HOÀNG THẠCH

GIẢI CHI TIẾT CÁC BÀI TOÁN VẬN DỤNG ĐIỂM 8 - 9 - 10 TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ MÔN TOÁN

THPT QUỐC GIA

TỦ SÁCH LUYỆN THI

BÀI TOÁN VẬN DỤNG (8 - 9 - 10)

Chủ đề 1. KHẢO SÁT HÀM SỐ & ỨNG DỤNG

Câu 1: (SGD VĨNH PHÚC)Cho hàm số $y=|x|^3-mx+5$, m là tham số. Hỏi hàm số đã cho có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y=\sqrt{x^6}-mx+5$

Suy ra: $y'=\dfrac{3x^5}{|x|^3}-m=\dfrac{3x^5-m|x|^3}{|x|^3}$ và hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

TH1: $m=0$. Ta có: $y'=\dfrac{5x^5}{|x|^3}=0$ vô nghiệm và hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

TH2: $m>0$. Ta có: $y'=0\Leftrightarrow 3x^5=m|x|^3\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\3x^5=mx^3\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt{\dfrac{m}{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

TH3: $m<0$. Ta có: $y'=0\Leftrightarrow 3x^5=m|x|^3\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\3x^5=-mx^3\end{cases}\Leftrightarrow x=-\sqrt{-\dfrac{m}{3}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{m}{3}}$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Do đó hàm số có đúng một cực trị.

Vậy trong mọi trường hợp hàm số có đúng một cực trị với mọi tham số m

Chú ý: Thay vì trường hợp 2 ta xét $m>0$, ta có thể chọn m là một số dương (như $m=3$) để làm. Tương tự ở trường hợp 3, ta chọn $m=-3$ để làm sẽ cho lời giải nhanh hơn.

Câu 2: (SGD VĨNH PHÚC) Cho hàm số $y=\dfrac{2x+2017}{|x|+1}$ (1). Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số (1) không có tiệm cận ngang và có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

B. Đồ thị hàm số (1) có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-2, y=2$ và không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số (1) có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$ và không có tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số (1) không có tiệm cận ngang và có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-1, x=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hàm số $y=\dfrac{2x+2017}{|x|+1}$ (1) có tập xác định là $\mathbb{R}$, nên đồ thị không có tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+2017}{|x|+1}=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+2017}{|x|+1}=-2$, nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-2, y=2$.

Câu 3: (SGD VĨNH PHÚC) Tìm tất cả m sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-1$ nằm bên phải trục tung.

A. Không tồn tại m. **B.** $0<m<\dfrac{1}{3}$. **C.** $m<\dfrac{1}{3}$. **D.** $m<0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Để hàm số có cực tiểu, tức hàm số có hai cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $3x^2+2x+m=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Delta'=1-3m>0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{3}$.

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt x_{CD}, x_{CT} là hoành độ hai điểm cực trị. Theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_{CD}+x_{CT}=-\frac{2}{3}<0 \ (2) \\ x_{CD}.x_{CT}=\frac{m}{3} \ (3) \end{cases}$, trong đó $x_{CD}<x_{CT}$ vì hệ số của x^3 lớn hơn 0.

Để cực tiểu của đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung thì phải có: $x_{CT}>0$, kết hợp (2) và (3) suy ra (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow x_{CD}.x_{CT}=\frac{m}{3}<0 \Leftrightarrow m<0$.

Câu 4: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Phương trình $x^3+x(x+1)=m(x^2+1)^2$ có nghiệm thực khi và chỉ khi:

A. $-6\le m\le -\frac{3}{2}$. **B.** $-1\le m\le 3$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $-\frac{1}{4}\le m\le \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Sử dụng máy tính bỏ túi.

$x^3+x(x+1)=m(x^2+1)^2 \Leftrightarrow mx^4-x^3+(2m-1)x^2-x+m=0$

Chọn $m=3$ phương trình trở thành $3x^4-x^3+5x^2-x+3=0$ (không có nghiệm thực) nên loại đáp án B, C.

Chọn $m=-6$ phương trình trở thành $-6x^4-x^3-13x^2-x-6=0$ (không có nghiệm thực) nên loại đáp án A.

Kiểm tra với $m=0$ phương trình trở thành $-x^3-x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0$ nên chọn đáp án D.

Tự luận

Ta có $x^3+x(x+1)=m(x^2+1)^2 \Leftrightarrow m=\frac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$ (1)

Xét hàm số $y=\frac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{\left(x^3+x^2+x\right)'\left(x^4+2x^2+1\right)-\left(x^3+x^2+x\right)\left(x^4+2x^2+1\right)'}{\left(x^4+2x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(3x^2+2x+1\right)\left(x^4+2x^2+1\right)-\left(x^3+x^2+x\right)\left(4x^3+4x\right)}{\left(x^4+2x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{-x^6-2x^5-x^4+x^2+2x+1}{\left(x^4+2x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(-x^4+1\right)\left(x^2+2x+1\right)}{\left(x^4+2x^2+1\right)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left(-x^4+1\right)\left(x^2+2x+1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow$	0

Phương trình (1) có nghiệm thực khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^3+x^2+x}{x^4+2x^2+1}$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{4} \le m \le \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án D.

Câu 5: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{3+9^x}$, $x \in R$. Nếu $a+b=3$ thì $f(a)+f(b-2)$ có giá trị bằng

A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $b-2=1-a$

$$f(a) = \frac{9^a}{3+9^a};\ f(b-2) = f(1-a) = \frac{9^{1-a}}{3+9^{1-a}} = \frac{3}{3+9^a}$$

$\Rightarrow f\left(a\right)+f\left(b-2\right)=\dfrac{9^a}{3+9^a}+\dfrac{3}{3+9^a}=1$

Câu 6: (T.T DIỆU HIỀN) Với giá trị nào của m thì hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m-2$ nằm về hai phía so với trục hoành?

A. $m>3$. **B.** $-1<m<\sqrt{2}$. **C.** $m<3$. **D.** $2<m<3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y'=3x^2+6x+m$.

Hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu nên phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $\Delta'=9-3m>0\Leftrightarrow m<3$.

Gọi x_1, x_2 là điểm cực trị của hàm số và y_1, y_2 là các giá trị cực trị tương ứng.

Ta có: $y=x^3+3x^2+mx+m-2=y'.\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{2}{3}m-2\right)x+\dfrac{2}{3}m-2$ nên $y_1=k\left(x_1+1\right)$, $y_2=k\left(x_2+1\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y_1.y_2<0\Leftrightarrow k^2\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)<0\Leftrightarrow x_1x_2+x_1+x_2+1<0\Leftrightarrow \dfrac{m}{3}-2+1<0\Leftrightarrow m<3$.

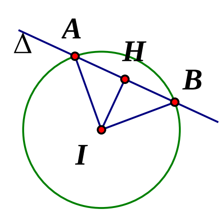
Vậy $m<3$ thỏa mãn bài toán.

Câu 7: (TRẦN HƯNG ĐẠO – NB) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I\left(1;1\right)$, bán kính bằng 1 tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có $y'=3x^2-3m$ nên $y'=0\Leftrightarrow x^2=m$.

Đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m>0$.

Ta có $y=x^3-3mx+2=\dfrac{1}{3}x\left(3x^2-3m\right)-2mx+2=\dfrac{1}{3}x.y'-2mx+2$.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ có phương trình $\Delta: y=-2mx+2$

Ta có: $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}.IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\dfrac{1}{2}\sin\widehat{AIB}\le\dfrac{1}{2}$

Diện tích tam giác IAB lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi $\sin\widehat{AIB}=1 \Leftrightarrow AI \perp BI$.

Gọi H là trung điểm AB ta có: $IH=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}=d_{(I,\Delta)}$

Mà $d_{(I,\Delta)}=\frac{|2m+1-2|}{\sqrt{4m^2+1}}$

Suy ra: $d_{(I,\Delta)}=\frac{|2m+1-2|}{\sqrt{4m^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |4m-2|=\sqrt{2\left(4m^2+1\right)} \Leftrightarrow 8m^2-16m+2=0 \Leftrightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: (TRẦN HƯNG ĐẠO – NB) Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $y=x+m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $m=4\pm\sqrt{10}$. **B.** $m=4\pm\sqrt{3}$. **C.** $m=2\pm\sqrt{3}$. **D.** $m=2\pm\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hoành độ giao điểm là nghiệm PT: $\frac{2x+1}{x+1}=x+m-1 \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right)=x^2+\left(m-2\right)x+m-2=0 \\ x\neq -1 \end{cases}$.

Đường thẳng $y=x+m-1$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1, hay

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ f\left(-1\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-8m+12>0 \\ 1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<2 \\ m>6 \end{array}\right. \ (*).$$

Khi đó, gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2-m \\ x_1x_2=m-2 \end{cases}$ (Viète).

Giả sử $A\left(x_1;x_1+m-1\right),B\left(x_2;x_2+m-1\right) \Rightarrow AB=\sqrt{2}\left|x_2-x_1\right|$.

Theo giả thiết $AB=2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{2}\left|x_2-x_1\right|=2\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=6 \Leftrightarrow m^2-8m+6=0$

$$\Leftrightarrow m=4\pm\sqrt{10}$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $m=4\pm\sqrt{10}$.

Câu 9: (LẠNG GIANG SỐ 1) Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy\le 4y-1$.Giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{6\left(2x+y\right)}{x}+\ln\frac{x+2y}{y}$ là $a+\ln b$. Giá trị của tích ab là

A. 45. **B.** 81. **C.** 108. **D.** 115.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

x,y dương ta có: $xy \le 4y-1 \Leftrightarrow xy+1 \le 4y \le 4y^2+1 \Leftrightarrow 0<\frac{x}{y}\le 4$.

Có $P=12+6\frac{y}{x}+\ln\left(\frac{x}{y}+2\right)$.

Đặt $t=\frac{x}{y}$, điều kiện: $0<t\le 4$ thì

$$P=f\left(t\right)=12+\frac{6}{t}+\ln\left(t+2\right)$$

$$f'\left(t\right)=-\frac{6}{t^2}+\frac{1}{t+2}=\frac{t^2-6t-12}{t^2\left(t+2\right)}$$

$$f'\left(t\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3+\sqrt{21} \\ t=3-\sqrt{21} \end{array}\right.$$

t	0	4
$f'\left(t\right)$ −	||	
$P=f\left(t\right)$ $\frac{27}{2}+\ln 6$	||	

Từ BBT suy ra $GTNN\left(P\right)=\frac{27}{2}+\ln 6$ khi $t=4$

$\Rightarrow a=\frac{27}{2}, b=6 \Rightarrow ab=81.$

Câu 10: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Cho hàm số $y=\frac{ax^2+x-1}{4x^2+bx+9}$ có đồ thị $\left(C\right)$ (a,b là các hằng số dương, $ab=4$). Biết rằng $\left(C\right)$ có tiệm cận ngang $y=c$ và có đúng 1 tiệm cận đứng. Tính tổng $T=3a+b-24c$

A. $T=1$. **B.** $T=4$. **C.** $T=7$. **D.** $T=11$.

Hướng dẫn giải

Chọn **D.**

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\frac{a}{4}$. Tiệm cận ngang $y=c\Rightarrow\frac{a}{4}=c$.

(C) có một tiệm cận đứng nên phương trình $4x^2+bx+9=0$ có nghiệm kép. $\Delta=0\Leftrightarrow b^2-144=0\Leftrightarrow b=\pm12$. Vì $b>0\Rightarrow b=12\Rightarrow a=\frac{1}{3}\Rightarrow c=\frac{1}{12}$.

Vậy $T=11$.

Câu 11: (NGÔ GIA TỰ - VP) Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+2017$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ sao cho $b-a>3$ là

A. $m>6$. **B.** $m=9$. **C.** $m<0$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\m>6\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$

Hàm số nghịch biến trên $(a;b)\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)\le0\,\forall x\in(a;b)$

$\Delta=m^2-6m+9$

TH1: $\Delta\le0\Rightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)\ge0\quad\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Vô lí

TH2: $\Delta>0\Leftrightarrow m\ne3\Rightarrow y'$ có hai nghiệm $x_1,x_2\,(x_2>x_1)$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên $(x_1;x_2)$.

Yêu cầu đề bài:

$\Leftrightarrow x_2-x_1>3\Leftrightarrow(x_2-x_1)^2>9\Leftrightarrow S^2-4P>9$

$\Leftrightarrow(m-1)^2-4(m-2)>9\Leftrightarrow m^2-6m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>6\\m<0\end{array}\right.$

Câu 12: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=2^{x^3-x^2+mx}$ đồng biến trên $[1,2]$.

