mp (MNP) ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi M, N là trung điểm AC và BC. Trên BD lấy điểm K sao cho BK = 2KD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MKN) và (ABD).

2. Cho hình chóp S.ABCD có AB và CD cắt nhau. Lấy A' là điểm nằm giữa S và A. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (A'CD) với các mặt phẳng (ABCD), (SAB), SBC), (SCD), (SDA).

3. Cho tứ diện ABCD. Lấy O là điểm bên trong ACBD, M trên AO. Lấy I, J trên BC và BD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :

a) (MCD) và (ABD). b) (IJM) và (ACD).

4. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, K là trung điểm của AD và BC. Lấy M, N trên đoạn AB, AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :

a) (IBC) và (KAD). b) (IBC) và (DMN).

5. Trong mặt phẳng (α) cho hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại O, Δ là đường thẳng cắt (α) tại I khác O.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (O, Δ) và (α).

b) Lấy điểm M di động trên Δ. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (Δ, d_1) và (M, d_2). Chứng minh giao tuyến này nằm trong mặt phẳng cố định.

6. Cho tứ diện ABCD. Lấy hai điểm M, N trên SB, SC sao cho MN không song song với BC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :

a) (AMN) và (ABC). b) (ABN) và (ACM).

7. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang với AB là đáy lớn. Lấy M trên đoạn SD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :

a) (MBC) và (SAC). b) (MBC) và (SAD).

8. Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O, đường thẳng c cắt (P) tại I khác O.

a) Tìm giao tuyến của (P) và mặt phẳng (O, c).

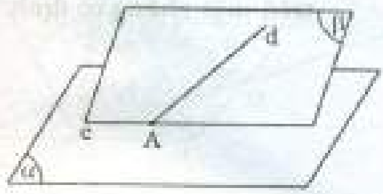
b) Lấy M trên c (M khác I). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (M, a) và (M, b). Chứng minh khi M di động trên c thì giao tuyến này luôn nằm trên mặt phẳng cố định.

Chủ đề 2

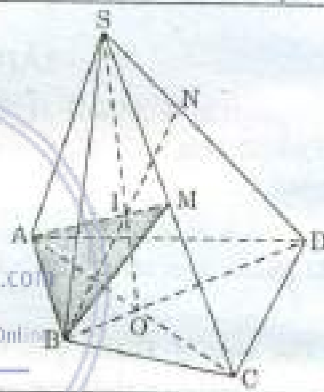
TÌM GIAO ĐIỂM ĐƯỜNG THẲNG d VÀ MẶT PHẲNG (α)

Phương pháp

- *Tìm mặt phẳng (β) chứa d.*
- *Xác định giao tuyến c của hai mặt phẳng (α) và (β) theo chủ đề 1.*
- *Tìm giao điểm A của d và c thì A chính là giao điểm của d và mp (α).*



BT1. Cho tứ giác ABCD có AB không song song CD. Gọi S là điểm nằm ngoài mp (ABCD), M là trung điểm SC. Tìm giao điểm N của SD và mp (MAB).



Trên mp (SAC), gọi {I} = AM $\cap$ SO

Xét mặt phẳng (SBD) chứa SD

Ta có mp (SBD) $\cap$ mp (MAB) = BI

Trên mp (SBD), gọi {N} = BI $\cap$ SD

thì N = SD $\cap$ (mp (MAB) ■

BT2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và K lần lượt là hai điểm trong của các tam giác ABC và BCD. Giả sử IK cắt mp (ACD) tại H. Tìm H.

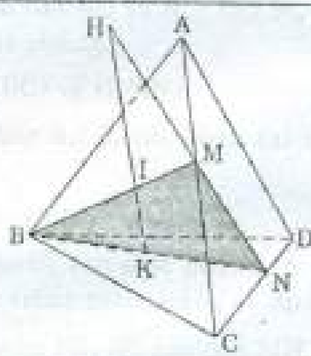
Xét mp (BIK) chứa IK

Trong mp (ABC) : BI cắt AC tại M

Trong mp (BCD) : BK cắt CD tại N

thì MN = (BIK) $\cap$ (ACD)

Trong mp (BIK), giả sử IK cắt MN tại H thì H chính là giao điểm của IK và mp (ACD) ■

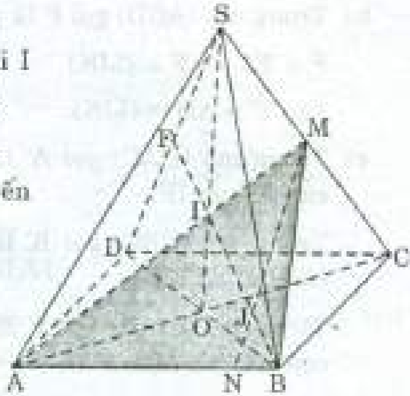


BT3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SC.

a) Tìm giao điểm I của AM và mp (SBD). Chứng minh IA = 2IM.

b) Tìm giao điểm F của SD và mp (ABM). Chứng minh F là trung điểm SD.

c) Lấy N tùy ý trên cạnh AB. Tìm giao điểm của MN và mp (SBD).



a) Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.

Trong mặt phẳng (SAC), AM cắt SO tại I thì I là giao điểm của AM và mp (SBD).

Do I là trọng tâm ΔSAC nên IA = 2IM.

b) Xét mp (SBD) chứa SD thì BI là giao tuyến của mp (SBD) và mp (ABM).

Trong mp (SBD), BI cắt SD tại F thì {F} = SD ∩ mp (ABM).

Do I cũng là trọng tâm ΔSBD nên F là trung điểm SD.

c) Xét mp (MAB) chứa MN thì BI là giao tuyến của mp (MAB) và mp (SBD).

Trong mặt phẳng (MAB), MN cắt BI tại J thì J là giao điểm của MN và mp (SBD) ■

BT4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Trên đoạn BD lấy điểm K sao cho BK = 2KD.

a) Tìm giao điểm của CD và mặt phẳng (MNK).

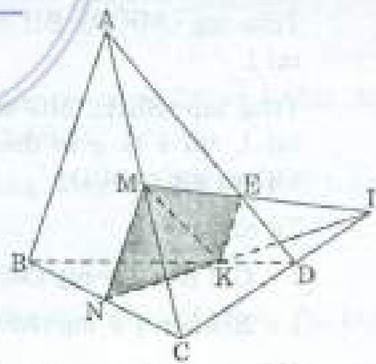
b) Tìm giao tuyến hai mặt phẳng (MNK) và (ABD).

a) Xét mp (BCD) chứa CD.

Do NK không song song CD nên NK cắt CD tại I.

I ∈ NK ⇒ I ∈ (MNK)

Vậy CD ∩ (MNK) tại I.



b) Trong mp (ACD), MI cắt AD tại E.

Ta có K ∈ BD ⇒ K ∈ (ABD)

và K ∈ (MNK)

Mặt khác : E ∈ AD ⇒ E ∈ (ABD)

E ∈ MI ⇒ E ∈ (MNK)

Vậy EK = (MNK) ∩ (ABD) ■

Lưu ý : I ∈ NK nên I ∈ (MNK). Do đó MI ∈ (MNK).

BT5. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là trung điểm AC và BC. Trên BD lấy K sao cho BK = 2KD.

a) Tìm giao điểm E của CD và mp (IJK).

b) Tìm giao điểm F của AD và mp (IJK).

c) Lấy M, N trên AB, CD. Tìm giao điểm của MN và mp (IJK).

a) Trong mp (BCD) gọi E là giao điểm của CD và KJ thì E = CD ∩ (IJK).

b) Trong mp (ACD) gọi F là giao điểm của EI và AD.

$F \in EI \Rightarrow F \in (IJK)$

Vậy $F = AD \cap (IJK)$.

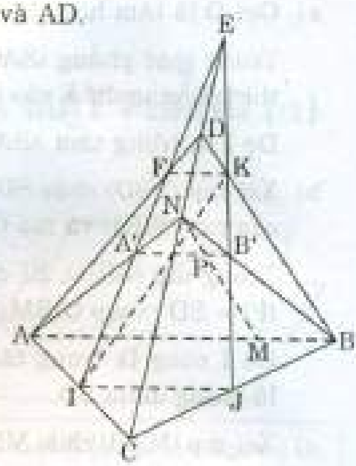
c) Trong mp (DAC) gọi A' là giao điểm của AN và IF.

Trong mp (DBC) gọi B' là giao điểm của BN và KJ.

Trong mp (NAB) gọi P là giao điểm của A'B' và MN.

Do $P \in A'B'$ nên $P \in (IJK)$.

Vậy $MN \cap (IJK) = P$ ■



BT6*. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm SB, G là trọng tâm ΔSAD.

a) Tìm giao điểm I của MG và mp (ABCD). Chứng minh IC = 2ID.

b) Tìm giao điểm J của AD và mp (OMG). Tính tỉ số $\frac{JA}{JD}$.

c) Tìm giao điểm K của SA và mp (OMG).

a) Gọi H và N lần lượt là trung điểm AD và SA.

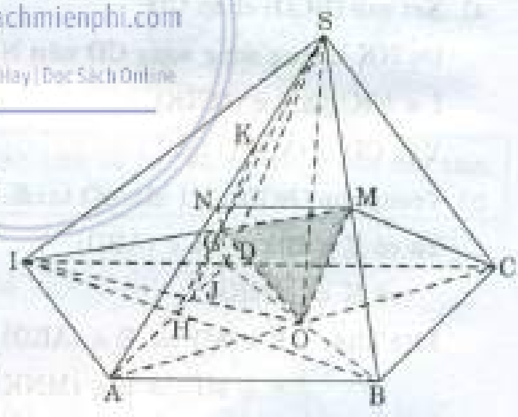
Trên mp (ABCD), BH cắt CD tại I.

Trên mp (SBH), MG cắt BH tại I, thì I là giao điểm của MG và mp (ABCD).

Ta có :

$I \in GM$ nên $I \in$ mp (MN, CD)

$I \in BH$ nên $I \in$ mp (ABCD)



Mà giao tuyến của mp (MN, CD) và mp (ABCD) là CD nên $I \in CD$.

Do HD là đường trung bình của ΔIBC nên IC = 2ID.

b) Xét mp (ABCD) chứa AD.

Ta có OI là giao tuyến của mp (OMG) và mp (ABCD).

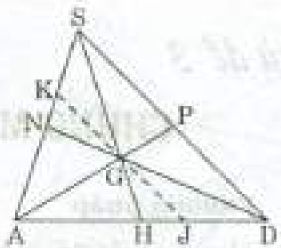
Trên mp (ABCD), OI cắt AD tại J thì J là giao điểm của AD và mp (OMG).

ΔAIC có IO và AD là hai đường trung tuyến nên J là trọng tâm ΔAIC.

Vậy $\frac{JA}{JD} = 2$.

c) Xét mp (SDA) chứa SA thì GJ là giao tuyến của mp (SAD) và mp (OMG).

Trong mp (SAD), GJ cắt SA tại K thì $\{K\} = SA \cap mp\ (OMG)$ ■



BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện ABCD. Trên AC và AD lấy hai điểm M, N sao cho MN không song song với CD. Gọi I là điểm bên trong ΔBCD.

a) Tìm giao tuyến của (IMN) và (BCD).

b) Tìm giao điểm của BC và BD với (CMN).

2. Cho hình chóp S.ABCD. Lấy điểm M trên SC, N trên BC. Tìm giao điểm của :

a) AM và (SBD). b) SD và (AMN).

3. Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm M, N trên AC, AD. Lấy O là điểm bên trong ΔBCD. Tìm giao điểm của

a) MN và (ABD). b) OA và (BMN).

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn AB. Lấy ba điểm I, J, K lần lượt trên SA, AB, BC.

a) Tìm giao điểm của SK với (SBD).

b) Tìm giao điểm của SD, SC với (IJK).

5. Cho tứ diện ABCD. Lấy I, J là hai điểm bên trong ΔABC và ΔABD, M là điểm trên CD. Tìm giao điểm của IJ và (ABM).

6. Cho hình chóp S.ABCD có AD không song song với BC. Lấy K trên đoạn SB. Tìm giao điểm của :

a) BC và (SAD). b) SC và (AKD).

7. Cho tứ diện S.ABC. Gọi I, H là trung điểm của SA, AB. Trên SC lấy điểm K sao cho CK = 3KS.

a) Tìm giao điểm của BC và (IHK).

b) Gọi M là trung điểm của IH. Tìm giao điểm của KM và (ABC).

Chủ đề 3

CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Phương pháp

Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm đó là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt thì ba điểm này cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó. Vậy ba điểm đó phải thẳng hàng.

BT1. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng nằm ngoài mặt phẳng (α). Các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt mặt phẳng (α) tại D, E, F. Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

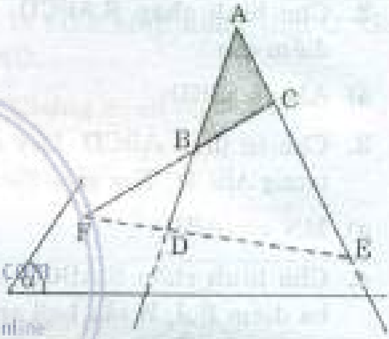
Ta có F ∈ BC nên F ∈ mp (ABC)

E ∈ AC nên E ∈ mp (ABC)

D ∈ AB nên D ∈ mp (ABC)

Mà D, E, F ∈ mp (α)

Vậy D, E, F ∈ d là giao tuyến của mp (α) và mp (ABC) ■



BT2. Cho tứ diện SABC. Trên SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt AC tại K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Ta có I ∈ AB ⇒ I ∈ mp (ABC)

I ∈ DE ⇒ I ∈ mp (DEF)

J ∈ BC ⇒ J ∈ mp (ABC)

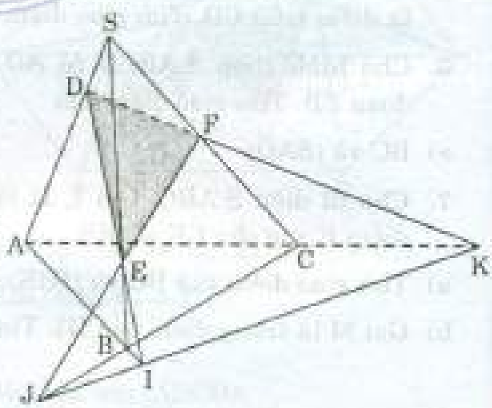
J ∈ EF ⇒ J ∈ mp (DEF)

K ∈ AC ⇒ K ∈ mp (ABC)

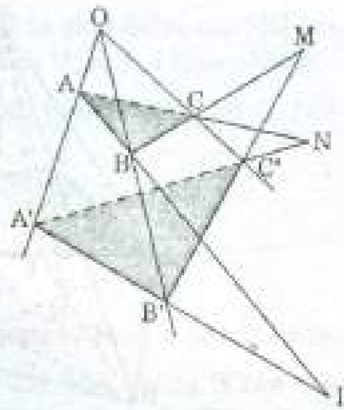
K ∈ DF ⇒ K ∈ mp (DEF)

Do đó ba điểm I, J, K cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF).

Vậy I, J, K thẳng hàng ■



BT3. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các cặp điểm A và A', B và B', C và C' sao cho BC cắt B'C' tại M, CA cắt C'A' tại N, AB cắt A'B' tại I. Chứng minh ba điểm M, N, I thẳng hàng.



Xét hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C')

Ta có $M \in BC \Rightarrow M \in (ABC)$

$M \in B'C' \Rightarrow M \in (A'B'C')$

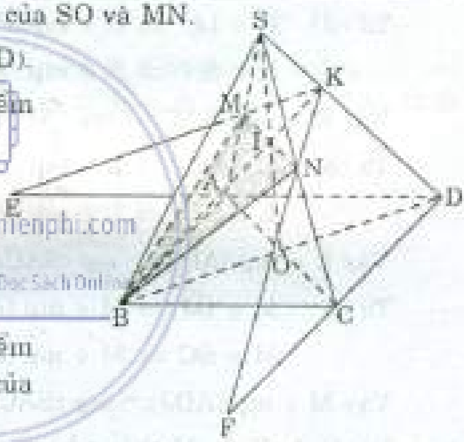
Vậy M thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C').

Lập luận tương tự N và K cùng nằm trên hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C').

Vậy N, K cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C').

Do đó M, N, K thẳng hàng ■

BT4. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Tìm giao điểm E, F của DA, DC và mặt phẳng (MNB). Chứng tỏ E, F, B thẳng hàng.



Trong mp (SAC) gọi I là giao điểm của SO và MN.

$I \in SO$ mà $SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD)$.

Trong mp (SBD) gọi K là giao điểm của BI và SD.

Trong mp (SAD) gọi E là giao điểm của MK và AD thì $E \in MK \Rightarrow E \in (MNB)$.

Vậy AD cắt (MNB) tại E.

Trong mp (SDC) gọi F là giao điểm của NK và CD thì F là giao điểm của CD và (MNB).

Ta có E, F, B đồng thời nằm trên hai mặt phẳng (MNB) và (ABCD), vậy chúng thẳng hàng.

BT5. Cho hình chóp S.ABCD. Lấy hai điểm I và J lần lượt nằm trên cạnh AD và SB. Gọi O là giao điểm AD và BC.

a) Tìm giao điểm K, L của IJ và DJ với mp (SAC).

b) Gọi M là giao điểm SC và OJ. Chứng minh bốn điểm A, K, L, M thẳng hàng.

a) Trên mp (ABCD) gọi N là giao điểm của BI và AC.

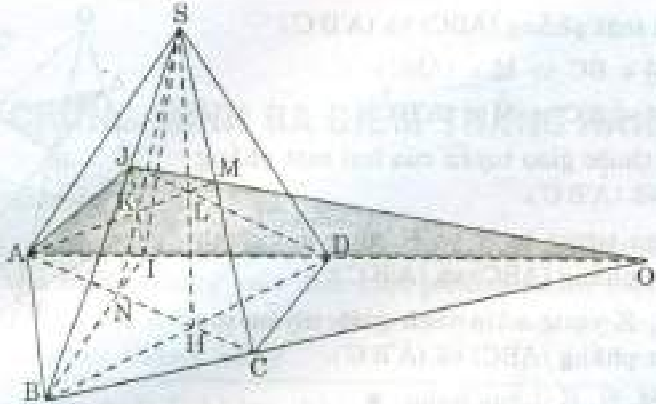
Xét mp (SBI) chứa IJ thì SN = mp (SBI) $\cap$ mp (SAC).

Trên mp (SBI), SN cắt IJ tại K thì $\{K\} = IJ \cap$ mp (SAC).

Trên mp (ABCD), gọi H là giao điểm của AC và BD.

Xét mp (SBD) chứa DJ thì SH = mp (SBD) $\cap$ mp (SAC).

Trên mp (SBD), SH cắt DJ tại L thì $\{L\} = DJ \cap$ mp (SAC).



b) Trên mp (SBC), OJ cắt SC tại M.

Xét hai mặt phẳng (SAC) và (ADJ).

Hiển nhiên A ∈ mp (SAC) ∩ mp (ADJ).

Ta có : K ∈ IJ ⇒ K ∈ mp (ADJ)

K ∈ SN ⇒ K ∈ mp (SAC)

Vậy K ∈ mp (SAC) ∩ mp (ADJ).

Ta có : L ∈ DJ ⇒ L ∈ mp (ADJ)

L ∈ SH ⇒ L ∈ mp (SAC)

Vậy L ∈ mp (ADJ) ∩ mp (SAC).

Ta có : M ∈ OJ ⇒ M ∈ mp (ADJ)

M ∈ SC ⇒ M ∈ mp (SAC)

Vậy M ∈ mp (ADJ) ∩ mp (SAC).

Do đó A, K, L, M thẳng hàng vì cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (ADJ) ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm I trên BD sao cho D nằm giữa I và B. Trong mặt phẳng (ABD) vẽ đường thẳng qua I cắt đoạn AB, AD tại K và L. Trong mặt phẳng (BCD) vẽ đường thẳng qua I cắt đoạn CD, CB tại M và N. Giả sử BN cắt DM tại O, BL cắt DK tại H, LM cắt KN tại J. Chứng minh ba điểm A, J, O thẳng hàng và ba điểm C, J, H thẳng hàng.

2. Cho tứ diện ABCD. Gọi O là trọng tâm của ΔACD. Lấy M, N, P trên AB, AC, AD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}$. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của MN với BC, MP với BD.

a) Chứng minh MG, PI, NJ đồng phẳng.

b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của CD, NI. H là giao điểm của MG với BE, K là giao điểm của GF với (BCD). Chứng minh H, K, I, J thẳng hàng.

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N là trung điểm của SA, SC.

a) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAB), (SBC).

b) Tìm giao điểm I, K của SO, SD với (MNP).

c) Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAD) và (SDC).

d) Tìm giao điểm E, F của DA, DC với (MNP). Chứng tỏ E, B, F thẳng hàng.

4. Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm I trên BD kéo dài. Một đường thẳng qua I cắt AB, AD tại K và L. Một đường thẳng khác qua I cắt BC, CD tại M và N. Gọi O_1 là giao điểm của BN và DM, O_2 là giao điểm của BL và DK, J là giao điểm của ML và KN, H là giao điểm của KM và LN. Chứng minh các điểm sau đây thẳng hàng :

a) A, J, O_1 b) C, J, O_2 c) H, A, C.

5. Cho hai mặt phẳng (α), (β) có giao tuyến a, d là đường thẳng cắt (α) tại A, cắt (β) tại B. Trên d lấy hai điểm cố định S_1, S_2 ($\neq$ A). Lấy M di động trên (β). MS_1, MS_2 cắt (α) tại M_1, M_2.

a) Chứng minh M_1M_2 qua một điểm cố định.

b) a cắt M_1M_2 tại K. Chứng minh K, M, B thẳng hàng.

Chủ đề 4

CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Phương pháp

Muốn chứng minh ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy ta :

- ***Tìm giao điểm I của d_1 và d_2.***
- ***Tìm hai mặt phẳng phân biệt mà có d_3 là giao tuyến. Chứng minh I là điểm chung của hai mặt phẳng này.***

BT1. Cho tứ diện ABCD. Lấy ba điểm E, F, G lần lượt trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Chứng minh ba đường thẳng CD, IG và HF đồng quy.

Trên mặt phẳng (EFG), gọi O là giao điểm của IG và HF.

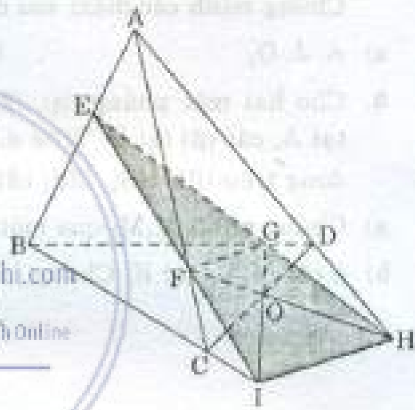
Ta có CD là giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Ta có : $O \in IG \Rightarrow O \in mp\,(BCD)$

$O \in FH \Rightarrow O \in mp\,(ACD)$

Vậy $O \in CD = mp\,(BCD) \cap mp\,(ACD)$.

Do đó ba đường thẳng CD, IG và HF đồng quy tại O ■



BT2. Cho hình chóp S.ABCD có AB và CD kéo dài cắt nhau tại E, gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB. Mặt phẳng (α) di động qua IJ cắt SC, SD lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh IJ, MN, SE đồng quy.

b) Chứng minh giao điểm của IM và JN chuyển động trên một đường thẳng cố định.

a) Trong mp (α) : IJ cắt NM tại K

Ta có : $SE = (SAB) \cap (SCD)$

Mà $IJ \subset (SAB)$ và $NM \subset (SCD)$

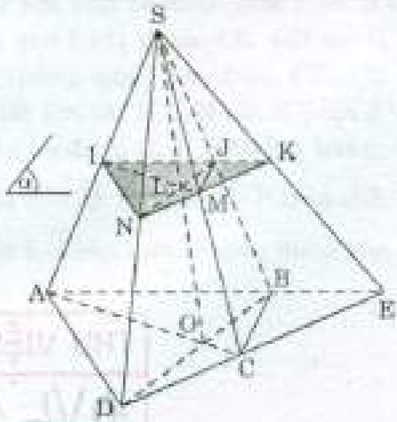
Vậy $IJ \cap MN = \{K\} \in SE$

Do đó IJ, MN, SE đồng quy tại K.

b) Gọi L là giao điểm của IM và JN

Gọi O là giao điểm của AC và BD

Ta có : $SO = (SAC) \cap (SBD)$



Ta có : $L \in IM \Rightarrow L \in (SAC)$

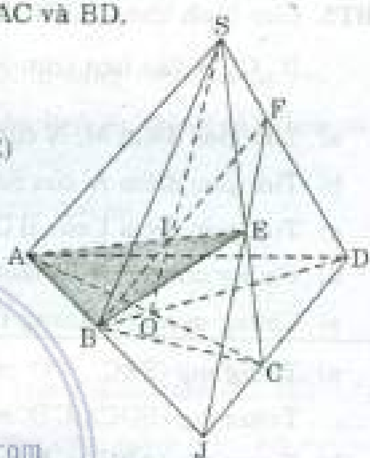
$L \in JN \Rightarrow L \in (SBD)$

Vậy khi (α) di động qua IJ thì L di động trên đường thẳng cố định SO. ■

BT3. Cho hình chóp S.ABCD có AB không song song CD. Trên cạnh SC lấy điểm E không trùng với S và C.

a) Tìm giao điểm F của SD và mp (ABE).

b) Chứng minh ba đường thẳng AB, CD và EF đồng quy.



a) Trong mp (ABCD) gọi O là giao điểm của AC và BD.

Trong mp (SAC) : SO cắt AE tại I.

Trong mp (SBD) : BI cắt SD tại F.

Ta có $F \in BI$ mà $BI \in (ABE) \Rightarrow F \in (ABE)$

Vậy $SD \cap (ABE)$ tại F.

b) Trên mp (ABCD) do AB và CD không song song nên cắt nhau tại J.

Xét hai mặt phẳng (ABE) và (SCD) ta thấy ba điểm E, F, J đồng thời nằm trên hai mặt phẳng trên vậy chúng phải nằm trên giao tuyến.

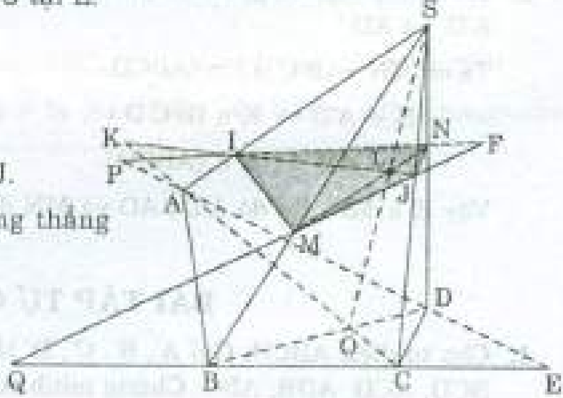
Do đó ba đường thẳng AB, CD và EF đồng quy tại J ■

BT4. Cho hình chóp S.ABCD có O là giao điểm AC và BD. Lấy hai điểm cố định I trên SA sao cho SI > SA, J trên SC sao cho SJ < JC. Gọi (α) là mặt phẳng di động quanh IJ, (α) cắt SB tại M, cắt SD tại N.

a) Chứng minh ba đường thẳng IJ, MN và SO đồng quy.

b) AD cắt BC tại E, IN cắt MJ tại F. Chứng minh ba điểm S, E, F thẳng hàng.

c) IN cắt AD tại P, MJ cắt BC tại Q. Chứng minh PQ luôn đi qua một điểm cố định.



a) Trong mp (SBD), MN cắt SO tại L.

Ta có :

$L \in MN \Rightarrow L \in mp\ (\alpha)$

$L \in SO \Rightarrow L \in mp\ (SAC)$

Mà $mp\ (\alpha) \cap mp\ (SAC) = IJ$.

Vậy $L \in IJ$. Do đó ba đường thẳng IJ, MN, SO đồng quy tại L.

b) Ta có :

$F \in IN \Rightarrow F \in mp\ (SAD)$

$F \in MJ \Rightarrow F \in mp\ (SBC)$

Mà SE = mp (SAD) ∩ mp (SBC). Vậy F ∈ SE. Do đó S, E, F thẳng hàng.

c) Do SI > SA và SJ < JC nên $\frac{SI}{SA} > 1 > \frac{SJ}{JC}$

Vậy IJ không song song AC.

Gọi K là giao điểm của AC và IJ thì K cố định. Ta có P, Q, K là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và mp (ABCD) nên P, Q, K thẳng hàng.

Vậy PQ di động nhưng luôn qua điểm K cố định ■

BT5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Lấy B', C', D' lần lượt trên SB, SC, SD sao cho $\frac{SB'}{SB} = \frac{1}{3}, \frac{SC'}{SC} = \frac{2}{3}, \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{2}$.

a) Tìm giao điểm M, N của BC và CD với (B'C'D').

b) Tìm giao điểm A' của SA với (B'C'D').

c) Tìm giao điểm I của B'D' với (SAC).

d) Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

e) Chứng minh ba đường thẳng MN, AD và A'D' đồng quy.

a) Trong mp (SBC), B'C' cắt BC tại M thì M = BC ∩ (B'C'D').

Trong mp (SDC), C'D' cắt CD tại N thì N = CD ∩ (B'C'D').

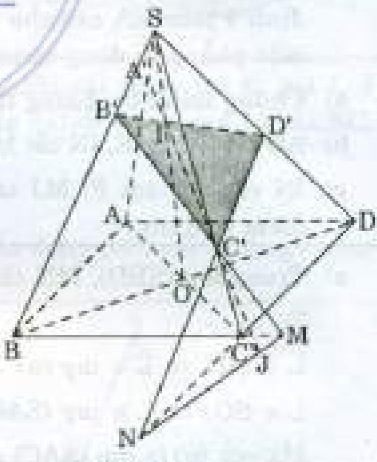
b) Trong mp (ABCD), MN cắt AC tại J.

Trong mp (SAC), JC' cắt SA tại A' thì A' = SA ∩ (B'C'D').

c) Trong mp (SBD), B'D' cắt SO tại I.

Do I ∈ SO nên I ∈ mp (SAC)

Vậy I = B'D' ∩ (SAC).



d) Ba điểm S, I, O cùng nằm trên hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) nên chúng thẳng hàng.

e) Trong mp (SAD), gọi K là giao điểm của A'D' và AD.

Ta có MN = (B'C'D') ∩ (ABCD)

K ∈ A'D' ⇒ K ∈ (B'C'D')

K ∈ AD ⇒ K ∈ (ABCD)

Vậy K ∈ MN. Do đó A'D', AD và MN đồng quy tại K ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ADB, ABC. Chứng minh AA', BB', CC' đồng quy.

2. Cho tứ diện S.ABC. Qua C dựng mặt phẳng (α) cắt AB, SB tại B_1, B'. Qua B dựng mặt phẳng (β) cắt AC, SC tại C_1, C'. BB' cắt CC' tại O, BB_1 cắt CC_1 tại O_1. Giả sử OO_1 kéo dài cắt SA tại I. Chứng minh :

a) AO_1, SO', BC đồng quy.

b) I, B_1, B' thẳng hàng và I, C_1, C' thẳng hàng.

3. Cho hình chóp S.ABCD có AB và CD kéo dài cắt nhau tại E, AD và BC kéo dài cắt nhau tại F, AD < AF. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SB. Mặt phẳng (α) di động qua I, J cắt SC, SD tại M, N.

a) Chứng minh IJ, MN, SE đồng quy.

b) Khi (α) di động thì giao điểm của IM và JN di động trên đường nào ?

4. Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ADB, ABC.

a) Chứng minh AA_1 và BB_1 cùng thuộc một mặt phẳng.

b) Gọi I là giao điểm của AA_1 và BB_1. Chứng minh $\dfrac{IA_1}{IA} = \dfrac{IB_1}{IB} = \dfrac{1}{3}$.

c) Chứng minh AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy.

5. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD. Lấy R, S lần lượt là các điểm trên AD, AC sao cho $AR = \dfrac{AD}{3}$, $AS = \dfrac{AC}{3}$. Chứng minh ba đường thẳng AB, MS, NR đồng quy.

6. Cho tứ diện ABCD. Lấy M, N, P lần lượt là các điểm trên AB, AC, BD. MN cắt BC tại I, MP cắt AD tại J. Chứng minh ba đường thẳng PI, NJ, CD đồng quy.

7. Cho tứ diện ABCD. Mặt phẳng (P) không chứa AB và CD cắt AC, BD, BC, AD tại M, N, R, S. Chứng minh ba đường thẳng sau đồng quy :

a) AB, MR, NS.   b) CD, MS, NR.

8. Cho hình chóp S.ABC có SA < SB < SC. Trên SA, SB, SC lấy M, N, P sao cho SM = SN = SP.

a) Tìm giao điểm K của MP và (ABC), giao điểm L của CB và (MNP).

b) Lấy điểm I trên MN. Gọi J là giao điểm của SI và AB. Chứng minh KL, PI, CJ đồng quy.

Chủ đề 5

TÌM MẶT CẮT CỦA MẶT PHẲNG (α) VÀ HÌNH CHÓP

Phương pháp

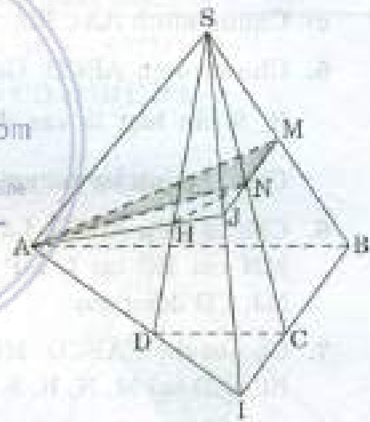
- ***Từ một điểm chung có sẵn, xác định giao tuyến đầu tiên của mp (α) với một mặt của hình chóp (gọi là giao tuyến gốc).***
- ***Tìm các giao điểm của giao tuyến này với các cạnh của mặt đó, từ các giao điểm này xác định các giao tuyến mới với các mặt còn lại.***
- ***Tiếp tục đến khi nào các đoạn giao tuyến khép kín ta được mặt cắt (hay thiết diện).***

BT1. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang có hai đáy AB, CD và AB > CD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD và mp (AMN).

Trong mp (ABCD) : AD cắt BC tại I.

Trong mp (SBI) : MN cắt SI tại J là trung điểm của SI.

Trong mp (SAD) : AJ cắt SD tại H.



Ta có : $(SBC) \cap (AMN) = MN$

$(SCD) \cap (AMN) = NH$

$(SAD) \cap (AMN) = HA$

$(SAB) \cap (AMN) = AM$

Vậy thiết diện là tứ giác AMNH ■

BT2. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh đều bằng a. Kéo dài BC một đoạn CE = a, kéo dài BD một đoạn DF = a. Gọi M là trung điểm AB.

a) Tìm mặt cắt của mp (MEF) và tứ diện.

b) Tính diện tích của thiết diện này.

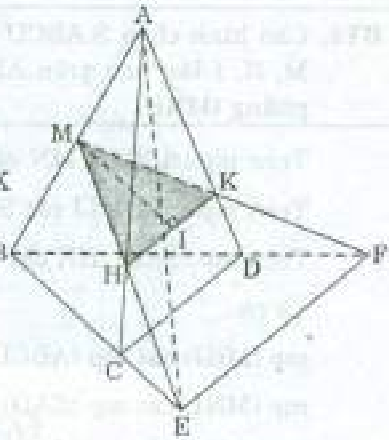
a) Trong mp (ABC), ME cắt AC tại H. Trong mp (ABD), MF cắt AD tại K.

Thiết diện là tam giác MHK.

b) $\Delta MBE \Rightarrow ME^2 = MB^2 + BE^2 - 2MB.BE.\cos 60^0$.

$$\Rightarrow ME^2 = \frac{a^2}{4} + 4a^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)2a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13a^2}{4}$$

ΔABE có H là trọng tâm nên



$MH = \frac{1}{3}ME = \frac{a\sqrt{13}}{6}$

Ta có : $\Delta MBE = \Delta MBF$ (c.g.c)

$\Rightarrow ME = MF = \frac{a\sqrt{13}}{2}$ và $MH = MK$

Ta có : $\frac{MH}{ME} = \frac{MK}{MF} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK \mathbin{/\!/} EF$

$\Rightarrow \frac{HK}{EF} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{2a}{3}$

Vẽ $MI \perp HK$

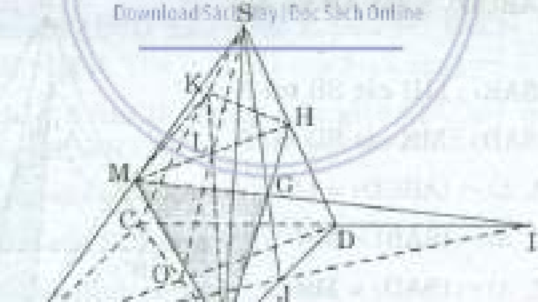
ΔMIH vuông $\Rightarrow MI^2 = MH^2 - \frac{HK^2}{4} = \frac{13a^2}{36} - \frac{a^2}{9} = \frac{9a^2}{36} = \frac{a^2}{4}$

Vậy : dt $(\Delta MHK) = \frac{1}{2}MI.HK = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2a}{3} = \frac{a^2}{6}$ ■

BT3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB. Gọi G là trọng tâm ΔSAD.

a) Tìm giao điểm I của GM và mp (ABCD).

b) Tìm thiết diện của hình chóp và mp (AGM).



a) Gọi J và H lần lượt là trung điểm AD và SD.

Trên mp (SBJ), MG cắt BJ tại I thì $I = MG \cap$ mp (ABCD).

b) Hiển nhiên : mp (AGM) $\cap$ mp (SAB) = AM

mp (AGM) $\cap$ mp (SAD) = AH

Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.

Trong mp (SBD), MH cắt SO tại L.

Trong mp (SAC), gọi K là giao điểm AL và SC.

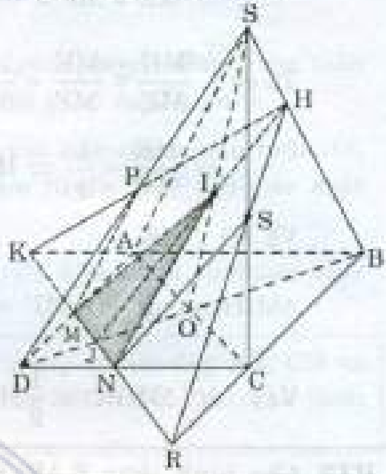
Thiết diện là tứ giác AMKH ■

BT4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Lấy ba điểm M, N, I lần lượt trên AD, CD, SO. Tìm mặt cắt của hình chóp và mặt phẳng (MNI).

Trên mp (ABCD), MN cắt BC tại R, cắt AB tại K, cắt DB tại J.

Trên mp (SBD), IJ cắt SB tại H.

Trên mp (SAB), HK cắt SA tại P.



Ta có :

mp (MNI) cắt mp (ABCD) theo đoạn MN

mp (MNI) cắt mp (SAD) theo đoạn MP

mp (MIN) cắt mp (SAB) theo đoạn HP

Trong mp (SBC), RH cắt SC tại S thì mp (MNI) cắt mp (SBC) theo đoạn HS.

Vậy mp (MNI) cắt (SCD) theo đoạn SN.

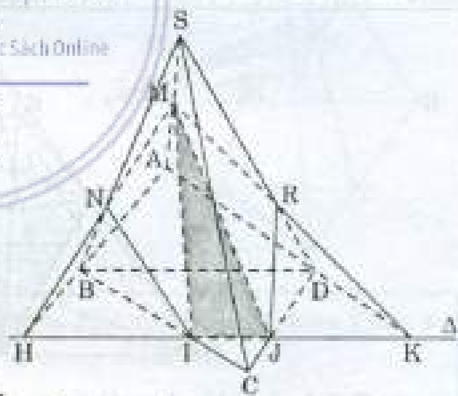
Do đó mặt cắt là ngũ giác MNSHP ■

BT5. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Gọi M là trung điểm SA. Gọi Δ là đường thẳng song song với BD, Δ cắt BC và CD tại I và J. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD và mặt phẳng (M, Δ).

Trong mp (ABCD), Δ cắt AB và AD tại H và K

Trong mp (SAB) : MH cắt SB tại N

Trong mp (SAD) : MK cắt SD tại R



Ta có : (M, Δ) ∩ (ABCD) = IJ

(M, Δ) ∩ (SAB) = MN

(M, Δ) ∩ (SAD) = MR

(M, Δ) ∩ (SDC) = RJ

Do đó thiết diện là ngũ giác INMRJ ■

BT6. Cho hình chóp S.ABCD. Lấy N trên cạnh BC (N ≠ B, C). Lấy K và L lần lượt là hai điểm thuộc miền trong của tam giác SAB và SCD. Xác định mặt cắt của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (NKL) và hình chóp.

Trong mp (SAB), SK cắt AB tại K'.

Trong mp (SCD), SL cắt CD tại L'.

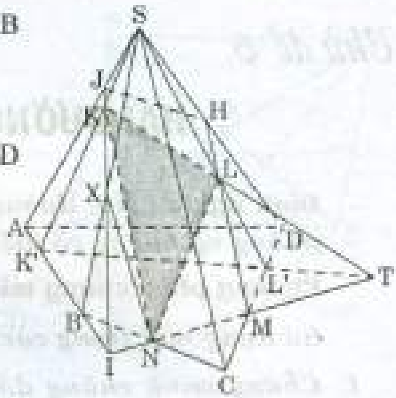
Trong mp (SKL), KL cắt K'L' tại T.

Trong mp (ABCD), TN cắt CD tại M, cắt AB tại I.

Trong mp (SAB), IK cắt SA tại J, cắt SB tại X.

Trong mp (SCD), ML cắt SD tại H.

Mặt cắt của (NKL) và hình chóp S.ABCD là ngũ giác MNXJH ■



BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SA, BC. Lấy N trên AB sao cho $\frac{AN}{AB} = \frac{1}{4}$. Xác định mặt cắt của (MNP) và hình chóp.

2. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, SC. Xác định mặt cắt của mặt phẳng (MNP) và hình chóp.

3. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD. Tính diện tích thiết diện tạo bởi tứ diện và mặt phẳng (BGG').

4. Cho hình chóp S.ABCD. Lấy điểm M trên SC. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm mặt cắt của hình chóp và mặt phẳng (MNP).

5. Cho hình chóp S.ABCD. Trong tam giác SBC lấy điểm M, trong tam giác SCD lấy điểm N.

a) Tìm giao điểm của MN và (SAC).

b) Tìm giao điểm của SC và (AMN).

c) Tìm mặt cắt của hình chóp và (AMN).

6. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi I là trung điểm của AD, J là điểm đối xứng của D qua C, K là điểm đối xứng của D qua B. Xác định và tính diện tích mặt cắt của tứ diện và (IJK).

7. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, CD, OC.

a) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAC). Tìm giao điểm của SA và (MNP).

b) Xác định mặt cắt của hình chóp S.ABCD và (MNP). Tính tỉ số mà (MNP) chia các cạnh SA, BC, CD.

Chủ đề 6

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Định nghĩa : ***Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.***

Phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song

Sử dụng một trong các cách sau đây :

1. ***Chứng minh chúng đồng phẳng rồi sử dụng các định lí đường trung bình, Thalès đảo... quen thuộc trong hình học phẳng.***
2. ***Chứng minh chúng cùng song song với đường thẳng thứ ba.***
3. ***Dùng hệ quả : Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.***

BT1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Đường thẳng qua D và song song SC cắt mp (SAB) tại I. Chứng minh AI song song SB.

a) Mp (SAB) chứa AB, mp (SCD) chứa CD mà AB // CD nên St = mp (SCD) ∩ mp (SAB) với St // AB // CD.

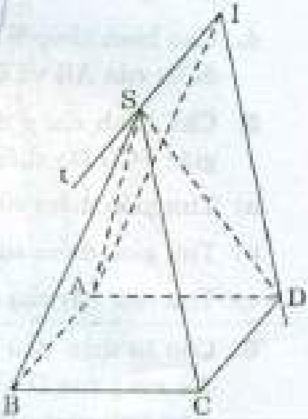
b) Trong mp (SCD), đường thẳng qua D và song song SC cắt St tại I.

Do St ⊂ mp (SAB) ⇒ I ∈ mp (SAB).

Ta có SI // CD và SC // DI nên SIDC là hình bình hành. Do đó : SI // = CD.

Mà CD // = AB nên SI // = AB

Từ giác SIAB là hình bình hành nên AI // SB ■



BT2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với AB song song CD và AB > CD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SB.

a) Chứng minh MN song song CD.

b) Tìm giao điểm J của SC và mp (ADN).

c) AN và DJ cắt nhau tại I. Chứng minh SI // AB và SA // IB.

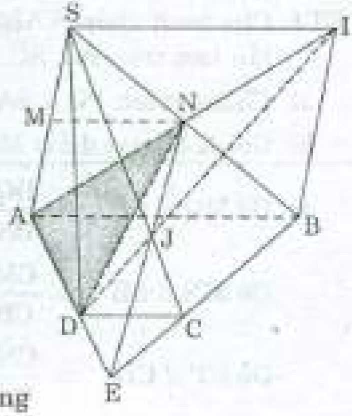
a) Ta có MN là đường trung bình của ΔSAB nên MN // AB, mà AB // CD nên MN // CD.

b) Trong mp (ABCD), AD cắt BC tại E.

Trong mp (SBC), NE cắt SC tại J.

$J \in NE \Rightarrow J \in mp\,(ADN)$

Vậy J là giao điểm SC và (ADN).



c) Ta có : $AB \subset mp\,(SAB)$

$CD \subset mp\,(SCD)$

$AB \,//\, CD$

SI là giao tuyến của mp (SAB) và mp (SCD)

Vậy SI // AB // CD.

Ta có : SI // MN (vì cùng // AB) mà M là trung điểm SA nên MN là đường trung bình ΔASI.

Do đó : $\overrightarrow{SI} = 2\overrightarrow{MN}$ mà $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MN}$ nên $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{AB}$

Vậy ABIS là hình bình hành $\Rightarrow$ SA // IB ■

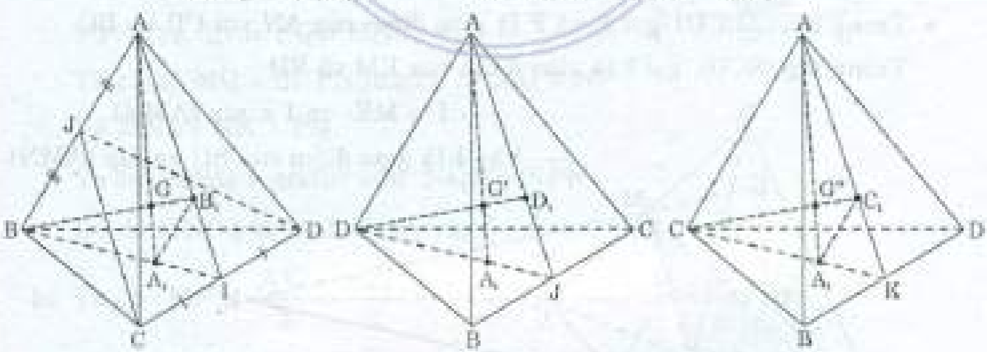
BT3. Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm các ΔBCD, ΔACD, ΔABD, ΔABC. Gọi G là giao điểm AA_1 và BB_1. Chứng minh :

a) $\dfrac{AG}{AA_1} = \dfrac{3}{4}$ b) AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

a) Gọi I là trung điểm CD. Trên mp (IAB), ta có :

$$\frac{IB_1}{IA} = \frac{IA_1}{IB} = \frac{1}{3} \Rightarrow A_1B_1 \,//\, AB \text{ và } \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{GA}{GA_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = 3 \Rightarrow \frac{GA}{GA_1 + GA} = \frac{3}{3+1} = \frac{AG}{AA_1} \quad (1)$$



b) Tương tự, gọi $G' = AA_1 \cap DD_1$, ta có : $\dfrac{G'A}{AA_1} = \dfrac{3}{4}$ (2)

Tương tự, gọi $G'' = AA_1 \cap CC_1$, ta có : $\dfrac{G''A}{AA_1} = \dfrac{3}{4}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{G'A}{AA_1} = \dfrac{G''A}{AA_1} = \dfrac{GA}{AA_1} \Rightarrow G \equiv G' \equiv G''$ ■

BT4. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Lấy M, N, P, Q lần lượt trên BC, SC, SD, AD sao cho MN // SB, NP // CD, MQ // AB.

a) Chứng minh PQ // SA.

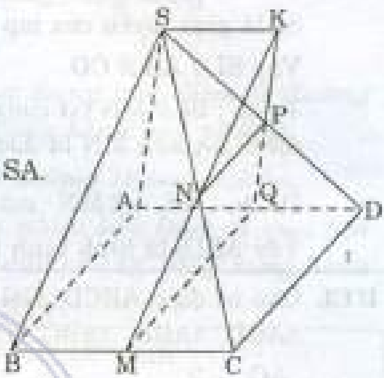
b) Gọi K là giao điểm MN và PQ. Chứng minh SK // AD // BC.

a) Do MQ // AB $\Rightarrow \frac{DQ}{DA} = \frac{CM}{CB}$ (1)

Do MN // SB $\Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CS}$ (2)

Do NP // CD $\Rightarrow \frac{CN}{CS} = \frac{DP}{DS}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{DQ}{DA} = \frac{DP}{DS} \Rightarrow$ PQ // SA.



b) Mp (SAD) và (SBC) đã có chung điểm S.

$K \in NM \Rightarrow K \in (SBC)$

$K \in PQ \Rightarrow K \in (SAD)$

Vậy $SK = (SAD) \cap (SBC)$

Ta có $AD \subset (SAD)$, $BC \subset (SBC)$, mà AD // BC

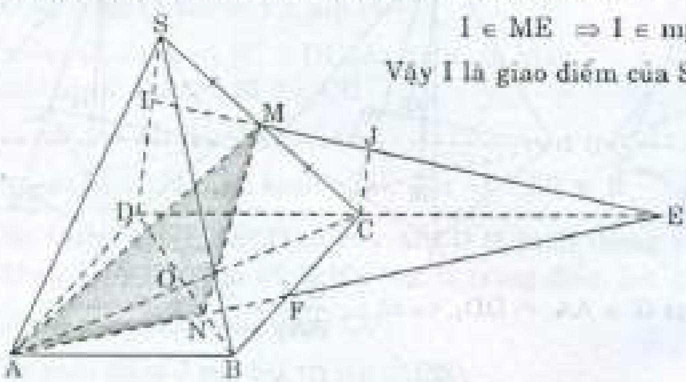
Vậy $SK = (SAD) \cap (SBC)$ thì SK // AD // BC ■

BT5. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SC và OB. Gọi I là giao điểm của SD và mp (AMN). Tính tỉ số $\frac{SI}{ID}$.

- Trong mp (ABCD), gọi E và F là giao điểm của AN với CD và BC.
  Trong mp (SCD), gọi I là giao điểm của EM và SD.

$I \in ME \Rightarrow I \in mp(AMN)$

Vậy I là giao điểm của SD và mp (AMN).



- Ta có BF // AD $\Rightarrow \frac{BF}{AD} = \frac{NB}{ND} = \frac{\frac{1}{2}OB}{OD + \frac{1}{2}OB} = \frac{\frac{1}{2}OB}{\frac{3}{2}OB} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow BF = \frac{1}{3}AD \Rightarrow CF = \frac{2}{3}AD$$

Ta có CF // AD $\Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{CF}{AD} = \frac{2}{3}$

Trong mp (SCD) vẽ CJ // SD ($J \in EI$). Ta có $\frac{JC}{ID} = \frac{EC}{ED} = \frac{2}{3}$ (1)

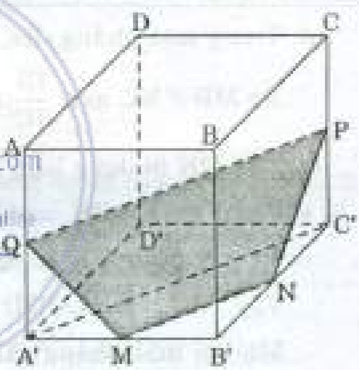
$JC \,//\, SI \Rightarrow \frac{CJ}{SI} = \frac{MC}{MS} = 1 \Rightarrow CJ = SI$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{SI}{ID} = \frac{2}{3}$ ■

BT6. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của A'B', C'B', CC', AA'.

a) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thang cân.

b) Tính chu vi và diện tích tứ giác MNPQ theo a.



a) Ta có MN là đường trung bình của $\Delta A'B'C'$

nên MN // A'C' (1)

Ta có $\overrightarrow{A'Q} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$ và $\overrightarrow{C'P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'C}$

mà $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{C'C}$ nên $\overrightarrow{A'Q} = \overrightarrow{C'P}$

Do đó A'QPC' là hình bình hành

nên PQ // A'C' (2)

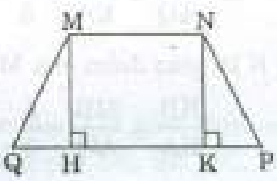
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ PQ // MN.

Ta có $\Delta A'MQ = \Delta C'PN$ (c.g.c) $\Rightarrow MQ = NP$

Vẽ MH và NK $\perp$ PQ

Ta có $\Delta MHQ = \Delta NKP$ nên $\widehat{MQH} = \widehat{NPK}$

Do đó MNPQ là hình thang cân.



b) Ta có : $MN = \frac{A'C'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$PQ = A'C' = a\sqrt{2}$

$NP = MQ = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

Do đó : cv (MNPQ) $= \frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2} + 2\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$

Do $\Delta MQH = \Delta NKP$ nên $HQ = KP$

Vậy : $KP = QH = \frac{1}{2}(PQ - HK) = \frac{1}{2}(PQ - MN) = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Do ΔNPK vuông $\Rightarrow NK^2 = NP^2 - KP^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} = \frac{6a^2}{16}$

Vậy : dt $(MNPQ) = \frac{1}{2}NK(MN + PQ) = \frac{a\sqrt{6}}{8}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2}\right) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ ■

BT7. Cho ΔABC nằm trong mp (α). Gọi Bx, Cy là hai nửa đường thẳng song song nằm về cùng phía đối với mp (α). Gọi M và N là hai điểm di động trên Bx, Cy sao cho CN = 2BM.

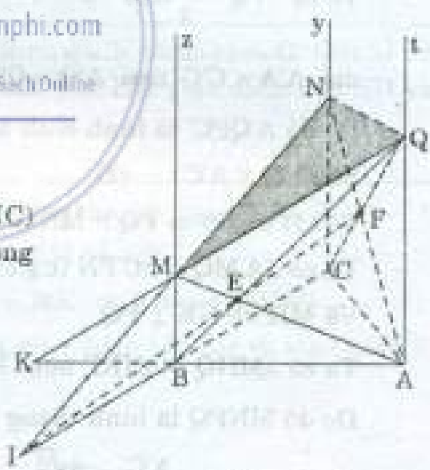
a) Chứng minh MN luôn qua một điểm cố định I khi M, N di động.

b) Lấy E thuộc đoạn AM với $EM = \frac{1}{3}AE$, IE cắt AN tại F, BE cắt CF tại Q. Chứng minh AQ song song Bx và Cy, và mp (QMN) chứa một đường thẳng cố định khi M, N di động.

a) Trong mặt phẳng (Bx, Cy), gọi I là giao điểm của MN và BC.

Do MB // NC nên $\frac{IB}{IC} = \frac{MB}{NC} = \frac{1}{2} \Rightarrow IB = 2IC \Rightarrow$ B là trung điểm IC.

Vậy MN di động luôn qua I cố định.



b) • Ta có : $Q \in BE \Rightarrow Q \in$ mp (ABM)

$Q \in CF \Rightarrow Q \in$ mp (ANC)

Vậy : AQ = mp (ABM) $\cap$ mp (ANC)

Mà hai mặt phẳng (ABM) và mp (ANC) lần lượt chứa hai đường thẳng song song BM và NC.

Do đó : AQ // BM // NC.

• Ta có : MB // AQ

$\Rightarrow \frac{MB}{AQ} = \frac{EM}{EA} = \frac{1}{3}$

Gọi K là giao điểm của MQ và BA ta có :

$\frac{KB}{KA} = \frac{MB}{AQ} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow KB = \frac{1}{3}KA$

Vậy K cố định.

Ta có : $K \in MQ \Rightarrow K \in$ mp (MNQ)

$I \in MN \Rightarrow I \in$ mp (MNQ)

Do đó : mp (QMN) di động nhưng luôn chứa đường thẳng cố định IK ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.

a) Chứng minh MNPQ là hình bình hành.

b) Chứng minh MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang có cạnh bên AD, BC.

a) Xác định giao tuyến d của (SAB) và (SCD).

b) Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAD và SBC. Chứng minh d // MN.

3. Cho hình bình hành ABCD, ABEF không cùng nằm trên một mặt phẳng.

a) Chứng minh CE // DF.

b) Gọi M, N là hai điểm trên AC, AD sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AD} = m$. Gọi H, K là hai điểm trên BF và AF sao cho $\frac{FK}{FA} = \frac{FL}{FB} = n$ với $m, n \in (0; 1)$. Chứng minh MN // KL.

c) Cho $m = \frac{2}{5}$ và $n = \frac{3}{5}$. Chứng minh NK // DF.

4. Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BC. Gọi R là điểm trên BD sao cho BR = 2RD.

a) Xác định E, F là giao điểm của (RPQ) với CD, AD.

b) Tìm giao tuyến của (PQR) và (ABE).

c) Chứng minh R, F lần lượt là trọng tâm của tam giác BCE và ACE.

d) Chứng minh FR // PQ.

e) Tính tỉ số diện tích mà mặt phẳng (PQR) chia cắt tam giác ACD.

5. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC, OB.

a) Tìm giao điểm I của SD và (AMN).

b) Tính $\frac{SI}{ID}$.

6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác lồi, O là giao điểm của AC và BD. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Chứng minh :

a) ME // AC và NF // BD.

b) Ba đường thẳng EM, NF, SO đồng quy.

c) Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật. Gọi M, N, E, F lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, SBC, SCD và SDA.

a) Chứng minh tứ giác MNEF là hình thoi.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh ME, NF và SO đồng quy.

8. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD. Lấy E trên AD (E ≠ A, D).

a) Xác định mặt cắt của tứ diện và (IJE).

b) Tìm vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình bình hành.

c) Tìm điều kiện của A.BCD và vị trí E trên AD sao cho thiết diện là hình thoi.

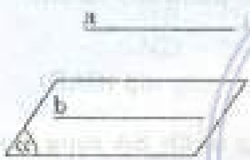
Chủ đề 7

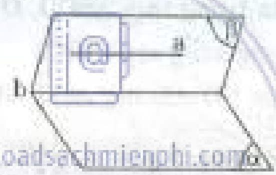
ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

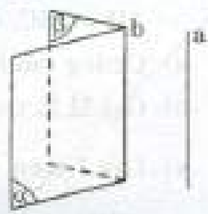
Định nghĩa : ***Một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.***

Các định lí

1. ***Một đường thẳng (không nằm trên (α)) song song với mặt phẳng (α) khi và chỉ khi nó song song với một đường thẳng nằm trên (α).***
2. ***Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) thì bất kì mặt phẳng nào chứa a mà cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.***
3. ***Hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của nó song song với đường thẳng đó.***







BT1. Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm ΔABD. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho MB = 2MC. Chứng minh MG song song mp (ACD).

Gọi I là trung điểm AD. Do G là trọng tâm ΔABD

nên $\dfrac{BG}{GI} = 2$ mà $\dfrac{BM}{CM} = 2$

Vậy $\dfrac{BG}{GI} = \dfrac{BM}{MC}$

Áp dụng định lí Thalès trên mp (BIC),

ta có GM // IC.

Mà IC nằm trong mp (ACD)

Do đó : GM // mp (ACD) ■

BT2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm AB, CD và SA.

a) Chứng minh SB và SC song song với mp (MNP).

b) Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm ΔABC và ΔSBC. Chứng minh G_1G_2 song song mp (SAC).

a) Ta có MP // SB và MP nằm trong mp (MNP).

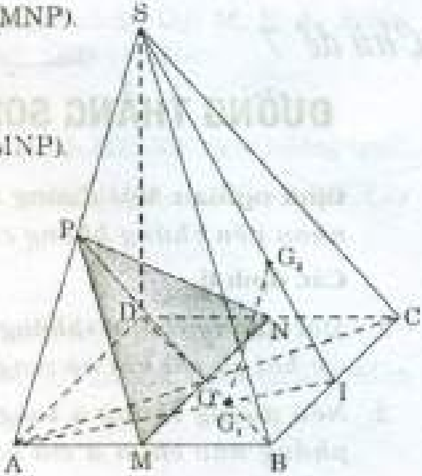
Vậy SB // mp (MNP).

Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.

Ta có OP // SC và OP nằm trong mp (MNP).

Vậy SC // mp (MNP).

b) Gọi I là trung điểm BC.



G_1 trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{IG_1}{IA} = \dfrac{1}{3}$

G_2 trọng tâm $\Delta SBC \Rightarrow \dfrac{IG_2}{IS} = \dfrac{1}{3}$

Vậy $\dfrac{IG_1}{IA} = \dfrac{IG_2}{IS} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, SA$

Mà SA nằm trong mp (SAC) nên G_1G_2 // mp (SAC). ■

BT3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AD và AD = 2BC. Gọi G là trọng tâm ΔSCD, O là giao điểm AC và BD.

a) Chứng minh OG song song mp (SBC).

b) Gọi M là trung điểm SD. Chứng minh MC song song mp (SAB).

c) Lấy I trên đoạn SC sao cho $SI = \dfrac{2}{3}SC$. Chứng minh SA song song mp (BID).

a) Gọi H là trung điểm SC. Ta có : $\dfrac{DG}{DH} = \dfrac{2}{3}$

Do $BC \,//\, AD \Rightarrow \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{AD}{BC} = 2 \Rightarrow OD = 2OB \Rightarrow \dfrac{OD}{BD} = \dfrac{2}{3}$

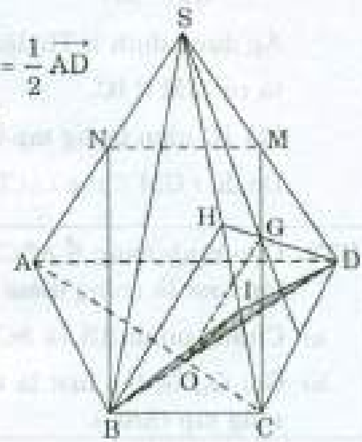
Vậy $\dfrac{DG}{DH} = \dfrac{OD}{BD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow OG \,//\, BH$

mà $BH \subset$ mp (SBC) $\Rightarrow$ OG // mp (SBC).

b) Gọi N là trung điểm SA. Ta có : $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Vậy NMCB là hình bình hành $\Rightarrow$ CM // BN

Mà $BN \subset$ mp (SAB) $\Rightarrow$ CM // mp (SAB).



c) Ta có : $SI = \dfrac{2}{3}SC \Rightarrow \dfrac{CI}{CS} = \dfrac{1}{3}$

$BC \,//\, AD \Rightarrow \dfrac{CO}{OA} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{CO}{CA} = \dfrac{1}{3}$

Vậy : $\dfrac{CO}{CA} = \dfrac{CI}{CS}$ $\Rightarrow OI \parallel SA$ mà $OI \subset$ mp (BID) $\Rightarrow SA \parallel$ mp (BID) ■

BT4. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng có tâm lần lượt là O, O'.

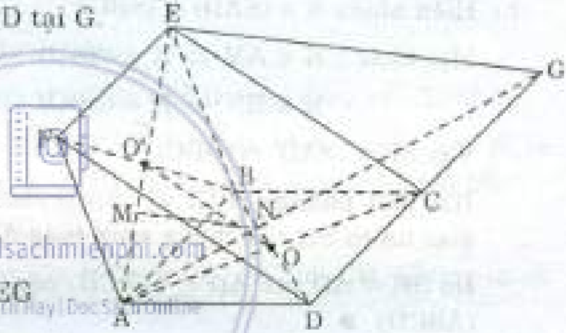
a) Chứng minh OO' song song mp (ADF) và (BCE).

b) Lấy hai điểm M, N trên cạnh AE và BD sao cho $AM = \dfrac{1}{3}AE$ và $BN = \dfrac{1}{3}BD$. Chứng minh MN song song mp (CDFE).

a) Ta có : OO' là đường trung bình của ΔAEC nên $OO' \parallel EC$ mà EC nằm trong mp (BCE) nên $OO' \parallel$ mp (BCE).

Tương tự, $OO' \parallel DF$ nên $OO' \parallel$ mp (ADF).

b) Trong mp (ABCD), AN cắt CD tại G



Ta có : $AB \parallel DG$

$$\Rightarrow \frac{NB}{ND} = \frac{NA}{NG} = \frac{1}{2}$$

Mặt khác : $\dfrac{AM}{ME} = \dfrac{1}{2}$ (gt)

Vậy $\dfrac{NA}{NG} = \dfrac{MA}{ME}$ nên $MN \parallel EG$

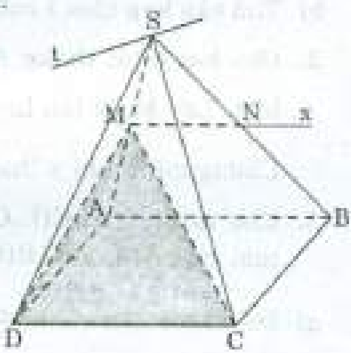
Mà EG nằm trong mp (CDFE) nên $MN \parallel$ mp (CDEF) ■

BT5. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm của SB và mp (MCD).

a) Hai mp (SAD) và (SBC) đã có chung điểm S.



Ta có $BC \parallel AD$ mà $AD \in$ mp (SAD)

$\Rightarrow BC \parallel$ mp (SAD)

Mp (SBC) chứa BC.

Vậy mp (SAD) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến $St \parallel AD \parallel BC$.

b) Ta có $AB \parallel CD$ $\Rightarrow AB \parallel$ mp (MDC)

Mp (SAB) chứa AB sẽ cắt mp (MDC) theo giao tuyến $Mx \parallel AB \parallel CD$.

Trong mp (SAB) gọi N là giao điểm của Mx và SB thì N là giao điểm của SB và mp (MDC) ■

BT6. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Lấy điểm M trên SD.

a) Tìm giao điểm N của SC và (ABM).

b) Gọi K là giao điểm của AM và BN. Chứng minh khi M thay đổi trên SD thì SK luôn luôn song song với mặt phẳng cố định.

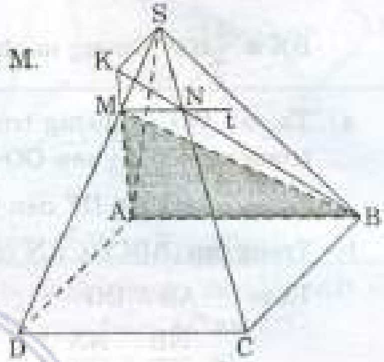
a) Ta có CD // AB mà AB ⊂ (ABM) ⇒ CD // (ABM)

Mp (SCD) chứa CD

Mp (SCD) và mp (MAB) có điểm chung là M.

Vậy (SCD) ∩ (MAB) = Mt // AB

Trong mp (SCD), Mt ∩ SC tại N thì N = SC ∩ (ABM).



b) Hiển nhiên S ∈ (SAD) ∩ (SBC)

Mặt khác : K ∈ AM ⇒ K ∈ (SAD)

K ∈ BN ⇒ K ∈ (SBC)

Vậy SK = (SAD) ∩ (SBC).

Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) chứa hai đường thẳng AD // BC, vậy giao tuyến SK của chúng song song AD // BC.

Do SK // AD mà AD ⊂ (ABCD) nên SK song song mặt phẳng cố định (ABCD) ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện ABCD. Mặt phẳng (P) di động luôn song song AB và CD lần lượt cắt AC, AD, BC, BD tại M, N, E, F.

a) Chứng minh MNEF là hình bình hành.

b) Tìm tập hợp tâm I của MNEF.

2. Cho hai hình thang ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Lấy M, N lần lượt trên AB, CE sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CE} = x$ $(0 < x < 1)$.

Chứng minh khi x thay đổi thì MN luôn song song mặt phẳng (BCE).

3. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, I' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng :

a) Điều kiện cần và đủ để II' song song (BCD) là $\frac{BC}{BD} = \frac{AB + AC}{AB + AD}$.

b) Điều kiện cần và đủ để II' song song (BCD) và (ACD) là BC = BD và AC = AD.

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Lấy M là điểm di động trên AB. Mặt phẳng (α) qua M song song với SA và BC cắt SB, SC, SD tại N, P, Q.

a) Chứng minh MNPQ là hình thang.

b) Gọi I là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh I di động trên một đường cố định.

5. Cho tứ diện ABCD. Gọi (α) là mặt phẳng di động luôn song song với AB và CD cắt AC, AD, BC, BD tại M, N, E, F.

a) Chứng minh MNEF là hình bình hành.

b) Tìm tập hợp các tâm I của MNEF.

6. Cho tứ diện ABCD. Lấy E, F, G, H lần lượt trên AD, AB, BC, CD sao cho $\frac{EA}{ED} = \frac{FA}{FB} = \frac{GC}{GB} = \frac{HC}{HD}$.

a) Chứng minh EFGH là hình bình hành.

b) Chứng minh AC song song với (EFGH) và BD song song với (EFGH).

7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là điểm di động trên SC. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD.

a) Tìm giao điểm E, F của SB, SD với (P).

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của ME với CB, MF với CD. Chứng minh I, J, A thẳng hàng.

8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với AB là đáy lớn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a) Chứng minh MN song song với CD.

b) Tìm điểm P là giao điểm của SC và (ADN).

c) Gọi I là giao điểm của AN với DP. Chứng minh SI // AB // CD.

d) Tứ giác SABI là hình gì ?

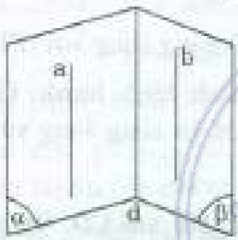
Chủ đề 8

XÁC ĐỊNH MẶT CẮT CỦA ĐA DIỆN VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG ĐƯỜNG THẲNG a CHO TRƯỚC

Phương pháp

Ta đi tìm các đoạn giao tuyến giống ở chủ đề 5. Chú ý sử dụng một trong hai định lí :

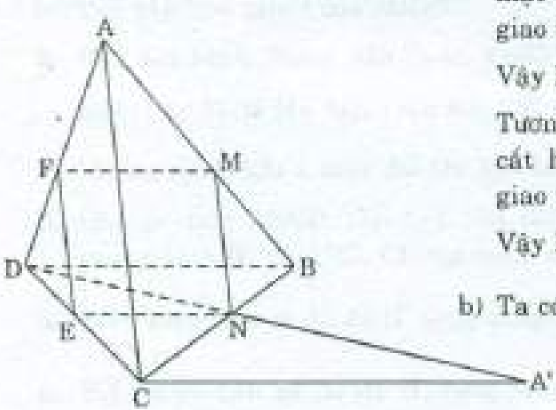
- *Hai mặt phẳng cắt nhau cùng chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến chúng song song hay trùng với một trong hai đường thẳng đó.*
- *Nếu đường thẳng a song song mặt phẳng (α) thì bất kì mặt phẳng nào chứa a, cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến b thì b song song a.*



BT1. Cho tứ diện ABCD. Mặt phẳng (α) song song với AC và DB cắt AB, BC, CD, AD lần lượt tại M, N, E, F.

a) Chứng minh MNEF là hình bình hành.

b) Từ C vẽ đường thẳng song song với BD cắt ND tại A'. Chứng minh nếu CA' = CA thì MNEF là hình thoi.



a) Mặt phẳng (α) song song AC nên cắt mặt phẳng (ABC) và mp (ACD) theo giao tuyến MN // AC và EF // AC.

Vậy MN // EF.

Tương tự, mp (α) song song DB. Vậy cắt hai mp (ABD) và mp (CBD) theo giao tuyến MF // EN // DB.

Vậy MFEN là hình bình hành.

b) Ta có : EF // AC $\Rightarrow \dfrac{EF}{AC} = \dfrac{DE}{DC}$ (1)

EN // A'C $\Rightarrow \dfrac{EN}{A'C} = \dfrac{DE}{DC}$ (2)

Từ (1) và (2) ⇒ $\frac{EF}{AC} = \frac{EN}{A'C}$

Vậy nếu AC = A'C thì EF = EN, lúc đó ENMF là hình thoi ■

BT2. Cho tứ diện ABCD có AB vuông góc CD, AB = a, CD = b. Gọi I và J lần lượt là trung điểm AB và CD. Lấy điểm M trên IJ. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB, CD.

a) Xác định mặt cắt của (α) và tứ diện ABCD.

b) Tính diện tích mặt cắt này khi IM = $\frac{IJ}{3}$.

a) Mp (ICD) chứa CD mà mp (α) song song CD.

Mp (ICD) và mp (α) có chung điểm M, vậy mp (ICD) và mp (α) có giao tuyến qua M và song song CD. Giao tuyến này cắt IC, ID lần lượt tại H và K.

Hai mp (CAB) và mp (DAB) chứa AB song song với mp (α).

Vậy hai mặt phẳng này cắt (α) theo giao tuyến PHQ và RKS có PQ // RS // AB.

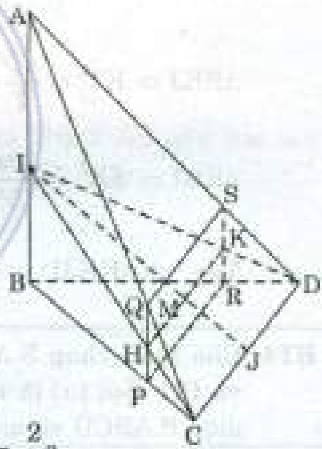
Mp (ACD) chứa CD song song (α).

Vậy SQ = mp (ACD) ∩ mp (α) thì SQ // CD.

Do đó mặt cắt PQSR là hình bình hành.

Mà $(\widehat{AB, CD}) = 90^0$ nên $\widehat{QPR} = 90^0$

Vậy PQSR là hình chữ nhật.



b) Do $\frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3}$ nên $\frac{HK}{CD} = \frac{1}{3}$ ⇒ HK = $\frac{b}{3}$

Ta có : $\frac{JM}{JI} = \frac{2}{3}$ ⇒ $\frac{CH}{CI} = \frac{2}{3}$

Mà PQ // AB ⇒ $\frac{PQ}{AB} = \frac{CH}{CI} = \frac{2}{3}$ ⇒ PQ = $\frac{2}{3}$a

Do đó : dt (PQSR) = HK.PQ = $\frac{2}{9}$ab ■

BT3. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh a. Gọi I và J là trung điểm AC và BC. Gọi K trên cạnh BD với KB = 2KD.

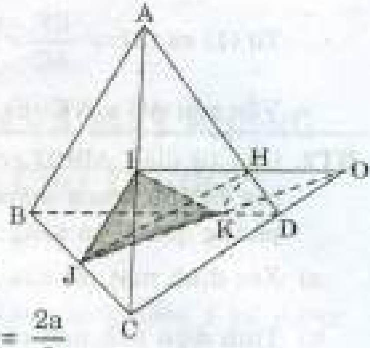
a) Xác định thiết diện của tứ diện với mp (IJK). Chứng minh thiết diện là hình thang cân.

b) Tính diện tích thiết diện theo a.

a) Trên mp (BCD) : IK ∩ CD = {O}

Trên mp (ACD) : OI ∩ AD = {H}

Vậy mặt cắt là tứ giác IJKH.



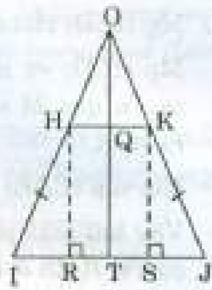
Hai mp (IJK) và (ABD) lần lượt chứa hai đường thẳng song song IJ và AB, vậy cắt nhau theo giao tuyến HK thì HK // IJ //AB (1)

Ta có : HK // AB $\Rightarrow \dfrac{DH}{DA} = \dfrac{HK}{AB} = \dfrac{DK}{DB} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow HK = \dfrac{a}{3}$ và $AH = BK = \dfrac{2a}{3}$

$\Delta AIH = \Delta BJK \Rightarrow IH = JK$

Vẽ HR và KS vuông góc IJ.



ΔHIR vuông $= \Delta KSI$ vuông $\Rightarrow \hat{I} = \hat{J}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ HKJI là hình thang cân.

b) Ta có : $IR = SJ = \dfrac{IJ - HK}{2} = \dfrac{\frac{a}{2} - \frac{a}{3}}{2} = \dfrac{a}{12}$

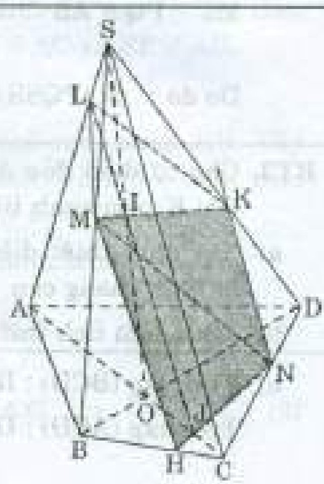
$\Delta BKJ \Rightarrow KJ^2 = \dfrac{a^2}{4} + \left(\dfrac{2a}{3}\right)^2 - 2.\dfrac{a}{2}.\dfrac{2a}{3}.\cos 60^0 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{4a^2}{9} - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{13}{36}a^2$

$\Delta KSJ \Rightarrow SK^2 = \dfrac{13a^2}{36} - \dfrac{a^2}{12} = \dfrac{51a^2}{144}$

Vậy dt (HKJI) $= \dfrac{1}{2}(HK + IJ).SK = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{3} + \dfrac{a}{2}\right)\dfrac{a\sqrt{51}}{12} = \dfrac{5a^2\sqrt{51}}{144}$ ■

BT4. Cho hình chóp S.ABCD. Lấy hai điểm M và N lần lượt nằm trên SB và CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song SC. Xác định thiết diện S.ABCD và mp (α).

Mp (SCD) chứa SC mà SC // mp (α).



Vậy mp (α) cắt mp (SCD) theo giao tuyến NK // SC.

Trong mp (SBD), MK cắt SO tại I.

Mp (SAC) chứa SC và SC // mp (α). Vậy mp (α) cắt mp (SAC) theo giao tuyến qua I và song song SC. Giao tuyến này cắt SA và AC tại L và J.

Do đó : LK = mp (α) $\cap$ mp (SAD)

LM = mp (α) $\cap$ mp (SAB)

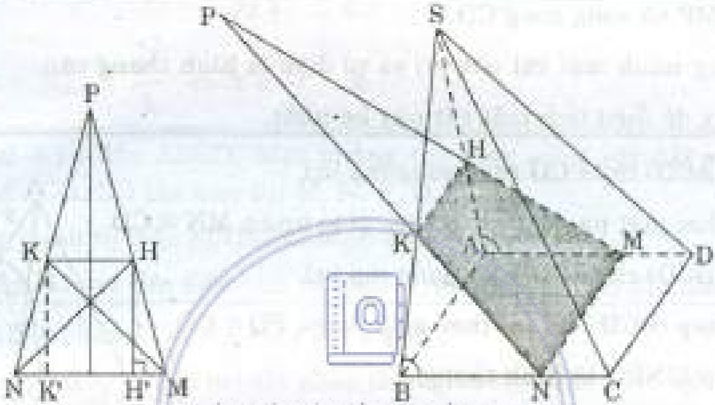
Trên mp (ABCD), NJ cắt BC tại H thì MH = mp (α) ∩ mp (SBC).