A. $m>\frac{1}{3}$. **B.** $m\ge\frac{1}{3}$. **C.** $m\ge-1$. **D.** $m>-8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y'=(3x^2-2x+m)2^{x^3-x^2+mx}\ln2$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1,2]\Leftrightarrow y'\ge0,\,\forall x\in[1,2]\Leftrightarrow3x^2-2x+m\ge0,\,\forall x\in[1,2]$ (*)

Vì $f(x)=3x^2-2x+m$ có $a=3>0,\ -\frac{b}{2a}=\frac{1}{3}<2$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta' \le 0\\ \begin{cases}\Delta' > 0\\ \dfrac{x_1+x_2}{2} < 1\\ (x_1-1)(x_2-1) \ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-3m \le 0\\ \begin{cases}1-3m > 0\\ \dfrac{1}{3} < 1\\ \dfrac{m}{3} - \dfrac{2}{3} + 1 \ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m \ge \dfrac{1}{3}\\ \begin{cases}m < \dfrac{1}{3}\\ m \ge -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge -1$$

Câu 13: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Biết đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;\frac{3}{2})$. **D.** $(\frac{3}{2};2)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng

$x^3-3x^2+1=(3m-1)x+6m+3 \Leftrightarrow x^3-3x^2-(3m-1)x-6m-2=0$.

Giả sử phương trình $x^3-3x^2-(3m-1)x-6m-2=0$ có ba nghiệm x_1,x_2,x_3 thỏa mãn

$x_2=\dfrac{x_1+x_3}{2}$ (1).

Mặt khác theo viet ta có $x_1+x_2+x_3=3$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $x_2=1$. Tức $x=1$ là một nghiệm của phương trình trên. Thay $x=1$ vào phương trình ta được $m=-\dfrac{1}{3}$.

Thử lại $m=-\dfrac{1}{3}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 14: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định: $D=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$

Tiệm cận đứng:

$\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x(x-1)}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x(x-1)}=-\infty$

Suy ra $x=1$ là tiệm cận đứng.

Tiệm cận ngang:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}+3+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}=3 \Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^4}}+3+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 3 \Rightarrow y=3 \text{ là tiệm cận ngang}$$

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

Câu 15: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho $f(x)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1).f(2).f(3)...f(2017)=e^{\frac{m}{n}}$ với m,n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m-n^2$.

A. $m-n^2=2018$. B. $m-n^2=-2018$. C. $m-n^2=1$. D. $m-n^2=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có : $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2+x+1)^2}{x^2(x+1)^2}} = \frac{x^2+x+1}{x^2+x} = 1+\frac{1}{x(x+1)} = 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

Suy ra : $f(1).f(2).f(3)...f(2017)=e^{\frac{m}{n}}$

$\Leftrightarrow f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)=\frac{m}{n}$ (lấy ln hai vế)

$\Leftrightarrow 2018-\frac{1}{2018}=\frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{2018^2-1}{2018}=\frac{m}{n}$

Ta chứng minh $\frac{2018^2-1}{2018}$ là phân số tối giản.

Giả sử d là ước chung của 2018^2-1 và 2018

Khi đó ta có $2018^2-1 \vdots d$, $2018 \vdots d \Rightarrow 2018^2 \vdots d$ suy ra $1 \vdots d \Leftrightarrow d=\pm 1$

Suy ra $\frac{2018^2-1}{2018}$ là phân số tối giản, nên $m=2018^2-1, n=2018$.

Vậy $m-n^2=-1$.

Câu 16: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GL) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\sin x+\cos x+mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$. B. $m\le-\sqrt{2}$. C. $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. D. $m\ge\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $y=\sin x+\cos x+mx$

$y'=\cos x-\sin x+m$

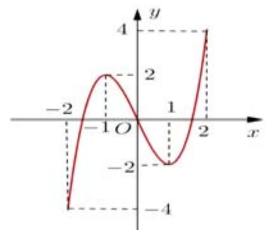
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}. \Leftrightarrow m\ge \sin x-\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m \ge \max\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)$, với $\varphi(x) = \sin x - \cos x$.

Ta có: $\varphi(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$.

Do đó: $\max\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) = \sqrt{2}$. Từ đó suy ra $m \ge \sqrt{2}$.

Câu 17: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GL) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Xác định giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có số nghiệm thực nhiều nhất.

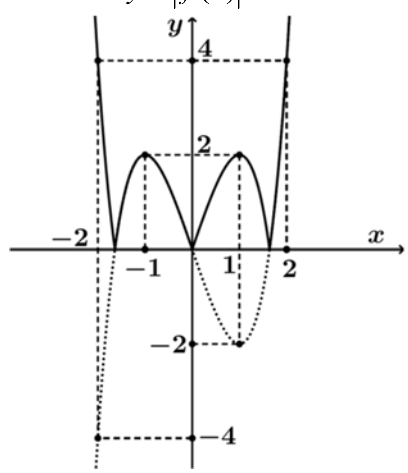


A. 3 . B. 6 . C. 4 . D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị ta có đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ là:



Từ đồ thị ta thấy rằng, với m thỏa $0 < m < 2$ thì phương trình $|f(x)| = m$ có số nghiệm nhiều nhất là 6.

Câu 18: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x}{x + m}$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì giá trị của m là:

A. $m \in \left(-\dfrac{1}{2};2\right] \setminus \{-1\}$. B. $m \in (-1;2] \setminus \{-1\}$. C. $m \in \left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. D. $m \in \left(-1;\dfrac{1}{2}\right]$.

Giải

Chọn D.

$y = \dfrac{x^2 - 4x}{x + m}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ và $y' = \dfrac{x^2 + 2mx - 4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 1 \\ x^2 + 2mx - 4m \ge 0, \forall x \in [1;+\infty) \end{cases}$

$x^2+2mx-4m\ge 0,\forall x\in[1;+\infty)\Leftrightarrow 2m(x-2)\ge -x^2,\forall x\in[1;+\infty)$ (1)

Do $x=2$ thỏa bất phương trình $2m(x-2)\ge -x^2$ với mọi m nên ta chỉ cần xét $x\ne 2$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}2m\le\dfrac{-x^2}{x-2},\forall x\in[1;2)\\ 2m\ge\dfrac{-x^2}{x-2},\forall x\in(2;+\infty)\end{cases}$ (2)

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2}{x-2}$ trên $[1;+\infty)\setminus\{2\}$ có $f'(x)=\dfrac{-x^2+4x}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		2		4		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$+\infty$

$YCBT\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\2m\le 1\\2m\ge -8\end{cases}\Leftrightarrow -1<m\le\dfrac{1}{2}$.

Cách khác

$y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$ và $y'=\dfrac{x^2+2mx-4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-m<1\\x^2+2mx-4m\ge 0,\forall x\in[1;+\infty)\end{cases}$

$$x^2+2mx-4m\ge 0,\forall x\in[1;+\infty)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta\le 0\\ \begin{cases}\Delta>0\\x_1<x_2\le 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2+4m\le 0\\ \begin{cases}m^2+4m>0\\-m+\sqrt{m^2+4m}\le 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4\le m\le 0\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>0\\m<-4\end{array}\right.\\m\ge -1\\m\le\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Kết hợp với đk $m>-1$ ta được $-1<m\le\dfrac{1}{2}$.

Câu 19: (CHUYÊN ĐHSP HN) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases}-8+4a-2b+c>0\\8+4a+2b+c<0\end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Chọn D.

Ta có hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên tồn tại số $M>2$ sao cho $y(M)>0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ nên tồn tại số $m<-2$ sao cho $y(m)<0$; $y(-2)=-8+4a-2b+c>0$ và $y(2)=8+4a+2b+c<0$.

Do $y(m).y(-2)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(m;-2)$.

$y(-2).y(2)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2;2)$.

$y(2).y(M)<0$ suy ra phương trình $y=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(2;M)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox có 3 điểm chung.

Câu 20: (CHUYÊN ĐHSP HN) Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận là

A. $\{0\}$. B. $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. $\varnothing$ D. $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$.

Chọn A.

Có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$. Nên hàm số luôn có 1 đường tiệm cận ngang $y=0$. Vậy ta tìm điều kiện để hàm số không có tiệm cận đứng .

Xét phương trình: $(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} mx^2-2x+1=0 & (1) \\ 4x^2+4mx+1=0 & (2) \end{array}\right.$

TH1: Xét $m=0$, ta được $y=\dfrac{2x-1}{(-2x+1)(4x^2+1)}=-\dfrac{1}{4x^2+1}$ (thỏa ycbt)

TH2: Xét $m\neq 0$. Có: $\Delta_1=1-m$ và $\Delta_2=4m^2-4$

Th2a. Cả 2 phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm: $\Leftrightarrow \begin{cases}1-m<0\\4m^2-4<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>1\\-1<m<1\end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$

Th2b: (1) vô nghiệm, (2) có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$: ta thấy trường hợp này vô lí (vì $m>1$)

Th2c: (2) vô nghiệm, (1) có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$: ta thấy trường hợp này vô lí (vì $-1<m<1$)

Câu 21: (NGÔ SĨ LIÊN) Trên đoạn $[-2;2]$, hàm số $y=\dfrac{mx}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ khi và chỉ khi

A. $m=2$. B. $m\geq 0$. C. $m=-2$. D. $m<0$.

Chọn B

Cách 1: Với $m=0$ thì $y=0$ nên $\max\limits_{[-2;2]} y=0$ khi $x=1$.

Với $m\neq 0$.

Đặt $x=\tan t$, ta được $y=\frac{m}{2}.\sin 2t$. Với $x\in\left[-2;2\right]$ thì $t\in\left[-\arctan 2;\arctan 2\right]$.

Hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ tương ứng với $t=\frac{\pi}{4}$.

Khi $m>0$ thì $\max\limits_{[-\arctan 2;\arctan 2]} y=\frac{m}{2}$ khi và chỉ khi $t=\frac{\pi}{4}$.

Khi $m<0$ thì $\max\limits_{[-\arctan 2;\arctan 2]} y=\frac{m}{2}$ khi và chỉ khi $t=-\frac{\pi}{4}$.

Vậy $m\geq 0$ thỏa mãn bài toán.

Cách 2: Ta có $y'=\frac{m\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$,

TH1: $m=0\Rightarrow y=0$ là hàm hằng nên cũng coi GTLN của nó bằng 0 khi $x=1$

TH2: $m\neq 0$. Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ (n)\\ x=1\quad (n)\end{array}\right.$

Vì hàm số đã cho liên tục và xác định nên ta có hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l}y(1)\geq y(-2)\\ \text{y}(1)\geq y(2)\\ y(1)\geq y(-1)\end{array}\right.\Leftrightarrow m\geq 0\Rightarrow m>0$ (do $m\neq 0$)

Vậy $m\geq 0$

Chú ý: Ngoài cách trên trong TH2 $m\neq 0$, ta có thể xét $m>0$, $m<0$ rồi lập BBT cũng tìm được kết quả như trên.

Câu 22: (SỞ GD BẮC NINH) Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left[5;\frac{23}{4}\right]$. **B.** $m\in\left[5;6\right]$. **C.** $m\in\left(5;\frac{23}{4}\right)\cup\{6\}$. **D.** $m\in\left[5;\frac{23}{4}\right)\cup\{6\}$.

Hướng dẫn giải

+) $\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{m+x-x^2}$ (1)

Điều kiện: $-1\leq x\leq 2$

$+)\,(1) \Leftrightarrow 3+2\sqrt{-x^2+x+2} = -x^2+x+m$

Đặt: $-x^2+x=t;\ f(x)=-x^2+x; f'(x)=-2x+1$

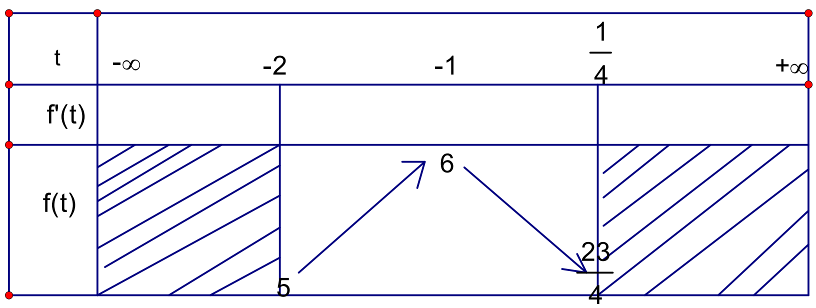
$f(-1)=2, f(2)=-2, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \Rightarrow t \in \left[-2;\frac{1}{4}\right]$

$(1) \Leftrightarrow 3+2\sqrt{t+2}=t+m \Leftrightarrow 2\sqrt{t+2}=t+m-3 \Leftrightarrow m=2\sqrt{t+2}+3-t$

Đặt $f(t)=2\sqrt{t+2}+3-t$

$f'(t)=\frac{1}{\sqrt{t+2}}-1=\frac{1-\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}}.\ f'(t)=0 \Rightarrow 1-\sqrt{t-2}=0 \Leftrightarrow t=-1$

Bảng biến thiên



$+)\,-x^2+x=t \Leftrightarrow -x^2+x-t=0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1-4t>0 \Leftrightarrow t \le \frac{1}{4}$

Do đó để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(*)$ có nghiệm $t \in \left[-2;\frac{1}{4}\right]$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow m \in [5;6]$.

Chọn B

Câu 23: **(CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3)**Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+4x+2017$. Định m để phương trình $y'=m^2-m$ có đúng hai ngiệm thuộc đoạn $[0;m]$

A. $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3};2\right)$. **B.** $\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{3};2\right)$. **C.** $\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{2};2\right)$. **D.** $\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2};2\right]$.

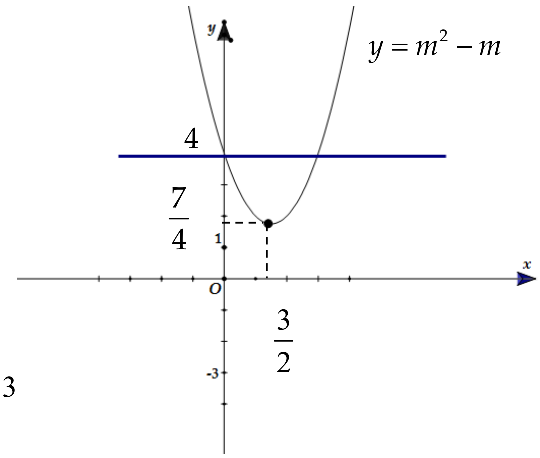
Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $y'=m^2-m \Leftrightarrow x^2-3x+4=m^2-m$

Đặt $f(x)=x^2-3x+4\ (P)$

Yêu cầu bài toán :



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}<m \\ \frac{7}{4}<m^2-m\le m^2-3m+4 \\ m^2-m\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}<m \\ \frac{7}{4}<m^2-m \\ m^2-m\le m^2-3 \\ m^2-m\le 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}<m \\ \left[\begin{array}{l} m<\frac{1-2\sqrt{2}}{2} \\ m>\frac{1+2\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\ m\le 2 \\ 0<m\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2};2\right]$$

Câu 24: (LÊ HỒNG PHONG) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln(16x^2+1)-(m+1)x+m+2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;\infty)$.

A. $m\in(-\infty;-3]$. **B.** $m\in[3;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;-3)$. **D.** $m\in[-3;3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y=\ln(16x^2+1)-(m+1)x+m+2$

$$y'=\frac{32x}{16x^2+1}-(m+1)$$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{32x}{16x^2+1}-(m+1)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$$

<u>Cách 1</u>: $\frac{32x}{16x^2+1}-(m+1)\le 0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 32x-(m+1)(16x^2+1)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -16(m+1)x^2+32x-(m+1)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -16(m+1)<0 \\ \Delta'=16^2-16(m+1)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ -16m^2-32m+240\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-1 \\ \left[\begin{array}{l} m\le -5 \\ m\ge 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\ge 3.$$

Cách 2: $\dfrac{32x}{16x^2+1}-(m+1)\le 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{32x}{16x^2+1}\le m+1, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m+1\ge \max\limits_{\mathbb{R}} g(x)$, với $g(x)=\dfrac{32x}{16x^2+1}$

Ta có: $g'(x)=\dfrac{-512x^2+32}{\left(16x^2+1\right)^2}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0; g\left(\dfrac{1}{4}\right)=4; g\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-4$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{4}$		$\dfrac{1}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=4$

Do đó: $m+1\ge 4 \Leftrightarrow m\ge 3$.

Câu 25: (LÊ HỒNG PHONG) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\cot x-1}{m\cot x-1}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. B. $m\in(-\infty;0)$.

C. $m\in(1;+\infty)$. D. $m\in(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y'=\dfrac{-\left(1+\cot^2 x\right)(m\cot x-1)+m\left(1+\cot^2 x\right)(\cot x-1)}{(m\cot x-1)^2}=\dfrac{\left(1+\cot^2 x\right)(1-m)}{(m\cot x-1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m\cot x-1\neq 0,\forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right) \\ y'=\dfrac{\left(1+\cot^2 x\right)\left(1-m\right)}{\left(m\cot x-1\right)^2}>0,\forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 0\vee m\ge 1 \\ 1-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 0 .$$

Câu 26: (NGUYỄN TRÃI – HD) Phương trình $2^{23x^3}.2^x-1024^{x^2}+23x^3=10x^2-x$ có tổng các nghiệm gần nhất với số nào dưới đây

A. $0,35$. **B.** $0,40$. **C.** $0,50$. **D.** $0,45$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $2^{23x^3}.2^x-1024^{x^2}+23x^3=10x^2-x\Leftrightarrow 2^{23x^3+x}+23x^3+x=2^{10x^2}+10x^2$

Hàm số $f\left(t\right)=2^t+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$2^{23x^3+x}+23x^3+x=2^{10x^2}+10x^2\Leftrightarrow 23x^3+x=10x^2\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\frac{5\pm\sqrt{2}}{23}$

Tổng các nghiệm bằng $\frac{10}{23}\approx 0,4347$

✍ **Mẹo:** Khi làm trắc nghiệm có thể dùng "*Định lí Vi-ét cho phương trình bậc ba*"

Nếu phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thì:

$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$; $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}$; $x_1x_xx_3=-\frac{d}{a}$

Câu 27: (HAI BÀ TRƯNG – HUẾ) Đường thẳng $d:y=x+4$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2mx^2+\left(m+3\right)x+4$ tại 3 điểm phân biệt $A\left(0;4\right),B$ và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M\left(1;3\right)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m=2$ hoặc $m=3$. **B.** $m=-2$ hoặc $m=3$.

C. $m=3$. **D.** $m=-2$ hoặc $m=-3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị $\left(C\right)$: $x^3+2mx^2+\left(m+3\right)x+4=4$

$$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+\left(m+2\right)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ \varphi\left(x\right)=x^2+2mx+m+2=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Với $x=0,$ ta có giao điểm là $A\left(0;4\right)$.

d cắt $\left(C\right)$ tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \varphi\left(0\right)=m+2\neq 0 \\ \Delta'=m^2-m-2>0 \end{cases} \qquad (*)$$

Ta gọi các giao điểm của d và $\left(C\right)$ lần lượt là $A,B\left(x_B;x_B+2\right),C\left(x_C;x_C+2\right)$ với x_B,x_C là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_B + x_C & = -2m \\ x_B . x_C & = m+2 \end{cases}$

Ta có diện tích của tam giác MBC là $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d\left(M, BC\right) = 4.$

Phương trình d được viết lại là: $d : y = x + 4 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0.$

Mà $d\left(M, BC\right) = d\left(M, d\right) = \frac{\left|1 - 3 + 4\right|}{\sqrt{1^2 + \left(-1\right)^2}} = \sqrt{2}.$

Do đó: $BC = \frac{8}{d\left(M, BC\right)} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow BC^2 = 32$

Ta lại có: $BC^2 = \left(x_C - x_B\right)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2 = 2\left(x_C - x_B\right)^2 = 32$

$\Leftrightarrow \left(x_B + x_C\right)^2 - 4x_B . x_C = 16 \Leftrightarrow \left(-2m\right)^2 - 4\left(m+2\right) = 16$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 24 = 0 \Leftrightarrow m = 3; m = -2.$

Đối chiếu với điều kiện, loại đi giá trị $m = -2.$

Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x, x \in \left[0; \pi\right]$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right) và \left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right).$

B. $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right).$

C. $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right) và \left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right).$

D. $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right) và \left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right).$

Hướng dẫn

Chọn A.

TXĐ: $\mathrm{D} = \mathbb{R}$. $y' = \frac{1}{2} + \sin 2x$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Vì $x \in \left[0; \pi\right]$ nên có 2 giá trị $x = \frac{7\pi}{12}$ và $x = \frac{11\pi}{12}$ thỏa mãn điều kiện.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
y'	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số đồng biến $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = x + m\cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $|m| \le 1$. **B.** $m > \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $|m| \ge 1$. **D.** $m < \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 1 - m\sin x$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m\sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m = 0$ ta có $0 \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Trường hợp 2: $m > 0$ ta có $\sin x \le \frac{1}{m}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{m} \ge 1 \Leftrightarrow m \le 1$

Trường hợp 3: $m < 0$ ta có $\sin x \ge \frac{1}{m}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{m} \le -1 \Leftrightarrow m \ge -1$

Vậy $|m| \le 1$

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-4 \le m \le \frac{2}{3}$. **B.** $m \ge 2$. **C.** $\begin{cases} m > 3 \\ m \ne 1 \end{cases}$. **D.** $m \le 2$.

Hướng dẫn

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = m - 3 + (2m+1)\sin x$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2m+1)\sin x \le 3 - m, \forall x \in \mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m = -\frac{1}{2}$ ta có $0 \le \frac{7}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m < -\frac{1}{2}$ ta có $\sin x \ge \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \le -1$

$$\Leftrightarrow 3 - m \ge -2m - 1 \Leftrightarrow m \ge -4$$

Trường hợp 3: $m > -\frac{1}{2}$ ta có:

$\sin x \le \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \ge 1 \Leftrightarrow 3 - m \ge 2m + 1 \Leftrightarrow m \le \frac{2}{3}$. Vậy $m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right]$

Câu 31: Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x) = 2x + a\sin x + b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. B. $a+2b=2\sqrt{3}$. C. $a^2+b^2\le 4$. D. $a+2b\ge\frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn

Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=2+a\cos x-b\sin x$

Áp dụng bất đẳng thức Schwartz ta có $2-\sqrt{a^2+b^2}\le y'\le 2+\sqrt{a^2+b^2}$

Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$y'\ge 0,\forall x\Leftrightarrow 2-\sqrt{a^2+b^2}\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2\le 4.$$

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m\le 0$. B. $m\le 12$. C. $m\ge 0$. D. $m\ge 12$.

Hướng dẫn

Chọn D.

Cách 1: Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3x^2-12x+m$

- Trường hợp 1:

  Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\ (hn)\\36-3m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 12$

- Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_1<x_2\le 0$ (*)
  - ✓ Trường hợp 2.1: $y'=0$ có nghiệm $x=0$ suy ra $m=0$. Nghiệm còn lại của $y'=0$ là $x=4$ (không thỏa (*))
  - ✓ Trường hợp 2.2: $y'=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa

$$x_1<x_2<0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S<0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}36-3m>0\\4<0(vl)\\\frac{m}{3}>0\end{cases}\Rightarrow \text{không có } m\text{ .Vậy } m\ge 12$$

Cách 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)\Leftrightarrow m\ge 12x-3x^2=g(x),\forall x\in(0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	

g	0 ↗ 12 ↘ $-\infty$

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m \in [-5;2)$. B. $m \in (-\infty;2]$. C. $m \in (2,+\infty)$. D. $m \in (-\infty;-5)$.

Hướng dẫn

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$.

Hàm số đồng biến trên $(1;3) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 1 \geq m, \forall x \in (1;3)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;3)$.

x	1		3
g'		$+$	0
g	2	↗	10

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \leq \min g(x) \Leftrightarrow m \leq 2$.

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m = -1; m = 9$. B. $m = -1$. C. $m = 9$. D. $m = 1; m = -9$.

Hướng dẫn

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = x^2 - mx + 2m$

Ta không xét trường hợp $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $a = 1 > 0$

Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \text{ hay } m < 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 9 \end{array}\right.$$

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$?

A. $1\le m<2$. **B.** $m\le 0;1\le m<2$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m\le 0$.

Hướng dẫn

Chọn B.

+) Điều kiện $\tan x\ne m$. Điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ là $m\notin(0;1)$

+) $y'=\dfrac{2-m}{\cos^2 x(\tan x-m)^2}$.

+) Ta thấy: $\dfrac{1}{\cos^2 x(\tan x-m)^2}>0\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right);m\notin(0;1)$

+) Để hs đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}y'>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2>0\\ m\le 0;m\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow m\le 0$ hoặc $1\le m<2$

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{mx^3}{3}+7mx^2+14x-m+2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-2;-\dfrac{14}{15}\right]$. **D.** $\left[-\dfrac{14}{15};+\infty\right)$.