Do đó thiết diện là ngũ giác NKLMH ■

BT5. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Lấy S là điểm nằm ngoài mp (ABCD) sao cho ΔSAB đều, và SC = SD = $a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm SA, SB. Lấy M trên cạnh AD. Đặt AM = x ($0 \le x \le a$). Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N.

a) Chứng minh HKNM là hình thang cân.

b) Tính diện tích tứ giác HKNM theo a và x.



a) Mp (ABCD) chứa AB; mp (HMK) chứa HK mà HK // AB nên hai mặt phẳng này có giao tuyến là MN thì MN // AB // CD (1)

Ta có : SA = SB = a, AD = BC = a, SC = SD = $a\sqrt{3}$

Vậy ΔSBC = ΔSAD (c.c.c) ⇒ $\widehat{SBC} = \widehat{SAD}$

⇒ ΔBKN = ΔAHK (c.g.c) ⇒ NK = HM (2)

Từ (1) và (2) : tứ giác NKHM hình thang cân.

b) ΔSBC ⇒ $SC^2 = SB^2 + BC^2 - 2SB.BC.\cos\hat{B}$

$$\Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBC} = 120^0$$

ΔBKN ⇒ $KN^2 = BK^2 + BN^2 - 2BK.BN.\cos 120^0$

$$\Rightarrow KN^2 = \frac{a^2}{4} + x^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)(x)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + x^2 + \frac{1}{2}ax$$

Vẽ HH' và KK' ⊥ MN ta có : HK = H'K'

Ta có : ΔNKK' = ΔMHH' (c.g.c) ⇒ NK' = MH'

Vậy MN = 2NK' + H'K' ⇒ $NK' = \frac{MN - NK}{2} = \frac{a - \frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{4}$

$\Delta NKK'$ vuông $\Rightarrow KK'^2 = NK^2 - NK'^2 = \dfrac{3a^2}{16} + x^2 + \dfrac{1}{2}ax$

Ta có : dt (HKNM) $= \dfrac{HK + NM}{2}.KK' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2} + a\right)\dfrac{1}{4}\sqrt{3a^2 + 16x^2 + 8ax}$

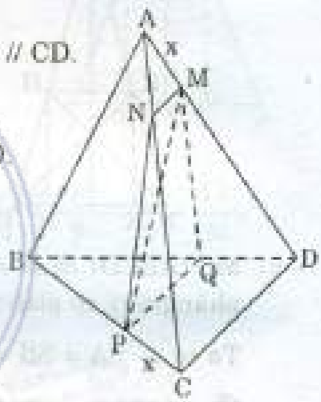
$$= \frac{3a}{16}.\sqrt{(4x + a)^2 + 2a^2} \quad \blacksquare$$

BT6. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M và P là hai điểm di động trên AD và BC sao cho AM = CP = x với 0 < x < a. Gọi (α) là mặt phẳng qua MP và song song CD.

a) Chứng minh mặt cắt của (α) và tứ diện là hình thang cân.

b) Tìm x để diện tích mặt cắt này bé nhất.

a) Mp (ACD) chứa CD song song mp (α).



Vậy hai mặt này cắt nhau theo giao tuyến MN // CD.

Mp (BCD) chứa CD song song mp (α).

Vậy mp (BCD) cắt (α) theo giao tuyến PQ // CD.

Do đó MNPQ là hình thang.

Hai tam giác DMQ và CNP bằng nhau vì

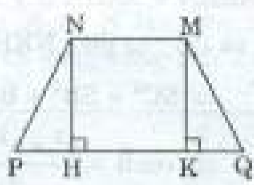
$\widehat{MDQ} = \widehat{NCP} = 60^\circ$

PC = QD = x

DM = CN = a − x

Suy ra MQ = NP

Do đó MNPQ là hình thang cân.



b) ΔAMN đều $\Rightarrow MN = x$

ΔBPQ đều $\Rightarrow PQ = a - x$

Vẽ NH và MK vuông góc PQ.

Δ vuông NPH = Δ vuông MKQ $\Rightarrow PH = KQ$

$\Rightarrow 2PH = PQ - HK = PQ - MN$

$\Rightarrow PH = \dfrac{1}{2}[(a - x) - x] = \dfrac{a}{2} - x$

$\Delta CNP \Rightarrow NP^2 = CN^2 + CP^2 - 2CN.CP.\cos 60^\circ$

$\Rightarrow NP^2 = (a - x)^2 + x^2 - 2.(a - x)x.\dfrac{1}{2} = 3x^2 - 3ax + a^2$

ΔPNH vuông $\Rightarrow NH^2 = NP^2 - PH^2 = 3x^2 - 3ax + a^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$

$$\Rightarrow NH^2 = 2x^2 - 2ax + \frac{3a^2}{4}$$

Do đó : $dt\,(MNQP) = \frac{1}{2}(MN + PQ).NH = \frac{a}{2}\sqrt{2\left(x^2 - ax + \frac{3a^2}{8}\right)}$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{8}} \geq \frac{a^2}{4}$$

Do đó : $S_{min} = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$ ■

BT7. Cho tứ diện đều ABCD. Mặt phẳng (α) song song với AD và BC cắt AB, AC, CD, BD lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

b) Tìm mp (α) sao cho diện tích tứ giác MNPQ đạt giá trị lớn nhất.

a) Mp (ABD) chứa AD song song với mp (α).

Vậy mp (ABD) và mp (α) cắt nhau theo giao tuyến MQ thì QM // AD.

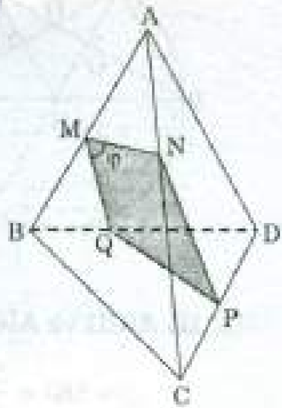
Mp (CAD) chứa AD song song mp (α).

Vậy mp (CAD) $\cap$ mp (α) = NP thì NP // AD.

Do đó : MQ // NP

Lập luận tương tự, MN // PQ // BC.

Vậy MNPQ là hình bình hành.



b) Gọi φ là góc của hai đường thẳng AD và BC thì φ là hằng số và $\varphi = \widehat{QMN}$.

Đặt a là cạnh tứ diện đều và AM = x $(0 \leq x \leq a)$.

Ta có : ΔBMQ đều $\Rightarrow MQ = BM = a - x$

ΔAMN đều $\Rightarrow MN = AM = x$

Do đó : $dt\,(MNPQ) = MN.MQ.\sin\varphi = x(a - x).\sin\varphi$

Do bất đẳng thức Cauchy ta có : $a = (a - x) + x \geq 2\sqrt{x(a - x)}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} \geq x(a - x) \Leftrightarrow \frac{a^2}{4}\sin\varphi \geq dt\,(MNPQ)$$

Do đó : $dt\,(MNPQ)\ max = \frac{a^2}{4}\sin\varphi \Leftrightarrow x = a - x \Leftrightarrow BM = x = \frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow$ M trung điểm AB ■

BT8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều với BC = 2a, AB = AD = CD = a. Mặt bên SBC là tam giác đều, SD vuông góc AC. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Tính SD theo a ?

b) Lấy điểm M trên đoạn OD. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song SD và AC. Xác định thiết diện của mp (α) và hình chóp S.BCD.

c) Tính diện tích thiết diện khi MB = $x\sqrt{3}$. Tìm x để diện tích lớn nhất.

a) Gọi I là trung điểm BC thì SI $\perp$ BC.

Lấy J trên BC sao cho CI = CJ = a

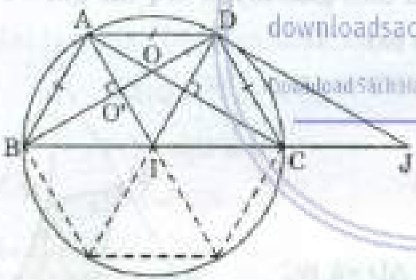
Ta có ADJC là hình bình hành nên AC // DJ.

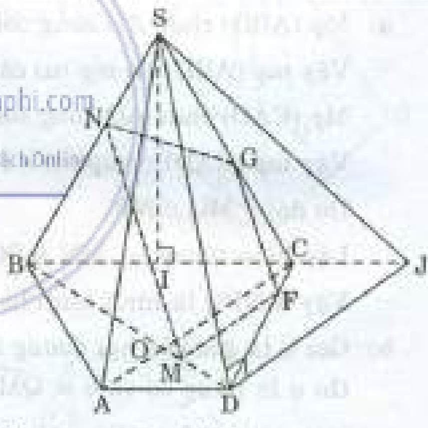
Mà SD $\perp$ AC nên SD $\perp$ DJ.

ΔSIJ vuông $\Rightarrow SJ^2 = SI^2 + IJ^2 = \left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (2a)^2 = 7a^2$

ΔSDJ vuông $\Rightarrow SD^2 = SJ^2 - DJ^2 = 7a^2 - AC^2 = 7a^2 - 3a^2 = 4a^2$

$\Rightarrow SD = 2a.$





b) Do ABID và AICD là hình thoi nên O là trọng tâm ΔADI.

$$\Rightarrow OD = \frac{2}{3}DO' = \frac{2}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow OB = BD - OD = a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Ta có AC // mp (α) nên mp (α) cắt mp (BCD) theo giao tuyến MF // AC.

Do SD // mp (α) nên (α) cắt mp (SBD) theo giao tuyến MN // SD,

(α) cắt mp (SCD) theo giao tuyến FG // SD.

Mặt khác SD $\perp$ AC nên MN $\perp$ MF.

Vậy mặt cắt là hình thang vuông MNGF.

c) Ta có : $OC = AC - AO = a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$$DM = BD - MB = a\sqrt{3} - x\sqrt{3} = \sqrt{3}(a - x)$$

Ta có : $MF \parallel OC \Rightarrow \frac{MF}{OC} = \frac{DM}{DO}$

$$\Rightarrow MF = \frac{OC.DM}{OD} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3}(a-x)}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3}(a-x)$$

Ta có : $OM = OD - DM = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}(a-x) = \frac{\sqrt{3}}{3}(3x - 2a)$

Do $GF \parallel SD \Rightarrow \frac{GR}{SD} = \frac{CF}{CD} = \frac{OM}{OD}$

$$\Rightarrow GF = \frac{SD.OM}{OD} = \frac{2a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}.\frac{\sqrt{3}}{3}(3x - 2a) = 2(3x - 2a)$$

Do $MN \parallel SD$ nên $\frac{MN}{SD} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow MN = \frac{SD.MB}{BD} = \frac{2a(x\sqrt{3})}{a\sqrt{3}} = 2x$

Vậy : dt (MNGF) $= \frac{MF}{2}(MN + GF)$

$$= \sqrt{3}(a-x)[2x + 2(3x - 2a)] = 8\sqrt{3}(a-x)\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

Do bất đẳng thức Cauchy : $\frac{a}{2} = (a - x) + \left(x - \frac{a}{2}\right) \geq 2\sqrt{(a-x)\left(x - \frac{a}{2}\right)}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{16} \geq (a-x)\left(x - \frac{a}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{a^2}{16}.8\sqrt{3} \geq \text{dt (MNGF)}$$

Vậy : dt (MNGF) max $= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a - x = x - \frac{a}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3a}{4}$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SI. Xác định mặt cắt của (MNP) và hình chóp.

2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, C'D'. Xác định mặt cắt của (MON) và hình lập phương.

3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi I, I' lần lượt là tâm của hình vuông ABCD, A'B'C'D'. Lấy P trên II' sao cho $\frac{I'P}{II'} = \frac{1}{4}$. Xác định mặt cắt của hình lập phương và mặt phẳng qua P song song với AC và B'D.

4. Cho hình chóp S.ABCD. Mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD tại A', B', C', D'. Tìm điều kiện của (P) để tứ giác A'B'C'D' là

a) Hình thang.   b) Hình bình hành.

5. Cho tứ diện ABCD có trọng tâm G. Xác định thiết diện của tứ diện ABCD và mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau :

a) (P) qua G, qua E thuộc BC và song song với AD.

b) (P) qua G và song song với BC và AD.

6. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, (P) là mặt phẳng qua AM và song song BD.

a) Xác định mặt cắt của (P) và hình chóp.

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với SB và SD. Tính tỉ số diện tích các tam giác SME và SBC; SMF và SCD.

c) Gọi K là giao điểm của ME và BC. Gọi J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh ba điểm K, A, J nằm trên đường thẳng song song với EF. Tính tỉ số $\frac{EF}{KJ}$.

Chủ đề 9

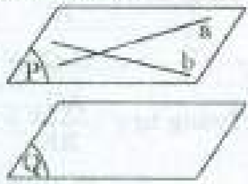
HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Định nghĩa : ***Hai mặt phẳng gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.***

2. Điều kiện song song của hai mặt phẳng

Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a và b cắt nhau và cùng song song mặt phẳng (Q) thì (P) song song (Q).

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ và } b \subset (P) \\ a \text{ cắt } b \\ a, b \,//\, (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \,//\, (Q)$$



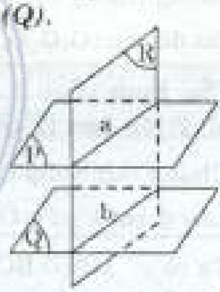
3. Các định lí

a) ***Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song mặt phẳng đó.***

b) ***Nếu đường thẳng a song song mặt phẳng (Q) thì qua a chỉ có duy nhất một mặt phẳng song song mặt phẳng (Q).***

c) ***Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) cắt (P) thì cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.***

$$\left.\begin{array}{l} (P) \,//\, (Q) \\ a = (P) \cap (R) \\ b = (Q) \cap (R) \end{array}\right\} \Rightarrow a \,//\, b$$



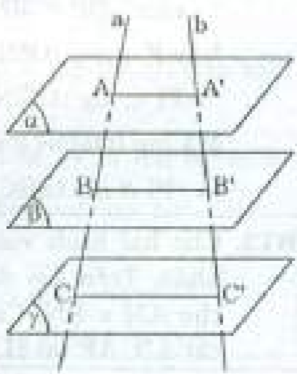
d) ***Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.***

e) ***Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn bằng nhau.***

f) ***Định lí Thalès***

Ba mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

GT	$\alpha \,//\, \beta \,//\, \gamma$ a cắt (α), (β), (γ) tại A, B, C b cắt (α), (β), (γ) tại A', B', C'
KL	$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$

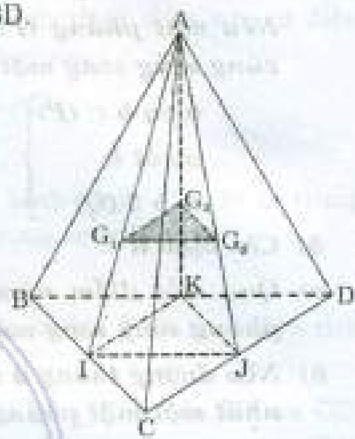


g) Định lí Thalès đảo

Nếu trên hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ thì ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song.

BT1. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ABD. Chứng minh mp $(G_1G_2G_3)$ song song mp (BCD).

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm BC, CD, BD.



Ta có : $\frac{AG_1}{AI} = \frac{AG_3}{AK} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow G_1G_3 \parallel IK$ (1)

Tương tự : $\frac{AG_3}{AK} = \frac{AG_2}{AJ} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow G_2G_3 \parallel KJ$ (2)

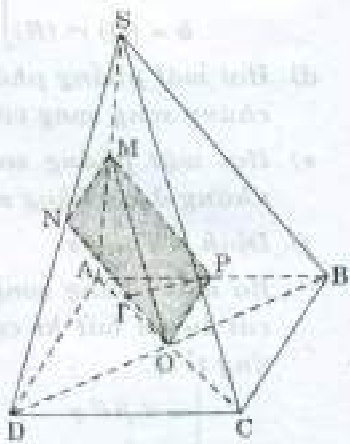
Mà G_1G_3, G_2G_3 là hai đường thẳng cắt nhau trong mp $(G_1G_2G_3)$ và IK, KJ là hai đường thẳng cắt nhau trong mp (BCD).

Do đó mp $(G_1G_2G_3)$ // mp (BCD) ■

BT2. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SD, AB.

a) Chứng minh mp (OMN) song song mp (SBC).

b) Lấy điểm I trên ON. Chứng minh PI song song mp (SBC).



a) Ta có : MN // BC và ON // SB

Mà ON, MN ⊂ mp (OMN)

BC, SB ⊂ mp (SBC)

Vậy mp (OMN) // mp (SBC).

b) Ta có : OP // AD mà AD // MN

nên OP // MN.

Vậy P ∈ mp (OMN)

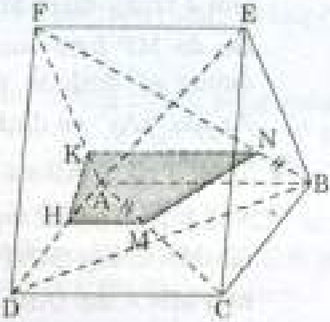
⇒ PI ⊂ mp (OMN).

Mà mp (OMN) // mp (SBC)

⇒ PI // mp (SBC) ■

BT3. Cho hai hình vuông ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên hai đường chéo AC và BF lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại H, K. Chứng minh :

a) Mp (CBE) song song mp (ADF).
b) Mp (DEF) song song mp (MNHK).



a) Ta có BE // AF và BC // AD mà BE, BC cắt nhau nằm trong mp (BCE), AF, AD cắt nhau nằm trong mp (ADF).

Vậy mp (CBE) // mp (ADF).

b) Ta có NK // EF (vì cùng // AB).

Mặt khác : NK // AB $\Rightarrow \dfrac{BN}{BF} = \dfrac{AK}{AF}$

MH // CD $\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AH}{AD}$

Mà BN = AM và BF = AC. Vậy : $\dfrac{AK}{AF} = \dfrac{AH}{AD} \Rightarrow$ HK // FD

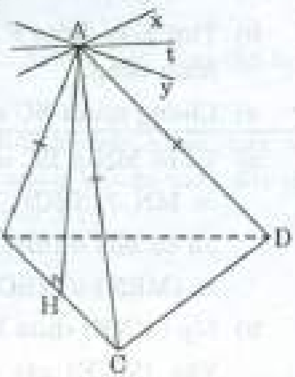
Ta có : EF và FD cắt nhau và nằm trong mp (DEF)

NK và HK cắt nhau và nằm trong mp (NKHM)

Mà EF // NK và DF // HK.

Do đó mp (DEF) // mp (NKHM) ■

BT4. Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD. Chứng minh rằng các đường phân giác ngoài của các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAD}$, $\widehat{DAB}$ đồng phẳng.



ΔABC cân tại A nên vẽ AH ⊥ BC thì AH là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$.

Gọi Ax là đường phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$ thì

Ax ⊥ AH $\Rightarrow$ Ax // BC $\Rightarrow$ Ax // mp (BCD)

Tương tự Ay là đường phân giác của $\widehat{CAD}$ thì

Ay // CD $\Rightarrow$ Ay // mp (BCD)

Tương tự At là đường phân giác của $\widehat{BAD}$ thì

At // BD $\Rightarrow$ At // mp (BCD)

Do từ điểm A ta chỉ vẽ được duy nhất một mp (α) // mp (BCD) nên các đường Ax, Ay, At cùng nằm trên (α) ■

BT5. Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax, By. Gọi M, N là hai điểm di động trên Ax, By sao cho AM = BN. Lấy P là điểm sao cho $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BA}$. Gọi I là trung điểm MN. Chứng minh :

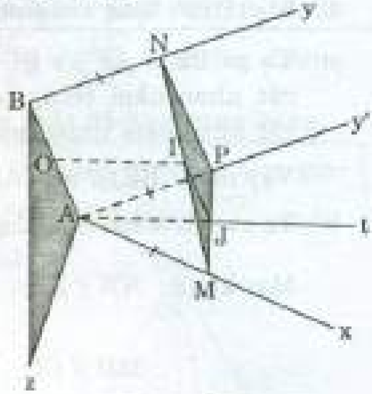
a) MP có phương không đổi và MN luôn song song một mặt phẳng cố định.
b) Khi M, N di động thì I luôn di động trên một đường thẳng cố định.

a) • Do $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BA}$ nên P ∈ Ay' cố định sao cho : Ay' // By.

Ta có : AP = AM (vì cùng bằng BN)

Gọi J trung điểm MP thì AJ ⊥ MP.

Do đó MP luôn song song với một đường cố định là phân giác ngoài Az của $\widehat{xAy'}$ cố định.



• Ta có : NP // AB và MP // Az

Vậy mp (MNP) // mp (AB, Az)

mà MN ⊂ mp (MNP)

nên MN // mp (AB, Az) cố định.

b) Gọi O trung điểm AB.

Ta có : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ mà $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BA}$ nên $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OA}$

Do đó : OI // At.

Vậy khi M, N di động thì trung điểm I của MN luôn di động trên đường thẳng cố định qua O và song song At là tia phân giác của $\widehat{xAy'}$ cố định ■

BT6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang (AD // BC, AD > BC). Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của AB, CD, SA.

a) Chứng minh MN song song (SBC), (MEN) song song (SBC).

b) Tìm giao điểm F của (MNE) và SD. Xác định thiết diện của (MNE) với hình chóp.

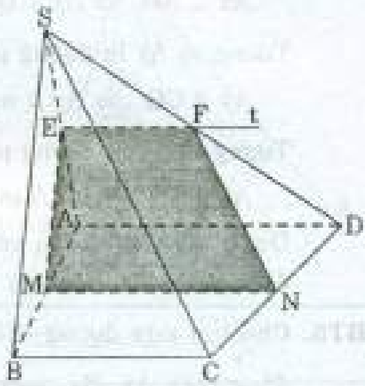
c) Chứng minh SC song song (MNE), AF có song song (SBC) không ?

a) Ta có MN // BC mà BC ⊂ (SBC)

⇒ MN // (SBC)

Ta có MN // (SBC), ME // (SBC)

⇒ (MEN) // (SBC).



b) Mp (MNE) chứa MN // AD.

Vậy (MNE) cắt (SAD) theo giao tuyến Et qua M và song song AD.

Gọi F là giao điểm của Et và SD thì F = SD ∩ (MNE).

Mặt cắt của (MNE) và hình chóp là hình thang MNFE.

c) Ta có (SBC) // (MNE) mà SC ⊂ (SBC) ⇒ SC // (MNE).

Nếu AF // (SBC) thì AF ⊂ (MNE) ⇒ AF ∈ (MNE) (vô lí)

Vậy AF không song song (SBC) ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho mặt phẳng (P) và điểm A nằm ngoài (P). Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng qua A và song song (P) đều nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song (P).

2. Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Hai đường thẳng song song a và b. Gọi A, A' lần lượt là giao điểm của a với (P) và (Q). Gọi B, B' lần lượt là giao điểm của b với (P) và (Q). Chứng minh AA' = BB'.

3. Từ các đỉnh của tam giác ABC, vẽ các đoạn thẳng AA', BB', CC' song song và bằng nhau không nằm trong mặt phẳng (ABC). Gọi I, G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACC', A'B'C'. Chứng minh :

a) Mặt phẳng (IGK) song song mặt phẳng (BB'C'C).

b) Mặt phẳng (A'GK) song song mặt phẳng (AIB').

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD tại A', B', C', D'. Chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành khi và chỉ khi mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (ABCD).

5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh là hình vuông cạnh a. Lấy M, N trên AD', DB sao cho AM = DN = x $(0 < x < a\sqrt{2})$.

a) Chứng minh khi x thay đổi thì MN luôn song song mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì MN song song A'C.

6. Cho tứ diện ABCD. Hai điểm M, N di động trên AB và CD. Tìm tập hợp trung điểm I của MN.

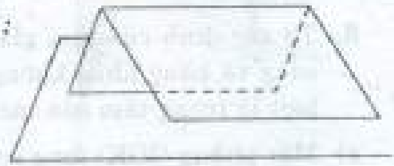
7. Cho hai tia Ax và By lần lượt nằm trên hai đường chéo nhau. Lấy M, N trên Ax, By sao cho AM = BN = m. Chứng minh khi m thay đổi thì MN luôn song song một mặt phẳng cố định.

Chủ đề 10

TÌM THIẾT DIỆN CỦA ĐA DIỆN TẠO BỞI MẶT PHẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG CHO TRƯỚC

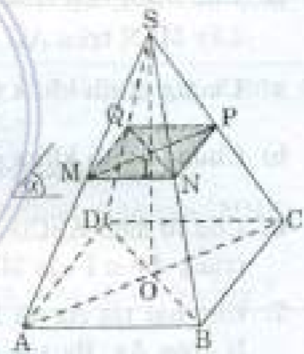
Phương pháp

Sử dụng một trong hai cách sau đây :



- ***Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song thì hai giao tuyến chúng song song nhau.***
- ***Nếu (α) // (β) mà a nằm trong (α) thì a // (β) rồi áp dụng như chủ đề 9.***

BT1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Mặt phẳng (α) song song với mp (ABCD) cắt SA, SB, SC, SD tại M, N, P, Q. Chứng minh MNPQ là hình bình hành.



Mp (SAB) cắt hai mặt phẳng song song (α) và (ABCD) theo hai giao tuyến MN // AB.

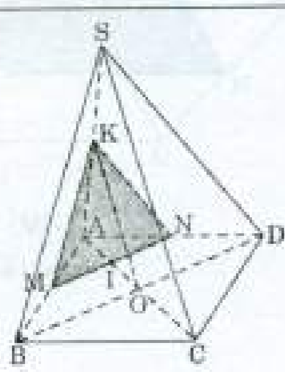
Mp (SCD) cắt hai mặt phẳng song song (α) và (ABCD) theo hai giao tuyến PQ // CD.

Mà AB // CD ⇒ MN // PQ

Tương tự : MQ // NP // AD // BC

Do đó MNPQ là hình bình hành ■

BT2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O, mặt bên ΔSDB đều, AC = a, BD = b. Lấy I trên đoạn AO. Gọi (α) là mặt phẳng qua I và song song mp (SBD). Xác định và tính diện tích mặt cắt của (α) và hình chóp theo a, b và x = AI $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.



- Ta có mp (α) // mp (SBD) nên mp (ABCD) cắt hai mặt này theo hai giao tuyến MIN và BD song song nhau.

  Tương tự : mp (SAD) cắt mp (α) và mp (SBD) theo hai giao tuyến NK // SD.

  Tương tự : mp (SBA) cắt mp (α) và mp (SBD) theo hai giao tuyến MK // SB.

  Mà ΔSBD đều nên mặt cắt là ΔMKN đều.

- Ta có : MN // BD $\Rightarrow \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{MN}{BD} \Rightarrow MN = \dfrac{AI}{AO}.BD = \dfrac{2x}{a}.b$

Vậy : dt (ΔKMN) = $MN^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2x^2}{a^2}.\sqrt{3}$ ■

BT3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang có AB là đáy lớn, CD là đáy nhỏ. Mặt bên (SAB) là tam giác cân tại S. Gọi (α) là mặt phẳng di động song song mp (SAB), (α) cắt AD, BC, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh MNPQ là hình thang cân.

b) Chứng minh giao điểm của MQ và NP di động trên một đường thẳng cố định khi mp (α) di động.

a) Ta có : mp (SAB) // mp (α) nên mp (ABCD) cắt hai mặt phẳng này theo giao tuyến AB // MN (1)

mp (SCD) cắt hai mặt phẳng này theo giao tuyến CD // PQ (2)

Mà AB // DC nên PQ // MN.

Mặt phẳng (SAD) cắt (SAB) và mp (α) theo giao tuyến MQ // SA.

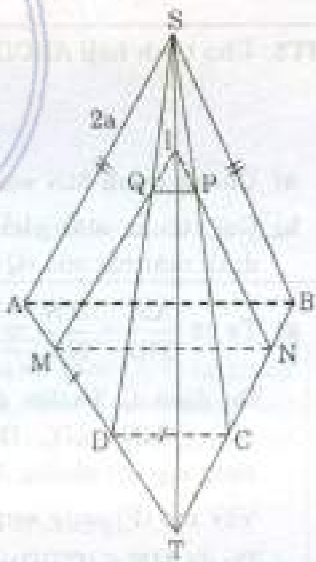
Mp (SBC) cắt mp (SAB) và mp (α) theo giao tuyến NP // SB.

Ta có : MQ // SA $\Rightarrow \dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{DM}{DA}$

MN // AB // CD $\Rightarrow \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{CN}{CB}$

NP // SB $\Rightarrow \dfrac{CN}{CB} = \dfrac{NP}{SB}$

Do đó : $\dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{NP}{SB}$



Mà SA = SB nên MQ = NP

Do đó tứ giác MQPN là hình thang cân.

b) Gọi T là giao điểm AD và BC.

Vậy ST = mp (SAD) ∩ mp (SBC).

I ∈ MQ ⇒ I ∈ mp (SAB)

I ∈ NP ⇒ I ∈ mp (SBC)

Vậy I di động trên giao tuyến ST ■

BT4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là tứ giác lồi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC.

a) Xác định mặt cắt của hình chóp với hai mặt phẳng lần lượt qua M và N song song mặt phẳng (SBD).

b) Gọi I, J là giao điểm hai mặt phẳng trên với AC. Chứng minh AC = 2IJ.

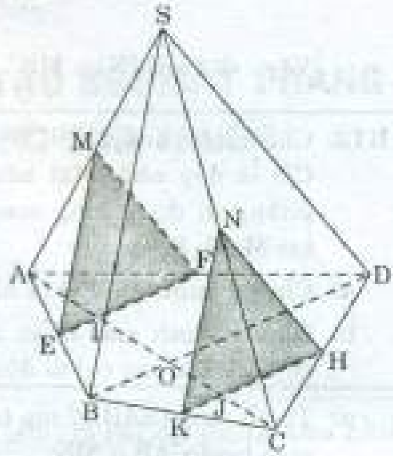
a) Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song mp (SBD).

Mp (SAB) cắt (P) và (SBD) theo giao tuyến ME và SB song song nhau.

Mp (ABCD) cắt (P) và (SBD) theo giao tuyến EF và BD song song nhau.

Vậy mặt cắt của (P) và hình chóp là ΔMEF.

Tương tự gọi (Q) là mặt phẳng qua N và song song mp (SBD) thì mặt cắt là ΔNKH có NK // SB, HK // BD.



b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của AC với EF và HK.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có ME là đường trung bình của ΔSAB ⇒ E là trung điểm của AB.

IE là đường trung bình của ΔABO ⇒ I là trung điểm của AO.

Tương tự K, J lần lượt là trung điểm của BC và OC.

Vậy $IJ = IO + OJ = \frac{OA}{2} + \frac{OC}{2} = \frac{AC}{2}$ ■

BT5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Lấy M trên AD, N trên D'C' sao cho

$$\frac{AM}{MD} = \frac{D'N}{NC'}$$

a) Chứng minh MN song song mặt phẳng (C'BD).

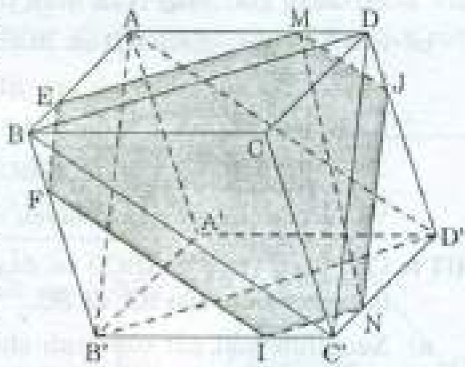
b) Gọi (Q) là mặt phẳng qua MN và song song mặt phẳng (C'BD). Xác định mặt cắt của (Q) và hình hộp.

a) Ta có $\frac{AM}{MD} = \frac{D'N}{NC'} \Rightarrow \frac{AM}{D'N} = \frac{MD}{NC'} = \frac{AM + MD}{D'N + NC'} = \frac{AD}{C'D'}$

Do định lí Thalès đảo, ba đường thẳng MN, AD', DC' cùng song song mp (P) nhưng AD' // BC'.

Vậy mp (P) song song (C'BD).

Do đó MN // (C'BD).



b) Mp (Q) // (C'BD), vậy (ABCD) cắt hai mặt phẳng này theo hai giao tuyến ME và BD song song nhau (E ∈ AB).

Tương tự (ABB'A') cắt hai mặt song song (Q) và (C'BD) theo giao tuyến EF // AB' (F ∈ BB').

Lập luận tương tự vẽ FI // BC' (I ∈ B'C').

Thiết diện của (Q) và hình lập phương là lục giác MEFINJ ■

BT6. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi O' là tâm hình bình hành A'B'C'D', K là trung điểm của CD, E là trung điểm của BO'.

a) Chứng minh điểm E thuộc mặt phẳng (ACB').

b) Xác định mặt cắt của hình hộp và mặt phẳng (α) qua K và song song (EAC).

a) Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.

Tứ giác B'O'OB là hình bình hành nên E là trung điểm của B'O.

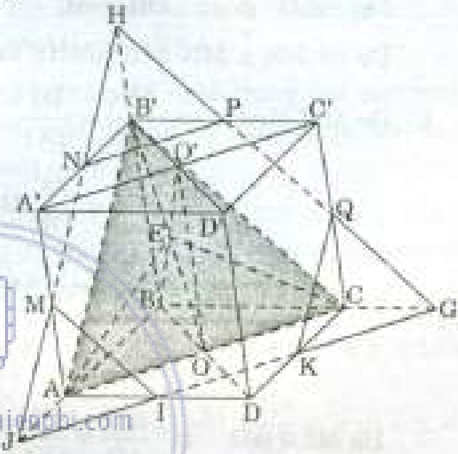
Mà B'O ⊂ (B'AC) ⇒ E ∈ (B'AC).

b) Do E ∈ (ACB') nên (EAC) ≡ (B'AC)

Mp (ABCD) cắt hai mặt phẳng song song (α) và (B'AC) theo hai giao tuyến AC // KI (I ∈ AD).

Trong mp (ABCD), AB cắt KI tại J.

Mp (A'B'BA) cắt hai mặt phẳng song song (α) và (B'AC) theo hai giao tuyến JMN // B'A (M ∈ AA', N ∈ A'B').



Trong mp (A'B'BA), MN cắt BB' tại H.

Mp (B'C'CB) cắt hai mặt phẳng song song (α) và (B'AC) theo hai giao tuyến B'C // HPQ (P ∈ B'C', Q ∈ CC').

Mặt cắt là lục giác KIMNPQ ■

BT7*. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O, E là trung điểm SB. Biết rằng ΔEAC đều, DB = 2AC = 2a. Lấy I trên đoạn OD với DI = x. Gọi (α) là mặt phẳng qua I và song song mp (ACE). Mp (α) cắt AD, CD, SC, SB, SA lần lượt tại M, N, P, Q, R.

a) Chứng minh ΔQPR đều và tứ giác MNPR là hình chữ nhật.

b) Tính diện tích ngũ giác MNPQR theo a và x. Tìm x sao cho diện tích này lớn nhất.

a) Ta có : mp (α) // mp (ACE) nên

- Mp (ABCD) cắt hai mặt phẳng theo hai giao tuyến MIN // AC (1)
- Mp (SBD) cắt hai mặt phẳng theo hai giao tuyến IQ // OE // SD (2)
- Mp (SAB) cắt hai mặt phẳng theo hai giao tuyến RQ // AE (3)

- Mp (SBC) cắt hai mặt phẳng này theo hai giao tuyến PQ // EC (4)
- Mp (SAC) cắt hai mặt phẳng này theo hai giao tuyến PR // AC (5)

Từ (3), (4) và (5) ⇒ ΔRQP đều.

Mặt khác : mp (α) chứa IQ // SD,

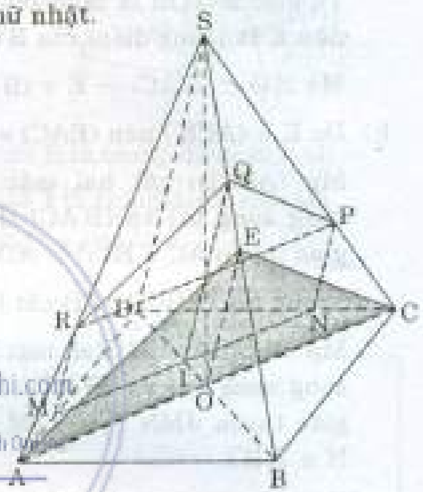
vậy (α) cắt mp (SAD) theo giao tuyến RM // SD (6)

và mp (SDC) theo giao tuyến PN // SD (7)

Từ (5), (6) và (7) ⇒ RMNP là hình bình hành.

Mà ΔEAC đều ⇒ OE ⊥ AC

Do đó MR ⊥ MN nên RMNP là hình chữ nhật.



b) Do MN // AC $\Rightarrow \dfrac{MN}{AC} = \dfrac{DI}{DO}$

$$\Rightarrow MN = \frac{AC}{OD}.DI = x$$

ΔAEC đều cạnh a ⇒ $OE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow SD = a\sqrt{3}$$

Do MI // AO $\Rightarrow \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{OI}{OD}$

Do MR // SD $\Rightarrow \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{MR}{SD}$

Vậy $\dfrac{OI}{OD} = \dfrac{MR}{SD} \Rightarrow MR = \dfrac{OI}{OD}.SD = \dfrac{a-x}{a}a\sqrt{3} = \sqrt{3}(a-x)$

Do đó : dt (RQPNM) = dt (ΔRPQ) + dt (RMNP)

$$= RP^2.\frac{\sqrt{3}}{4} + RM.MN = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3}x(a-x)$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 + \sqrt{3}xa = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(x^2 - \frac{4}{3}ax\right)$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[\left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 - \frac{4}{9}a^2\right]$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}a^2 \le \frac{\sqrt{3}}{3}a^2$$

Do đó : dt (RQPNM) max $= \dfrac{\sqrt{3}}{3}a^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}a$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, AB song song CD. Lấy M trên BC (M ≠ B và C).

a) Xác định mặt cắt của hình chóp và mặt phẳng qua M và song song mặt phẳng (SAB).

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với SD và SC. Chứng minh rằng giao điểm của NE và MF di động trên một đường thẳng cố định.

2. Cho hình chóp S.ABC. Gọi (α) là mặt phẳng di động song song với mặt phẳng (SAC), (α) cắt SA, SB, SC lần lượt tại M, N, K. Tìm tập hợp điểm chung của ba mặt phẳng (MBC), (NAC), (KAB).

3. Cho hình vuông ABCD và tam giác SAB đều nằm trong hai mặt phẳng. Lấy M di động trên AB. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song mặt phẳng (SBC). Tìm mặt cắt của (α) và hình chóp.

4. Cho hình chóp tứ diện đều SABC cạnh a. Gọi I là trung điểm của AB. Lấy M di động trên AI với AM = x. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song mặt phẳng (SIC). Tính chu vi thiết diện của (α) và tứ diện.

5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là AB và CD với $\frac{CD}{AB} = p$ $(0 < p < 1)$. Gọi S_0 là diện tích tam giác SAB. Lấy M trên AD với $\frac{MD}{AD} = x$ $(0 < x < 1)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song mặt phẳng (SAB).

6. Cho hình thang ABCD vuông tại A và D với AD = DC = a, AB = 2a. Gọi S là điểm nằm ngoài mặt phẳng (ABCD) sao cho tam giác SAB vuông cân tại A. Lấy M trên AD sao cho AM = x $(0 < x < a)$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với mặt phẳng (SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a) Tính chu vi và diện tích thiết diện MNPQ theo a và x.

b) Tìm tập hợp giao điểm I của MP và NQ khi x thay đổi.

Chủ đề 11

HÌNH LĂNG TRỤ

Định nghĩa : ***Hình lăng trụ là một khối đa diện có hai đáy là hai đa giác có các cạnh song song và bằng nhau, các cạnh bên song song và bằng nhau.***

Hình hộp là một lăng trụ có đáy là hình bình hành. Bốn đường chéo của hình hộp đồng quy tại trung điểm mỗi đường. Điểm đó gọi là tâm của hình hộp.

BT1. Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm ΔABC, $\Delta A'B'C'$, $\Delta ACC'$. Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm BC, B'C', AC. Chứng minh :

a) Mp (IJK) song song mp (BB'C'C). b) Mp (A'JK) song song mp (AIB').

a) Gọi H, N, O lần lượt là trung điểm AC, BC', AC'.

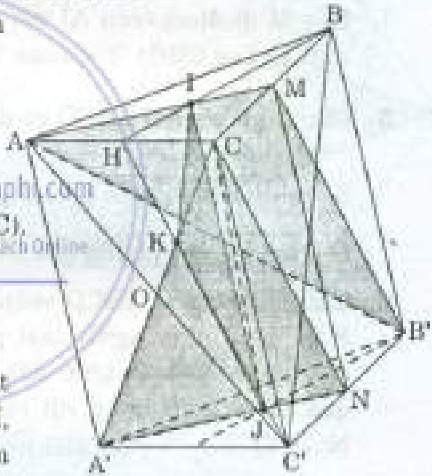
Ta có tứ giác IMNJ là hình bình hành

$\Rightarrow$ IJ // MN (1)

Ta có : $\dfrac{HI}{HB} = \dfrac{HK}{HC'} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ IK // BC' (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ mp (IKJ) // mp (BB'C'C).



b) Do $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ nên AM // A'N

Do $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NB'}$ nên CN // MB'

Mà CN và A'N là hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mp (A'JK) và AM, MB' là hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mp (AIB').

Do đó mp (A'JK) // mp (AIB') ■

BT2. Cho lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi G và G' là trọng tâm ΔABC và $\Delta A'B'C'$. Chứng minh các mp (ABC'), mp (BCA'), mp (ACB') cắt nhau tại O trên GG'. Tính $\dfrac{OG}{OG'}$.

- Gọi I và I' lần lượt là trung điểm BC và B'C'.

Gọi H, J, K lần lượt là tâm các hình bình hành ABB'A', BCC'B', ACC'A'.

Ta có : mp (ABC') $\cap$ mp (BCA') = BK

mp (ABC') $\cap$ mp (ACB') = AJ

Trong mp (ABC'), AJ cắt BK tại O là trọng tâm $\Delta ABC'$

Vậy ba mặt phẳng (ABC'), (BCA'), (ACB') cắt nhau tại O.

- Ta có G và O là trọng tâm ΔABC và $\Delta ABC'$

$$\Rightarrow \frac{AG}{AI} = \frac{AO}{AJ} = \frac{2}{3}$$

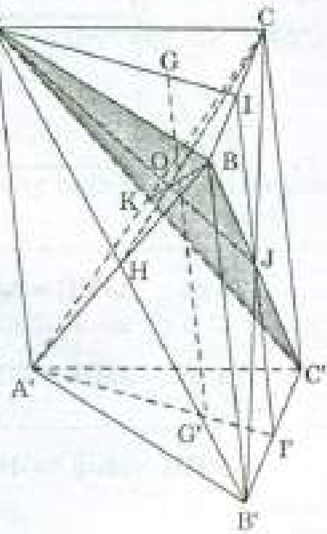
$\Rightarrow OG \,//\, II'$ (1)

Ta có GII'G' là hình bình hành

$\Rightarrow GG' \,//\, II'$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ O, G, G' thẳng hàng

$\Rightarrow O \in GG'$.



- $G'G \,//\, IJ \Rightarrow \frac{OG}{IJ} = \frac{AG}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow OG = \frac{2}{3}IJ = \frac{II'}{3}$

Mà $GG' = II' \Rightarrow OG = \frac{1}{3}GG'$.

Do đó : $\frac{OG}{OG'} = \frac{1}{2}$ ■

BT3. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Các mặt bên ABB'A', ACC'A' là hình vuông có tâm lần lượt là I và J. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

a) Chứng minh IJ song song mp (ABC).

b) Xác định thiết diện của lăng trụ với mp (IJO). Tính diện tích thiết diện đó theo a.

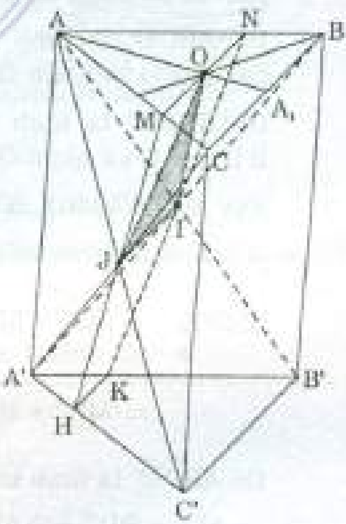
a) $\Delta AB'C'$ có $IJ \,//\, B'C'$ mà $B'C' \,//\, BC \Rightarrow IJ \,//\, BC$

Vậy IJ // mp (ABC).

b) • Ta có : IJ // mp (ABC)

mà mp (OIJ) $\cap$ mp (ABC) = MN

thì MN // IJ // BC.



- Trên mp (AA'C'C), MJ cắt A'C' tại H.
- Do $IJ \,//\, B'C' \Rightarrow IJ \,//\,$ mp (A'B'C')

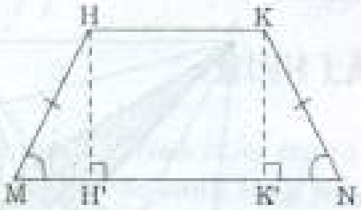
Vậy mp (OIJ) $\cap$ mp (A'B'C') = HK // B'C'.

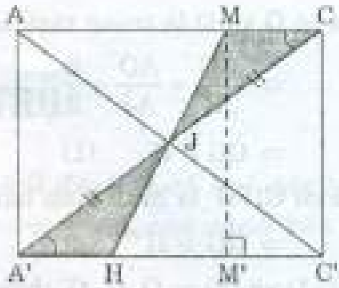
Mặt cắt là tứ giác MNKH có MN // HK.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ta có A'A cạnh chung} \\ AM = AN \\ AH = AK \end{array}\right\} \Rightarrow MH = NK$$

Vậy MNKH là hình thang cân.

- Ta có : $\frac{AO}{AA_1} = \frac{MN}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2}{3}a$





Ta có : $\Delta JMC = \Delta JA'H \Rightarrow A'H = \dfrac{a}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{a}{3}$

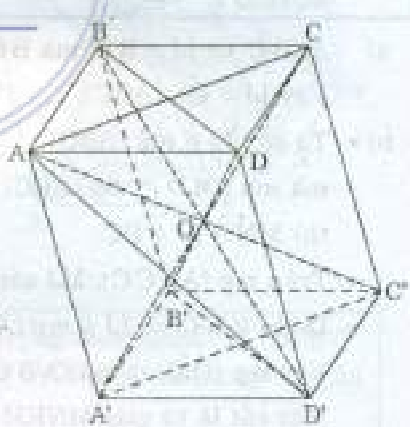
Ta có : $2MH' = MN - HK = \dfrac{a}{3} \Rightarrow MH' = \dfrac{a}{6}$

$\Delta MHH'$ vuông $\Rightarrow HM^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{9} = \dfrac{10a^2}{9}$

$\Delta MHH'$ vuông $\Rightarrow HH'^2 = \dfrac{10a^2}{9} - \dfrac{a^2}{36} = \dfrac{39a^2}{36}$

Vậy : $dt(HKNM) = \dfrac{1}{2}(HK + MN).HH' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a}{3} + \dfrac{a}{3}\right)\dfrac{a\sqrt{39}}{6} = \dfrac{a^2}{12}\sqrt{39}$ ■

BT4. Chứng minh trong hình hộp các đường chéo đồng quy tại O và tổng các bình phương của bốn đường chéo bằng tổng bình phương các cạnh.



- Do ACC'A' là hình bình hành nên AC' cắt CA' tại trung điểm O mỗi đường.

  Do ABC'D' là hình bình hành nên BD' qua O và nhận O là trung điểm.

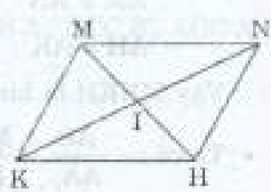
  Do BDD'B' là hình bình hành nên B'D qua O và nhận O là trung điểm.

  Vậy AC', A'C, BD', B'D đồng quy tại O.

- Giả sử hình bình hành MNHK có tâm I.

$\Delta MNK \Rightarrow MK^2 + MN^2 = 2MI^2 + \dfrac{NK^2}{2}$

$\Rightarrow MK^2 + MN^2 = \dfrac{MH^2 + NK^2}{2}$



Do ABC'D' là hình bình hành nên

$AC'^2 + BD'^2 = 2(AB^2 + AD'^2)$ (1)

Do CDA'B' là hình bình hành nên

$A'C^2 + DB'^2 = 2(CD^2 + DA'^2)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC'^2 + BD'^2 + A'C^2 + DB'^2 = 2(AB^2 + CD^2 + AD'^2 + DA'^2)$

Mặt khác ADD'A' là hình bình hành nên : $AD'^2 + DA'^2 = 2(AD^2 + AA'^2)$

Đặt AB = a, AD = b, AA' = c

Do đó : $AC'^2 + BD'^2 + A'C^2 + DB'^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$

Vậy tổng bình phương bốn đường chéo bằng tổng bình phương 12 cạnh của hình hộp ■

BT5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

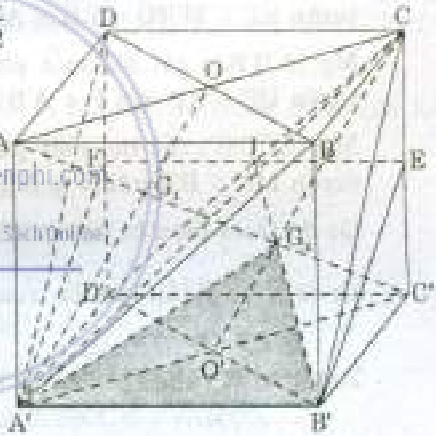
a) Chứng minh AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của ΔBDA' và ΔB'D'C. Chứng minh G_1, G_2 chia AC' làm ba phần bằng nhau.

b) Xác định thiết diện của mp $(A'B'G_2)$ và hình hộp.

a) Gọi O, O' là tâm của hình bình hành ABCD và A'B'C'D'.

Trên mp (ACC'A'), AC' cắt OA' và O'C tại G_1, G_2.

Ta có : OA // A'C' $\Rightarrow \dfrac{G_1O}{G_1A'} = \dfrac{OA}{A'C'} = \dfrac{1}{2}$



Mà A'O là trung tuyến của ΔA'BD nên G_1 là trọng tâm ΔA'BD.

Tương tự G_2 là trọng tâm ΔCB'D'.

• Ta có : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{A'O'} \Rightarrow OA' // O'C$

Vậy OG_1 là đường trung bình của $\Delta ACG_2 \Rightarrow AG_1 = G_1G_2$.

Tương tự $O'G_2$ là đường trung bình của $\Delta G_1C'A' \Rightarrow G_1G_2 = G_2C'$.

Vậy $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$.

b) Trong mp (CB'D'), $B'G_2$ cắt CD' tại trung điểm I của CD'.

Mp $(A'B'G_2)$ chứa A'B' // C'D', vậy cắt mp (C'D'DC) theo giao tuyến EF qua I và EF // C'D' // A'B'.

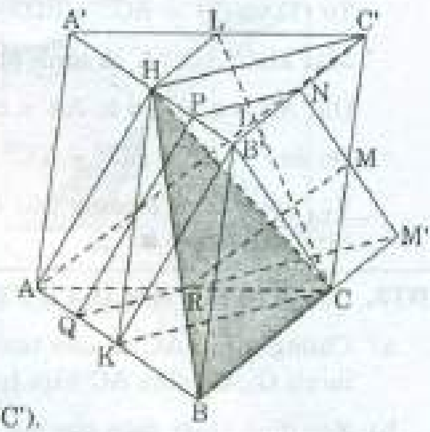
Ta có $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{B'A'}$ nên mặt cắt A'B'EF là hình bình hành ■

BT6. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có H là trung điểm A'B'.

a) Chứng minh CB' song song mặt phẳng (AHC').

b) Tìm giao điểm của AC' và mặt phẳng (BCH).

c) Mặt phẳng (α) qua M là trung điểm của CC' song song AH và CB'. Xác định thiết diện và tỉ số mà các đỉnh của thiết diện chia các cạnh tương ứng của lăng trụ.



a) Gọi K là trung điểm của AB.

Ta có AH // B'K và HC' // KC

Vậy (AHC') // (B'KC).

Mà CB' ⊂ (B'KC) ⇒ CB' // (AHC').

b) Gọi L là trung điểm của A'C' thì HL // B'C' // BC. Vậy L ∈ (HBC).

Trong mp (ACC'A'), AC' cắt CL tại I thì I = AC' ∩ (HBC).

c) (α) // CB' mà CB' ⊂ (BCC'B')

⇒ (α) ∩ (BCC'B') = MN // CB' (N ∈ B'C').

Trong mp (B'C'CB), BC ∩ MN = M'.

Ta có AH // B'K ⇒ B'K // (α) mà B'C // (α) nên (α) // (B'KC).

Vậy (ABC) cắt hai mặt phẳng song song (α) và (B'KC) theo hai giao tuyến KC // M'RQ với R ∈ AC, Q ∈ AB.

Mp (A'B'BA) cắt hai mặt phẳng song song (α) và (B'KC) theo hai giao tuyến QP // KB' với P ∈ A'B'.

Mp (BCC'B') cắt hai mặt phẳng song song (α) và (B'KC) theo hai giao tuyến MN // B'C với N ∈ B'C'.

Do đó thiết diện là ngũ giác MNPQR.

Ta có N và P lần lượt là trung điểm của B'C' và HB'. Do đó $\frac{PA'}{PB'} = 3$.

Tương tự R và Q lần lượt là trung điểm của AC và AK. Do đó $\frac{QA}{QB} = \frac{1}{3}$.

Do đó M, N, P, Q, R chia theo thứ tự CC', B'C', A'B', AB, AC theo tỉ số 1, 1, 3, $\frac{1}{3}$, 1.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của BC và AI. Gọi (α) là mặt phẳng qua M song song với AC' và B'C. Tìm mặt cắt của (α) và lăng trụ. Tính tỉ số mà mặt cắt chia CC'.

2. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CC'. Gọi P là điểm đối xứng của C qua A. Xác định thiết diện của lăng trụ với :

a) Mặt phẳng (A'MN). Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AB.

b) Mặt phẳng (MNP). Tính tỉ số mà thiết diện chia AA' và AB.

3. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi I, J, K lần lượt là tâm các hình bình hành ACC'A', BCC'B', ABB'A'. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C'. Chứng minh :

a) IJ // (ABB'A'), JK // (ACC'A'), IK // (BCC'B').

b) AJ, CK, BI đồng quy tại O.

c) (IJK) // (ABC).

d) Ba điểm G, O, G' thẳng hàng.

4. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi P, Q, R, S lần lượt là tâm các mặt bên ABB'A', BCC'B', CDC'D', DAA'D.

a) Chứng minh RQ // (ABCD), (PQRS) // (ABCD).

b) Xác định thiết diện hình hộp và mặt phẳng (ARQ).

c) Gọi M là giao điểm của CC' và (ARQ). Tính tỉ số $\frac{MC}{MC'}$.

5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AB, DD', B'C'. Dựng thiết diện của hình lập phương với (EFC), (EFC'), (EFK).

6. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và CC'. Lấy P trên DD' sao cho DP = 2PD'.

a) Xác định mặt cắt của (MNP) và hình hộp.

b) Tìm giao tuyến của (MNP) và (ABCD).

7. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'.

a) Tìm giao tuyến d của (AB'C') và (A'BC).

b) Chứng minh d // (BB'C'C).

c) Gọi H là trung điểm của A'B'. Chứng minh CB' // (AHC').

8. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh (ABD') // (C'BD).

b) Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC'.

Chứng minh (ABCD) // (EFG).

c) Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, AD, A'D'.

Chứng minh (IJK) // (BDD'B').

9. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Lấy M, N, P lần lượt trên AB', AC', B'C sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{C'N}{AC'} = \frac{CP}{CB'} = x$.

a) Tìm x để (MNP) // (A'BC'). Biết tam giác A'BC' đều cạnh a. Tính diện tích mặt cắt bởi (MNP) và lăng trụ.

b) Tìm tập hợp trung điểm của NP khi x thay đổi.

10. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Trên AB, CC', C'D' và AA' lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho :

$$AM = C'N = C'P = AQ = x \ (0 \le x \le a).$$

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

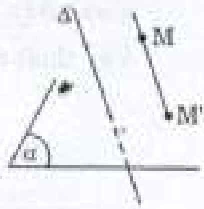
b) Chứng minh (MNPQ) luôn chứa một đường thẳng cố định. Tìm x để (MNPQ) // (A'BC').

c) Tìm thiết diện của (MNPQ) và hình lập phương.

Chủ đề 12

PHÉP CHIẾU SONG SONG

1. Định nghĩa : ***Cho mp (α), đường thẳng Δ không song song (α) và điểm M. Từ M vẽ đường thẳng cùng phương với Δ cắt mp (α) tại M' thì M' gọi là hình chiếu song song của M trên mp (α).***



Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu, phương Δ gọi là phương chiếu.

2. Tính chất : ***Phép chiếu song song :***

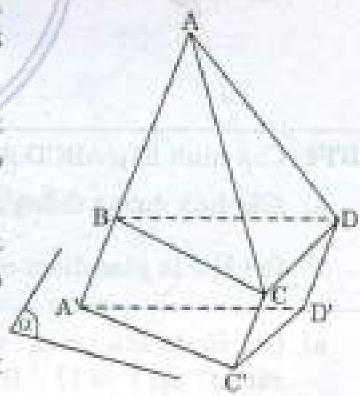
+ ***Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.***

+ ***Biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.***

+ ***Biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.***

BT1. Cho tứ diện ABCD và mặt phẳng (α) không song song AB. Xác định hình chiếu của tứ diện ABCD theo phương AB lên (α).

Gọi A' là giao điểm của AB và (α) thì hình chiếu của A và B lên (α) theo phương AB là A'.



Từ C vẽ đường thẳng song song với AB cắt (α) tại C'. Hình chiếu của C lên (α) theo phương AB là C'.

Từ D vẽ đường thẳng song song với AB cắt (α) tại D'. Hình chiếu của D lên (α) theo phương AB là D'.

Do đó hình chiếu của ABCD theo phương AB lên (α) là ΔA'C'D' ■

BT2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trên các cạnh AA', BC lần lượt lấy hai điểm M, N. Trong ΔA'C'D' lấy điểm P.

Xác định thiết diện của hình hộp và mp (MNP).

Gọi Q là hình chiếu song song của P theo phương AA' xuống mp (ABCD).

Trong mp (AA'PQ), gọi I là giao điểm PM và QA.

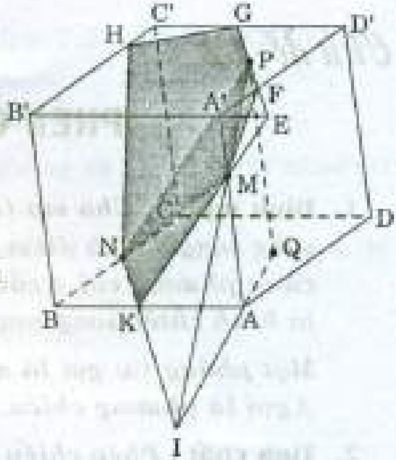
Trong mp (ABCD), IN cắt AB tại K.

Trong mp (ABB'A'), MK cắt A'B' tại E.

Trong mp (A'B'C'D'), PE cắt A'D' và C'D' tại F và G.

Mp (MNP) cắt hai mặt phẳng song song (AA'D'D) và (BB'C'C) theo hai giao tuyến song song MF và HN.

Vậy thiết diện là lục giác NKMFGH ■



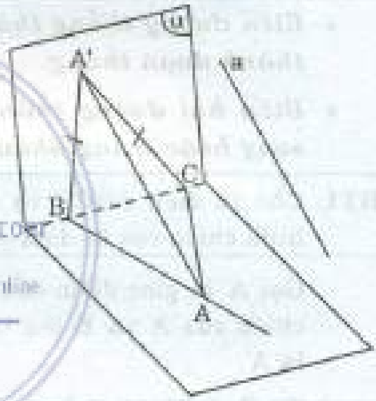
BT3. Cho ΔABC. Gọi ΔA'B'C' là hình chiếu của ΔABC lên mp (α) theo phương chiếu a. Xác định (α) và a sao cho ΔA'B'C' cân.

Gọi (α) là mặt phẳng cắt mp (ABC) theo giao tuyến BC.

Trong mp (α) vẽ ΔA'BC cân tại A'.

Gọi a là đường thẳng song song AA'.

Phép chiếu theo phương a xuống mp (α) biến ΔABC thành ΔA'BC cân tại A' ■



BT4. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

a) Xác định đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng AC', BA' và song song B'D'.

b) Gọi I, J là giao điểm của Δ với AC' và BA'. Tính $\frac{AI}{AC'}$.

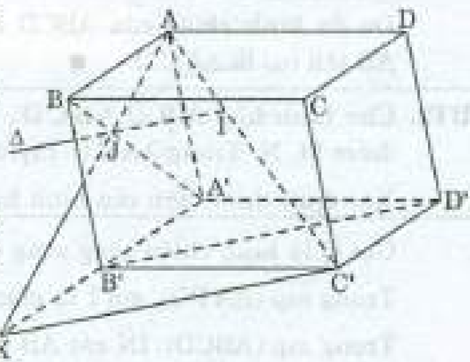
a) Giả sử đã tồn tại Δ cắt BA' tại J, cắt AC' tại I và IJ // B'D'.

Xét phép chiếu theo phương B'D' lên mp (ABB'A').

Vẽ C'K // B'D' (K ∈ A'B')

Phép chiếu này biến 3 điểm thẳng hàng A, I, C' lần lượt thành 3 điểm thẳng hàng A, J, K.

Do đó ta :



– Từ C' vẽ đường song song B'D' cắt A'B' tại K.

– Nối AK cắt A'B tại J.

– Từ J vẽ đường song song C'K cắt AC' tại I.

b) Ta có KC'D'B' là hình bình hành ⇒ C'D' = KB' = A'B'

Do IJ // KC' nên $\frac{AI}{AC'} = \frac{AJ}{AK}$

Mà AB // A'B' ⇒ $\frac{AJ}{JK} = \frac{AB}{A'K} = \frac{1}{2}$ ⇒ JK = 2AJ

Vậy $\frac{AI}{AC'} = \frac{AJ}{AK} = \frac{1}{3}$ ■

BT5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC'.

a) Xác định đường thẳng Δ qua M cắt AN và A'B tại I và J.

b) Tính tỉ số $\frac{IM}{IJ}$.

a) Giả sử đã dựng được đường thẳng Δ cắt AN tại I, cắt A'B tại J.

Xét phép chiếu song song theo phương D'C lên mp (ABCD).

Ba điểm J, I, M có hình chiếu là B, I', M.

Do I, J, M thẳng hàng (cùng thuộc Δ) nên B, I', M thẳng hàng.

Gọi N' là hình chiếu của N

⇒ AN' là hình chiếu của AN.

Do I ∈ AN ⇒ I' ∈ AN'.

Vậy I' = BM ∩ AN'.

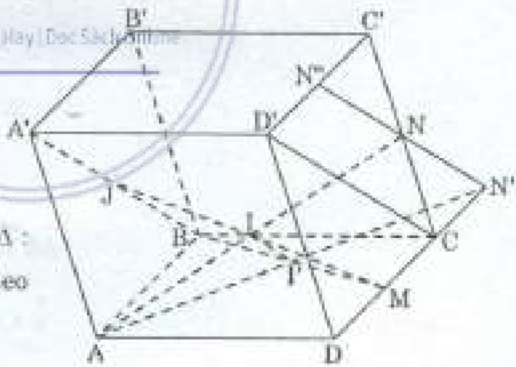
Do đó cách dựng đường thẳng Δ :

– Dựng N' là hình chiếu của N theo phương D'C lên (ABCD).

– Dựng I' = AN' ∩ BM.

– Trong mp (ANN') dựng II' // NN' với I ∈ AN.

– Dựng MI, đó là đường thẳng Δ cần tìm.



b) Trong mp (C'D'DC), NN' cắt C'D' tại N''.

Tứ giác D'N''N'C là hình bình hành ⇒ CN' = D'N'' = $\frac{C'D'}{2}$

Vậy MC = CN' ⇒ MN' = AB = CD. Suy ra I' là trung điểm của BM.

Mặt khác II' // NN' // A'B.

Vậy II' là đường trung bình của ΔMBJ ⇒ $\frac{IM}{IJ} = 1$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tam giác ABC. Chọn mặt phẳng (P) và phương chiếu d để hình chiếu của tam giác ABC lên (P) là :

a) Tam giác cân. b) Tam giác đều. c) Tam giác vuông.

2. Cho tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác A'B'C'. Chứng minh trọng tâm tam giác ABC có hình chiếu song song là trọng tâm tam giác A'B'C'.

3. Vẽ hình chiếu của hình hộp ABCD.A'B'C'D' lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu AC' với AC' không song song (P).

4. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Lấy điểm I trên B'D và điểm J trên AC sao cho IJ // BC'. Tính $\frac{ID}{IB'}$.

5. Xác định mặt cắt của hình hộp ABCD.A'B'C'D' với mặt phẳng (MNK) khi M ∈ (ABCD), N ∈ (ABB'A'), K ∈ (ADD'A').

Chủ đề 13

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Cho các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trong không gian và $l, k \in R$.

1. Cộng vectơ

Lấy O tùy ý trong không gian.

Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ *thì* $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$

Quy tắc ba điểm : Cho ba điểm bất kì M, N, K thì $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN}$

2. Trừ vectơ

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Quy tắc ba điểm : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KN} - \overrightarrow{KM}$

3. Tích vectơ

Tích vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ kí hiệu $k\vec{a}$:

+ *Cùng hướng $\vec{a}$ nếu $k > 0$.*

+ *Ngược hướng $\vec{a}$ nếu $k < 0$.*

+ $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$

Tính chất : $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

$$(l + k)\vec{a} = l\vec{a} + k\vec{a}$$

Hệ quả : Nếu I là trung điểm của AB, O tùy ý thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$

4. Tích vô hướng của hai vectơ

• *Định nghĩa :* $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

Hệ quả : $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

$$\vec{a}^2 = \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

• *Tính chất :* $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{b}$

$$\vec{a}(k\vec{b}) = (k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$$

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

5. Định nghĩa : *Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song hoặc nằm trên một mặt phẳng.*

6. Các định lí

a) Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng } \Leftrightarrow \exists!\, m, n \in R : \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

b) Nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thì mọi vectơ đều được biểu diễn dưới dạng $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + k\vec{c}$ với m, n, k xác định duy nhất.

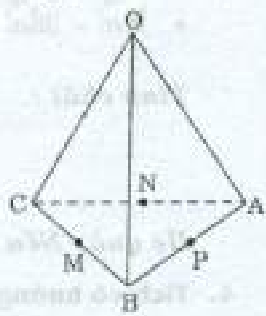
BT1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của ΔABC và O là điểm bất kì trong không gian.

Chứng minh : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Do M là trung điểm BC ta có :

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC})$$

$$= 2\overrightarrow{OM} + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{OM} \quad (1)$$



Tương tự : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OP} \quad (2)$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{ON} \quad (3)$

Lấy (1) + (2) + (3) ta được :

$$2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{ON})$$

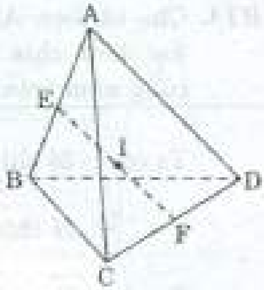
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{ON} \quad \blacksquare$$

BT2. Cho tứ diện ABCD và mặt phẳng (P). Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB và CD. Gọi I là trung điểm EF.

a) Chứng minh : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

b) Trên mặt phẳng (P) tìm điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

a) Do E là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\,\overrightarrow{IE}$



Do F là trung điểm CD nên $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\,\overrightarrow{IF}$

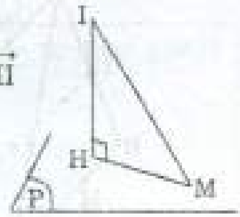
Vậy : $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) = 2\,\overrightarrow{IE} + 2\,\overrightarrow{IF}$

$= 2(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF})$

$= \vec{0}$ (do I trung điểm EF).

b) Ta có : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{MF}$

$= 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) = 4\,\overrightarrow{MI}$



Do đó : $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |4\,\overrightarrow{MI}| = 4MI$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) ta có $IM \geq IH$.

Vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ ngắn nhất $\Leftrightarrow$ MI ngắn nhất $\Leftrightarrow$ M ≡ H ■

BT3. Cho ba điểm A, B, C cố định trên mặt phẳng (α) và M di động trong không gian.

a) Xác định điểm I sao cho $3\,\overrightarrow{IA} - 2\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Cho điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = 3\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Chứng minh đường thẳng MN luôn qua một điểm cố định.

a) Ta có : $3\,\overrightarrow{IA} - 2\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{IA} - 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BE}$ (với E là trung điểm AC)

Vậy I là điểm cố định sao cho $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BE}$

b) Ta có : $\overrightarrow{MN} = 3\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\,\overrightarrow{MI} + (3\,\overrightarrow{IA} - 2\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\,\overrightarrow{MI}$

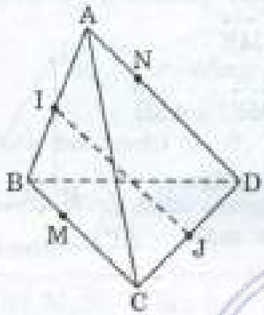
Do đó ba điểm M, N, I thẳng hàng nên đường thẳng MN luôn qua điểm I cố định ■

BT4. Cho tứ diện ABCD có I và J là trung điểm AB và CD. Gọi M và N là hai điểm chia đoạn BC và AD theo tỉ số k. Chứng minh I, J, M và N cùng nằm trên mặt phẳng.

Ta có : M chia đoạn BC theo tỉ số k $\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$

N chia đoạn AD theo tỉ số k $\Leftrightarrow \overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{ND}$

Ta có : $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB})$



$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})$

$= \frac{1}{2}(k\overrightarrow{ND} - \overrightarrow{ND} + k\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC})$

$= \frac{k-1}{2}(\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})$

$= \frac{k-1}{2}(\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{MJ})$

Do đó $\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JN}, \overrightarrow{JM}$ đồng phẳng $\Rightarrow$ J, I, M, N cùng thuộc một mặt phẳng ■

BT5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm CD và DD'. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm tứ diện A'D'MN và BCC'D'. Chứng minh GG' song song mp (ABB'A').

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$

Ta có : G trọng tâm tứ diện A'D'MN $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$

Do đó : $4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G}) + (\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'G}) + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG}) + (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NG})$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG} = \vec{c} + (\vec{b} + \vec{c}) + \left(\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}\right) + \left(\vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}\right) \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG} = 3\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}$

Tương tự : $4\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG'} = \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c})$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG'} = 3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

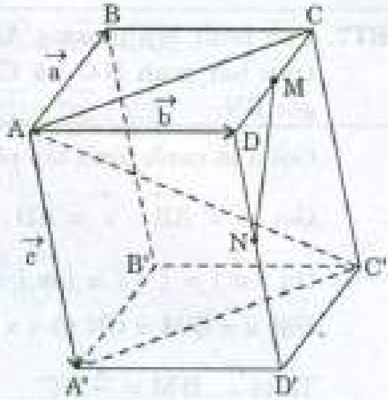
Do đó : $4(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AG'}) = -\frac{5}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{G'G} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{G'G}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}$ đồng phẳng.

Mặt khác G ∉ mp (ABB'A').

Do đó GG' // mp (ABB'A') ■



BT6. Cho tứ diện ABCD. Gọi G và G_1 lần lượt là trọng tâm tứ diện ABCD và ΔBCD.

a) Chứng minh : $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$.

b) Cho điểm M di động sao cho

$$3|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$$

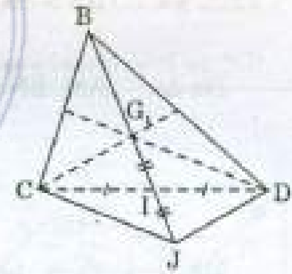
Chứng minh $MG = MG_1$.

a) Gọi I là trung điểm CD, J là điểm đối xứng của G_1 qua I.

Tứ giác G_1CJD là hình bình hành nên

$\overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \overrightarrow{G_1J}$

Do đó : $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1J} = \vec{0}$



b) Ta có : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

$= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD})$

$= 4\overrightarrow{MG}$ (do $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$)

Ta có : $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

$= (\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1B}) + (\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1C}) + (\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1D})$

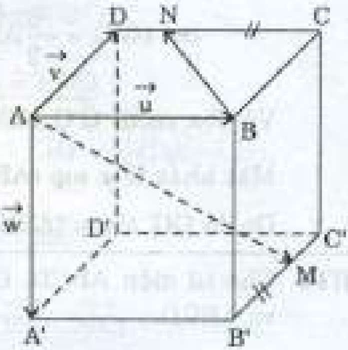
$= 3\overrightarrow{MG_1}$ (do kết quả câu a)

Do đó : $3|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$

$\Leftrightarrow 12|\overrightarrow{MG}| = 12|\overrightarrow{MG_1}| \Leftrightarrow MG = MG_1$ ■

BT7. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Lấy hai điểm M và N lần lượt trên hai cạnh B'C' và CD sao cho B'M = CN. Chứng minh AM vuông góc BN.

Gọi a là cạnh hình lập phương.



Gọi $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AA'}$

thì $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = a$

Đặt $x = B'M = CN$ $(0 \le x \le a)$

Ta có : $B'M = \dfrac{x}{a}B'C'$

và M nằm giữa hai điểm B' và C' nên

$$\overrightarrow{B'M} = \frac{x}{a}\overrightarrow{B'C'} = \frac{x}{a}.\vec{v}$$

Tương tự : $\overrightarrow{CN} = \dfrac{x}{a}.\overrightarrow{CD} = -\dfrac{x}{a}.\vec{u}$

Vậy : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'M} = \vec{w} + \vec{u} + \dfrac{x}{a}\vec{v}$

và $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \vec{v} - \dfrac{x}{a}\vec{u}$

Do đó : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN} = \left(\vec{w} + \vec{u} + \dfrac{x}{a}\vec{v}\right).\left(\vec{v} - \dfrac{x}{a}\vec{u}\right)$

$$= \vec{w}.\vec{v} - \frac{x}{a}\vec{w}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} - \frac{x}{a}\vec{u}^2 + \frac{x}{a}\vec{v}^2 - \frac{x^2}{a^2}\vec{v}.\vec{u}$$

Mà $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{u}$ và $\vec{w} \perp \vec{v}$ nên :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN} = -\frac{x}{a}|\vec{u}|^2 + \frac{x}{a}|\vec{v}|^2 = -xa + xa = 0$$

Do đó $AM \perp BN$ ■

BT8. Cho bốn điểm A, B, C, D tùy ý trong không gian. Chứng minh :

a) $AB \perp CD$ khi và chỉ khi $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

b) Nếu $AB \perp CD$ và $AD \perp BC$ thì $AC \perp BD$.

a) Ta có : $AC^2 + BD^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})^2 + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2$

$$= \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$$

$$= AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{DC}^2 + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC}$$

$$= AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{DC}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$$

$$= AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB})$$

$$= AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$$

Do $\quad AB \perp CD \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$

nên $\quad AB \perp CD \quad \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$

b) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

$$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$$

$= 0$ (đây là hệ thức Euler) $\quad (*)$

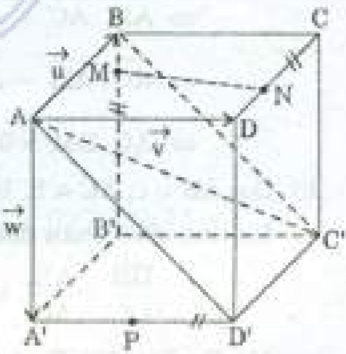
Do đó $AB \perp CD$ và $AD \perp BC$ thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

Từ $(*) \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \quad \Rightarrow AC \perp DB$ ■

BT9. Cho ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương cạnh có độ dài 1. Trên BB', CD, A'D' lấy M, N, P sao cho B'M = CN = D'P = a (0 < a < 1). Chứng minh :

a) $\overrightarrow{MN} = -a\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + (a-1)\overrightarrow{AA'}$ $\qquad$ b) AC' vuông góc với MN và NP.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{w}$



a) Ta có : $\quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$

Ta có : $\quad \dfrac{MB}{BB'} = \dfrac{1-a}{1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MB} = (1-a)\overrightarrow{B'B} = (a-1)\overrightarrow{AA'}$

và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

Ta có : $\quad \dfrac{CN}{CD} = \dfrac{a}{1} \Rightarrow \overrightarrow{CN} = a\,\overrightarrow{CD} = -a\,\overrightarrow{AB}$

Do đó : $\quad \overrightarrow{MN} = (a-1)\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} - a\,\overrightarrow{AB}$.

b) Ta có : $\quad \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

Mà $\quad \overrightarrow{MN} = (a-1)\vec{w} + \vec{v} - a\,\vec{u}$

Do đó : $\quad \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}).[(a-1)\vec{w} + \vec{v} - a\,\vec{u}]$

$$= (a-1)\vec{u}.\vec{w} + \vec{u}.\vec{v} - a|\vec{u}|^2 + (a-1)\vec{v}.\vec{w} +$$

$$+ |\vec{v}|^2 - a\vec{u}.\vec{v} + (a-1)|\vec{w}|^2 + \vec{w}.\vec{v} - a\vec{u}.\vec{v}$$

$$= -a + 1 + (a-1) = 0 \quad (1)$$

do $\vec{u}.\vec{w} = 0$, $\vec{u}.\vec{v} = 0$, $\vec{w}.\vec{v} = 0$; $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$

Tương tự : $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'P} = (a-1)\vec{v} + \vec{w} - a\vec{u}$

nên $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{NP} = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}).[(a-1)\vec{v} + \vec{w} - a\vec{u}]$

$$= -a + (a-1) + 1 = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) : $AC' \perp MN$ và $AC' \perp NP$ ■

BT10. Cho ΔABC trong không gian.

a) Cho điểm M thỏa : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AM}$. Chứng minh BM vuông góc AC.

b) Gọi AD là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

a) Ta có : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AM}$

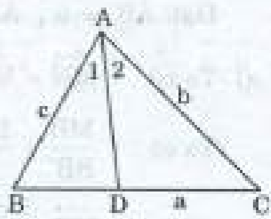
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BM.$



b) Gọi AB = c, AC = b, BC = a

Do tính chất chân đường phân giác trong nên :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow DB = \frac{c}{b}.DC$$

Mà D nằm giữa B và C nên :

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = -\frac{c}{b}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b}\overrightarrow{AC} = \left(1 + \frac{c}{b}\right)\overrightarrow{AD} = \frac{b+c}{b}\overrightarrow{AD}$$

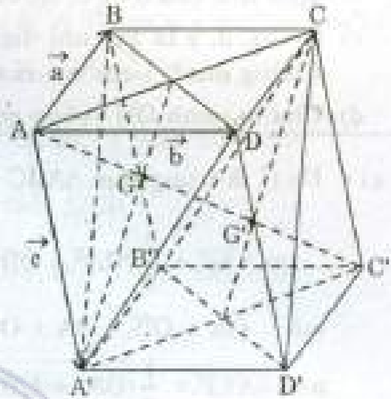
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC} \quad ■$$

BT11. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm ΔA'BD và ΔB'CD'.

a) Chứng minh bốn điểm A, C', G và G' thẳng hàng. Suy ra AG = GG' = G'C'.

b) Nếu hình hộp là hình lập phương. Chứng minh AC' vuông góc mp (A'BD).