Hướng dẫn

Chọn B.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$mx^2+14mx+14\le 0,\forall x\ge 1$, tương đương với $g(x)=\dfrac{-14}{x^2+14x}\ge m$ (1)

Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x\in[1;+\infty)$, suy ra $\min\limits_{x\ge 1}g(x)=g(1)=-\dfrac{14}{15}$

Kết luận: $(1)\Leftrightarrow\min\limits_{x\ge 1}g(x)\ge m\Leftrightarrow-\dfrac{14}{15}\ge m$

Câu 37: Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\dfrac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\dfrac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Hướng dẫn

Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-4x^3+2(2m-3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;2)\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow m\le x^2+\dfrac{3}{2}=g(x),\forall x\in(1;2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;2)$. $g'(x)=2x=0\Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên

x	1		2
g'		$+$	0
g	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$\frac{11}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m\le \min g(x)\Leftrightarrow m\le \dfrac{5}{2}$. Vậy $p+q=5+2=7$.

Câu 38: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn

Chọn D.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)\ge 0,\forall x>1$ và $m\le 1$ (1)

Vì $\Delta_g{}'=2(m+1)^2\ge 0,\forall m$ nên (1) $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1\le x_2\le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases}2g(1)=2(m^2-6m+1)\ge 0\\ \dfrac{S}{2}=m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow m\le 3-2\sqrt{2}\approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm thực?

A. $m\ge 2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $m\le 3$.

Hướng dẫn

Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{x+1}, t\geq 0$. Phương trình thành: $2t=t^2-1+m \Leftrightarrow m=-t^2+2t+1$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+1, t\geq 0; f'(t)=-2t+2$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m\leq 2$.

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2-4x+5}=m+4x-x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $1\leq m\leq 3$. **B.** $-3<m<\sqrt{5}$. **C.** $-\sqrt{5}<m<3$. **D.** $-3\leq m<3$.

Hướng dẫn

Chọn B

Đặt $t=f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Xét $x>0$ ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $m=t^2+t-5 \Leftrightarrow t^2+t-5-m=0$ (*1*).

Nếu phương trình (*1*) có nghiệm t_1, t_2 thì $t_1+t_2=-1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t\geq 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t\in\left(1;\sqrt{5}\right)$. Đặt $g(t)=t^2+t-5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t)=m$ có đúng 1 nghiệm $t\in\left(1;\sqrt{5}\right)$. Ta có $g'(t)=2t+1>0, \forall t\in\left(1;\sqrt{5}\right)$.

Bảng biến thiên:

t	1	$\sqrt{5}$
$g'(t)$	$+$	
$g(t)$	$-3 \nearrow$	$\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $-3 < m < \sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình: $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$?

A. $-1 \le m \le 3$. **B.** $0 \le m \le 2$. **C.** $0 \le m \le 3$. **D.** $-1 \le m \le 2$.

Hướng dẫn

Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$. Điều kiện: $t \ge 1$.

Phương trình thành: $t^2 + t - 2m - 2 = 0$ (*) . Khi $x \in \left[1;3^{\sqrt{3}}\right] \Rightarrow t \in [1;2]$

$(*) \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{t^2 + t - 2}{2} = m$. Bảng biến thiên :

t	1	2
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	$0 \nearrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có : $0 \le m \le 2$

Câu 42: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm thực?

A. $m \ge -\dfrac{7}{2}$. **B.** $m \ge \dfrac{3}{2}$. **C.** $m \ge \dfrac{9}{2}$. **D.** $\forall m \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn

Chọn C

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{2}$

Phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1 \Leftrightarrow 3x^2+4x-1=mx$ (*)

Vì $x=0$ không là nghiệm nên (*) $\Leftrightarrow m=\dfrac{3x^2+4x-1}{x}$

Xét $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-1}{x}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2}>0\ \forall x\ge -\dfrac{1}{2}; x\ne 0$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm thì $m\ge \dfrac{9}{2}$.

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2-3x+2\le 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2+(m+1)x+m+1\ge 0$?

A. $m\le -1$. **B.** $m\le -\dfrac{4}{7}$. **C.** $m\ge -\dfrac{4}{7}$. **D.** $m\ge -1$.

Hướng dẫn

Chọn C.

Bất phương trình $x^2-3x+2\le 0 \Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Bất phương trình $mx^2+(m+1)x+m+1\ge 0 \Leftrightarrow m(x^2+x+1)\ge -x-2 \Leftrightarrow m\ge \dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1\le x\le 2$. Có $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}>0, \forall x\in[1;2]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[1;2]} f(x) \Leftrightarrow m\ge -\dfrac{4}{7}$

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $-x^3+3mx-2<-\dfrac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x\ge 1$?

A. $m<\dfrac{2}{3}$. **B.** $m\ge \dfrac{2}{3}$. **C.** $m\ge \dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}\le m\le \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn A.

Bpt $\Leftrightarrow 3mx < x^3 - \frac{1}{x^3} + 2, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow 3m < x^2 - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x} = f(x), \forall x \geq 1$.

Ta có $f'(x) = 2x + \frac{4}{x^5} - \frac{2}{x^2} \geq 2\sqrt{2x\left(\frac{4}{x^5}\right)} - \frac{2}{x^2} = \frac{4\sqrt{2}-2}{x^2} > 0$ suy ra $f(x)$ tăng.

Ycbt $\Leftrightarrow f(x) > 3m, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \min\limits_{x\geq 1} f(x) = f(1) = 2 > 3m \Leftrightarrow \frac{2}{3} > m$

Câu 45: Bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x} \geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Hướng dẫn

Chọn C

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 4$. Xét $f(x) = \sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2;4]$.

Có $f'(x) = \frac{3\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0, \forall x \in (-2;4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2;4]$, bpt $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \geq 1$.

So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $S = [1;4] \Rightarrow a+b = 5$.

Câu 46: Bất phương trình $\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-6x+11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $(a;b]$. Hỏi hiệu $b-a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -1.

Hướng dẫn

Chọn A.

Điều kiện: $1 \leq x \leq 3$; bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{(3-x)^2+2} + \sqrt{3-x}$

Xét $f(t) = \sqrt{t^2+2} + \sqrt{t}$ với $t \geq 0$. Có $f'(t) = \frac{t}{2\sqrt{t^2+2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$. (1) $\Leftrightarrow f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$

So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là $S = (2;3]$

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m < -1$. **B.** $-1 \leq m \leq 0$. **C.** $m > 1$. **D.** $-1 \leq m < 0$.

Hướng dẫn

Chọn B

Ta xét hai trường hợp sau đây:

TH1: $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$. Khi đó $y=x^2+\dfrac{3}{2} \Rightarrow$ hàm số chỉ có cực tiểu ($x=0$) mà không có cực đại $\Rightarrow m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $m+1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1$. Khi đó hàm số đã cho là hàm số trùng phương ta có :

$$y'=4(m+1)x^3-2mx=4(m+1)x\left[x^2-\frac{m}{2(m+1)}\right].$$

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại $\Leftrightarrow y'$ có đúng một nghiệm và đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua nghiệm này $\Leftrightarrow \begin{cases} 4(m+1)>0 \\ \dfrac{m}{2(m+1)}\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m\leq 0$.

Kết hợp những giá trị m tìm được, ta có $-1\leq m\leq 0$.

Câu 48: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\dfrac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$.

A. $m=0$. **B.** $m=-\dfrac{2}{3}$. **C.** $m=\dfrac{2}{3}$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn C

Ta có : $y'=2x^2-2mx-2\left(3m^2-1\right)=2\left(x^2-mx-3m^2+1\right)$,

$g(x)=x^2-mx-3m^2+1$ là tam thức bậc hai có $\Delta=13m^2-4$. Do đó hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m<-\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.. (1)$$

x_1, x_2 là các nghiệm của $g(x)$ nên theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-3m^2+1 \end{cases}$.

Do đó $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1 \Leftrightarrow -3m^2+2m+1=1 \Leftrightarrow -3m^2+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 49: Cho hàm số $y=x^4-2\left(1-m^2\right)x^2+m+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất .

A. $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=1$.

Hướng dẫn

Chọn C

[Phương pháp tự luận]

$y'=4x^3-4\left(1-m^2\right)x$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=1-m^2 \end{array}\right.$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi và chỉ khi : $|m|<1$

Tọa độ điểm cực trị $A(0;m+1)$

$B\left(\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2+m\right)$

$C\left(-\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2+m\right)$

$\overrightarrow{BC}=\left(-2\sqrt{1-m^2};0\right)$

Phương trình đường thẳng BC : $y+m^4-2m^2-m=0$

$d\left(A,\mathrm{BC}\right)=m^4-2m^2+1$, $BC=2\sqrt{1-m^2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC.d[A,BC]=\sqrt{1-m^2}\left(m^4-2m^2+1\right)=\sqrt{\left(1-m^2\right)^5}\le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m=0$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2-1\right)$

$\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2-1\right)$

Khi đó S = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right|$ = $\sqrt{1-m^2}\left(m^4-2m^2+1\right)=\sqrt{\left(1-m^2\right)^5}\le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m=0$.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx$ có hai điểm cực trị A,B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng : $y=x+2$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=2 \end{array}\right.$.
B. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=3 \end{array}\right.$.
C. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$.
D. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn

Chọn C

[Phương pháp tự luận]

Ta có : $y=6x^2-6(m+1)x+6m$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m \end{array}\right.$

Điều kiện để hàm số có 2 điểm cực trị là : $m\ne 1$

Ta có : $A(1;3m-1)$ $B\left(m;-m^3+3m^2\right)$

Hệ số góc đt AB là : $k=-(m-1)^2$

Đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $k=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 : $y-\frac{y'.y''}{18a}=2x^3-3(y+1)x^2+6yx-\frac{\left(6x^2-6(y+1)x+6y\right)\left(12x-6(y+1)\right)}{36}$

Bước 3 : Cacl $x=i$, $y=1000$

Kết quả : $1001000-9980001.i$. Hay : $y=1001000-9980001.x$

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị AB là : $y=m^2-m-(m-1)^2x$

Có đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $\Leftrightarrow(m-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$

Câu 51: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^3-3x^2-mx+2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng có phương trình: $y=x-1$ (d).

A. $m=0$.　　B. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-\frac{9}{2} \end{array}\right.$.　　C. $m=2$.　　D. $m=-\frac{9}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn A

[Phương pháp trắc nghiệm]

$y'=3x^2-6x-m$

Hàm số có 2 cực trị $m>-3$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$, ta có: $x_1+x_2=2$

Bấm máy tính:

$$x^3-3x^2-mx+2-\left(3x^2-6x-m\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$$
$$-\frac{994}{3}-\frac{2006}{3}i=-\frac{1000-6}{3}-\frac{2000+6}{3}i=-\frac{2m+6}{3}x-\frac{m-6}{3}$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(x_1;-\frac{2m+6}{3}x_1-\frac{m-6}{3}\right)$; $B\left(x_2;-\frac{2m+6}{3}x_2-\frac{m-6}{3}\right)$

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I\left(1;-m\right)$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $y=-\frac{2m+6}{3}x-\frac{m-6}{3}$ (Δ)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta//d \ or \ \Delta\equiv d \\ I\in d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{2m+6}{3}=1 \\ -m=1-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\frac{9}{2} \\ m=0 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện thì $m=0$.

Câu 52: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2m^2x^2+m^4+1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp.

A. $m=\pm 1$.　　B. $m=1$.　　C. Không tồn tại m.　　D. $m=-1$.

Hướng dẫn

Chọn A

$y'=y=4x^3-4m^2x$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m\neq 0$

Khi đó 3 điểm cực trị là: $A\left(0;m^4+1\right), B\left(-m;1\right), C\left(m;1\right)$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$. Do tính chất đối xứng , ta có:

A,O,I thẳng hàng $\Rightarrow AO$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$.

Vậy $AB \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow m^2 - m^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $m = \pm 1$ (thỏa mãn).

Câu 53: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn hơn 1.