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.



Do G trọng tâm ΔA'BD nên

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{c} + \vec{a} + \vec{b}) \quad (1)$$

Do G' trọng tâm ΔB'CD' nên

$$\overrightarrow{C'G'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D'})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{C'G'} = \frac{1}{3}(-\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}) \quad (2)$$

Mặt khác : $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'}) - \overrightarrow{AG}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}\left[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})\right] - \overrightarrow{AG}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{G'C'} = \overrightarrow{GG'}$

Vậy bốn điểm A, G, C', G' thẳng hàng và AG = G'C' = GG'.

b) Ta có : $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

và $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'} = \vec{a} - \vec{c}$

Do đó : $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{A'B} = \vec{a}^2 + \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} - \vec{c}.\vec{a} - \vec{c}.\vec{b} - \vec{c}^2$

$= |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2 = 0$ (do tính chất hình lập phương)

Vậy AC' ⊥ A'B. Tương tự : AC' ⊥ BD.

Do đó : AC' ⊥ mp (A'BD) ■

BT12. Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và OA = a, OB = b, OC = c. Gọi G và H lần lượt là trọng tâm và trực tâm của ΔABC.

a) Tính OG và diện tích ΔABC theo a, b, c ?

b) Chứng minh bình phương diện tích ΔABC bằng tổng bình phương các diện tích của ΔOBC, ΔOCA và ΔOAB.

c) Gọi α, β, γ là góc nhị diện các cạnh BC, CA và AB của tứ diện ABCD. Chứng minh : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

d) Chứng minh OH vuông góc với BC và AB. Tính OH.

a) • Do G là trọng tâm ΔABC nên $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$$\Rightarrow OG^2 = \frac{1}{9}(OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC})$$

mà $OA \perp OB$, $OA \perp OC$, $OB \perp OC$

nên $OG^2 = \frac{1}{9}(OA^2 + OB^2 + OC^2) \Rightarrow OG = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

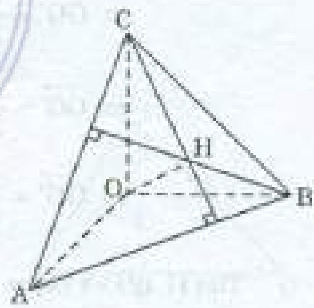
• Ta có : S = diện tích ΔABC $= \frac{1}{2}AC.AB.\sin\widehat{CAB}$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}AC^2.AB^2.\sin^2\widehat{CAB}$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}AC^2.AB^2(1 - \cos^2\widehat{CAB})$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}AC^2.AB^2\left[1 - \frac{(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB})^2}{AC^2.AB^2}\right]$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}\left[AC^2.AB^2 - (\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB})^2\right]$$



Mà $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$

$$= \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}^2 = a^2$$

Vậy $S^2 = \frac{1}{4}[(b^2 + a^2)(c^2 + a^2) - a^4] \Rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + b^2a^2 + a^2c^2}$.

b) Ta có : $S_1 = dt(\Delta OBC) = \frac{1}{2}OB.OC = \frac{1}{2}bc$

$$S_2 = dt(\Delta OAB) = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}ab$$

$$S_3 = dt(\Delta OAC) = \frac{1}{2}OA.OC = \frac{1}{2}ac$$

Do đó : $S^2 = \frac{1}{4}b^2c^2 + \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{4}a^2c^2 \Rightarrow S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

c) Ta có : $S_1 = dt\,(\Delta OBC) = S.\cos\alpha$

$S_2 = dt\,(\Delta OAB) = S.\cos\gamma$

$S_3 = dt\,(\Delta OAC) = S.\cos\beta$

Mà theo câu b : $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ nên $S^2 = S^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

d) Ta có : $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH})\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}$ (do H trực tâm ΔABC)

$= \overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$

Do đó : $OH \perp BC$

Tương tự : $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH})\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = 0$

Do đó : $OH \perp AB$

Ta có : $V_{OABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}abc$ mà $V_{OABC} = \frac{1}{3}OH.dt\,(\Delta ABC)$

Do đó : $OH = \frac{abc}{2S} = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + b^2a^2 + a^2c^2}}$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$

b) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$.

2. Cho hình chóp S.ABC. Lấy M trên SA sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$, lấy N trên BC sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KI}$, $\overrightarrow{FG}$ đồng phẳng.

3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi I là trung điểm của MN, P là điểm bất kì.

a) Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

b) Xác định E và F thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

c) Gọi G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$,

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$.

4. Cho hai hình vuông ABCD, ABC'D' nằm trong hai mặt phẳng khác nhau có tâm lần lượt là O, O'. Chứng minh $AB \perp OO'$ và CDC'D' là hình chữ nhật.

5. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh $AB \perp CD$, $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

6. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có P, R lần lượt là trung điểm của AB, A'D'. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD, CDD'C', A'B'C'D', ADD'A'. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

b) Hai tam giác PQR và P'Q'R' có cùng trọng tâm.

7. Cho tứ diện ABCD.

a) M là điểm di động trong không gian sao cho

$$|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$$

Tìm quỹ tích điểm M.

b) N là điểm di động trong không gian sao cho

$$|3\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}| = |\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NA}|$$

Tìm quỹ tích điểm N.

8. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có G là trọng tâm của tam giác AB'C.

a) Chứng minh $\overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$.

b) Gọi P, Q, R lần lượt là các điểm đối xứng của D' qua A, B', C. Chứng minh B là trọng tâm tứ diện PQRD'.

9. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Trên AC, BD lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BD} = k$ $(k > 0)$. Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IN}$ đồng phẳng.

10. Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên BC, CD, BD sao cho $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DB}$.

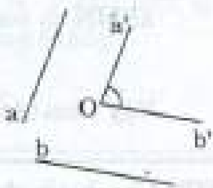
a) Chứng minh hai tứ diện ABCD và AMCP có cùng trọng tâm.

b) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của BN và CP, CP và DM, DM và CN. Chứng minh hai tứ diện ABCD và AIJK có cùng trọng tâm.

Chủ đề 14

TÍNH GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Phương pháp



Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b.

- ***Chọn điểm O nào đó trong không gian. Từ O dựng a' // a, b' // b.***
- ***Góc nhọn (hoặc vuông) tạo bởi a', b' là góc tạo bởi a và b.***
- ***Dùng định lí hàm cosin hoặc tỉ số lượng giác hoặc tích vô hướng của hai vectơ tính được góc của a', b'.***

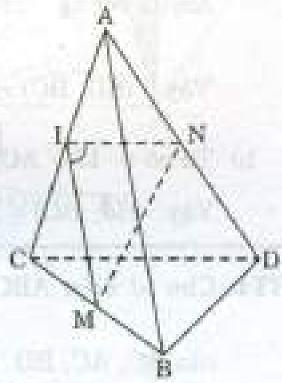
Lưu ý : *Đây là một dạng toán hay ra trong đề thi tuyển sinh vào Đại học.*

BT1. Cho tứ diện ABCD có AB = CD = 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD. Biết rằng $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc của AB và CD.

Gọi I là trung điểm AC.

Ta có : IM // AB và IN // CD.

Vậy $\widehat{MIN} = (\widehat{AB, CD})$



Do định lí hàm cosin trong ΔMIN, ta có :

$$MN^2 = IM^2 + IN^2 - 2IM.IN.\cos\widehat{MIN}$$

$$\Rightarrow 3a^2 = a^2 + a^2 - 2(a).(a).\cos\widehat{MIN}$$

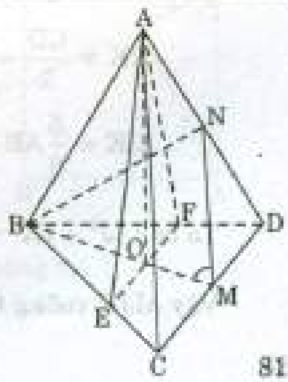
$$\Rightarrow \cos\widehat{MIN} = \frac{3a^2 - 2a^2}{-2a^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{MIN} = 60^0 \text{ (do } 0 \le (\widehat{AB, CD}) \le 90^0) \quad \blacksquare$$

BT2. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Gọi M trung điểm CD.

a) Chứng minh AO vuông góc CD. b) Tính cosin góc của AC và BM.

a) Từ O vẽ đường thẳng song song với CD cắt BC, BD tại E và F.



Hiển nhiên BE = BF và OE = OF

Ta có : ΔABE = ΔABF (c.g.c) ⇒ AE = AF

Vậy AO ⊥ EF

Ta có : $(\widehat{AO, CD}) = \widehat{AOE} = 90^0$.

b) Gọi N trung điểm AD.

Ta có : $MN \,//\, AC \Rightarrow \widehat{BMN} = (\widehat{AC, BM})$

Ta có : $BM = BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $MN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\Delta BMN \Rightarrow \cos\widehat{BMN} = \dfrac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2BM.MN} = \dfrac{MN}{2BM} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Vậy $\cos(\widehat{AC, MN}) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ ■

BT3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, SA vuông góc BC. Gọi I và J lần lượt là trung điểm SA và SC. Tính góc của các đường thẳng :

a) SD và BC b) IJ và BD.

a) Do AD // BC nên $(\widehat{SA, BC}) = \widehat{SAD} = 90^0$

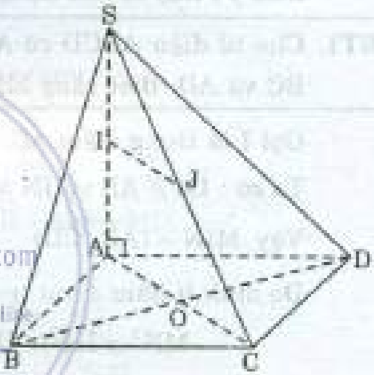
và $(\widehat{SD, BC}) = \widehat{SDA}$

ΔSAD vuông $\Rightarrow \tan\widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{3}$

Vậy $(\widehat{SD, BC}) = \dfrac{\pi}{3}$.

b) Ta có : IJ // AC

Vậy $(\widehat{IJ, BD}) = \widehat{AOB} = 90^0$ ■



BT4. Cho tứ diện ABCD có $CD = \dfrac{4}{3}AB$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, BD. Biết $JK = \dfrac{5}{6}AB$. Tính góc của CD và các đường thẳng IJ, AB.

Đặt AB = a. Ta có :

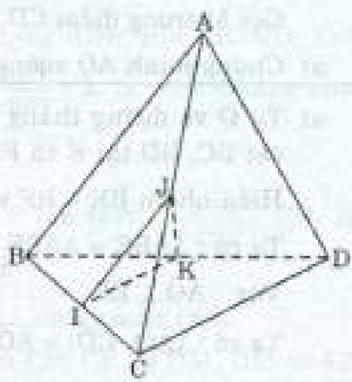
$IJ = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$

$IK = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{2a}{3}$

$JK = \dfrac{5}{6}AB = \dfrac{5a}{6}$

Ta có : $IJ^2 + IK^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{4a^2}{9} = \dfrac{25a^2}{36} = JK^2$

Vậy ΔIJK vuông tại I.



Ta có IK // CD. Vậy $(\widehat{IJ, CD}) = \widehat{JIK} = 90^0$

Tương tự IJ // AB, IK // CD $\Rightarrow (\widehat{AB, CD}) = \widehat{JIK} = 90^0$ ■

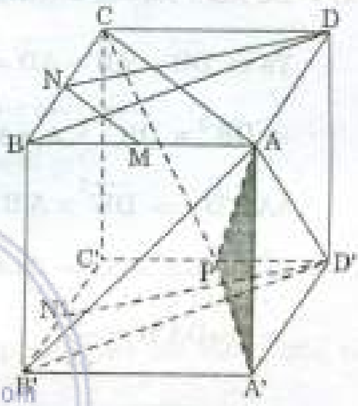
BT5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, C'D'. Tính góc của các cặp đường thẳng :

a) MN và C'D' b) BD và AD'

c) MN và AP d) A'P và DN.

a) Ta có AB // C'D'

Vậy $(\widehat{MN, C'D'}) = (\widehat{MN, AB}) = \widehat{BMN} = 45^0$



b) Ta có B'D' // BD

Vậy $(\widehat{BD, AD'}) = (\widehat{B'D', AD'}) = \widehat{AD'B'} = 60^0$

Do $\Delta AB'D'$ đều cạnh $a\sqrt{2}$.

c) Ta có MN // AC

Vậy $(\widehat{MN, AP}) = (\widehat{AC, AP}) = \widehat{CAP}$

Ta có $AC = a\sqrt{2}$

$\Delta CC'P$ vuông $\Rightarrow CP^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

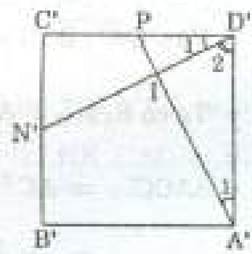
$\Delta APA'$ vuông tại A' $\Rightarrow AP^2 = A'A^2 + PA'^2 = A'A^2 + D'P^2 + A'D'^2$

$$= a^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{9a^2}{4}$$

$\Delta ACP \quad \Rightarrow CP^2 = AC^2 + AP^2 - 2AC.AP\cos\widehat{CAP}$

$$\Rightarrow \cos\widehat{CAP} = \frac{2a^2 + \frac{9a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2(a\sqrt{2})\left(\frac{3a}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy $(\widehat{MN, AP}) = 45^0$.



d) Gọi N' là trung điểm của B'C'.

Ta có ND // N'D'

Vậy $(\widehat{DN, A'P}) = (\widehat{N'D', A'P})$

Ta có $\Delta N'C'D' = \Delta PD'A' \Rightarrow \widehat{D'}_1 = \widehat{A'}_1$

Mà $\widehat{D'}_1 + \widehat{D'}_2 = 1v \Rightarrow \widehat{A'}_1 + \widehat{D'}_2 = 1v \Rightarrow \Delta ID'A'$ vuông tại I

Vậy $(\widehat{ND, A'P}) = \widehat{N'IA'} = 1v$ ■

BT6. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 60^0$, $\widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 120^0$.

a) Tính góc của AB với A'D và AC' với B'D.

b) Tính diện tích A'B'CD và ACC'A'.

c) Tính góc của AC' và các đường thẳng AB, AD, AA'.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{z}$ thì $\vec{x}.\vec{y} = \frac{a^2}{2}$, $\vec{x}.\vec{z} = -\frac{a^2}{2}$, $\vec{y}.\vec{z} = -\frac{a^2}{2}$

a) • Do AB // A'B' nên $(AB, A'D) = (A'B', A'D) = \widehat{DA'B'}$ hoặc $180^0 - \widehat{DA'B'}$

Ta có $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AD} = \vec{x} + \vec{z} - \vec{y}$

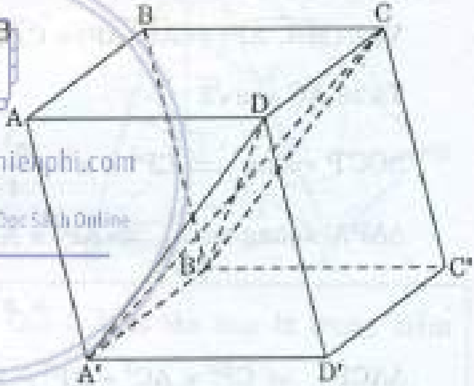
$\Rightarrow DB'^2 = \overrightarrow{DB'}^2 = \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2 + 2\vec{x}\vec{z} - 2\vec{x}\vec{y} - 2\vec{z}\vec{y} \Rightarrow \overrightarrow{DB'}^2 = 2a^2$

$\Delta A'B'D \Rightarrow \overrightarrow{DB'}^2 = A'B'^2 + A'D^2 - 2A'B'.A'D\cos\widehat{DA'B'}$

$\Rightarrow 2a^2 = a^2 + 3a^2 - 2a.a\sqrt{3}.\cos\widehat{DA'B'}$

$\Rightarrow \cos\widehat{DA'B'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy $(AB, A'D) = \varphi$ mà $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



• $\overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$

$\Rightarrow AC'^2 = \overrightarrow{AC'}^2 = 2a^2$

$\Delta AA'B' \Rightarrow AB'^2 = AA'^2 + A'B'^2 - 2AA'.A'B'\cos60^0 = a^2 + a^2 - 2a.a.\frac{1}{2} = a^2$

Tứ giác ADC'B' là hình bình hành mà AD = AB' = a và AC' = B'D = $a\sqrt{2}$ nên ADC'B' là hình vuông. Vậy AC' ⊥ B'D.

Vậy $(AC', B'D) = 90^0$.

b) • Ta có $S_{A'B'CD} = A'D.A'B'\sin\widehat{DA'B'} = a\sqrt{3}.a.\frac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}$.

• $\Delta ACC' \Rightarrow AC'^2 = AC^2 + CC'^2 - 2AC.CC'.\cos\widehat{ACC'}$

$$\Rightarrow \cos\widehat{ACC'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\widehat{ACC'} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Vậy $S_{ACC'A'} = AC.CC'.\sin\widehat{ACC'} = a\sqrt{3}.a.\frac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}$.

c) • Ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})\vec{x} = a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a^2$

Mà $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB} = AC'.AB\cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy $(\widehat{AC', AB}) = 45^\circ$.

• Ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AD} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})\vec{y} = \frac{a^2}{2} + a^2 - \frac{a^2}{2} = a^2$

$\Rightarrow a^2 = AC'.AD\cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD}) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy $(\widehat{AC', AD}) = 45^\circ$.

• Ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AA'} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})\vec{z} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + a^2 = 0$

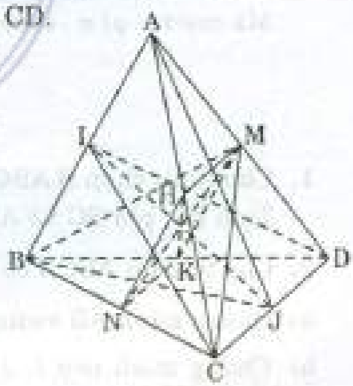
Vậy $(\widehat{AC', AA'}) = 90^\circ$ ■

BT7*. Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c.

a) Chứng minh đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.

b) Tính cos góc tạo bởi các cạnh đối của tứ diện.

a) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.



Ta có $\Delta ACD = \Delta BCD$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{ADC}$

$\Rightarrow \Delta BCJ = \Delta ADJ$ (c.g.c)

$\Rightarrow JA = JB$

$\Rightarrow \Delta JAB$ cân

$\Rightarrow IJ \perp AB$

Lập luận tương tự : $JC = JD \Rightarrow IJ \perp CD$

Tương tự : Nếu M, N là trung điểm của AD, BC thì $MN \perp AD$ và BC.

Nếu H, K là trung điểm của AC, BD thì $HK \perp AC$ và BD.

b) Ta có NH // AB và NK // CD

$\Delta ACD \Rightarrow AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD.CD\cos\widehat{ADC}$

$\Rightarrow \cos\widehat{ADC} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$\Delta MDC \Rightarrow MC^2 = MD^2 + CD^2 - 2MD.CD\cos\widehat{MDC}$

$$= \frac{c^2}{4} + a^2 - 2\left(\frac{c}{2}\right)(a).\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$= \frac{c^2}{4} + a^2 - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

ΔMNC vuông tại N $\Rightarrow NM^2 = MC^2 - NC^2$

$$\Rightarrow MN^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

$\Delta NHM \Rightarrow MN^2 = HN^2 + HM^2 - 2HN.HM\cos\widehat{NHM}$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - 2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\cos\widehat{NHM}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 - c^2}{2} = -\frac{a^2}{2}\cos\widehat{NHM} \Rightarrow \cos\widehat{NHM} = \frac{-b^2 + c^2}{a^2}$$

Do $(\widehat{AB, CD})$ nhọn $\Rightarrow \cos(\widehat{AB, CD}) = \dfrac{|c^2 - b^2|}{a^2}$

Tương tự cos hai góc còn lại là $\dfrac{|a^2 - c^2|}{b^2}$, $\dfrac{|a^2 - b^2|}{c^2}$ ■

Lưu ý : φ góc của hai đường thẳng phải là góc nhọn (quy ước) nên $\cos\varphi > 0$. Mà $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$ phải có giá trị tuyệt đối để $\cos(\widehat{AB, CD}) > 0$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = AB = AC = a và BC = $a\sqrt{2}$. Tính góc của SC và AB.

2. Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$.

a) Chứng minh AB vuông góc CD.

b) Chứng minh nếu I, J lần lượt là trung điểm của AD, CD thì IJ vuông góc AB và CD.

3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính góc của AC và DA'.

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, SA = AB và SA vuông góc BC.

a) Tính góc của SD và BC.

b) Gọi I, J lần lượt là các điểm trên SB, SD sao cho IJ // BD. Chứng minh góc của AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J.

5. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Tính góc của hai đường thẳng :

a) SA và BC b) SB và AC c) SC và AB.

6. Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Tính góc của hai đường thẳng :

a) AB và EG b) AF và EG c) AB và DH.

7. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, H, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD. Hãy tính góc của AB và CD trong các trường hợp sau :

a) Tứ giác IJHK là hình thoi có $HI = \sqrt{3}IJ$.

b) Tứ giác IJHK là hình chữ nhật.

8. Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung đáy BC và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.

a) Chứng minh AD vuông góc CB.

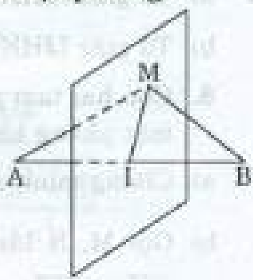
b) Gọi M, N lần lượt là các điểm trên AB và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. Tính góc của MN và BC.

9. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Trên DC và BB' lần lượt lấy M, N sao cho DM = CN = x (0 ≤ x ≤ a). Chứng minh AC' vuông góc MN.

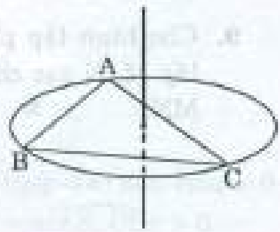
Chủ đề 15

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

- **Định nghĩa :** ***Đường thẳng gọi là vuông góc mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó.***
- **Định lí :** ***Đường thẳng vuông góc mặt phẳng khi và chỉ khi nó vuông góc hai đường thẳng cắt nhau nằm trên mặt phẳng.***
- **Định nghĩa :** ***Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc đoạn thẳng đó tại trung điểm của nó.***



- **Định lí :** ***Mặt phẳng trung trực của đoạn AB là quỹ tích các điểm cách đều hai đầu đoạn AB.***
- **Định nghĩa :** ***Trục đường tròn ngoại tiếp tam giác là đường thẳng vuông góc mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm đường tròn ngoại tiếp.***



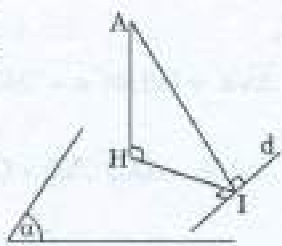
- **Định lí :** ***Trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC là quỹ tích các điểm cách đều ba điểm A, B, C.***
- **Định lí ba đường vuông góc**

  Nếu H là hình chiếu vuông góc của A lên (α) và $I \in (\alpha)$ với I khác H thì gọi AH là đường vuông góc và AI là đường xiên

  HI là hình chiếu vuông góc của AI lên (α)

  Lấy $d \subset (\alpha)$

  d vuông góc HI khi và chỉ khi d vuông góc AI



- **Hệ quả :** ***Hai đoạn xiên (từ cùng một điểm) bằng nhau khi và chỉ khi hình chiếu vuông góc của chúng bằng nhau.***

BT1. Lấy điểm I bất kì trong đường tròn (O; R). Vẽ dây CD qua I. Trên đường vuông góc mặt phẳng chứa (O; R) tại I lấy điểm S sao cho SO = R. Gọi E là điểm đối xứng của D qua O. Chứng minh :

a) ΔSDE vuông. b) SD vuông góc CE. c) ΔSCD vuông.

a) Ta có : $SO = R = \dfrac{DE}{2}$ mà SO là đường trung tuyến của ΔSDE.

Vậy ΔSDE vuông tại S.

b) Ta có : $\widehat{ECD} = 1v \Rightarrow EC \perp CD$

mà $EC \perp SI$ (do $SI \perp mp(ECD)$)

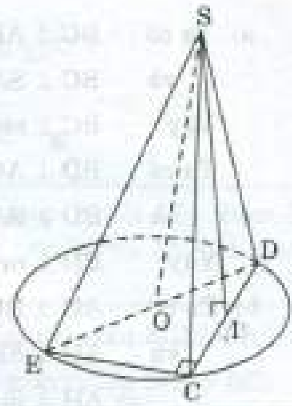
Vậy $EC \perp mp(SCD) \Rightarrow EC \perp SD$.

c) Ta có : $SD \perp SE$ (ΔSDE vuông tại S)

và $SD \perp EC$

Vậy $SD \perp mp(SEC) \Rightarrow SD \perp SC$

$\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại S ■



BT2. *Đề dự bị ĐH khối B 2002*

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc mặt phẳng (ABCD). SA = a, đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi E là trung điểm CD. Tính khoảng cách từ S đến đường thẳng BE.

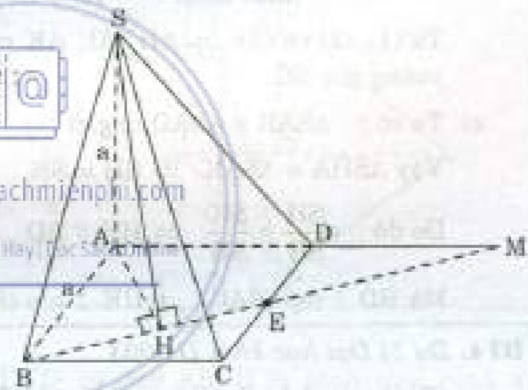
Vẽ $AH \perp BE$

Do định lí ba đường vuông góc

$SH \perp BE$

Trong mp (ABCD), BE cắt AD tại M.

ED là đường trung bình của ΔABM nên D là trung điểm của AM và AM = 2a.



ΔABM vuông

$$\Rightarrow AH = \frac{AB.AM}{BM} = \frac{a(2a)}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$\Delta SAH \text{ vuông } \Rightarrow SH^2 = SA^2 + AH^2 = a^2 + \frac{4a^2}{5} = \frac{9a^2}{5}$$

$$\text{Vậy } SH = d(S, BE) = \frac{3a}{\sqrt{5}} \quad ■$$

BT3. Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc mặt phẳng (ABCD), đáy ABCD là hình vuông tâm O. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC, SD.

a) Chứng minh $BC \perp mp(SAB)$, $BD \perp mp(SAC)$.

b) Chứng minh AH, AI và AK cùng thuộc một mặt phẳng.

c) Chứng minh $HK \perp AI$.

a) Ta có : $BC \perp AB$ (do ABCD hình vuông)

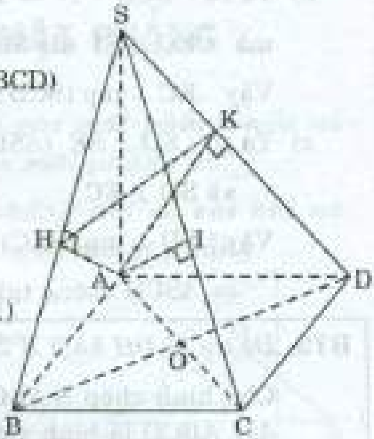
và $BC \perp SA$ (do $SA \perp mp\ (ABCD)$)

Vậy $BC \perp mp\ (SAB)$.

Ta có : $BD \perp AC$ (đường chéo hình vuông ABCD)

và $BD \perp SA$ (do $SA \perp mp\ (ABCD)$)

Vậy $BD \perp mp\ (SAC)$.



b) Ta có : $AH \perp BC$ (do $BC \perp mp\ (SAB)$)

và $AH \perp SB$

$\Rightarrow AH \perp mp\ (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ (1)

Ta có : $CD \perp mp\ (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$

mà $SD \perp AK$

Vậy $AK \perp mp\ (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$ (2)

Mặt khác : $AI \perp SC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ AH, AI, AK cùng nằm trên mặt phẳng qua A và vuông góc SC.

c) Ta có : $\Delta SAB = \Delta SAD$ (c.g.c) $\Rightarrow SB = SD$ và $AH = AK$

Vậy $\Delta SHA = \Delta SAK \Rightarrow SH = SK$

Do đó : $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD} \Rightarrow HK \,//\, BD$

Mà $BD \perp mp\ (SAC) \Rightarrow HK \perp mp\ (SAC) \Rightarrow HK \perp AI$ ■

BT4. *Dự bị Đại học khối D 2003*

Cho hình chóp S.ABC có đáy ΔABC vuông tại B, SA vuông góc với đáy, $SA = BC = 2a$, $AB = a$. Gọi M là trung điểm SC. Chứng minh ΔAMB cân và tính diện tích ΔAMB theo a.

Do định lí ba đường vuông góc $BC \perp BA$ và $SA \perp mp\ (ABC)$ nên $BC \perp SB$.

ΔSBC vuông tại B $\Rightarrow MB = \dfrac{SC}{2}$

ΔSAC vuông tại A $\Rightarrow MA = \dfrac{SC}{2}$

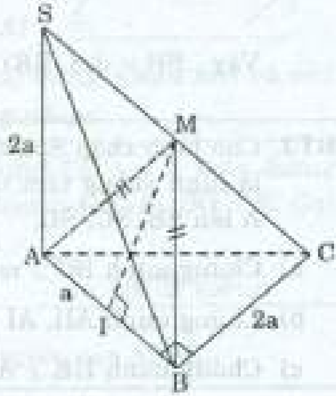
Vậy $MB = MA \Rightarrow \Delta MAB$ cân tại M.

Gọi I là trung điểm AB thì $MI \perp AB$.

ΔABC vuông $\Rightarrow AC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$

ΔSAC vuông $\Rightarrow SC^2 = 4a^2 + 5a^2 = 9a^2$

Do đó : $MA = MB = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{3a}{2}$



ΔMIA vuông $\Rightarrow \quad MI^2 = MA^2 - AI^2 = \dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} = 2a^2$

Do đó : $\quad dt(\Delta MAB) = \dfrac{1}{2}MI.AB = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.a = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ ■

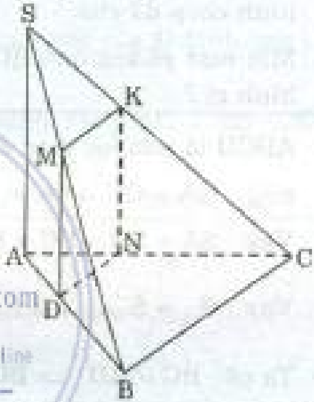
BT5. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mặt phẳng (ABC). Lấy điểm D trên đoạn AB. Mặt phẳng (α) qua D song song với SA và BC cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ?

Mặt phẳng (α) // SA, vậy (α) cắt mp (SAB) theo giao tuyến MD // SA.

Mặt phẳng (α) // BC, vậy (α) cắt mp (SBC) theo giao tuyến MK // BC.

Tương tự : (α) // SA $\Rightarrow (\alpha)$ cắt mp (SAC) theo giao tuyến NK // SA.

(α) // BC $\Rightarrow (\alpha)$ cắt mp (ABC) theo giao tuyến ND // BC.



Do đó MK // ND // BC

và MD // NK // SA

nên MDNK là hình bình hành.

Mặt khác SA ⊥ mp (ABC)

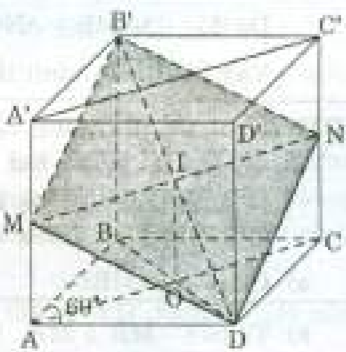
$\Rightarrow$ SA ⊥ BC

Vậy $\widehat{MDN} = 1v$

Do đó MKND là hình chữ nhật ■

BT6. *Tuyển sinh ĐH khối B 2003*

Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AA' và CC'. Chứng minh bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Tính độ dài AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.



- Ta có : $\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B'}$

và $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$

mà $\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC}$

Vậy $\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{DN} \Rightarrow MB' // DN$

$\Rightarrow$ Bốn điểm M, B', D, N cùng thuộc một mặt phẳng.

- Do $\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{DN}$ nên MB'ND là hình bình hành.

Mặt khác : Δ vuông A'MB' = Δ vuông MAD (c.g.c) $\Rightarrow$ MB' = MB

Vậy tứ giác MB'ND là hình thoi.

ΔABD đều $\Rightarrow MN = AC = 2AO = 2\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right) = a\sqrt{3}$

$\Delta B'BD$ vuông $\Rightarrow B'D^2 = BB'^2 + BD^2 = AA'^2 + a^2$

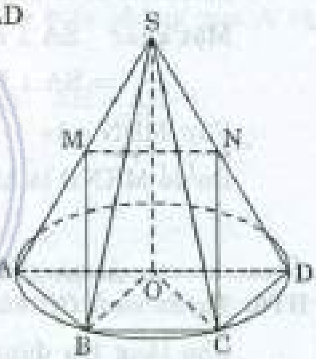
B'MDN là hình vuông $\Leftrightarrow MN^2 = B'D^2 \Leftrightarrow 3a^2 = AA'^2 + a^2$

$\Leftrightarrow AA'^2 = 2a^2 \Leftrightarrow AA' = a\sqrt{2}$ ■

BT7. Một hình chóp có đáy ABCD là nửa hình lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a. Đỉnh S của hình chóp nằm trên đường thẳng vuông góc với đáy tại trung điểm O của đoạn AD với $OS = a\sqrt{3}$.

a) Chứng minh rằng SA = SB = SC = SD. Tính diện tích xung quanh của hình chóp đã cho.

b) Một mặt phẳng qua BC, cắt SA tại M, cắt SD tại N. Tứ giác MNCB là hình gì ?



a) ABCD là nửa lục giác đều và O là trung điểm AD

nên $OA = OB = OC = OD = a$

Vậy $SA = SB = SC = SD = 2a$.

Vậy : $S_{xq} = S_{\Delta SAD} + 3S_{\Delta SAB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}(4+3\sqrt{5})}{4}$.

b) Ta có : BC // AD $\Rightarrow$ BC // mp (SAD)

Do đó mp (α) chứa BC cắt mp (SAD) theo giao tuyến MN // BC // AD.

Ta có : $\dfrac{MA}{SA} = \dfrac{ND}{SD}$ mà $SA = SD \Rightarrow MA = ND$

Ta có : $\Delta SAB = \Delta SCD \Rightarrow \widehat{SAB} = \widehat{SDC}$

Do đó $\Delta AMB = \Delta NCD$ (c.g.c) $\Rightarrow MB = NC$

Vậy MNCB là hình thang cân ■

BT8. Cho ΔMAB vuông tại M nằm trong mp (α). Trên đường vuông góc mp (α) tại A lấy hai điểm C, D nằm về hai phía đối với mp (α). Gọi E là hình chiếu vuông góc của C trên MD, gọi H là giao điểm AM và CE. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên AB. Chứng minh :

a) $CE \perp$ mp (MBD). b) K là trực tâm ΔBCD.

a) Ta có : $MB \perp MA$ (do ΔMAB vuông)

và $MB \perp CD$ (do $CD \perp$ mp (α))

$\Rightarrow MB \perp$ mp (CDM) $\Rightarrow MB \perp CE$

Mặt khác $CE \perp MD$

Vậy $CE \perp mp(MBD)$.

b) Ta có : $HK \perp AB$ (gt)

$HK \perp CD$ (do $CD \perp mp(\alpha)$)

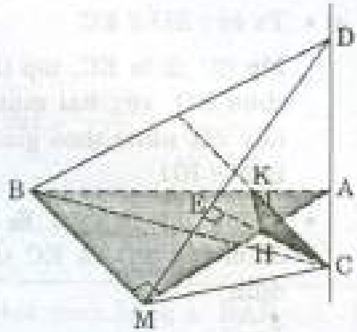
$\Rightarrow HK \perp mp(ABD) \Rightarrow HK \perp BD$

Mặt khác : $BD \perp CE$ (do $CE \perp mp(MBD)$)

Vậy $BD \perp mp(CEK) \Rightarrow BD \perp CK$

Mà $BK \perp CD$

Vậy K là trực tâm ΔBCD ■



BT9. Trên ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một, lấy ba điểm A, B, C.

a) Kẻ $OK \perp AB$, chứng tỏ hình chiếu H vuông góc của O trên mp (ABC) nằm trên đoạn CK.

b) Đoạn BH kéo dài cắt AC tại I. Chứng minh rằng $AC \perp mp(OBI)$ và suy ra H là trực tâm của ΔABC.

c) Nếu ABC là tam giác đều, chứng minh OA, OB, OC bằng nhau.

a) Ta có $OC \perp mp(OAB)$ và $AB \perp CK$

nên $AB \perp CK$ (định lí ba đường vuông góc)

Vẽ $OH \perp CK$, ta có $AB \perp mp(OCK)$

nên $AB \perp OH$.

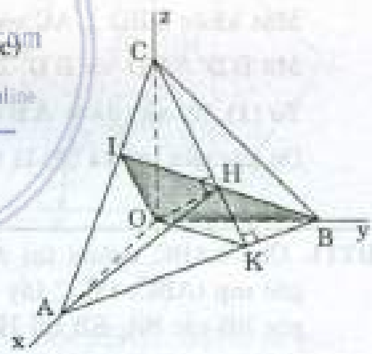
Vậy $OH \perp mp(ABC)$.

b) Ta có : $OB \perp mp(AOC) \Rightarrow OB \perp AC$

$OH \perp mp(ABC) \Rightarrow OH \perp AC$

Do đó $AC \perp mp(OBI)$

Vậy $AC \perp BI$ nên H là trực tâm ΔABC.



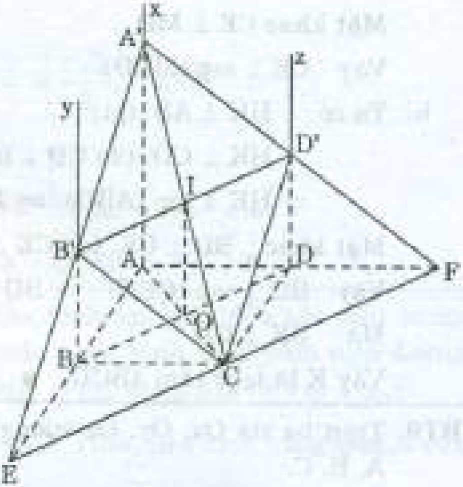
c) ΔABC đều $\Rightarrow$ H là tâm đường tròn (ABC) $\Rightarrow HA = HB = HC$.

Mà $OH \perp mp(ABC)$ và HA, HB, HC là hình chiếu của ba đường xiên OA, OB, OC. Do đó $OA = OB = OC$ ■

BT10. Cho hình vuông ABCD cạnh a nằm trong mặt phẳng (α). Trên đường thẳng AB lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Dựng ba tia Ax, By, Dz vuông góc với mp (α) và nằm cùng phía đối với mp (α). Mặt phẳng (β) chứa EC cắt Ax, By, Dz lần lượt tại A', B', D'.

a) Chứng minh B'D' song song BD và đường thẳng A'D' luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tính diện tích tứ giác A'B'CD' khi mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) tạo với nhau góc 60^0.



a) • Ta có : BD // EC

Mp (β) chứa EC, mp (By, Dz) chứa BD, vậy hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến B'D' // BD.

• Trong mp (α) gọi F là giao điểm của AD và EC thì F cố định.

Ta có :

$F \in AD \Rightarrow F \in mp\,(Ax, Dz)$

$F \in EC \Rightarrow F \in mp\,(\beta)$

Vậy $F \in A'D' = mp\,(\beta) \cap (Ax, Dz)$.

Do đó A'D' luôn qua điểm cố định F.

b) Ta có : E, B', A' thẳng hàng vì cùng nằm trên giao tuyến của mp (β) và mp (By, Ax).

Ta có : C và D' là trung điểm EF và A'F ⇒ CD' // A'E (1)

C và B' là trung điểm EF và A'E ⇒ CB' // A'F (2)

Mặt khác : BD ⊥ AC và AA' nên BD ⊥ mp (AA'C) ⇒ BD ⊥ A'C

Mà B'D' // BD ⇒ B'D' ⊥ A'C (3)

Từ (1), (2) và (3) ⇒ A'B'CD' là hình thoi.

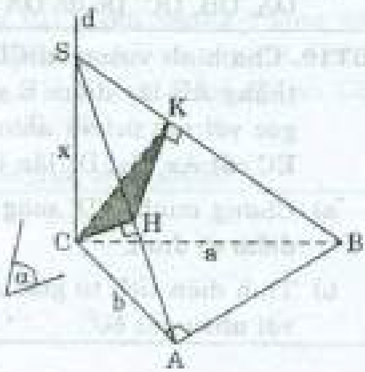
Do góc của (α) và (β) là 60^0 nên Dt (ABCD) = dt (A'B'CD').cos60^0

⇒ Dt (A'B'CD') = $2a^2$ ■

BT11. Cho ΔABC vuông tại A có BC = a, AC = b. Trên đường thẳng vuông góc mp (ABC) tại C lấy điểm S di động. Mặt phẳng (α) qua C và vuông góc SB cắt SA, SB tại H và K.

a) Chứng minh CH vuông góc mp (SAB) và H di động trên một đường cố định.

b) Đặt SC = x. Tính HK theo a, b, x.



a) Ta có : BA ⊥ AC và SC

nên BA ⊥ mp (SAC).

Do đó : BA ⊥ CH

Mặt khác SB ⊥ mp (α) nên SB ⊥ CH.

Vậy CH ⊥ mp (SAB) ⇒ CH ⊥ AC

Ta có : $\widehat{CHA}$ = 1v và H nằm trên mặt phẳng cố định (A, d) nên H di động trên đường tròn đường kính AC.

b) Ta có : $\Delta SHK \backsim \Delta SBA \Rightarrow \dfrac{HK}{BA} = \dfrac{SH}{SB}$ (1)

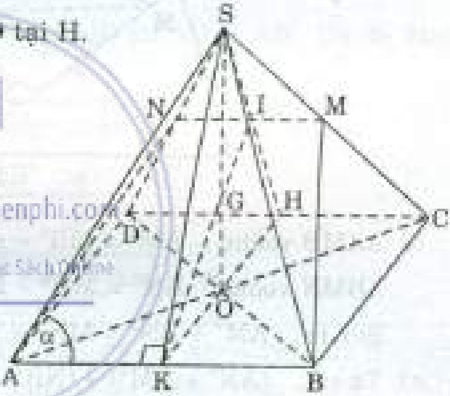
Ta có : ΔSAC vuông $\Rightarrow SC^2 = SH.SA \Rightarrow SH = \dfrac{SC^2}{SA} = \dfrac{x^2}{\sqrt{b^2 + x^2}}$

Từ (1) $\Rightarrow HK = AB.\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}.x^2}{\sqrt{b^2 + x^2}.\sqrt{x^2 + a^2}}$ ■

BT12. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = \alpha$. Chân đường cao của hình chóp trùng với giao điểm của hai đường chéo của hình thoi. Độ dài của đường cao hình chóp là h.

Tính diện tích thiết diện tạo thành khi cắt hình chóp bởi mặt phẳng đi qua cạnh AB và các trung điểm M, N của các cạnh SC, SD tương ứng.

Vì M, N là trung điểm của SC, SD nên MN // DC // AB $\Rightarrow$ ABMN là hình thang.



Kẻ SK ⊥ AB, nối KO kéo dài cắt CD tại H.

Nối SH cắt MN tại I.

Ta có AB ⊥ SK và AB ⊥ SO

$\Rightarrow AB \perp mp(SKO) \Rightarrow AB \perp KI.$

Diện tích thiết diện

$$S_{td} = \frac{MN + AB}{2}.IK$$

trong đó $AB = a$; $MN = \dfrac{a}{2}$

Ta có : $OK = OH = OA\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}a\sin\alpha$

Ta có : IS = IH nên IK và SO là trung tuyến của ΔSKH. Gọi G là giao điểm của IK và SO thì $GO = \dfrac{h}{3}$.

Trong ΔGOK có $GK^2 = GO^2 + OK^2 = \dfrac{1}{9}h^2 + \dfrac{1}{4}a^2\sin^2\alpha$

$$\Rightarrow IK = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{9}h^2 + \frac{1}{4}a^2\sin^2\alpha}$$

Vậy $S_{td} = \dfrac{9}{8}a\sqrt{\dfrac{1}{9}h^2 + \dfrac{1}{4}a^2\sin^2\alpha}$ ■

BT13. Cho đoạn thẳng AB = a nằm trên mp (P). Vẽ đường thẳng x'Ax nằm trong (P) và vuông góc với AB. Đường thẳng y'By vuông góc với (P). Lấy điểm M di động trên x'x, một điểm N di động trên y'y với $MN = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng bốn mặt của tứ diện A.BMN là những tam giác vuông.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai đoạn AM và BN.

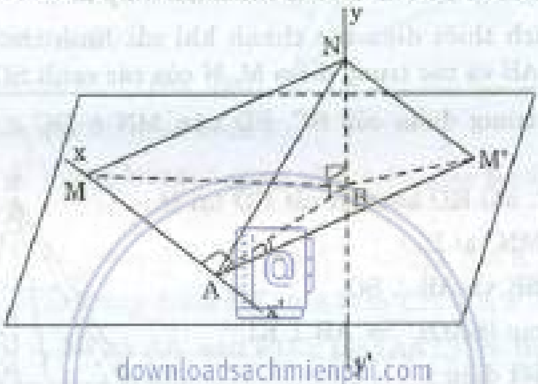
c) Chứng tỏ rằng tổng bình phương các cạnh của tứ diện ABMN là hằng số.

d) Dựng hình bình hành AMNM', chứng tỏ rằng AB ⊥ mp (M'NB), từ đó suy ra góc giữa đường thẳng MN và đường thẳng AB không đổi khi M, N di chuyển lần lượt trên x'x và y'y.

a) Ta có : yy' ⊥ mp (P) và xx' ⊥ AB

⇒ NA ⊥ xx' (định lí ba đường vuông góc)

Ta có : ΔNAM, ΔMAB vuông góc tại A; ΔNMB và ΔNAB vuông tại B.



b) ΔAMB vuông : $AM^2 = MB^2 - AB^2$

ΔBMN vuông : $BN^2 = MN^2 - BM^2$

Suy ra $AM^2 + BN^2 = MN^2 - AB^2 = a^2$.

c) Ta có : $(AN^2 + AM^2) + (NB^2 + MB^2) + MN^2 + AB^2$

$= MN^2 + MN^2 + MN^2 + AB^2 = 7a^2$.

d) Ta có : AB ⊥ xx' và xx' // M'N nên AB ⊥ M'N.

Mà : yy' ⊥ AB nên AB ⊥ mp (M'NB) ⇒ AB ⊥ M'B.

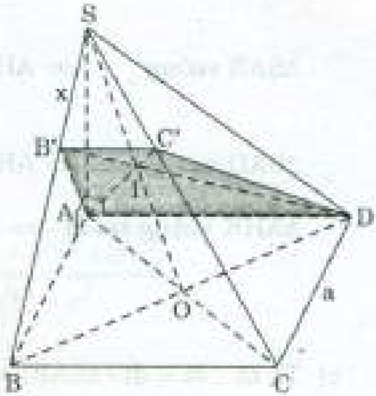
Ta có : $\cos(MN, AB) = \cos\widehat{M'AB} = \dfrac{AB}{AM'} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{M'AB} = 45^0$

Điều này chứng tỏ góc giữa đường thẳng AB và MN không đổi khi M, N di chuyển lần lượt trên xx' và yy' ■

BT14. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, đáy là hình vuông có cạnh là a, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy.

a) Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

b) Một mặt phẳng qua AD cắt SB tại B', cắt SC tại C'. Chứng minh rằng AB'C'D là một hình thang vuông tại A. Tính diện tích của hình thang ấy, biết SB' = x.



a) Ta có : dt (ΔSAB) = dt (ΔSAD)

$$= \frac{1}{2}SA.AB = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Ta có : BC ⊥ AB ⇒ BC ⊥ SB

⇒ ΔSBC vuông tại B.

Tương tự ΔSDC vuông tại D.

$$dt\,(\Delta SBC) = \frac{1}{2}SB.BC = a^2$$

Vì BC = a, $SB = \sqrt{AB^2 + SA^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$

Do đó : $S_{xq} = a^2(2 + \sqrt{3})$.

b) Mp (AB'C'D) đi qua AD // mp (SBC) nên cắt mp (SBC) theo giao tuyến B'C' // AD. Vậy AB'C'D là hình thang.

Vì AD ⊥ SA; AD ⊥ AB ⇒ AD ⊥ mp (SAB) ⇒ AD ⊥ AB'. Do đó hình thang AB'C'D vuông tại A.

Ta có : $AB' = \sqrt{B'S^2 + SA^2 - 2B'S.SA.\cos\widehat{ASB}} = \sqrt{x^2 + 3a^2 - 3ax}$

Ta có : $B'C' \,//\, BC \Rightarrow B'C' = BC\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{x}{2}$

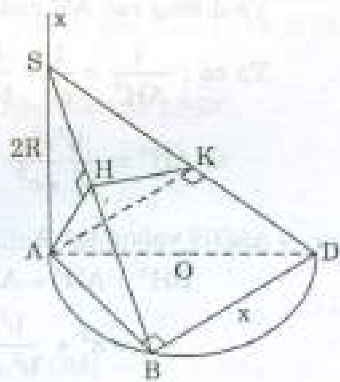
Do đó : $dt\,(B'C'DA) = \dfrac{1}{4}(x + 2a)\sqrt{x^2 + 3a^2 - 3ax}$ ■

BT15. Trong mp (α) cho nửa đường tròn (C) đường kính AD = 2R. Lấy B ∈ (C); trên nửa đường thẳng Ax vuông góc mp (α) lấy điểm S sao cho SA = AD. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD.

a) Chứng minh tam giác SBD và AHK vuông.

b) Tính HK theo AD và BD.

c) Tìm B trên (C) sao cho tổng diện tích ΔSAB và ΔDAB đạt giá trị lớn nhất.



a) Ta có : $\widehat{ABD}$ = 1v ⇒ BD ⊥ AB

mà SA ⊥ mp (α) ⇒ BD ⊥ SA

Vậy BD ⊥ mp (SAB) ⇒ BD ⊥ SB

Ta có : BD ⊥ mp (SAB) ⇒ BD ⊥ AH

mà AH ⊥ SB nên AH ⊥ mp (SBD)

⇒ AH ⊥ HK.

b) Đặt BD = x và AD = 2R.

Ta có : $AB^2 = 4R^2 - x^2$

ΔSAB vuông $\Rightarrow AH = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{2R\sqrt{4R^2 - x^2}}{\sqrt{8R^2 - x^2}}$

ΔSAD vuông cân $\Rightarrow AK = \dfrac{SD}{2} = \dfrac{2R\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$

ΔAHK vuông tại H $\Rightarrow HK^2 = AK^2 - AH^2$

$$\Rightarrow HK^2 = 2R^2 - \frac{4R^2(4R^2 - x^2)}{8R^2 - x^2} = \frac{2R^2x^2}{8R^2 - x^2}.$$

c) Ta có : $M = dt(\Delta SAB) + dt(\Delta DAB) = \dfrac{1}{2}SA.AB + \dfrac{1}{2}BA.BD$

$$= R\sqrt{4R^2 - x^2} + \frac{x}{2}\sqrt{4R^2 - x^2} = \frac{1}{2}(x + 2R)\sqrt{4R^2 - x^2}$$

Ta có : $M^2 = \dfrac{1}{4}(x + 2R)^2(4R^2 - x^2) = \dfrac{1}{4}(x + 2R)^3(2R - x)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương ta có :

$$4R = (2R - x) + \frac{1}{3}(2R + x) + \frac{1}{3}(2R + x) + \frac{1}{3}(2R + x) \geq 4.\sqrt[4]{(2R - x)\frac{(2R + x)^3}{27}}$$

$$\Leftrightarrow R^4 \geq \frac{(2R - x)(2R + x)^3}{27} \Leftrightarrow \frac{27}{4}R^4 \geq M^2 \Leftrightarrow M \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2R - x = \dfrac{1}{3}(2R + x) \Leftrightarrow x = R$

Do đó tổng diện tích ΔSAB và ΔDAB max $\Leftrightarrow DB = R$ ■

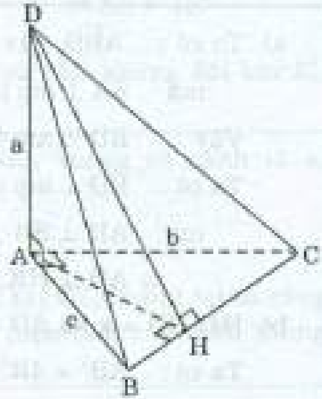
BT16*. *Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối D 2003*

Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại A, AD = a, AC = b, AB = c.

Tính diện tích S của tam giác BCD theo a, b, c và chứng minh rằng :

$$2S \geq \sqrt{abc(a + b + c)}.$$

Vẽ đường cao AH của ΔABC.



Ta có : $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{b^2 + c^2}{b^2c^2}$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2} \Rightarrow AH = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

ΔADH vuông tại A :

$$DH^2 = AD^2 + AH^2$$

$$= a^2 + \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow DH = \sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{b^2 + c^2}}$$

ΔABC vuông tại A $\quad \Rightarrow BC = \sqrt{b^2 + c^2}$

Ta có : $BC \perp (DAH) \Rightarrow BC \perp DH$

$$S_{DBC} = \frac{1}{2}BC.DH = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}.\frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có :

$$\sqrt{abc(a + b + c)} = \sqrt{a^2bc + b^2ac + c^2ab}$$

$$\le \sqrt{a^2\frac{b^2 + c^2}{2} + b^2\frac{a^2 + c^2}{2} + c^2\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2c^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} + \frac{b^2c^2}{2} + \frac{c^2a^2}{2} + \frac{c^2b^2}{2}}$$

$$= \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = 2S$$

Vậy $\quad 2S \ge \sqrt{abc(a + b + c)}$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện ABCD có ΔABC và ΔBCD cân chung đáy BC. Gọi I là trung điểm của BC. Vẽ AH vuông góc DI. Chứng minh :

a) $BC \perp (ADI)$ b) $AH \perp (BCD)$.

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD có SA = SB = SC = SD. Gọi O là giao điểm của AC với BD. Chứng minh :

a) $SO \perp (ABCD)$ b) $AC \perp (SBD)$ c) $BD \perp (SAC)$.

3. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC). Chứng minh :

a) ΔABC có ba góc nhọn. b) H là trực tâm của ΔABC.

c) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O và SA = SC, SB = SD.

a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$.

b) Vẽ SH là đường cao ΔSAB. Chứng minh $AB \perp (SOH)$.

5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, SA vuông góc (ABCD). Lấy I, K lần lượt trên SB, SD thỏa mãn $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Chứng minh BD ⊥ SC và IK ⊥ (SAC).

6. Cho tứ diện SABC có SA vuông góc mp (ABC), ΔABC vuông tại B. Trong mp (SAB) vẽ AM vuông góc SB. Trên SC lấy điểm N sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$.

Chứng minh :

a) BC ⊥ (SAB) và AM ⊥ (SBC).　　　b) SB ⊥ AN.

7. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, chiều cao a.

a) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh AI ⊥ BC'.

b) Gọi M là trung điểm của BB'. Chứng minh BC' ⊥ AM.

c) Lấy K trên A'B' sao cho $B'K = \frac{a}{4}$. Gọi J là trung điểm của B'C'. Chứng minh AM ⊥ MK, AM ⊥ KJ.

8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O, SA = SC, SB = SD. Gọi d là giao tuyến của (SAB) và (SCD), Δ là giao tuyến của (SBC) và (SAD). Chứng minh SO ⊥ mp (d, Δ).

9. Cho hai hình chữ nhật ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng khác nhau với AC vuông góc BF. Gọi CH, CK là hai đường cao của ΔBCE và ΔADF. Chứng minh :

a) ΔACH và ΔBFK vuông.　　　b) BF ⊥ AH và AC ⊥ BK.

10. Cho tứ diện D.ABC có các cạnh bằng nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên (ABC), I là trung điểm của DH. Chứng minh tứ diện IABC có IA, IB, IC đôi một vuông góc nhau.

11. Cho tứ diện I.ABC có IA = IB = IC và IA, IB, IC đôi một vuông góc. Gọi D là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh tứ diện DABC có các cạnh bằng nhau.

12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, SA vuông góc mp (ABCD), SA = a, $\widehat{ABC} = 60°$.

a) Tính SB, SC, SD.

b) Gọi I là trung điểm của SC. Chứng minh IB = ID.

13. Cho tứ diện ABCD có DA vuông góc mp (ABC) và AB = AC = a, $BC = \frac{6}{5}a$.

Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ AH vuông góc MD (H ∈ MD).

a) Chứng minh AH ⊥ (BCD).

b) Cho $AD = \frac{4}{5}a$. Tính góc của AC và MD.

c) Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của ΔABC và ΔDBC. Chứng minh G_1G_2 vuông góc mặt phẳng (ABC).

14. Cho ΔABC vuông tại B. Trên đường vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm S khác A. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Chứng minh :

a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (AB_1C_1) là đường thẳng cố định và là tiếp tuyến của đường tròn qua A, B, C.

b) B_1C_1 qua điểm cố định I và $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$.

Chủ đề 16

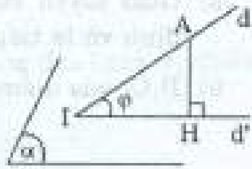
TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG d VÀ MẶT PHẲNG

- **Định nghĩa :** *Góc của đường xiên d và mặt phẳng (α) là góc nhọn tạo bởi d và hình chiếu vuông góc của d lên (α).*
- **Phương pháp tính góc của d và (α)**

– *Tìm giao điểm I của d và mp (α).*

– *Chọn A trên d, vẽ AH ⊥ mp (α) thì góc của d và mp (α) là $\widehat{AIH}$.*

– *Dùng tỉ số lượng giác hoặc hệ thức lượng trong tam giác tính được góc này.*



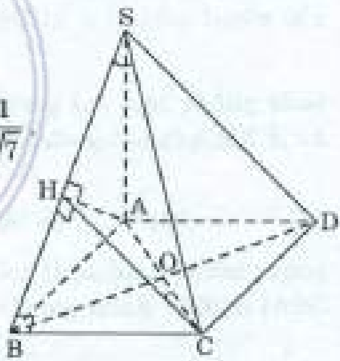
BT1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD hình vuông cạnh a; SA vuông góc mp (ABCD) và SA = $a\sqrt{6}$. Tính sin góc của :

a) SC và mp (SAB).   b) AC và mp (SBC).

a) Ta có : CB ⊥ AB và SA nên CB ⊥ mp (SAB).

Vậy : $(\widehat{SC, (SAB)}) = (\widehat{SC, SB}) = \widehat{CSB}$

ΔSBC vuông tại B ⇒ $\sin\widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$



b) Vẽ AH ⊥ SB

mà BC ⊥ mp (SAB) ⇒ BC ⊥ AH

Vậy AH ⊥ mp (SBC).

Hình chiếu của AC lên mp (SBC) là HC nên

$(\widehat{AC, (SBC)}) = (\widehat{AC, HC}) = \widehat{ACH}$

ΔSAB vuông ⇒ $AH = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{6} \times a}{a\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

AH ⊥ mp (SBC) ⇒ AH ⊥ HC

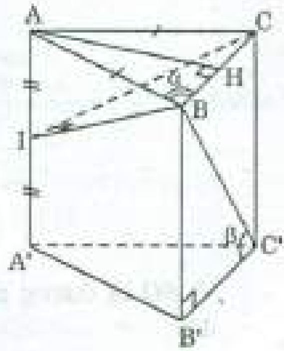
ΔAHC vuông tại H ⇒ $\sin\widehat{ACH} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}.a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ■

BT2. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy ΔABC cân đỉnh A, $\widehat{ABC} = \alpha$, BC' tạo với đáy (ABC) góc β. Gọi I là trung điểm AA', biết $\widehat{BIC} = 90°$.

Chứng minh :

a) ΔBCI vuông cân.   b) $\tan^2\alpha + \tan^2\beta = 1$.

Ta có : $\widehat{BC'B'} = \beta$



a) Δ vuông AIC = Δ vuông AIB vì có

$\widehat{IAC} = \widehat{IAB} = 1v$, AC = AB, AI chung.

Vậy IB = IC. Do đó ΔBCI vuông cân.

b) Đặt AB = AC = a, BC = b, AA' = h.

$\Delta BB'C'$ vuông $\Rightarrow \tan\beta = \dfrac{BB'}{B'C'} = \dfrac{h}{b}$

Gọi H trung điểm BC.

$$\Delta \text{ vuông } ABH \Rightarrow \tan\alpha = \frac{AH}{HB} = \frac{\sqrt{a^2 - \dfrac{b^2}{4}}}{\dfrac{b}{2}} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{b}$$

$$\text{Ta có : } \tan^2\alpha + \tan^2\beta = \frac{4a^2 + h^2 - b^2}{b^2}$$

$$\text{Mà } \Delta AIC \text{ vuông } \Rightarrow IC^2 = a^2 + \frac{h^2}{4} = \frac{4a^2 + h^2}{4} \qquad (1)$$

$$\Delta IBC \text{ vuông cân } \Rightarrow b^2 = 2IC^2 \qquad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{4a^2 + h^2}{4} = \frac{b^2}{2}$$

$$\text{Do đó : } \tan^2\alpha + \tan^2\beta = \frac{2b^2 - b^2}{b^2} = 1 \ \blacksquare$$

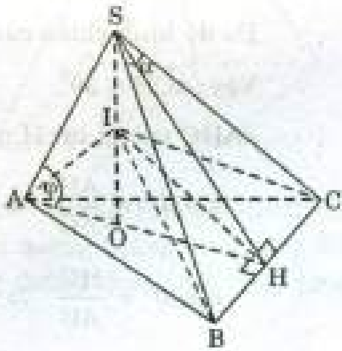
BT3. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có a là độ dài cạnh đáy và $\widehat{ASB} = \alpha$.

a) Gọi φ là góc giữa cạnh bên với đáy, tính $\sin\varphi$ theo α.

b) Cho SA = a, I là trung điểm của đường cao SO của hình chóp. Chứng minh rằng các đoạn thẳng IA, IB, IC đôi một vuông góc nhau.

a) Gọi H là trung điểm BC, O là chân đường cao hình chóp hạ từ S.

$$\text{Ta có : } AO = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



$$\Delta SHB \text{ vuông } \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BH}{SB}$$

$$\Rightarrow SA = SB = SC = \frac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\Delta SAO \text{ vuông } \Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2$$

$$\Rightarrow SO^2 = \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{36}\left(\frac{9}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 12\right)$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a}{6\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{9 - 12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Vì SO là đường cao của hình chóp nên φ chính là góc giữa cạnh SA và đáy.

Ta có : $\sin\varphi = \sin\widehat{SAO} = \frac{SO}{SA} = \frac{1}{3}\sqrt{9 - 12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

b) Nếu SA = a thì $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0$

Vậy : $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3}{9}a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$,

$$\Rightarrow IO = \frac{SO}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

và $IH = \sqrt{IO^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2} = HB = HC$

$\Rightarrow \widehat{BIC} = 90^0$. Vậy IB ⊥ IC.

Chứng minh tương tự ta có IA ⊥ IB, IA ⊥ IC ■

BT4. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD hình vuông cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc mp (ABCD). Gọi (α) là mặt phẳng qua BC và tạo với AC góc 30^0, (α) cắt SA, SD tại M, N. Tính diện tích (BCNM).

Vẽ AH ⊥ BM

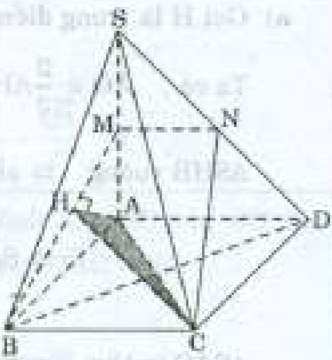
Ta có BC ⊥ mp (SAB) ⇒ BC ⊥ AH

Vậy AH ⊥ mp (BCM)

Do đó hình chiếu của AC lên mp (α) là HC.

Vậy $\widehat{ACH} = 30^0$.

ΔAHC vuông tại H nên



$$\sin 30^0 = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

ΔAMB vuông tại A $\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AB^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AM = a$$

Mp (α) chứa BC // mp (SAD).

Vậy (α) cắt mp (SAD) theo giao tuyến MN // BC // AD.

Do $BC \perp$ mp (SAB) $\Rightarrow BC \perp BM$

Do đó mặt cắt là hình thang vuông BCNM.

ΔABM vuông cân $\Rightarrow MB = a\sqrt{2}$

Vậy dt (MNCB) $= \dfrac{MB}{2}(MN + BC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{a}{2} + a\right) = \dfrac{3a^2\sqrt{2}}{4}$ ■

BT5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O và SO vuông góc mp (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc của MN và (ABCD) là 60°.

a) Tính MN và SO. b) Tính góc của MN và mp (SBD).

Gọi H là trung điểm của AO.

Ta có MH // SO mà $SO \perp (ABCD)$ nên $MH \perp (ABCD)$.

Do đó HN là hình chiếu vuông góc của MN lên (ABCD).

Do đó $\widehat{MNH} = (MN, (ABCD)) = 60^\circ$.

a) $\Delta HCN \Rightarrow HN^2 = CH^2 + CN^2 - 2CH.CN\cos 45^\circ$

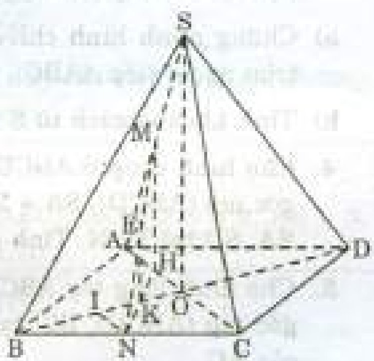
$$HN^2 = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}$$

$\Delta MHN \Rightarrow \cos\widehat{MNH} = \cos 60^\circ = \dfrac{NH}{MN} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow MN = 2NH = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

và $\tan 60^\circ = \dfrac{MH}{HN} = \sqrt{3} \Rightarrow MH = \dfrac{a\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$

Vậy $SO = 2MH = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.



b) Trong mp (ABCD), gọi K là giao điểm của HN và BD. Hai mp (SBD) và (MHN) có chung điểm K và lần lượt chứa hai đường thẳng song song SO và MH. Vậy giao tuyến của chúng là đường thẳng qua K và song song với SO. Giao tuyến này cắt MN tại E.

Ta có $AC \perp BD$ và SO nên $AC \perp (SBD)$.

Gọi I là trung điểm của OB thì $NI // AC$ nên $NI \perp (SBD)$. Do đó hình chiếu của MN trên (SBD) là EI.

Vậy $\widehat{(MN, (SBD))} = \widehat{NEI}$

Tứ giác OHIN là hình bình hành $\Rightarrow$ K là trung điểm của NH $\Rightarrow$ E là trung điểm của MN.

Ta có $NI \perp (SBD) \Rightarrow NI \perp IE$

$$\Delta NIE \text{ vuông } \Rightarrow \sin\widehat{NEI} = \frac{NI}{NE} = \frac{2NI}{MN} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Vậy góc của MN và (SBD) là φ với $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện đều cạnh a. Tính góc giữa :

a) Các cặp cạnh đáy. b) Các cạnh bên và mặt đáy.

2. Cho hình chóp tứ giác đều đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa :

a) Cạnh bên và mặt đáy.

b) Cạnh bên với đường chéo của mặt đáy.

3. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC cân, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$, SA, SB, SC đều tạo với mp (ABC) góc α.

a) Chứng minh hình chiếu vuông góc của S trên mp (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

b) Tính khoảng cách từ S đến mp (ABC).

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mp (ABCD), SA = 2a. Mặt phẳng (α) qua BC tạo với AC góc 30° cắt SA, SD tại M, N. Tính diện tích BCNM.

5. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, AA' vuông góc mp (ABCD), BC' tạo với mp (ABB'A') góc 30°. Gọi M là trung điểm của AC.

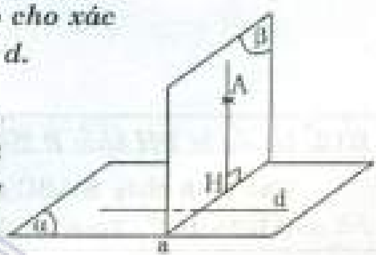
a) Tính AA' và khoảng cách từ M đến mp (BA'C).

b) Gọi N là trung điểm của BB'. Tính góc của MN và mp (BA'C').

Chủ đề 17

• DỰNG ĐƯỜNG THẲNG QUA ĐIỂM A CHO TRƯỚC VÀ VUÔNG GÓC Mp (α) CHO TRƯỚC
• TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM A ĐẾN Mp (α)

Phương pháp



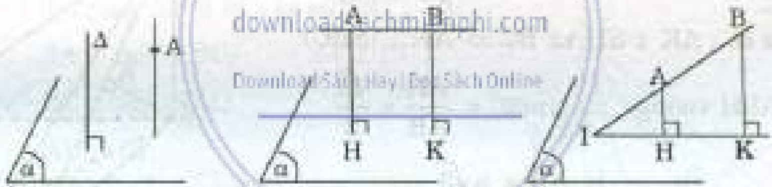
– *Chọn đường thẳng d trong mp (α) sao cho xác định được mp (β) qua A và vuông góc d.*

– *Xác định giao tuyến a của (α) và (β).*

– *Trong mp (β) dựng AH vuông góc a thì AH là đường thẳng qua A và vuông góc mp (α) và AH = d(A, mp (α)).*

Chú ý :

1. *Nếu đã có sẵn Δ vuông góc mp (α) chỉ cần dựng đường thẳng qua A và song song Δ.*



2. *Nếu AB // mp (α) thì d(A, α) = d(B, α).*

3. *Nếu AB cắt mp (α) tại I thì* $\dfrac{d(A,\alpha)}{d(B,\alpha)} = \dfrac{IA}{IB}$.

4. *Tính thể tích V khối chóp và diện tích đáy thì suy ra được đường cao (Xem chủ đề 23).*

BT1. *Tuyển sinh ĐH khối D 2002*

Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc mp (ABC), AC = AD = 4, AB = 3, BC = 5. Tính khoảng cách từ A đến mp (BCD).

Ta có ΔABC vuông tại A vì $BC^2 = AB^2 + AD^2$.

Vẽ $AI \perp BC$

Xét mp (ADI) qua A, ta có $BC \perp AI$ và AD $\Rightarrow BC \perp$ mp (ADI)

Vẽ $AH \perp DI$

Ta có : $BC \perp$ mp (ADI) $\Rightarrow BC \perp AH$

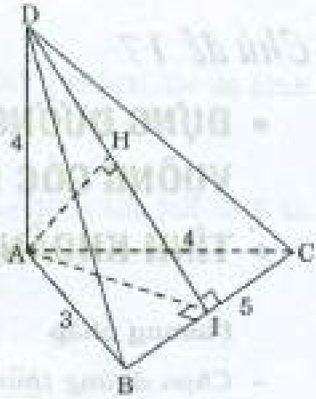
Vậy AH ⊥ mp (DBC)

ΔABC vuông $\Rightarrow AI = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{12}{5}$

ΔADI vuông $\Rightarrow AH = d(A, (BCD)) = \dfrac{AD.AI}{DI}$

$$\Rightarrow d(A, (BCD)) = \frac{4\left(\frac{12}{5}\right)}{\sqrt{16 + \frac{144}{25}}}$$

$$= \frac{48}{4\sqrt{34}} = \frac{12}{\sqrt{34}} \quad ■$$



BT2. *Đề dự bị ĐH khối B 2004*

Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc (ABC), SA = 3a, BA = BC = 2a, $\widehat{ABC} = 120^0$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Vẽ AH ⊥ BC và AK ⊥ SH

Ta có : BC ⊥ AH và SA ⇒ BC ⊥ (SAH)

⇒ BC ⊥ AK

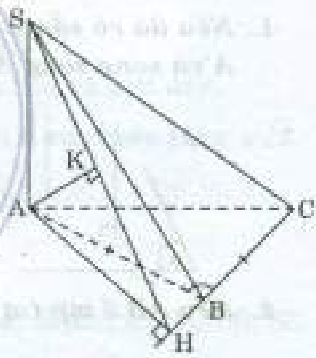
Ta có : AK ⊥ SH và BC ⇒ AK ⊥ (SBC)

ΔABH vuông $\Rightarrow \sin 60^0 = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AH = a\sqrt{3}$

ΔSAH vuông $\Rightarrow AK = \dfrac{AS.AH}{SH} = \dfrac{3a.a\sqrt{3}}{\sqrt{9a^2 + 3a^2}}$

Vậy $AK = d(A, (SBC)) = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2}a$ ■



BT3. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, SA vuông góc mp (ABC) và SA = h.

a) Tính khoảng cách từ A đến mp (SBC) theo a và h.

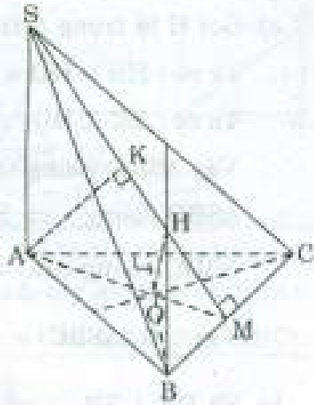
b) Gọi O là tâm đường tròn qua A, B, C và H là trực tâm ΔSBC. Chứng minh OH vuông góc mp (SBC).

a) Gọi M trung điểm BC, do ΔABC đều nên BC ⊥ AM.

Ta có BC ⊥ AM và SA nên BC ⊥ mp (SAM).

Vẽ AK ⊥ SM, do AK ⊂ mp (SAM) nên BC ⊥ AK.

Vậy AK ⊥ mp (SAM).



ΔSAM vuông tại A

$$\Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{3a^2 + 4h^2}{3a^2h^2}$$

$$\Rightarrow AK = d(A, mp\,(SBC)) = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}.$$

b) O là tâm của ΔABC đều nên $BO \perp AC$.

Mà $SA \perp mp\,(ABC) \Rightarrow SA \perp OB$

Vậy $OB \perp mp\,(SAC) \Rightarrow OB \perp SC$

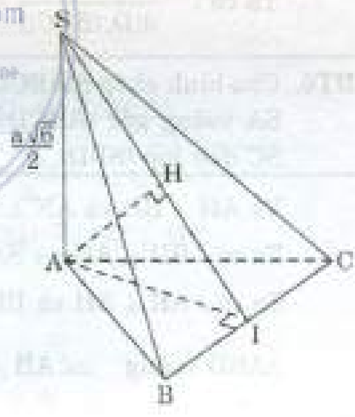
H là trực tâm $\Delta SBC \Rightarrow BH \perp SC$

Do đó $SC \perp mp\,(OBH) \Rightarrow SC \perp OH$

Mặt khác $BC \perp mp\,(SAM) \Rightarrow BC \perp OH$. Do đó $OH \perp mp\,(SBC)$ ■

BT4. *Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối A 2002*

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc mp (ABC), $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến mp (SBC) theo a.



Gọi I là trung điểm BC, ta có : $AI \perp BC$;

$SA \perp mp\,(ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Vậy $BC \perp mp\,(SAI)$

Vẽ $AH \perp SI$

Ta có $BC \perp mp\,(SAI) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $AH \perp mp\,(SBC)$

Ta có : $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

ΔSAI vuông tại A $\Rightarrow AH = \frac{SA.AI}{SI}$

$$\Rightarrow d(A, mp\,(SBC)) = AH = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{6a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$ ■

BT5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD vuông tại A và D, AB = AD = a, CD = 2a, cạnh SD vuông góc mp (ABCD), SD = a.

a) Chứng minh ΔSBC vuông. Tính diện tích ΔSBC.

b) Tính khoảng cách từ A đến mp (SBC).

a) Gọi H là trung điểm CD.

Ta có : HB = HD = HC = a nên ΔBDC vuông tại B.

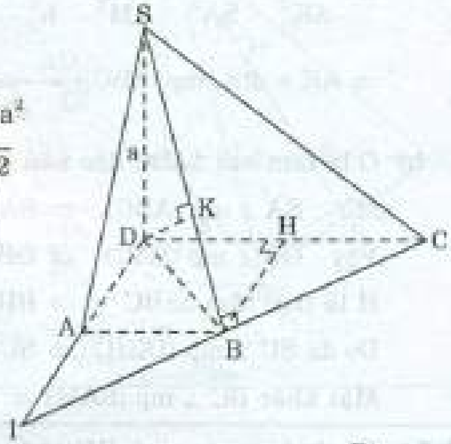
Ta có : $BC \perp BD \Rightarrow BC \perp SB$

Vậy ΔSBC vuông tại B.

ΔSBD vuông $\Rightarrow SB^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$

ΔBDC vuông cân $\Rightarrow BC = BD = a\sqrt{2}$

Vậy : dt $(\Delta SBC) = \frac{1}{2}BC.BS = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.



b) Vẽ $DK \perp SB$ (1)

Ta có : $BC \perp$ mp (SBD)

$\Rightarrow BC \perp DK$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DK \perp$ mp (SBC)

ΔSBD vuông $\Rightarrow DK = \frac{SD.DB}{SB} = \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

BC cắt AD tại I thì A là trung điểm ID.

Ta có : $\frac{d(A,(SBC))}{d(D,(SBC))} = \frac{IA}{ID} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(A,(SBC)) = \frac{1}{2}DK = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ ■

BT6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, AD = 2a, SA vuông góc (ABCD), SA = a. Tính khoảng cách từ trung điểm I của SC đến mp (SBD).

Vẽ $AH \perp BD$ và $AK \perp SH$

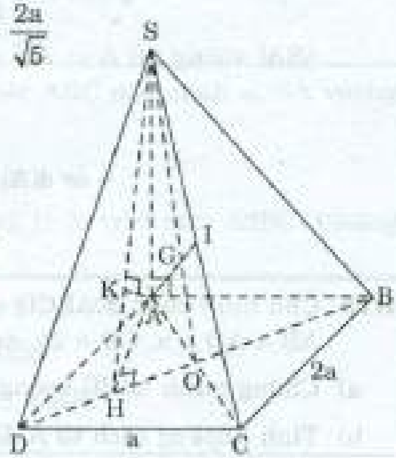
Ta có : $BD \perp AH$ và SA nên $BD \perp$ mp (SAH) $\Rightarrow BD \perp AK$

Ta có : $AK \perp SH$ và BD nên $AK \perp$ mp (SBD)

ΔABD vuông $\Rightarrow AH = \frac{AD.AB}{BD} = \frac{a.2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

ΔSAH vuông $\Rightarrow AK = \frac{SA.AH}{SH}$

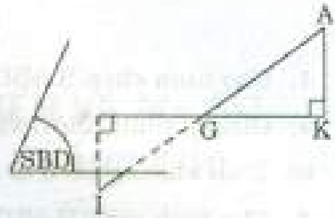
$$AK = \frac{a.\frac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{5}}} = \frac{2a}{3}$$



Gọi O là giao điểm AC và BD. SO cắt AI tại G thì G là trọng tâm ΔSAC.

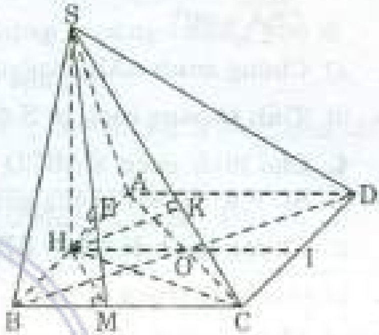
Ta có : $\dfrac{d(I,(SBD))}{d(A,(SBD))} = \dfrac{GI}{GA} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow d(I,(SBD)) = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{a}{3}$ ■



BT7. Cho hình thoi ABCD tâm O, cạnh a, AC = a. Từ H là trung điểm của AB vẽ SH vuông góc mp (ABCD) và SH = a. Tính các khoảng cách từ :

a) H đến mp (SCD). b) O đến mp (SCD). c) A đến mp (SBC).



a) ΔABC đều nên $CH \perp AB$ mà $AB \parallel CD$ nên $CH \perp CD$.

Mặt khác : $CD \perp SH$

Vậy $CD \perp (SHC)$.

Vẽ $HK \perp SC$ thì $HK \perp (SCD)$.

ΔSHC vuông $\Rightarrow HK = \dfrac{SH.HC}{SC}$

$$\Rightarrow d(H,(SCD)) = \frac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+\dfrac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

b) Gọi I là trung điểm của CD thì OH cắt (SCD) tại I, do đó :

$$\frac{d(O,(SCD))}{d(H,(SCD))} = \frac{IO}{IH} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(O,(SCD)) = \frac{1}{2}HK = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

c) Vẽ $HM \perp BC$ và $HE \perp SM$. Ta có $BC \perp (SHM) \Rightarrow BC \perp HE$

Vậy $HE \perp (SBC)$.

$$\Delta HBC \text{ vuông } \Rightarrow HM = \frac{HB.HC}{BC} = \frac{\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\Delta SHM \text{ vuông } \Rightarrow HE = \frac{SH.HM}{SM} = \frac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{a^2+\dfrac{3a^2}{16}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

Vậy $d(H,(SBC)) = HE = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

Ta có AH cắt (SBC) tại B.

Do đó $\dfrac{d(A,(SBC))}{d(H,(SBC))} = \dfrac{BA}{BH} = 2 \Rightarrow d(A,(SBC)) = 2HE = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp S.ABCD có SA = x và tất cả các cạnh còn lại bằng a.

a) Chứng minh ΔSAC vuông.

b) Tính khoảng cách từ S đến mp (ABCD).

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a, SA vuông góc mp (ABCD). Gọi I là trung điểm của SA. Tính khoảng cách từ S đến mp (ICD).

3. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$.

a) Chứng minh ΔABC vuông.

b) Tính khoảng cách từ S đến mp (ABC).

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, SA = SB = SC = a. Vẽ SH vuông góc mp (ABCD).

a) Chứng minh H thuộc BD và AC vuông góc mp (SBD).

b) Gọi M là trung điểm của SB. Chứng minh SB vuông góc mp (MAC).

c) Chứng minh ΔSBD vuông.

5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a tâm O, SA vuông góc mp (ABCD), $SA = a\sqrt{3}$. Tính các khoảng cách :

a) Từ A đến mp (SBC).

b) Từ O đến mp (SBC).

c) Từ trọng tâm của ΔSAB đến mp (SBC).

6. Trong mặt phẳng (α) cho ΔABC vuông tại A có BC = 2a, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Dựng hai đoạn BB' = a, CC' = 2a cùng vuông góc và cùng phía đối với (α). Tính khoảng cách từ :

a) Điểm C' đến mp (ABB').

b) Trung điểm của B'C đến mp (ACC').

c) Điểm B' đến mp (ABC').

d) Trung điểm của BC đến mp (AB'C').

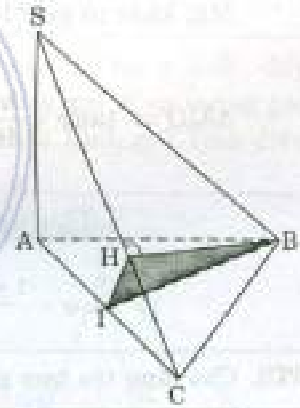
Chủ đề 18

XÁC ĐỊNH MẶT CẮT CỦA ĐA DIỆN VÀ Mp (α) QUA ĐIỂM M CHO TRƯỚC VÀ VUÔNG GÓC ĐƯỜNG THẲNG d CHO TRƯỚC

Phương pháp

- *Vẽ đường thẳng d qua M và vuông góc (α).*
- *Tìm thêm trong hình vẽ một đường thẳng b cùng vuông góc d.*
- *Mp (α) là mp (a, b) hay qua a và song song b.*
- *Sử dụng các phương pháp tìm đoạn giao tuyến ở các chủ đề trước để xác định mặt cắt.*

BT1. Cho tứ diện S.ABCD có SA vuông góc mp (ABC) và ΔABC đều. Xác định mặt cắt của tứ diện S.ABC và mặt phẳng (α) qua B vuông góc SC.



Vẽ $BH \perp SC$ (1)

Gọi I là trung điểm của AC.

Ta có : $BI \perp AC$ (do ΔABC đều)

và $BI \perp SA$ (do $SA \perp$ mp (ABC))

$\Rightarrow BI \perp$ mp (SAC)

$\Rightarrow BI \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) : $SC \perp$ mp (BIH)

Do $BI \perp$ mp (SAC) $\Rightarrow BI \perp IH$

Vậy mặt cắt là ΔBIH vuông tại I ■

BT2. Cho hình chóp tứ giác đều. Thiết diện qua một đỉnh của đáy và vuông góc cạnh bên đối diện bằng nửa diện tích đáy. Tính sin góc của cạnh bên và đáy.

Trên mp (SAC) vẽ $AH \perp SC$. Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

Ta có : $BD \perp AC$, SO nên $BD \perp$ mp (SAC) $\Rightarrow BD \perp SC$

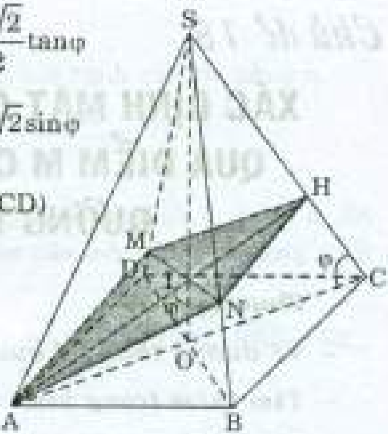
Vậy mặt cắt là mp (α) chứa AH và song song BD.

Trên mp (SAC), AH cắt SO tại I.

Do (α) // BD nên (α) cắt mp (SBD) theo giao tuyến MN qua I và // BD.

Góc của cạnh bên SC và đáy là $\varphi = \widehat{SCO}$.

Gọi a là độ dài cạnh đáy của hình chóp.



ΔSOC vuông $\Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SO}{OC} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$

ΔAHC vuông $\Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}\sin\varphi$

Theo giả thiết thì dt (AMHN) $= \dfrac{1}{2}$ dt (ABCD)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AH.MN = \frac{1}{2}a^2$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a^2}{AH} = \frac{a}{\sqrt{2}\sin\varphi}$$

Do MN // BD $\Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{MN}{BD} = \dfrac{\dfrac{a}{\sqrt{2}\sin\varphi}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sin\varphi} \Rightarrow \dfrac{SO - SI}{SO} = \dfrac{2\sin\varphi - 1}{2\sin\varphi}$

$$\Rightarrow IO = \frac{2\sin\varphi - 1}{2\sin\varphi}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi = \frac{(2\sin\varphi - 1)}{4\cos\varphi}a\sqrt{2}$$

Mặt khác tứ giác IOCH có $\hat{O} = \hat{H} = 1v$ nên $\widehat{AIO} = \widehat{HCO} = \varphi$

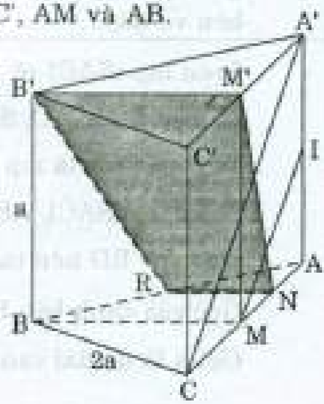
$$\Delta AIO \Rightarrow \tan\varphi = \frac{AO}{IO} = \frac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}(2\sin\varphi - 1)}{4\cos\varphi}} = \frac{2\cos\varphi}{2\sin\varphi - 1}$$

$$\Rightarrow \sin\varphi(2\sin\varphi - 1) = 2\cos^2\varphi = 2(1 - \sin^2\varphi) \Rightarrow 4\sin^2\varphi - \sin\varphi - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \vee \sin\varphi = \frac{1-\sqrt{33}}{8} \text{ (loại)} \quad ■$$

BT3. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' cạnh đáy 2a, chiều cao a.
a) Tìm thiết diện của hình lăng trụ và mặt phẳng qua B' vuông góc A'C.
b) Tính diện tích thiết diện trên.

a) Gọi M, M', N, R lần lượt là trung điểm AC, A'C', AM và AB.



$\Delta A'B'C'$ đều $\Rightarrow B'M' \perp A'C'$

mà AA' ⊥ đáy (ABC) $\Rightarrow A'A \perp B'M'$

Vậy B'M' ⊥ mp (AA', CC')

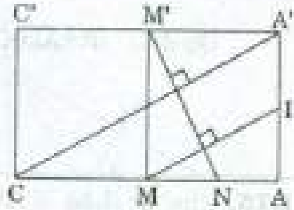
$\Rightarrow B'M' \perp A'C$ (1)

Gọi I trung điểm AA' ta có A'C // MI

Mà M'A'AM là hình vuông cạnh a

$\Rightarrow M'N \perp MI$

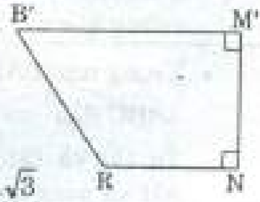
Do đó $M'N \perp A'C$ (2)



Từ (1) và (2) ⇒ Mặt cắt là mp (B'M'N). Mặt phẳng này cắt hai mặt phẳng song song (ABC) và (A'B'C') theo hai giao tuyến B'M' và NR song song nhau.

Mặt khác : B'M' ⊥ (AC, A'C') ⇒ B'M' ⊥ M'N.

Do đó mặt cắt là hình thang vuông B'M'NR.



b) ΔM'MN vuông ⇒ $M'N^2 = MM'^2 + MN^2$

$$\Rightarrow M'N^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

M'B' là đường cao của tam giác đều cạnh 2a nên

$$M'B' = \frac{(2a)\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \quad \text{và} \quad NR = \frac{BM}{2} = \frac{M'B'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Do đó : $$\text{dt}(B'M'NR) = \frac{M'N}{2}(M'B' + NR) = \frac{a\sqrt{5}}{4}\left(a\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{a\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{3a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{8}$$ ■

BT4. Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc mp (ABCD), $SA = a\sqrt{2}$, đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc SB. Mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện đó theo a.

• Ta có : AD ⊥ SA và AB ⇒ AD ⊥ mp (SAB) ⇒ AD ⊥ SB

Vẽ đường cao AH trong ΔASB.

Ta có AD và AH qua A và vuông góc SB.

Vậy mp (α) chính là mp (AHD).

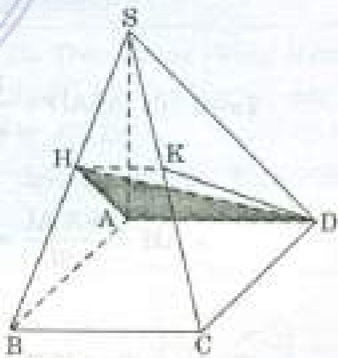
Ta có : AD // mp (SBC) mà AD ⊂ mp (AHD).

Vậy mp (SBC) cắt mp (AHD) theo giao tuyến HK // AD.

Do đó mặt cắt là hình thang ADKH.

Mà AD ⊥ mp (SAB) ⇒ AD ⊥ AH

Vậy ADKH là hình thang vuông.



• ΔSAB vuông $\Rightarrow AH = \dfrac{AS.AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{2}.a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

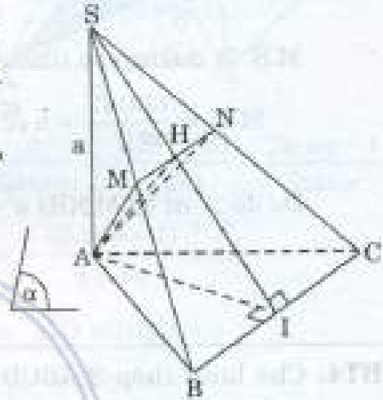
và $SA^2 = SH.SB \Rightarrow SH = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$

Ta có : HK // BC $\Rightarrow \dfrac{HK}{BC} = \dfrac{SH}{SB} \Rightarrow HK = \dfrac{SH.BC}{SB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}a.a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}a$

Do đó : $\text{dt}(ADKH) = \dfrac{AH}{2}(HK + AD)$

$$= \frac{a\sqrt{6}}{6}\left(\frac{2}{3}a + a\right) = \frac{a\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{5a}{3} = \frac{5a^2\sqrt{6}}{18} \quad \blacksquare$$

BT5. Cho tứ diện S.ABCD có đáy ABC là tam giác đều, SA = a, SA vuông góc mp (ABC). Gọi I là trung điểm BC. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc SI. Xác định và tính diện tích mặt cắt của (α) và tứ diện.



- Trong mp (SAI), vẽ $AH \perp SI$ (1)

  ΔABC đều $\Rightarrow BC \perp AI \Rightarrow BC \perp SI$ (2)

  Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (α) là mặt phẳng chứa AH và song song BC.

  Do (α) // BC nên (α) cắt mp (SBC) theo giao tuyến MN qua H và song song BC.

  Vậy mặt cắt là ΔAMN.

- ΔSAI vuông $\Rightarrow SI^2 = SA^2 + AI^2$

$$\Rightarrow SI^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{4}$$

và $\quad SA^2 = SH.SI \Rightarrow SH = \dfrac{SA^2}{SI} = \dfrac{2a}{\sqrt{7}}$

Ta có : MN // BC $\Rightarrow \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{SH}{SI} \Rightarrow MN = \dfrac{SH}{SI}.BC = \dfrac{2a}{\sqrt{7}.\dfrac{a\sqrt{7}}{2}} \times a = \dfrac{4a}{7}$

Ta có : $\text{dt}(\Delta SAI) = \dfrac{1}{2}AH.SI = \dfrac{1}{2}SA.AI$

$$\Rightarrow AH = \frac{SA.AI}{SI} = \frac{a\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{\dfrac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Do đó : $\text{dt}(\Delta AMN) = \dfrac{1}{2}AH.MN = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cdot\dfrac{4a}{7} = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{7\sqrt{7}} = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49} \quad \blacksquare$

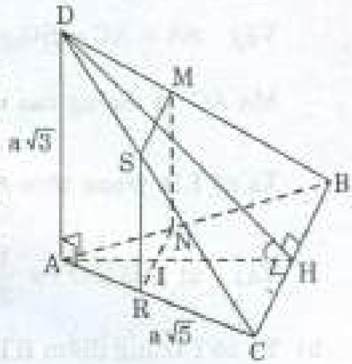
BT6. Cho tam giác cân ABC, $AB = AC = a\sqrt{5}$, BC = 4a. Trên nửa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác tại A lấy một điểm D sao cho $AD = a\sqrt{3}$. Người ta cắt hình chóp bằng một mặt phẳng (P) vuông góc với đường cao AH của ΔABC, thiết diện là hình gì ? Gọi khoảng cách từ A tới mặt phẳng (P) là x, tính diện tích thiết diện theo a và x. Tính x để cho diện tích đó lớn nhất.

Ta có : AH ⊥ BC và AD

Vậy (P) là mặt phẳng song song BC và AD.

Ta có : BC // (P) nên (P) cắt hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) theo hai giao tuyến NR và MS với NR // MS // BC.

Ta có : AD // (P) nên (P) cắt hai mặt phẳng (ADC) và (BAD) theo hai giao tuyến RS và NM với RS // MN // AD.



Mặt khác : NM // AD và AD ⊥ NR

⇒ MN ⊥ NR hay MNRS là hình chữ nhật.

Gọi I là giao điểm của AH và NR.

AH ⊥ mp (MNRS) nên AI là khoảng cách từ A đến mp (P). Vậy AI = x.

$$\Delta ABC \Rightarrow \frac{AI}{AH} = \frac{RN}{BC} \Rightarrow RN = \frac{AI}{AH}.BC = \frac{x}{\sqrt{5a^2 - 4a^2}}.4a = 4x$$

Ta có : RS // AD và NR // BC

$$\Rightarrow \frac{RS}{AD} = \frac{CR}{CA} = \frac{IH}{HA} \Rightarrow RS = AD.\frac{IH}{HA} = \frac{a\sqrt{3}(a-x)}{a} = \sqrt{3}(a-x)$$

Do đó : dt (MSRN) = RN.RS = $4\sqrt{3}x(a-x)$

Do bất đẳng thức Cauchy : $x + (a - x) \geq 2\sqrt{x(a-x)} \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} \geq x(a-x)$

Vậy diện tích lớn nhất $\Leftrightarrow x = a - x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$ ■

BT7. Cho hình thoi ABCD tâm O, AC = 4a, BD = 2a. Trên đường thẳng vuông góc mp (ABCD), tại O lấy điểm S với SO = $2a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

a) Chứng minh tứ giác AB'C'D' có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích AB'C'D'.

b) Chứng minh ΔB'C'D' đều.

a) • Ta có : BD ⊥ AC và SO

nên BD ⊥ mp (SAC)

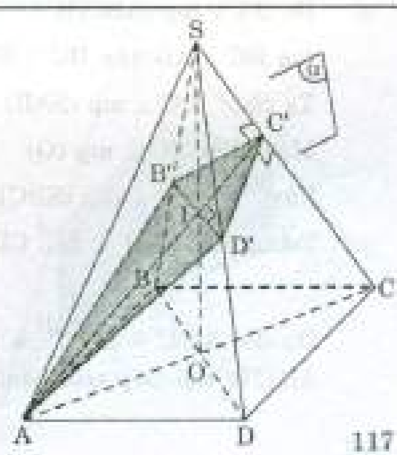
⇒ BD ⊥ SC và AC'

Mà mp (α) ⊥ SC nên BD // mp (α)

Do đó mp (α) cắt mp (SBD) theo giao tuyến B'D' // BD.

Do BD ⊥ AC ⇒ B'D' ⊥ AC'

Vậy mặt cắt là tứ giác AB'C'D' có hai đường chéo vuông góc tại I.



- ΔSOC vuông $\Rightarrow SC^2 = SO^2 + OC^2 = 12a^2 + 4a^2 = 16a^2$

Vậy $SA = AC = SC = 4a$ nên ΔSAC đều.

Mà AC' là đường cao nên $AC' = \dfrac{SC\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$

Ta có I là trọng tâm ΔACS nên $\dfrac{B'D'}{BD} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{4a}{3}$

Vậy : dt $(AB'C'D') = \dfrac{1}{2}B'D'.AC' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4a}{3}\right)\left(2a\sqrt{3}\right) = \dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

b) Ta có I trung điểm $B'D'$ và $IC' \perp B'D'$ nên $\Delta C'B'D'$ cân tại C'.

$\Delta SAC'$ vuông tại C' $\Rightarrow SC'^2 = SA^2 - AC'^2 = 16a^2 - 12a^2 = 4a^2$

$\Delta SB'C'$ vuông tại C' $\Rightarrow B'C'^2 = SB'^2 - SC'^2 = \left(\dfrac{2}{3}SB\right)^2 - 4a^2$

$$\Rightarrow B'C'^2 = \frac{4}{9}(SO^2 + OB^2) - 4a^2 = \frac{4}{9}(12a^2 + a^2) - 4a^2 = \frac{16a^2}{9}$$

$$\Rightarrow B'C' = \frac{4a}{3}$$

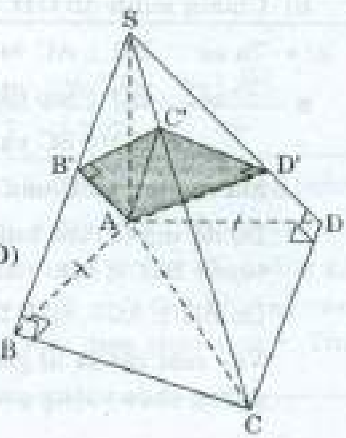
Do đó : $C'B' = C'D' = B'D' = \dfrac{4a}{3}$ nên $\Delta C'B'D'$ đều ■

BT8. Cho hình chóp S.ABCD có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^0$, $SA = a$, SA vuông góc đáy ABCD. Mặt phẳng (Q) qua A vuông góc SC cắt SB, SC, SD tại B', C', D'.

a) Chứng minh tứ giác AB'C'D' nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Cho $AC = b$, $AB = AD = x$.

- Tìm diện tích tứ giác AB'C'D' theo a, b, x.
- Tìm x để tứ giác AB'C'D' là hình vuông.



a) Do $SA \perp mp(ABCD)$

mà $BC \perp AB$ nên $BC \perp SB$

Ta có : $BC \perp mp(SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$

Mặt khác $SC \perp mp(Q) \Rightarrow SC \perp AB'$

Vậy $AB' \perp mp(SBC) \Rightarrow AB' \perp B'C'$

Tương tự, $AD' \perp SC, CD \Rightarrow AD' \perp mp(SCD)$

$\Rightarrow AD' \perp C'D'$

Do đó $\widehat{AB'C'} = \widehat{AD'C'} = 1v$ nên tứ giác AB'C'D' nội tiếp trong một đường tròn.

b) • Do AB = AD $\Rightarrow$ SB = SD

$\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow AB' = AD' \Rightarrow \Delta AB'C' = \Delta AC'D'$

Vậy : dt (AB'C'D') = 2dt (ΔAB'C')

ΔSAB vuông $\Rightarrow AB' = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

ΔSAC vuông $\Rightarrow AC' = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

ΔAB'C' vuông $\Rightarrow B'C'^2 = AC'^2 - AB'^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2} - \dfrac{a^2x^2}{a^2 + x^2}$

Do đó : dt (AB'C'D') = AB'.B'C' $= \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}} a\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2 + b^2} - \dfrac{x^2}{a^2 + x^2}}$.

• AB'C'D' là hình vuông $\Leftrightarrow$ AB' = B'C'

$$\Leftrightarrow \frac{a^2x^2}{a^2 + x^2} = a^2\left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} - \frac{x^2}{a^2 + x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{a^2 + x^2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2b^2}{2a^2 + b^2}$$ ■

BT9. Cho hình chóp S.ABCD có ABD và CBD là hai tam giác đều cạnh a. Cạnh SA = h và vuông góc đáy. Gọi O là giao điểm AC và BD, M là điểm di động trên AC (M khác A và C). (Q) là mặt phẳng qua M và vuông góc AC.

a) Tùy theo M thuộc OC hay thuộc OA, hãy chỉ rõ thiết diện mà (Q) cắt hình chóp.

b) Đặt x = MC. Tính diện tích thiết diện trên theo x, a, h.

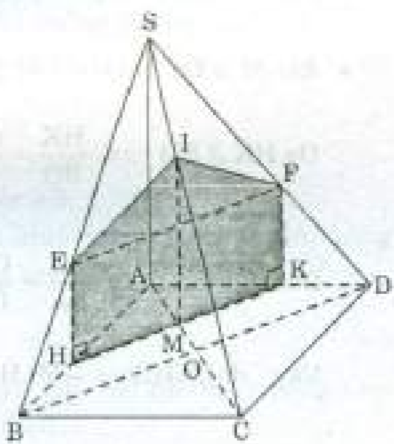
a) Do AC ⊥ BD, SA ⊥ AC nên (Q) là mặt phẳng qua M và song song SA, BD.

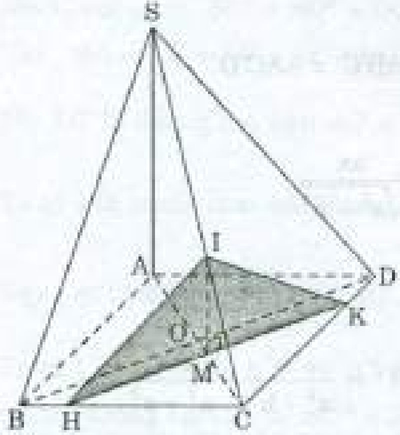
• *Khi M ∈ OA*

Mp (Q) song song BD, vậy cắt mp (ABCD) theo giao tuyến HK qua M và song song BD.

Mp (Q) song song SA, vậy cắt các mp (SAB), (SAC), (SAD) theo các giao tuyến HE // MI // KF // SA.

Mặt cắt là ngũ giác HKFIE.





- *Khi $M \in OC$*

Mp (Q) song song BD, vậy cắt mp (ABCD) theo giao tuyến HK qua M và song song BD.

Mp (Q) song song SA, vậy cắt mp (SAC) theo giao tuyến MI song song SA.

Mặt cắt là ΔIHK.

b) • *Khi $M \in OA$* do $CO \le CM < CA$ nên $\frac{a\sqrt{3}}{2} \le x < a\sqrt{3}$

Do MH // BD $\Rightarrow \frac{AM}{AO} = \frac{HM}{BO} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}.\frac{a}{2} = \frac{(a\sqrt{3} - x)}{\sqrt{3}}$

Do $\begin{cases} HE \,//\, SA \\ HM \,//\, OB \end{cases} \Rightarrow \frac{HE}{SA} = \frac{BH}{BA} = \frac{OM}{OA} \Rightarrow HE = h.\frac{x - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = h.\frac{2x - a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}}$

Do MI // SA $\Rightarrow \frac{MI}{SA} = \frac{CM}{CA} \Rightarrow MI = \frac{hx}{a\sqrt{3}}$

Ngũ giác HEIFK gồm hai hình thang vuông bằng nhau nên

dt (HEIFK) = 2dt (HEIM) = HM.(HE + MI)

$$= \frac{a\sqrt{3} - x}{\sqrt{3}}\left[\frac{h}{a\sqrt{3}}(2x - a\sqrt{3}) + \frac{hx}{a\sqrt{3}}\right] = \frac{h}{3a}(a\sqrt{3} - x)\left[3x - a\sqrt{3}\right].$$

- *Khi $M \in OC$* thì $0 < CM \le CO$ nên $0 < x \le \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do HK // BD $\Rightarrow \frac{HK}{BD} = \frac{CM}{CO} \Rightarrow HK = \frac{ax}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$

Do MI // SA $\Rightarrow \frac{MI}{SA} = \frac{CM}{CA} \Rightarrow MI = \frac{hx}{a\sqrt{3}}$

Vậy dt $(\Delta IHK) = \frac{1}{2}MI.HK = \frac{x}{\sqrt{3}}.\frac{hx}{a\sqrt{3}} = \frac{h}{3a}x^2$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện S.ABC có SA vuông góc mp (ABC), SA = a, ΔABC vuông cân tại B, BA = a. Gọi (P) là mặt phẳng qua trung điểm M của AB và vuông góc SB. Xác định và tính diện tích mặt cắt của (P) và tứ diện.

2. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là ΔABC vuông tại C, CA = a, CB = b. Mặt bên ABB'A' là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng qua C và vuông góc AB'. Xác định và tính diện tích mặt cắt của (P) và lăng trụ.

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, BA = BC = a, AD = 2a, SA vuông góc mp (ABCD), SA = 2a. Lấy điểm M trên AB sao cho AM = x $(0 < x < a)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc AB. Xác định và tính diện tích thiết diện của (α) và hình chóp.

4. Cho tứ diện S.ABC có SA vuông góc mp (ABC), SA = a, ΔABC đều cạnh a. Gọi I là trung điểm của AB. Lấy điểm M di động trên AC với AM = x $(0 < x < a)$. Qua M vẽ mp (α) vuông góc với AB.

a) Chứng minh $CI \perp (SAB)$.

b) Mặt phẳng (α) cắt tứ diện theo mặt cắt hình gì ?

c) Tính diện tích mặt cắt theo a và x.

d) Tìm x để diện tích mặt cắt lớn nhất.

5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mp (ABCD), SA = a. Lấy điểm M trên AC sao cho $AM = x\sqrt{2}$ với $0 < x < a$.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

b) Trên SD lấy điểm K sao cho SK = AM. Chứng minh MK // (SAB).

c) Mặt phẳng (P) qua M và vuông góc AB cắt hình chóp theo hình gì ? Tìm x để diện tích mặt cắt lớn nhất.

6. Cho tứ diện S.ABC có ΔABC vuông cân tại B, AB = a, SA vuông góc mp (ABC), $SA = a\sqrt{3}$. Lấy M trên AB với AM = x $(0 < x < a)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc AB.

a) Tìm mặt cắt của (α) và tứ diện S.ABC.

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x. Tìm x để diện tích này lớn nhất.

7. Cho tứ diện S.ABC có ΔABC đều cạnh a, SA vuông góc mp (ABC), SA = a. Xác định và tính diện tích mặt cắt của tứ diện S.ABC và mp (α) trong các trường hợp sau :

a) (α) qua S và vuông góc BC.

b) (α) qua A và vuông góc trung tuyến SI của ΔSBC.

c) (α) qua trung điểm M của SC và vuông góc AB.

8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mp (ABCD), $SA = a\sqrt{2}$. Vẽ AH vuông góc SB.

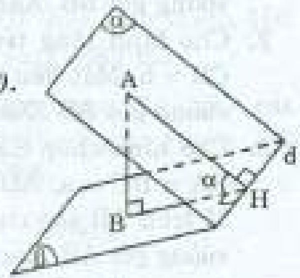
a) Chứng minh $\frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc SB. (α) cắt hình chóp theo thiết diện hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

Chủ đề 19

GÓC CỦA HAI MẶT PHẲNG

Phương pháp



– ***Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (α), (β).***

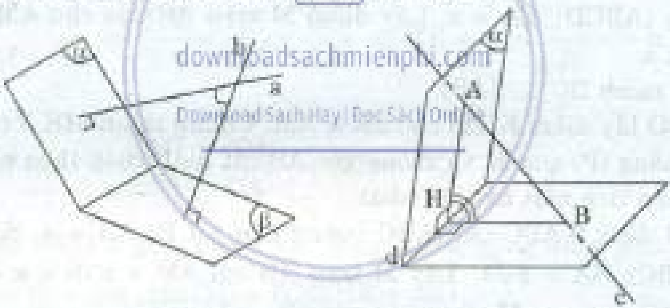
– ***Lấy A ∈ mp (α) dựng AB vuông góc mp (β).***

– ***Vẽ BH vuông góc d thì AH vuông góc d.***

Vậy $\widehat{AHB}$ là góc của (α) và (β).

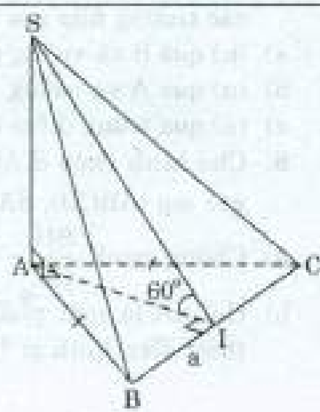
Chú ý :

- ***Nếu đa giác (H) trong mặt phẳng (P) có diện tích S, đa giác (H') nằm trong mặt phẳng (P') là hình chiếu vuông góc của (H) có diện tích S', φ là góc giữa (P) và (P') thì S' = Scosφ.***
- ***Nếu đã có đường thẳng a ⊥ mp (α) và đường thẳng b ⊥ mp (β) thì góc (nhọn) tạo bởi a và b là góc (nhọn) của (α) và (β).***
- ***Nếu đã có đường thẳng c ⊥ d và c cắt mp (α) tại A, cắt mp (β) tại B, vẽ AH ⊥ d thì $\widehat{AHB}$ là góc của (α) và (β).***



BT1. *Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối B 2002*

Cho tam giác ABC vuông cân có cạnh huyền BC = a. Trên đường vuông góc mặt phẳng ABC tại A lấy điểm S sao cho góc của hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60^0. Tính SA theo a.



- Gọi I là trung điểm BC.

ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow AI \perp BC$

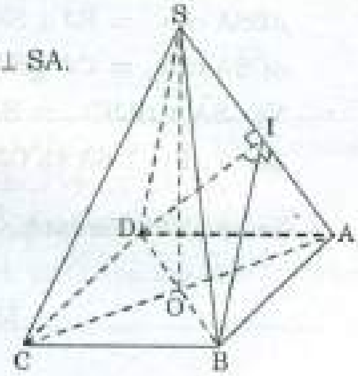
Do định lí ba đường vuông góc $\Rightarrow SI \perp BC$

Vậy $\widehat{SIA} = 60^0$

ΔSAI vuông $\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SA}{AI}$

$$\Rightarrow SA = \frac{BC}{2}\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$ ■

BT2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và SA = SB = SC = SD = a. Tính cosin góc của hai mp (SAB), (SAD).



Gọi I là trung điểm SA.

Do ΔSAD và ΔSAB đều nên $DI \perp SA$ và $BI \perp SA$.

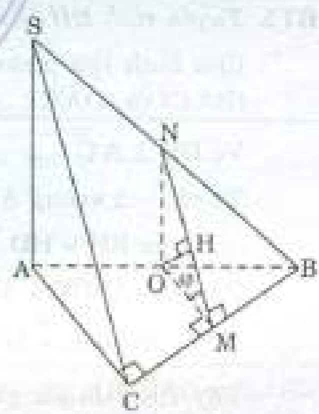
Vậy $\widehat{DIB}$ là góc phẳng nhị diện cạnh SA.

$\Delta DIB \Rightarrow BD^2 = DI^2 + IB^2 - 2DI.IB.\cos\hat{I}$

$$\Rightarrow \cos\hat{I} = \frac{2DI^2 - BD^2}{2DI^2} = \frac{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \cos\hat{I} = \frac{\frac{3a^2}{2} - 2a^2}{3a^2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos(\widehat{(SAB), (SAD)}) = \frac{1}{3} \ ■$$

BT3. Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc mp (ABC), đáy ABC là tam giác vuông tại C có AC = a, góc của mặt bên (SBC) và đáy (ABC) là φ. Gọi O là trung điểm AB, tính khoảng cách từ O đến mp (SBC) theo a và φ.



Gọi M và N lần lượt là trung điểm BC và SB.

Ta có : $BC \perp CA$ và $SA \Rightarrow BC \perp mp\ (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$

Mà MN // SC nên $MN \perp BC$

Ta có : OM // AC mà $AC \perp BC$

Vậy $OM \perp BC$

Do đó $\varphi = \widehat{NMO}$ và $BC \perp mp\ (OMN)$

Từ O vẽ $OH \perp MN$ thì $OH \perp MN$ và BC

nên $OH \perp mp\ (SBC)$.

Ta có : ΔOHM vuông $\Rightarrow \sin\varphi = \frac{OH}{OM}$

$\Rightarrow OH = d\ (O, mp\ (SBC)) = \frac{a}{2}\sin\varphi$ ■

BT4. *Đề dự bị ĐH khối A 2007*

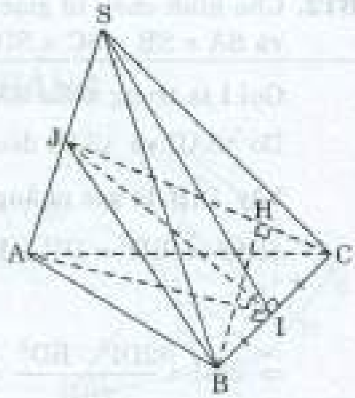
Cho hình chóp S.ABC có góc của hai mp (SBC) và (ABC) bằng 60^0, ABC và SBC là tam giác đều cạnh a. Tính khoảng cách từ B đến mp (SAC).

Gọi I là trung điểm BC

Do ΔABC và ΔSBC đều nên $AI \perp BC$ và $SI \perp BC$

Do đó : $\widehat{SIA} = 60^0$

Gọi J là trung điểm SA, vẽ BH ⊥ CJ



ΔBSA cân ⇒ BJ ⊥ SA

ΔCSA cân ⇒ CJ ⊥ SA

Vậy SA ⊥ (BJC) ⇒ SA ⊥ BH

Ta có : BH ⊥ SA và CJ nên BH ⊥ (SAC)

Ta có ΔSAI đều cạnh $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên :

$$IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$$

ΔJIC vuông tại I ⇒ $JC^2 = IJ^2 + IC^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{16}$

Ta có : dt (ΔJBC) = $\frac{1}{2}IJ.BC = \frac{1}{2}BH.JC \Rightarrow IJ.BC = BH.JC$

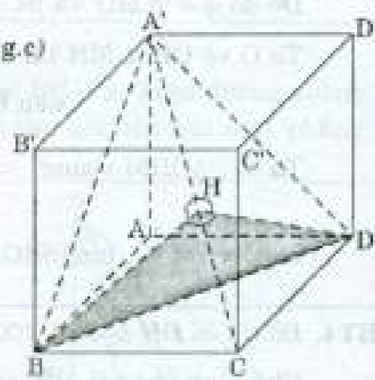
$$\Rightarrow BH = d(B, (SAC)) = \frac{IJ.BC}{JC} = \frac{\frac{3a}{4}.a}{\frac{a\sqrt{13}}{4}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$$ ■

Ghi chú : Xem cách giải 2 dùng thể tích V, bài 19, chủ đề 23.

BT5. *Tuyển sinh ĐH khối A 2003*

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính số đo của góc giữa hai mp (BA'C) và (DA'C).

Vẽ DH ⊥ A'C



Ta có : Δ vuông A'DC = Δ vuông A'BC (c.g.c)

⇒ BH = HD

Do đó : ΔBHC = ΔDHC (c.c.c)

⇒ $\widehat{BHC} = 1v$

Vậy $\widehat{BHD}$ là góc giữa hai mp (BA'C) và (DA'C).

ΔA'DC vuông tại D ⇒ $DH = \frac{DA'.DC}{A'C}$

$$= \frac{a\sqrt{2}.a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

ΔHBD ⇒ $BD^2 = BH^2 + HD^2 - 2BH.HD.\cos\widehat{BHD}$

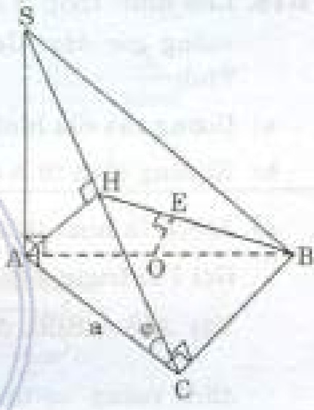
$$\Rightarrow \cos\widehat{BHD} = \frac{2HD^2 - BD^2}{2DH^2} = \frac{2\left(\frac{2}{3}a^2\right) - 2a^2}{\frac{4}{3}a^2}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{BHD} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BHD} = 120^0 \quad ■$$

BT6. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mp (ABC). Đáy là ΔABC vuông tại C có AC = a. Gọi φ là góc của hai mp (SBC) và mp (ABC).

a) Trên mặt bên (SAC) từ A vẽ AH ⊥ SC. Chứng minh AH ⊥ mp (SBC).

b) Gọi O là trung điểm AB. Tính khoảng cách từ O đến mp (SBC) theo a và φ.



Do SA ⊥ mp (ABC) mà BC ⊥ CA

nên BC ⊥ SC (định lí ba đường vuông góc).

Vậy $\widehat{SCA} = \varphi$ là góc phẳng nhị diện cạnh BC.

a) Vẽ AH ⊥ SC

Ta có : BC ⊥ SA và AC

$\Rightarrow$ BC ⊥ mp (SAC) $\Rightarrow$ BC ⊥ AH

Do đó : HA ⊥ mp (SBC)

b) Gọi E là trung điểm HB, ta có OE // AH

mà AH ⊥ mp (SBC) $\Rightarrow$ OE ⊥ mp (SBC)

ΔSAC vuông tại A nên $\tan\varphi = \frac{SA}{AC} \Rightarrow SA = a\tan\varphi$

và $$AH = \frac{SA.AC}{SC} = \frac{a^2\tan\varphi}{\sqrt{a^2 + a^2\tan^2\varphi}} = \frac{a\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sin\varphi}{\cos\varphi}.\cos\varphi = a\sin\varphi$$

Do đó : $OE = d\,(O, mp\,(SBC)) = \frac{AH}{2} = \frac{a}{2}\sin\varphi$ ■

BT7. Cho hình chóp S.ABC với đáy là ΔABC có BC = 2a, AB = AC = 3a. Biết rằng các mặt bên (SAB), (SBC), (SCA) đều tạo với đáy ABC góc 60^0. Kẻ đường cao SH của hình chóp. Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC và SA vuông góc BC.

- Từ H vẽ HM ⊥ BC, HK ⊥ AB và HN ⊥ AC.

Theo định lí ba đường vuông góc thì SM ⊥ BC, SK ⊥ AB, SN ⊥ AC.

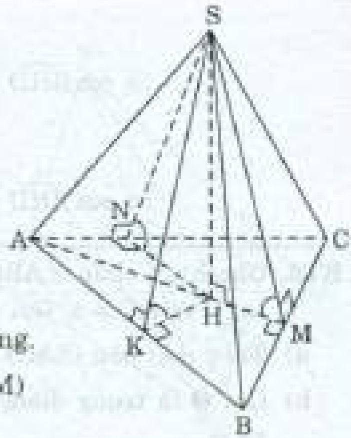
Ta có góc tạo bởi các mặt bên và đáy là 60^0

nên $\widehat{SMH} = \widehat{SKH} = \widehat{SNH} = 60^0$

Vậy $\Delta SHM = \Delta SHK = \Delta SHN$

$\Rightarrow HM = HK = HN$

Điểm H cách đều ba cạnh của ΔABC nên là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.



- ΔABC cân tại A có AH là đường phân giác trong nên $AH \perp BC$.

Mà $HM \perp BC$ $\Rightarrow$ ba điểm A, M, H thẳng hàng.

Ta có : $BC \perp AM$ và SH nên $BC \perp mp\ (SAM)$

$\Rightarrow BC \perp SA$ ■

BT8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 120^0$, SA vuông góc đáy. Góc của mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là 60^0. Tính :

a) Đường cao của hình chóp.

b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

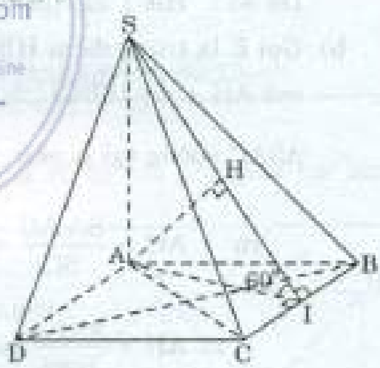
a) ABCD là hình thoi có $\widehat{BAD} = 120^0$ nên ΔABC đều.

Gọi I là trung điểm BC $\Rightarrow AI \perp BC$ và $SI \perp BC$

Vậy $\widehat{AIS} = (SBC, ABCD) = 60^0$

ΔSAI vuông $\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SA}{AI} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$$



b) Vẽ $AH \perp SI$

Do $BC \perp (SAI)$ $\Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $AH \perp (SBC)$

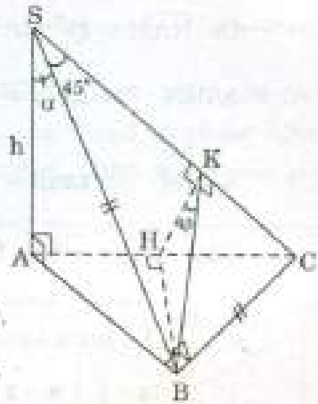
Ta có : $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{4}{9a^2} = \dfrac{16}{9a^2}$

$\Rightarrow AH = d(A, (SBC)) = \dfrac{3a}{4}$ ■

BT9. Cho hình chóp S.ABC có SA là đường cao, đáy là ΔABC vuông tại B, $\widehat{BSC} = 45^0$. Đặt $\widehat{ASB} = \alpha$. Tìm $\sin\alpha$ sao cho góc của hai mp (SBC) và (SAC) là 60^0.

Trong mp (ABC) vẽ $BH \perp AC$.

Ta có : $SA \perp mp\ (ABC)$ nên $SA \perp BH$.



Do đó : BH ⊥ mp (SAC) ⇒ BH ⊥ SC

Trên mp (SBC) vẽ BK ⊥ SC mà SC ⊥ BH

nên SC ⊥ mp (BHK) ⇒ SC ⊥ HK

Do đó $\widehat{HKB} = \varphi$ là góc của hai mp (SBC) và (SAC)

Ta có : SA ⊥ mp (ABC) và BC ⊥ BA

nên BC ⊥ SB (định lí ba đường vuông góc).

ΔSBC vuông có $\widehat{BSC} = 45^0$ nên là Δ vuông cân

⇒ K là trung điểm SC.

Đặt SA = h, ΔSAB vuông $\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{AB}{SA}$ và $\cos\alpha = \dfrac{SA}{SB}$

$$\Rightarrow AB = h\tan\alpha \quad \text{và} \quad SB = \frac{h}{\cos\alpha}$$

ΔSBC vuông cân $\Rightarrow BK = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{SB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{h\sqrt{2}}{2\cos\alpha}$

ΔBAC vuông $\Rightarrow BH = \dfrac{AB.BC}{AC} = \dfrac{h\tan\alpha.\dfrac{h}{\cos\alpha}}{\sqrt{h^2\tan^2\alpha + \dfrac{h^2}{\cos^2\alpha}}}$

$$\Rightarrow BH = \frac{\dfrac{h\sin\alpha}{\cos^2\alpha}}{\sqrt{\dfrac{\sin^2\alpha + 1}{\cos^2\alpha}}} = \frac{h\tan\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \widehat{HKB} = 60^0 \Leftrightarrow \sin 60^0 = \dfrac{HB}{BK}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h\tan\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}.\frac{2\cos\alpha}{h\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}$$

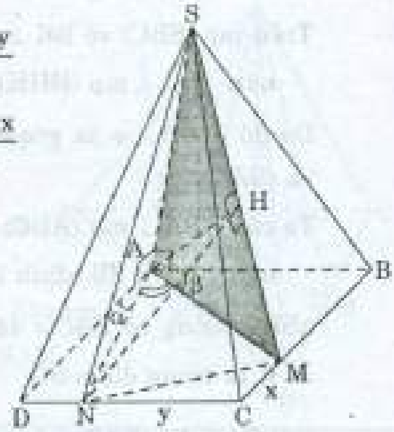
$$\Leftrightarrow 3(\sin^2\alpha + 1) = 8\sin^2\alpha \quad \Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$ ■

BT10. Cho hình vuông ABCD cạnh a trong mặt phẳng (P). Gọi M, N là hai điểm di động trên hai cạnh BC và CD với CM = x, CN = y. Tìm hệ thức giữa x, y sao cho mp (SAM) và mp (SAN) tạo với nhau góc 45^0.

Do SA ⊥ mp (P) nên SA ⊥ AM, AN.

Vậy $\widehat{NAM}$ là góc phẳng nhị diện (SAM, SAN).

Do $\widehat{NAM} = 45^0 \Rightarrow \widehat{DAN} + \widehat{MAB} = 45^0$



$\Delta ADN \quad \Rightarrow \tan\alpha = \tan\widehat{DAN} = \dfrac{DN}{AD} = \dfrac{a-y}{a}$

$\Delta ABM \quad \Rightarrow \tan\beta = \tan\widehat{MAB} = \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{a-x}{a}$

Vậy $\quad \tan(\alpha + \beta) = \tan 45^0$

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a-y}{a} + \frac{a-x}{a} = 1 - \frac{a-y}{a}.\frac{a-x}{a}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{(y+x)}{a} = \frac{(a-y)(a-x)}{a^2}$$

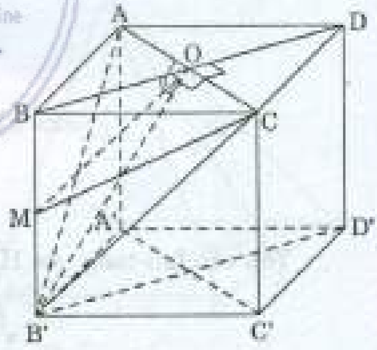
$$\Rightarrow a^2 - a(y+x) + (a-y)(a-x) = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2a(x+y) + xy = 0 \quad ■$$

BT11. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi O là tâm hình vuông ABCD, M là trung điểm cạnh BB'.

a) Tính diện tích ΔMOC theo a.

b) Tính $\tan\alpha$ trong đó α là góc giữa mp (B'OC) và mp (ABCD).

a) Ta có : $AC \perp BD$ và $BB' \perp AC$ nên $AC \perp mp(BD, B'D') \Rightarrow AC \perp OM$



ΔBMC vuông $\Rightarrow MC^2 = a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{5a^2}{4}$

ΔOMC vuông $\Rightarrow OM^2 = MC^2 - OC^2$

$$= \frac{5a^2}{4} - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3a^2}{4}$$

Do đó : $\quad dt(\Delta OMC) = \dfrac{1}{2}OM.OC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{8}$.

b) Mp (B'OC) và mp (ABCD) có giao tuyến là AC.

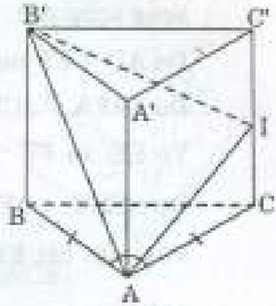
Ta có : $\quad AC \perp mp(BD, B'D') \Rightarrow AC \perp B'O$ mà $BD \perp AC$

Vậy $\widehat{BOB'}$ là góc phẳng nhị diện (B'OC, ABCD).

$\Delta BOB'$ vuông $\Rightarrow \tan\widehat{BOB'} = \dfrac{BB'}{OB} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \quad ■$

BT12. *Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối A 2003*

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^0$, cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh rằng tam giác AB'I vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I).



- $\Delta ABC \Rightarrow BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 120^0 \Rightarrow BC^2 = 3a^2$

  $\Delta B'BA \Rightarrow B'A^2 = 2a^2$

  $\Delta ICA \Rightarrow AI^2 = a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{5a^2}{4}$

  $\Delta B'C'I \Rightarrow B'I^2 = B'C'^2 + C'I^2 = 3a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4}$

  Ta có : $B'A^2 + AI^2 = 2a^2 + \dfrac{5a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4} = B'I^2$

  Vậy $\Delta AB'I$ vuông ở A.

- Ta có : $S_{\Delta AB'I} = \dfrac{1}{2}AI.AB' = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$

  $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}a^2\sin 120^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

  Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I) thì ta có :

$$\cos\varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}} = \frac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$ ∎

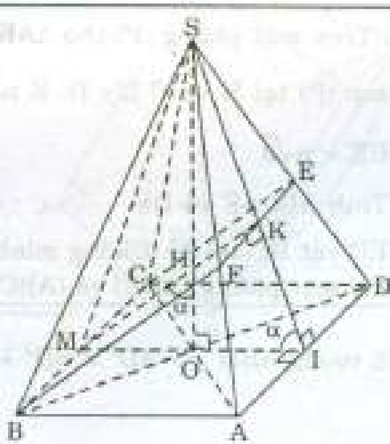
BT13. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD đáy hình vuông ABCD cạnh a, góc tạo bởi mặt bên và đáy là α $(45^0 < \alpha < 90^0)$.

a) Tính diện tích toàn phần hình chóp.

b) Gọi M là trung điểm BC. Từ M vẽ MK vuông góc mặt bên (SAD). Mặt phẳng (BCK) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện theo a và α.

a) Gọi I là trung điểm AD, ta có :

$OI \perp AD$, $SI \perp AD$ nên $\widehat{SIO} = \alpha$.



ΔSOI vuông $\Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{SO}{OI} \\ \cos\alpha = \dfrac{OI}{SI} \end{cases}$

Vậy $SO = \dfrac{a}{2}\tan\alpha$

và $SI = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$

Ta có : Dt toàn phần (S.ABCD) = 4dt (ΔSAD) + dt (ABCD)

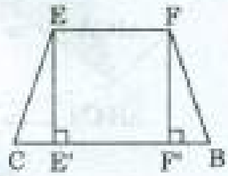
$$= 2SI.AD + a^2 = \frac{a^2}{\cos\alpha} + a^2.$$

b) • Ta có AD ⊥ MI và SO nên AD ⊥ mp (SMI).

Vẽ MK ⊥ SI thì MK ⊥ AD ⇒ MK ⊥ mp (SAD)

Do BC // AD nên mp (BCK) cắt mp (SAD) theo giao tuyến EF qua K và song song AD.

Do AD // EF mà AD ⊥ mp (SMI) ⇒ EF ⊥ MK.



Do ΔBFA = ΔCED nên BF = CE.

Vẽ EE' và FF' ⊥ BC.

Do ΔEE'C = ΔFF'B nên $\hat{B} = \hat{C}$ và CE' = BF'.

Vậy mặt cắt EFBC là hình thang cân có MK là đường cao.

• ΔMKI vuông $\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{MK}{MI} \Rightarrow MK = a\sin\alpha$

ΔSMI cân tại S có $\hat{I} = \alpha \Rightarrow \widehat{MSK} = \pi - 2\alpha$

ΔSMK vuông $\Rightarrow \cot\widehat{MSK} = \dfrac{SK}{MK}$

$$\Rightarrow SK = a\sin\alpha.\cot(\pi - 2\alpha) = -a\sin\alpha\cot2\alpha$$

Do EF // AD $\Rightarrow \dfrac{EF}{AD} = \dfrac{SK}{SI} = \dfrac{-a\sin\alpha.\cot2\alpha}{\dfrac{a}{2\cos\alpha}} = -\sin2\alpha.\cot2\alpha = -\cos2\alpha$

$$\Rightarrow EF = -a\cos2\alpha$$

Vậy dt (EFBC) = $\dfrac{MK}{2}(EF + BC) = \dfrac{a}{2}\sin\alpha(-a\cos2\alpha + a)$

$$= \frac{a^2}{2}\sin\alpha(1 - \cos2\alpha) = a^2\sin^3\alpha \;\blacksquare$$

BT14. Trên mặt phẳng (P) cho ΔABC đều cạnh a. Trên các đường vuông góc mp (P) tại B và C lấy D, E nằm cùng phía (P) sao cho BD = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và CE = $a\sqrt{3}$.

a) Tính AD, AE và DE.

b) ED cắt BC tại M. Chứng minh AM vuông góc mp (ACE). Tính góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và (ABC).

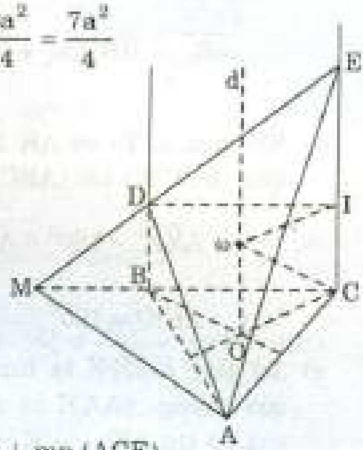
a) Δ vuông ABD $\Rightarrow AD^2 = BD^2 + AB^2 = \dfrac{3a^2}{4} + a^2 = \dfrac{7a^2}{4} \Rightarrow AD = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

Δ vuông ACE $\Rightarrow AE^2 = AC^2 + CE^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow AE = 2a$

Gọi I là trung điểm CE.

ΔDEI vuông $\Rightarrow DE^2 = DI^2 + IE^2 = a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$

$\Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.



b) • Do BD // EC và $BD = \frac{EC}{2}$ nên BD là đường trung bình ΔMEC.

Vậy B là trung điểm MC.

Ta có : $BM = BC = BA = a$

Vậy ΔMAC vuông tại A.

Ta có : $AM \perp AC$, $AM \perp EC$ nên $AM \perp$ mp (ACE).

• Giao tuyến của hai mặt phẳng (ADE) và (ABC) là AM.

Mà $AM \perp AC$, $AM \perp AE$ nên $\widehat{EAC}$ là góc của mp (ADE) và mp (ABC).

Ta có : $\tan\widehat{EAC} = \frac{EC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$. Vậy $\widehat{EAC} = \frac{\pi}{3}$ ■

BT15. Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Chân đường cao hạ từ A' trùng với tâm của đáy (ABC), độ dài của đường cao bằng h.

a) Tính diện tích xung quanh của lăng trụ đã cho.

b) Tính góc giữa mặt bên (BCC'B') với đáy (ABC) khi h = a.

c) Gọi K là trung điểm của BC, K' là trung điểm của B'C'. Hãy xác định biểu thức liên hệ giữa h và a để AK' đi qua trực tâm của $\Delta AKA'$.

a) Gọi K và K' là trung điểm BC và B'C'.

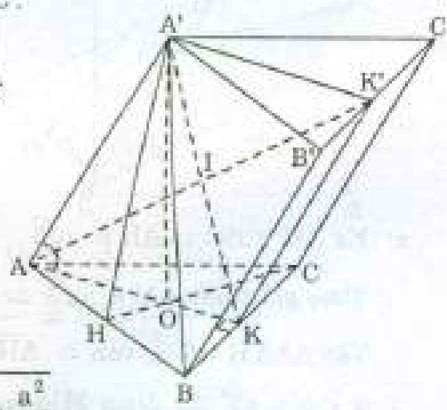
$AK \perp BC \Rightarrow A'K \perp BC$.

Vậy $BC \perp$ mp (AA'K) $\Rightarrow BC \perp KK'$

Do : BB' // KK' $\Rightarrow BC \perp BB'$.

Tứ giác BB'C'C là hình chữ nhật.

Hai tứ giác AA'B'B và AA'C'C là những hình bình hành bằng nhau nên :



$$S_{xq} = S_{BB'C'C} + 2S_{AA'B'B}$$

Ta có : $A'H = \sqrt{A'O^2 + OH^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$

$$BB' = AA' = \sqrt{A'O^2 + AO^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}$$

$$S_{xq} = BB'.CC' + 2.\frac{1}{2}A'H.AB = a\left(\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}} + \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}\right).$$

b) Khi h = a. Ta có AK ⊥ BC, K'K ⊥ BC ⇒ $\widehat{AKK'}$ chính là góc giữa mặt bên (BCC'B') với (ABC).

$$\widehat{AKK'} = 180^0 - \widehat{A'AK} \quad \Rightarrow \tan\widehat{AKK'} = -\tan\widehat{A'AK} = -\frac{A'O}{AO} = -\sqrt{3}$$

Vậy $\widehat{AKK'} = 120^0$.

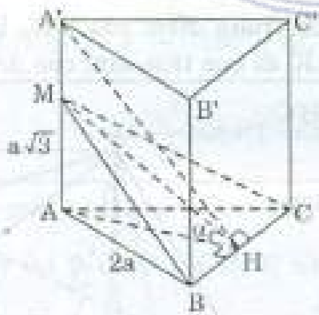
c) Tứ giác AA'K'K là hình bình hành nên AK' cắt A'K tại trung điểm I của chúng. ΔAA'K có AO là đường cao nên muốn A'K đi qua trực tâm của nó thì AK' ⊥ A'K ⇒ AA'K'K là hình thoi ⇒ AA' = AK

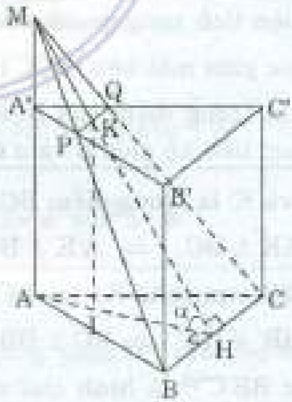
$$\Rightarrow h^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{12} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{15}}{6} \quad ■$$

BT16. Cho lăng trụ đứng tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng 2a, đường cao của lăng trụ bằng $a\sqrt{3}$. Người ta cắt lăng trụ đã cho bằng một mặt phẳng đi qua cạnh đáy BC và tạo với mặt phẳng đáy một góc nhọn α.

a) Xác định hình dạng các thiết diện tạo thành tùy theo giá trị của α.

b) Tính diện tích của thiết diện.





a) Kẻ AH ⊥ BC ⇒ AH = $a\sqrt{3}$.

Theo giả thiết AA' = $a\sqrt{3}$ ⇒ AA' = AH

Vậy ΔAA'H vuông cân ⇒ $\widehat{AHA'} = 45^0$. Do đó nếu :

+ $0 < \alpha \le 45^0$ thì điểm M ở trong đoạn AA'. Khi đó thiết diện là ΔMBC cân (MB = MC).

+ $45^0 < \alpha < 90^0$ thì điểm M ở ngoài đoạn AA'. Khi đó thiết diện là hình thang cân BPQC (PB = QC).

b) + Khi $0 < \alpha \le 45^0$ thì $S_{td} = \dfrac{1}{2}MH.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AH}{\cos\alpha}BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{\cos\alpha}$

+ Khi $45^0 < \alpha < 90^0$ thì $S_{td} = \dfrac{1}{2}KH.(PQ + BC)$

Kẻ KI ⊥ (ABC)

Ta có : $KH = \dfrac{AA'}{\sin\alpha} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sin\alpha}$ và $IH = KI\cot\alpha = a\sqrt{3}\cot\alpha$

$$\Rightarrow AI = AH - IH = a\sqrt{3}(1 - \cot\alpha) \text{ và } PQ = \frac{2AI}{\sqrt{3}} = 2a(1 - \cot\alpha)$$

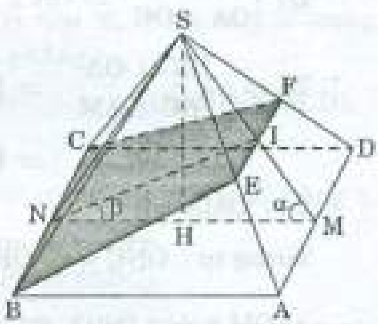
Do đó : $S_{td} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{\sin\alpha}(2 - \cot\alpha)$ ■

BT17. Cho hình chóp tứ giác đều cạnh đáy a và các mặt bên hợp với mặt đáy một góc α. Dựng một mặt phẳng qua cạnh đáy BC và hợp với mặt đáy một góc β bé hơn α.

Chứng minh rằng thiết diện của mặt phẳng đó là một hình thang cân. Tính diện tích thiết diện đó.

- Gọi SH là đường cao hình chóp, vì S.ABCD là hình chóp tứ giác đều nên H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. Qua H kẻ MN // AB thì $\widehat{SMH} = \alpha$.

Do BC // mp (SAD) nên mp (P) cắt mp (SAD) theo giao tuyến EF thì EF // BC. Do đó BCFE là hình thang.



Vì EF // AD ⇒ EA = FD

Mà AB = CD = a và $\widehat{EAB} = \widehat{FDC}$

nên ΔABE = ΔDCF ⇒ BE = CF.

Vậy BCFE là hình thang cân.

- Gọi I là giao điểm giữa SM và EF.

Ta có IN ⊥ CB nên $\widehat{INM} = \beta$

Trong ΔMIN, do định lí hàm số sin, ta có :

$$\frac{IN}{\sin\alpha} = \frac{MN}{\sin[\pi - (\alpha + \beta)]} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow IN = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Tương tự như trên trong ΔMIN tính được $MI = \dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

Ta có : $SM = \dfrac{MH}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$

$$\Rightarrow SI = SM - MI = \frac{a}{2\cos\alpha} - \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}$$

Trong ΔSAD ta có : $\dfrac{EF}{AD} = \dfrac{SI}{SM} \Rightarrow EF = AD.\dfrac{SI}{SM} = \dfrac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

Vậy : $dt\,(EFCB) = \dfrac{IN}{2}(EF+CB) = \dfrac{a\sin\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)}\left[\dfrac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} + a\right]$

$$= \frac{a^2\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} \quad ■$$

BT18*. *Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối A 2002*

Cho tứ diện O.ABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mp (ABC) và các mặt phẳng (OBC), (OCA) và (OAB).

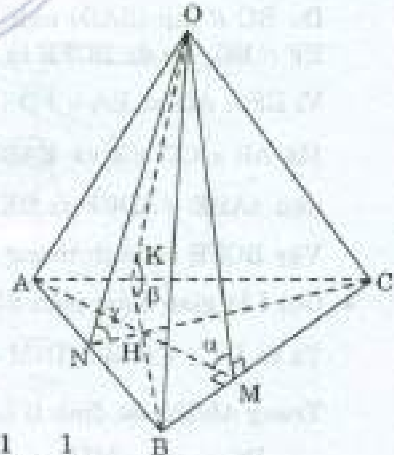
Chứng minh : $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sqrt{3}$.

Đặt BC = a, AC = b, AB = c, OA = x, OB = y, OC = z.

Do các tam giác AOB, BOA, COA vuông tại O nên :

$$\begin{cases} a^2 = y^2 + z^2 \\ b^2 = x^2 + z^2 \\ c^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < b^2 + c^2 \\ b^2 < c^2 + a^2 \\ c^2 < a^2 + b^2 \end{cases}$$

Vậy ΔABC là tam giác nhọn. Do đó trực tâm H nằm trong ΔABC. Gọi AM, BK, CN là ba đường cao của ΔABC.



Do $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp mp\,(OBC)$

Ta có : $\begin{cases} BC \perp OA \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp\,(OAM)$

$$\Rightarrow BC \perp OM$$

Vậy $\widehat{OMA} = \alpha$.

Tương tự : $\widehat{ONC} = \gamma$, $\widehat{OKB} = \beta$

ΔAOM vuông tại O $\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{OM}{AM}$

ΔBOC vuông $\Rightarrow \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$

$$\Rightarrow OM^2 = \frac{y^2z^2}{y^2+z^2} \quad \Rightarrow OM = \frac{yz}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

ΔAOM vuông $\Rightarrow AM^2 = OA^2 + OM^2 = x^2 + \dfrac{y^2z^2}{y^2+z^2} = \dfrac{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{y^2+z^2}$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{y^2+z^2}}$$

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{OM}{AM} = \dfrac{yz}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}}$

Tương tự : $\cos\beta = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}}$ và $\cos\gamma = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có :

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{xy + yz + zx}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}}$$

$$\le \frac{xy + yz + zx}{\frac{1}{\sqrt{3}}(xy + yz + zx)} = \sqrt{3} \quad \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a. Tính :

a) Khoảng cách từ A đến (SBC).

b) Góc của hai mặt phẳng (SBC) và (SCD), (SBC) và (SAD).

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, AB = a, BC = 2a, SO = h, SO vuông góc mp (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính góc của hai mặt phẳng :

a) (SMN) và (SAB). b) (SMN) và (SCD). c) (SAB) và (SCD).

d) (SAB) và (ABCD). e) (SAB) và (SAC).

3. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của CC'. Tính góc của :

a) IB và A'B'. b) (IAB) và (ABC).

4. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông với BA = BC = a, SA vuông góc mp (ABC) và SA = a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tính góc của hai mặt phẳng :

a) (SAC) và (BCS). b) (SEF) và (SBC).

5. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O, SA vuông góc mp (ABCD). Tính SA theo a sao cho góc giữa hai mp (SBC) và (SCD) bằng 120^0.

6. Cho hình vuông ABCD cạnh a, SA vuông góc mp (ABCD) và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc của hai mặt phẳng :

a) (SBC) và (ABC). b) (SBD) và (ABD). c) (SAB) và (SCD).

7. Cho tứ diện ABCD có ΔABC vuông cân, AB = AC = a, ΔDBC đều. Góc của hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) là 30^0.

a) Tính AD và d(A, (BCD)).

b) Tính góc của hai mặt phẳng (ABD) và (BDC), (BAD) và (ADC).

8. Cho hình thoi ABCD cạnh a, tâm O, $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, SO vuông góc mp (ABCD) và $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc của hai mặt phẳng :

a) (SAB) và (SAD). b) (SBC) và (ABC).

9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với AB = 2a, AD = DC = a. SA vuông góc mp (ABCD) và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc của hai mặt phẳng :

a) (SBC) và (ABC). b) (SAB) và (SBC). c) (SBC) và (SCD).

10. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau theo giao tuyến Δ. Lấy hai điểm A, B trên Δ sao cho AB = a. Vẽ ΔSAB đều trong mp (P), hình vuông ABCD trong mp (Q). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SB. Gọi SH là đường cao của ΔSAB.

a) Tính góc của (SCD) với (P) và (Q).

b) Gọi O_1 là giao điểm của JC và ID, H_1 là giao điểm của SH và mp (IJCD). Chứng minh SO_1 vuông góc với SA và CD.

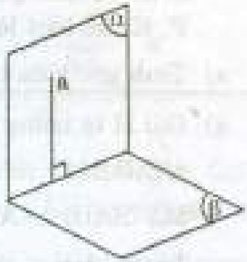
c) Tính góc của mp (IJO_1) với mp (P) và mp (Q).

11. Cho tứ diện S.ABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ là các góc tạo bởi các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SAC) với đáy (ABC). Chứng minh : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Chủ đề 20

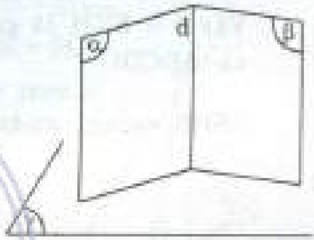
HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC NHAU

Định nghĩa : ***Hai mặt phẳng gọi là vuông góc nhau nếu góc của chúng bằng 90^0.***



Định lí 1 : ***Nếu mặt phẳng này có chứa một đường thẳng vuông góc mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng vuông góc nhau.***

Định lí 2 : ***Nếu hai mặt phẳng vuông góc nhau mà có một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng thì đường thẳng này vuông góc mặt phẳng kia.***



Định lí 3 : ***Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc mặt phẳng kia.***

BT1. Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc mp (DBC). Gọi DE là đường cao của ΔBCD.

a) Chứng minh mp (ADE) vuông góc mp (ABC).

b) Từ B vẽ BK vuông góc CD và BF vuông góc AC. Chứng minh mp (BFK) vuông góc mp (ABC).

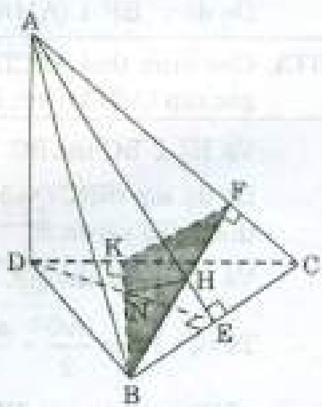
c) Gọi H và N lần lượt là trực tâm ΔABC và ΔBCD. Chứng minh NH vuông góc mp (ABC).

a) Ta có : $AD \perp mp\ (DBC) \Rightarrow AD \perp BC$

mà $BC \perp DE$ nên $BC \perp mp\ (ADE)$

Ta có $BC \subset mp\ (ABC)$

nên $mp\ (ABC) \perp mp\ (ADE)$.



b) Ta có : $BK \perp CD$ và AD

nên $BK \perp mp\ (ABC) \Rightarrow BK \perp AC$

Mà $BF \perp AC$ nên $AC \perp mp\ (BKF)$.

Ta có : $AC \subset mp\ (ABC)$

nên $mp\ (ABC) \perp mp\ (BFK)$.

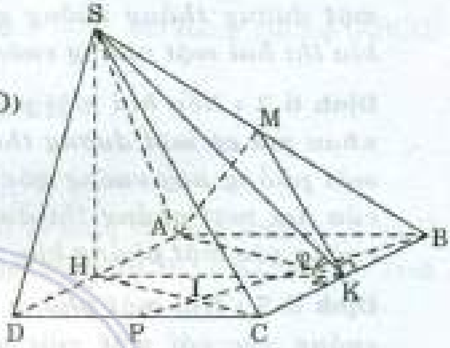
c) Ta có : $AC \perp mp(BFK) \Rightarrow AC \perp NH$

Ta có : $BC \perp mp(ADE) \Rightarrow BC \perp NH$

Do đó : $NH \perp mp(ABC)$ ■

BT2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, P, K lần lượt là trung điểm SB, DC, CB.

a) Tính góc giữa (SCB) và (ABCD). b) Chứng minh AM vuông góc BP.



a) Gọi H là trung điểm AD

ΔSAD đều $\Rightarrow SH \perp AD$

Mà $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Ta có : $HK \perp BC \Rightarrow SK \perp BC$

Vậy $\varphi = \widehat{SKH}$ là góc giữa (SBC) và (ABCD)

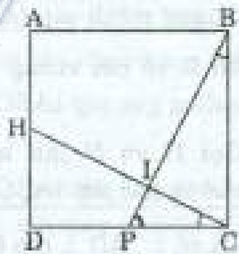
ΔSHK vuông $\Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SH}{HK}$

$= \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) Ta có : $\Delta HDC = \Delta PCB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{HCD} = \widehat{PBC}$

ΔPBC vuông tại C $\Rightarrow \widehat{PBC} + \widehat{BPC} = 1v \Rightarrow \widehat{HCD} + \widehat{BPC} = 1v$

$\Rightarrow HC \perp BP$



Mà $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BP$

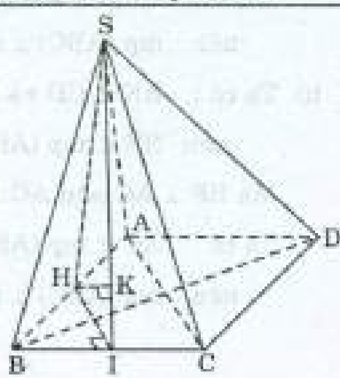
Vậy $BP \perp (SHC)$

Mặt khác : MK // SC và AK // HC

Vậy (AMK) // (SHC)

Do đó : $BP \perp (AMK) \Rightarrow BP \perp AM$ ■

BT3. Cho hình thoi ABCD cạnh a, AC = a. Từ H trung điểm AB, vẽ SH vuông góc mp (ABCD) với SH = a. Tính khoảng cách từ A đến mp (SBC).



Vẽ $HI \perp BC$ thì $BC \perp mp(SHI)$.

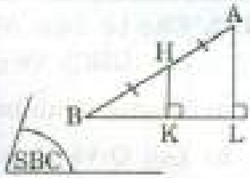
Do đó mp (SBC) vuông góc mp (SHI) theo giao tuyến SI.

Vẽ $HK \perp SI$ thì $HK \perp mp(SBC)$.

Ta có : $HI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

ΔSHI vuông $\Rightarrow HK = d(H, (SBC))$

$$\Rightarrow HK = \frac{SH.HI}{SI} = \frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{16}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$



Gọi AL là khoảng cách từ A đến mp (SBC).

Ta có : $\frac{AL}{HK} = \frac{AH}{AB} = 2 \Rightarrow AL = d\,(A, (SBC)) = 2HK = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ ■

BT4. *Tuyển sinh ĐH khối A 2002*

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, độ dài các cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, SC. Biết rằng mp (AMN) vuông góc mp (SBC). Tính diện tích tam giác AMN.

Gọi H là tâm của tam giác đều ABC $\Rightarrow$ HA = BH = HC.

S.ABC là hình chóp tam giác đều $\Rightarrow$ SA = SB = SC

H và S cách đều ba điểm A, B, C nên SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Do đó SH $\perp$ mp (ABC).

Gọi I là trung điểm BC.

Do mp (AMN) $\perp$ mp (SBC) theo giao tuyến MN.

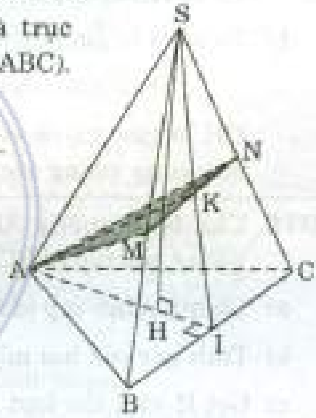
Vẽ AK $\perp$ MN thì AK $\perp$ mp (SBC) $\Rightarrow$ AK $\perp$ SI

ΔAMN cân tại A nên K là trung điểm MN.

Do ΔSBC cân nên S, K, I thẳng hàng và K là trung điểm SI.

ΔSAI có AK $\perp$ SI và K là trung điểm SI

nên cân tại S $\Rightarrow SA = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



ΔSAH vuông $\Rightarrow SH^2 = SA^2 - AH^2 = AI^2 - \left(\frac{2}{3}AI\right)^2 = \frac{5}{9}AI^2$

$$\Rightarrow SH^2 = \frac{5}{9} \times \frac{3a^2}{4} \quad \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{15}}{6}$$

Ta có : $\quad dt\,(\Delta SAI) = \frac{1}{2}SH.AI = \frac{1}{2}AK.SI$

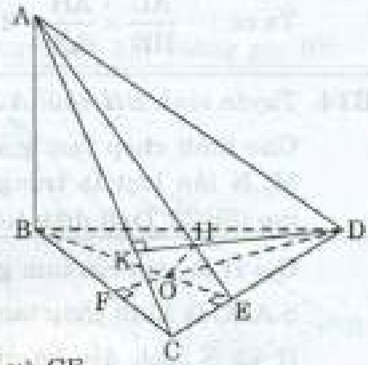
$$\Rightarrow AK = \frac{SH.AI}{SI} = \frac{SH.AI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{15}{36}a^2 + \frac{3a^2}{36}}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Do đó : $\quad dt\,(\Delta AMN) = \frac{AK.MN}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$ ■

BT5. Cho tứ diện ABCD có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc mp (DBC). Vẽ các đường cao BE, DF của ΔBCD, đường cao DK của ΔACD.

a) Chứng minh hai mặt phẳng (ABE) và (DFK) cùng vuông góc mp (ADC).

b) Gọi O và H là trực tâm ΔBCD và ΔACD. Chứng minh OH vuông góc mp (ADC).



a) Hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) có giao tuyến là AB mà cùng vuông góc mp (DBC) nên $AB \perp (DBC)$.

Ta có $CD \perp BE$ và AB nên $CD \perp (ABE)$

Mà $CD \subset (ACD)$ nên $(ADC) \perp (ABE)$

Ta có $DF \perp BC$ và AB nên $DF \perp (ABC)$

$\Rightarrow DF \perp AC$ mà $DK \perp AC \Rightarrow AC \perp (DFK)$

Ta có $AC \subset (ACD) \Rightarrow (ACD) \perp (DFK)$.

b) Ta có O là giao điểm của hai đường cao BE và CF.

H là giao điểm của hai đường cao AE và DK.

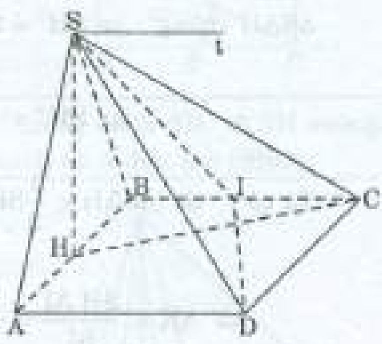
OH là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABE) và (DFK) mà hai mặt phẳng này cùng vuông góc mp (ADC) nên $OH \perp (ADC)$.

BT6. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm S sao cho ΔSAB đều và mp (SAB) vuông góc mp (ABCD).

a) Chứng minh mp (SAB) vuông góc với hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tính góc của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

c) Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC. Chứng minh mp (SHC) và mp (SDI) vuông góc nhau.



a) Gọi H là trung điểm của AB.

ΔSAB đều nên $SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SH \perp AD$

Mà $AD \perp AB$ nên $AD \perp (SAB)$.

Do $AD \subset (SAD)$ nên $(SAD) \perp (SAB)$.

Do BC // AD nên $BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

b) Mp (SAD) và (SBC) cùng chứa hai đường thẳng song song AD và BC nên chúng cắt nhau theo giao tuyến St // BC // AD. Vậy $St \perp (SAB)$.

Do đó $\widehat{ASB} = 60^0$ là góc của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

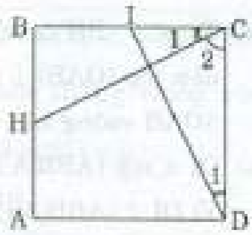
c) Ta có $\Delta BHC = \Delta DIC$ nên $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$

Mà $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^0$ nên $\hat{C}_2 + \hat{D}_1 = 90^0$

Vậy $CH \perp DI$

Mặt khác $DI \perp SH$ nên $DI \perp (SHC)$

Mà $DI \subset (SDI)$ nên $(SDI) \perp (SHC)$.