A. $m < -1$.

B. $m > 2$.

C. $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

D. Không tồn tại m.

Hướng dẫn

Chọn B

[Phương pháp tự luận]

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m > 0$

Ba điểm cực trị là $A(0;m), B\left(-\sqrt{m}; m - m^2\right), C\left(\sqrt{m}; m - m^2\right)$

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I\left(0; m - m^2\right)$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AI.BC = m^2\sqrt{m}$

Chu vi của ΔABC là: $2p = AB + BC + AC = 2\left(\sqrt{m + m^4} + \sqrt{m}\right)$

Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là: $r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m + m^4} + \sqrt{m}}$

Theo bài ra: $r > 1 \Leftrightarrow \frac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m + m^4} + \sqrt{m}} > 1 \Leftrightarrow \frac{m^2\sqrt{m}\left(\sqrt{m + m^4} - \sqrt{m}\right)}{m^4} > 1$ (vì $m > 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{m}\left(\sqrt{m + m^4} - \sqrt{m}\right) > m^2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + m^5} > m^2 + m \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m > 2$ thỏa mãn.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Sử dụng công thức $r=\dfrac{b^2}{4|a|+\sqrt{16a^2-2ab^3}} \Rightarrow r=\dfrac{4m^2}{4+\sqrt{16+16m^3}}=\dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}}$

Theo bài ra: $r>1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}}>1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2\left(\sqrt{1+m^3}-1\right)}{m^3}>1 \Leftrightarrow \sqrt{1+m^3}-1>m$

$\sqrt{1+m^3}>m+1 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sqrt{1+m^3}>m+1 \Leftrightarrow m^2-m-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m>2$ thỏa mãn.

Câu 54: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (Trong đó O là gốc tọa độ).

A. $m=-1$.

B. $m=1$.

C. $m=-1$ hoặc $m=-\dfrac{17}{11}$.

D. $m=1$ hoặc $m=-\dfrac{17}{11}$.

Hướng dẫn

Chọn D

Ta có: $y'=m(3x^2-6x)$

Với mọi $m\neq 0$, ta có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=3m-3 \\ x=2 \Rightarrow y=-m-3 \end{array}\right.$. Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Giả sử $A(0;3m-3);B(2;-m-3)$.

Ta có : $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20 \Leftrightarrow 11m^2+6m-17=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.

Câu 55: Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm^2, hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng:

A. $16\sqrt{3}$ cm

B. $4\sqrt{3}$ cm

C. 24 cm

D. $8\sqrt{3}$ cm

Hướng dẫn

Chọn A.

Cách 1

Gọi cạnh của hình chữ nhật: *a, b*; $0<a, b\leq 48$

Ta có: $ab = 48 \Leftrightarrow b = \frac{48}{a}$. Chu vi: $P(a) = 2\left(a + \frac{48}{a}\right)$

$P'(a) = 2\left(1 - \frac{48}{a^2}\right)$; $P'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4\sqrt{3}$

Bảng biến thiên:

a	0		$4\sqrt{3}$		48
$P'(a)$		$-$	0	$+$	
$P(a)$		$\searrow$	$16\sqrt{3}$	$\nearrow$	

Cách 2

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$
  $\Leftrightarrow$ chu vi nhỏ nhất: $2(a+b) = 16\sqrt{3}$
- Hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng $16\sqrt{3}$ khi cạnh bằng $4\sqrt{3}$.

Câu 56: Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số a $(a > 0)$?

A. $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$. B. $\frac{a^2}{9}$. C. $\frac{2a^2}{9}$. D. $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn

Chọn A.

Cạnh góc vuông $x, 0 < x < \frac{a}{2}$; cạnh huyền: $a - x$

Cạnh góc vuông còn lại là: $\sqrt{(a-x)^2 - x^2}$

Diện tích tam giác $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}$. $S'(x) = \frac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax}}$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{3}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	$\searrow$	

Tam giác có diện tích lớn nhất bằng $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi cạnh góc vuông $\frac{a}{3}$, cạnh huyền $\frac{2a}{3}$.

Câu 57: Cho hàm số $y=\frac{2\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Khi đó $M+m$ bằng

A.– 4. B.– 5 . C.– 6 . D. 3.

Hướng dẫn

Chọn D.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đặt $t=|\cos x|, 0\le t\le 1 \Rightarrow y=f(t)=\frac{2t^2+t+1}{t+1}, 0\le t\le 1$

$f'(t)=\frac{2t^2+4t}{(t+1)^2}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2\notin[0;1]\end{array}\right. \Rightarrow f(0)=1, f(1)=2$

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y=1, \max\limits_{\mathbb{R}} y=2$

Câu 58: Cho hàm số $y=\frac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

A. $M=m+\frac{2}{3}$. B. $M=m+1$. C. $M=\frac{3}{2}m$. D. $M=m+\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn B.

Đặt $t=\sin x, -1\le t\le 1 \Rightarrow y=f(t)=\frac{t+1}{t^2+t+1}$, $f'(t)=\frac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in[-1;1] \\ t=-2\notin[-1;1]\end{array}\right. \Rightarrow f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(1)=\frac{2}{3}$. Vậy $M=1, m=0$

Câu 59: Cho hai số thực $x\ne 0,\ y\ne 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy=x^2+y^2-xy$. Giá trị lớn nhất M của biểu thức $A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$ là:

A. $M=0$. B. $M=0$. C. $M=1$. D. $M=16$.

Hướng dẫn

Chọn D.

$$A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^3y^3}=\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2.$$

Đặt $x=ty$. Từ giả thiết ta có: $(x+y)xy=x^2+y^2-xy \Rightarrow (t+1)ty^3=(t^2-t+1)y^2$

Do đó $y=\frac{t^2-t+1}{t^2+t};x=ty=\frac{t^2-t+1}{t+1}$. Từ đó $A=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2=\left(\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\right)^2$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\Rightarrow f'(t)=\frac{-3t^2+3}{\left(t^2-t+1\right)^2}$.

Lập bảng biến thiên ta tìm giá trị lớn nhất của A là: 16 đạt được khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Câu 60: Đồ thị hàm số $y=\frac{x+2}{3x+9}$ có đường tiệm cận đứng là $x=a$ và đường tiệm cận ngang là $y=b$. Giá trị của số nguyên m nhỏ nhất thỏa mãn $m\ge a+b$ là

A. 0. **B.** -3. **C.** -1. **D.** -2.

Hướng dẫn

Chọn D

Ta có đường tiệm cận đứng là $x=-3$ và đường tiệm cận ngang là $y=\frac{1}{3}$

Nên $a=-3,b=\frac{1}{3}$

Do đó $m\ge a+b\Leftrightarrow m\ge -\frac{8}{3}\Rightarrow m=-2$

Câu 61: Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}(C)$. Gọi M là điểm bất kỳ trên (C), d là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Giá trị nhỏ nhất của d là

A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 2.

Hướng dẫn

Chọn D

Tọa độ điểm M có dạng $M\left(x_0;\frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0\ne 2$

Phương trình tiệm cận đứng, ngang lần lượt là $x-2=0\ (d_1)$, $y-2=0\ (d_2)$.

Ta có $d=d\left(M,d_1\right)+d\left(M,d_2\right)=\left|x_0-2\right|+\frac{1}{\left|x_0-2\right|}\ge 2$

Câu 62: Cho hàm số : $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tất cả các giá trị của tham số m để $\left(C_m\right)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15$ là

A. $m>1$ hoặc $m<-1$. **B.** $m<-1$. **C.** $m>0$. **D.** $m>1$.

Hướng dẫn

Chọn A.

Phương pháp tự luận:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d:

$$\frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left[x^2 + (-3m+1)x - 3m - 2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \underbrace{x^2 + (-3m+1)x - 3m - 2}_{g(x)} = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

(C_m) cắt Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 6m + 9 > 0 \\ -6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Gọi $x_1 = 1$ còn x_2, x_3 là nghiệm phương trình (1) nên theo Viet ta có $\begin{cases} x_2 + x_3 = 3m - 1 \\ x_2x_3 = -3m - 2 \end{cases}$.

Vậy

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15 \Leftrightarrow 1 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 > 15$$
$$\Leftrightarrow (3m-1)^2 + 2(3m+2) - 14 > 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m > 1 \vee m < -1$$

Vậy chọn $m > 1 \vee m < -1$.

Phương pháp trắc nghiệm: Ta kiểm tra ngay trên đáp án

+ Với $m = -2$, ta giải phương trình bậc ba: $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x - \frac{4}{3} = 0$ thu được 3 nghiệm $x_1 = -6.37..., x_2 = 1, x_3 = -0.62...$ Ta chọn những giá trị nhỏ hơn các nghiệm này và kiểm tra điều kiện của bài toán.

  Cụ thể ta tính $(-6.4)^2 + 1^2 + (-0.63)^2 = 42.3569 > 15 \Rightarrow$ loại C, D.

+ Với $m = 2$, ta làm tương tự thu được 3 nghiệm $x_1 = 6.27..., x_2 = 1, x_3 = -1.27...$

  Tính $6.2^2 + 1^2 + (-1.3)^2 = 41.13 > 15 \Rightarrow$ loại B.

Vậy chọn $m > 1 \vee m < -1$.

Câu 63: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ với $x_0 > -1$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: 4x + y = 0$. Hỏi giá trị của $x_0 + 2y_0$ bằng bao nhiêu?

A. $-\dfrac{7}{2}$. B. $\dfrac{7}{2}$. C. $\dfrac{5}{2}$. D. $-\dfrac{5}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn A.

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-1}{2\left(x_0+1\right)}\right)\in\left(C\right)$ với $x_0\neq -1$ là điểm cần tìm.
- Gọi Δ tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M ta có phương trình.

$$\Delta: y=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}=\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}.$$

- Gọi $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A\left(-\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2};0\right)$ và $B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B\left(0;\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0+1)^2}\right)$.
- Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm là

$$G\left(-\frac{x_0^2-2x_0-1}{6};\frac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}\right).$$

- Do G thuộc đường thẳng $4x+y=0\Rightarrow -4.\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6}+\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}=0$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}\ \text{(vì } A,B \text{ không trùng } O \text{ nên } x_0^2-2x_0-1\neq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0+1=\dfrac{1}{2}\\ x_0+1=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-\dfrac{1}{2}\\ x_0=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right..$$

- Vì $x_0>-1$ nên chỉ chọn $x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)\Rightarrow x_0+2y_0=-\dfrac{7}{2}$.

Câu 64: Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị là $\left(C\right)$, đường thẳng $d: y=x+m$. Với mọi m ta luôn có d cắt $\left(C\right)$ tại 2 điểm phân biệt A,B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với $\left(C\right)$ tại A,B. Tìm m để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=-1$. B. $m=-2$. C. $m=3$. D. $m=-5$.

Hướng dẫn

Chọn A.

- Phương trình hoành độ giao điểm của d và $\left(C\right)$ là

$$\frac{-x+1}{2x-1}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{1}{2}\\ g\left(x\right)=2x^2+2mx-m-1=0\ \ (*)\end{cases}.$$

- Theo định lí Viet ta có $x_1+x_2=-m;\quad x_1x_2=\dfrac{-m-1}{2}$. Giả sử $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_2\right)$.
- Ta có $y'=\dfrac{-1}{\left(2x-1\right)^2}$, nên tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại A và B có hệ số góc lần lượt là

$k_1=-\dfrac{1}{\left(2x_1-1\right)^2}$ và $k_2=-\dfrac{1}{\left(2x_2-1\right)^2}$. Vậy

$$k_1+k_2=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}-\frac{1}{(2x_2-1)^2}=-\frac{4(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)+2}{\left[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1\right]^2}$$
$$=-\left(4m^2+8m+6\right)=-4\left(m+1\right)^2-2\le -2$$

- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất bằng -2 khi $m=-1$.

Câu 65: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Biết khoảng cách từ $I\left(-1;2\right)$ đến tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M là lớn nhấtthì tung độ của điểm M nằm ở góc phần tư thứ hai, gần giá trị nào nhất?

A. $3e$. **B.** $2e$. **C.** e. **D.** $4e$.

Hướng dẫn

Chọn C.

Phương pháp tự luận

- Ta có $y'=\dfrac{3}{\left(x+1\right)^2}$.
- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in\left(C\right),\left(x_0\ne -1\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0+1}\Leftrightarrow 3x-(x_0+1)^2y+2x_0^2-2x_0-1=0.$$

- $d\left(I,\Delta\right)=\dfrac{6\left|x_0+1\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}\le\dfrac{6}{\sqrt{2\sqrt{9}}}=\sqrt{6}$.
- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow\left(x_0+1\right)^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2-\sqrt{3}\left(L\right)\\ x_0=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2+\sqrt{3}\left(N\right)\end{array}\right..$$

Tung độ này gần với giá trị e nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

Ta có $IM\perp\Delta\Rightarrow cx_0+d=\pm\sqrt{\left|ad-bc\right|}\Rightarrow x_0+1=\pm\sqrt{\left|2+1\right|}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1+\sqrt{3} \Rightarrow y = 2-\sqrt{3}\left(L\right) \\ x_0 = -1-\sqrt{3} \Rightarrow y = 2+\sqrt{3}\left(N\right) \end{array}\right..$$

Câu 66: Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số $\left(C\right)$ tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Khi đó, khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị $\left(C\right)$ đến Δ bằng?