BT7. Cho hình chóp S.ABC, có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{BAC} = \alpha$ và cạnh $BC = a$. Mặt bên (SBC) vuông góc với đáy (ABC) và các mặt bên (SAB), (SAC) cùng tạo với đáy góc β.

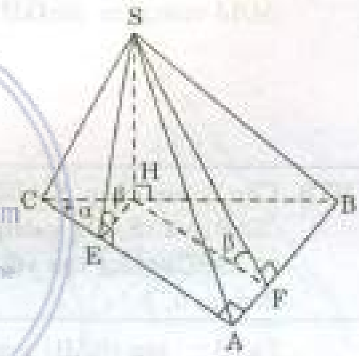
a) Kẻ $SH \perp BC$. Chứng minh SH là đường cao của hình chóp đã cho.

b) Kẻ $SE \perp AC$, $SF \perp AB$. Chứng minh rằng $\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = \beta$.

c) Tính SH theo a, α và β.

a) Ta có mp (SBC) $\perp$ mp (ABC) và $SH \perp BC$;
$SH \subset$ mp (SBC) nên $SH \perp$ mp (ABC).

Vậy SH là đường cao hình chóp S.ABC.



b) Ta có : $SE \perp AC \Rightarrow EH \perp AC$

Ta có : $SF \perp AB \Rightarrow FH \perp AB$.

Vậy $\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = \beta$.

c) Ta có : $AB = BC.\sin\alpha = a\sin\alpha$

$AC = BC\cos\alpha = a\cos\alpha$

Ta có : $\Delta SHE = \Delta SHF \Rightarrow$ Tứ giác AEHF là hình vuông.

Vì EH // AB ta có : $\dfrac{EH}{AB} = \dfrac{CE}{CA} \Rightarrow \dfrac{EH}{AB} = \dfrac{CA - EA}{CA} = \dfrac{CA - EH}{CA}$

$\Rightarrow EH.CA = AB.CA - AB.EH$

Suy ra : $EH = \dfrac{AB.AC}{AB + AC} = \dfrac{a\sin\alpha.a\cos\alpha}{a\sin\alpha + a\cos\alpha} = \dfrac{a\sin 2\alpha}{2(\sin\alpha + \cos\alpha)}$

Trong ΔSHE vuông tại H : $SH = EH.\tan\beta = \dfrac{a\sin 2\alpha.\tan\beta}{2(\sin\alpha + \cos\alpha)}$ ■

BT8. Cho hình lăng trụ đứng, chiều cao có độ dài h, đáy là hai tam giác vuông AOB và A'O'B', trong đó $OA = OB = a$.

a) Gọi I là trung điểm AB, chứng minh OI vuông góc AB'.

b) Hạ OJ vuông góc A'B. Chứng minh rằng A'B vuông góc mp (OIJ) và ΔOIJ là tam giác vuông.

c) Tính sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AB'B) và (OA'B) theo a và h.

a) Ta có : $BB' \perp mp(OAB)$ mà $BB' \subset mp(ABB'A')$

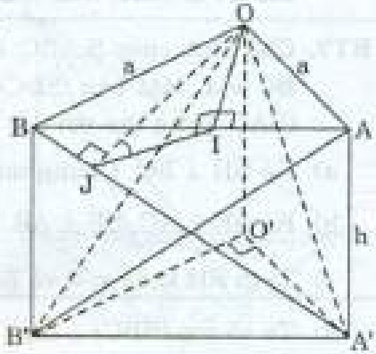
nên $mp(OAB) \perp mp(ABB'A')$ theo giao tuyến AB.

ΔOAB vuông cân $\Rightarrow OI \perp AB \Rightarrow OI \perp mp(ABB'A') \Rightarrow OI \perp B'A$.

b) $OI \perp mp(ABB'A') \Rightarrow OI \perp A'B$, mặt khác $OJ \perp A'B \Rightarrow A'B \perp mp(OIJ)$

Vì $OI \perp (ABB'A') \Rightarrow OI \perp IJ \Rightarrow \Delta OIJ$ vuông tại I.

c) Ta có $A'B \perp mp(OIJ)$ nên $\widehat{OJI}$ là góc của hai mặt phẳng $(AB'B)$ và $(OA'B)$.



Ta có : $OA' = \sqrt{a^2 + h^2}$; $A'B = \sqrt{2a^2 + h^2}$

$\Delta OBA'$ vuông $\Rightarrow OA'.OB = OJ.A'B$

$$\Rightarrow OJ = \frac{a\sqrt{a^2 + h^2}}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$$

ΔOIJ vuông $\Rightarrow \sin\widehat{OJI} = \dfrac{OI}{OJ}$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2a^2 + h^2}}{a\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{\sqrt{2a^2 + h^2}}{\sqrt{2a^2 + 2h^2}} \quad ■$$

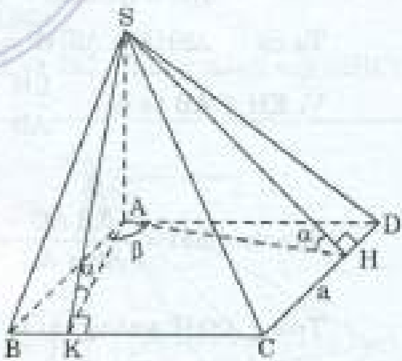
BT9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc đáy và tạo với nhau góc β, mặt bên (SCD) và (SBC) cùng tạo với đáy góc α. Tính diện tích xung quanh hình chóp theo a, α, β.

Ta có : $mp(SAB) \perp mp(ABCD)$

và $mp(SAD) \perp mp(ABCD)$

Mà hai mp (SAB) và (SAD) có giao tuyến SA nên $SA \perp mp(ABCD)$.

Vậy góc giữa hai mặt bên (SAB) và (SAD) là $\widehat{BAD} = \beta$.



Từ S hạ $SK \perp BC$ và $SH \perp CD$

$\Rightarrow BC \perp AK$ và $CD \perp AH$.

Vậy $\widehat{SKA} = \widehat{SHA} = \alpha$.

Ta có : $2dt(\Delta SAB) = SA.AB = (AK.\tan\alpha)AB = AB\sin(\pi - \beta)\tan\alpha.BA$

$$= a^2\sin\beta.\tan\alpha$$

và $2dt(\Delta SBC) = SK.BC = \dfrac{AK}{\cos\alpha}BC = \dfrac{a^2\sin\beta}{\cos\alpha}$

Vậy : $S_{xq} = \dfrac{a^2\sin\beta}{\cos\alpha}(1 + \sin\alpha)$ ■

BT10. Trong mặt phẳng (P) cho hình thoi ABCD cạnh bằng a, giao điểm hai đường chéo là O và $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Từ O dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và trên đó lấy điểm S sao cho SB = SD = a.

a) Chứng minh rằng $\widehat{ASC}$ là góc vuông và $SC \perp BD$.

b) Tính diện tích toàn phần của hình chóp S.ABCD theo a.

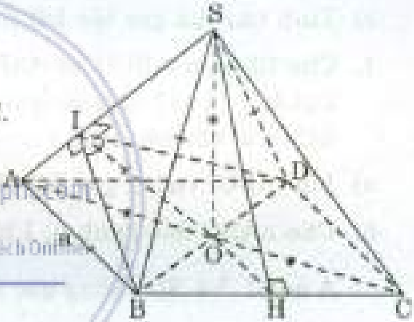
c) Chứng minh mp (SBA) vuông góc mp (DSA).

a) $SO \perp$ mp (ABCD) và OA = OC; OB = OD $\Rightarrow$ SA = SC; SB = SD

Trong ΔSOB vuông : $SO^2 = SB^2 - OB^2 = \frac{2a^2}{3}$

Trong ΔOBC vuông : $OC^2 = \frac{2a^2}{3}$, vậy SO = OA = OC.

Do đó $\widehat{ASC}$ vuông.



Ta có : $BD \perp AC$ và $BD \perp SO$

$\Rightarrow BD \perp$ mp (SAC) $\Rightarrow BD \perp SC$.

b) Kẻ $OH \perp BC \Rightarrow SH \perp BC$

ΔOBC vuông $\Rightarrow OH = \frac{OB.OC}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

và $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$

Do đó : S_{tp} = 4dt (ΔSBC) + dt (ABCD) = 2SH.BC + 2OA.OB

$$= \frac{4a^2\sqrt{2}}{3} + \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{4a^2\sqrt{2}}{3} + \frac{2a^2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}a^2.$$

c) Kẻ $BI \perp SA$ thì I là trung điểm của SA vì SB = BA.

Tương tự $DI \perp SA$ (vì ΔSDA cân).

Vậy $\widehat{BID}$ là góc phẳng của nhị diện (BSA, DSA).

Ta có $OI \perp SA$ (ΔSOA vuông cân) nên

$$OI = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3};\ DB = 2OB = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Do $OI = \frac{1}{2}BD$ nên ΔBID vuông tại I.

Vậy mp (SBA) $\perp$ mp (DSA) ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc nhau theo giao tuyến Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B sao cho AB = 8. Lấy C trên (α), D trên (β) sao cho AC vuông góc BD, AC = 6, BD = 24. Tính CD.

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, ΔSAB cân tại S, mp (SAB) vuông góc mp (ABCD), SC tạo với đáy góc α.

a) Tính khoảng cách từ S đến mp (ABCD).

b) Tính diện tích mặt cắt của hình chóp và mặt phẳng trung trực của BC.

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$, $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

a) Tính SC và khoảng cách từ S đến mp (ABCD).

b) Chứng minh mp (SAC) vuông góc mp (ABCD) và SB vuông góc BC.

c) Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD).

4. Cho tứ diện ABCD có ΔABC đều cạnh a, AD vuông góc BC và AD = a. Gọi H và I lần lượt là trung điểm của BC và AH. Khoảng cách từ D đến BC là a. Chứng minh :

a) Mp (ABC) vuông góc mp (ADH).   b) DI vuông góc mp (ABC).

5. Cho ΔABC đều cạnh a, I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng của A qua I. Vẽ SD vuông góc mp (ABCD) và $SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

a) Chứng minh mp (SBC) vuông góc mp (SAD), mp (SAB) vuông góc mp (SAC).

b) Tính khoảng cách từ I đến SA.

6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mp (ABCD). Lấy M trên BC sao cho $BM = \dfrac{a}{2}$, lấy N trên DC sao cho $DN = \dfrac{3a}{4}$. Chứng minh mp (SAM) vuông góc mp (SMN).

7. Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc mp (ABC).

a) Chứng minh mp (ABB') vuông góc mp (ACC').

b) Gọi AH, AK lần lượt là đường cao của ΔABC và $\Delta AB'C'$. Chứng minh mp (AHK) vuông góc hai mặt phẳng (BCC'B') và (AB'C').

8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của S lên AB và CD.

a) Chứng minh mp (SIJ) vuông góc mp (ABCD).

b) Biết hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng tạo với mp (ABCD) góc α, SO tạo với mp (ABCD) góc β. Chứng minh mp (SAC) vuông góc mp (ABCD). Tính khoảng cách từ S đến mp (ABCD).

9. Trong mp (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. SA cố định vuông góc mp (P) tại A. Lấy hai điểm M, N di động trên BC, CD với BM = x, DN = y.

a) Tìm mối liên hệ giữa x, y để mp (SAM) vuông góc mp (SNM).

b) Tìm mối liên hệ giữa x, y để góc của hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) bằng 45°.

c) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của diện tích ΔAMN.

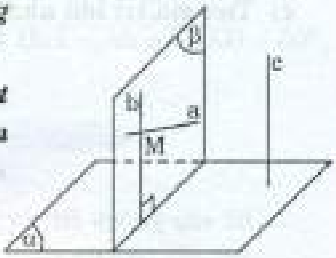
Chủ đề 21

XÁC ĐỊNH MẶT CẮT CỦA ĐA DIỆN VÀ MP (α) CHỨA ĐƯỜNG THẲNG a CHO TRƯỚC VÀ VUÔNG GÓC MP (α) CHO TRƯỚC

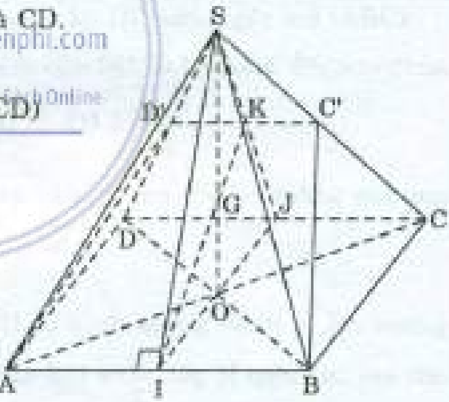
Phương pháp

- ***Từ một điểm M trên a, dựng đường thẳng vuông góc với mp (α) thì mp (β) = mp (a, b).***
- ***Khi đã xác định được mp (β) ta lần lượt xác định các đoạn giao tuyến với đa diện từ đó tìm được thiết diện.***

Chú ý : ***Khi đã có c ⊥ (α) thì (β) chứa c hay song song c.***



BT1. Cho hình chóp đều S.ABCD đáy hình vuông cạnh 2a, cạnh bên SA = $a\sqrt{5}$. Mặt phẳng (P) đi qua AB và vuông góc mp (SCD) lần lượt cắt SC và SD tại C' và D'. Xác định hình tính và tính diện tích tứ giác ABC'D'.



Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD.

Ta có : IJ // BC ⇒ IJ ⊥ CD

mà CD ⊥ SO (do SO ⊥ mp (ABCD))

nên CD ⊥ mp (SIJ)

Từ I vẽ IK ⊥ SJ thì IK ⊥ mp (SCD)

(do mp (SIJ) ⊥ mp (SCD))

Do đó (P) là mp (AB, IK).

Ta có :

ΔSIA vuông $\Rightarrow SI^2 = -AI^2 + SA^2$

$\Rightarrow SI^2 = -a^2 + 5a^2 = 4a^2$

Do đó ΔSIJ đều ⇒ K là trung điểm SJ.

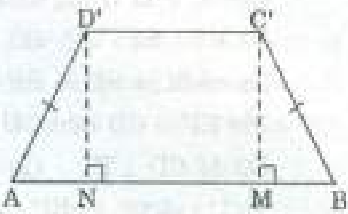
Mp (P) chứa AB // CD, vậy cắt mp (SCD) theo giao tuyến C'D' qua K và song song CD.

Mặt cắt là hình thang cân ABC'D'.

ΔSBC có BC' là trung tuyến $\Rightarrow SB^2 + BC^2 = 2BC'^2 + \dfrac{SC^2}{2}$

$$\Rightarrow 5a^2 + 4a^2 = 2BC'^2 + \frac{5a^2}{2} \quad \Rightarrow BC' = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

Ta có $\quad C'D' = \dfrac{CD}{2} = a$



Vẽ D'N, C'M ⊥ AB

Do $\Delta A'D'N = \Delta C'MB \Rightarrow AN = MB$

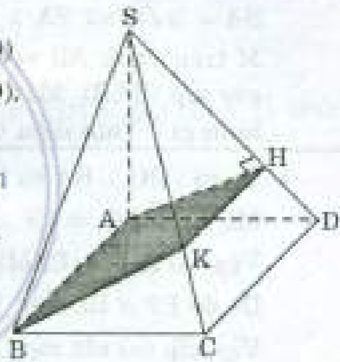
Vậy $\quad AN = \dfrac{1}{2}(AB - C'D') = \dfrac{a}{2}$

$\Delta AD'N$ vuông $\Rightarrow D'N^2 = \dfrac{13a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} = 3a^2$

Do đó : $\quad dt\,(AD'C'B) = \dfrac{D'N}{2}(C'D' + AB) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.3a = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ ■

BT2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, AS vuông góc mp (ABCD) và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và vuông góc mp (SCD). Mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện đó.

Từ A vẽ AH ⊥ SD



Ta có : $\quad$ CD ⊥ AD và SA nên CD ⊥ mp (SAD)

$\Rightarrow$ CD ⊥ AH $\qquad$ Vậy $\quad$ AH ⊥ mp (SCD).

Do đó : mp (α) ≡ mp (AB, AH)

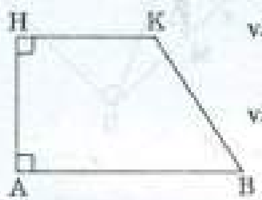
Ta có : CD // AB nên CD // mp (α)

Do đó mp (SCD) cắt mp (α) theo giao tuyến HK thì HK // CD // AB.

Do AH ⊥ mp (SCD) nên AH ⊥ HK.

Vậy mặt cắt là hình thang AHKB vuông tại H và A.

- ΔSAD vuông $\quad\Rightarrow\quad SD^2 = SA^2 + AD^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$



và $\quad AH = \dfrac{SA.AD}{SD} = \dfrac{a\sqrt{3}(a)}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

và $\quad SA^2 = HS.SD \;\Rightarrow SH = \dfrac{SA^2}{SD} = \dfrac{3a^2}{2a} = \dfrac{3a}{2}$

Ta có HK // CD $\quad\Rightarrow \dfrac{HK}{CD} = \dfrac{SH}{SD} \Rightarrow HK = \dfrac{SH.CD}{SD} = \dfrac{a\left(\dfrac{3a}{2}\right)}{2a} = \dfrac{3a}{4}$

Do đó : $\quad dt\,(ABKH) = \dfrac{1}{2}AH(AB + HK) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)\left(a + \dfrac{3a}{4}\right) = \dfrac{7a^2\sqrt{3}}{16}$ ■

BT3. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABC. Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và vuông góc mp (SCD). Xác định hình tính của thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp S.ABCD.

Gọi E, F là trung điểm AB, CD.

Vẽ $EI \perp SF$ (1)

Ta có $SC = SD \Rightarrow SF \perp CD$

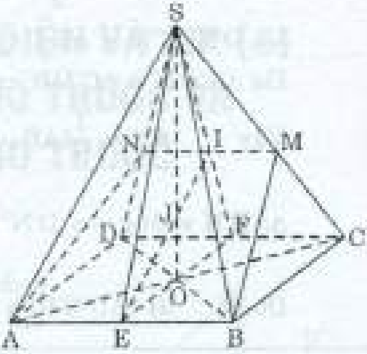
Mà $EF \perp CD$ nên $CD \perp (SEF)$

Do đó $CD \perp EI$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EI \perp (SCD)$

Do đó (P) là mặt phẳng chứa AB và EI

Do AB // (SCD) $\Rightarrow$ giao tuyến của (P) và (SCD) là đường thẳng qua I và song song CD, đường này cắt SD, SC tại N, M.



Do MN // CD nên NMBA là hình thang.

Mặt khác do $\Delta NDA = \Delta MBC$ (c.g.c) $\Rightarrow NA = MB$

$\Rightarrow \widehat{NAB} = \widehat{MCB} \Rightarrow$ NMBA là hình thang cân.

BT4. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = a, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp mp(ABC)$. Gọi E, F là trung điểm SC và SB. Lấy M trên cạnh AB với AM = x. Gọi (α) là mặt phẳng chứa EM và vuông góc mp (SAB). Mặt phẳng (α) cắt hình chóp S.ABC theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện theo a, x.

- Ta có : $BC \perp BA$ và SA nên $BC \perp mp(SAB)$.

  Mà EF // BC $\Rightarrow EF \perp mp(SAB)$.

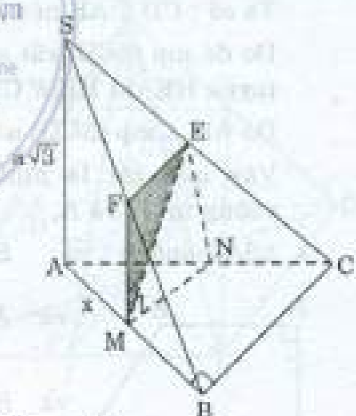
  Vậy (α) là mp (EFM)

  Do đó EF // BC nên EF // mp (ABC).

  Vậy mp (α) cắt mp (ABC) theo giao tuyến MN // BC // EF.

  Do $BC \perp mp(SAB)$ nên $BC \perp MF$.

  Vậy $MN \perp MF$ nên mặt cắt MNEF là hình thang vuông tại M và F.



- ΔAMN vuông cân tại M $\Rightarrow MN = AM = x$.

  ΔSAB vuông $\Rightarrow \tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0$

  $\Delta BFM \Rightarrow FM^2 = BF^2 + MB^2 - 2MB.BF.\cos 60^0$

  $$\Rightarrow FM^2 = a^2 + (a - x)^2 - 2a(a - x)\left(\frac{1}{2}\right) = a^2 - ax + x^2$$

  Do đó : $dt(EFMN) = \dfrac{MF}{2}(EF + MN) = \dfrac{\sqrt{a^2 - ax + x^2}}{2}\left(\dfrac{a}{2} + x\right)$

  $$= \frac{1}{4}(a + 2x)\sqrt{a^2 - ax + x^2} \quad ■$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, AA' vuông góc mp (ABC) và $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, A'C'. Xác định và tính diện tích mặt cắt của lăng trụ và mặt phẳng qua MN vuông góc mp (BCC'B').

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mp (ABCD) và SA = a. Xác định và tính diện tích mặt cắt của hình chóp và mặt phẳng :

a) (α) qua tâm O của đáy, trung điểm M của SD và vuông góc mp (ABCD).

b) (β) qua A, trung điểm của CD và vuông góc mp (SBC).

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$, SC vuông góc mp (ABCD) và $SC = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của BC, F là trung điểm của BE.

a) Chứng minh mp (SCF) vuông góc mp (SBC).

b) Tính các khoảng cách từ C và A đến mp (SBC).

c) Gọi (α) là mặt phẳng qua AD và vuông góc mp (SBC). Xác định và tính diện tích mặt cắt của (α) và hình chóp.

Chủ đề 22

DỰNG ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG
TÍNH KHOẢNG CÁCH CỦA HAI ĐƯỜNG CHÉO NHAU

- **Phương pháp 1**

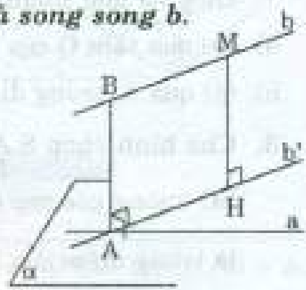
– *Dựng mặt phẳng* (α) *chứa đường thẳng* a *và song song* b.

– *Lấy điểm* M *trên* b, *dựng* $MH \perp mp\ (\alpha)$.

– *Trên mp* (α) *dựng* b' *qua* H *và* $b' \parallel b$, b' *cắt* a *tại* A.

– *Từ* A *dựng đường thẳng song song* MH *cắt* b *tại* B.

AB là đường vuông góc chung cần dựng.



Ta có : $\boxed{AB = MH = d\ (M, \alpha) = d\ (a, b)}$

- **Phương pháp 2**

– *Dựng mp* (β) *vuông góc* a *tại* I.

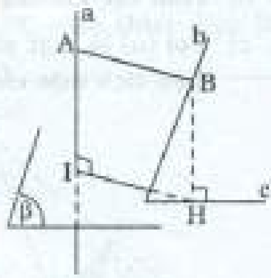
– *Dựng đường thẳng* c *hình chiếu vuông góc của* b *lên mp* (β).

– *Trong mp* (β) *dựng* $IH \perp c$ $(H \in c)$.

– *Từ* H *dựng đường thẳng song song với* a, *đường này cắt* b *tại* B.

– *Từ* B *dựng đường thẳng song song với* IH *cắt* a *tại* A.

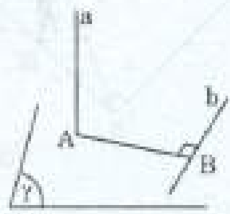
AB là đường vuông góc chung cần dựng.



- **Chú ý :** *Nếu* a *vuông góc* b

– *Dựng mp* (γ) *chứa* b *và vuông góc* a *tại* A.

– *Từ* A *dựng* $AB \perp b$ *tại* B *thì* AB *là đường vuông góc chung.*



BT1. *Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối D 2002*

Cho tứ diện đều ABCD cạnh $a = 6\sqrt{2}$cm. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

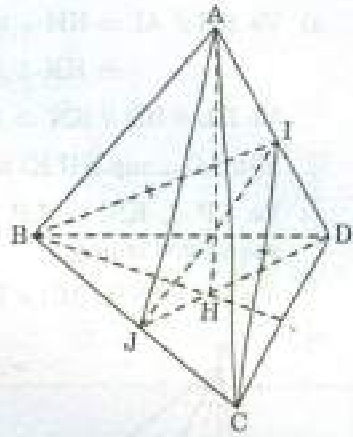
- Gọi I và J lần lượt là trung điểm AD và BC.

Các mặt của tứ diện ABCD là các tam giác đều nên $CI = IB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

ΔIBC cân tại I $\Rightarrow IJ \perp AD$.

Tương tự : ΔJAD cân tại J $\Rightarrow JI \perp BC$

Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AD và BC.



- ΔBIJ vuông tại J

$$\Rightarrow IJ^2 = IB^2 - BJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \left(6\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6cm \ \blacksquare$$

BT2. Cho tứ diện ABCD có AB = x, CD = b, các cạnh còn lại đều bằng a. Gọi E và F lần lượt là trung điểm AB và CD.

a) Chứng minh $AB \perp CD$ và EF là đường vuông góc chung của AB và CD. Tính EF theo a, b, x.

b) Tìm x để hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc.

a) Do ΔACD và ΔBCD cân nên $AF \perp CD$, $BF \perp CD$.

Vậy $CD \perp mp(FAB) \Rightarrow CD \perp AB$

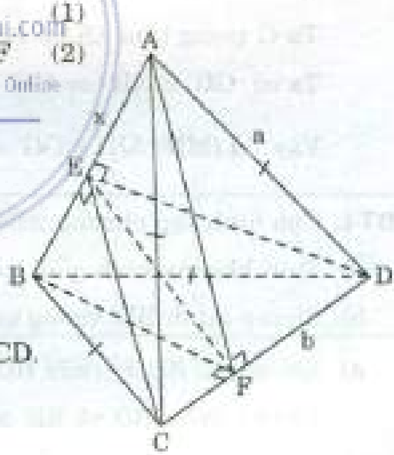
- $CD \perp mp(FAB) \Rightarrow CD \perp EF$ (1)

Tương tự, $AB \perp mp(ECD)$ nên $AB \perp EF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ EF là đường vuông góc chung của AB và CD.

$$EF^2 = EC^2 - \frac{b^2}{4} = a^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{b^2}{4}$$

$$\Rightarrow EF = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{b^2}{4}}.$$



b) Ta có $\widehat{AFB}$ là góc phẳng nhị diện cạnh CD.

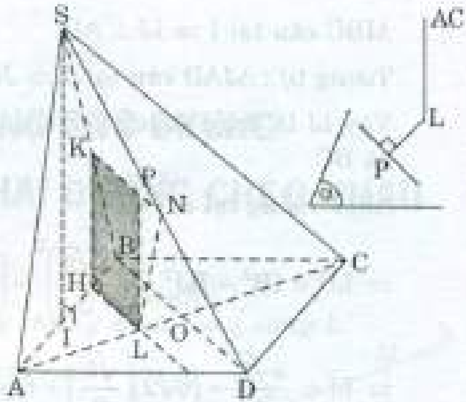
Vậy $mp(ACD) \perp mp(BCD) \Leftrightarrow \widehat{AFB} = 1v$

$$\Delta BCF \Rightarrow BF^2 = BC^2 - CF^2 = a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\text{Do đó } \widehat{AFB} = 1v \Leftrightarrow AB^2 = FB^2 + FA^2 = 2FB^2 \Leftrightarrow x^2 = 2\left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right) \ \blacksquare$$

BT3. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là trung điểm AB. Vẽ $SI \perp (ABCD)$ với $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm BC, SD, SB. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của :

a) NK và AC   b) MN và AK.



a) Vẽ KH // AI ⇒ KH ⊥ mp (ABCD)

⇒ HK ⊥ AC

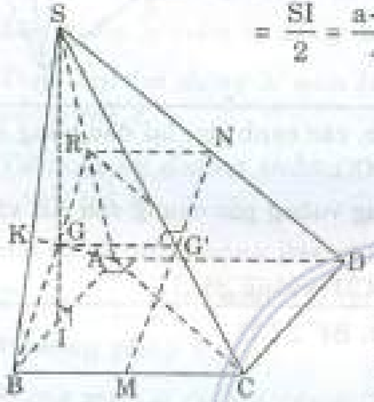
Vẽ HL // BD // KN ⇒ AC ⊥ HL

Vậy AC ⊥ mp (HLK) tại L.

Vẽ LP ⊥ KN ⇒ LP là đường vuông góc chung.

Ta có : d (NK, AC) = LP = HK

$$= \frac{SI}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$



b) Gọi R là trung điểm SA ⇒ RNMB là hình bình hành ⇒ BR // MN.

Vậy mp (SAB) chứa AK và song song MN.

Mặt khác : AD ⊥ AB, SI

⇒ AD ⊥ mp (SAB)

⇒ NR ⊥ mp (SAB)

Từ G trọng tâm ΔSAB vẽ GG' // NR cắt MN tại G'.

Ta có GG' // NR ⇒ GG' ⊥ AK, MN

Vậy : d (MN, AK) = GG' = MB = $\frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$ ■

BT4. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BD'.

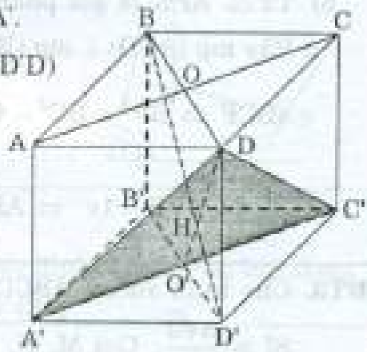
b) Chứng minh BD' vuông góc mp (DA'C').

a) Xét mp (B'BDD') chứa BD' và song song AA'.

Ta có : AO ⊥ BD và BB' nên AO ⊥ mp (BB'D'D)

Vậy : d (AA', BD') = AO = $\frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

(xem phương pháp 1).



b) Ta có : A'C' // AO mà AO ⊥ mp (BB'D'D)

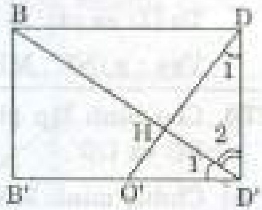
nên A'C' ⊥ mp (BB'D'D)

⇒ A'C' ⊥ BD' (1)

Mặt khác : ΔBB'D' vuông ⇒ $\tan \widehat{D_1'} = \frac{BB'}{B'D'} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Delta O'DD' \text{ vuông } \Rightarrow \tan\widehat{D}_1 = \frac{O'D'}{DD'} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Do đó : $\widehat{D}_1 = \widehat{D'_1}$



Mà : $\widehat{D'_1} + \widehat{D'_2} = 1v \Rightarrow \widehat{D}_1 + \widehat{D'_2} = 1v$

$\Rightarrow \Delta HDD'$ vuông tại H

$\Rightarrow BD' \perp DO'$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BD' \perp$ mp $(DA'C')$ ■

BT5. *Tuyển sinh ĐH khối B 2002*

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

a) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và DB'.

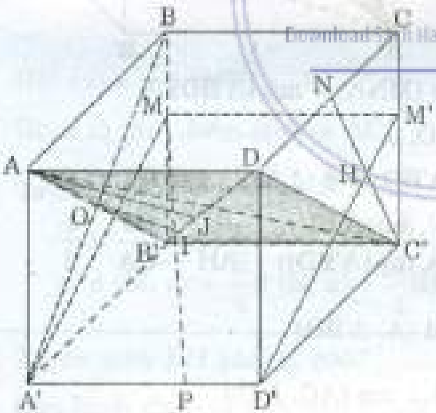
b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BB', CD, A'D'. Tính góc của hai đường thẳng MP và C'N.

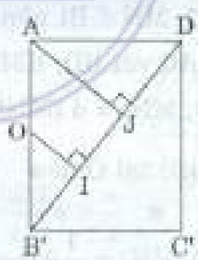
a) Ta có : $A'B \perp AB'$ và $AD \Rightarrow A'B \perp$ mp $(ADC'B') \Rightarrow A'B \perp DB'$

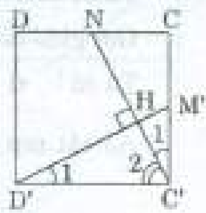
Trong mp $(ADC'B')$ vẽ $OI \perp DB'$ thì $OI \perp BA'$ và $B'D$

nên $OI = d(BA', DB')$ (xem phương pháp 2)

Vẽ $AJ \perp DB'$







$$\Delta \text{ vuông } ADB' \Rightarrow AJ = \frac{AD.AB'}{DB'} = \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do đó : } d(BA', DB') = OI = \frac{AJ}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

b) Gọi M' là trung điểm CC', D'M' cắt NC' tại H.

Ta có : $\Delta NCC' = \Delta M'C'D' \Rightarrow \widehat{C'_1} = \widehat{D'_1}$

Mà $\widehat{C'_1} + \widehat{C'_2} = 1v$ nên $\widehat{D'_1} + \widehat{C'_2} = 1v$

Vậy $\Delta HD'C'$ vuông tại H $\Rightarrow NC' \perp D'M'$ (1)

Mặt khác : $A'D' \perp$ mp $(CDC'D')$ mà $MM' \parallel A'D'$

$\Rightarrow MM' \perp$ mp $(CDD'C') \Rightarrow MM' \perp NC'$ (2)

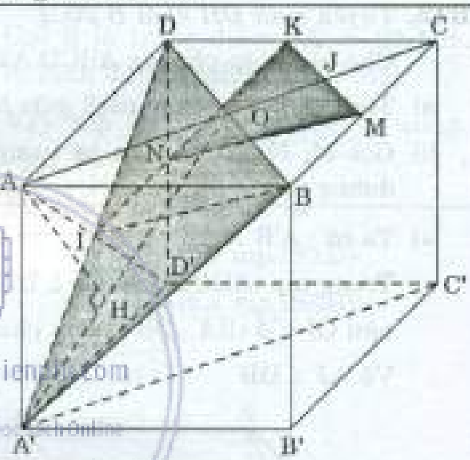
Từ (1) và (2) $\Rightarrow NC' \perp$ mp $(MM'D'A') \Rightarrow NC' \perp MP$

Vậy : g $(NC', MP) = 90^0$ ■

BT6. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M, N là trung điểm BC và DD'.

a) Chứng minh MN song song mặt phẳng (A'BD).

b) Tính khoảng cách của hai đường thẳng BD và MN.



a) Gọi I là giao điểm AD' và A'D.

Ta có : $\overrightarrow{NI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D'A'}$

và $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

mà $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CB}$ nên $\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{MB}$

$\Rightarrow$ MNIB là hình bình hành

$\Rightarrow MN \parallel BI$ mà $BI \subset$ mp (A'BD)

nên $MN \parallel$ mp (A'BD).

b) Gọi K là trung điểm CD.

Ta có $MK \parallel BD$, $MN \parallel BI$ nên mp (MNK) // mp (A'BD).

Gọi giao điểm AC với BD, KM là O, J.

Ta có : d (BD, MN) = d (MNK, A'BD) = d (J, mp (A'BD))

AJ cắt mp (A'BD) tại O nên $\dfrac{d(J, mp(A'BD))}{d(A, mp(A'BD))} = \dfrac{JH'}{AH} = \dfrac{OJ}{OA} = \dfrac{1}{2}$

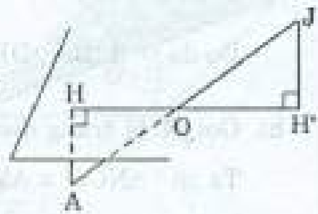
Do đó : $d(BD, MN) = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}d(A, A'BD)$

Ta có : $BD \perp AC$ và AA' nên $BD \perp$ mp (AC, A'C')

Vẽ $AH \perp OA'$ thì $BD \perp AH$ (do $AH \subset$ mp (AC, A'C')).

Vậy $AH \perp$ mp (A'BD)

$\Delta AA'O$ vuông $\Rightarrow AH = \dfrac{AO.AA'}{OA'} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$



Do đó : $d(BD, MN) = \frac{1}{2}AH = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ ■

BT7. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, AD = 2a, AA' = a.

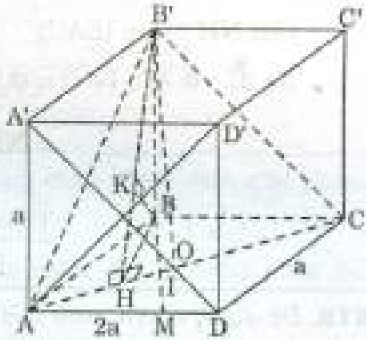
a) Tính khoảng cách của hai đường thẳng AD' và B'C.

b) Gọi M là điểm chia trong đoạn AD với $\frac{AM}{MD} = 3$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (AB'C).

a) Ta có : B'C // A'D

Vậy mp (AA', DD') là mặt phẳng chứa AD' và song song B'C.

Do đó : d (AD', B'C) = d (B'C, (AA'D'D)) = B'A' = a.



b) Vẽ BH ⊥ AC thì AC ⊥ mp (BB'H).

Do đó : mp (AB'C) ⊥ mp (BB'H).

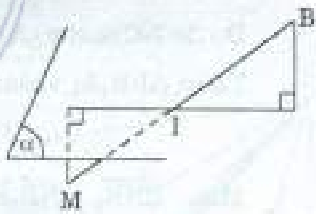
Vẽ BK ⊥ B'H thì BK ⊥ mp (B'AC)

ΔABC vuông $\Rightarrow BH = \frac{AB.BC}{AC} = \frac{a.2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

$\Delta BB'H$ vuông $\Rightarrow BK = \frac{BB'.BH}{B'H} = \frac{a.\frac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{5}}} = \frac{2}{3}a$

Đặt (α) = mp (AB'C)

Gọi I là giao điểm BM và AC.



Ta có : $\frac{d(M,\alpha)}{d(B,\alpha)} = \frac{MI}{BI} = \frac{AM}{BC} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow d(M, \alpha) = \frac{3}{4}d(B, \alpha) = \frac{3}{4}BK = \frac{3}{4}\frac{2}{3}a = \frac{a}{2}$ ■

BT8. *Tuyển sinh ĐH khối B 2007*

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AE và BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

- Gọi I lần lượt là trung điểm của SA.

Ta có : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NC}$ nên MICN là hình bình hành.

Do đó : MN // IC (1)

Mặt khác : BD ⊥ AC và SO nên BD ⊥ mp (SAC) ⇒ BD ⊥ IC (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BD \perp MN$.

- Mp (SAC) chứa AC và song song MN.

Vậy d (AC, MN) = d (MN, (SAC))

Trong mp (ABC), vẽ $NH \perp AC$.

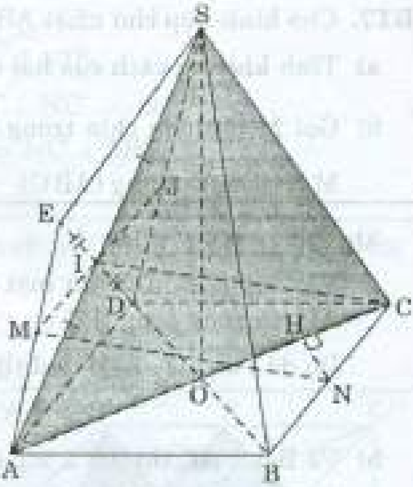
Ta có $NH \perp AC$ và SO

nên $NH \perp$ mp (SAC)

Do đó : d(AC, MN) = d(MN, (SAC))

$$= NH = \frac{OB}{2} = \frac{BD}{4}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad ■$$



BT9. *Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối D 2007*

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là trung điểm AA_1. Chứng minh BM vuông góc B_1C. Tính khoảng cách của hai đường BM và B_1C.

a) Gọi N là trung điểm AB.

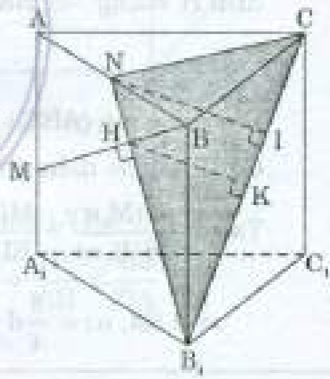
Do ΔABC đều $\Rightarrow CN \perp AB$

Mà $BB_1 \perp$ mp (ABC) $\Rightarrow BB_1 \perp NC$

Do đó $NC \perp$ mp $(AA_1BB_1) \Rightarrow CN \perp BM$ (1)

Ta có ABB_1A_1 vuông $\Rightarrow \Delta AMB = \Delta BNB_1$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{NB_1B}$$



Mà $\widehat{BNB_1} + \widehat{NB_1B} = 1v$

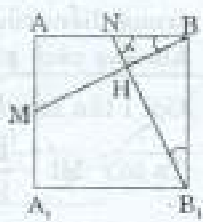
$$\Rightarrow \widehat{BNB_1} + \widehat{ABM} = 1v \Rightarrow \widehat{NHB} = 1v$$

Vậy $BM \perp NB_1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MB \perp$ mp $(NCB_1) \Rightarrow MB \perp B_1C$.

b) ΔNBB_1 vuông tại B có BH đường cao

$$\Rightarrow HB_1 = \frac{BB_1^2}{NB_1} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$



Vẽ NI và HK vuông góc B_1C.

Ta có $MB \perp$ mp $(NCB_1) \Rightarrow MB \perp HK$

Vậy HK là đoạn vuông góc chung của MB và B_1C.

ΔCNB_1 vuông tại N $\Rightarrow NI = \dfrac{NC.NB_1}{B_1C} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a}{8}\sqrt{30}$

Ta có : HK // NI $\Rightarrow \dfrac{HK}{NI} = \dfrac{B_1H}{B_1N}$

$$\Rightarrow HK = d\,(BM, B_1C) = \frac{B_1H.NI}{B_1N} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{5}}\left(\frac{a\sqrt{30}}{8}\right)}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$$ ■

BT10. Cho hai hình chữ nhật ABCD, ABEF không cùng thuộc một mặt phẳng và $AB = a$, $AD = AF = a\sqrt{2}$, AC vuông góc BF.

a) Gọi I là giao điểm của DF với mặt phẳng chứa AC và song song BF. Tính $\dfrac{DI}{DF}$.

b) Tính khoảng cách giữa AC và BF.

a) Trên mp (ABEF) lấy E' đối xứng với E qua F $\Rightarrow$ BF // AE'.

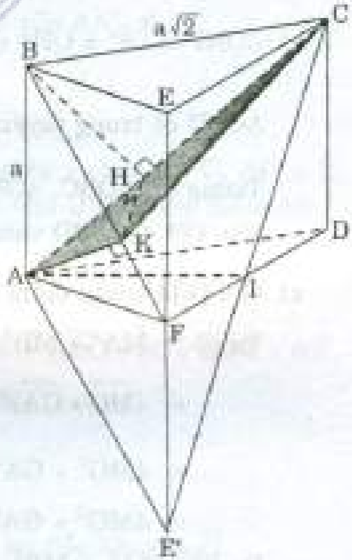
Vậy mặt phẳng chứa AC và song song BF là mp (ACE').

CE' cắt DF tại I.

Do CD //= FE' nên I là trung điểm FD $\Rightarrow \dfrac{DI}{DF} = \dfrac{1}{2}$.

b) Vẽ AK ⊥ BF, do AC ⊥ BF (gt) nên BF ⊥ mp (ACK).

Từ K vẽ KH ⊥ AC thì HK là đường vuông góc chung của AC và BF.



ΔABF vuông $\Rightarrow AK = \dfrac{AB.AF}{BF} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Ta có : AC ⊥ BF và HK

nên AC ⊥ mp (BHK) $\Rightarrow$ AC ⊥ BH.

ΔABC vuông $\Rightarrow AB^2 = AH.AC$

$$\Rightarrow AH = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

ΔAHK vuông $\Rightarrow HK^2 = AK^2 - AH^2$

$$= \frac{6a^2}{9} - \frac{a^2}{3} = \frac{3a^2}{9}$$

$$\Rightarrow d(AC, BF) = HK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$ ■

BT11. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mp (BCD) và O là trung điểm AH.

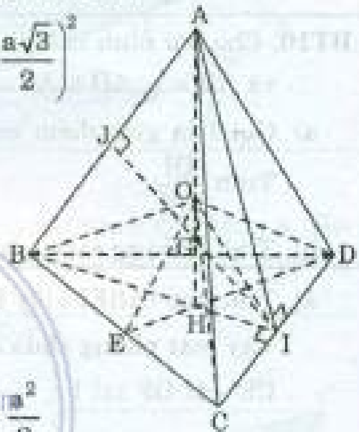
a) Chứng minh AB vuông góc CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD theo a.

b) Chứng minh OB, OC, OD vuông góc từng đôi một.

c) Xác định điểm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

a) Do AB = AC = AD nên HD = HB = HC.

Vậy H là tâm của Δ đều BCD. Gọi I là trung điểm CD.



$\Delta AHI \Rightarrow AH^2 = AI^2 - HI^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{36} = \dfrac{24a^2}{36}$.

Do $CD \perp BI, AI \Rightarrow CD \perp mp(ABI)$

$\Rightarrow CD \perp AB$

Từ I vẽ $IJ \perp AB$ thì IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

ΔJBI vuông $\Rightarrow IJ^2 = IB^2 - JB^2 = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}$

Do đó khoảng cách của AB và CD là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) $\Delta OHI \Rightarrow OI^2 = OH^2 + HI^2 = \dfrac{1}{4}AH^2 + \dfrac{1}{9}BI^2 = \dfrac{6a^2}{36} + \dfrac{1}{9}.\dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{9a^2}{36} = \dfrac{a^2}{4}$

ΔOCD có trung tuyến $OI = \dfrac{1}{2}CD$ vậy vuông tại O.

Tương tự, ΔOBC, ΔOBD vuông tại O.

Vậy OB, OC, OD vuông góc đôi một.

c) Gọi G là trung điểm IJ thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Ta có : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$

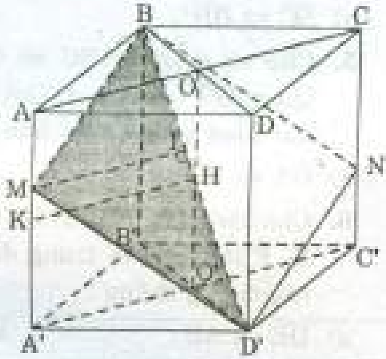
$= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})^2$

$= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$

$= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ min ⇔ MG min ⇔ M ≡ G là trọng tâm tứ diện ABCD ■

BT12. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Lấy M trên đoạn AA'. Xác định mặt cắt của mặt phẳng (MBD') và hình lập phương. Tìm vị trí điểm M trên AA' để diện tích mặt cắt này nhỏ nhất.



- Mp (MBD') cắt hai mặt phẳng song song (ABB'A') và (DCC'D') theo hai giao tuyến BM // D'N.

  Tương tự mp (MBD') cắt hai mặt phẳng (ADD'A') và (BCC'B') theo hai giao tuyến BN // D'M.

  Vậy MBND' là hình bình hành.
- Vẽ MI ⊥ BD'

  Ta có : S = dt (MBND') = 2dt (MBD')

  = MI.BD'

  Do đó : $S_{min} \Leftrightarrow MI_{min} \Leftrightarrow$ MI là đường vuông góc chung của AA' và BD'

  Do AA' // BB' nên AA' // mp (BDD'B')

  Gọi O, O' là tâm hình vuông ABCD, A'B'C'D'.

  Ta có : AO ⊥ BD và BB' nên AO ⊥ mp (BDD'B')

  Gọi H là giao điểm của BD' và OO'

  Vẽ HK // AO thì HK ⊥ (BDD'B') ⇒ HK ⊥ BD' và OO'

  ⇒ HK ⊥ BD' và AA'

  Vậy HK là đường vuông góc chung của AA' và BD'

  Do đó : $S_{min} \Leftrightarrow MI = HK \Leftrightarrow$ M là trung điểm của AA' ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, AC = b, CB = a, SA = h và SA vuông góc mp (ABCD). Gọi D là trung điểm AB.

a) Tính góc của AC và SD.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD, BC và SD.

2. Cho tứ diện OABC có OA = OB = OC = a, $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^0$, $\widehat{BOC} = 90^0$.

a) Chứng minh ΔABC vuông và OA vuông góc BC.

b) Tính khoảng cách giữa OA và BC.

c) Chứng minh mp (ABC) vuông góc mp (OBC).

3. Cho tứ diện ABCD có CD = 2a, các cạnh còn lại đều bằng $a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh AB vuông góc CD.

b) Tính khoảng cách giữa AB và CD.

c) Chứng minh mp (ACD) vuông góc (BCD).

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, SA = a và SA vuông góc mp (ABCD). Tính khoảng cách giữa :

a) SC và BD. b) AC và SD.

5. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = OB = OC = a. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của :

a) OA và BC. b) AI và OC.

6. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có các mặt bên là hình vuông cạnh a. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, A'C', C'B'. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng :

a) DE và AB'. b) A'B và B'C'. c) DE và A'F.

7. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Lấy M trên AD', N trên BD sao cho AM = DN = x $(0 < x < a\sqrt{2})$.

a) Tìm x để MN ngắn nhất.

b) Khi MN ngắn nhất hãy chứng tỏ MN là đoạn vuông góc chung của AD' và DB đồng thời MN // A'C.

8. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, $AA' = a\sqrt{3}$. Hãy dựng đoạn vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BC'.

9. Cho hình chóp D.ABC có ΔABC vuông tại B, AB = 6a, BC = 8a. Hình chiếu vuông góc của D lên mp (ABC) là điểm M trên BC sao cho $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BM}$. Đặt MD = x.

a) Chứng minh mp (ABD) vuông góc mp (BCD).

b) Tính góc của AD và mp (ABC).

c) Tính khoảng cách từ M đến mp (ABD).

d) Lấy K trên AC sao cho $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AK}$. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của KD và AB.

10. Cho ΔACD và ΔBCD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Cho AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x.

a) Chứng minh IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD. Tính IJ.

b) Chứng minh mp (AJB) vuông góc mp (BCD).

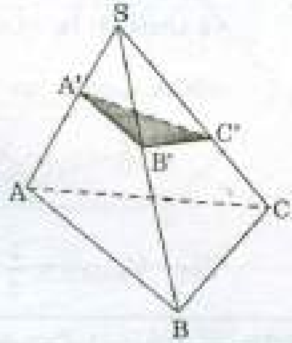
c) Chứng minh I cách đều hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

d) Tìm hệ thức giữa a và x sao cho góc của hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) bằng 60^0.

Chủ đề 23

THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

$\boxed{V = \frac{1}{3}Bh}$ *B : diện tích đáy*
h : chiều cao



Chú ý : *Cho khối chóp S.ABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác S thì :*

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

BT1. *Tốt nghiệp THPT 2008*

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có đáy là ΔABC cạnh a, cạnh bên 2a. Gọi I là trung điểm BC.

a) Chứng minh SA vuông góc BC.

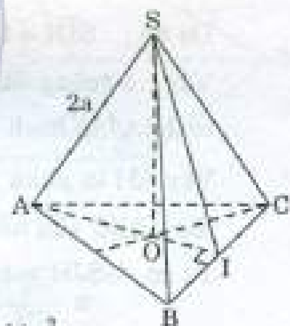
b) Tính thể tích khối chóp S.ABI theo a.

a) Gọi O là tâm của tam giác đều ABC.

Ta có : OA = OB = OC và SA = SB = SC = 2a

nên SO là trục đường tròn (ABC)

$\Rightarrow$ SO $\perp$ mp (ABC)



Ta có : BC $\perp$ AI và SO nên BC $\perp$ mp (SAI)

Do đó : BC $\perp$ SA.

b) Ta có : $OA = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

ΔSAO vuông $\Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2 = 4a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{11a^2}{3}$

Do đó : $V_{S.ABI} = \frac{1}{3}SO.dt\,(\Delta ABI) = \frac{1}{6}SO.dt\,(\Delta ABC)$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{11}}{24} \quad \blacksquare$$

BT2. *Tốt nghiệp THPT 2010*

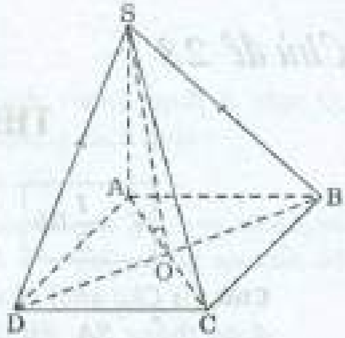
Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ mp (ABCD), góc của hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp đó.

Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

ΔSBD cân tại S $\Rightarrow SO \perp BD$

ABCD là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$

Vậy góc của hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD) là $\widehat{SOA} = 60^0$.



ΔSOA vuông $\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SA}{OA} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.dt\,(ABCD) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$ ■

BT3. *Tuyển sinh Cao đẳng 2007*

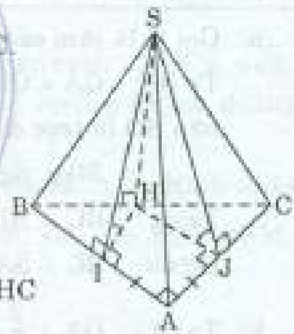
Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, AB = AC = a. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy, hai mặt bên còn lại hợp với đáy góc 60^0. Hãy tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

Kẻ $SH \perp BC$

Do mp (SBC) $\perp$ mp (ABC) nên $SH \perp$ mp (ABC)

Vẽ $HI \perp AB$ và $HJ \perp AC$ thì $SI \perp AB$ và $SJ \perp AC$

Do đó : $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = 60^0$



Vậy : Δ vuông SHI = Δ vuông SHJ $\Rightarrow HI = HJ$

$\Rightarrow$ HIAJ là hình vuông

Vậy AH là phân giác $\widehat{BAC}$

Mà ΔABC cân nên AH là trung tuyến $\Rightarrow HB = HC$

Ta có : ΔSJH vuông tại H

$$\Rightarrow \tan 60^0 = \frac{SH}{HJ} \Rightarrow SH = HJ.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Do đó : $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.dt\,(\Delta ABC) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3.\sqrt{3}}{12}$ ■

BT4. Cho hình chóp S.ABCD có các cạnh đều bằng nhau, biết thể tích của hình chóp bằng $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}a^3$. Tính độ dài cạnh hình chóp theo a.

Gọi O là tâm hình vuông ABCD cạnh b.

Ta có : SA = SB = SC = SD = b

OA = OB = OC = OD

nên SO là trục đường tròn (ABCD)

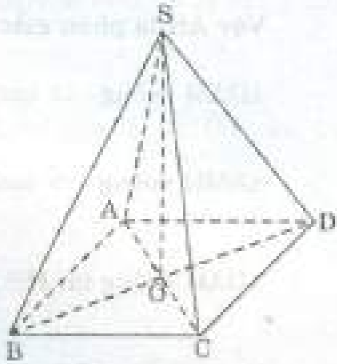
ΔSOC vuông tại $O \Rightarrow SO^2 = SC^2 - OC^2$

$$\Rightarrow SO^2 = b^2 - \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{b^2}{2} = \frac{b^2}{2}$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{SO}{3}.dt(ABCD) = \frac{b^3\sqrt{2}}{6}$

Mà $V = \frac{9\sqrt{2}}{2}a^3 \Leftrightarrow \frac{b^3\sqrt{2}}{6} = \frac{9\sqrt{2}}{2}a^3$

$\Leftrightarrow SA = 3a$ ■



BT5. *Tuyển sinh Cao đẳng 2010*

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SA = SB. Mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng (ABCD), góc của SC và đáy bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Gọi H là trung điểm AB

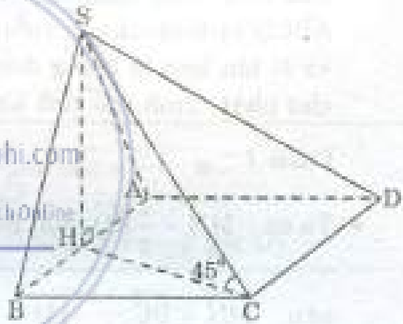
ΔSAB cân $\Rightarrow SH \perp AB$

Do mp (SAB) ⊥ mp (ABCD) nên SH ⊥ mp (ABCD)

Vậy góc của SC và (ABCD) là $\widehat{SCH} = \frac{\pi}{4}$

ΔBHC vuông $\Rightarrow HC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}$

ΔSHC vuông cân $\Rightarrow SH = HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$



Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.dt(ABCD) = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{5}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}$ ■

BT6. *Đề dự bị ĐH khối D 2002*

Tính thể tích khối tứ diện ABCD biết AB = a, AC = b, AD = c và $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 60^0$.

Vẽ DH ⊥ mp (ABC)

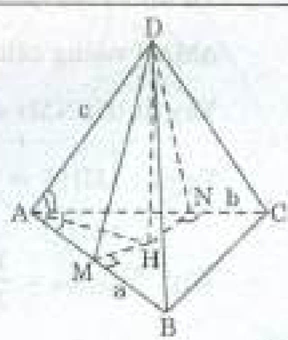
Từ H vẽ HM ⊥ AB và HN ⊥ AC thì DM ⊥ AB và DN ⊥ AC

Ta có : Δ vuông DMA = Δ vuông DNA

$\Rightarrow DN = DM$

Δ vuông DMH = Δ vuông DNH

$\Rightarrow HN = HM$



Vậy AH là phân giác $\widehat{CAB}$.

ΔDAM vuông $\Rightarrow \cos 60^0 = \dfrac{AM}{AD} \Rightarrow AM = \dfrac{c}{2}$

ΔAMH vuông $\Rightarrow \cos 30^0 = \dfrac{AM}{AH} \Rightarrow AH = \dfrac{AM}{\cos 30^0} = \dfrac{c}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$

ΔDAH vuông tại H $\Rightarrow DH^2 = AD^2 - AH^2 = c^2 - \dfrac{c^2}{3} = \dfrac{2c^2}{3}$

Ta có : dt $(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}AB.AC\sin 60^0 = \dfrac{ab}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{ab\sqrt{3}}{4}$

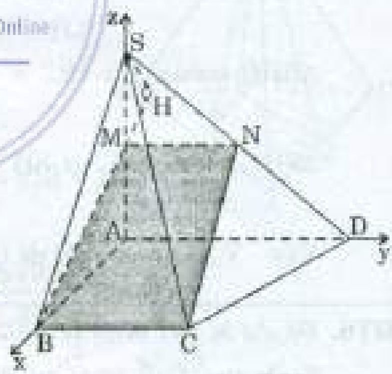
Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}DH.dt\,(\Delta ABC) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{c\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{ab\sqrt{3}}{4} = \dfrac{abc\sqrt{2}}{12}$ ■

BT7. *Tuyển sinh Cao đẳng 2008*

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc mặt phẳng (ABCD), SA = 2a, ABCD là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 2a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Chứng minh BCNM là hình chữ nhật. Tính thể tích khối chóp S.BCNM.

Cách 1 :

- Ta có : $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ mà $\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$



nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$ (1)

Mặt khác : BC ⊥ AB và SA

⇒ BC ⊥ mp (ASB) ⇒ BC ⊥ BM (2)

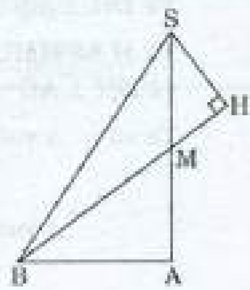
Từ (1) và (2) ⇒ BCNM là hình chữ nhật.

- Trong mp (SAB) vẽ SH ⊥ BM (3)

Ta có : BC ⊥ (SAB) ⇒ BC ⊥ SH (4)

Từ (3) và (4) ⇒ SH ⊥ mp (BCNM)

ΔMAB vuông cân $\Rightarrow MB = a\sqrt{2}$



Vậy dt (BCNM) = MB.BC = $a^2\sqrt{2}$

Ta có : $\Delta MHS \backsim \Delta MAB \Rightarrow \dfrac{SH}{AB} = \dfrac{MS}{MB} \Rightarrow SH = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Vậy $V_{S.BCNM} = \dfrac{1}{3}SH.dt\,(BCNM) = \dfrac{a^3}{3}$

Lưu ý : Ta phải khéo chọn đỉnh hình chóp S.BCNM là S rồi vẽ SH $\perp$ BM (xem kĩ lại phương pháp tại chủ đề 17).

Cách 2 :

- Gắn trục như hình vẽ thì A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0), D(0; 2a; 0), S(0; 0; 2a)

  $\Rightarrow$ M(0; 0; a), N(0; a; a)

Ta có : $\overrightarrow{MN} = (0; a; 0) = \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BM} = (-a; 0; a)$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BM} = 0 \Rightarrow BC \perp BM$$

Vậy BCNM là hình chữ nhật.

- Ta có : $\left[\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM}\right] = (a^2; 0; a^2) = a^2(1; 0; 1)$

Vậy phương trình mặt phẳng (BCNM) là :

$$1(x - a) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + z - a = 0$$

Do đó $SH = d(S, (BCNM)) = \dfrac{|0 + 2a - a|}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

và $\quad dt\,(BCNM) = BC.BM = \sqrt{a^2}.\sqrt{2a^2} = a^2\sqrt{2}$

Vậy $\quad V_{S.BCNM} = \dfrac{1}{3}SH.dt\,(BCNM) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{\sqrt{2}}.a^2\sqrt{2} = \dfrac{a^3}{3}$ ■

Lưu ý : Cẩn thận khi đọc tọa độ C vì CD không vuông góc Oy.

BT8. *Đề mẫu tuyển sinh ĐH khối D 2010*

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC cân tại B, AC = a, $\widehat{ABC} = 120^0$, SA = SB = SC, SA tạo với mặt phẳng (ABC) góc bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Gọi I là trung điểm BC.

Gọi H là điểm đối xứng của B qua I.

ΔBAC cân $\Rightarrow BI \perp AC$

Vậy ABCD là hình thoi.

Mà $\widehat{ABH} = \widehat{HBC} = 60^0$

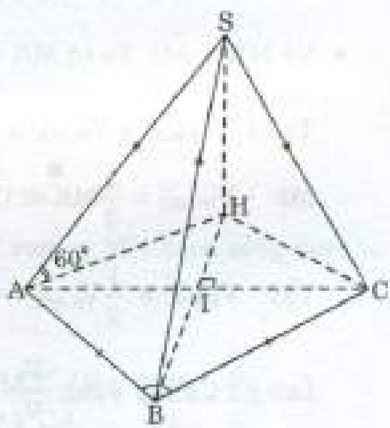
Vậy ΔHAB và ΔHBC đều

$\Rightarrow HA = HB = HC \quad (1)$

Mà $SA = SB = SC \quad (2)$

Vậy SH là trục đường tròn qua (ABC)

$\Rightarrow SH \perp mp\,(ABC)$



ΔBAI vuông $\Rightarrow \sin 60^0 = \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow AB = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Ta có $(\widehat{SA, (ABC)}) = \widehat{SAH} = 60^0$

ΔSAH vuông $\quad \Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SH}{AH} = \dfrac{SH}{AB} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow SH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}.\sqrt{3} = a$

$$dt\,(\Delta ABC) = \frac{1}{2}BA.BC.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}BA^2\sin 120^0 = \frac{1}{2}.\frac{a^2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$$

Vậy $\quad V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.dt\,(\Delta ABC) = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$ ■

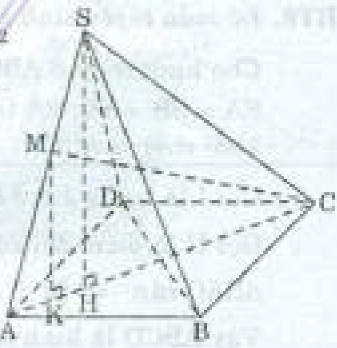
BT9. *Tuyển sinh ĐH khối D 2010*

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là H trên đoạn AC với $AH = \dfrac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của ΔSAC. Chứng minh M là trung điểm SA. Tính thể tích khối S.MBC theo a.

- ΔSHA vuông $\quad \Rightarrow SH^2 = SA^2 - AH^2 = SA^2 - \dfrac{AC^2}{16} = a^2 - \dfrac{(a\sqrt{2})^2}{16} = \dfrac{14a^2}{16}$

ΔSHC vuông $\quad \Rightarrow SC^2 = SH^2 + HC^2 = SH^2 + \left(\dfrac{3AC}{4}\right)^2$

$$= \frac{14a^2}{16} + \frac{9(a\sqrt{2})^2}{16} = 2a^2$$



Do $SC = AC = a\sqrt{2}$ nên ΔSAC cân tại C

$\Rightarrow$ M là trung điểm SA.

- Vẽ $MK \perp AC$. Ta có $MK = \dfrac{1}{2}SH$

. Ta có : $V_{S.MBC} + V_{M.ABC} = V_{S.ABC}$

Mà $\quad V_{M.ABC} = \dfrac{1}{3}MK.dt\,(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}SH.dt\,(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}V_{S.ABC}$

Vậy $\quad V_{S.MBC} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}SH.dt\,(\Delta ABC) = \dfrac{1}{6}.\dfrac{a\sqrt{14}}{4}.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{48}$ ■

Lưu ý : Có thể dùng $\dfrac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{S.MBC} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{48}$.

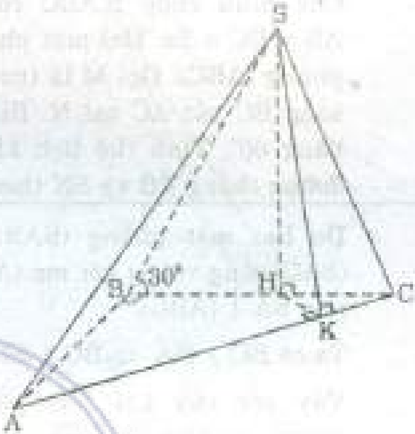
BT10. *Tuyển sinh ĐH khối D 2011*

Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông tại B, BA = 3a, BC = 4a, mp (SBC) vuông góc mp (ABC), $SB = 2a\sqrt{3}$, $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ B đến mp (SAC).

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên BC.

Do (SBC) ⊥ (ABC) nên SH ⊥ (ABC)

Ta có : BA ⊥ BC ⇒ BA ⊥ SB



ΔSBH vuông $\Rightarrow \sin 30^0 = \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{1}{2}SB = a\sqrt{3}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.dt\,(\Delta ABC)$

$= \dfrac{1}{3}.(a\sqrt{3}).\left(\dfrac{1}{2}.3a.4a\right)$

$= 2\sqrt{3}a^3$.

- ΔSAB vuông $\Rightarrow SA^2 = SB^2 + BA^2 = 12a^2 + 9a^2 = 21a^2$

ΔSBH vuông $\Rightarrow BH^2 = SB^2 - SH^2 = 12a^2 - 3a^2 = 9a^2$

Vậy HC = BC − BH = a.

ΔSHC vuông $\Rightarrow SC^2 = SH^2 + HC^2 = 4a^2$

ΔABC vuông $\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25a^2$

Do $SA^2 + SC^2 = AC^2$ nên ΔSAC vuông tại S

Vậy $dt\,(\Delta SAC) = \dfrac{1}{2}SA.SC = a^2\sqrt{21}$

Ta có : $V_{S.ABC} = V_{B.SAC} = \dfrac{1}{3}d(B,(SAC)).dt\,(\Delta SAC)$

$$\Rightarrow d(B,(SAC)) = \frac{3V}{dt\,(\Delta SAC)} = \frac{6\sqrt{3}a^3}{a^2\sqrt{21}} = \frac{6a}{\sqrt{7}} \quad ■$$

Lưu ý : Trong đề toán này đặc biệt ΔSAC vuông. Một cách tổng quát ta tính được diện tích ΔSAC như sau :

Vẽ SK ⊥ AC thì HK ⊥ AC.

$\Delta CHK \backsim \Delta CAB \Rightarrow \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{HK}{AB} \Rightarrow HK = \dfrac{CH.AB}{CA} = \dfrac{a.3a}{5a} = \dfrac{3}{5}a$

ΔSHK vuông $\Rightarrow SK^2 = SH^2 + HK^2 = 3a^2 + \dfrac{9a^2}{25} = \dfrac{84a^2}{25}$

Vậy dt $(\Delta SAC) = \dfrac{1}{2}SK.AC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a\sqrt{21}}{5}.5a = a^2\sqrt{21}$.

BT11. *Tuyển sinh ĐH khối A 2011*

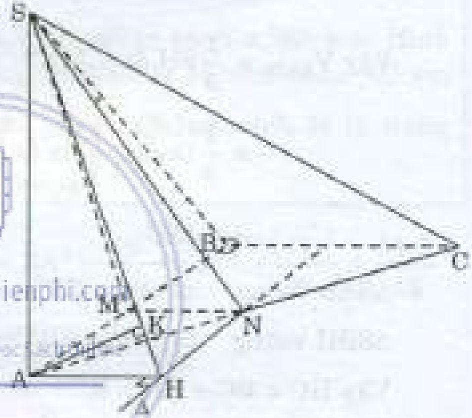
Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng qua SM và song song BC cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

- Do hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc mp (ABC) nên $SA \perp (ABC)$.

  Ta có $BC \perp BA \Rightarrow BC \perp SB$

  Vậy góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ$

  Do mặt phẳng qua SM và song song BC nên mặt phẳng này cắt mp (ABC) theo giao tuyến qua M và song song BC. Do đó N là trung điểm của AC.



ΔSAB vuông $\Rightarrow \tan 60^\circ = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow SA = AB\sqrt{3} = 2a\sqrt{3}$

Dt $(MNCB) = \dfrac{MB}{2}(MN + BC) = \dfrac{a}{2}(a + 2a) = \dfrac{3a^2}{2}$

Vậy $V_{S.MNCB} = \dfrac{1}{3}.(2a\sqrt{3}).\dfrac{3a^2}{2} = a^3\sqrt{3}$.

- Qua N kẻ Δ song song AB. Vẽ $AH \perp \Delta$ thì AB // (SNH).

  Vậy d(AB, SN) = d(AB, (SNK)) = d(A, (SNH))

  Vẽ $AK \perp SH$. Do $HN \perp (SAH)$ nên $HN \perp AK$

  Vậy $AK \perp (SHN)$

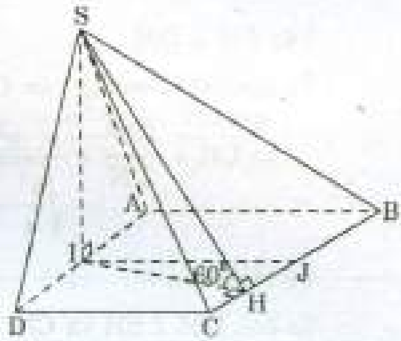
  ΔSAH vuông $\Rightarrow AK = \dfrac{SA.AH}{SH} = \dfrac{2a\sqrt{3}.a}{\sqrt{12a^2 + a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$

  $\Rightarrow d(AB, SN) = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$ ■

BT12. *Tuyển sinh ĐH khối A 2009*

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = AD = 2a, CD = a. Góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) là 60^0. Gọi I là trung điểm AD. Hai mặt phẳng (SIB) và (SIC) cùng vuông góc mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Do hai mặt phẳng (SIB) và (SIC) vuông góc mặt phẳng (ABCD) nên giao tuyến SI ⊥ mp (ABCD).

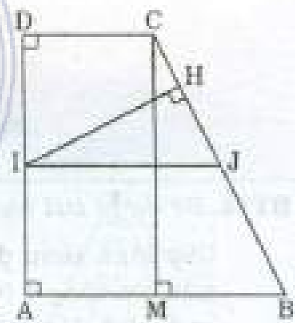


Vẽ IH ⊥ BC thì SH ⊥ BC. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) là $\widehat{SHI} = 60^0$. Gọi J là trung điểm BC. Vẽ CM ⊥ AB.

Ta có : $\Delta IHJ \backsim \Delta CMB \Rightarrow \dfrac{IH}{MC} = \dfrac{IJ}{CB}$

$$\Rightarrow IH = \frac{IJ.MC}{BC} = \frac{2a.\frac{3a}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}}$$

ΔSHI vuông $\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SI}{IH} = \sqrt{3}$



$$\Rightarrow SI = \frac{3a}{\sqrt{5}}.\sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$$

Ta có : dt (ABCD) $= \dfrac{AD}{2}(CD + AB)$

$$= \frac{2a}{2}(a + 2a) = 3a^2$$

Do đó : $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SI.dt\,(ABCD) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a\sqrt{15}}{5}.3a^2 = \dfrac{3a^3\sqrt{15}}{5}$ ■

BT13. *Tuyển sinh ĐH khối A 2010*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N là trung điểm AB và AD, H là giao điểm CN và DM. Biết SH vuông góc mặt phẳng (ABCD) và SH = $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC.

- Ta có : dt (CDNM) = dt (ABCD) – dt (ΔAMN) – dt (ΔMBC)

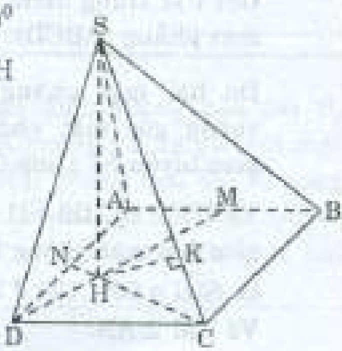
$$= a^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2}(a)\left(\frac{a}{2}\right) = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

$$\Rightarrow V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}SH.dt\,(CDNM) = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{5a^2}{8} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}.$$

- Ta có Δ vuông NDC = Δ vuông MAD $\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{NCD}$

Mà $\widehat{MDA} + \widehat{MDC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{NCD} + \widehat{MDC} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta HDC$ vuông tại H



Vậy $CN \perp DM$

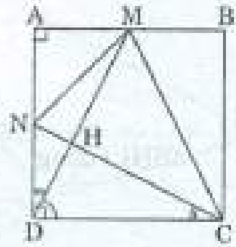
Ta có ΔNDC vuông $\Rightarrow CD^2 = CH.CN$

$$\Rightarrow CH = \frac{CD^2}{CN} = \frac{a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Vẽ $HK \perp SC$ (1)

Ta có : $DM \perp SH$ và CN $\Rightarrow DM \perp$ mp (SHC) $\Rightarrow DM \perp HK$ (2)

Vậy HK = d(SC, DM)



ΔSHC vuông $\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HC^2}$

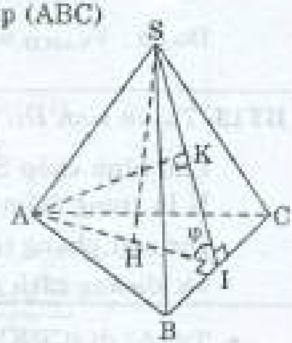
$$= \frac{1}{3a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{19}{12a^2}$$

$$\Rightarrow HK = d(SC, DM) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \quad ■$$

BT14. *Đề dự bị ĐH khối B 2003*

Cho hình chóp đều S.ABC có đáy ΔABC cạnh a, mặt bên tạo với đáy một góc bằng φ ($0 < \varphi < 90^0$). Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a và φ.

- Gọi H là tâm của tam giác đều ABC thì $SH \perp$ mp (ABC) và $\widehat{AIS} = \varphi$ (với I trung điểm BC).



Ta có : $HI = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}$

ΔSHI vuông $\Rightarrow \tan\varphi = \frac{d}{k} = \frac{SH}{HI}$

$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{6}\tan\varphi$$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.dt\,(\Delta ABC) = \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\tan\varphi\right)\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{a^3}{24}\tan\varphi$

- ΔSHI vuông $\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{k}{h} = \dfrac{HI}{SI} \Rightarrow SI = \dfrac{HI}{\cos\varphi} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos\varphi}$

Vậy dt $(\Delta SBC) = \dfrac{1}{2}SI.BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\varphi}$

Vẽ $AK \perp$ mp (SBC)

Ta có : $V_{ASBC} = \dfrac{1}{3}AK.\text{dt}(\Delta SBC)$

$\Rightarrow AK = d(A, \text{mp}(SBC)) = \dfrac{3V}{\text{dt}(\Delta SBC)} = \dfrac{a^3\tan\varphi}{8}\cdot\dfrac{12\cos\varphi}{a^2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\sin\varphi$ ■

BT15. *Tuyển sinh ĐH khối B 2004*

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy a, góc của cạnh bên và mặt đáy φ ($0 < \varphi < 90^0$). Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ và thể tích hình chóp theo a và φ.

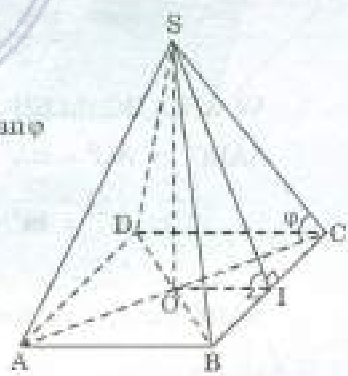
Gọi O là tâm hình vuông ABCD

S.ABCD là hình chóp tứ giác đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Vẽ $OI \perp BC$ thì $SI \perp BC$

Vậy $\widehat{SIO}$ là góc giữa hai mp (SAB) và (ABCD).

ΔSOC vuông tại O $\Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SO}{OC}$



$\Rightarrow SO = OC.\tan\varphi = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$

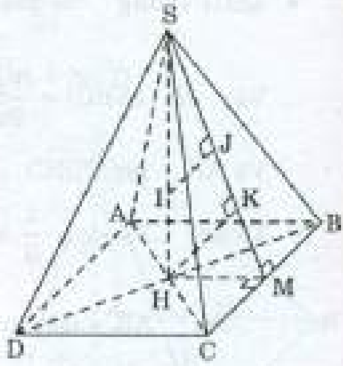
ΔSOI vuông tại O $\Rightarrow \tan\widehat{SIO} = \dfrac{SO}{OI}$

$= \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi}{\dfrac{a}{2}} = \sqrt{2}\tan\varphi$

Do đó : $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.\text{dt}(ABCD) = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}\tan\varphi$ ■

BT16. *Đề dự bị ĐH khối D 2006*

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt phẳng (SBC) bằng b. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.



Gọi M là trung điểm BC.

Ta có BC ⊥ HM và SH nên BC ⊥ (SHM)

$\Rightarrow$ Mp (SBC) ⊥ mp (SHM)

Vẽ IJ và HK ⊥ SM thì IJ ⊥ mp (SBC)

$\Rightarrow$ IJ = b và HK = 2IJ = 2b

ΔSHM vuông nên $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HM^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{4b^2} - \frac{4}{a^2} = \frac{a^2 - 16b^2}{4a^2b^2}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$$

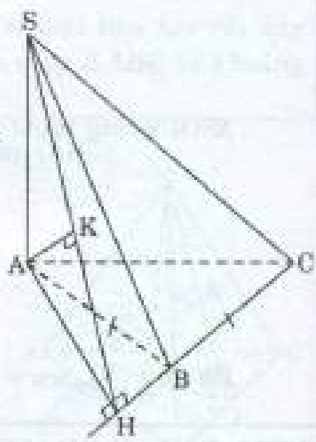
Do đó : $V_{S.ABCD} = \dfrac{SH}{3}dt\,(ABCD) = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a^3b}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$ ■

BT17. *Đề dự bị ĐH khối B 2004*

Cho hình chóp S.ABC có SA = 3a, SA vuông góc mặt phẳng (ABC), BA = BC = 2a, $\widehat{ABC} = 120^0$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Ta có : $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA.dt\,(\Delta ABC) = \dfrac{1}{3}.3a.\dfrac{1}{2}BA.BC\sin 120^0$

$$= \frac{3}{2}(2a)^2\frac{\sqrt{3}}{2} = a^3\sqrt{3}$$



Vẽ AH ⊥ BC thì SH ⊥ BC

ΔABC $\Rightarrow AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC\cos 120^0$

$$\Rightarrow AC^2 = 4a^2 + 4a^2 - 2(4a^2)\left(-\frac{1}{2}\right) = 12a^2$$

ΔAHC vuông $\Rightarrow \sin C = \sin 30^0 = \dfrac{AH}{AC}$

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AC = a\sqrt{3}$$

ΔSAH vuông $\Rightarrow SH^2 = SA^2 + AH^2$

$$= 9a^2 + 3a^2 = 12a^2$$

Vậy dt (ΔSBC) = $\dfrac{1}{2}SH.BC = \dfrac{1}{2}(2a\sqrt{3})2a = 2a^2\sqrt{3}$

Gọi h là khoảng cách từ A đến mp (SBC).

Ta có : $V_{S.ABC} = V_{A.SBC} = \frac{1}{3}h.dt(\Delta SBC)$

$$\Rightarrow h = \frac{3V_{S.ABC}}{dt(\Delta SBC)} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2a^2\sqrt{3}} = \frac{3}{2}a \quad \blacksquare$$

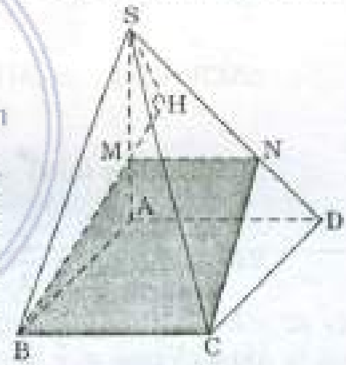
Lưu ý : Trong bài toán này, vẽ $AK \perp SH$ thì $AK \perp (SBC)$, ta tính trực tiếp AK không cần qua V.

BT18. *Đề dự bị ĐH khối A 2006*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a, SA vuông góc đáy, SB tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM.

Ta có : $\widehat{SBA} = 60^0 \quad \Rightarrow \tan 60^0 = \frac{đ}{k} = \frac{SA}{AB} \quad \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$ và $SB = 2a$

Ta có mp (BCM) chứa BC // (SAD). Vậy mp (BCM) cắt mp (SAD) theo giao tuyến MN // BC // AD.



Ta có : $BC \perp AB$ và SA

$\Rightarrow BC \perp mp(SAB) \quad \Rightarrow BC \perp MB.$

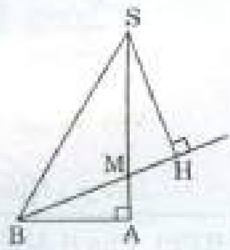
Do đó BCNM là hình thang vuông.

Ta có : $\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2}{3}(2a) = \frac{4a}{3}$

Δ vuông BMA $\Rightarrow MB^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2 = \frac{4a^2}{3}$

Do đó : $dt(BCNM) = \frac{MB}{2}(MN + BC) = \frac{a}{\sqrt{3}}\left(\frac{4a}{3} + 2a\right) = \frac{10a^2}{3\sqrt{3}}$

Trên mp (SAB) vẽ $SH \perp MB$.



Ta có : $BC \perp mp(SBA) \quad \Rightarrow BC \perp SH$

Vậy : $SH \perp mp(BCNM)$

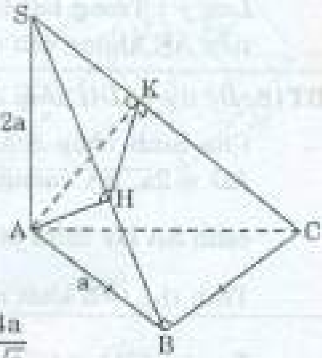
Ta có : $\Delta HMS \backsim \Delta AMB$

$$\Rightarrow \frac{MS}{MB} = \frac{SH}{AB} \Rightarrow SH = \frac{MS.AB}{MB} = \frac{\frac{2}{3}a\sqrt{3}.a}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} = a$$

Do đó : $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}SH.dt(BCNM) = \frac{1}{3}a.\frac{10a^2}{3\sqrt{3}} = \frac{10a^3}{9\sqrt{3}} \quad \blacksquare$

BT19. *Đề dự bị ĐH khối D 2008*

Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông cân tại B, AB = a, SA = 2a, SA vuông góc mp (ABC). Mặt phẳng qua A và vuông góc SC cắt SB, SC tại H, K. Tính thể tích khối chóp S.AHK.



Ta có $BC \perp BA$ và SA nên $BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp AH \quad (1)$

Mà $SC \perp (AHK) \Rightarrow SC \perp AH \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH \perp SB$ và HK.

- *Cách 1 :*

ΔSAC vuông $\Rightarrow SA^2 = SK.SC$

$$\Rightarrow SK = \frac{SA^2}{SC} = \frac{4a^2}{\sqrt{4a^2+2a^2}} = \frac{4a}{\sqrt{6}}$$

$$\text{và} \quad AK = \frac{SA.AC}{SC} = \frac{2a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

ΔSAB vuông $\Rightarrow AH = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{2a.a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

ΔAHK vuông tại H $\Rightarrow HK^2 = AK^2 - AH^2 = \dfrac{4a^2}{3} - \dfrac{4a^2}{5} = \dfrac{8a^2}{15}$

Vậy dt $(\Delta AHK) = \dfrac{1}{2}HA.HK = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a}{\sqrt{5}}.\dfrac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{15}} = \dfrac{2a^2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$

Do đó $V_{S.AHK} = \dfrac{1}{3}SK.\text{dt}(\Delta AHK) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4a}{\sqrt{6}}.\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \dfrac{8a^3}{45}$.

- *Cách 2 :*

$$\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SH}{SB}.\frac{SK}{SC} = \frac{(SH.SB)}{SB^2}.\frac{(SK.SC)}{SC^2} = \frac{SA^4}{SB^2.SC^2} = \frac{16a^4}{5a^2.6a^2} = \frac{8}{15}$$

Vậy $V_{S.AHK} = \dfrac{8}{15}V_{S.ABC} = \dfrac{8}{15}.\dfrac{1}{3}.2a.\dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{8a^3}{45}$ ■

Lưu ý : Hiển nhiên cách 2 rất ngắn, ít tính toán.

BT20. Cho S.ABC hình chóp đều cạnh đáy a, đường cao $SH = a\sqrt{3}$. Nếu mặt phẳng (P) qua BC và vuông góc SA thì mặt phẳng (P) chia hình chóp theo tỉ số nào ?

Gọi I là trung điểm BC, H là tâm của Δ đều ABC.

Ta có $BC \perp AI$ và SH nên $BC \perp$ mp (SAI).

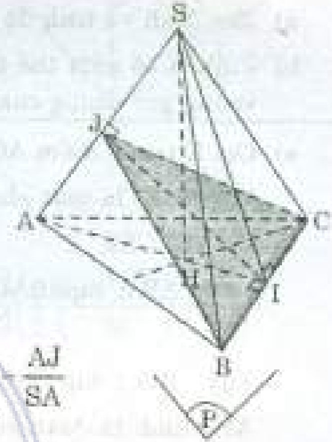
Vẽ IJ ⊥ SA thì SA ⊥ IJ và BC nên SA ⊥ mp (JBC).

ΔJBC chính là thiết diện của (P) và hình chóp.

Do ΔABC đều nên $AH = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

ΔSAH vuông $\Rightarrow SA^2 = SH^2 + AH^2 = (a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{10a^2}{3}$

Ta có : $\quad dt\,(\Delta SAI) = \frac{1}{2}SH.AI = \frac{1}{2}IJ.SA$



$$\Rightarrow IJ = \frac{SH.AI}{SA} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{10}}{\sqrt{3}}} = \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$$

ΔAJI vuông $\Rightarrow AJ^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{27a^2}{40} = \frac{3a^2}{40}$

Ta có : $\frac{V_{SJBC}}{V_{SABC}} = \frac{SJ}{SA}\cdot\frac{SB}{SB}\cdot\frac{SC}{SC} = \frac{SA - AJ}{SA} = 1 - \frac{AJ}{SA}$

$$= 1 - \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}}{\frac{a\sqrt{10}}{\sqrt{3}}} = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20} \quad ■$$

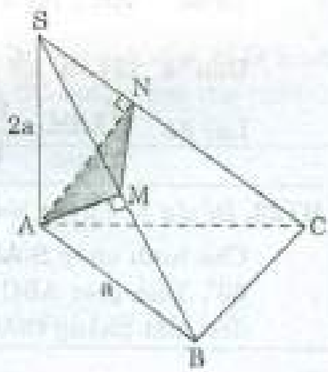
BT21. *Tuyển sinh ĐH khối D 2006*

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB, SC. Tính thể tích khối chóp A.BCNM.

Ta có : $\quad V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.dt\,(\Delta ABC) = \frac{2a}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

ΔSAB vuông tại A $\Rightarrow \quad SA^2 = SM.SB$

$$\Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5}$$



ΔSAC vuông tại A $\Rightarrow \quad SA^2 = SN.SC$

$$\Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5}$$

Do đó : $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}\cdot\frac{SM}{SB}\cdot\frac{SN}{SC} = \frac{16}{25}$

Vậy $V_{S.AMN} = \dfrac{16}{25} V_{S.ABC}$

$$\Rightarrow V_{A.MNCB} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = \frac{9}{25} V_{S.ABC} = \frac{9}{25} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50} \quad \blacksquare$$

BT22. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại A, AB = c, AC = b. Trên đường vuông góc với (P) tại A lấy S sao cho SA = h. M là điểm di động trên cạnh SB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và AB.

a) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SI.

b) Tính tỉ số giữa thể tích các hình chóp B.MIJ và B.SCA khi độ dài đoạn vuông góc chung của AC và MJ đạt giá trị lớn nhất.

a) Gọi E trung điểm AC $\Rightarrow$ IE // AB

Vậy (SIE) là mặt phẳng chứa SI và song song AB.

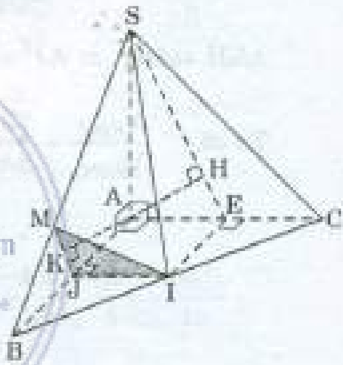
Vẽ AH $\perp$ SE

Ta có AB $\perp$ mp (SAC) $\Rightarrow$ IE $\perp$ mp (SAC)

$\Rightarrow$ IE $\perp$ AH

Vậy AH $\perp$ mp (SIE)

AH chính là đoạn vuông góc chung của hai đường chéo nhau AB và SI.

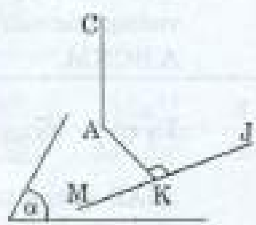


ΔSAE vuông $\Rightarrow AH = \dfrac{SA.AE}{SE}$

$$= \frac{h.\dfrac{b}{2}}{\sqrt{h^2 + \dfrac{b^2}{4}}} = \frac{bh}{\sqrt{4h^2 + b^2}}$$

b) Ta có AC $\perp$ mp (SAB) mà MJ $\subset$ mp (SAB).

Từ A vẽ AK $\perp$ MJ thì AK là đường vuông góc chung của AC và MJ.



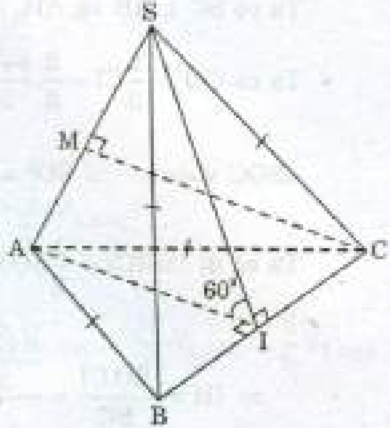
Ta có : $AK \le AJ = \dfrac{c}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ K ≡ J $\Leftrightarrow$ M là trung điểm SB.

Lúc đó : $\dfrac{V_{B.MIJ}}{V_{B.SAC}} = \dfrac{BM}{BS} \cdot \dfrac{BJ}{BA} \cdot \dfrac{BI}{BC} = \dfrac{1}{8}$ $\blacksquare$

BT23. *Đề dự bị Tuyển sinh ĐH khối A 2007*

Cho hình chóp S.ABC có góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tam giác ABC và SBC đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).



Gọi I là trung điểm BC.

ΔABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$

ΔSBC đều $\Rightarrow SI \perp BC$

Vậy $\widehat{SIA} = 60^0$

Do đó ΔSIA đều có cạnh $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $dt(\Delta SAI) = \dfrac{1}{2}AI.SI\sin 60^0$

$$\Rightarrow dt(\Delta SAI) = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$$

Ta có : $\dfrac{V_{B.SAI}}{V_{B.SAC}} = \dfrac{BI}{BC} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow V_{B.SAC} = 2V_{B.SAI} = \frac{2}{3}BI.dt(\Delta ASI) = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

Gọi M là trung điểm SA.

ΔSAC cân tại C có $CS = CA = a$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow CM^2 = CA^2 - AM^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{13a^2}{16}$$

Vậy $dt(\Delta SAC) = \dfrac{1}{2}CM.SA = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{13}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{39}}{16}$

Ta có : $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}d(B, (SAC)).dt(\Delta ASC)$

$$\Rightarrow d(B, (SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{dt(\Delta SAC)} = \frac{3a^3.\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{16}{a^2\sqrt{39}} = \frac{3a}{\sqrt{13}} \blacksquare$$

BT24. *Tuyển sinh ĐH khối B 2012*

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với SA = 2a, AB = a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Chứng minh SC vuông góc mp (ABH). Tính thể tích khối chóp S.ABH theo a.

- Gọi O là tâm của tam giác đều ABC.

Do S.ABC là hình chóp tam giác đều nên $SO \perp (ABC)$.

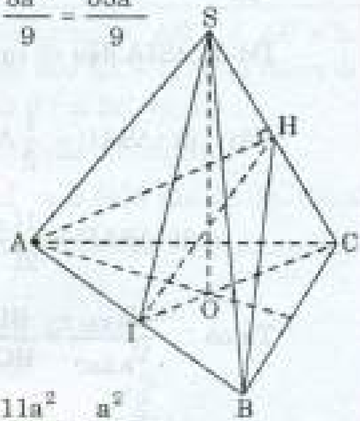
Gọi I là trung điểm của AB.

ΔABC đều nên $CI \perp AB$ mà $AB \perp SO$ nên $AB \perp (SIC) \Rightarrow AB \perp SC$

Ta có $SC \perp AB$ và $AH \Rightarrow SC \perp (ABH)$.

- Ta có $CO = \frac{2}{3}CI = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

ΔSOC vuông $\Rightarrow SO^2 = SC^2 - OC^2 = 4a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{33a^2}{9}$



Ta có dt $(\Delta SIC) = \frac{1}{2}SO.CI = \frac{1}{2}IH.SC$

$$\Rightarrow IH = \frac{SO.CI}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{33}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2a} = \frac{a\sqrt{11}}{4}$$

Do đó dt $(\Delta AHB) = \frac{1}{2}IH.AB = \frac{a^2\sqrt{11}}{8}$

ΔIHC vuông $\Rightarrow HC^2 = IC^2 - IH^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{11a^2}{16} = \frac{a^2}{16}$

Vậy $SH = SC - HC = 2a - \frac{a}{4} = \frac{7a}{4}$

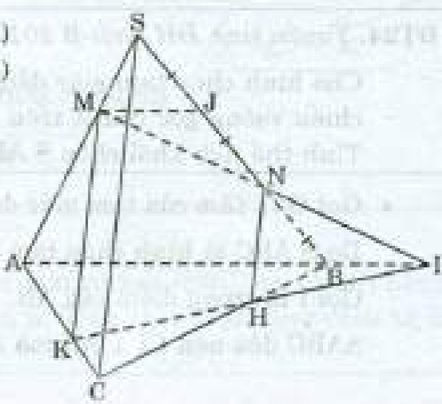
Do đó $V_{S.ABH} = \frac{1}{3}SH.dt(\Delta ABH) = \frac{1}{3}.\frac{7a}{4}.\frac{a^2\sqrt{11}}{8} = \frac{7\sqrt{11}}{96}a^3$

Cách khác : Có thể dùng tỉ số thể tích

$$\frac{V_{S.ABH}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SC} = \frac{7}{8} \Rightarrow V_{S.ABH} = \frac{7}{8}V_{S.ABC} \quad ■$$

BT25. Cho hình chóp S.ABC. Lấy M trên cạnh SA sao cho $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$. Lấy N trên cạnh SB sao cho $\frac{SN}{NB} = 2$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song SC chia khối chóp làm hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Mặt phẳng (α) song song SC, vậy (α) cắt hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) theo giao tuyến MK // NH // SC.



Gọi J là trung điểm SN.

Ta có MJ // IA $\Rightarrow \Delta MJN = \Delta NBI$

N là trung điểm IM, MJ // AB

$\frac{MJ}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MJ = IB = \frac{1}{3}AB$

Ta có $\dfrac{V_{A.MKI}}{V_{A.SCB}} = \dfrac{AM}{AS}.\dfrac{AK}{AC}.\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{27}$

Ta có $\dfrac{V_{I.BNH}}{V_{I.AMK}} = \dfrac{IB}{IA}.\dfrac{IN}{IM}.\dfrac{IH}{IK} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16}$

Do đó $V_{I.BNH} = \dfrac{1}{16}V_{I.AMK} = \dfrac{1}{16}.\dfrac{16}{27}V_{A.SCB} = \dfrac{1}{27}V_{A.SBC}$

Gọi $V_1 = V_{AMK.BNH}$

Ta có $V_1 = V_{I.AMK} - V_{I.BNH} = \dfrac{16}{27}V_{S.ABC} - \dfrac{1}{27}V_{S.ABC} = \dfrac{15}{27}V_{S.ABC} = \dfrac{5}{9}V_{S.ABC}$

$V_2 = V_{S.ABC} - V_1 = \dfrac{4}{9}V_{S.ABC}$

$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{4}$ ■

BT26. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N. Chứng minh :

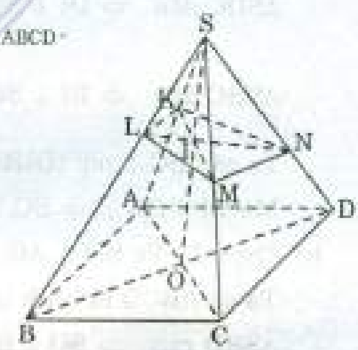
a) $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD}$. b) $\dfrac{SA}{SK} + \dfrac{SC}{SM} = \dfrac{SB}{SL} + \dfrac{SD}{SN}$.

a) Dễ dàng thấy :

$$dt\,(\Delta ABC) = dt\,(\Delta ACD) = dt\,(\Delta ABD) = dt\,(\Delta BCD) = \frac{1}{2}dt\,(ABCD)$$

và các khối chóp của đề toán có cùng chiều cao h = d(S, (ABCD)).

Vậy $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$.



b) Ta có : $\dfrac{V_{S.LKM}}{V_{S.BAC}} = \dfrac{SL}{SB}.\dfrac{SK}{SA}.\dfrac{SM}{SC}$

$\dfrac{V_{S.KMN}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SK}{SA}.\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SD}$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.LKNM}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.LKM}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.KMN}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}}$$

$$= \frac{SK}{SA}.\frac{SM}{SC}\left(\frac{SL}{SB} + \frac{SN}{SD}\right) \quad (1)$$

Tương tự : $\dfrac{V_{S.LKN}}{V_{S.BAD}} = \dfrac{SL}{SB}.\dfrac{SK}{SA}.\dfrac{SN}{SD}$

$\dfrac{V_{S.LMN}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SL}{SB}.\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SD}$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.LKNM}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.LKN}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.LMN}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} = \frac{SL}{SB}.\frac{SN}{SD}\left(\frac{SK}{SA} + \frac{SM}{SC}\right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{SK}{SA}.\frac{SM}{SC}\left(\frac{SL}{SB} + \frac{SN}{SD}\right) = \frac{SL}{SB}.\frac{SN}{SD}\left(\frac{SK}{SA} + \frac{SM}{SC}\right)$

Nhân hai vế với $\frac{SA.SB.SC.SD}{SK.SL.SM.SN}$ ta được :

$$\frac{SB}{SL}.\frac{SD}{SN}\left(\frac{SL}{SB} + \frac{SN}{SD}\right) = \frac{SA}{SK}.\frac{SC}{SM}\left(\frac{SK}{SA} + \frac{SM}{SC}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{SD}{SN} + \frac{SB}{SL} = \frac{SC}{SM} + \frac{SA}{SK} \quad \blacksquare$$

BT27. Cho hình chóp S.ABCD có SA = a và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1.

a) Chứng minh ΔSAC vuông.

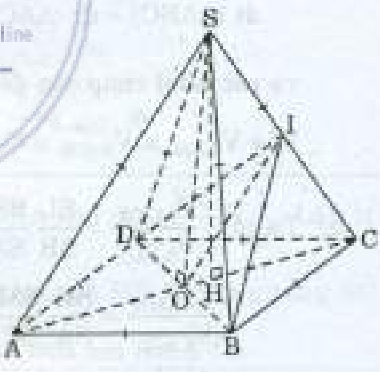
b) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

a) *Cách 1 :* Gọi O là giao điểm hai đường chéo BD và AC của hình thoi ABCD.

Ta có : ΔSDB = ΔCBD (c.c.c) $\Rightarrow SO = OC = \frac{AC}{2}$

Vậy ΔSAC vuông tại S.

Cách 2 : Gọi I là trung điểm SC.



ΔSDC đều $\Rightarrow DI \perp SC$ và $DI = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ΔSBC đều $\Rightarrow BI \perp SC$ và $BI = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ta có : $SC \perp$ mp (DIB) $\Rightarrow SC \perp OI$

Mà OI // SA $\Rightarrow SC \perp SA$.

b) *Cách 1 :* Vẽ $SH \perp AC$ (1)

Ta có ABCD là hình thoi $\Rightarrow BD \perp AC$

ΔSBD cân $\Rightarrow SO \perp BD$

Vậy $BD \perp$ mp (SAC) $\Rightarrow BD \perp SH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SH \perp$ mp (ABCD)

ΔSAC vuông $\Rightarrow AC^2 = SA^2 + SC^2 = a^2 + 1 \Rightarrow SO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$

ΔSOB vuông $\Rightarrow OB^2 = SB^2 - SO^2 = 1 - \frac{a^2+1}{4} = \frac{3-a^2}{4}$

ΔSAC vuông $\Rightarrow SH = \dfrac{SA.SC}{AC} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.dt(ABCD) = \dfrac{1}{6}SH.BD.AC$

$$= \frac{1}{6}.\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}.\sqrt{a^2+1}.\sqrt{3-a^2} = \frac{a\sqrt{3-a^2}}{6}.$$

Cách 2 : Ta có $V_{S.ABCD} = 2V_{S.DBC}$ mà $\dfrac{V_{S.DIB}}{V_{S.DCB}} = \dfrac{SI}{SC} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = 4V_{S.DIB} = \dfrac{4}{3}SI.dt(\Delta IDB) = \dfrac{2}{3}SI.OI.BD$

$$= \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\sqrt{3-a^2} = \frac{a\sqrt{3-a^2}}{6} \quad \blacksquare$$

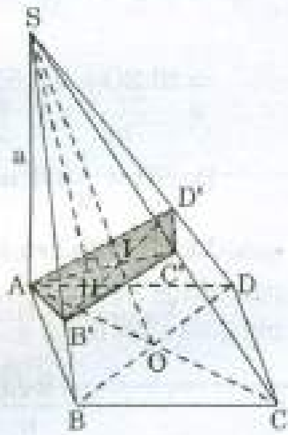
BT28. *Đề dự bị ĐH khối B 2006*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$, SA = a, SA vuông góc mặt phẳng (ABCD). Gọi C' là trung điểm SC. Mặt phẳng (P) qua AC' và song song BD cắt SB, SD tại B', D'. Tính theo a thể tích khối chóp S.AB'C'D'.

Gọi O là tâm hình thoi ABCD.

ΔSAC có SO cắt AC' tại I thì I là trọng tâm ΔSAC.

Mp (P) chứa AC' và song song BD nên (P) cắt mp (SBD) theo giao tuyến B'D' qua I và B'D' // BD.



Ta có BD ⊥ AC và SA nên BD ⊥ mp (SAC)

$\Rightarrow BD \perp AC'$ mà B'D' // BD $\Rightarrow B'D' \perp AC'$

ΔABD cân tại A có $\widehat{BAD} = 60^0$ nên là Δ đều

$\Rightarrow BD = a$ và $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có I là trọng tâm ΔSBD nên

$$\frac{B'D'}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \frac{2}{3}a$$

Cách 1 : ΔSAC vuông tại A có AC' là trung tuyến

$\Rightarrow AC' = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+3a^2} = a$

Do đó $\Delta SAC'$ đều cạnh a.

Vẽ SH ⊥ AC', do B'D' // BD và BD ⊥ (SAC) nên B'D' ⊥ SH

Vậy $SH \perp mp(AB'C'D')$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó : $V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{1}{3}SH.dt(AB'C'D') = \dfrac{1}{6}SH.AC'.B'D'$

$$= \frac{1}{6}.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).\left(a.\frac{2}{3}a\right) = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$$

Cách 2 : Ta có : $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3}V_{S.ABC} = \frac{1}{9}SA.\frac{1}{2}BO.AC = \frac{1}{18}a\left(\frac{a}{2}\right)\left(a\sqrt{3}\right) = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$$

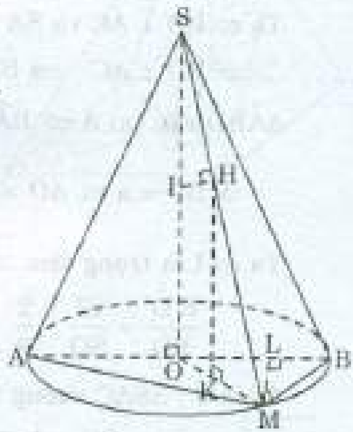
Tương tự : $\dfrac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AC'D'} = \dfrac{1}{3}V_{S.ACD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Vậy $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36} + \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$ ■

BT29. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) tâm O, đường kính AB = 2R. Trên đường vuông góc mặt phẳng (P) tại O lấy điểm S sao cho $SO = R\sqrt{3}$; lấy I trên đoạn SO sao cho $SI = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SM với M là điểm bất kì trên (C). Xác định vị trí điểm M sao cho thể tích tứ diện H.AMB lớn nhất.

Tứ giác IHMO nội tiếp trong đường tròn

$$\Rightarrow SI.SO = SH.SM \quad \Rightarrow SH = \frac{\frac{2R}{\sqrt{3}}.R\sqrt{3}}{\sqrt{3R^2+R^2}} = R$$



Do $SH = \dfrac{1}{2}SM$ nên H là trung điểm SM.

Vẽ HK // SO và ML ⊥ AB

$$V_{H.AMB} = \frac{1}{3}HK.dt(\Delta AMB)$$

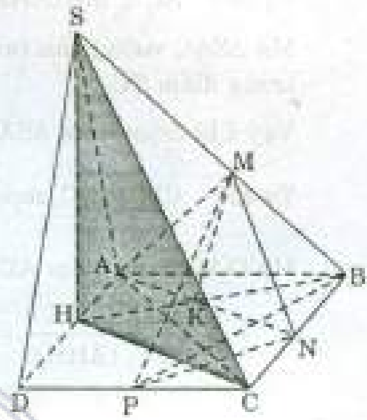
$$= \frac{R\sqrt{3}}{6}.dt(\Delta AMB)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{R\sqrt{3}}{6}ML.AB = \frac{R^2\sqrt{3}}{6}LM \le \frac{R^2\sqrt{3}}{4}MO$$

Dấu "=" xảy ra ⇔ MO ⊥ AB ⇔ M là trung điểm $\overset{\frown}{AB}$ ■

BT30. *Tuyển sinh ĐH khối A 2007*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SB, BC và CD. Chứng minh AM vuông góc BP và tính thể tích khối chóp CMNP.



- Gọi H là trung điểm AD.

  Do ΔSAD đều nên $SH \perp AD$

  Mà mp (SAD) $\perp$ mp (ABCD)

  $\Rightarrow SH \perp$ mp (ABCD) $\quad \Rightarrow SH \perp BP \quad (1)$

  Ta có : $\Delta HDC = \Delta BPC \quad \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$

  Mà $\quad \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^0 \quad \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_2 = 90^0$

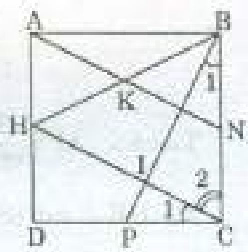
  Vậy ΔBIC vuông tại I $\quad \Rightarrow BP \perp CH \quad (2)$

  Từ (1), (2) $\Rightarrow BP \perp$ mp (SHC)

  Ta có : $\quad MN \parallel SC$ và $AN \parallel HC$

  $\Rightarrow$ mp (SHC) // mp (AMN)

  Do đó : $\quad BP \perp$ mp (AMN) $\Rightarrow BP \perp AM$



- Vẽ $MK \parallel SH$ với $K \in$ mp (ABCD)

  Mà $SH \perp$ mp (ABCD) nên $MK \perp$ mp (ABCD).

  Do đó MK là đường cao của tứ diện M.CNP

  Ta có : $\quad V_{M.CNP} = \dfrac{1}{3} MK.dt(\Delta CNP)$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{SH}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} CN.CP = \frac{1}{12}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96} \quad ■$$

BT31. *Đề dự bị Tuyển sinh ĐH khối B 2007*

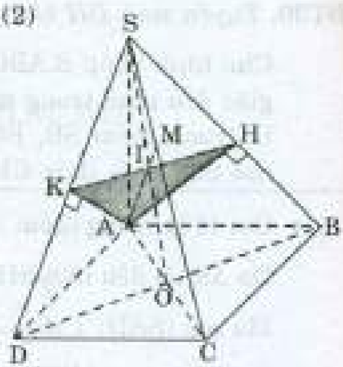
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Cho AB = a, SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD. Chứng minh SC vuông góc mặt phẳng (AHK) và tính thể tích hình chóp O.AHK.

- Ta có : $\Delta SAD = \Delta SAB \quad \Rightarrow AK = AH$

  $\Rightarrow \Delta SAK = \Delta SAH \quad \Rightarrow SK = SH \quad \Rightarrow HK \parallel BD$

  Mà $BD \perp$ mp (SAC) $\quad \Rightarrow HK \perp$ mp (SAC) $\quad \Rightarrow HK \perp SC \quad (1)$

  Mặt khác : $CD \perp$ mp (SAD) $\quad \Rightarrow CD \perp AK$



Mà AK ⊥ SD nên AK ⊥ (SCD) ⇒ SC ⊥ AK (2)

Từ (1) và (2) ⇒ SC ⊥ mp (AHK)

- Trong mp (SBD) thì SO cắt HK tại I

Trong mp (SAC) thì AI cắt SC tại M

Ta có : SC ⊥ mp (AHK) ⇒ SC ⊥ AM

Mà ΔSAC vuông cân tại A nên M là trung điểm SC.

Vậy I là trọng tâm ΔSAC.

Ta có : $CM = d(C, mp\,(AHK)) = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$

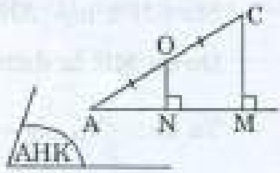
Mà O là trung điểm AC nên

$$\frac{d(O, (AHK))}{d(C, (AHK))} = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = d(O, (AHK)) = \frac{1}{2}CM = \frac{a}{2}$$

Ta có : $\dfrac{HK}{BD} = \dfrac{SH}{SB} \Rightarrow \dfrac{HK}{BD} = \dfrac{\frac{SA^2}{SB}}{SB}$

$$\Rightarrow HK = BD.\frac{SA^2}{SB^2} = a\sqrt{2}.\frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$$

Ta có : $AI = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{SC}{2} = \dfrac{SC}{3} = \dfrac{2a}{3}$



Mà HK ⊥ mp (SAC) ⇒ HK ⊥ AI

Ta có : $V_{O.AHK} = \dfrac{1}{3}h.dt\,(\Delta AHK)$

$$= \frac{h}{6}AI.HK = \frac{a}{12}\left(\frac{2a}{3}\right)\left(\frac{2}{3}a\sqrt{2}\right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{27}$$ ■

BT32. *Đề dự bị ĐH khối B 2007*

Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R và điểm C thuộc nửa đường tròn sao cho AC = R. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho góc phẳng nhị diện cạnh SB bằng 60^0. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Chứng minh ΔAHK vuông và tính thể tích tứ diện S.ABC.

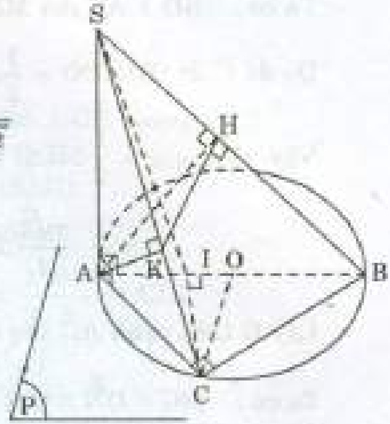
Ta có : $\widehat{ACB} = 1v \Rightarrow BC \perp CA$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp mp\,(SAC)$.

Do đó : BC ⊥ AK mà AK ⊥ SC nên AK ⊥ mp (SBC)

Do đó : AK ⊥ HK.

Vậy ΔAHK vuông tại K.

Đặt SA = h



ΔSAC vuông $\Rightarrow AK = \dfrac{AC.AS}{SC} = \dfrac{Rh}{\sqrt{R^2+h^2}}$

ΔSAB vuông $\Rightarrow AH = \dfrac{AS.AB}{SB}$

$$= \frac{2Rh}{\sqrt{4R^2+h^2}}$$

Ta có : $SB \perp (AHK) \Rightarrow SB \perp HK$.

Vậy $\widehat{AHK} = 60^0$

ΔAHK vuông $\Rightarrow \sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AK}{AH} \Rightarrow 3AH^2 = 4AK^2$

$$\Rightarrow \frac{3.4R^2h^2}{4R^2+h^2} = \frac{4R^2h^2}{R^2+h^2} \Rightarrow 3(R^2+h^2) = 4R^2+h^2$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{R^2}{2}$$

Do đó : $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SA.dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{R}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}CI.AB$

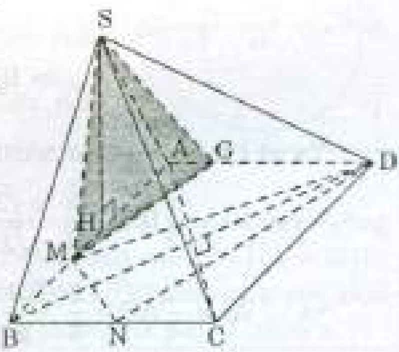
$$= \frac{1}{6\sqrt{2}}R\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)(2R) = \frac{R^3\sqrt{6}}{12} \ ■$$

BT33. *Tuyển sinh ĐH khối B 2008*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tính theo a thể tích khối chóp S.BMDN và cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

- Ta có : $SB^2 + SA^2 = (a\sqrt{3})^2 + a^2 = AB^2$

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại S $\Rightarrow SM = \dfrac{AB}{2} = a$



Vậy ΔSMA đều cạnh a.

Vẽ $SH \perp AB$

Do mp (SAB) $\perp$ mp (ABCD)

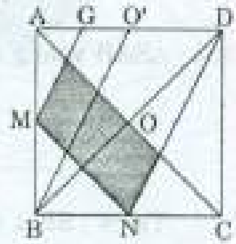
nên $SH \perp$ mp (ABCD) và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có : $BD \perp AC$ mà $MN // AC$ nên $MN \perp BD$

Do đó : $dt(BMDN) = \frac{1}{2}MN.BD = \frac{1}{2}\cdot\frac{AC}{2}.AC = \frac{AC^2}{4} = \frac{(2a\sqrt{2})^2}{4} = 2a^2$

Vậy $V_{S.BMDN} = \frac{1}{3}SH.dt(BMDN)$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$



- Lấy G trên cạnh AD sao cho $AG = \frac{AD}{4} = \frac{a}{2}$

Ta có : $MG // DN // O'B$

Vậy $(\widehat{SM, DN}) = \widehat{SMG}$

ΔSAG vuông tại A $\Rightarrow SG^2 = SA^2 + AG^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

ΔAMG vuông tại A $\Rightarrow MG^2 = AG^2 + AM^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}$

$\Delta SMG \Rightarrow SG^2 = MS^2 + MG^2 - 2MS.MG\cos\widehat{SMG}$

$$\Rightarrow \cos\widehat{SMG} = \frac{MS^2}{2MS.MG} = \frac{MS}{2MG} = \frac{a}{2\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \blacksquare$$

BT34. *Tuyển sinh ĐH khối B 2006*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc mặt phẳng ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AD và SC, I là giao điểm của MB và AC. Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện A.NIB.

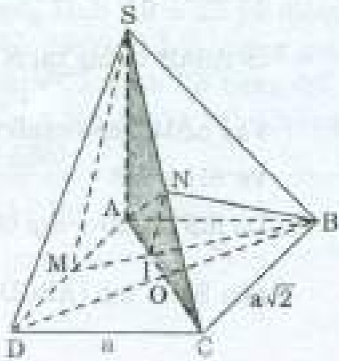
ΔABM vuông tại A $\Rightarrow BM^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$

$$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Ta có I là trọng tâm ΔABD

Vậy $BI = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

và $AI = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}\cdot\frac{BD}{2} = \frac{BD}{3}$



$$\Rightarrow AI = \frac{\sqrt{a^2 + 2a^2}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Do đó : $AI^2 + IB^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} = a^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta AIB$ vuông tại I.

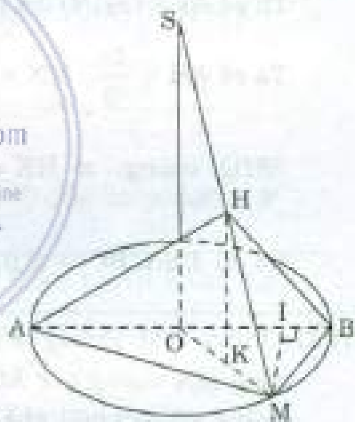
Ta có : $BI \perp AI$ và $BI \perp SA$ nên $BI \perp mp\ (SAC)$

Mà $BI \subset mp\ (SMB)$ nên $mp\ (SAC) \perp mp\ (SMB)$

- Ta có : $V_{ANIB} = V_{N.AIB} = \frac{1}{3}NO.dt\ (\Delta AIB) = \frac{1}{3}.\frac{SA}{2}.\frac{1}{2}IA.IB$

$$= \frac{a}{12}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36} \quad \blacksquare$$

BT35. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại O lấy điểm S sao cho $SO = R\sqrt{3}$. Lấy M di động trên đường tròn (O, R). Gọi H là trung điểm SM. Tìm M trên đường tròn (O, R) sao cho hình chóp H.AMB có thể tích lớn nhất.



Trong mp (SOM) vẽ HK // SO

Do $SO \perp mp\ (MAB) \Rightarrow HK \perp mp\ (ABM)$

và $HK = d(H, mp\ (MAB)) = \frac{SO}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

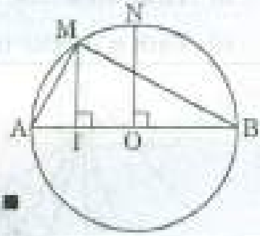
Vẽ đường cao MI trong ΔMAB.

Ta có : $V_{H.MAB} = \frac{1}{3}HK.dt\ (\Delta MAB)$

$$= \frac{1}{6}HK.MI.AB$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)(2R)MI = \frac{R^2\sqrt{3}}{6}MI$$

$$\Rightarrow V_{H.MAB} \leq \frac{R^2\sqrt{3}}{6}.R \quad (\text{do } MI \leq ON = R)$$



Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv N$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$.

Vậy $V_{max} = \frac{R^3\sqrt{3}}{6}$ khi M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$ $\blacksquare$

BT36. *Tuyển sinh ĐH khối A 2012*

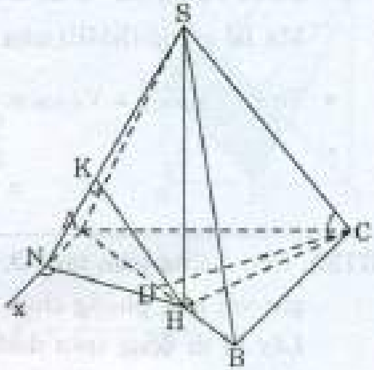
Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mp (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mp (ABC) bằng 60°. Tính thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

- Ta có $\widehat{SCH}$ là góc của SC và (ABC) $\Rightarrow \widehat{SCH} = 60^0$

Gọi D là trung điểm của AB.

Ta có : $HD = \dfrac{a}{6}$, $CD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$

ΔSHC vuông $\Rightarrow SH = HC\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$



Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.dt(\Delta ABC)$

$$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{21}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}.$$

- Vẽ Ax // BC thì d(SA, BC) = d(BC, (SAx))

Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên Ax và SN.

Ta có $Ax \perp (SHN) \Rightarrow Ax \perp HK$. Vậy $HK \perp (SAN)$.

Ta có $AH = \dfrac{2a}{3}$, $HN = AH\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

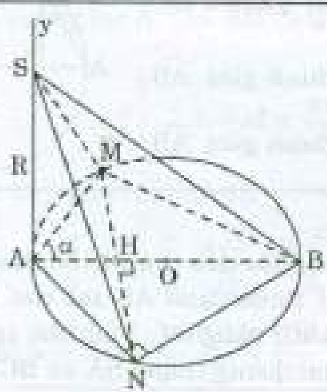
ΔSHN vuông $\Rightarrow HK = \dfrac{SH.NH}{SN} = \dfrac{a\sqrt{42}}{12}$

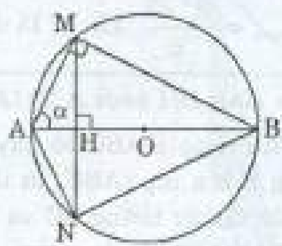
Do đó $d(SA, BC) = d(B, (SAN)) = \dfrac{3}{2}d(H, (SAN)) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}$ ■

BT37. Trong mặt phẳng (P), cho đường tròn (C) đường kính AB = 2R. Dây cung MN vuông góc AB tại H, có $\widehat{BAM} = \alpha$. Lấy điểm S trên đường Ay vuông góc với mặt phẳng (P) sao cho AS = R.

a) Tính diện tích toàn phần hình chóp S.AMBN theo a và α.

b) Tính α để thể tích khối chóp S.MBN gấp ba thể tích khối chóp S.AMN.





a) Ta có : ΔMBA vuông tại M $\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{MB}{AB} \Rightarrow MB = 2R\sin\alpha$

Tương tự : $AM = AN = 2R\cos\alpha$

ΔSAM vuông $\Rightarrow SM^2 = SN^2 = SA^2 + AN^2 = 4R^2 + 4R^2\cos^2\alpha$

ΔSAB vuông $\Rightarrow SB^2 = R^2 + 4R^2 = 5R^2$

Theo định lí ba đường vuông góc : $BN \perp NA \Rightarrow BN \perp SN$

$BM \perp MA \Rightarrow BM \perp SM$

Ta có : $S_{tp} = dt(\Delta AMBN) + dt(\Delta SAN) + dt(\Delta SAM) + dt(\Delta SBM) + dt(\Delta SBN)$

$$\Rightarrow S_{tp} = MA.MB + 2dt(\Delta SAN) + 2dt(\Delta SBN)$$

$$= (2R\cos\alpha)(2R\sin\alpha) + R(2R\cos\alpha) + \sqrt{R^2 + 4R^2\cos^2\alpha}\,2R\sin\alpha$$

$$= 2R^2(\sin2\alpha + \cos\alpha + \sqrt{1 + 4\cos^2\alpha}.\sin\alpha)$$

b) Ta có : $V_{S.MBN} = 3V_{S.AMN} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}SA\left(\dfrac{1}{2}BH.MN\right) = SA.\dfrac{1}{2}AH.MN$

$$\Leftrightarrow BH = 3AH \Leftrightarrow AH = \frac{AB}{4} = \frac{R}{2}$$

Mà : $AM^2 = AB.AH = 2R\left(\dfrac{R}{2}\right) = R^2 \Rightarrow \Delta AMO$ đều $\Rightarrow \alpha = 60^0$ ■

BT38. Cho tứ diện ABCD có $AD = BC = a$, $AC = BD = b$, $AB = CD = c$.

a) Chứng minh rằng các đoạn thẳng nối trung điểm của các cặp cạnh đối diện là đoạn vuông góc chung của các cặp cạnh đó.

b) Tính thể tích tứ diện A.BCD theo a, b, c.

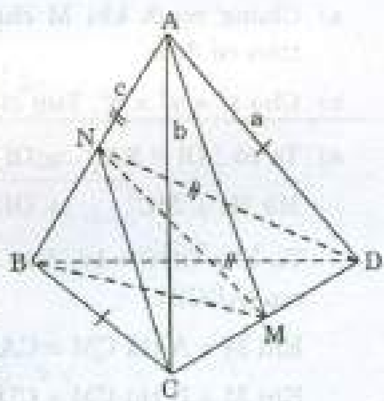
a) Ta có : $\Delta ACD = \Delta BCD$ (c.c.c) nên $AM = BM$.

ΔMAB nên tại M có NM là trung tuyến nên $MN \perp AB$.

Tương tự ΔNCD cân tại N nên $MN \perp CD$

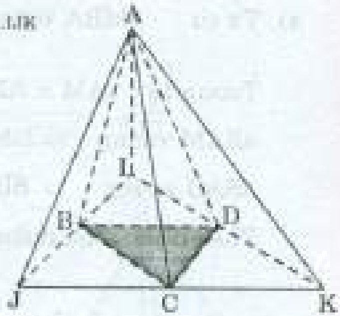
Do đó MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

Hai đường vuông góc còn lại chứng minh tương tự.



b) Từ ba đỉnh của ΔBCD vẽ ba đường thẳng song song các cạnh tam giác, ba đường này tạo ΔIJK (xem hình).

Do dt (ΔIJK) = 4dt (ΔBCD) $\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{A.IJK}$



Ta có BC = DI = DK mà BC = AD = a

nên DA = DI = DK

Do đó ΔAIK vuông tại A.

Tương tự các ΔAIJ và ΔAJK cũng vuông tại A

Do đó : $V_{AIJK} = \frac{1}{6}AI.AJ.AK$

ΔAIK vuông $\Rightarrow IK^2 = AI^2 + AK^2$

$\Rightarrow AI^2 + AK^2 = 4BC^2 = 4a^2$ (1)

Tương tự : $AI^2 + AJ^2 = 4CD^2 = 4c^2$ (2)

$AJ^2 + AK^2 = 4BD^2 = 4b^2$ (3)

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow AI^2 + AJ^2 + AK^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$ (4)

(4) – (1) $\Rightarrow AJ^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2)$

(4) – (2) $\Rightarrow AK^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2)$

(4) – (3) $\Rightarrow AI^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2)$

Do đó : $V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{AIJK} = \frac{1}{24}AI.AJ.AK$

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}.\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$$ ■

BT39. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên đường vuông góc với mặt phẳng chứa ABCD tại A, lấy điểm S di động với SA = y. Trên cạnh AD lấy M với AM = x ($0 \le x \le a$). Gọi I là trung điểm SC, H là hình chiếu vuông góc của I lên MC.

a) Chứng minh khi M chạy trên đoạn AD thì H di động trên một cung tròn cố định.

b) Cho $x^2 + y^2 = a^2$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp S.ABCM.

a) Ta có : OI // SA $\Rightarrow$ OI ⊥ mp (ABCD)

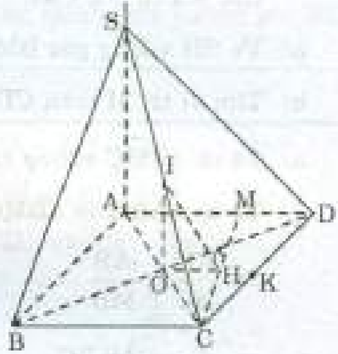
Mà IH ⊥ MC $\Rightarrow$ OH ⊥ MC (do định lí ba đường vuông góc)

Ta có : $\widehat{OHC} = 1v$. Vậy H di động trên đường tròn đường kính OC trên mp (ABCD).

Khi M ≡ A thì CM ≡ CA và H ≡ O

Khi M ≡ D thì CM ≡ CD và H ≡ K trung điểm CD.

Do đó khi M di động trên đoạn AD thì H di động trên cung $\overset{\frown}{OK}$ của đường tròn đường kính OC trên mp (ABCD).



b) Ta có : $V_{S.ABCM} = \frac{1}{3}SA.dt(ABCM)$

$$\Rightarrow V = \frac{y}{3}\cdot\frac{AB}{2}(AM + BC) = \frac{ay}{6}(x + a)$$

Mà $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}$

Vậy $V = \frac{a}{6}(x + a)\sqrt{a^2 - x^2}$

Xét $f(x) = (x + a)\sqrt{a^2 - x^2}$ trên $D = [0; a]$

Ta có : $f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + (x + a)\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{a^2 - x^2 - (x + a)x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (0; a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + ax - a^2 = 0 \\ x \in (0; a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \vee x = \frac{a}{2} \\ x \in (0; a) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

Ta có : $f(0) = a^2$, $f(a) = 0$, $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

Do đó : $\underset{[0;a]}{\text{Max}}\, V = \frac{a}{6}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{a^3}{8}\sqrt{3}$ khi $\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ■

- *Chú ý* : Có thể tìm MaxV bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương.

Ta có : $3V^2 = \frac{a^2}{36}(a + x)(a + x)(a + x)(3a - 3x)$

$$\Rightarrow 3V^2 \le \frac{a^2}{36}\left[\frac{(x + a) + (x + a) + (x + a) + 3a - 3x}{4}\right]^4$$

$$\Rightarrow V^2 \le \frac{a^2}{3.36}\left(\frac{3}{2}a\right)^4 = \frac{3a^6}{64}$$

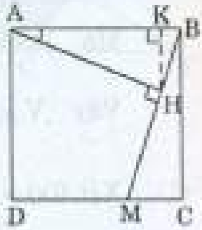
Dấu "=" xảy ra khi $3(x + a) = 3a - 3x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

BT40. Cho hình chóp S.ABCD với SA vuông góc mặt phẳng ABCD, SA = h, đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Lấy M thay đổi trên đoạn CD với CM = x ($0 \le x \le a$).

a) Vẽ SH vuông góc BM. Tính SH theo a, h và x.

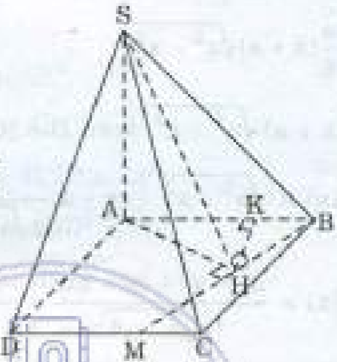
b) Tìm vị trí M trên CD để thể tích tứ diện S.ABH đạt giá trị lớn nhất.

a) Ta có ΔBMC vuông tại C $\Rightarrow BM^2 = x^2 + a^2$



Ta có $\Delta ABH \backsim \Delta BMC$

$$\Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{AB}{MB}$$



$$\Rightarrow AH = \frac{AB.BC}{MB} = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Ta có ΔSAH vuông tại A

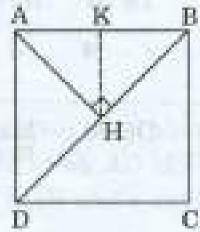
$$\Rightarrow SH^2 = AH^2 + SA^2$$

$$= \frac{a^4}{x^2 + a^2} + h^2$$

b) Ta có mp (SAB) vuông góc mp (ABCD) theo giao tuyến AB.

Vẽ HK $\perp$ AB thì HK $\perp$ mp (SAB).

Do đó : $V_{H.SAB} = \frac{1}{3}HK.dt\,(\Delta SAB) = \frac{1}{6}ah.HK$



Ta có ΔHAB vuông tại H $\Rightarrow HK^2 = KA.KB$

Mà do bất đẳng thức Cauchy :

$$a = KA + KB \ge 2\sqrt{KA.KB} = 2HK$$

Do đó : $V_{SABH} \le \frac{1}{6}ah\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2h}{12}$ (hằng số)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} KA = KB \\ KA + KB = a \end{cases} \Leftrightarrow KA = KB = \frac{a}{2} \Leftrightarrow$ K trung điểm AB

$$\Leftrightarrow \Delta HAB \text{ vuông cân } \Leftrightarrow AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow H \equiv \text{tâm O hình vuông ABCD} \Leftrightarrow M \equiv D$$

Do đó : $V_{max} = \frac{a^2h}{12}$ khi $M \equiv D$ ■

BT41. *Tuyển sinh Cao đẳng 2009*

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có AB = a, SA = $a\sqrt{2}$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, CD. Chứng minh MN vuông góc SK. Tính thể tích khối A.MNK.

Cách 1 :

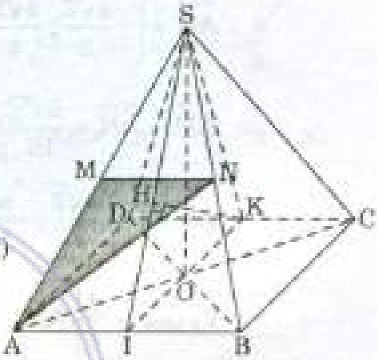
- S.ABCD là hình chóp tứ giác đều $\Rightarrow SA = SB = SC = SD$ (1)

Gọi O là tâm hình vuông ABCD $\Rightarrow OA = OB = OC = OD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ SO là trục đường tròn (ABCD) $\Rightarrow SO \perp$ mp (ABCD)

ΔSCD cân tại S $\Rightarrow SK \perp CD$

Mà CD // AB // MN $\Rightarrow SK \perp MN$.



- Gọi I là trung điểm AB.

ΔSAB cân $\Rightarrow SI \perp AB$

Vẽ $KH \perp SI$ (3)

Ta có : $AB \perp SI$ và SC nên $AB \perp$ mp (SIK)

$\Rightarrow AB \perp HK$ (4)

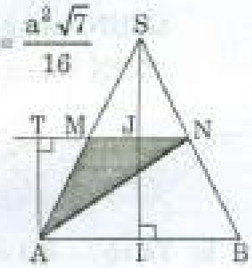
Từ (3) và (4) $\Rightarrow KH \perp$ mp (SAB)

ΔSIB vuông $\Rightarrow SI^2 = SB^2 - IB^2 = 2a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{7a^2}{4}$

ΔSOI vuông $\Rightarrow SO^2 = SI^2 - OI^2 = \dfrac{7a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{6a^2}{4}$

Ta có : dt $(\Delta SIK) = \dfrac{1}{2}SO.IK = \dfrac{1}{2}HK.SI \Rightarrow HK = \dfrac{SO.IK}{SI} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{2}.a}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

$$\text{dt }(\Delta MNA) = \frac{1}{2}AT.MN = \frac{1}{4}SI.MN = \frac{1}{4}.\frac{a\sqrt{7}}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{16}$$



Vậy $V_{A.MNK} = \dfrac{1}{3}KH.\text{dt }(\Delta MNA) = \dfrac{1}{4}.\dfrac{a\sqrt{7}}{2}.\dfrac{a}{2}$

$= \dfrac{a^3\sqrt{6}}{48}$

Lưu ý : Chứng minh $MN \perp SK$ quá dễ. Còn việc tính V quá phức tạp. Chúng ta khá khó khăn để chọn K là đỉnh và H là chân đường vuông góc hạ từ K đến mặt phẳng (MNA). Kế đến việc tính KH phải qua diện tích. Chúng ta sẽ xem bài giải cách 2 gắn trục vào tính V dễ dàng sau đây.

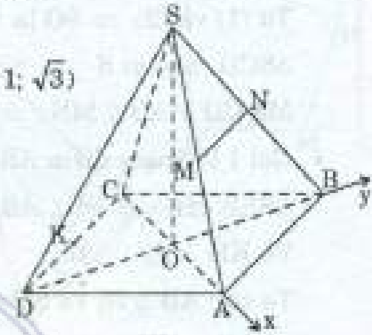
Cách 2 : Gắn trục như hình vẽ.

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right),\ B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right),\ S\left(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{2}\right),\ C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$$

$$D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right),\ M\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};0;\frac{a\sqrt{6}}{4}\right),\ N\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{6}}{4}\right),\ K\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4};-\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$$

Ta có : $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4};0;\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{4}(-1;0;\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{4}(-2;1;\sqrt{3})$



$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AN}=\frac{2a^2}{16}(-\sqrt{3};\sqrt{3};-1)$

$\overrightarrow{AK}=\left(-\frac{3a\sqrt{2}}{4};-\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$

$V_{A.MNK}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AN})\overrightarrow{AK}\right|=\frac{a^3\sqrt{6}}{48}$ ■

BT42. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD có tâm O, cạnh a. Trên tia Ax, Cy ở về cùng một phía và vuông góc mp (P) lấy hai điểm M, N. Đặt AM = x, CN = y.

a) Chứng minh điều kiện cần và đủ để ΔOMN vuông tại O là $a^2 = 2xy$.

b) Giả sử M, N thay đổi sao cho ΔOMN vuông tại O. Tính thể tích tứ diện B.DMN. Xác định x, y để $V_{B.DMN}=\frac{a^3}{4}$.

a) Trên mp (Ax, Cy) vẽ MH // AC.

ΔMHN vuông tại H $\Rightarrow MN^2 = MH^2 + NH^2 = 2a^2 + |y-x|^2$

ΔOMN vuông tại O $\Leftrightarrow MN^2 = OM^2 + ON^2$

$\Leftrightarrow MN^2 = (AM^2 + OA^2) + (OC^2 + CN^2)$

$\Leftrightarrow 2a^2 + (y-x)^2 = x^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + y^2 \Leftrightarrow a^2 = 2xy$

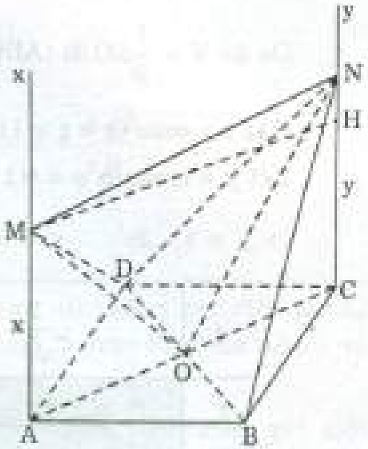
b) Ta có : BD ⊥ AC và BD ⊥ MA $\Rightarrow$ BD ⊥ mp (MNCA)

$\Rightarrow$ BD ⊥ MO (1)

Mà MO ⊥ ON (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ OM ⊥ mp (BDN)

Ta có : $\Delta NBC = \Delta NCD \Rightarrow NB = ND$



Do đó : $dt(\Delta NBD) = \frac{1}{2} NO.BD$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} + y^2}.a\sqrt{2}$$

Vậy $V_{M.NBD} = \frac{1}{3} OM.dt(\Delta NBD)$

$$\Rightarrow V_{M.NBD} = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{2}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{y^2 + \frac{a^2}{2}}$$

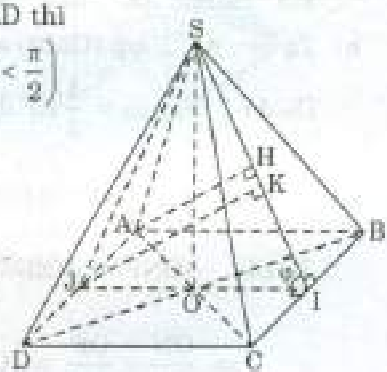
Mà $xy = \frac{a^2}{2}$ nên

$$V_{M.NBD} = \frac{a\sqrt{2}}{6}\sqrt{x^2 + xy}.\sqrt{y^2 + yx} = \frac{a\sqrt{2}}{6}\sqrt{xy(x+y)^2} = \frac{a^2}{6}(x+y)$$

Ta có : $V_{M.NBD} = \frac{a^3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{a^2}{2} \\ \frac{a^2}{6}(x+y) = \frac{a^3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{3}{2}a \\ xy = \frac{a^2}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = \frac{a}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = a \end{cases}$$ ■

BT43. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 2a. Gọi φ là góc của mặt bên và mặt đáy của khối chóp. Tìm φ sao cho thể tích khối chóp đạt giá trị nhỏ nhất.



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AD thì

$OI \perp BC$ và $SI \perp BC$ nên $\widehat{OIS} = \varphi \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

Vẽ $JK \perp SI$.

Ta có $BC \perp mp(SJI) \Rightarrow BC \perp JK$

Vậy $JK \perp mp(SBC)$

Do AD // mp (SBC) nên

$$JK = d(J, (SBC)) = d(A, (SBC)) = 2a$$

ΔJKI vuông $\Rightarrow \sin\varphi = \frac{JK}{IJ} \Rightarrow IJ = \frac{2a}{\sin\varphi}$

ΔSOI vuông $\Rightarrow \tan\varphi = \frac{SO}{OI} \Rightarrow SO = \frac{a}{\sin\varphi}.\tan\varphi = \frac{a}{\cos\varphi}$

Do đó $V = \frac{1}{3}SO.dt\,(ABCD) = \frac{a}{3\cos\varphi}\left(\frac{2a}{\sin\varphi}\right)^2 = \frac{4a^3}{3\cos\varphi\sin^2\varphi}$

Đặt $t = \cos\varphi$ $(0 < t < 1)$

Xét $y = \cos\varphi\sin^2\varphi = t(1 - t^2) = t - t^3$

$\Rightarrow y' = 1 - 3t^2$; $\quad y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

t	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
y'	−	0	+	+	0	−	
y				↗	CĐ	↘	

Do đó V đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow y = \cos\varphi\sin^2\varphi$ đạt giá trị lớn nhất

$\Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ■

BT44. Cho tam giác OAB đều cạnh a. Trên đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (OAB) tại O lấy điểm M sao cho OM = x. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MB và OB. Đường thẳng EF cắt d tại N.

a) Chứng minh AN vuông góc BM.

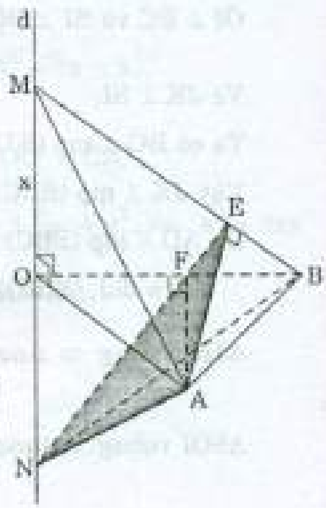
b) Tìm x để thể tích tứ diện ABMN là nhỏ nhất.

a) Ta có : $OM \perp mp\,(OAB) \Rightarrow OM \perp AF$

mà $AF \perp OB$ nên $AF \perp mp\,(OMB) \Rightarrow AF \perp MB$

Mà $MB \perp AE$ nên $MB \perp mp\,(AEF) \Rightarrow MB \perp AN$.

b) Ta có : $AF \perp mp\,(OMB) = mp\,(BMN)$



Do đó : $V_{ABMN} = \frac{1}{3}AF.dt\,(\Delta BMN)$

$V = \frac{1}{6}AF.OB.MN = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a.MN$

Ta có : $\Delta ONF \backsim \Delta OBM$

$\Rightarrow \frac{ON}{OB} = \frac{OF}{OM} \Rightarrow ON = a.\frac{\frac{a}{2}}{x} = \frac{a^2}{2x}$

Do đó : $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}(OM + ON) = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\left(x + \frac{a^2}{2x}\right)$

Do bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$V \geq \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.2\sqrt{\frac{x.a^2}{2x}} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{a^2}{2x} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{min} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ■

Bài 45. Cho ΔABC đều cạnh a. Trên đường thẳng (d) vuông góc mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm M. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của ΔABC và ΔBCM.

a) Chứng minh MC vuông góc mặt phẳng (BHK) và HK vuông góc mặt phẳng (BMC).

b) Khi M thay đổi trên (d), tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện K.ABC.

a) • Ta có : $BH \perp AC$ và $BH \perp MA \Rightarrow BH \perp mp(MAC) \Rightarrow BH \perp MC$

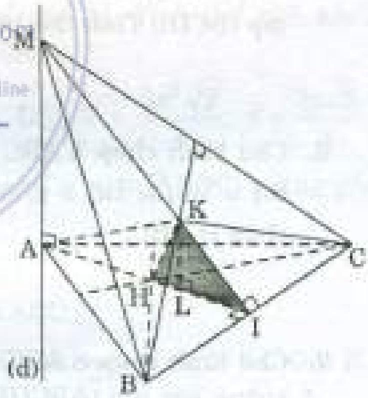
mà $BK \perp MC$ nên $MC \perp mp(BHK)$

• Gọi I là trung điểm BC.

Ta có : $BC \perp AI$ và $BC \perp MA \Rightarrow BC \perp mp(MAI) \Rightarrow BC \perp HK$

Do $MC \perp mp(BHK) \Rightarrow MC \perp MK$

Vậy $HK \perp mp(MBC)$.



b) Trong mp (MAI) vẽ KL // MA

$\Rightarrow KL \perp mp(ABC)$

Do $HK \perp mp(MBC) \Rightarrow HK \perp MI$

Ta có : $dt(\Delta HKI) = \frac{1}{2}KL.HI = \frac{1}{2}HK.KI$

Do bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$HK^2 + KI^2 \geq 2KH.KI = 2KL.HI$$

Do đó : $KL \leq \frac{HK^2 + KI^2}{2HI} = \frac{HI^2}{2HI} = \frac{HI}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$

Ta có : $V_{K.ABC} = \frac{1}{3}KL.dt(\Delta ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}KL$

$$\Rightarrow V_{K.ABC} \leq \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.\frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3}{48}$$

Dấu "=" xảy ra ⇔ KH = KI ⇔ L trung điểm HI.

Do đó : $V_{K.ABC}\ max = \frac{a^3}{48}$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mp (ABC), $\widehat{BAC} = 120^0$, ΔSBC đều cạnh a. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

ĐS : $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = 3a, AD = CD = a, SA vuông góc mp (ABCD), SC tạo với đáy góc $\dfrac{\pi}{4}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

ĐS : $V = \dfrac{a^3\sqrt{8}}{3}$.

3. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mp (ABC), M là trung điểm của SC, ΔABC vuông cân tại B, BA = a. Góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABM.

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, SA vuông góc mp (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ACD và cosin góc của SB và AC.

5. Cho tứ diện ABCD có ΔABC và ΔABD đều cạnh a, mp (ACD) vuông góc mp (BCD). Tính thể tích khối chóp A.BCD và góc của AD và BC.

ĐS : $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$; 60^0.

6. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mp (ABC), ΔABC vuông tại B, $SA = 2a\sqrt{3}$, BC = a, AC = 2a. Vẽ AH vuông góc SB. Tính thể tích khối chóp H.ABC.

ĐS : $V = \dfrac{a^3}{5}$.

7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mp (SAB) vuông góc mp (ABCD), SA = SB, góc của SC và mp (ABCD) bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

ĐS : $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

8. Cho ΔOAB có OA = OB = 2a, $\widehat{AOB} = 120^0$. Trên đường thẳng d vuông góc mp (OAB) tại O lấy hai điểm C, D về hai phía sao cho ΔABC vuông tại C, ΔABD đều. Tính thể tích khối chóp A.BCD.

9. Cho hình chóp S.ABC có góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 60^0, ΔABC và ΔSBC đều cạnh a. Tính khoảng cách từ B đến mp (SAC).

ĐS : $\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

10. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên tạo với đáy góc φ $(0 < \varphi < 90^0)$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ A đến mp (SBC).

11. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = 3a, ΔABC vuông tại B, AB = a, BC = 2a. Tính khoảng cách từ A đến mp (SBC).

12. Cho hình chóp S.ABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc, SA = SB = SC = a. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Gọi D là điểm đối xứng của S qua E, gọi I là giao điểm của AD và mp (SMN). Chứng minh AI vuông góc SI. Tính thể tích khối chóp M.BIS.

ĐS : $V = \dfrac{a^3}{36}$.

13. Cho hình chóp S.ABCD có SA = a và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh SA vuông góc SC. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

14. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Trên đường thẳng d vuông góc mặt phẳng chứa đường tròn tâm O lấy điểm S sao cho $SO = R\sqrt{3}$. Lấy M di động trên (O). Gọi H là trung điểm của SM. Tìm M thuộc (O) sao cho thể tích khối chóp H.AMB lớn nhất.

15. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC đều cạnh a, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 45^0$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC. Vẽ SH vuông góc AI. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ I đến mp (SAB).

ĐS : $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$; $d = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

16. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC cân, AB = AC = a, mp (SBC) vuông góc mp (ABC) và SA = SB = a.
   a) Chứng minh ΔSBC vuông.
   b) Biết $SC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a. Gọi B', D' là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD.
   a) Tìm giao điểm C' của SC và mp (AB'D').
   b) Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'.

18. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy 2a, chiều cao $a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) qua AE và song song BD cắt SB, SD lần lượt tại M, N. Tính thể tích khối chóp S.AMEN.

19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SC vuông góc mp (ABCD), SC = 2a. Lấy hai điểm M, N lần lượt trên SB, SD sao cho $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SD} = 2$. Mp (AMN) cắt SC tại K. Tính thể tích khối chóp S.AMNK.

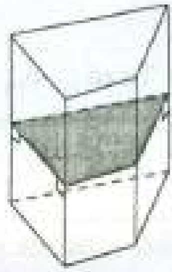
20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 120^0$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, SA = a. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ D đến mp (SBC).

21. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông cân tại A, AB = a, mp (SBC) vuông góc mp (ABC). Hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng tạo với đáy góc 45^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

22. Cho tứ diện ABCD có $AC = AD = a\sqrt{2}$, $BC = BD = a$. Khoảng cách từ B đến mp (BCD) bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Tính góc của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) biết thể tích khối tứ diện bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$.

Chủ đề 24

THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ



Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B, chiều cao h là :

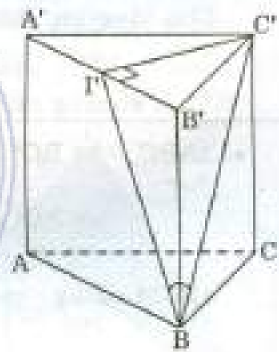
$$V = Bh$$

Hệ quả : Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích số ba kích thước.

$$S_{xung\ quanh} = pl$$

p : chu vi thiết diện thẳng; l : cạnh bên.

BT1. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy là tam giác đều cạnh a, BC' tạo với mặt bên (ABB'A') một góc $\frac{\pi}{6}$. Tính theo a thể tích lăng trụ ABC.A'B'C'.



Gọi I' là trung điểm A'B'.

$\Delta A'B'C'$ đều $\Rightarrow C'I' \perp A'B'$

Mà $BB' \perp mp\,(A'B'C')$ $\Rightarrow BB' \perp C'I'$

Vậy $C'I' \perp mp\,(AA'B'B)$

Do đó BI' là hình chiếu vuông góc của BC' lên mp (ABB'A').

Vậy $\widehat{I'BC'} = \frac{\pi}{6}$

$\Delta C'I'B$ vuông tại I' $\Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \frac{d}{h} = \frac{C'I'}{BC'}$ $\Rightarrow BC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{1} = a\sqrt{3}$

$\Delta BCC'$ vuông $\Rightarrow CC'^2 = BC'^2 - BC^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2$

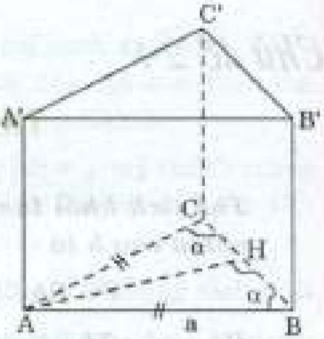
Do đó : $V_{lăng\ trụ} = Bh = CC'.dt\,(\Delta ABC) = a\sqrt{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$ ■

BT2. Cho một lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là một tam giác cân với $AB = AC = a$ và $\widehat{ACB} = \alpha$. Tính theo a và α thể tích của lăng trụ, biết diện tích xung quanh của nó bằng tổng diện tích hai đáy.

Vẽ $AH \perp BC$.

ΔAHC vuông $\Rightarrow \sin\alpha = \frac{AH}{AC}$ và $\cos\alpha = \frac{HC}{AC}$

$\Rightarrow AH = a\sin\alpha$ và $BC = 2HC = 2a\cos\alpha$



Do đó : $dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2}AH.BC$

$= \frac{1}{2}(a\sin\alpha)(2a\cos\alpha)$

$= \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha$

Ta có : $S_{xq} = (AB + AC + BC)AA'$

$= (2a + 2a\cos\alpha)AA'$

Mà : $S_{xq} = 2dt(\Delta ABC) \Rightarrow 2a(1 + \cos\alpha)AA' = a^2\sin 2\alpha$

$\Rightarrow AA' = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}$

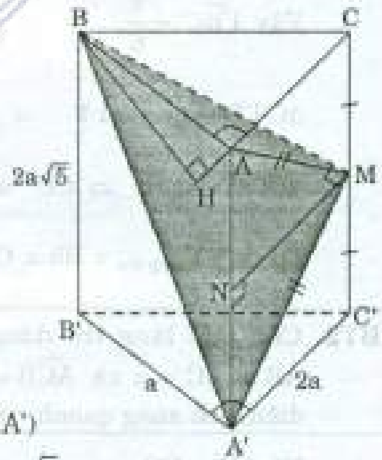
Do đó : $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.dt(\Delta ABC) = \frac{a^3}{4}\cdot\frac{\sin^2 2\alpha}{1+\cos\alpha}$ ■

BT3. *Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối A 2007*

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có AB = a, AC = 2a, $AA' = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm CC'. Chứng minh MB vuông góc MA'. Tính khoảng cách từ A đến mp (A'BM).

- $\Delta ABC \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos 120^0$

$\Rightarrow BC^2 = a^2 + 4a^2 - 2(a)(2a)\left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2$



ΔBCM vuông $\Rightarrow BM^2 = BC^2 + MC^2$

$= 7a^2 + 5a^2 = 12a^2$

$\Delta A'B'B$ vuông $\Rightarrow A'B^2 = A'B'^2 + BB'^2$

$= a^2 + 20a^2 = 21a^2$

$\Delta A'MC'$ vuông $\Rightarrow A'M^2 = A'C'^2 + MC'^2$

$= 4a^2 + 5a^2 = 9a^2$

Ta có : $A'B^2 = A'M^2 + MB^2$

nên $\Delta BMA'$ vuông tại M $\Rightarrow MB \perp MA'$

- Vẽ $BH \perp AC$

Ta có $BH \perp AC$ và AA' nên $BH \perp mp(AMA')$

ΔBHA vuông $\Rightarrow \sin 60^0 = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi N là trung điểm AC.

$\Delta HMA'$ cân tại M nên $MN \perp AA'$

Vậy $\quad dt\,(\Delta MAA') = \frac{1}{2}MN.AA' = \frac{1}{2}2a.2a\sqrt{5} = 2a^2\sqrt{5}$

Do đó : $\quad V_{B.AMA'} = \frac{1}{3}BH.dt\,(\Delta MAA') = \frac{a\sqrt{3}}{3}a^2\sqrt{5} = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Gọi h là khoảng cách từ A đến mp (BMA').

Ta có : $\quad V_{A.BMA'} = V_{B.AMA'} = \frac{1}{3}h.dt\,(BMA')$

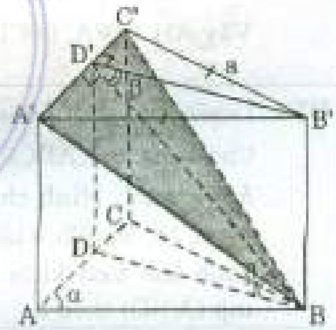
$$\Rightarrow h = \frac{3V_{B.AMM}}{dt\,(\Delta BMA')} = \frac{a^3\sqrt{15}}{\frac{1}{2}BM.MA'} = \frac{2a^3\sqrt{15}}{(2a\sqrt{3}).3a} = \frac{a}{3}\sqrt{5} \quad ■$$

BT4. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy là tam giác cân có BC = AB = a, góc $\widehat{BAC} = \alpha$. Mặt phẳng (BA'C') tạo với đáy lăng trụ một góc $\beta = \frac{\pi}{6}$.

a) Tính thể tích lăng trụ theo a, α.

b) Tính khoảng cách từ B' đến mp (BA'C').

a) Gọi D, D' là trung điểm của AC và A'C' thì DD' là đường cao của lăng trụ, B'D' ⊥ A'C'; BD' ⊥ A'C' $\Rightarrow \widehat{BD'B'} = \widehat{DBD'} = \frac{\pi}{6}$



Diện tích đáy lăng trụ

$$B = \frac{1}{2}a^2\sin(180^0 - 2\alpha) = \frac{1}{2}a^2\sin 2\alpha$$

Đường cao = DD' = $BD\tan\frac{\pi}{6} = a\sin\alpha\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3\sin 2\alpha\sin\alpha.$$

b) Vì thiết diện tạo với đáy góc β nên ta có :

$$dt\,(\Delta BA'C') = \frac{S_{đáy}}{\cos\beta} = \frac{a^2\sin 2\alpha}{2\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{a^2\sin 2\alpha}{\sqrt{3}}$$

Ta có : $\quad V_{B.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}\sin 2\alpha\sin\alpha$

$$V_{B.A'B'C'} = V_{B'.A'BC'} = \frac{1}{3}h.dt\,(\Delta A'BC') \quad \text{với } h = d(B', (A'BC'))$$

$$\Rightarrow h = \frac{3V_{B.A'B'C'}}{dt\,(\Delta A'BC')} = \frac{\frac{a^3\sqrt{3}}{6}\sin 2\alpha\sin\alpha}{\frac{a^2\sin 2\alpha}{\sqrt{3}}} = \frac{a}{2}\sin\alpha \quad ■$$

BT5. *Tuyển sinh ĐH khối D 2012*

Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông, ΔA'AC vuông cân, A'C = a. Tính thể tích của khối tứ diện ABB'C' và khoảng cách từ điểm A đến mp (BCD') theo a.

- ΔAA'C vuông cân $\Rightarrow AA' = AC = \dfrac{A'C}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

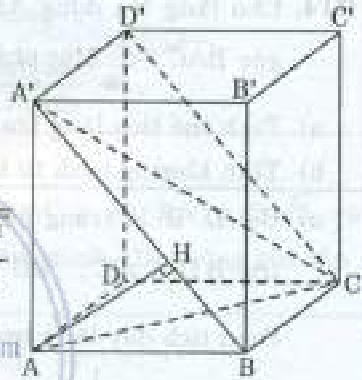
  ΔABC vuông cân $\Rightarrow AB = BC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{2}$

  Ta có $V_{A.BB'C'} = V_{C'.ABB'} = \dfrac{1}{3}B'C'.dt(\Delta ABB') = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{\sqrt{2}}.\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{48}$.