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Hướng dẫn

Chọn D.

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-2}{x_0+1}\right) \in \left(C\right)$, $\left(x_0 \neq -1\right)$, $I\left(-1;1\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y = \frac{3}{\left(x_0+1\right)^2}\left(x-x_0\right) + \frac{x_0-2}{x_0+1}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(-1;\dfrac{x_0-5}{x_0+1}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B\left(2x_0+1;1\right)$.
- Ta có $IA = \dfrac{6}{\left|x_0+1\right|}$, $IB = 2\left|x_0+1\right| \Rightarrow IA.IB = 12$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIAB là

$S_{IAB} = pr$, suy ra

$$r = \frac{S_{IAB}}{p} = \frac{IA.IB}{IA+IB+AB} = \frac{IA.IB}{IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}} \leq \frac{IA.IB}{2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2.IA.IB}} = 2\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

- Suy ra $r_{\max} = 2\sqrt{3}-\sqrt{6} \Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow \left|x_0-1\right|^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = -1+\sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 1-\sqrt{3} \\ x_M = -1-\sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 1+\sqrt{3} \end{array}\right.$.
- $\overrightarrow{IM}\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{IM}\right| = \sqrt{6}$.

Phương pháp trắc nghiệm

- $IA = IB \Rightarrow \Delta IAB$ vuông cân tại $I \Rightarrow IM \perp \Delta$.
- $cx_M + d = \pm\sqrt{\left|ad-bc\right|} \Rightarrow x_M + 1 = \pm\sqrt{\left|1+2\right|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = -1+\sqrt{3} \Rightarrow y_M = 1-\sqrt{3} \\ x_M = -1-\sqrt{3} \Rightarrow y_M = 1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{IM}\right| = \sqrt{6}$.

Câu 67: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Biết rằng tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ của $\left(C\right)$ luôn cắt hai tiệm cận của $\left(C\right)$ tại A và B. Độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng AB là

A. 4. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn

Chọn D.

Lấy điểm $M\left(m;2+\dfrac{1}{m-2}\right)\in(C)$ với $m\neq 2$. Ta có $y'(m)=-\dfrac{1}{(m-2)^2}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình $d: y=-\dfrac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\dfrac{1}{m-2}$.

Giao điểm của d với tiệm cận đứng là $A\left(2;2+\dfrac{2}{m-2}\right)$.

Giao điểm của d với tiệm cận ngang là $B(2m-2;2)$.

Ta có $AB^2=4\left[(m-2)^2+\dfrac{1}{(m-2)^2}\right]\geq 8$, suy ra $AB\geq 2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $(m-2)^2=1$, nghĩa là $m=3$ hoặc $m=-1$.

Câu 68: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị (C). Tổng khoảng cách từ một điểm M thuộc (C) đến hai hai trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất bằng ?

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn

Chọn D.

Điểm $M\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ nằm trên trục Oy. Khoảng cách từ M đến hai trục là $d=\dfrac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ lớn hơn $\dfrac{3}{2}\Rightarrow d=|x|+|y|>\dfrac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ nhỏ hơn $\dfrac{3}{2}$:

- Với $0<x<\dfrac{3}{2}\Rightarrow y>\dfrac{3}{2}\Rightarrow d=|x|+|y|>\dfrac{3}{2}$
- Với $-\dfrac{3}{2}<x<0; y>0\Rightarrow d=-x+x+1+\dfrac{1}{x+2}=1+\dfrac{1}{x+2}; d'=-\dfrac{1}{(x+2)^2}<0$.

Chứng tỏ hàm số nghịch biến. Suy ra $\min d=y(0)=\dfrac{3}{2}$.

Câu 69: Tọa độ cặp điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+4}{x-2}$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x-2y-6=0$ là

A. $(4;4)$ và $(-1;-1)$. **B.** $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

C. $(0;-2)$ và $(3;7)$. **D.** $(1;-5)$ và $(5;3)$.

Hướng dẫn

Chọn B.

Gọi đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y=\frac{1}{2}x-3$ suy ra $\Delta: y=-2x+m$.

Giả sử Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình

$$\frac{x+4}{x-2}=-2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ \underbrace{2x^2-(m+3)x+2m+4}_{h(x)}=0 \end{cases}.$$

Điều kiện cần:

Để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2, tức là $\begin{cases} \Delta>0 \\ h(2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-10m-23>0 \\ -6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<5-4\sqrt{3} \\ m>5+4\sqrt{3} \end{array}\right.$ (*).

Điều kiện đủ:

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} x_I=\frac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=2x_I+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=\frac{m+3}{4} \\ y_I=\frac{m+3}{2}+m \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{m+3}{4};\frac{3m+3}{2}\right).$$

Để hai điểm A, B đối xứng nhau qua $d: x-2y-6=0$ khi $I\in d$ $\Leftrightarrow \frac{m+3}{4}-2.\frac{3m+3}{2}-6=0 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa điều kiện (*)).

Với $m=-3$ phương trình $h(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=-1 \\ x=1 \Rightarrow y=-5 \end{array}\right.$

Vậy tọa hai điểm cần tìm là $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

Câu 70: (CHUYÊN QUANG TRUNG) Để hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nào ?

A. $(0;2)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

- Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2}$.
- Hàm số đạt cực trị tại $x = 2$ thì $y'(2) = 0 \Rightarrow \dfrac{4 + 4m + m^2 - 1}{(2+m)^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -1 \end{array}\right.$.
- Với $m = -3 \Rightarrow y' = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$. Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ nên $m = -3$ ta nhận.
- Với $m = -1 \Rightarrow y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ nên $m = -1$ ta loại.

Câu 71: (CHUYÊN VINH – L2)Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(x^2 + y^2\right) + 15xy$ là

A. $\min P = -80$. **B.** $\min P = -91$. **C.** $\min P = -83$. **D.** $\min P = -63$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \Leftrightarrow (x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{x-3}.\sqrt{y+3} \geq 4(x+y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y \geq 4 \\ x + y \leq 0 \end{array}\right.$

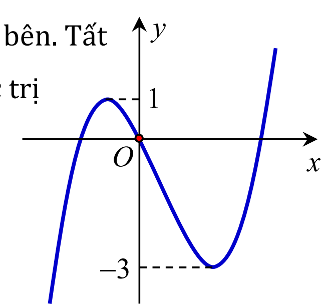
Mặt khác $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \leq 2\sqrt{2(x+y)} \Leftrightarrow x + y \leq 8 \Rightarrow x + y \in [4;8]$

Xét biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy = 4(x+y)^2 + 7xy \geq 16(x+y) + 7xy = 7x(y+3) + 16y - 5x$.

Mà $\begin{cases} y + 3 \geq 0 \\ y \geq 4 - x \end{cases} \Rightarrow P \geq 16(4-x) - 5x = 64 - 21x$, kết hợp với $x + y \geq 4 \Rightarrow x \in [3;7] \Rightarrow 64 - 21x \geq -83$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là -83

Câu 72: (CHUYÊN VINH – L2)Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị là



A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$. **B.** $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.
C. $m = -1$ hoặc $m = 3$. **D.** $1 \leq m \leq 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

<u>Nhận xét:</u> Đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ gồm hai phần:

- Phần 1 là phần đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ nằm phía trên trục hoành;
- Phần 2 là phần đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đã cho hình bên ta suy ra dạng đồ thị của hàm số $y = f(x) + m$. Khi đó hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ và trục hoành tại nhiều nhất hai điểm chung

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+m \le 0 \\ -3+m \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$.

Câu 73: **(CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH – L2)** Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi

A. $\frac{1}{2} < m < 1$. **B.** $\frac{1}{2} \le m < 1$. **C.** $0 < m < 1$. **D.** $0 < m \le 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$, suy ra $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

NX: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi $\frac{1}{2} < m < 1$.

Câu 74: **(CHUYÊN THÁI BÌNH – L4)** Cho hàm số $y = f(x) = x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$. Hỏi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $f(x)=x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)=(x^3-x)(x^4-13x^2+36)=x^7-14x^5+49x^3-36x$

$f'(x)=7x^6-70x^4+147x^2-36$

Đặt $t=x^2, t\ge 0$

Xét hàm $g(t)=7t^3-70t^2+147t-36$

Do phương trình $g'(t)=21t^2-140t+147=0$ có hai nghiệm dương phân biệt và $g(0)=-36<0$ nên $g(t)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt

Do đó $f'(x)=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 75: **(CHUYÊN THÁI BÌNH – L4)** Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=(m-x^3)\sqrt{1-x^3}$ đồng biến trên $(0;\ 1)$.

A. $m\ge -2$. **B.** $m\le -2$. **C.** $m>1$. **D.** $m<1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

+ Tập xác định: $D=(-\infty;\ 1]$.

+ $y'=-3x^2\sqrt{1-x^3}-\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}.(m-x^3)=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}(3x^3-m-2)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt[3]{\dfrac{m+2}{3}}\end{array}\right.$.

* Trường hợp 1: $m=-2$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1
y'		$-$	0	$+$	

Dựa vào BXD, ta có $y'<0,\ \forall x\in(0;\ 1)\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0;\ 1)$.

* Trường hợp 2: $m\ne -2$.

Để hàm số nghịch biến trên $(0;\ 1)$ thì $\sqrt[3]{\dfrac{m+2}{3}}<0\Leftrightarrow m<-2$.

Vậy $m\le -2$ thì hàm số nghịch biến trên $(0;\ 1)$.

Câu 76: **(CHUYÊN THÁI BÌNH – L4)** Phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trong $[-5\pi;2017\pi]$?

A. vô nghiệm. **B.** 2017. **C.** 2022. **D.** 2023.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có hàm số $y=2017^{\sin x}-\sin x-\sqrt{2-\cos^2 x}$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2\pi$.

Xét hàm số $y=2017^{\sin x}-\sin x-\sqrt{2-\cos^2 x}$ trên $[0;2\pi]$.

Ta có

$y'=\cos x.2017^{\sin x}.\ln 2017-\cos x-\dfrac{2\sin x.\cos x}{2\sqrt{2-\cos^2 x}}=\cos x.\left(2017^{\sin x}.\ln 2017-1-\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)$

Do vậy trên $\left[0;2\pi\right]$, $y'=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2} \vee x=\dfrac{3\pi}{2}$.

$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2017-1-\sqrt{2}>0$; $y\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2017}-1-\sqrt{2}<0$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\searrow$	$y\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$\nearrow$	0

Vậy trên $\left[0;2\pi\right]$ phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Ta có $y\left(\pi\right)=0$, nên trên $\left[0;2\pi\right]$ phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có ba nghiệm phân biệt là $0,\ \pi,\ 2\pi$.

Suy ra trên $\left[-5\pi;2017\pi\right]$ phương trình có đúng $2017-\left(-5\right)+1=2023$ nghiệm.

BÀI TOÁN VẬN DỤNG (8 - 9 - 10)

Chủ đề 2. LŨY THỪA – MŨ – LOGARIT

Câu 1: (SGD VĨNH PHÚC)Đạo hàm của hàm số $y=\log_{\sqrt{2}}\left|3x-1\right|$ là:

A. $y'=\dfrac{6}{\left|3x-1\right|\ln 2}$ B. $y'=\dfrac{2}{\left(3x-1\right)\ln 2}$ C. $y'=\dfrac{6}{\left(3x-1\right)\ln 2}$ D. $y'=\dfrac{2}{\left|3x-1\right|\ln 2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $3x-1\neq 0$

$$y=\log_{\sqrt{2}}\left|3x-1\right|\Rightarrow y'=\frac{\left(3x-1\right)'}{\left(3x-1\right)\ln\sqrt{2}}=\frac{3}{\left(3x-1\right)\ln\sqrt{2}}=\frac{6}{\left(3x-1\right)\ln 2}.$$

Câu 2: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Bất phương trình $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\leq 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S=\left[a;b\right]$ thì $b-2a$ bằng

A. 6 B. 10 C. 12 D. 16

Hướng dẫn giải

Ta có: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\leq 133.\sqrt{10^x}\Leftrightarrow 50.5^x+20.2^x\leq 133\sqrt{10^x}$ chia hai vế bất phương trình cho 5^x ta được : $50+\dfrac{20.2^x}{5^x}\leq\dfrac{133\sqrt{10^x}}{5^x}\Leftrightarrow 50+20.\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\leq 133.\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x$ (1)

Đặt $t=\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x,(t\geq 0)$ phương trình (1) trở thành: $20t^2-133t+50\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\leq t\leq\dfrac{25}{4}$

Khi đó ta có: $\dfrac{2}{5}\leq\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^x\leq\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\leq\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\leq\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-4}\Leftrightarrow -4\leq x\leq 2$ nên $a=-4,b=2$

Vậy $b-2a=10$

BÌNH LUẬN

Phương pháp giải bất phương trình dạng $ma^{2\alpha}+n\left(ab\right)^{\alpha}+pb^{2\alpha}>0$: chia 2 vế của bất phương trình cho $a^{2\alpha}$ hoặc $b^{2\alpha}$.