- Vẽ $AH \perp A'B$ (1)

  Ta có $BC \perp (A'B'BA) \Rightarrow BC \perp AH$ (2)

  Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (BCD')$



  ΔABA' vuông $\Rightarrow AH = \dfrac{AB.AA'}{A'B} = \dfrac{\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{2}}}$

  Vậy $AH = d(A, (BCD')) = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$ ■

BT6. *Tuyển sinh ĐH khối B 2011*

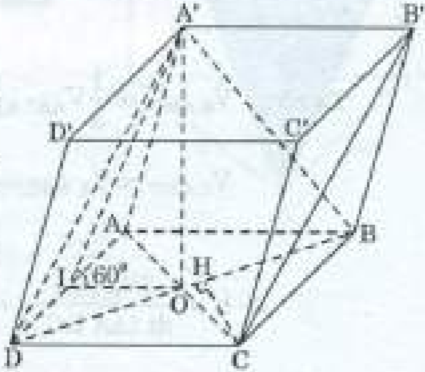
Cho lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình chữ nhật. AB = a, AD = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mp (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD'A') và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABCD.A'B'C'D' và khoảng cách từ B' đến mp (A'BD) theo a.

- Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có $A'O \perp (ABCD)$.

  Gọi I là trung điểm của AD.

  Ta có $OI \perp AD \Rightarrow A'I \perp AD$

  Vậy góc của hai mặt phẳng (ADD'A') và (ABCD) là $\widehat{A'IO} = 60^0$.



  ΔA'IO vuông $\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{A'O}{IO} = \sqrt{3}$

  $\Rightarrow A'O = \dfrac{a}{2}.\sqrt{3}$

  Vậy $V_{lăng\ trụ} = A'O.dt(ABCD) = \dfrac{3a^3}{2}$.

- Ta có $B'C' \parallel A'D \Rightarrow B'C \parallel (A'BD)$

  Vậy d(B', (A'BD)) = d(C, (A'BD))

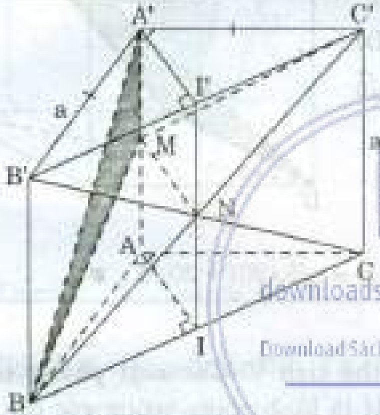
  Vẽ $CH \perp BD$. Do $A'O \perp (ABCD)$ nên $CH \perp A'O$. Vậy $CH \perp (A'BD)$.

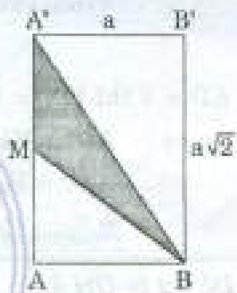
  ΔBCD vuông $\Rightarrow CH = \dfrac{CB.CD}{BD} = \dfrac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

  Vậy d(B', (A'BD)) = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ■

BT7. *Đề dự bị ĐH khối D 2007*

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông AB = AC = a, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AA' và BC'. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của AA' và BC'. Tính thể tích khối M.A'BC'.





- Gọi I, I' lần lượt là trung điểm BC, B'C'.

  Ta có : $AI \perp BC$ và $BB' \Rightarrow AI \perp (BB'C'C) \Rightarrow AI \perp BC'$

  Mà $MN \parallel AI \Rightarrow MN \perp BC'$ (1)

  Mặt khác : $AA' \perp AI \Rightarrow AA' \perp MN$ (2)

  Từ (1) và (2) ⇒ MN là đường vuông góc chung của AA', BC'.

- Ta có : $A'C' \perp A'B'$ và $AA' \Rightarrow A'C' \perp (MA'B)$

  Ta có : dt $(\Delta A'MB) = \dfrac{1}{2}BA.A'M = \dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

  Do đó : $V_{C'A'BM} = \dfrac{1}{3}A'C'.dt\,(\Delta MA'B) = \dfrac{1}{3}a.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ ■

BT8. Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có khoảng cách giữa AB và A'D bằng 2, độ dài đường chéo mặt bên bằng 5. Tính thể tích lăng trụ ABCD.A'B'C'D'.

Do ABCD.A'B'C'D' lăng trụ tứ giác đều nên đây là lăng trụ đứng và đáy ABCD là hình vuông, các mặt bên là hình chữ nhật.

Do AB // A'B' nên AB // (A'B'D)

$d(AB, A'D) = d(AB, (A'B'D)) = d(A, (A'B'D))$

Vẽ $AK \perp A'D$ (1)

Ta có : $A'B' \perp (AD, A'D') \Rightarrow A'B' \perp AK$ (2)

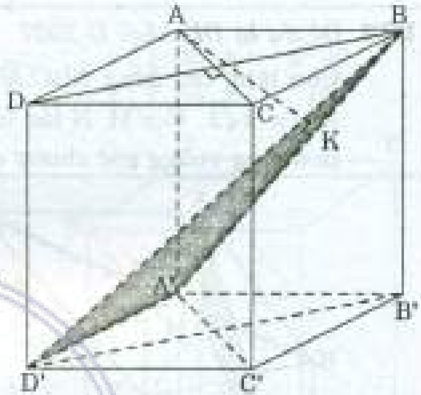
Từ (1) và (2) $\Rightarrow AK \perp (A'B'D)$

Vậy AK = 2 và A'D = 5.

$\Delta AA'D$ vuông $\Rightarrow AK^2 = KD.KA' \Rightarrow 4 = KD(5 - KD)$

$\Rightarrow KD^2 - 5KD + 4 = 0$

$\Rightarrow KD = 1 \vee KD = 4$



- *KD = 1* thì KA' = 4

Ta có : $AD^2 = KD.DA' = 1.(5) = 5$

$AA'^2 = KA'.DA' = 4.(5) = 20$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.dt\ (ABCD)$

$= 2\sqrt{5}.(5) = 10\sqrt{5}.$

- *KD = 4* thì KA' = 1

Ta có : $AD^2 = KD.DA' = 4.(5) = 20$

$AA'^2 = KA'.DA' = 5$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.dt\ (ABCD) = \sqrt{5}.(20) = 20\sqrt{5}$ ■

BT9. *Đề dự bị ĐH khối B 2006*

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có thể tích V. Các mặt phẳng (ABC'), (A'BC), (AB'C) đồng quy tại O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mp (ABC).

a) Chứng minh H là trọng tâm ΔABC.

b) Tính thể tích tứ diện O.ABC theo V.

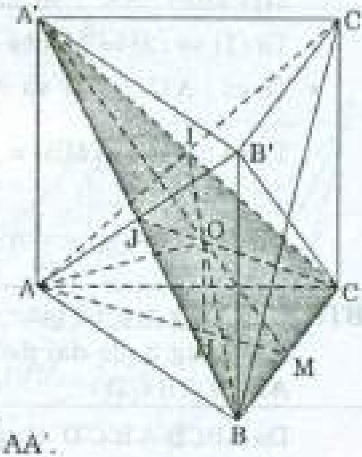
a) Gọi I là giao điểm của A'C và AC' thì

$(A'BC) \cap (C'AB) = BI$

Gọi J là giao điểm của A'B và AB' thì

$(A'BC) \cap (B'AC) = CJ$

Trong (A'BC), CJ cắt BI tại O trọng tâm $\Delta A'BC$, A'O cắt BC tại trung điểm M.



Trong mp (A'AM) vẽ OH // AA' thì

$OH \perp (ABC)$

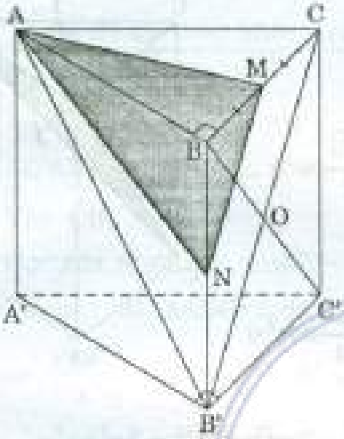
Ta có : $\dfrac{MH}{MA} = \dfrac{MO}{MA'} = \dfrac{OH}{AA'} = \dfrac{1}{3}$

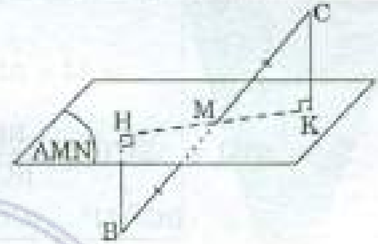
$\Rightarrow$ H là trọng tâm ΔABC và $MH = \dfrac{1}{3}AA'$.

b) Ta có : $V_{O.ABC} = \frac{1}{3}OH.dt(\Delta ABC) = \frac{1}{9}AA'.dt(\Delta ABC) = \frac{1}{9}V$ ■

BT10*. *Đề tuyển sinh ĐH khối D 2008*

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B với BA = BC = a, AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm BC. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách hai đường thẳng AM và B'C theo a.

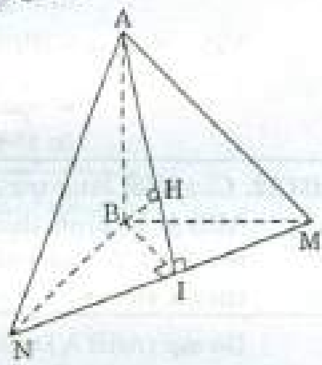




- Ta có : $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.dt(\Delta ABC) = a\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}BA^2\right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.
- Gọi N là trung điểm BB'. Ta có : MN // B'C.

Vậy (AMN) là mặt phẳng chứa MN và song song B'C.

Do đó : $d(AM, B'C) = d(B'C, (AMN))$
$= d(C, (AMN))$



BC cắt (AMN) tại M mà M là trung điểm BC nên :

$$\frac{d(C, (AMN))}{d(BC, (AMN))} = \frac{CK}{BH} = \frac{MC}{MB} = 1.$$

Vẽ BI ⊥ NM thì NM ⊥ (ABI).

Vẽ BH ⊥ AI thì BH ⊥ (ANM).

ΔABI vuông $\Rightarrow \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} \quad \Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{7}}$

Vậy $d(AM, B'C) = BH = \frac{a}{\sqrt{7}}$ ■

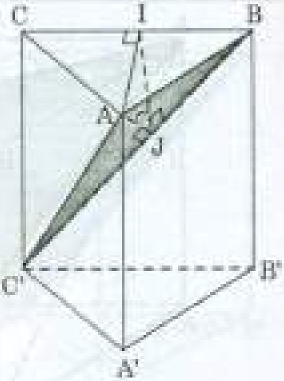
BT11. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng (ABC') tạo với mặt bên (BCC'B') một góc α. Gọi I, J là hình chiếu của A lên BC và BC'.

a) Chứng minh $\widehat{AJI} = \alpha$.   b) Tính theo a, α thể tích khối lăng trụ.

a) Ta có : $AI \perp BC$ và CC' nên $AI \perp mp\,(BB', CC') \Rightarrow AI \perp BC'$

Ta có : $BC' \perp AI$ và AJ nên $BC' \perp mp\,(AIJ) \Rightarrow BC' \perp IJ$

Vậy $\widehat{AJI} = \alpha$.



b) Ta có : $AI \perp mp\,(BB', CC') \Rightarrow AI \perp IJ$

ΔAIJ vuông tại I $\Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{k}{d} = \dfrac{IJ}{AI}$

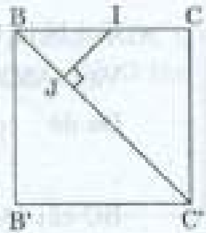
$$\Rightarrow IJ = AI\cot\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cot\alpha$$

Ta có $\Delta BIJ \backsim \Delta BC'C \Rightarrow \dfrac{BI}{BC'} = \dfrac{IJ}{C'C}$

$$\Rightarrow C'C^2 = \frac{BC'^2.IJ^2}{BI^2} = \frac{(CC'^2 + a^2)\cdot\frac{3a^2}{4}\cot^2\alpha}{\frac{a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow C'C^2 = (CC'^2 + a^2)3\cot^2\alpha \quad \Rightarrow (1 - 3\cot^2\alpha)C'C^2 = 3a^2\cot^2\alpha$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{3}{\tan^2\alpha}\right)C'C^2 = \frac{3a^2}{\tan^2\alpha} \quad \Rightarrow (\tan^2\alpha - 3)C'C^2 = 3a^2$$

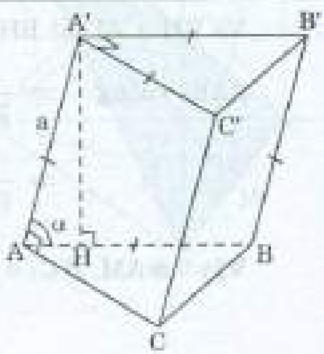


$$\Rightarrow C'C^2 = \frac{3a^2}{\tan^2\alpha - 3}$$

Vậy $V_{\text{lăng trụ}} = Bh = C'C.dt\,(\Delta ABC)$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{\tan^2\alpha - 3}}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4\sqrt{\tan^2\alpha - 3}} \quad ■$$

BT12. Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là ΔABC vuông cân tại A, mặt bên ABB'A' là hình thoi cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy, mặt bên ACC'A' tạo với đáy một góc α. Tính thể tích lăng trụ ABC.A'B'C' theo a và α.



Do mp (ABB'A') vuông góc mp (ABC) nên vẽ $A'H \perp AB$ thì $A'H \perp mp\,(ABC)$

Ta có : $AC \perp AB \Rightarrow AC \perp AA'$

Vậy : $\widehat{BAA'} = \alpha$

$\Delta A'AH$ vuông $\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{A'H}{AA'}$

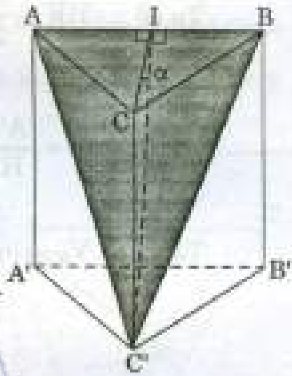
$$\Rightarrow h = A'H = a\sin\alpha$$

Ta có : $\quad dt(ABC) = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2}{2}$

Do đó : $\quad V_{ABC.A'B'C'} = Bh = \frac{a^2}{2}.a\sin\alpha = \frac{a^3}{2}\sin\alpha$ ■

BT13. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy là tam giác đều. Tam giác ABC' có diện tích bằng $\sqrt{3}$ và tạo mặt đáy một góc α thay đổi $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Tìm α để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.



Gọi I trung điểm AB.

ΔABC đều $\Rightarrow CI \perp AB$

$\Delta C'AB$ cân tại C' $\Rightarrow C'I \perp AB$

Vậy $\widehat{CIC'} = \alpha$.

Gọi x là cạnh của ΔABC.

Ta có : $\quad dt(\Delta ABC) = dt(\Delta ABC')\cos\alpha$

$\Rightarrow \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow x^2 = 4\cos\alpha \Rightarrow x = 2\sqrt{\cos\alpha}$

$\Delta CIC'$ vuông tại C $\Rightarrow \tan\alpha = \frac{CC'}{CI} \Rightarrow CC' = \frac{x\sqrt{3}}{2}\tan\alpha$

Do đó : $\quad V = Bh = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\tan\alpha\right) = \frac{3}{8}x^3\tan\alpha$

$$\Rightarrow V = \frac{3}{8}.8\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha}.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}$$

Ta có : $\quad V^4 = 81\sin^4\alpha.\cos^2\alpha$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương ta có :

$$1 = \frac{1}{2}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}\sin^4\alpha\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{27} \geq \frac{1}{4}\sin^4\alpha\cos^2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 12 = \frac{81\times 4}{27} \geq V^4$$

Vậy $\quad V_{max} = \sqrt[4]{12} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin^2\alpha = \cos^2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \tan^2\alpha = 2$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{2} \;\Leftrightarrow \alpha = \arctan\sqrt{2} \;■$$

BT14. *Đề dự bị ĐH khối B 2006*

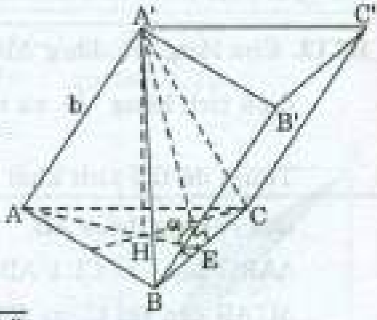
Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có A'.ABC là hình chóp tam giác đều, AB = a, AA' = b. Gọi α là góc của hai mp (ABC) và mp (A'BC). Tính tanα và thể tích khối chóp A'.BB'C'C theo a và b.

Do A'.ABC là hình chóp tam giác đều.

Gọi H là tâm của ΔABC thì $A'H \perp$ mp (ABC).

Gọi E là trung điểm BC thì $BC \perp AE \Rightarrow A'E \perp BC$

Do đó : $\widehat{AEA'} = \alpha$



$\Delta A'AH$ vuông $\Rightarrow A'H^2 = AA'^2 - AH^2$

$$\Rightarrow A'H^2 = b^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{3}$$

Ta có : $HE = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\tan\alpha = \frac{A'H}{HE} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}}{\frac{1}{6}a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}$

Ta có : $V_{A'.BB'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'.ABC}$

$$= A'H.dt(\Delta ABC) - \frac{A'H}{3}dt(\Delta ABC) = \frac{2}{3}A'H.dt(\Delta ABC)$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{6} \quad \blacksquare$$

BT15. Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, CA = CB = a. Mp (AA'B) vuông góc mp (ABC), $AA' = a\sqrt{3}$, $\widehat{A'AB}$ nhọn. Góc của mp (A'AC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ.

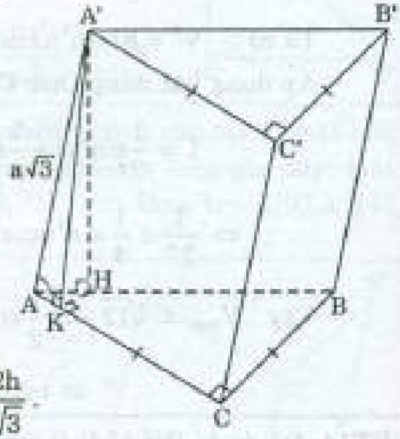
Do $(AA'B) \perp (ABC)$

Vẽ $A'H \perp AB$ thì $A'H \perp (ABC)$

Vẽ $HK \perp AC$ thì $A'K \perp AC$

Vậy : $\widehat{A'KH} = 60^0$.

Gọi $h = A'H$.



$\Delta A'KH$ vuông $\Rightarrow \begin{cases} \sin 60^0 = \frac{A'H}{A'K} \\ \tan 60^0 = \frac{h}{HK} \end{cases}$

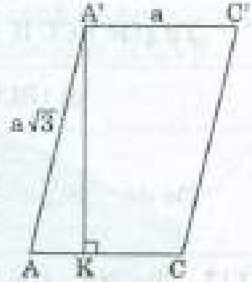
$$\Rightarrow HK = \frac{h}{\sqrt{3}} \text{ và } A'K = \frac{2h}{\sqrt{3}}.$$

ΔAHK vuông cân $\Rightarrow AK = HK = \frac{h}{\sqrt{3}}$

$\Delta A'AK$ vuông $\Rightarrow AA'^2 = AK^2 + A'K^2$

$$\Rightarrow 3a^2 = \frac{h^2}{3} + \frac{4h^2}{3} = \frac{5h^2}{3}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{9}{5}a^2 \quad \Rightarrow h = \frac{3}{\sqrt{5}}a$$



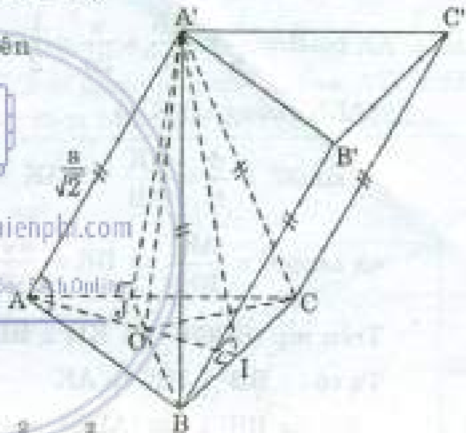
Do đó : $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.dt\,(\Delta ABC)$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}}a.\frac{a^2}{2} = \frac{3}{2\sqrt{5}}a^3$$ ■

BT16. Cho lăng trụ xiên ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với O là tâm đường tròn (ABC). Biết $\widehat{BAA'} = \frac{\pi}{4}$. Tính thể tích và diện tích xung quanh của lăng trụ theo a.

- Ta có : OA = OB = OC nên A'A = A'B = A'C

$\Delta A'AB$ cân tại A' mà $\widehat{BAA'} = \frac{\pi}{4}$ nên là tam giác vuông cân tại A'.



Vậy $AA' = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\Delta AOA'$ vuông tại O nên :

$$OA'^2 = AA'^2 - AO^2$$

$$= AA'^2 - \left(\frac{2}{3}AI\right)^2$$

$$\Rightarrow OA'^2 = \frac{a^2}{2} - \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6}$$

Do đó : $V = Bh = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a^3}{4\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

- Ta có : $dt\,(AA'B'B) = 2dt\,(\Delta A'AB) = AA'.AB\sin\frac{\pi}{4} = \frac{a^2}{2}$

Gọi J là trung điểm AC.

$\Delta AA'J$ vuông tại J $\Rightarrow A'J^2 = AA'^2 - AJ^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$

Vậy : $dt\,(AA'B'C) = A'J.AC = \frac{a}{2}.a = \frac{a^2}{2}$

Ta có : $BC \perp AI$ và $A'O$ nên $BC \perp mp\,(AA'I) \Rightarrow BC \perp AA'$

Mà $BB' \parallel AA'$ nên $BB' \perp BC$

Tứ giác BCC'B' là hình chữ nhật nên

$$dt\,(BCC'B') = BC.BB' = a\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$$

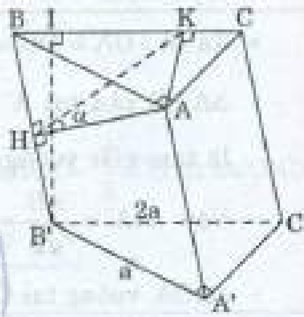
Do đó : $S_{xq} = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = a^2\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ■

BT17. Cho lăng trụ xiên ABC.A'B'C' có đáy tam giác ABC vuông tại A với AB = a, BC = 2a. Mặt bên ABB'A' là hình thoi, mặt bên BCC'B' nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, hai mặt này tạo nhau một góc α.

a) Xác định góc α.　　　b) Tính theo a và α thể tích hình lăng trụ.

a) Do mp (ABC) vuông góc mp (BCC'B') theo giao tuyến BC.

Vẽ AK ⊥ BC thì AK ⊥ mp (BCB'C').



ΔABC vuông tại A có :

$$\cos B = \frac{k}{h} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 60^0$$

ΔABK vuông tại K có :

$$\sin 60^0 = \frac{d}{h} = \frac{AK}{AB} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

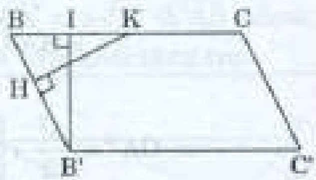
$$\text{và } \tan 60^0 = \frac{AK}{BK} \Rightarrow BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$$

Trên mp (BCC'B') vẽ KH ⊥ BB'

Ta có : BB' ⊥ HK và AK

⇒ BB' ⊥ mp (AHK) ⇒ BB' ⊥ AH

Do đó $\widehat{KHA} = \alpha$.



b) ΔAHK vuông tại K $\Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{HK}{AK} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cot\alpha$

Từ B' vẽ B'I ⊥ BC

Do mp (BB'C'C) ⊥ mp (A'B'C') nên B'I ⊥ mp (ABC)

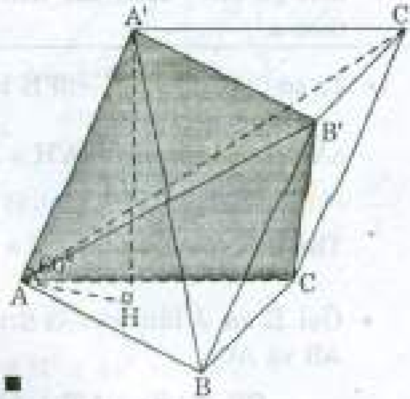
Ta có : ΔB'IB ∽ ΔKHB $\Rightarrow \dfrac{B'I}{HK} = \dfrac{B'B}{KB}$

$$\Rightarrow B'I = HK.\frac{BB'}{KB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\cot\alpha\right)\frac{a}{\frac{a}{2}} = a\sqrt{3}\cot\alpha$$

Do đó : V = Bh = dt (ΔABC).B'I

$$V = \frac{1}{2}AK.BC.B'I = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a.a\sqrt{3}\cot\alpha = \frac{3a^3}{2}\cot\alpha$$ ■

BT18. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có ΔABC có ΔABC đều cạnh a, AA' = 2a, góc của AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối A.CA'B'.



Vẽ A'H ⊥ mp (ABC)

Ta có $\widehat{A'AH} = 60^0$

$$\Delta A'AH \text{ vuông} \Rightarrow \sin 60^0 = \frac{A'H}{AA'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$$

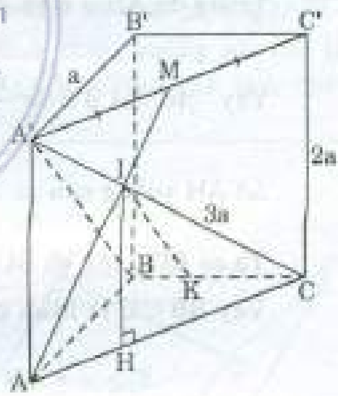
Ta có $V_{A.A'B'C} + V_{C.A'B'C'} + V_{A'.ABC} = V_{LT}$

Mà $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}V_{LT}$, $V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{LT}$

$$\Rightarrow V_{A.A'B'C} = \frac{1}{3}V_{LT} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{4} \quad ■$$

BT19. *Tuyển sinh ĐH khối D 2009*

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có ΔABC vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính thể tích khối chóp I.ABC và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC).



- $\Delta A'AC$ vuông $\Rightarrow AC^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2$

  ΔABC vuông $\Rightarrow BC^2 = 5a^2 - a^2 = 4a^2$

  $A'M // AC \Rightarrow \frac{IA'}{IC} = \frac{A'M}{AC} = \frac{1}{2}$

  Trong mp (A'AC) vẽ IH // AA' thì

  IH ⊥ mp (ABC)

  Ta có $\frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA' = \frac{4a}{3}$

  Vậy $V_{I.ABC} = \frac{1}{3}IH.dt(\Delta ABC)$

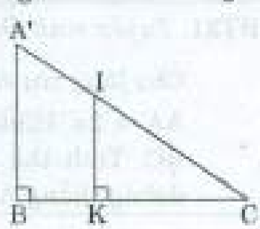
  $$= \frac{1}{3}.\frac{4a}{3}.\frac{1}{2}.a(2a) = \frac{4a^3}{9}.$$

- Ta có BC ⊥ BA và BA' ⇒ BC ⊥ mp (A'B'BA) ⇒ BC ⊥ BA'

  Vẽ IK // BA' $\Rightarrow \frac{IK}{BA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IK = \frac{2}{3}BA' = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 + 4a^2} = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$

  Ta có $V_{I.ABC} = V_{A.IBC} = \frac{1}{3}d(A, (IBC)).dt(\Delta IBC)$

  $$\Rightarrow d(A, (IBC)) = \frac{3V_{I.ABC}}{dt(\Delta IBC)} = \frac{3V}{\frac{1}{2}IK.BC} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \quad ■$$



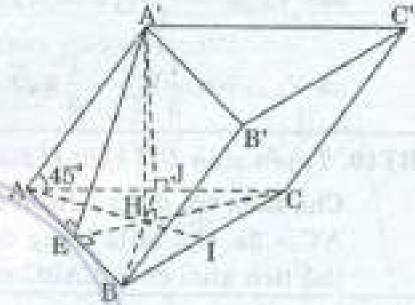
BT20. Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều, cạnh a. Đỉnh A' có hình chiếu trùng với tâm đáy (ABC) và cạnh bên AA' tạo với đáy một góc 45^0. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình lăng trụ theo a.

- Ta có : $\widehat{A'AH} = 45^0$ với H là tâm của tam giác đều ABC.

$\Delta AA'H$ vuông cân $\Rightarrow A'H = AH = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Thể tích của lăng trụ : $V = Bh = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{4}$

- Gọi E và J lần lượt là trung điểm AB và AC.



$CE \perp AB \Rightarrow A'E \perp AB$

$BJ \perp AC \Rightarrow A'J \perp AC$

Ta có : $\Delta A'HE = \Delta A'JH \Rightarrow A'E = A'J$

Vậy dt (AA'B'B) = dt (AA'C'C)

$= A'E.AB$

Trong đó AB = a và $A'E = \sqrt{A'H^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$

Vậy dt (AA'B'B) $= \frac{a\sqrt{15}}{6}.a = \frac{a^2\sqrt{15}}{6}$

$\Delta A'AH$ vuông cân $\Rightarrow AA' = A'H.\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Ta có $BC \perp AI$ và $BC \perp A'H \Rightarrow BC \perp (A'AI) \Rightarrow BC \perp BB'$ vì BB' // AA'.

Vậy BB'C'C là hình chữ nhật có diện tích là :

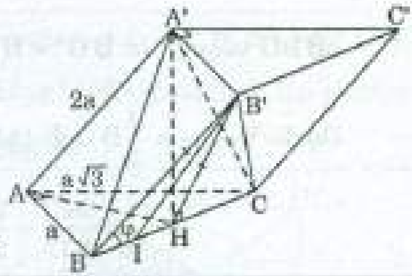
$$S_{BB'C'C} = BB'.BC = \frac{a^2\sqrt{6}}{3}.$$

Diện tích xung quanh của lăng trụ là :

$$S_{xq} = 2S_{AA'B'B} + S_{BB'C'C} = \frac{a^2(\sqrt{15}+\sqrt{6})}{3} \quad ■$$

BT21. *Tuyển sinh ĐH khối A 2008*

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ΔABC vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$, AA' = 2a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mp (ABC) là trung điểm của BC. Tính thể tích khối tứ diện A'.ABC và cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AA', B'C'.



- Gọi H là trung điểm BC.

Ta có $A'H \perp$ mp (ABC)

và $AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a$

$\Delta AA'H$ vuông $\Rightarrow A'H^2 = AA'^2 - AH^2$

$\Rightarrow A'H^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

Vậy : $V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3}A'H.dt\,(\Delta ABC) = \dfrac{1}{6}A'H.AB.AC = \dfrac{1}{6}(a\sqrt{3}).(a^2\sqrt{3}) = \dfrac{a^3}{2}$.

- Gọi φ là góc giữa AA' và B'C'.

Ta có : AA' // BB' và B'C' // BC nên $\varphi = \widehat{B'BC}$

$\Delta A'B'H$ vuông tại A' $\Rightarrow HB'^2 = A'B'^2 + A'H^2 = 4a^2$

Ta có : $B'B = B'H = 2a$ nên $\Delta BB'H$ cân tại B'.

Gọi I là trung điểm BH thì $B'I \perp BH$

$\Delta B'BI$ vuông $\Rightarrow \cos\varphi = \cos\widehat{B'BI} = \dfrac{IB}{BB'}$ $\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\frac{a}{2}}{2a} = \dfrac{1}{4}$ ■

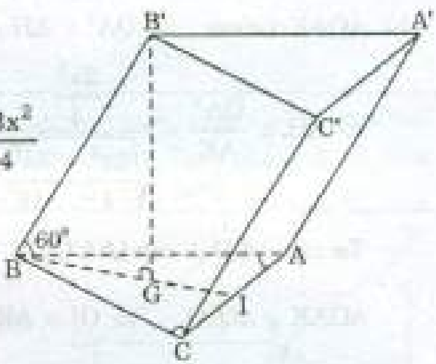
BT22. *Tuyển sinh ĐH khối B 2009*

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có BB' = a. Góc của BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0, ΔABC vuông tại C, $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm ΔABC. Tính thể tích khối A'.ABC.

Đặt AC = x

ΔABC vuông $\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{BC}{AC} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow BC = \sqrt{3}x$



ΔBIC vuông $\Rightarrow BI^2 = 3x^2 + \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{13x^2}{4}$

$\Rightarrow BI = \dfrac{x\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow BG = \dfrac{2}{3}BI = \dfrac{x\sqrt{13}}{3}$

$\Delta B'BG$ vuông $\Rightarrow \cos 60^0 = \dfrac{BG}{BB'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BB' = 2BG$

$\Rightarrow a = \dfrac{2x\sqrt{13}}{3} \Rightarrow x = \dfrac{3a}{2\sqrt{13}}$

$\Delta B'BG$ vuông $\Rightarrow B'G^2 = B'B^2 - BG^2 = a^2 - \frac{13x^2}{9} = a^2 - \frac{13}{9}.\frac{9a^2}{4.13} = \frac{3a^2}{4}$

Do đó $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}B'G.dt\,(\Delta ABC) = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}x.x\sqrt{3} = \frac{1}{12}.3ax^2$

$$= \frac{1}{4}a.\frac{9a^2}{4.13} = \frac{9a^3}{208} \quad ■$$

BT23. *Đề dự bị ĐH khối A 2006*

Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có AB = AD = a, $\widehat{BAD} = 60^0$, $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của A'D' và A'B'.

a) Chứng minh AC' vuông góc mp (BDMN).

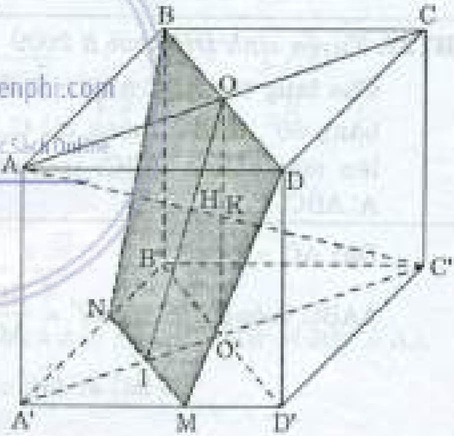
b) Tính thể tích khối chóp A.BDMN.

a) ΔABD đều nên $AC \perp BD$

Mà : $AA' \perp BD$ nên $BD \perp$ mp $(AA'CC') \Rightarrow BD \perp AC'$ (1)

Gọi O và O' là tâm hai hình thoi ABCD và A'B'C'D'.

Gọi I là trung điểm MN.



Ta có : $OA = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

nên AOA'A' là hình vuông.

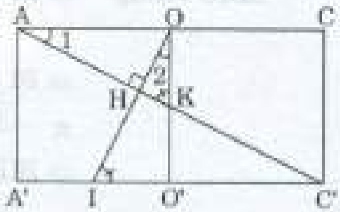
Do đó : $AC' \perp OI$ tại H (2)

Từ (1) và (2), ta có :

$AC' \perp$ mp (BDMN)

b) ΔOAK vuông $\Rightarrow OA^2 = AH.AK$

$$\Rightarrow AH = \frac{OA^2}{AK} = \frac{\frac{3a^2}{4}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}}} = \frac{3a}{\sqrt{15}}$$



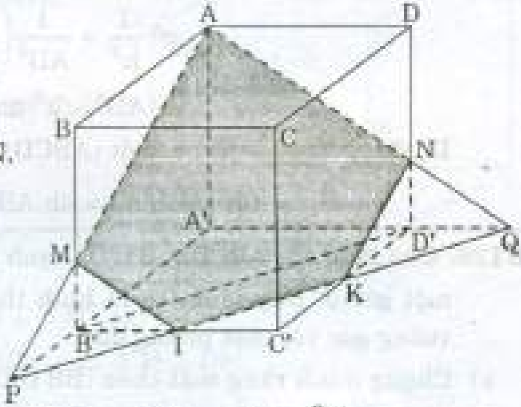
Ta có : $BD \perp$ mp $(AA'CC') \Rightarrow BD \perp OI$

$\Delta OAK = \Delta OIO' \Rightarrow OI = AK = \frac{a\sqrt{15}}{4}$

Do đó : $V_{A.BDMN} = \frac{1}{3}AH.dt\,(BDMN) = \frac{1}{3}AH.\frac{IO}{2}(BD + MN)$

$$= \frac{1}{6}AH.IO.\frac{3}{2}BD = \frac{1}{4}.\frac{3a}{\sqrt{15}}.\frac{a\sqrt{15}}{4}.a = \frac{3a^3}{16} \quad ■$$

BT24. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Lấy M, N lần lượt trên BB', DD' sao cho $MB' = ND' = \frac{a}{3}$. Mặt phẳng (AMN) chia hình lập phương làm hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.



AM cắt AB tại P.

AN cắt A'D' tại Q.

PQ cắt B'C', C'D' tại I và K.

Mặt phẳng là ngũ giác AMIKN.

Ta có : MB' // AA'

$$\Rightarrow \frac{MB'}{AA'} = \frac{PB'}{PA'} = \frac{1}{3}$$

Tương tự : $\frac{ND'}{AA'} = \frac{QD'}{QA'} = \frac{1}{3}$

Vậy : $\frac{QD'}{QA'} = \frac{PB'}{PA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow B'D' \,//\, PQ \Rightarrow PA' = QA' = \frac{3a}{2}$

Do đó : $V_{A.A'PQ} = \frac{1}{3}AA'.dt(\Delta A'PQ) = \frac{a}{3}.\frac{1}{2}\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{3a^3}{8}$

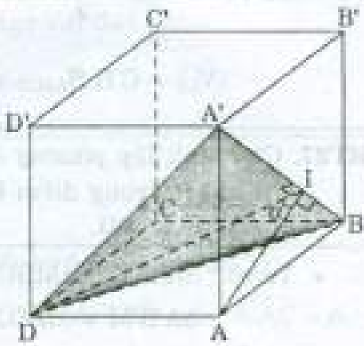
và $V_{P.MB'I} = V_{Q.ND'K} = \frac{1}{3}.\frac{a}{3}.\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{72}$

Do đó : $V_1 = V_{A'B'D'.AMIKN} = V_{A.A'PQ} - V_{M.B'PI} - V_{N.KD'Q} = \frac{3a^3}{8} - \frac{a^3}{36} = \frac{25a^3}{72}$

$V_2 = V_{C'BCD.AMIKN} = V_{\text{lập phương}} - V_1 = a^3 - \frac{25a^3}{72} = \frac{47a^3}{72}$

Vậy : $\frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{47}$ ■

BT25. Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đường cao h, mặt (A'BD) tạo với mặt bên (ABB'A') góc α, đáy ABCD là hình vuông. Tính thể tích và diện tích xung quanh hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' theo h và α.



Vẽ $AI \perp A'B$

Ta có : $AD \perp mp(AA'B'B) \Rightarrow AD \perp A'B$

Do $A'B \perp AD$ và AI nên $A'B \perp mp(ADI)$

$\Rightarrow A'B \perp DI$

Vậy : $\widehat{DIA} = \alpha$

ΔADI vuông tại A $\Rightarrow \cot\alpha = \frac{AI}{AD}$

$\Rightarrow AI = AD\cot\alpha$

$\Delta A'AB$ vuông tại A $\Rightarrow \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AB^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{AD^2\cot^2\alpha} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{AD^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{AD^2}\left(\frac{1}{\cot^2\alpha} - 1\right) = \frac{1}{AD^2}(\tan^2\alpha - 1)$$

$$\Rightarrow AD^2 = h^2(\tan^2\alpha - 1)$$

Do đó : $V_{ABCD.A'B'C'D'} = h.dt\,(ABCD) = h^3(\tan^2\alpha - 1)$

$S_{xq} = 4dt\,(ABB'A') = 4h.AB = 4h^2\sqrt{\tan^2\alpha - 1}$ ■

BT26. Cho lăng trụ ABCD.A'B'C'D', cạnh bên có độ dài bằng a và tạo với đáy một góc φ. Đáy lăng trụ là hình thoi có $\widehat{A} = \widehat{C} = \alpha$. Mặt chéo (AA'C'C) vuông góc với mặt phẳng đáy.

a) Chứng minh rằng mặt chéo (BB'D'D) là hình chữ nhật.

b) Cho biết diện tích mặt chéo (BB'D'D) là S. Tính thể tích hình lăng trụ đó theo S, α, φ.

a) Dựng $C'H \perp AC$ $\Rightarrow C'H \perp (ABCD)$ vì $(AA'C'C) \perp (ABCD)$.

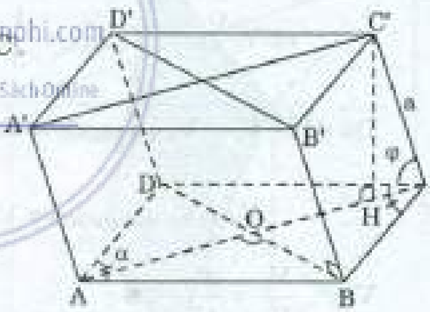
Do đó C'H là đường cao của lăng trụ.

Ta có $BD \perp AC$ và C'H

$\Rightarrow BD \perp mp\,(AA'C'C) \Rightarrow BD \perp CC'$.

Mà CC' // BB' $\Rightarrow BD \perp BB'$

Vậy BB'D'D là hình chữ nhật.



b) Vì C'H vuông góc đáy nên

$\widehat{C'CH} = \varphi \Rightarrow C'H = a\sin\varphi$.

Ta có : $S = BD.DD' \Rightarrow BD = \dfrac{S}{a}$

ΔOAB vuông $\Rightarrow \cot\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{OA}{OB} \Rightarrow AC = 2OA = \dfrac{S}{a}\cot\dfrac{\alpha}{2}$

Ta có : $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}BD.AC = \dfrac{S^2}{2a^2}\cot\dfrac{\alpha}{2}$

$$V_{LT} = C'H.S_{ABCD} = a.\sin\varphi.\frac{S^2}{2a^2}.\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{S^2}{2a}.\sin\varphi.\cot\frac{\alpha}{2}$$ ■

BT27. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm DD', M là trung điểm BB'. Tính thể tích khối M.A'KD và khoảng cách giữa CK và A'D.

- Ta có : $\Delta A'D'K = \Delta MBC$ (c.c.c) $\Rightarrow A'K = MC$

  $\Delta A'B'M = \Delta DKC$ (c.c.c) $\Rightarrow A'M = CK$

Vậy A'KCM là hình bình hành $\Rightarrow A'M \parallel CK$

Do đó : d(CK, A'D) = d(KC, (A'DM)) = d(K, (A'DM))

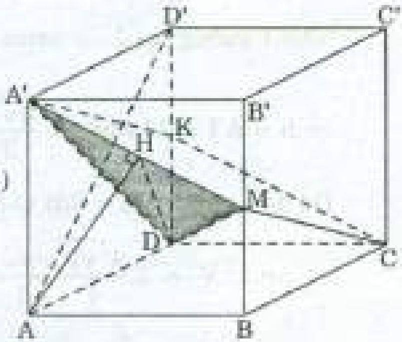
Ta có : BB' // (A'D'DA)

$\Rightarrow$ d(M, (A'D'DA)) = d(B, (A'D'DA))

$= AB = a$

$\Rightarrow V_{M.A'KD} = \frac{1}{3}$d(M, (A'D'DA)).dt ($\Delta$A'KD)

$= \frac{a}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{12}$



- Vẽ $AH \perp A'M$ (1)

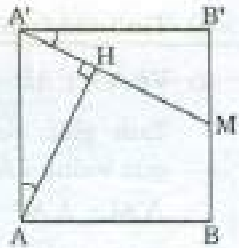
Ta có : $AD \perp (A'B'BA) \Rightarrow AD \perp A'M$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A'M \perp$ mp (AHD) $\Rightarrow A'M \perp DH$

$\Delta A'HA \backsim \Delta MB'A' \Rightarrow \frac{AH}{A'B'} = \frac{AA'}{MA'} \Rightarrow AH = \frac{a.a}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

ΔAHD vuông tại A $\Rightarrow DH^2 = AH^2 + AD^2$

$= \frac{4a^2}{5} + a^2 = \frac{9a^2}{5}$



Vậy dt (ΔA'DM) $= \frac{1}{2}DH.A'M = \frac{1}{2}.\frac{3a}{\sqrt{5}}.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{3a^2}{4}$

Ta có : $V_{M.A'KD} = V_{K.MA'D} = \frac{1}{3}$d(K, (A'MD)).dt ($\Delta$MA'D)

$\Rightarrow$ d(CK, A'D) = d(K, (A'MD)) $= \frac{3V}{dt(\Delta MA'D)} = \frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{3}$ ■

BT28. Cho hình hộp xiên ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$, AA' = A'B = A'D và cạnh bên tạo với đáy góc α.

a) Xác định góc α và chân đường cao vẽ từ A'.

b) Tính thể tích V của hình hộp theo a và α.

a) • Gọi I là tâm của tam giác đều ABD.

Ta có : IA = IB = ID và A'A = A'B = A'D

Vậy A'I là trục đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABD \Rightarrow A'I \perp$ mp (ABCD).

- Do A'I là hình chiếu vuông góc của A'A lên mp (ABCD) nên $\widehat{A'AC} = \alpha$.

b) Ta có : $AI = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

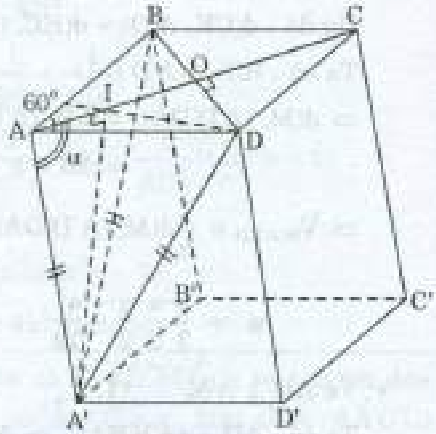
$\Delta AA'I$ vuông tại I $\Rightarrow \tan\alpha = \frac{d}{k} = \frac{A'I}{AI}$

$\Rightarrow h = A'I = AI.\tan\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3}\tan\alpha$

Do đó : $V = Bh = 2dt(\Delta ABD).A'I$

$V = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{3}\tan\alpha$

$= \frac{a^3}{2}\tan\alpha$ ■



BT29. Cho hình hộp xiên ABCD.A'B'C'D' có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a, các góc ở đỉnh A đều bằng α ($0 < \alpha < 90^0$).

a) Chứng minh chân đường cao H của lăng trụ vẽ từ A' nằm trên đường chéo AC.

b) Tính thể tích hình hộp theo a và α.

a) Vẽ $A'I \perp AB$, $A'J \perp AD$

Tam giác vuông IAA' bằng tam giác vuông JAA' vì AA' cạnh chung, $\widehat{A'AI} = \widehat{A'AJ} = \alpha$.

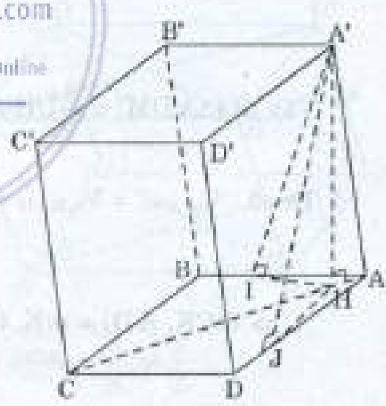
Do đó : $A'I = A'J$ và $AI = AJ$

Vẽ $A'H \perp$ mp (ABCD) thì $HI = HJ$

và $HI \perp AB$, $HJ \perp AD$.

Do đó Δ vuông IHA = Δ vuông HJA

$\Rightarrow HI = HJ \Rightarrow H \in AC$ đường phân giác của $\widehat{BAD}$.



b) $\Delta AA'J$ vuông tại J $\Rightarrow \cos A = \frac{AJ}{AA'}$ $\Rightarrow AJ = a\cos\alpha$

ΔAHJ vuông tại J $\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AJ}{AH}$ $\Rightarrow AH = \frac{AJ}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

$\Delta AA'H$ vuông tại H $\Rightarrow A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - \frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$$\Rightarrow A'H^2 = a^2\left(\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{a^2\left[\frac{1+\cos\alpha}{2} - \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right]}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow A'H^2 = \frac{a^2(\cos\alpha - \cos 2\alpha)}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

Do đó : $V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H.dt\,(ABCD) = 2A'H.dt\,(\Delta ABD)$

$$= A'H.a^2\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\alpha - \cos 2\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}a^2\sin\alpha$$

$$= \sqrt{2}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha - \cos 2\alpha} \quad ■$$

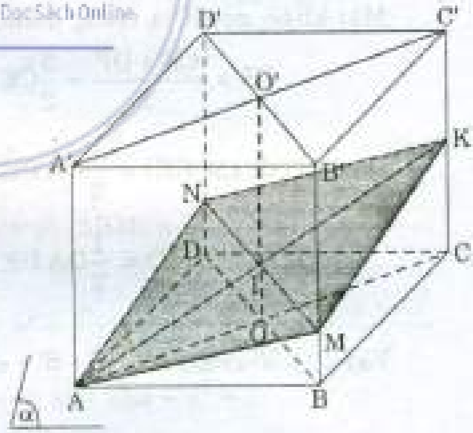
BT30. *Đề dự bị ĐH khối D 2006*

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Lấy K trên cạnh CC' sao cho $CK = \frac{2}{3}a$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A, K và song song BD, (α) chia khối lập phương làm hai khối đa diện. Tính thể tích hai khối đa diện đó theo a.

Gọi O và O' là tâm hai hình vuông ABCD và A'B'C'D'.

AK cắt OO' tại I.

ΔACK có OI là đường trung bình nên $OI = \frac{CK}{2} = \frac{a}{3}$.



Mặt phẳng (α) // BD vậy (α) cắt mp (DBB'D') theo giao tuyến MN qua I và song song BD.

Ta có : $BD \perp AC$ và AA'

nên $BD \perp mp\,(AA'C'C)$

$\Rightarrow BD \perp AK$

Mà MN // BD $\Rightarrow MN \perp AK$

Mặt khác I là trung điểm MN và AK nên ANKM là hình thoi.

Ta có : $V_1 = V_{AMKN.ABCD} = 2V_{AMK.ABC} = 2V_{A.MKCB}$

$$= \frac{2}{3}AB.dt(MKCB) = \frac{2AB}{3}\cdot\frac{BC}{2}(MB + KC) = \frac{a^2}{3}\left(\frac{a}{3} + \frac{2a}{3}\right) = \frac{a^3}{3}$$

Vậy : $V_2 = V_{AMKN.A'B'C'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_1 = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$ ■

BT31. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi K là trung điểm BC, I là tâm của mặt bên CC'D'D.

a) Xác định thiết diện của mp (AKI) và hình lập phương.

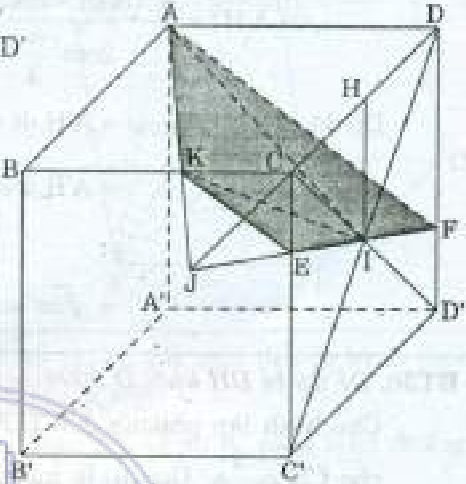
b) Tính thể tích các hình đa diện chia ra do mp (AKI) và hình lập phương.

a) Trên mp (ABCD), AK cắt CD tại J.

Trên mp (CDD'C'), IJ cắt CC' và DD' lần lượt tại E và F.

Vậy thiết diện là tứ giác KEFA. Do hai mp (BCC'B') và mp (ADD'A') song song nên mp (AKI) cắt hai mặt này theo hai giao tuyến KE // AF.

Vậy AFEK là hình thang.



b) Khối đa diện CKE.DAF là hình chóp cụt có đường cao CD = a.

Ta có : KC // AD $\Rightarrow \dfrac{JC}{JD} = \dfrac{KC}{AD} = \dfrac{1}{2}$

Ta có : CE // DF $\Rightarrow \dfrac{CE}{DF} = \dfrac{JC}{JD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow DF = 2CE$

Mặt khác, gọi H là trung điểm CD, ta có :

$$IH = \frac{CE + DF}{2} = \frac{3}{2}CE \Rightarrow EC = \frac{2}{3}IH = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{3}$$

Do đó : $dt(\Delta CKE) = \dfrac{1}{2}CK.CE = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)\left(\dfrac{a}{3}\right) = \dfrac{a^2}{12} = S$

$$dt(\Delta DAF) = \frac{1}{2}DA.DF = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{a^2}{3} = S'$$

Vậy : $V_{CKE.DAF} = \dfrac{h}{3}(S + S' + \sqrt{SS'}) = \dfrac{a}{3}\left(\dfrac{a^2}{12} + \dfrac{a^2}{3} + \sqrt{\dfrac{a^4}{36}}\right) = \dfrac{7a^3}{36}$

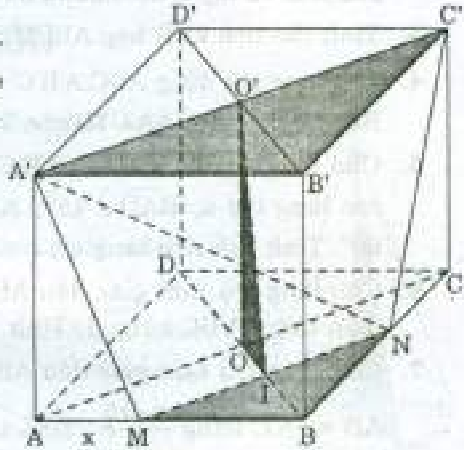
Thể tích khối còn lại : $V = a^3 - \dfrac{7a^3}{36} = \dfrac{29a^3}{36}$ ■

BT32*. Cho ABCD.A'B'C'D' hình lập phương cạnh a. Lấy M trên cạnh AB với AM = x (0 < x < a). Gọi (P) là mặt phẳng qua M và A'C'.

a) Tính diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình lập phương.

b) Tìm x để mặt phẳng (P) chia lập phương thành hai khối đa diện mà thể tích khối này bằng hai lần thể tích khối đa diện kia.

a) Mặt phẳng (MA'C') chứa A'C' // AC nên cắt mp (ABCD) theo giao tuyến MN // AC // A'C'.



Mặt cắt là hình thang cân MNC'A'.

Gọi O, O' là tâm hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Gọi I là giao điểm MN và BD.

Ta có MN ⊥ BD và OO'

nên MN ⊥ OI

Do MN // AC nên $\dfrac{OI}{OB} = \dfrac{AM}{AB}$

$$\Rightarrow OI = \frac{x}{a}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

và $\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{2}(a-x)}{a} = (a-x)\sqrt{2}$

$\Delta OO'I$ vuông $\Rightarrow O'I^2 = OO'^2 + OI^2 = a^2 + \dfrac{x^2}{2}$

Vậy : $S = dt\,(MNC'A') = \dfrac{O'I}{2}(MN + A'C')$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}\left[a\sqrt{2} + (a-x)\sqrt{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}(2a - x).$$

b) Ta có : $V_{A'B'C'.MBN} = \dfrac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{a^3}{3}$

A'B'C'.MBN là hình chóp cụt có chiều cao OO' = a

$$S_1 = dt\,(\Delta A'B'C') = \frac{a^2}{2}; \qquad S_2 = dt\,(\Delta BM) = \frac{(a-x)^2}{2}$$

Vậy : $\dfrac{a^3}{3} = \dfrac{a}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2) \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{a^2}{2} + \sqrt{\dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{(a-x)^2}{2}} + \dfrac{(a-x)^2}{2}$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = a^2 + a(a-x) + (a-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a \ \ (\text{do } 0 < x < a) \ \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có ΔABC vuông, AB = BC = a, AA' = $a\sqrt{2}$. Lấy M trên cạnh AA' sao cho AM = $\dfrac{1}{3}$AA'. Tính thể tích khối MABC'.

2. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có ΔABC vuông tại B, BA = BC = a. Góc của A'B và mp (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích lăng trụ.
3. Tính thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D' biết AA'B'D' là tứ diện đều cạnh a.
4. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có ΔABC vuông tại A, AC = a, $\widehat{ACB} = 60^0$, BC' tạo với mp (AA'C'C) góc 30^0. Tính thể tích lăng trụ.
5. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABCD là hình bình hành, chiều cao lăng trụ a, $\widehat{BAD} = 45^0$, AC' và DB' lần lượt tạo với đáy góc 45^0 và 60^0. Tính thể tích lăng trụ.
6. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C'. Mp (A'BC) tạo với đáy góc 60^0, diện tích $\Delta A'BC$ bằng 8. Tính thể tích lăng trụ.
7. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy a, khoảng cách của AB và A'C bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích lăng trụ.
8. Cho lăng trụ xiên ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mp (ABC) là trọng tâm O của ΔABC. Biết khoảng cách từ O đến CC' bằng a, góc của hai mặt phẳng (ACC') và (BCC') bằng 60^0. Tính thể tích lăng trụ.
9. Cho lăng trụ tam giác đều cạnh đáy a, AA' = $a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối ABC'A'.
10. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính thể tích khối MA'KD và khoảng cách từ CK đến A'D.
11. Cho hình hộp xiên ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAC} = 60^0$, AA' = A'B = A'D, các cạnh bên tạo với đáy góc α. Tính thể tích hình hộp.
12. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Lấy K trên CC' sao cho CK = $\frac{2}{3}a$. Gọi (α) là mặt phẳng qua K, A và song song BD, (α) chia khối lập phương làm hai đa diện. Tính thể tích hai khối đa diện.
13. Cho lăng trụ xiên ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mp (ABC) là tâm của ΔABC, $\widehat{BAA'} = 45^0$. Tính thể tích và diện tích xung quanh của lăng trụ.
14. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi, $\widehat{BAD} = 60^0$, BD' tạo với đáy góc 60^0. Gọi E là trung điểm của AD. Mp (BED') cắt hình hộp theo thiết diện có diện tích là $4\sqrt{39}$. Tính thể tích khối hộp.
15. Cho khối lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có khoảng cách giữa AB và A'D bằng 4. Độ dài đường chéo mặt bên bằng 10.
  a) Vẽ AK vuông góc A'D. Chứng minh AK = 4.
  b) Tính thể tích lăng trụ.

Chủ đề 25

HÌNH NÓN

- ***Hình nón tròn xoay là hình sinh ra bởi một tam giác vuông quay một vòng quanh một cạnh góc vuông.***
- ***Các thiết diện qua trục là các tam giác cân bằng nhau.***
- ***Các thiết diện vuông góc trục là các hình tròn.***

Công thức :

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{xq} = \pi Rl \\ V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h \end{array}}$$

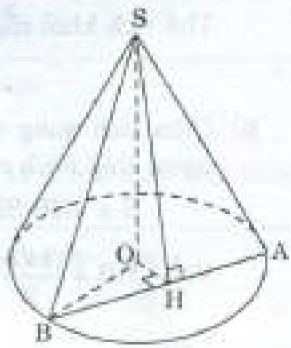
R : bán kính đường tròn đáy

l = SM : đường sinh

h = SO : đường cao

BT1. Cho hình nón có chiều cao h. Gọi (α) là mặt phẳng qua đỉnh hình nón và tạo mặt đáy một góc $\frac{\pi}{4}$. Tính diện tích mặt cắt của (α) và hình nón biết rằng mặt cắt chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo $\frac{2\pi}{3}$.

Vẽ $OH \perp AB$ thì $SH \perp AB$



Ta có : $\widehat{SHO} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Delta SHO$ vuông cân

$\Rightarrow SH = SO\sqrt{2} = h\sqrt{2}$

Ta có : sđ $\overset{\frown}{AB} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BOH} = 60^0$

ΔOBH vuông $\Rightarrow \tan 60^0 = \frac{BH}{OH}$

$\Rightarrow AB = 2BH = 2h\sqrt{3}$

Do đó : dt $(\Delta SAB) = \frac{1}{2}SH.AB = \frac{1}{2}(h\sqrt{2})(2h\sqrt{3}) = h^2\sqrt{6}$ ■

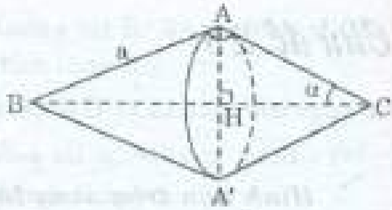
BT2. Cho ΔABC vuông ở A, có AB = a và $\widehat{ACB} = \alpha$, người ta quay tam giác đó một vòng quanh BC.

a) Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành theo a và α.

b) Tính diện tích toàn phần của hình tròn xoay đó theo a và α.

Khi quay quanh BC, hình tròn xoay có dạng như hình vẽ.

a) Thể tích hình tròn xoay :



$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3}BH.AH^2 + \frac{\pi}{3}CH.AH^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi AH^2BC}{3}$$

Trong đó $AH = a\cos\alpha$; $BH = a\sin\alpha$; $HC = AH.\cot\alpha = \dfrac{a\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$

Vậy : $V = \dfrac{\pi}{3}a^2\cos^2\alpha\left(a\sin\alpha + \dfrac{a\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\right) = \dfrac{\pi a^3\cot\alpha.\cos\alpha}{3}$.

b) $S_{xq} = \pi AH(AB + AC) = \pi a\cos\alpha(a + a\cot\alpha) = \pi a^2\cos\alpha(1 + \cot\alpha)$ ■

BT3. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và $\widehat{BSC} = \alpha$.

a) Tính thể tích khối chóp theo a và α.

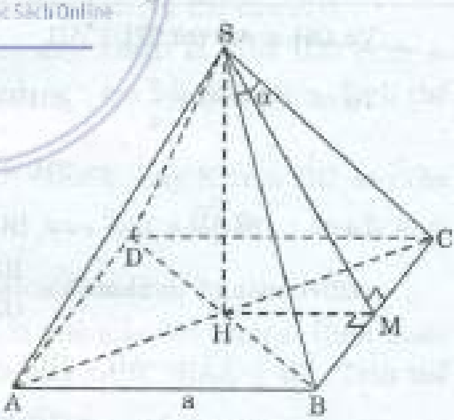
b) Tính diện tích xung quanh hình nón ngoại tiếp hình chóp đó.

a) Gọi M là trung điểm của BC, SH ⊥ mp (ABCD), HM ⊥ BC ⇒ SM ⊥ BC

ΔSMC vuông ⇒ $SM = \dfrac{a}{2}\cot\dfrac{\alpha}{2}$

ΔSHM vuông ⇒ $SH = \sqrt{\dfrac{a^2}{4}\cot^2\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

Thể tích khối chóp : $V = \dfrac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\dfrac{\alpha}{2}}$



b) Diện tích xung quanh hình nón ngoại tiếp hình chóp là :

$$S = \pi HB.SB$$

Với $HB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $SB = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

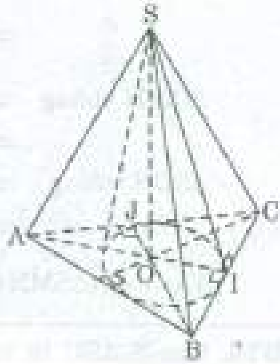
$$\Rightarrow S = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$ ■

BT4. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy a, góc ở đỉnh của mặt bên là α.

a) Tính thể tích khối chóp đã cho.

b) Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S nội tiếp trong hình chóp đó.

a) Gọi I là trung điểm BC.



Do ΔSBC cân nên $SI \perp BC$ và $\widehat{BSI} = \frac{1}{2}\widehat{BSC} = \frac{\alpha}{2}$

Ta có : $OB = \frac{2}{3}BJ = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

ΔSBI vuông tại I $\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BI}{SB} \Rightarrow BS = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

ΔSOB vuông tại O $\Rightarrow SO^2 = SB^2 - OB^2$

$$\Rightarrow SO^2 = \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{12}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 4\right) = \frac{a^2}{12}\left(3\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1\right).$$

Vậy : $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO.dt(\Delta ABC)$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{a}{6\sqrt{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{3\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{a^3}{24}\sqrt{3\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

b) $\Delta SBI \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{BI}{SI} \Rightarrow l = SI = \frac{BI}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}.\cot\frac{\alpha}{2}$ và $R = OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Vậy $S_{xq} = \pi Rl = \pi\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{12}\cot\frac{\alpha}{2}$ ∎

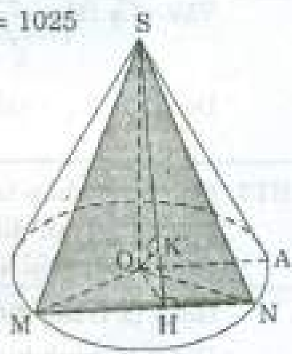
BT5. Một hình nón có đường cao 20, bán kính đáy r = 25.

a) Tính diện tích xung quanh hình nón.

b) Một thiết diện qua đỉnh và cách tâm của đáy là 12. Tính diện tích thiết diện đó.

a) ΔSOA vuông $\Rightarrow SA^2 = SO^2 + OA^2 = 400 + 625 = 1025$

$\Rightarrow SA = 5\sqrt{41}$



Vậy $S_{xq} = \pi rl = \pi.(25).(5\sqrt{41}) = 125\pi\sqrt{41}$.

b) Mặt phẳng qua đỉnh S cắt mặt nón theo ΔSMN.

Vẽ $OH \perp MN$. Vẽ $OK \perp SH$.

Ta có $MN \perp mp(SOH)$ nên $MN \perp OK$.

Vậy $OK \perp mp(SMN)$

$\Rightarrow OK = 12 = d(O, mp(SMN))$

ΔSOH vuông $\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{144} - \frac{1}{400} = \frac{256}{144.400}$

$$\Rightarrow OH = \frac{12 \times 20}{16} = 15$$

ΔOMH vuông $\Rightarrow MH^2 = OM^2 - OH^2 = 625 - 225 = 400$

$\Rightarrow MN = 2MH = 40$

ΔSOH vuông $\Rightarrow SH^2 = SO^2 + OH^2 = 400 + 225 = 625$

$\Rightarrow SH = 25$

Vậy : dt $(\Delta SMN) = \frac{1}{2}SH.MN = \frac{1}{2}.25.40 = 500$ ■

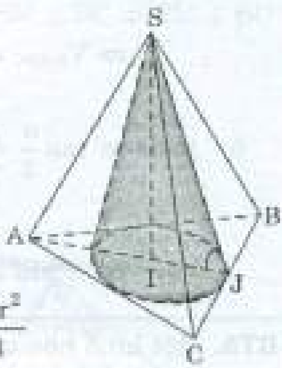
BT6. Cho S.ABC là hình chóp tam giác đều có cạnh bên a và góc của mặt bên và đáy là 30^0. Gọi hình nón nội tiếp hình chóp là hình nón đỉnh S đáy là đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC. Tính diện tích xung quanh hình nón nội tiếp hình chóp S.ABC theo a.

Gọi J là trung điểm BC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC.

Do S.ABC là hình chóp đều nên $SI \perp mp(ABC)$ và $AJ \perp BC \Rightarrow SJ \perp BC$

Vậy $\widehat{SJA} = 30^0$.

Đặt $r = IJ$ là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.



ΔSIJ vuông $\Rightarrow \tan 30^0 = \frac{SI}{IJ}$ và $\cos 30^0 = \frac{IJ}{SJ}$

$$\Rightarrow SI = \frac{r\sqrt{3}}{3} \text{ và } SJ = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

ΔSIA vuông $\Rightarrow SA^2 = AI^2 + SI^2$

$$\Rightarrow a^2 = (2r)^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4r^2 + \frac{r^2}{3} = \frac{13r^2}{3}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{3}{13}}a$$

Vậy $l = SJ = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{13}}$

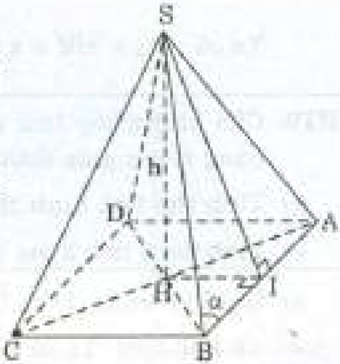
Do đó : $S_{xq} = \pi r l = \pi.\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}a\right)\left(\frac{2a}{\sqrt{13}}\right) = \frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{13}$ ■

BT7. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao SH = h, $\widehat{SAB} = \alpha$, với $\alpha > 45^0$. Tính diện tích xung quanh hình nón đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

Gọi I là trung điểm BA. Ta có : $SI \perp BA \Rightarrow HI \perp BA$.

Đặt a là cạnh hình vuông ABCD.

ΔSAI vuông tại I $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{AI}{AS} \Rightarrow SA = \frac{AI}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha}$



ΔAHS vuông tại H $\Rightarrow SA^2 = SH^2 + HA^2$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4\cos^2\alpha} = h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2\left(\frac{1}{4\cos^2\alpha} - \frac{1}{2}\right) = h^2$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{h^2 4\cos^2\alpha}{1 - 2\cos^2\alpha}$$

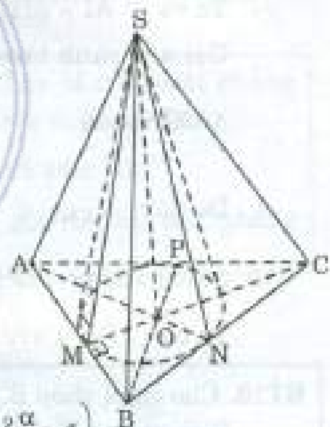
Do đó : $S_{xq} = \pi r l = \pi.HA.SA$

$$\Rightarrow S_{xq} = \pi.\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a}{2\cos\alpha}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\cos\alpha}\left(\frac{h^2 4\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}h^2\cos\alpha}{1-2\cos^2\alpha}$$ ■

BT8. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, cạnh đáy a, góc đỉnh của mặt bên là α.

a) Tính thể tích của hình chóp đã cho.

b) Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S nội tiếp trong hình chóp đó.



a) Gọi O là tâm của tam giác đều ABC.

M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, AC.

Ta có : $OM = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$

ΔSAM vuông $\Rightarrow \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{SM}{AM}$

$$\Rightarrow SM = \frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2}$$

ΔSOM vuông $\Rightarrow SO^2 = SM^2 - OM^2$

$$\Rightarrow SO^2 = \frac{a^2}{4}\cot^2\frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{12}\left(3\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{3\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1}$$

Vậy $V = \frac{1}{3}SO.dt\,(\Delta ABC)$

$$\Rightarrow V = \frac{a}{6\sqrt{3}}\sqrt{3\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{24}\sqrt{3\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

b) Hình nón nội tiếp trong hình chóp có đỉnh là S, đáy là đường tròn tâm O nội tiếp trong tam giác đều ABC. Bán kính đường tròn đáy là OM, đường sinh SM.

Ta có : $S_{xq} = \pi Rl = \pi.OM.SM = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2\pi\sqrt{3}}{12}\cot\frac{\alpha}{2}$ ■

BT9. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, bán kính đường tròn nội tiếp đáy bằng r, góc giữa đường cao SH hình chóp và mặt bên bằng α.

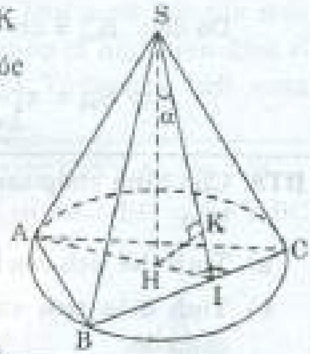
a) Tính thể tích hình chóp đó theo r và α.

b) Tính diện tích xung quanh của hình nón ngoại tiếp hình chóp đã cho.

a) Gọi I là trung điểm BC. Ta có AI ⊥ BC.

Vẽ HK ⊥ SI. Ta có BC ⊥ mp (SHI) nên SC ⊥ HK

Ta có HK ⊥ mp (SBC) nên hình chiếu vuông góc của SH lên mp (SBC) là SK. Vậy $\widehat{HSI} = \alpha$.



ΔSHI vuông $\Rightarrow \cot\alpha = \frac{SH}{HI} \Rightarrow SH = r\cot\alpha$

ΔSHI vuông $\Rightarrow SI^2 = SH^2 + HI^2$

$$= r^2(1 + \cot^2\alpha) = \frac{r^2}{\sin^2\alpha}$$

Ta có : $AI = 3HI = 3r$

Gọi a là cạnh tam giác đều ABC.

ΔABI vuông $\Rightarrow AB^2 = AI^2 + BI^2 \Rightarrow a^2 = 9r^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}r$

Do đó : $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.\text{dt}(\Delta ABC) = \frac{r}{3}\cot\alpha.\frac{(2\sqrt{3}r)^2\sqrt{3}}{4} = r^3\sqrt{3}\cot\alpha$.

b) ΔSAH vuông $\Rightarrow SA^2 = SH^2 + AH^2 = r^2\cot^2\alpha + 4r^2$

Ta có : $S_{xq} = \pi Rl = \pi.AH.SA = \pi(2r)r\sqrt{\cot^2\alpha + 4}$ ■

BT10. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^0$. Biết rằng có một hình nón nội tiếp hình chóp đã cho có bán kính đáy r, góc giữa đường sinh và đáy là φ. Tính diện tích xung quanh của

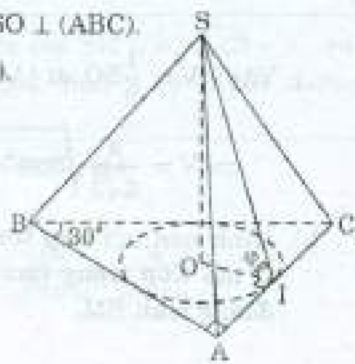
a) Hình nón   b) Hình chóp.

a) Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thì SO ⊥ (ABC).

Gọi I là tiếp điểm của AC và đường tròn (O).

Ta có : AC ⊥ OI $\Rightarrow$ AC ⊥ SI

Vậy $\widehat{SIC} = \varphi$.

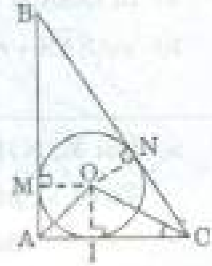


ΔSOI vuông $\Rightarrow \tan\varphi = \frac{SO}{OI}$

$\Rightarrow h = SO = r.\tan\varphi$

và $\cos\varphi = \dfrac{OI}{SI} \Rightarrow SI = \dfrac{r}{\cos\varphi}$

Ta có : $S_{xq\ hình\ nón} = \pi r l = \pi r\left(\dfrac{r}{\cos\varphi}\right) = \dfrac{\pi r^2}{\cos\varphi}$.



b) AMOI hình vuông $\Rightarrow AI = OI = r$

ΔOIC vuông $\Rightarrow \tan 30^0 = \dfrac{OI}{IC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow IC = \sqrt{3}r$

Vậy $AC = \left(1+\sqrt{3}\right)r$

ΔABC vuông $\Rightarrow \tan 30^0 = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \sqrt{3}AC = \sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)r$

$$S_{xq\ hình\ chóp} = dt\,(\Delta ABS) + dt\,(\Delta SBC) + dt\,(\Delta SAC)$$

$$= \frac{1}{2}SI(AB+BC+AC) = \frac{SI}{2}(3AC+AB)$$

$$= \frac{r^2}{2\cos\varphi}\left[3\left(1+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}+3\right] = \frac{3+2\sqrt{3}}{\cos\varphi}r^2 \quad ■$$

BT11. Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O. Lấy M trên mặt phẳng chứa đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với A, B ∈ (O).

a) Chứng minh trung điểm I của SM cách đều A, B và tâm (O).

b) Xác định đường vuông góc chung của SM và AB, góc của hai mặt phẳng (SMA) và (SMB).

a) Do MA, MB là tiếp tuyến nên $MA \perp OA$, $MB \perp OB$

Do định lí ba đường vuông góc $MA \perp SA$, $MB \perp SB$

Các tam giác SOM, SAM, SBM vuông $\Rightarrow OI = AI = BI = \dfrac{SM}{2}$.

b) Ta có $AB \perp OM$, $AB \perp SO$

nên $AB \perp (SOM)$ tại H

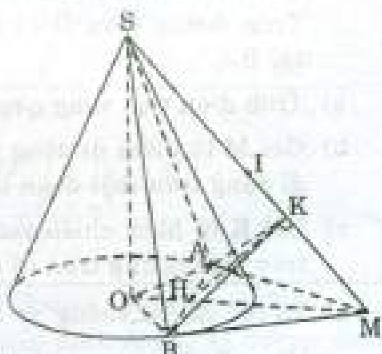
Từ H vẽ $HK \perp SM$ thì HK là đường vuông góc chung của AB và SM

Ta có $AB \perp (OSM) \Rightarrow AB \perp SM$

Mà $HK \perp SM$, vậy $SM \perp (AHK)$

Do đó $SM \perp KA$ và KB

Vậy góc của (SMA) và (SMB) là $\widehat{AKB}$ ■



BT12. Cho hình chóp S.ABCD ngoại tiếp hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O. Chứng minh :

a) dt (ΔSAB) + dt (ΔSCD) = dt (ΔSBC) + dt (ΔSAD).

b) $\cot\widehat{SAB} + \cot\widehat{SBA} + \cot\widehat{SCD} + \cot\widehat{SDC} =$

$= \cot\widehat{SAD} + \cot\widehat{SDA} + \cot\widehat{SBC} + \cot\widehat{SCB}$

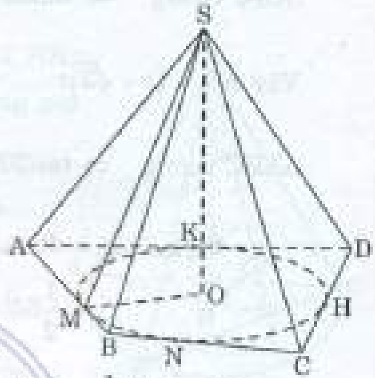
a) Gọi M, N, H, K là các tiếp điểm của AB, BC, CD, DA và đường tròn (O).

Ta có : $AB \perp OM \Rightarrow AB \perp SM$

$BC \perp ON \Rightarrow BC \perp SN$

$CD \perp OH \Rightarrow SH \perp CD$

$OK \perp AD \Rightarrow SK \perp AD$



Mặt khác do AK = AM, BM = BN, CN = CH, DK = DH nên

AB + CD = AD + BC

Ta có : $SM = SN = SH = SK = l$

Do đó : dt (ΔSAB) + dt (ΔSCD) $= \frac{1}{2}l(AB + CD) = \frac{1}{2}l(AD + BC)$

= dt (ΔSBC) + dt (ΔSAD).

b) Ta có : $AM = SM\cot\widehat{SAB}$, $BM = SM\cot\widehat{SBA}$

$\Rightarrow AB = AM + BM = l(\cot\widehat{SAB} + \cot\widehat{SBA})$

Tương tự : $CD = l(\cot\widehat{SCD} + \cot\widehat{SDC})$

$BC = l(\cot\widehat{SBC} + \cot\widehat{SCB})$

$AD = l(\cot\widehat{SAD} + \cot\widehat{SDA})$

Mà AB + DC = AD + BC, ta suy ra điều phải chứng minh ■

BT13. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, chiều cao 2R, đáy là đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi I là điểm nằm trên mặt phẳng đáy sao cho OI = 2R. Trên đường tròn O vẽ bán kính OA vuông góc OI, IA cắt đường tròn tại B.

a) Tính diện tích xung quanh hình nón.

b) Gọi M là điểm di động trên SA, IM cắt mặt nón tại N. Chứng minh N di động trên một đoạn thẳng cố định.

c) Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên IM. Chứng minh K di động trên một đường tròn cố định.

a) Ta có : ΔSAO vuông $\Rightarrow SA^2 = OA^2 + SO^2 = 5R^2$

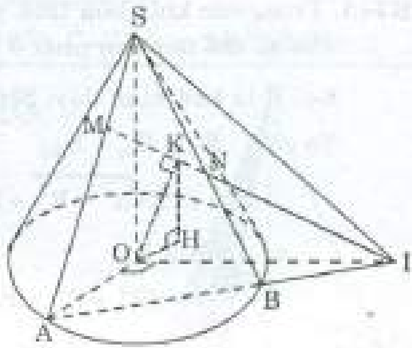
Vậy : $S_{xq} = \pi Rl = \pi R^2\sqrt{5}$.

b) Ta có $N \in IM \Rightarrow N \in mp\,(SAI)$

Mp (SAI) cắt mặt nón theo giao tuyến SA và SB.

Mà $N \in mp\,(SAI) \cap$ mặt nón

Vậy N di động trên đoạn SB cố định.



c) Hạ $OH \perp mp\,(SAI)$ thì H cố định.

Ta có : $IM \perp OK$ và OH

$\Rightarrow IM \perp mp\,(OHK)$

$\Rightarrow IM \perp HK \quad \Rightarrow \widehat{HKI} = 1v$

Vậy K di động trên đường tròn đường kính HI nằm trên mặt phẳng cố định (SAI) ■

BT14. Cho ΔABC cân tại A nằm trên mặt phẳng (P). Vẽ Ax, By vuông góc và nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P). Gọi O là trung điểm BC. Trên Bx và Cy lấy hai điểm M và N di động sao cho ΔOMN vuông tại O. Đặt $BM = x$, $CN = y$, $BC = 2a$.

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y, a.

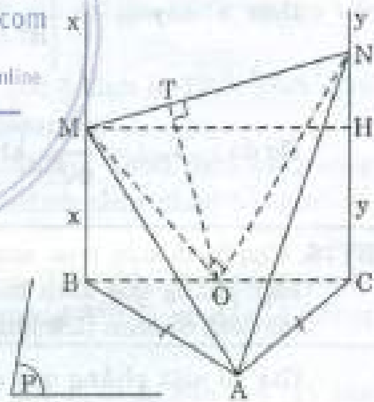
b) Chứng minh mặt phẳng (AMN) luôn tiếp xúc một mặt nón cố định.

a) ΔOBM vuông $\Rightarrow OM^2 = x^2 + a^2$

ΔOCN vuông $\Rightarrow ON^2 = y^2 + a^2$

Vẽ MH // BC, ΔMNH vuông tại H

$\Rightarrow MN^2 = MH^2 + HN^2 = 4a^2 + |y - x|^2$



Mà ΔOMN vuông tại O

$MN^2 = OM^2 + ON^2$

$\Rightarrow 4a^2 + (y - x)^2 = (x^2 + a^2) + (y^2 + a^2)$

$\Rightarrow 4a^2 + x^2 + y^2 - 2xy = x^2 + y^2 + 2a^2$

$\Rightarrow xy = a^2$.

b) Gọi OT là đường cao trong tam giác vuông OMN, ta có :

$$\frac{1}{OT^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2 + x^2} + \frac{1}{y^2 + a^2} = \frac{x^2 + y^2 + 2a^2}{(x^2 + a^2)(y^2 + a^2)}$$

$$\Leftrightarrow OT^2 = \frac{x^2y^2 + a^2(x^2 + y^2) + a^4}{x^2 + y^2 + 2a^2} = \frac{2a^4 + a^2(x^2 + y^2)}{2a^2 + x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow OT^2 = a^2 \text{ (hằng số)}$$

Vậy trong mp (AMN) thì OT luôn tiếp xúc đường tròn tâm O, R = a. Do đó mặt phẳng (AMN) luôn tiếp xúc mặt nón đỉnh A đáy là đường tròn (O; R) ■

BT15. Trong các khối nón tròn xoay có cùng diện tích toàn phần bằng π, khối nào có thể tích lớn nhất ?

Gọi R là bán kính đáy, SH = h là chiều cao khối nón.

Ta có : $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} \Leftrightarrow \pi = \pi R.SM + \pi R^2$

$$\Leftrightarrow 1 = R\sqrt{h^2 + R^2} + R^2 \Leftrightarrow 1 - R^2 = R\sqrt{h^2 + R^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R \le 1 \\ 1 - 2R^2 + R^4 = R^2(h^2 + R^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R \le 1 \\ R^2(h^2 + 2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R \le 1 \\ R^2 = \dfrac{1}{h^2 + 2} \end{cases}$$

Ta có : $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{\pi}{3}.\dfrac{h}{h^2 + 2}$

Do bất đẳng thức Cauchy

$$h^2 + 2 \ge 2\sqrt{2h^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \ge \frac{h}{h^2 + 2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6\sqrt{2}} \ge V = \frac{\pi h}{3(h^2 + 2)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = 2 \\ R^2 = \dfrac{1}{h^2 + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \sqrt{2} \\ R = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Do đó : $V_{max} = \dfrac{\pi}{6\sqrt{2}}$ khi $\begin{cases} h = \sqrt{2} \\ R = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ■

BT16. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao h và bán kính đáy R. Trong các mặt phẳng qua đỉnh hình nón, xác định mặt phẳng cắt hình nón theo mặt cắt có diện tích lớn nhất và hãy tính diện tích ấy.

Giả sử mặt phẳng qua đỉnh S của hình nón cắt hình nón theo mặt cắt là tam giác cân SAB. Vẽ SH ⊥ AB thì IH ⊥ AB.

Đặt AB = x với 0 < x < 2R

ΔAHI vuông $\Rightarrow IH^2 = AI^2 - AH^2 = R^2 - \dfrac{x^2}{4}$

ΔSHI vuông $\Rightarrow SH^2 = IH^2 + SI^2 = R^2 - \dfrac{x^2}{4} + h^2$

Ta có : $dt\,(\Delta SAB) = \dfrac{1}{2}SH.AB = \dfrac{x}{2}\sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4} + h^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được :

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(R^2 - \frac{x^2}{4} + h^2\right) \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{4}}\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} + h^2} = 2dt\,(\Delta SAB)$$

$$\Leftrightarrow \quad R^2 + h^2 \geq 2dt\,(\Delta SAB)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4} + h^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} = R^2 - \frac{x^2}{4} + h^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = R^2 + h^2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2(R^2 + h^2)}$$

Do đó diện tích (ΔSAB) lớn nhất $= \dfrac{R^2 + h^2}{2} \Leftrightarrow x = AB = \sqrt{2(R^2 + h^2)}$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân cạnh a.

a) Tính diện tích toàn phần hình nón.

b) Tính diện tích thiết diện của hình nón và mp (α) qua đỉnh và tạo với đáy góc 60^0.

2. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 12 và góc ở đỉnh là 120^0. Tính diện tích thiết diện qua hai đường sinh vuông góc nhau.

3. Cho khối nón có bán kính đáy R, đường sinh 2R. Thiết diện song song đáy chia khối nón thành hai phần có diện tích toàn phần bằng nhau. Tính tỉ số thể tích hai phần.

4. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính diện tích xung quanh và thể tích khối nón đỉnh O là tâm hình vuông ABCD, có đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông A'B'C'D'.

5. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy a, cạnh bên tạo với đáy góc 60^0. Tính diện tích toàn phần hình nón ngoại tiếp hình chóp đó.

6. Cho tứ diện đều ABCD có thể tích $6\sqrt{3}$. Tính thể tích khối nón đỉnh D, đáy là đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

7. Cho khối nón có bán kính đáy R, chiều cao h, đỉnh S và O là tâm của đáy. Lấy M trên SO sao cho $OM = x$ $(0 < x < h)$. Mp (P) vuông góc SO tại M cắt hình nón theo thiết diện là đường tròn (T). Gọi (N) là khối nón đỉnh O, đáy (T). Tìm M để (N) có thể tích lớn nhất.

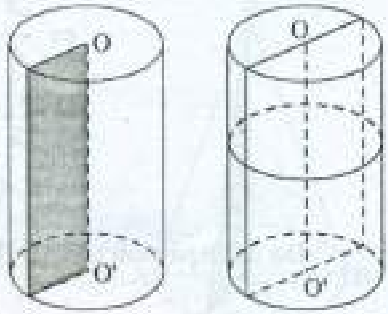
8. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60^0$. Biết có hình nón nội tiếp trong hình chóp đã có, bán kính đáy R, góc giữa đường sinh và đáy là β. Tính diện tích xung quanh và thể tích khối chóp, khối nón.

Chủ đề 26

HÌNH TRỤ

Hình trụ là hình sinh bởi một hình chữ nhật quay một vòng quanh một cạnh.

- ***Các thiết diện qua trục là các hình chữ nhật bằng nhau.***
- ***Các thiết diện vuông góc trục hình trụ là các hình tròn bằng hình tròn đáy.***



$V = Bh = \pi R^2 h$	*B : diện tích đáy*
$S_{xq} = 2\pi Rh$	*h : chiều cao*
	R : bán kính đáy

BT1. Bên trong hình trụ tròn xoay có một hình vuông ABCD cạnh a nội tiếp mà hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng hình vuông ABCD tạo mặt phẳng đáy của hình trụ một góc 45^0. Tính theo a diện tích xung quanh hình trụ và thể tích khối trụ đó.

Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B xuống mặt đáy.

ABCD hình vuông $\Rightarrow DC \perp CB \Rightarrow CD \perp CB'$

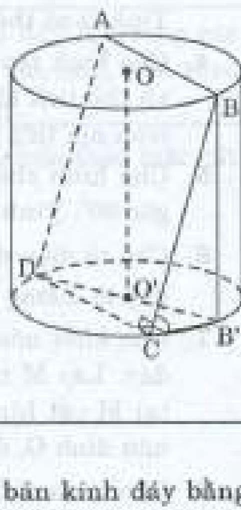
Do đó : $\widehat{BCB'} = 45^0$ và DB' qua O'.

$\Delta BB'C$ vuông cân $\Rightarrow h = BB' = CB' = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\Delta CDB'$ vuông $\Rightarrow DB'^2 = CD^2 + CB'^2$

$$= a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{DB'}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$



Do đó : $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$

$$V = \pi R^2 h = \pi.\frac{3a^2}{8}.\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$$ ■

BT2. *Tuyển sinh ĐH khối A 2006*

Cho hình trụ có đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích tứ diện OO'AB.

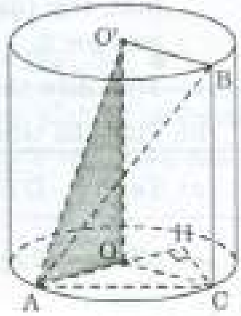
Vẽ BC vuông góc mặt phẳng đáy chứa đường tròn (O).

ΔABC vuông $\Rightarrow AC^2 = AB^2 - BC^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

Vẽ $CH \perp OA$ mà $OO' \perp CH$ nên $CH \perp mp(OO'A)$

Mà BC // mp (OO'A) nên

$CH = d(C, (OO'A)) = d(B, (OO'A))$



Trên đường tròn O, độ dài dây $AC = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{COH} = 60^0$

Δ vuông COH $\Rightarrow \sin 60^0 = \dfrac{CH}{OC} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy : $V_{O.ABO'} = V_{B.AOO'} = \dfrac{1}{3}CH.dt(\Delta OO'A) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{2}a^2\right) = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ ■

BT3. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính R, chiều cao $R\sqrt{2}$. Trên hai đường tròn O và O' lấy lần lượt hai điểm A và B sao cho góc của hai đường thẳng OA và O'B bằng α không đổi.

a) Tính AB theo R và α.

b) Chứng minh khi AB di động thì I trung điểm của AB luôn di động trên một đường tròn cố định.

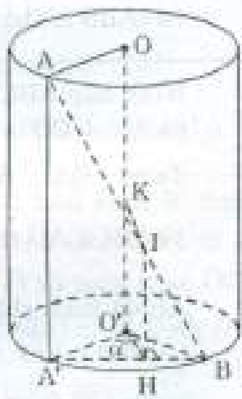
a) Vẽ O'A' // OA thì $\widehat{A'O'B} = \alpha$.

Vẽ $O'H \perp A'B \Rightarrow HA' = HB$

$\Delta O'A'H$ vuông $\Rightarrow \sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{d}{h} = \dfrac{A'H}{O'A'} \Rightarrow A'B = 2A'H = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$

$\Delta AA'B$ vuông $\Rightarrow AB^2 = AA'^2 + A'B^2 \Rightarrow AB^2 = 2R^2 + 4R^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow AB = R\sqrt{2 + 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$



b) Gọi K là trung điểm OO'.

Ta có : IH // và bằng $\dfrac{AA'}{2}$

O'K // và bằng $\dfrac{AA'}{2}$

Vậy IH // và bằng O'K nên O'HIK là hình chữ nhật nên $KI = O'H = R\cos\dfrac{\alpha}{2}$ (không đổi).

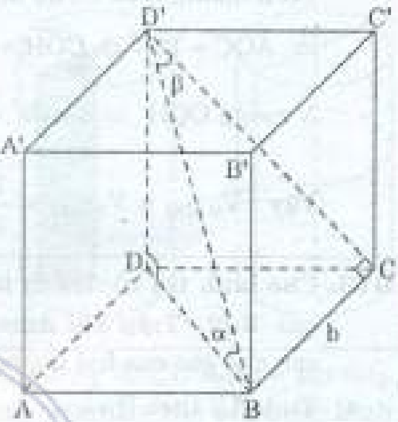
Do đó I luôn di động trên đường tròn tâm K bán kính $R' = R\cos\dfrac{\alpha}{2}$ nằm trong mặt phẳng qua K và song song với hai đáy ■

BT4. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', BC = b, đường chéo D'B của hình hộp tạo với mặt phẳng đáy một góc α và tạo với mặt bên A'B'BA một góc β.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình hộp đó.

b) Tính thể tích hình hộp đó.

a) Ta có : $\widehat{D'BD} = \alpha$ và $\widehat{BD'C} = \beta$



$\Delta BCD'$ vuông tại C có $BD' = \dfrac{b}{\sin\beta}$

$\Delta D'DB$ có $D'D = BD'\sin\alpha = \dfrac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$

Bán kính đáy R của hình trụ ngoại tiếp hình hộp.

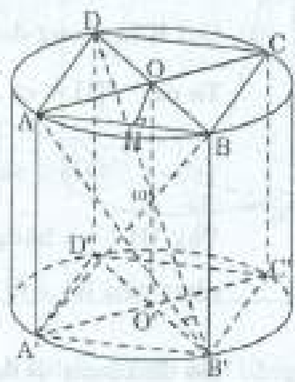
$$R = \frac{BD}{2} = \frac{1}{2}BD'\cos\alpha = \frac{b\cos\alpha}{2\sin\beta}$$

$$\Rightarrow S = 2\pi R.DD' = \frac{\pi b^2\sin 2\alpha}{2\sin^2\beta}$$

b) Ta có : $BD = \dfrac{b\cos\alpha}{\sin\beta}$, $AB = \sqrt{\dfrac{b^2\cos^2\alpha}{\sin^2\beta} - b^2} = \dfrac{b}{\sin\beta}\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$

Do đó : $V = \dfrac{b^3\sin\alpha}{\sin^2\beta}\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$ ■

BT5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' nội tiếp trong hình trụ có đường kính đáy là 5a. Góc của DB' và (ABB'A') bằng 30^0. Khoảng cách từ trục hình trụ và (ABB'A') bằng $\dfrac{3}{2}a$. Tính theo a thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D'.



Hình hộp ABCD.A'B'C'D' là hình hộp đứng có AA' = OO' và ABCD hình chữ nhật.

Ta có : DA ⊥ AB và AA' ⇒ DA ⊥ (ABB'A')

Vẽ OH // AD thì $OH = d(O, ABB'A') = \dfrac{3}{2}a$

AB' là hình chiếu vuông góc của DB lên (ABB'A'). Vậy $\widehat{DB'A} = 30^0$.

$\Delta ADB'$ vuông tại A $\Rightarrow \tan 30^0 = \dfrac{AD}{AB'} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

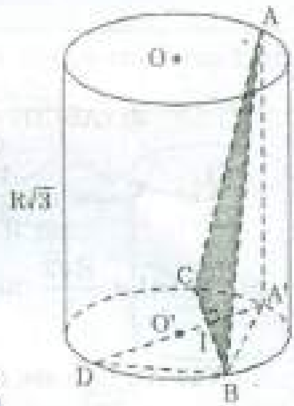
$$\Rightarrow AB' = \sqrt{3}AD = \sqrt{3}.2OH = 3a\sqrt{3}$$

ΔADB vuông $\Rightarrow AB^2 = DB^2 - AD^2 = 25a^2 - 9a^2 = (4a)^2$

$\Delta ABA'$ vuông $\Rightarrow AA'^2 = AB'^2 - A'B'^2 = 27a^2 - 16a^2 = 11a^2$

Do đó : $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.AD.AB = a\sqrt{11}.(3a).(4a) = 12\sqrt{11}a^3$ ■

BT6. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy tâm O và O', bán kính R, chiều cao $R\sqrt{3}$. Gọi A là điểm cố định trên đường tròn (O). Tìm B và C trên đường tròn (O') sao cho tam giác ABC đều.



Từ A vẽ $AA' \parallel OO' \Rightarrow AA' \perp$ mp chứa (O).

Vẽ đường kính A'O'D.

Do AB = AC nên A'C = A'B.

Mặt khác O'B = O'C = R

Vậy O'A' là đường trung trực của BC

$\Rightarrow O'A' \perp BC$ tại trung điểm I.

Đặt $x = A'I$ $(0 \le x \le 2R)$

$\Delta A'BD$ vuông tại B nên $BA'^2 = A'I.A'D = 2Rx$

$$\text{và } IB^2 = IA'.ID = x(2R - x)$$

Vậy $BC = 2BI = 2\sqrt{x(2R - x)}$

$\Delta A'AB$ vuông tại A' nên $BA^2 = AA'^2 + BA'^2 = 3R^2 + 2Rx$

Mà ΔABC đều $\Rightarrow BA^2 = BC^2 \Rightarrow 3R^2 + 2Rx = 4x(2R - x)$

$$\Rightarrow 4x^2 - 6Rx + 2R^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3R \pm R}{4} = \left[\begin{array}{l} R \\ \frac{R}{2} \end{array}\right.$$

Do đó ΔABC đều khi

$O'A' = R \Leftrightarrow$ BC là đường kính của (O') mà vuông góc O'A'

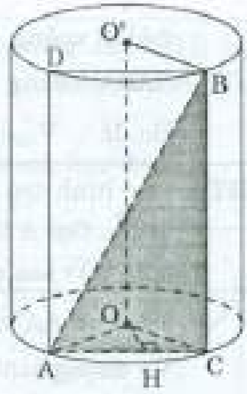
hoặc $O'A' = \frac{R}{2} \Leftrightarrow$ BC là dây vuông góc O'A' tại trung điểm của O'A' ■

BT7. Cho hình trụ có đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính R, đường cao $R\sqrt{6}$. Lấy hai điểm A, B lần lượt nằm trên đường tròn O và O' sao cho OA vuông góc O'B. Gọi (α) là mặt phẳng qua A, B và song song OO'.

a) Tính thể tích khối đa diện đỉnh O', đáy là mặt cắt của (α) và hình trụ.

b) Chứng minh (α) tiếp xúc mặt trụ có trục OO', bán kính đáy $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

a) (α) song song với OO' vậy cắt mặt trụ theo giao tuyến AD và BC song song OO'. Vậy mặt cắt là hình chữ nhật ABCD.



Do $OA \perp O'B$ mà $O'B \parallel OC$ nên $OA \perp OC$.

ΔOAC vuông cân cạnh R nên $AC = R\sqrt{2}$.

Vẽ $OH \perp AC$.

Do $BC \perp OH$ nên $OH \perp$ mp (ABC)

Mà $OO' \parallel$ mp (ABC) nên

$$d(O, mp(ABC)) = d(O', mp(ABC))$$

$$= OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$dt(ABCD) = AC.BC = R\sqrt{2}.R\sqrt{6} = 2R^2\sqrt{3}$$

Vậy $V_{O'.ABCD} = \frac{1}{3}OH.dt(ABCD) = \frac{1}{3}\frac{R\sqrt{2}}{2}.2R^2\sqrt{3} = \frac{R^3\sqrt{6}}{3}$.

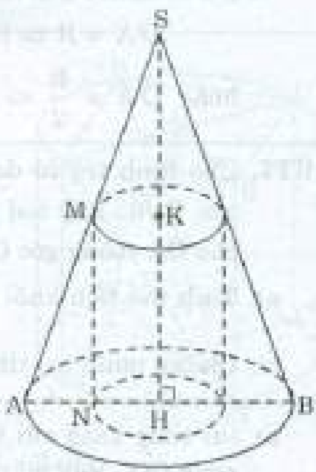
b) Do $OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ nên $d(O, AC) = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Vậy AC tiếp xúc đường tròn tâm O, bán kính $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác (α) song song trục OO', vậy (α) tiếp xúc mặt trụ trục OO', bán kính đáy $R' = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ ■

BT8. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao 15, bán kính đáy 6. Tìm chiều cao và bán kính đáy của hình trụ có diện tích toàn phần lớn nhất nội tiếp trong hình nón. Tính diện tích toàn phần hình trụ đó.

Gọi r và h là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ nội tiếp trong hình nón với $0 < r < 6$ và $0 < h < 15$.



Ta có : $S_{tp} = 2S_{đáy} + S_{xq} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Do $MN \parallel SH \Rightarrow \frac{AN}{AH} = \frac{MN}{SH} \Rightarrow \frac{6-r}{6} = \frac{h}{15}$

$$\Rightarrow h = 15\left(1 - \frac{r}{6}\right) = 15 - \frac{5r}{2}$$

Vậy : $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(15 - \frac{5r}{2}\right)$

$$S(r) = 2\pi r^2 + 30\pi r - 5\pi r^2 = 30\pi r - 3\pi r^2$$

Ta có : $S'(r) = 30\pi - 6\pi r$

$S'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 5$

r	0		5		6
S'		+	0	−	
S		↗	75π CĐ	↘	

Do đó : $S_{max} = 75\pi \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ h = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ ■

BT9. Hình trụ có thể tích V không đổi. Tính bán kính đáy và chiều cao hình trụ sao cho diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.

Gọi R và h là bán kính đáy và chiều cao hình trụ.

Ta có : $V = \pi R^2 h$ (không đổi)

và $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = (Rh + R^2)2\pi$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương.

Ta có : $\dfrac{Rh}{2} + \dfrac{Rh}{2} + R^2 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{Rh}{2}\cdot\dfrac{Rh}{2}R^2}$

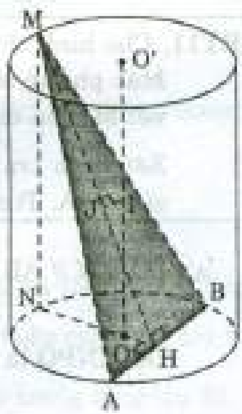
$\Leftrightarrow Rh + R^2 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{R^4h^2}{4}} = 3\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{\pi^2.4}} \Leftrightarrow S_{tp} \geq 3(2\pi)\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{4\pi^2}}$ (hằng số)

Do đó S toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{Rh}{2} = R^2 \Leftrightarrow R = \dfrac{h}{2}$ ■

BT10. Cho mặt trụ tròn xoay chiều cao h, đáy là hai đường tròn (C) và (C') tâm O và O', bán kính đáy R. Trên (C) lấy dây cung AB sao cho $AB = R\sqrt{3}$.

a) Tìm M trên (C') sao cho ΔABM có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

b) Với vị trí M ở câu a, gọi I là trung điểm OO', tính khoảng cách từ I đến mp (ABM) theo R và h.



a) Vẽ MN // OO' với N ∈ (C) thì MN ⊥ mp chứa (O).

Vẽ MH ⊥ AB ⇒ NH ⊥ AB

Ta có : $S = dt(\Delta MAB) = \dfrac{1}{2}MH.AB = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}MH$

Vậy $S_{max} \Leftrightarrow MH_{max} \Leftrightarrow NH_{max}$

$\Leftrightarrow$ N = điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$ lớn.

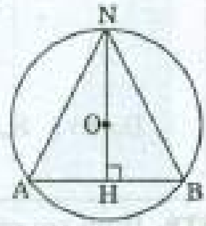
Lúc đó ΔNAB đều cạnh $R\sqrt{3}$ nên

$$NH = AB\frac{\sqrt{3}}{2} = (R\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}R$$

Vậy $\quad MH^2 = MN^2 + NH^2 = h^2 + \dfrac{9}{4}R^2$

và $\quad S_{max} = \dfrac{1}{2}MH.AB = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{4h^2+9R^2}}{2}.R\sqrt{3}$

$$= \frac{R}{4}\sqrt{12h^2+27R^2}.$$



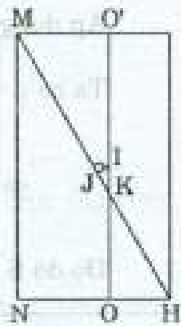
b) Trong mp (MNOO') vẽ $IJ \perp MH$

Ta có : $AB \perp mp\,(MNH) \Rightarrow AB \perp IJ$

Vậy $\quad IJ \perp mp\,(MAB)$

Gọi K là giao điểm MH và OO'.

Ta có : $OK \,//\, MN \Rightarrow \dfrac{OK}{MN} = \dfrac{HO}{HN} \Rightarrow OK = h\dfrac{\frac{R}{2}}{\frac{3}{2}R} = \dfrac{h}{3}$.



Vậy $\quad IK = IO - OK = \dfrac{h}{2} - \dfrac{h}{3} = \dfrac{h}{6}$

và $\quad KO = IO - IK = \dfrac{h}{2} - \dfrac{h}{6} = \dfrac{h}{3}$

Ta có : $\Delta JIK \backsim \Delta OHK \Rightarrow \dfrac{JI}{OH} = \dfrac{IK}{HK}$

$$\Rightarrow IJ = d\,(I, mp\,(ABM)) = \frac{OH.IK}{\sqrt{OK^2+OH^2}}$$

$$\Rightarrow d\,(I, mp\,(ABM)) = \frac{\frac{R}{2}.\frac{h}{6}}{\sqrt{\frac{h^2}{9}+\frac{R^2}{4}}} = \frac{Rh}{2\sqrt{4h^2+9R^2}} \quad ■$$

BT11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, đường cao SA = 2a. Mặt phẳng song song với đáy ABCD cắt hình chóp theo tứ giác MNPQ với M trên cạnh SA và AM = x (0 < x < a).

Xét hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác MNPQ và đường sinh MA. Tìm x để thể tích khối trụ này đạt giá trị lớn nhất.

a) Do MN // AB $\Rightarrow \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{MN}{AB} \Rightarrow MN = \dfrac{AB.SM}{SA} = \dfrac{a(2a-x)}{2a} = a - \dfrac{x}{2}$

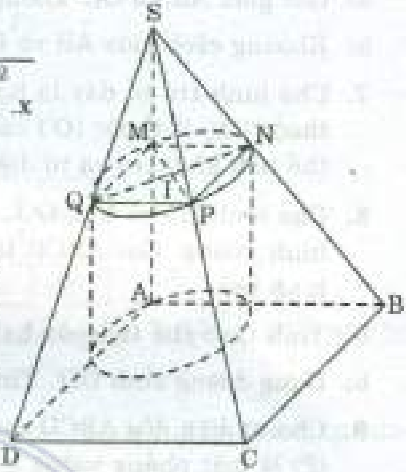
Do MNPQ là hình vuông nên $R = IM = \dfrac{MN}{\sqrt{2}}$

Vậy : $V_{\text{khối trụ}} = \pi R^2 h = \pi\left(\dfrac{MN}{\sqrt{2}}\right)^2 .AM = \dfrac{\pi}{2}\left(a - \dfrac{x}{2}\right)^2 .x = V$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương.

Ta có :

$$2a = \left(a - \frac{x}{2}\right) + \left(a - \frac{x}{2}\right) + x \geq 3\sqrt[3]{\left(a - \frac{x}{2}\right)^2 .x}$$



$\Leftrightarrow 8a^3 \geq 27.\dfrac{2V}{\pi} \quad \Leftrightarrow V \leq \dfrac{4\pi a^3}{27}$

Dấu "=" xảy ra khi $a - \dfrac{x}{2} = x \quad \Leftrightarrow a = \dfrac{3x}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}a$$

Vậy $V_{max} \Leftrightarrow AM = x = \dfrac{2}{3}a$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình trụ có bán kính đáy R = 10. Mặt phẳng song song trục và cách trục một khoảng bằng 6 tạo thành mặt cắt có diện tích là 48. Tính thể tích khối lăng trụ.

2. Cho hình trụ có bán kính đáy R = 5. Mặt phẳng song song trục và cách trục một khoảng bằng 3 cắt hai đáy theo dây AB, A'B'.

a) Biết chiều cao h = 15. Tính diện tích của ABB'A'.

b) Nếu diện tích ABB'A' bằng 96. Tính thể tích khối trụ.

3. Cho hình trụ có bán kính đáy R, thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông.

a) Tính diện tích thiết diện qua trục.

b) Tính diện tích toàn phần và thể tích khối trụ.

4. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng 4π.

a) Tính diện tích toàn phần hình trụ.

b) Tính thể tích khối trụ.

5. Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thang cân, đáy nhỏ AB = a, đáy lớn CD = 4a, cạnh bên bằng $\dfrac{5a}{2}$, chiều cao lăng trụ h. Tính diện tích toàn phần và thể tích hình trụ nội tiếp trong lăng trụ đó.

6. Cho hình trụ có O, O' là hai tâm của đường tròn đáy, OO' = h. Gọi A, B là hai điểm thay đổi lấy trên hai đường tròn (O), (O') sao cho AB = a không đổi. Chứng minh :

a) Góc giữa AB và OO' không đổi.

b) Khoảng cách giữa AB và OO' không đổi.

7. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính R. Lấy A thuộc (O), B thuộc (O') sao cho AB = 2R, AB tạo với OO' góc 60^0. Tính thể tích khối trụ và tứ diện OO'AB.

8. Cho hình trụ có trục OO', bán kính đáy R sao cho thiết diện qua trục là hình vuông. Gọi ABCD là hình vuông nội tiếp (O), AA' là đường sinh hình trụ.

a) Tính tỉ số thể tích của hai hình chóp O'.ABCD và A'.ABCD.

b) Dựng đường sinh DD'. Tính thể tích đa diện A'.ABD'DC.

9. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi O là tâm của ΔBCD. Lấy I thuộc AO, (P) là mặt phẳng vuông góc OA tại I, (P) cắt AB, AC, AD lần lượt tại M, N, P. Cho hình trụ có đáy là hình tròn (T) nội tiếp ΔMNP, đáy kia nằm trên mp (BCD). Tìm vị trí của I trên AO để thể tích khối trụ lớn nhất.

Chủ đề 27

MẶT CẦU. THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Mặt cầu tâm I, bán kính R, kí hiệu S(I, R)

$$S(I, R) = \{M / IM = R\}$$

Hình cầu tâm I, bán kính R, kí hiệu B(I, R)

$$B(I, R) = \{M / IM \le R\}$$

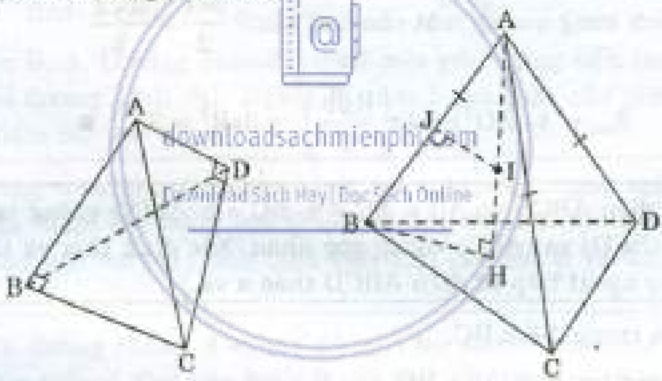
Thể tích hình cầu B(I, R) : $\boxed{V = \dfrac{4}{3}\pi R^3}$

Diện tích mặt cầu S(I, R) : $\boxed{S_{mc} = 4\pi R^2}$

Chú ý : Phương pháp xác định mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

a) Nếu $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 1v$

Hai điểm B và D cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông nên cùng nằm trên mặt cầu đường kính AC.

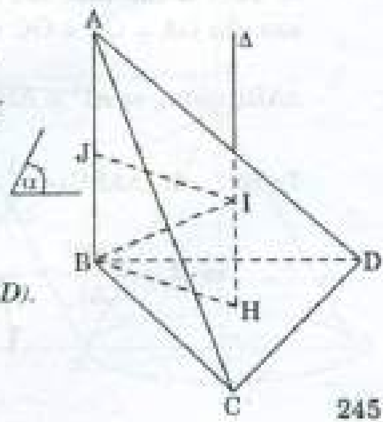


b) Nếu AB = AC = AD = a

- *Vẽ AH ⊥ mp (BCD) thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.*
- *Trên mp (ABH) vẽ đường trung trực của AB, đường này cắt AH tại I thì I là tâm mặt cầu (ABCD).*
- *Do hệ thức lượng trên đường tròn (IJBH),*

  ta có : $AJ.AB = AI.AH \Rightarrow R = IA = \dfrac{a^2}{2AH}$

c) Nếu AB ⊥ mp (BCD)



- *Vẽ (Δ) là trục đường tròn (BCD).*
- *Vẽ (α) là mặt phẳng trung trực của AB.*

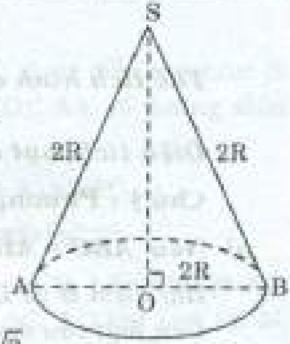
  (Δ) cắt (α) tại I thì I là tâm mặt cầu (ABCD).
- $R = IB = \sqrt{IH^2 + HB^2}$.

BT1. Thiết diện qua trục hình nón là tam giác đều, bán kính đáy hình nón là R.

a) Tính thể tích hình nón đã cho.

b) Chứng minh rằng diện tích đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình đó tỉ lệ 1 : 2 : 3.

c) Chứng minh rằng diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích mặt cầu mà đường kính bằng chiều cao của hình nón.



a) ΔSAB đều cạnh 2R nên $SO = \dfrac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

Vậy $V_{nón} = \dfrac{1}{3}SO.dt\,(đáy) = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}(\pi R^2) = \dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$

b) Ta có $S_{đáy} = \pi R^2$; $S_{xq} = \pi R.SA = 2\pi R^2$

$S_{tp} = S_{đáy} + S_{xq} = 3\pi R^2$

Do đó : $S_{đáy} : S_{xq} : S_{tp} = 1 : 2 : 3$

c) Diện tích xung quanh mặt cầu bán kính $\dfrac{SO}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$$S_{mc} = 4\pi(SO^2) = 4\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi R^2 = S_{tp} \quad ■$$

BT2. Cho tứ diện ABCD có AB = AC = a, BC = b. ΔBCD vuông tại D. Hai mặt phẳng (BCD) và (ABC) vuông góc nhau. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo a và b.

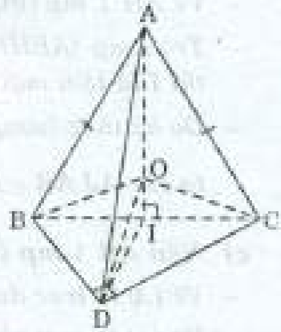
Gọi I là trung điểm BC.

ΔABC cân tại A $\Rightarrow AI \perp BC$.

Do mp (ABC) vuông góc mp (BCD) nên $AI \perp$ mp (BCD).

Do đó AI là trục đường tròn ngoại tiếp ΔBCD

$\Rightarrow$ Tâm O của mặt cầu (ABCD) nằm trên AI sao cho OA = OB = OC = OD = R.



ΔABI vuông $\Rightarrow AI^2 = AB^2 - BI^2 = a^2 - \dfrac{b^2}{4}$

Ta có : $dt\,(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}AI.BC = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$

$$\Rightarrow R = \frac{2AB^2}{AI} = \frac{2a^2}{\sqrt{\dfrac{4a^2 - b^2}{4}}} = \frac{4a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}} \quad ■$$

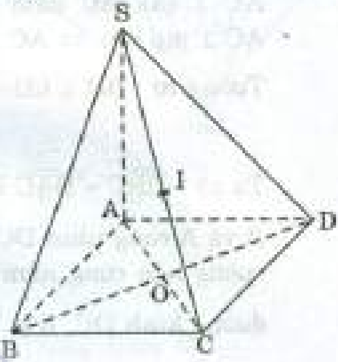
BT3. *Tốt nghiệp THPT 2006*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, SA vuông góc mp (ABCD), $SB = a\sqrt{3}$.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

b) Chứng minh trung điểm của SC là tâm mặt cầu qua các điểm S, A, B, C, D.

a) ΔSAB vuông $\Rightarrow SA^2 = SB^2 - AB^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2$



Ta có : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.dt(ABCD)$

$$= \frac{1}{3}a\sqrt{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

b) Do định lí ba đường vuông góc :

$BC \perp BA$ nên $BC \perp SB$

$DC \perp DA$ nên $DC \perp SD$

Do đó : $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^0$

Ba điểm B, A, D cùng nhìn SC dưới một góc vuông nên cùng nằm trên mặt cầu đường kính SC. Nghĩa là tâm I của mặt cầu qua S.ABCD là trung điểm SC ■

BT4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2r nằm trong mặt phẳng (α). Gọi H là điểm đối xứng của O qua A, lấy điểm S sao cho SH = 2r và SH vuông góc mp (α). Tính diện tích mặt cầu qua S và đường tròn tâm O theo r.

Từ O vẽ đường thẳng d vuông góc (α) thì tâm ω của mặt cầu cần tìm phải nằm trên d. Gọi bán kính R của mặt cầu thì $R = \omega S = \omega A = \omega B$.

Vẽ $SI \perp d$ thì $SI = 2r$, ta có : $\omega I = |2r - \omega O|$

$\Delta SI\omega$ vuông $\Rightarrow R^2 = S\omega^2 = SI^2 + \omega I^2 = 4r^2 + (2r - \omega O)^2$ (1)

$\Delta\omega OB$ vuông $\Rightarrow R^2 = \omega B^2 = \omega O^2 + r^2$ (2)

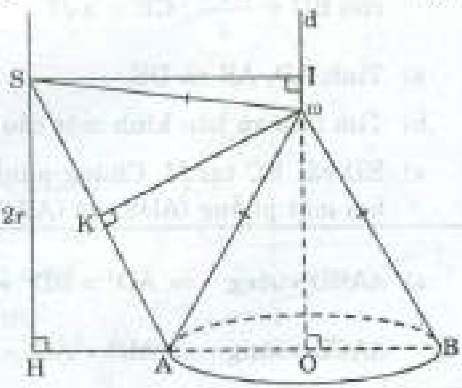
Từ (1) và (2), ta có :

$$8r^2 - 4r\omega O + \omega O^2 = \omega O^2 + r^2$$

$$\Rightarrow 7r^2 - 4rO\omega \Rightarrow \omega O = \frac{7r}{4}$$

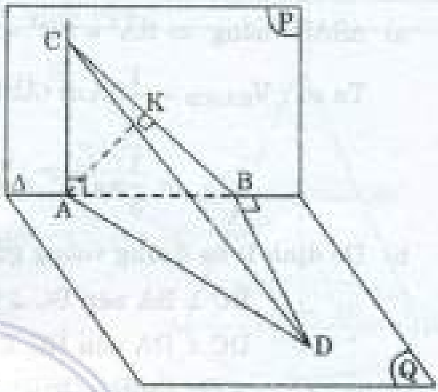
Từ (2) $\Rightarrow R^2 = \frac{49r^2}{16} + r^2 = \frac{65}{16}r^2$

Do đó : $S = 4\pi R^2 = \frac{65\pi r^2}{4}$ ■



BT5. *Tuyển sinh ĐH khối D 2003*

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau theo giao tuyến (Δ). Trên (Δ) lấy hai điểm A, B mà AB = a. Lấy C trên (P) và D trên (Q) sao cho AC và BD cùng vuông góc (Δ) mà AC = AB = BD. Tính bán kính mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D và khoảng cách từ A đến mp (BCD).



a) Do hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc nhau theo giao tuyến (Δ) mà AC ⊥ (Δ), AC nằm trên (P) nên AC ⊥ mp (Q) ⇒ AC ⊥ AD.

Tương tự : BD ⊥ (Δ) ⇒ BD ⊥ (P)

⇒ DB ⊥ BC

Ta có : $\widehat{DBC} = \widehat{DAC} = 1v$

B và A cùng nhìn DC dưới một góc vuông nên cùng nằm trên mặt cầu đường kính DC, $R = \frac{CD}{2}$.

ΔABC vuông cân ⇒ $BC^2 = 2a^2$

ΔBCD vuông ⇒ $R = \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 2a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có : (P) ⊥ (Q) mà BD ⊥ Δ nên DB ⊥ (P).

Do đó mp (BCD) ⊥ mp (P) theo giao tuyến BC.

Từ A vẽ AK ⊥ BC thì AK ⊥ mp (BCD).

Do đó : $AK = d(A, BCD) = \frac{AC.AB}{BC} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ■

BT6. Trên mặt phẳng (P) có tam giác đều ABC cạnh a. Trên các đường vuông góc mp (P) tại B và C lấy các điểm D và E nằm cùng phía với (P) sao cho $BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CE = a\sqrt{3}$.

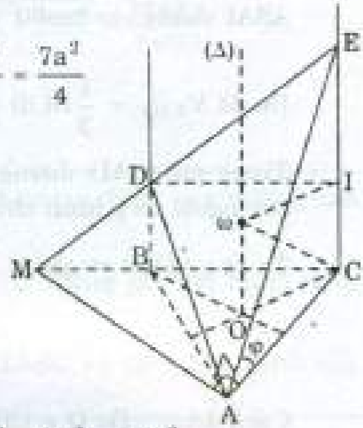
a) Tính AD, AE và DE.

b) Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCE.

c) ED cắt BC tại M. Chứng minh AM vuông góc mp (ACE). Tính góc của hai mặt phẳng (ADE) và (ABC).

a) ΔABD vuông ⇒ $AD^2 = BD^2 + AB^2 = \frac{3a^2}{4} + a^2 = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

ΔACE vuông ⇒ $AE^2 = AC^2 + CE^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow AE = 2a$



Gọi I là trung điểm CE.

ΔDEI vuông $\Rightarrow DE^2 = DI^2 + IE^2 = a^2 + \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{7a^2}{4}$

$\Rightarrow DE = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

b) Gọi (Δ) là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.

Mặt phẳng trung trực của CE cắt (Δ) tại ω đó là tâm mặt cầu (ABCE).

$\Delta\omega IC$ vuông $\Rightarrow R^2 = \omega C^2 = OC^2 + IC^2$

$$= \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{3a^2}{4} = \frac{13a^2}{12}$$

$\Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$.

c) Do BD là đường trung bình của $\Delta MEC \Rightarrow$ B là trung điểm MC

Ta có : $AB = \dfrac{MC}{2} = a \quad \Rightarrow \Delta MAC$ vuông tại C $\quad\Rightarrow AM \perp AC$

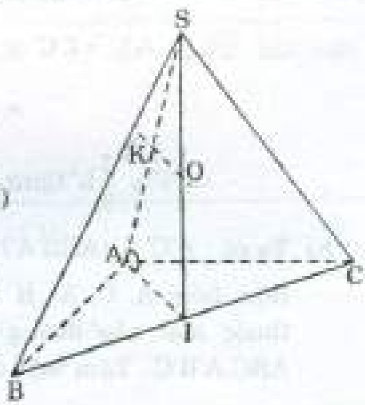
mà $AM \perp CE$ nên $AM \perp$ mp (ACE).

Do giao tuyến hai mặt phẳng (ADE) và (ABC) là AM mà $AC \perp AM$, $AE \perp AM$ nên $\widehat{EAC}$ là góc phẳng nhị diện.

ΔEAC vuông $\quad\Rightarrow \tan\widehat{EAC} = \dfrac{EC}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \quad\Rightarrow \widehat{EAC} = \dfrac{\pi}{3}$ ■

BT7. *Tuyển sinh Cao đẳng 2012*

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a\sqrt{2}$, $SA = SB = SC$. Góc của SA và mp (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC theo a.



- Gọi I là trung điểm của BC.

ΔABC vuông cân tại A

$\Rightarrow IA = IB = IC \qquad (1)$

Mà $SA = SB = SC \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ SI là trục đường tròn (ABC)

$\Rightarrow SI \perp (ABC)$

Vậy góc của SA và mp (ABC) là $\widehat{SAI} = 60^0$.

Ta có : $BC = AB\sqrt{2} = 2a \quad\Rightarrow AI = \dfrac{BC}{2} = a$

ΔSAI vuông $\Rightarrow \tan 60^0 = \dfrac{SI}{AI} = \sqrt{3} \Rightarrow SI = a\sqrt{3}$

Do đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SI.dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}.(a\sqrt{2})^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

- Trong mp (SAI), đường trung trực của SA cắt SI tại O thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Ta có : $\Delta SKO \backsim \Delta SIA \Rightarrow \dfrac{SK}{SI} = \dfrac{SO}{SA}$

$$\Rightarrow R = SO = \frac{SK.SA}{SI} = \frac{SA^2}{2SI} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Cách khác : Do $O \in (SBC)$ nên bán kín mặt cầu qua S, A, B, C cũng là bán kính đường tròn (SBC).

Vậy : $dt(\Delta SBC) = \dfrac{SB.SC.BC}{4R} = \dfrac{1}{2}SI.BC$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}.\frac{SB^2}{SI} = \frac{1}{2}.\frac{SI^2 + IB^2}{SI} = \frac{1}{2}.\frac{3a^2 + a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$ ■

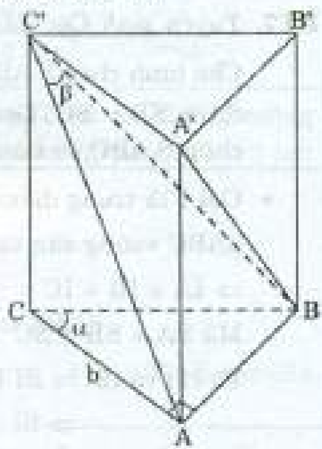
BT8. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy là ΔABC vuông góc ở A, $\widehat{ACB} = \alpha$, cạnh AC = b, BC' tạo với mặt bên (ACC'A') một góc β.

a) Tính thể tích của lăng trụ đã cho theo b, α, β.

b) Tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho. Tính diện tích của mặt cầu đó.

a) Ta có : $AA' \perp AB$, $AC \perp AB \Rightarrow AB \perp mp(ACC'A')$

$\Rightarrow$ AC' là hình chiếu của BC' trên (ACC'A'). Vậy $\widehat{BC'A} = \beta$.



Ta có : $V = \dfrac{1}{2}AA'.AB.AC$

trong đó : $AB = AC.\tan\alpha$

$AC' = AB.\cot\beta = b\tan\alpha\cot\beta$

$AA' = CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2}$

$= b\sqrt{\tan^2\alpha\cot^2\beta - 1}$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}b^3\tan\alpha\sqrt{\tan^2\alpha\cot^2\beta - 1}.$$

b) Ta có : $A'C' \perp (ABB'A') \Rightarrow A'C' \perp A'B$

Bốn điểm A, C, A', B' nhìn đoạn BC' dưới một góc vuông, do đó chúng thuộc mặt cầu đường kính BC'. Đó là mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ ABC.A'B'C'. Tâm mặt cầu là trung điểm O của BC'.

Bán kính mặt cầu $R = OB = \frac{1}{2}BC' = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + CC'^2} = \frac{b\tan\alpha}{2\sin\beta}$

$$\Rightarrow S = 4\pi R^2 = \pi b^2 \frac{\tan^2\alpha}{\sin^2\beta} \quad ■$$

BT9. Cho tứ diện đều S.ABC cạnh là a. Gọi I là trung điểm của đường cao SH của tứ diện.

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng IA, IB, IC vuông góc với nhau từng đôi một.

b) Xác định tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện IABC và tính bán kính của nó theo a.

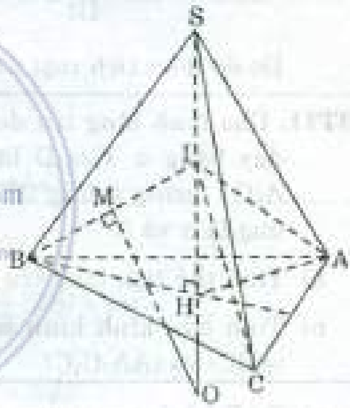
a) ΔSHB vuông tại H $\Rightarrow SH^2 = SB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$

ΔIHB vuông $\Rightarrow IB^2 = IH^2 + HB^2 = \frac{a^2}{2}$

$I \in SH \Rightarrow IA = IB = IC$

Xét ΔIBC có : $IB^2 + IC^2 = BC^2 \Rightarrow IB \perp IC$

Tương tự ta có $IC \perp IA$; $IA \perp IB$.



b) Vì I cách đều A, B, C nên tâm hình cầu đi qua bốn điểm I, A, B, C phải nằm trên IH. Vẽ đường trung trực ~~của đoạn IB trong~~ mp (BIH). Đường này cắt IH kéo dài tại O. Ta có : OA = OB = OC = OI, vậy O là tâm hình cầu qua bốn điểm A, B, C, I.

Ta có : $\Delta IBH \backsim \Delta IOM \Rightarrow \frac{IO}{IB} = \frac{IH}{IM}$

$$\Rightarrow IO = \frac{IB.IH}{IM} = \frac{2IM.IH}{IM} = 2IH = 2\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad ■$$

BT10. Cho tứ diện ABCD có $AB = BC = AC = BD = a$, $AD = a\sqrt{2}$, hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc.

a) Chứng minh tam giác ACD vuông.

b) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

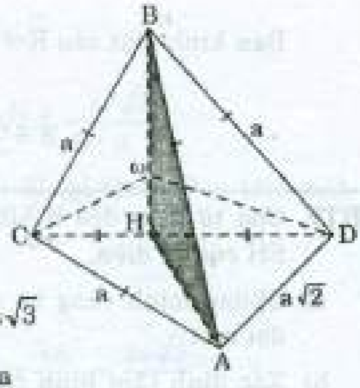
a) Do $(ACD) \perp (BCD)$, vẽ $BH \perp CD$ thì $BH \perp (ACD)$.

ΔBCD cân nên H là trung điểm CD.

Ta có : Δ vuông BHA = Δ vuông HBC $\Rightarrow HC = HA$

ΔACD có $HC = HA = HD$ nên vuông tại A.

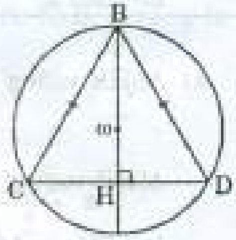
b) Ta có : $BH \perp (ACD)$ tại H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACD nên BH là trục đường tròn (ACD). Tâm ω của mặt cầu (ABCD) nằm trên BH.



Do $\omega A = \omega C = \omega D$ nên bán kính mặt cầu ABCD cũng chính là bán kính đường tròn BCD.

ΔACD vuông tại A $\Rightarrow CD = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$

ΔBHC vuông tại H $\Rightarrow BH = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}$



Vậy $S = dt(\Delta BCD) = \dfrac{1}{2}BH.CD = \dfrac{a}{4}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Mà $S = \dfrac{BC.BD.CD}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{a.a.a\sqrt{3}}{a^2\sqrt{3}} = a$

Do đó diện tích mặt cầu $= 4\pi R^2 = 4\pi a^2$ ■

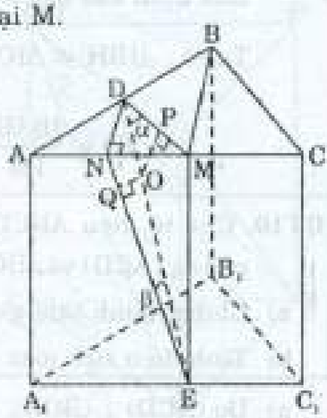
BT11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có các đáy là tam giác đều cạnh đáy bằng a. Gọi D là trung điểm của AB, E là một điểm trên cạnh A_1C_1, đường thẳng DE tạo với (ABC) và tạo với (AA_1C_1C) các góc tương ứng là α và β.

a) Tính thể tích lăng trụ đã cho theo a, α, β.

b) Tính bán kính hình cầu có tâm nằm trên DE và tiếp xúc với các mặt (ABC) và (AA_1C_1C).

a) Từ E kẻ đường thẳng song song AA_1, cắt AC tại M.

Ta có : $EM \perp mp(ABC)$.



DM là hình chiếu của DE xuống mp (ABC) nên $\widehat{EDM} = \alpha$.

Từ D kẻ $DN \perp AC$ suy ra $DN \perp mp(AA_1C_1C)$.

Vậy : $\widehat{DEN} = \beta$.

Ta có : $DN = AD.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Trong ΔDNE vuông có : $DE = \dfrac{DN}{\sin\alpha} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4\sin\alpha}$

Trong ΔDEM vuông có : $EM = DE.\sin\beta = \dfrac{a\sqrt{3}}{4\sin\alpha}.\sin\beta$

Diện tích đáy lăng trụ $S_{đáy} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích lăng trụ là : $V = S_{đáy}.EM = \dfrac{3a^2\sin\beta}{16\sin\alpha}$.

b) Gọi O là tâm hình cầu; trong (DEM) hạ $OP \perp DM$; trong (DEN) hạ $OQ \perp NE$. Do S(O; R) tiếp xúc (ABC) và (AA_1C_1C). Ta có OP = PQ = R.

Trong ΔDOP vuông có $DO = \dfrac{OP}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin\alpha}$

Trong ΔOEQ vuông có $OE = \dfrac{OQ}{\sin\beta} = \dfrac{R}{\sin\beta}$

Mặt khác : $DO + OE = DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{4\sin\alpha} \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{3}\sin\beta}{4(\sin\alpha + \sin\beta)}$ ■

BT12. Cho tứ diện S.ABC có các cạnh bên SA = SB = SC = d và $\widehat{ASB} = 120^0$, $\widehat{BSC} = 60^0$, $\widehat{ASC} = 90^0$.

a) Chứng minh ΔABC vuông.

b) Tính thể tích của tứ diện S.ABC theo d.

c) Tính bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện S.ABC.

a) • Gọi I là trung điểm AB.

Do ΔSBA cân tại S $\Rightarrow SI \perp BA$ và $\widehat{BSI} = \dfrac{1}{2}\widehat{BSC} = 60^0$

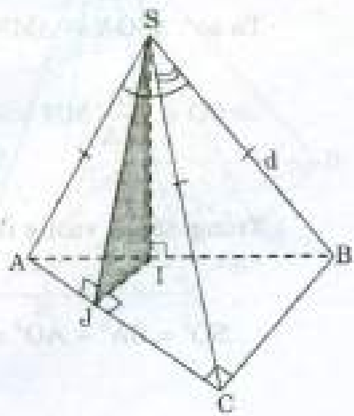
Vậy $\sin 60^0 = \dfrac{IB}{SB} \Rightarrow BA = 2IB = 2d\dfrac{\sqrt{3}}{2} = d\sqrt{3}$

• ΔSAC vuông cân $\Rightarrow AC = SA\sqrt{2} = d\sqrt{2}$

• ΔSBC cân có $\widehat{BSC} = 60^0$ nên là tam giác đều $\Rightarrow BC = d$.

Do đó $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 3d^2$.

Vậy ΔABC vuông tại C.



b) Gọi J là trung điểm AC.

Do ΔSAC vuông cân nên $SJ \perp AC$.

Mặt khác IJ // BC mà $BC \perp CA$ nên $IJ \perp AC$.

Do đó : $AC \perp mp(SIJ) \Rightarrow AC \perp SI$

Mà $SI \perp AB$ nên $SI \perp mp(ABC)$.

Do đó : $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SI.dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{6}SI.CA.CB$

Mà $\Delta ASI \Rightarrow \cos 60^0 = \dfrac{SI}{SA} \Rightarrow SI = \dfrac{d}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{d}{2}.d\sqrt{2}.d = \dfrac{d^3\sqrt{2}}{12}$.

c) Ta có : $S_{tp} = dt(\Delta SAB) + dt(SAC) + dt(SBC) + dt(\Delta ABC)$

$$\Rightarrow S_{tp} = \frac{1}{2}SI.AB + \frac{1}{2}SA.SC + \frac{1}{2}SB.SC.\sin 60^0 + \frac{1}{2}CA.CB$$

$$\Rightarrow S_{tp} = \frac{d}{4}.d\sqrt{3} + \frac{d^2}{2} + \frac{1}{2}d^2.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}d^2\sqrt{2} = \frac{d^2}{4}(2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{2})$$

Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện S.ABC.

$$\text{Ta có : } V = \frac{1}{3}S_{tp}.r \Rightarrow r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{\dfrac{d^3\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{d^2}{4}(2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2)} = \frac{d\sqrt{2}}{2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)} \blacksquare$$

BT13. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có $\widehat{BSC} = \alpha$, khoảng cách giữa SA và BC là d.

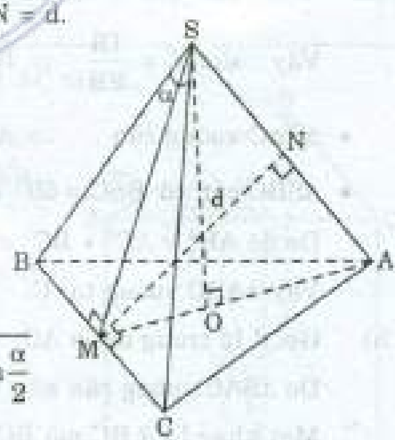
a) Tính thể tích khối chóp S.ABC.

b) Tính thể tích của khối cầu nội tiếp khối chóp đó.

a) Gọi M là trung điểm của BC. Trong ΔSMA kẻ $MN \perp SA$.

Vì $BC \perp SM$ và $BC \perp AM$ nên $BC \perp MN$. Do đó MN chính là đường vuông góc chung giữa SA và BC. Vậy MN = d.

Gọi độ dài của cạnh đáy là x.



ΔSBM vuông $\Rightarrow SB = \dfrac{MB}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{x}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

Ta có : $\Delta SOA \backsim \Delta MNA \Rightarrow \dfrac{SO}{MN} = \dfrac{SA}{MA}$

$$\Rightarrow SO = \frac{SA}{MA}.MN = \frac{x.d}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}.\dfrac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{d}{\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

Trong ΔSOA vuông có :

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = \frac{x^2\left(3 - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}{12\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}SO^2 = \frac{4d^2}{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Vậy : $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO.dt(\Delta ABC) = \frac{d^3}{3\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$.

b) Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp.

Ta có : $S_{tp} = \frac{d^2\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{3}\cot\frac{\alpha}{2}\right)}{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}r.S_{tp} \Rightarrow r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{d}{\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \sqrt{3}\cot\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow V_{\text{khối cầu}} = \frac{1}{3}\pi r^3 \quad \blacksquare$$

BT14. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Lấy S là điểm bất kì trên đường thẳng At vuông góc mp (P) tại A.

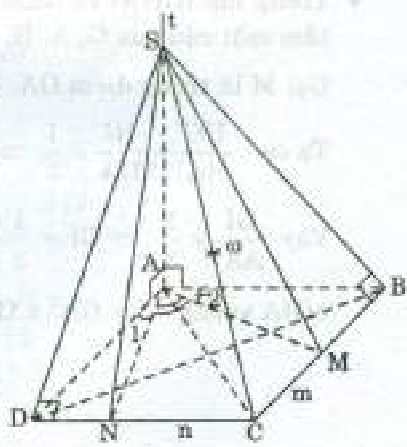
a) Tính theo a thể tích hình cầu ngoại tiếp chóp S.ABCD khi SA = 2a.

b) Cho M và N di động trên CB và CD với CM = m, CN = n. Tìm mối liên hệ giữa m, n để hai mặt phẳng (SAM), (SAN) tạo với nhau một góc 45^0.

a) Ta có : $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 1v$

Vậy A, B, D ∈ mặt cầu đường kính SC ⇒ Tâm ω của mặt cầu (S.ABCD) là trung điểm SC và $R = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $V = 4\pi R^3 = 4\pi.\frac{6a^3\sqrt{6}}{8} = 3\sqrt{6}a^3\pi$.



b) Do SA ⊥ AN và AM nên $\widehat{NAM} = \varphi$ là góc phẳng nhị diện (SAM, SAN).

Ta có : $\tan\hat{A}_1 = \frac{DN}{AD} = \frac{a - n}{a}$

$\tan\hat{A}_2 = \frac{MD}{AB} = \frac{a - m}{a}$

Do $\widehat{NAM} = 45^0 \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 45^0$

$\Rightarrow \tan(A_1 + A_2) = 1$

$$\Rightarrow \frac{\tan A_1 + \tan A_2}{1 - \tan A_1 \tan A_2} = 1$$

$\Rightarrow \tan A_1 + \tan A_2 + \tan A_1.\tan A_2 = 1$

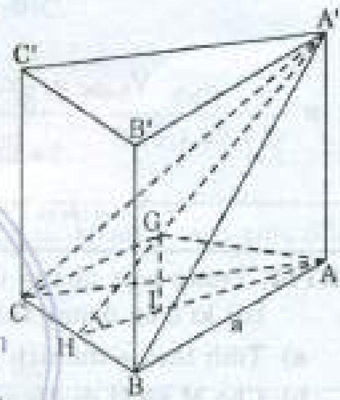
$$\Rightarrow \frac{a-n}{a} + \frac{a-m}{a} + \frac{(a-n)(a-m)}{a^2} = 1$$

$\Rightarrow a(a-n) + a(a-m) + a^2 - am - an + nm = a^2$

$\Rightarrow 2a^2 - 2a(n+m) + mn = 0$ ■

BT15. *Tuyển sinh Đại học khối B 2010*

Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc của hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm ΔA'BC. Tính thể tích lăng trụ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện G.ABC.



- Gọi H là trung điểm BC

ΔABC đều $\Rightarrow AH \perp BC$

Mà AA' ⊥ mp (ABC) ⇒ A'H ⊥ BC

Vậy $\widehat{A'HA} = 60^0$

ΔA'AH vuông $\Rightarrow \tan 60^0 = \frac{AA'}{AH} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$$

và $\cos 60^0 = \frac{AH}{A'H} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'H = 2AH = a\sqrt{3}$

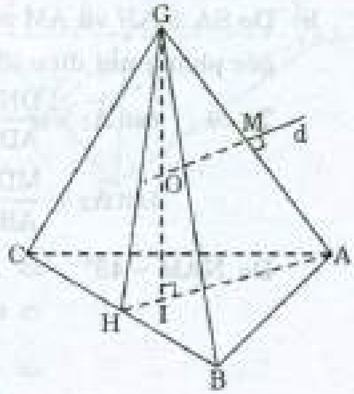
Do đó $V_{LT} = AA'.dt(\Delta ABC) = \frac{3a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

- Trong mp (GHA) vẽ đường trung trực (d) của GA cắt GI tại O thì O là tâm mặt cầu qua G, A, B, C.

Gọi M là trung điểm GA, I là tâm của tam giác đều ABC

Ta có : $\frac{HG}{HA'} = \frac{HI}{HA} = \frac{1}{3} \Rightarrow GI \,//\, AA'$

Vậy $\frac{GI}{AA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow GI = \frac{1}{3}.\frac{3a}{2} = \frac{a}{2}$



ΔGIA vuông $\Rightarrow GA^2 = GI^2 + IA^2$

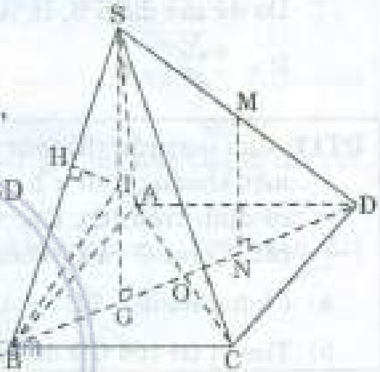
$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{9} = \frac{21a^2}{36}$$

$\Delta GMO \backsim \Delta GIA \Rightarrow \dfrac{GM}{GI} = \dfrac{GO}{GA} \Rightarrow GM.GA = GO.GI$

$$\Rightarrow R = GO = \frac{GM.GA}{GI} = \frac{GA^2}{2GI} = \frac{\frac{21a^2}{36}}{2.\frac{a}{2}} = \frac{21a}{36} = \frac{7a}{12} \quad ■$$

BT16. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$, SA = SB = SC = a. Gọi M là trung điểm của SD, N là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối S.ABCD. Chứng minh sáu điểm S, B, A, C, M, N cùng thuộc một mặt cầu.



- ΔABC có AB = BC = a và $\widehat{ABC} = 60^0$ nên ΔABC là tam giác đều.

  Gọi G là tâm của ΔABC, do SA = SB = SC, GA = GB = GC nên $SG \perp (ABCD)$

  Do $MN \perp (ABCD)$ nên MN // SG và $N \in BD$

  Ta có ΔSBG vuông nên

  $SG^2 = SB^2 - BG^2$

  $= a^2 - \left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{2a^2}{3}$

  Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SG.dt(ABCD) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

- Gọi I là tâm mặt cầu qua S, A, B, C thì $I \in SG$ là trục đường tròn (ABC)

  Ta có : IS = IB = R $\Rightarrow \Delta ISB$ cân

  Gọi H là trung điểm của SB thì $IH \perp SB$

  Ta có : $\mathscr{P}_{S/(IHBG)} = SI.SG = SH.SB$

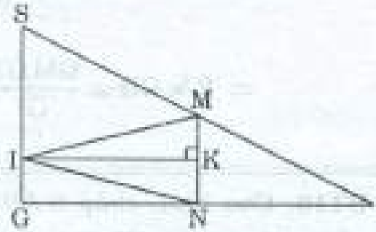
  $$\Rightarrow R = SI = \frac{SH.SB}{SG} = \frac{SB^2}{2SG} = \frac{a^2}{2.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

  Ta có : $IG = SG - SI = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} - \dfrac{a\sqrt{6}}{4} = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$

  $$NG = OG + ON = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

  ΔIGN vuông $\Rightarrow IN^2 = IG^2 + GN^2 = \dfrac{6a^2}{144} + \dfrac{3a^2}{9} = \dfrac{a^2}{24} + \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{3a^2}{8}$

$\Rightarrow IN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4} = R \quad \Rightarrow N \in$ mặt cầu qua SABC



Ta có : $IG = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$, $SG = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow IG = \dfrac{1}{4}SG$ mà $MN = \dfrac{1}{2}SG$

$\Rightarrow MN = 2IG$

Gọi K là trung điểm của MN. Do IGNK là hình chữ nhật nên $IK \perp MN$. Vậy $IM = IN = R$.

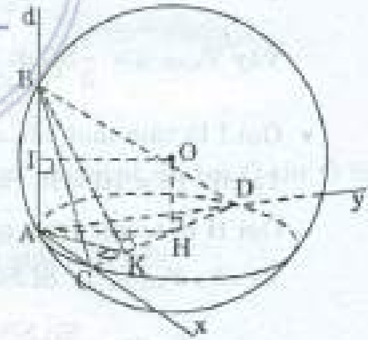
Do đó sáu điểm S, B, A, C, M, N cùng nằm trên mặt cầu tâm I, bán kính $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ ■

BT17. Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính R. Mặt phẳng (P) cách tâm mặt cầu một khoảng h ($0 < h < R$) cắt mặt cầu theo đường tròn (C). Lấy điểm A cố định trên (C). Góc vuông xAy quay quanh A trên mp (P), Ax và Ay cắt (C) tại C và D. Đường thẳng d vuông góc mp (P) tại A cắt (S) tại B.

a) Chứng minh : $BC^2 + AD^2$ và $BD^2 + AC^2$ là không đổi.

b) Tìm vị trí của CD để diện tích ΔBCD lớn nhất.

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mp (P) thì H là tâm của (C) và $OH = h$.



Ta có : $\widehat{CAD} = 1v$ nên CD là đường kính của (C).

ΔACD vuông $\Rightarrow AD^2 + AC^2 = CD^2$ (1)

ΔBAC vuông $\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$ (2)

ΔABD vuông $\Rightarrow BA^2 + AD^2 = BD^2$ (3)

Từ (1) và (2), ta có :

$$BC^2 + AD^2 = (AB^2 + AC^2) + (CD^2 - AC^2) = AB^2 + CD^2$$

Gọi I là trung điểm AB. Ta có $OI \perp AB$.

OIAH là hình chữ nhật nên : $AB = 2AI = 2OH = 2h$

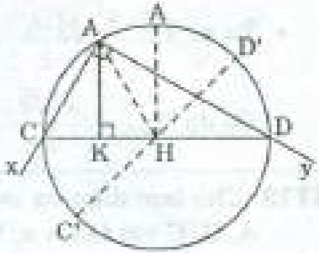
ΔACD vuông $\Rightarrow CD = 2AH$

Do đó : $BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 = 4(OH^2 + AH^2) = 4OA^2 = 4R^2$ (hằng số)

Từ (2) và (3) : $BD^2 + AC^2 = (AB^2 + AD^2) + (BC^2 - AB^2)$

$= AD^2 + BC^2 = 4R^2$ (hằng số)

b) Vẽ $AK \perp CD$ thì $BK \perp CD$



Ta có : $dt(\Delta BCD) = \frac{1}{2}BK.CD = \frac{BK}{2}(2AH)$

$= BK.\sqrt{OA^2 - OH^2}$

$= BK\sqrt{R^2 - h^2}$

Do đó : $dt(\Delta BCD)$ max $\Leftrightarrow$ BK max

$\Leftrightarrow$ AK max $\Leftrightarrow K \equiv H \Leftrightarrow CD \perp AH$ ■

BT18. Cho tứ diện S.ABC có SA vuông góc đáy (ABC), nhị diện cạnh SB là nhị diện vuông. Biết $SB = a\sqrt{2}$, góc $BSC = 45^0$, $\widehat{ASB} = \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

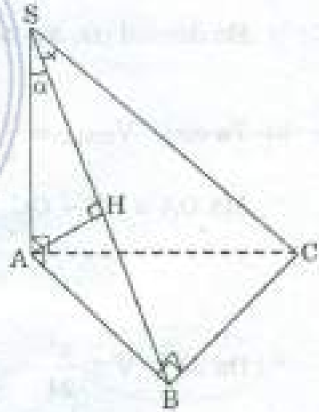
a) Chứng minh BC vuông góc SB. Từ đó xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC.

b) Tính thể tích tứ diện S.ABC theo a, α. Với giá trị nào của α thì thể tích đó lớn nhất ?

a) • Từ A vẽ AH vuông góc SB. Do mp (ASB) vuông góc mp (SBC) nên AH vuông góc mp (SBC) $\Rightarrow AH \perp BC$.

Ta có : $BC \perp AH$ và SA $\Rightarrow BC \perp$ mp (SAB)

$\Rightarrow BC \perp SB$



• $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 1v \Rightarrow$ A và B nhìn SC dưới một góc vuông nên cùng nằm trên mặt cầu đường kính SC. Tâm O là trung điểm SC.

ΔSBC vuông cân $\Rightarrow SC = SB\sqrt{2} = 2a$

Vậy $R = \frac{SC}{2} = a$.

b) ΔSAB vuông $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{SA}{SB} \Rightarrow SA = SB\cos\alpha = a\sqrt{2}\cos\alpha$

và $\sin\alpha = \frac{AB}{SB} \Rightarrow AB = SB\sin\alpha = a\sqrt{2}\sin\alpha$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.dt(\Delta ABC) = \frac{1}{6}SA.AB.BC$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}(a\sqrt{2}\cos\alpha)(a\sqrt{2}\sin\alpha)(a\sqrt{2})$

$V_{S.ABC} = \frac{2}{6}a^3\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}\sin2\alpha = V$

- Ta có $V \le \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Do đó $V_{max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ■

BT19. Cho tam diện ba mặt vuông Oxyz. Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy A, B, C với OA = a, OB = b, OC = c.

a) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC).

b) Giả sử A cố định còn B, C thay đổi luôn thỏa OB + OC = OA. Hãy xác định B, C sao cho thể tích tứ diện OABC lớn nhất. Chứng minh rằng khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện O.ABC nhỏ nhất.

a) Vẽ $OK \perp AB$ thì $AB \perp$ mp (OCK)

Vẽ $OH \perp CK$ thì $OH \perp$ mp (ABC)

ΔOAB vuông $\Rightarrow \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

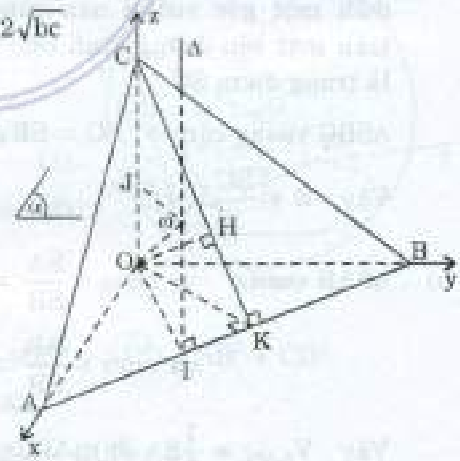
ΔOCK vuông $\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Do đó : $d(O, mp(ABC)) = OH = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2}}$.

b) Ta có : $V_{O.ABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{abc}{6} = V$

Mà OA = OB + OC $\Rightarrow a = b + c \ge 2\sqrt{bc}$

$\Rightarrow bc \le \frac{a^2}{4}$



Do đó : $V \le \frac{a^3}{24}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + c \\ b = c \end{cases}$

$\Leftrightarrow b = c = \frac{a}{2}$

Vậy $V_{O.ABC}$ max $\Leftrightarrow b = c = \frac{a}{2}$.

- Gọi I trung điểm AB, qua I vẽ đường thẳng Δ // OC.

Mặt phẳng trung trực của OC cắt (Δ) tại ω.

Do $OJ\omega I$ là hình chữ nhật nên $\omega I = OJ = \frac{c}{2}$

$\Delta\omega OI$ vuông $\Rightarrow R^2 = \omega O^2 = \omega I^2 + OI^2 = \dfrac{c^2}{4} + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}$

Do bất đẳng thức Bunhiacopski :

$$a = |1b + 1c| \le \sqrt{2}\sqrt{b^2+c^2} \Rightarrow b^2 + c^2 \ge \frac{a^2}{2}$$

Do đó : $R^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2+c^2}{4} \ge \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{3a^2}{8}$ (hằng số)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{1} = \dfrac{c}{1} \\ a = b + c \end{cases} \Leftrightarrow b = c = \dfrac{a}{2}$

Do đó $R_{min} \Leftrightarrow b = c = \dfrac{a}{2}$ ■

BT20. Cho hình nón cụt, bán kính đáy lớn và bán kính đáy nhỏ là R và r ($r < R$), đường sinh của nón cụt là $l = R + r$.

a) Tính thể tích V và diện tích xung quanh S_1 của hình nón cụt.

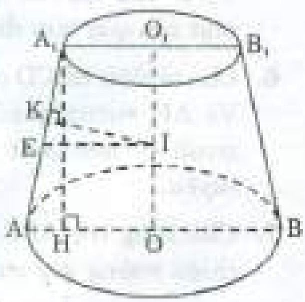
b) Tính bán kính mặt cầu nội tiếp trong hình nón cụt.

c) Tính diện tích S_2 của mặt cầu nội tiếp nón cụt. Chứng minh rằng tỉ số $k = \dfrac{S_2}{S_1} < 1$.

a) Vẽ $A_1H \perp AB$.

ΔAA_1H vuông $\Rightarrow A_1H^2 = AA_1^2 - AH^2$

$$\Rightarrow A_1H = h = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$



Thể tích hình nón cụt :

$$V = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'}) = \frac{h\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

Diện tích xung quanh hình nón cụt :

$$S_1 = \pi(R + r)l = \pi(R + r)^2.$$

b) Từ trung điểm I của OO_1, hạ $IK \perp AA_1$.

Vẽ IE // OA.

$\Delta HA_1A \backsim \Delta KIA \Rightarrow \dfrac{KI}{HA_1} = \dfrac{IE}{A_1A} = \dfrac{R+r}{2(R+r)} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow KI = \frac{1}{2}HA_1 = \sqrt{Rr}$$

Do đó nội tiếp trong hình nón cụt một hình cầu tâm I, bán kính $\sqrt{Rr}$.

c) Ta có : $S_2 = 4\pi(\sqrt{Rr}) = 4\pi Rr$

Vậy : $k = \dfrac{S_2}{S_1} = \left(\dfrac{2\sqrt{Rr}}{R+r}\right)^2 < 1$

Do bất đẳng thức Cauchy : $R + r > 2\sqrt{Rr} \Leftrightarrow 1 > \dfrac{2\sqrt{Rr}}{R+r}$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy a. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trong các trường hợp sau :

a) Cạnh bên tạo với đáy góc 30^0. b) Mặt bên tạo với đáy góc 60^0.

2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy a. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trong các trường hợp sau :

a) Cạnh bên tạo với đáy góc 30^0. b) Mặt bên tạo với đáy góc 60^0.

3. Cho tứ diện ABCD có AB = BC = AC = BD = a, AD = b, mp (ACD) vuông góc mp (BCD).

a) Chứng minh ΔACD vuông.

b) Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 2a. SA vuông góc mp (ABCD), SA = a. Gọi E là trung điểm của AD. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.CDE.

5. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh đều bằng a. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Chứng minh có một mặt cầu qua tám điểm A, B, C, D, A', B', C', D'. Tính thể tích khối cầu đó.

6. Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc mp (ABC), AD = BC = 5, AC = BD = 12. Vẽ AH vuông góc BD, AK vuông góc CD, HK cắt (ABC) tại E. Chứng minh có một mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ABCHK nhận EA là tiếp tuyến.

7. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, tâm O. Hình chiếu vuông góc của A' lên mp (ABC) là O. Cạnh bên tạo với đáy góc α mà $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Chứng minh A'.ABC là tứ diện đều. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp A'.ABC.

8. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 2. Gọi M là trung điểm của AD, N là tâm hình vuông CC'D'D. Tính thể tích khối cầu qua các điểm B, C', M, N.

9. Tìm hình trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong một hình cầu bán kính R cho trước.

10. Tìm hình nón có thể tích lớn nhất, nhỏ nhất nội tiếp trong mặt cầu có bán kính R cho trước.

11. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh 4a. Góc của hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) là 30^0. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ.

12. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R nằm trong mp (P). Gọi N là điểm đối xứng của O qua A. Lấy M sao cho MN vuông góc mp (P) và MN = 2R. Gọi (S) là mặt cầu qua M và đường tròn (O).

a) Xác định tâm I của mặt cầu (S).

b) Từ I kẻ IK vuông góc MN ($K \in MN$). Chứng minh :

$$IK^2 + KM^2 = IO^2 + OA^2.$$

c) Tính IO và thể tích khối cầu (S).

MỤC LỤC

NS. HỒNG ÂN
www.nhasachhongan.com.vn
Email: baolongco_ha@vnn.vn
18D Nguyễn Thị Minh Khai - Q.1 - TP.HCM
ĐT: 38246706 - 08083021 - 39107095 • Fax: 08083017
Diễn đàn của tri thức

Mời bạn tìm đọc:

Phát hành tại:
- 29&31 Phan Bội Châu - Hải Phòng *ĐT: (0313) 839599
- 04 Lý Thái Tổ - TP. Đà Nẵng *ĐT: 0511.3823421
- 259 Lê Duẩn - TP. Vinh - ĐT: 0383.554777
- 94 Xô Viết Nghệ Tĩnh - Cần Thơ - ĐT: (0710) 3818891
- 158 Tỉnh lộ 8 - TT.Củ Chi - TP.HCM *ĐT: (08) 37924216

8 935092 74917

Giá: 50.000đ