Câu 3: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)>2\log_2\sqrt{a}$. Tìm phần nguyên của $\log_2\left(2017a\right)$.

A. 14 B. 22 C. 16 D. 19

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt[6]{a}, t>0$, từ giả thiết ta có $3\log_3\left(1+t^3+t^2\right)>2\log_2 t^3$

$\Leftrightarrow f\left(t\right)=\log_3\left(1+t^3+t^2\right)-\log_2 t^2>0$

$$f'\left(t\right)=\frac{1}{\ln 3}.\frac{3t^2+2t}{t^3+t^2+1}-\frac{2}{\ln 2}.\frac{1}{t}=\frac{\left(3\ln 2-2\ln 3\right)t^3+\left(2\ln 2-2\ln 3\right)t^2-2\ln 3}{\ln 2.\ln 3.\left(t^4+t^3+t\right)}$$

Vì đề xét a nguyên dương nên ta xét $t\geq 1$.

Xét $g\left(t\right)=\left(3\ln 2-2\ln 3\right)t^3+\left(2\ln 2-2\ln 3\right)t^2-2\ln 3$

Ta có $g'\left(t\right)=3\ln\frac{8}{9}t^2+2\ln\frac{4}{9}t=t\left(3\ln\frac{8}{9}t+2\ln\frac{4}{9}\right)$

$$g'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{2\ln {}^{9}\!/_{4}}{3\ln {}^{8}\!/_{9}}<0.$$

Lập bảng biến thiên suy ra hàm số $g\left(t\right)$ giảm trên khoảng $\left[1;+\infty\right)$.

Suy ra $g\left(t\right)\leq g\left(1\right)=5\ln 2-6\ln 3<0\Rightarrow f'\left(t\right)<0$.

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ luôn giảm trên khoảng $\left[1;+\infty\right)$.

Nên $t=4$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f\left(t\right)=0$.

Suy ra $f\left(t\right)>0\Leftrightarrow f\left(t\right)>f\left(4\right)\Leftrightarrow t<4\Leftrightarrow\sqrt[6]{a}<4\Leftrightarrow a<4096$.

Nên số nguyên a lớn nhất thỏa mãn giả thiết bài toán là $a=4095$.

Lúc đó $\log_2\left(2017a\right)\approx 22,97764311$.

Nên phần nguyên của $\log_2\left(2017a\right)$ bằng 22.

Đáp án: B.

Câu 4: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Biết $x=\frac{15}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình $2\log_a\left(23x-23\right)>\log_{\sqrt{a}}\left(x^2+2x+15\right)$ (*). Tập nghiệm T của bất phương trình (*) là:

A. $T=\left(-\infty;\frac{19}{2}\right)$. B. $T=\left(1;\frac{17}{2}\right)$. C. $T=\left(2;8\right)$. D. $T=\left(2;19\right)$.

Hướng dẫn giải

$2\log_a\left(23x-23\right)>\log_{\sqrt{a}}\left(x^2+2x+15\right)\Leftrightarrow\log_a\left(23x-23\right)>\log_a\left(x^2+2x+15\right)$

Nếu $a>1$ ta có

$\log_a(23x-23) > \log_a(x^2+2x+15) \Leftrightarrow \begin{cases} 23x-23 > x^2+2x+15 \\ x^2+2x+15 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 19$

Nếu $0 < a < 1$ ta có

$\log_a(23x-23) > \log_a(x^2+2x+15) \Leftrightarrow \begin{cases} 23x-23 < x^2+2x+15 \\ 23x-23 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ x > 19 \end{array}\right.$

Mà $x = \dfrac{15}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình.Chọn D.

BÌNH LUẬN

- Sử dụng tính chất của hàm số logarit $y = \log_a b$ đồng biến nếu $a > 1$ nghịch biến nếu $0 < a < 1$

- $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

Câu 5: (T.T DIỆU HIỀN) Tìm m để phương trình :

$(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$ có nghiệm trên $\left[\dfrac{5}{2}, 4\right]$

A. $-3 \le m \le \dfrac{7}{3}$. **B.** $m \in \mathbb{R}$. **C.** $m \in \varnothing$. **D.** $-3 < m \le \dfrac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x \in \left[\dfrac{5}{2}; 4\right] \Rightarrow t \in [-1;1]$

$4(m-1)t^2 + 4(m-5)t + 4m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)t^2 + (m-5)t + m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m(t^2+t+1) = t^2 + 5t + 1$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$

$\Leftrightarrow g(m) = f(t)$

Xét $f(t)=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$ với $t\in[-1;1]$

$f'(t)=\dfrac{4-4t^2}{\left(t^2+t+1\right)^2}\geq 0\ \forall t\in[-1;1]\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[-1;1]$

Để phương trình có nghiệm khi hai đồ thị $g(m);f(t)$ cắt nhau $\forall t\in[-1;1]$
$\Rightarrow f(-1)\leq g(m)\leq f(1)\Leftrightarrow -3\leq m\leq \dfrac{7}{3}$

BÌNH LUẬN

Đây là dạng toán ứng dụng hàm số để giải bài toán chứa tham số. Đối với bài toán biện luận nghiệm mà chứa tham số thì phải tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ sau đó cô lập m rồi tìm max, min hàm số.

Câu 6: (LẠNG GIANG SỐ 1) Số các giá trị nguyên dương để bất phương trình $3^{\cos^2 x}+2^{\sin^2 x}\geq m.3^{\sin^2 x}$ có nghiệm là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $\sin^2 x=t\ \left(0\leq t\leq 1\right)$

$3^{\cos^2 x}+2^{\sin^2 x}\geq m.3^{\sin^2 x}\Leftrightarrow 3^{(1-t)}+2^t\geq 3^t\Leftrightarrow \dfrac{3}{3^t}+2^t\geq m.3^t\Leftrightarrow \dfrac{3}{\left(3^t\right)^2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\geq m$

Đặt: $y=\dfrac{3}{9^t}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\ \left(0\leq t\leq 1\right)$

$y'=3.\left(\dfrac{1}{9}\right)^t.\ln\dfrac{1}{9}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^t.\ln\dfrac{2}{3}<0\Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến

t	0		1
f'(t)		−	
f(t)	4	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m\leq 1$ thì phương trình có nghiệm

Suy ra các giá trị nguyên dương cần tìm $m=1$.

Câu 7: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $m.3^{x^2-3x+2}+3^{4-x^2}=3^{6-3x}+m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt. $\begin{cases}3^{x^2-3x+2}=u\\3^{4-x^2}=v\end{cases}\Rightarrow u.v=3^{6-3x}$. Khi đó phương trình trở thành

$$mu+v=uv+m\Leftrightarrow m(u-1)-v(u-1)=0\Leftrightarrow (u-1)(m-v)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=1\\v=m\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{x^2-3x+2}=1\\3^{2-x^2}=m\,(m>0)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-3x+2=0\\4-x^2=\log_3 m\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x^2=4-\log_3 m\end{array}\right.$$

Để phương trình có ba nghiệm thì $x^2=4-\log_3 m$ có một nghiệm khác $1;2$. Tức $4-\log_3 m=0\Leftrightarrow m=81$.

Chọn A.

Câu 8: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Cho $\dfrac{\log a}{p}=\dfrac{\log b}{q}=\dfrac{\log c}{r}=\log x\neq 0;\ \dfrac{b^2}{ac}=x^y$. Tính y theo p,q,r.

A. $y=q^2-pr$. B. $y=\dfrac{p+r}{2q}$. C. $y=2q-p-r$. D. $y=2q-pr$.

Hướng dẫn giải

Chọn **C.**

$\dfrac{b^2}{ac}=x^y\Leftrightarrow \log\dfrac{b^2}{ac}=\log x^y$

$\Rightarrow y\log x=2\log b-\log a-\log c=2q\log x-p\log x-r\log x$

$=\log x(2q-p-r)$

$\Rightarrow y=2q-p-r$ (do $\log x\neq 0$).

BÌNH LUẬN

Sử dụng $\log_a bc=\log_a b+\log_a c,\log_a\dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c,\log_a b^m=m\log_a b$

Câu 9: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Tính giá trị biểu thức $A=f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{2}{100}\right)+...+f\left(\dfrac{100}{100}\right)$?

A. 50. B. 49. C. $\dfrac{149}{3}$. D. $\dfrac{301}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1. Bấm máy tính Casio fx 570 theo công thức $\sum_{X=1}^{100}\left(\frac{4^{\frac{X}{100}}}{4^{\frac{X}{100}}+2}\right)=\frac{301}{6}$.

Cách 2. Sử dụng tính chất $f(x)+f(1-x)=1$ của hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Ta có

$$A=\left[f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{99}{100}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{100}\right)+f\left(\frac{98}{100}\right)\right]+...+\left[f\left(\frac{49}{100}\right)+f\left(\frac{51}{100}\right)\right]+f\left(\frac{50}{100}\right)+f\left(\frac{100}{100}\right)$$

$$=49+\frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}+2}+\frac{4}{4+2}=\frac{301}{6}$$

PS: Chứng minh tính chất của hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$.

Ta có $f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4}{4+2.4^x}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{2+4^x}=1$.

Câu 10: (THTT – 477) Nếu $\log_8 a+\log_4 b^2=5$ và $\log_4 a^2+\log_8 b=7$ thì giá trị của ab bằng

A. 2^9. **B.** 2^{18}. **C.** 8. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $x=\log_2 a\Rightarrow a=2^x$; $y=\log_2 b\Rightarrow b=2^y$.

Ta có $\begin{cases}\log_8 a+\log_4 b^2=5\\ \log_4 a^2+\log_8 b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}x+y=5\\ x+\frac{1}{3}y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=15\\ 3x+y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=3\end{cases}$. Suy ra $ab=2^{x+y}=2^9$.

BÌNH LUẬN

Nguyên tắc trong bài này là đưa về logarit cơ số 2.

Câu 11: (THTT – 477) Cho $n>1$ là một số nguyên. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{\log_2 n!}+\frac{1}{\log_3 n!}+...+\frac{1}{\log_n n!}$ bằng

A. 0. **B.** n. **C.** $n!$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$n>1,n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{1}{\log_2 n!}+\frac{1}{\log_3 n!}+\frac{1}{\log_4 n!}+...+\frac{1}{\log_n n!}=\log_{n!}2+\log_{n!}3+\log_{n!}4+...+\log_{n!}n$$

$$=\log_{n!}(2.3.4...n)=\log_{n!}n!=1$$

BÌNH LUẬN

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\ \log_a bc=\log_a b+\log_a c,\log_a a=1$$

Sử dụng công thức

Câu 12: (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^x + 2^y = 4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = \left(2x^2 + y\right)\left(2y^2 + x\right) + 9xy$.

A. $P_{\max} = \dfrac{27}{2}$. **B.** $P_{\max} = 18$. **C.** $P_{\max} = 27$. **D.** $P_{\max} = 12$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $4 = 2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^{x+y}} \Leftrightarrow 4 \geq 2^{x+y} \Leftrightarrow x + y \leq 2$.

Suy ra $xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = 1$.

Khi đó $P = \left(2x^2 + y\right)\left(2y^2 + x\right) + 9xy = 2\left(x^3 + y^3\right) + 4x^2y^2 + 10xy$.

$$P = 2(x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] + (2xy)^2 + 10xy$$
$$\leq 4(4 - 3xy) + 4x^2y^2 + 10xy = 16 + 2x^2y^2 + 2xy(xy - 1) \leq 18$$

Vậy $P_{\max} = 18$ khi $x = y = 1$.

Câu 13: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\left(7 - 3\sqrt{5}\right)^{x^2} + m\left(7 + 3\sqrt{5}\right)^{x^2} = 2^{x^2 - 1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m < \dfrac{1}{16}$. **B.** $0 \leq m < \dfrac{1}{16}$. **C.** $-\dfrac{1}{2} < m \leq \dfrac{1}{16}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} < m \leq 0 \\ m = \dfrac{1}{16} \end{array}\right.$.

Chọn D.

PT $\Leftrightarrow \left(\dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} + m\left(\dfrac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Đặt $t = \left(\dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} \in (0;1]$. Khi đó PT $\Rightarrow 2t^2 - t + 2m = 0 \Leftrightarrow 2m = t - 2t^2 = g(t)$ (1).

Ta có $g'(t) = 1 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{4}$.

Suy ra bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$g'(t)$	||	$+$	0	$-$	
$g(t)$	|| 0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	-1

PT đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 1 nghiệm $t \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m = \frac{1}{8} \\ -1 < 2m \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{2} < m \le 0 \end{array}\right. .$$

BÌNH LUẬN

Trong bài này các em cần lưu ý tìm điều kiện đúng cho t và mối quan hệ số nghiệm giữa biến cũ và biến mới, tức là mỗi $t \in (0;1)$ cho ta hai giá trị x.

Câu 14: (CHUYÊN ĐHSP HN) Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} = 4$ là
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Chọn D.
Điều kiện $x \ne 0$

- Nếu $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{4x} \ge 1$, dấu bằng xẩy ra khi $x = \frac{1}{2}$ và $\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \ge 1$,

dấu bằng xẩy ra khi $x = 2$ suy ra $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} > 4, \forall x > 0$

- Nếu $x < 0 \Rightarrow -x - \frac{1}{4x} \ge 1 \Rightarrow x + \frac{1}{4x} \le -1 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{4x}} \le \frac{1}{2}$, dấu bằng xẩy ra khi $x = -\frac{1}{2}$

và $-\frac{x}{4} - \frac{1}{x} \ge 1 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{1}{x} \le -1 \Rightarrow 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} \le \frac{1}{2}$, dấu bằng xẩy ra khi $x = 2$

Suy ra $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} < 1, \forall x < 0$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

BÌNH LUẬN

Sử dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương $a + b \ge 2\sqrt{ab}$, dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

Câu 15: (CHUYÊN ĐH VINH) Số nghiệm của phương trình $\log_3\left|x^2 - \sqrt{2}x\right| = \log_5\left(x^2 - \sqrt{2}x + 2\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

☑Đáp án: B.

ĐK: $x \neq 0;\ x \neq \sqrt{2}$.

Đặt $t = x^2 - \sqrt{2}x \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 2 = t + 2$

$\Rightarrow \log_3 |t| = \log_5 (t+2)$.

Đặt $\log_3 |t| = \log_5 (t+2) = u$

$$\begin{cases} \log_3 |t| = u \\ \log_5 (t+2) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |t| = 3^u \\ t + 2 = 5^u \end{cases}$$

$\Rightarrow |5^u - 2| = 3^u$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5^u - 2 = 3^u \\ 5^u - 2 = -3^u \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5^u + 3^u = 2 \\ 3^u + 2 = 5^u \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 5^u + 3^u = 2 & (1) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1 & (2) \end{array}\right. .$$

- Xét $(1): 5^u + 3^u = 2$

  Ta thấy $u = 0$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 0$ là duy nhất.

  Với $u = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

- Xét $(2): \left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1$

  Ta thấy $u = 1$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 1$ là duy nhất.

  Với $u = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x \neq 0;\ x \neq \sqrt{2}$.

  BÌNH LUẬN

Cho $f(x) = g(x)(1)$ nếu $f(x), g(x)$ đối nghịch nhau nghiêm ngặt hoặc $g(x) = const$ và $f(x)$ tăng, giảm nghiêm ngặt thì (1) có nghiệm duy nhất.

Câu 16: (CHUYÊN THÁI BÌNH) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $\log_3(1-x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+m-4) = 0$.

A. $\frac{-1}{4} < m < 0$. **B.** $5 \leq m \leq \frac{21}{4}$. **C.** $5 < m < \frac{21}{4}$. **D.** $\frac{-1}{4} \leq m \leq 2$.

Chọn C.

$$\log_3(1-x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(x+m-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}1-x^2>0\\ \log_3(1-x^2)=\log_3(x+m-4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-1;1)\\ 1-x^2=x+m-4\end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)=x^2+x+m-5=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\in(-1;1)$

Cách 1: Dùng định lí về dấu tam thức bậc hai.

Để thỏa yêu cầu bài toán ta phải có phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm thỏa: $-1<x_1<x_2<1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a.f(-1)>0\\ a.f(1)>0\\ \Delta>0\\ -1<\dfrac{S}{2}<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m-5>0\\ m-3>0\\ 21-4m>0\end{cases} \Leftrightarrow 5<m<\frac{21}{4}.$$

Cách 2: Với điều kiện có nghiệm, tìm các nghiệm của phương trình $f(x)=0$ rồi so sánh trực tiếp các nghiệm với 1 và -1.

Cách 3: Dùng đồ thị

Đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2+x-5$ tại hai điểm phân biệt trong khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2+x-5$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $\in(-1;1)$.

Cách 4: Dùng đạo hàm

Xét hàm số $f(x)=x^2+x-5 \Rightarrow f'(x)=2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Có $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{21}{4}; f(1)=-3; f(-1)=-5$

Ta có bảng biến thiên

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	$\searrow$	$-\frac{21}{4}$	$\nearrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên, để có hai nghiệm phân biệt trong khoảng $\left(-1;1\right)$ khi $-\dfrac{21}{4}<-m<-5\Rightarrow\dfrac{21}{4}>m>5$.

Cách 5: Dùng MTCT

Sau khi đưa về phương trình $x^2+x+m-5=0$, ta nhập phương trình vào máy tính.

* Giải khi $m=-0,2$: không thỏa $\Rightarrow$ **loại A, D.**

* Giải khi $m=5$: không thỏa $\Rightarrow$ **loại B.**

Câu 17: Tập tất cả các giá trị của m để phương trình $2^{(x-1)^2}.log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. $\left\{\dfrac{1}{2};-1;\dfrac{3}{2}\right\}$. **B.** $\left\{-\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$. **C.** $\left\{\dfrac{1}{2};1;-\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $\left\{\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $2^{(x-1)^2}.log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$ (1)

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.log_2\left[\left(x-1\right)^2+2\right]=2^{2|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$ (2)

Xét hàm số $f\left(t\right)=2^t.log_2\left(t+2\right),t\geq 0.$

Vì $f'\left(t\right)>0,\forall t\geq 0\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

Khi đó $(2)\Leftrightarrow f\left[\left(x-1\right)^2\right]=f\left(2|x-m|\right)\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=2|x-m|$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x+1+2m=0(3)\\x^2=2m-1(4)\end{array}\right.$

Phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt nếu xảy ra các trường hợp sau:

+) PT (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(4)

$\Rightarrow m=\dfrac{3}{2}$, thay vào PT (4) thỏa mãn

+) PT (4) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT(3)

$\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$, thay vào PT (3) thỏa mãn

+) PT (4) có hai nghiệm phân biệt và PT (3) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm của hai PT trùng nhau

$(4) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2m-1}$,với $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$. Thay vào PT (3) tìm được $m = 1$.

KL: $m \in \left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$.

BÌNH LUẬN

B1: Đưa phương trình về dạng $f(u) = f(v)$ với u, v là hai hàm theo x.

B2: Xét hàm số $f(t), t \in D$.

B3: Dùng đạo hàm chứng minh hàm số $f(t), t \in D$ tăng hoặc giảm nghiêm ngặt trên D.

B4: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

Câu 18: (QUẢNG XƯƠNG I) Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0$ có nghiệm đúng $\forall x > 0$ là:

A. $(-2; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -2]$. **C.** $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án B Đặt $2^x = t$. Do $x > 0 \Rightarrow t > 1$.

Khi đó ta có : $(3m+1)t^2 + (2-m)t + 1 < 0,\ \forall t > 1$

$\Leftrightarrow (3t^2 - t)m < -t^2 - 2t - 1\ \ \forall t > 1 \Leftrightarrow m < \dfrac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t}\ \ \forall t > 1$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t}$ trên $(1; +\infty) \Rightarrow f'(t) = \dfrac{7t^2 + 6t - 1}{(3t^2 - t)^2} > 0\ \ \forall t \in (1; +\infty)$

BBT

t	1 $+\infty$
f'(t)	$+$
f(t)	$-\frac{1}{3}$ ↗ -2

Do đó $m \le \lim\limits_{t \to 1^+} f(t) = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

BÌNH LUẬN

Sử dụng $\begin{matrix} + \ m \ge f(x) \forall x \in D \Leftrightarrow m \ge \max f(x) \forall x \in D \\ + \ m \le f(x) \forall x \in D \Leftrightarrow m \le \min f(x) \forall x \in D \end{matrix}$

Câu 19: (QUẢNG XƯƠNG I) Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x+y$ bằng:

A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{9}{8}$. D. 9.

Chọn đáp án B

Bất PT $\Leftrightarrow \log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y^2 > 1 \\ 2x+y \ge x^2+2y^2 \end{cases} (I), \quad \begin{cases} 0 < x^2+2y^2 < 1 \\ 0 < 2x+y \le x^2+2y^2 \end{cases} (II)$.

Xét T$=2x+y$

TH1: (x; y) thỏa mãn (II) khi đó $0 < T = 2x+y \le x^2+2y^2 < 1$

TH2: (x; y) thỏa mãn (I) $x^2+2y^2 \le 2x+y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 \le \frac{9}{8}$. Khi đó

$$2x+y = 2(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}) + \frac{9}{4} \le \sqrt{(2^2+\frac{1}{2})\left[(x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2\right]} + \frac{9}{4} \le \sqrt{\frac{9}{2}.\frac{9}{8}} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

Suy ra : $\max T = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x;y) = (2;\frac{1}{2})$

BÌNH LUẬN

- Sử dụng tính chất của hàm số logarit $y = \log_a b$ đồng biến nếu $a > 1$ nghịch biến nếu $0 < a < 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

- Sử dụng bất đẳng thức BCS cho hai bộ số $(a;b),(x;y)$ thì $|ax+by| \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} > 0$

Câu 20: (MINH HỌA L2) Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $[3;4]$. B. $[2;4]$. C. $(2;4)$. D. $(3;4)$.

Chọn C.

Ta có: $6^x+(3-m)2^x-m=0\ (1) \Leftrightarrow \dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}=m$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{6^x+3.2^x}{2^x+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)=\dfrac{12^x.\ln 3+6^x.\ln 6+3.2^x.\ln 2}{(2^x+1)^2}>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Suy ra $0<x<1 \Leftrightarrow f(0)<f(x)<f(1) \Leftrightarrow 2<f(x)<4$ vì $f(0)=2,\ f(1)=4.$

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi $m\in(2;4)$.

Câu 21: (CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3)Tìm m để bất phương trình $1+\log_5(x^2+1)\ge\log_5(mx^2+4x+m)$ thoã mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $-1<m\le 0$. B. $-1<m<0$. C. $2<m\le 3$. D. $2<m<3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

BPT thoã mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$.$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m>0 \\ 5(x^2+1)\ge mx^2+4x+m \end{cases} (\forall x\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} mx^2+4x+m>0 \\ (5-m)x^2-4x+5-m\ge 0 \end{cases} (\forall x\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ 16-4m^2<0 \\ 5-m>0 \\ 16-4(5-m)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m<5 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 3 \\ m\ge 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2<m\le 3.$$

BÌNH LUẬN

Sử dụng dấu tam thức bậc hai không đổi trên R :

$+\ f(x)=ax^2+bx+c\ge 0\forall x\in R \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$

$+\ f(x)=ax^2+bx+c>0\forall x\in R \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

Câu 22: (CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3)Cho hàm số $y=\left(\dfrac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

A. $3e^3+1\le m<3e^4+1$. B. $m\ge 3e^4+1$.

C. $3e^2+1\le m\le 3e^3+1$. D. $m<3e^2+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

• $y' = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}.\ln\left(\frac{4}{2017}\right).\left(e^{3x}-(m-1)e^x+1\right)' =$

$y' = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}.\ln\left(\frac{4}{2017}\right).\left(3e^{3x}-(m-1)e^x\right)$

•Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow$

$y' = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}.\ln\left(\frac{4}{2017}\right).\left(3e^{3x}-(m-1)e^x\right) \geq 0, \forall x \in (1;2)$ (*), mà $\begin{cases} \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \ln\left(\frac{4}{2017}\right) < 0 \end{cases}$. Nên (*) $\Leftrightarrow 3e^{3x}-(m-1)e^x \leq 0, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow$ $3e^{2x}+1 \leq m, \forall x \in (1;2)$

•Đặt $g(x) = 3e^{2x}+1, \forall x \in (1;2)$, $g(x) = 3e^{2x}.2 > 0, \forall x \in (1;2)$

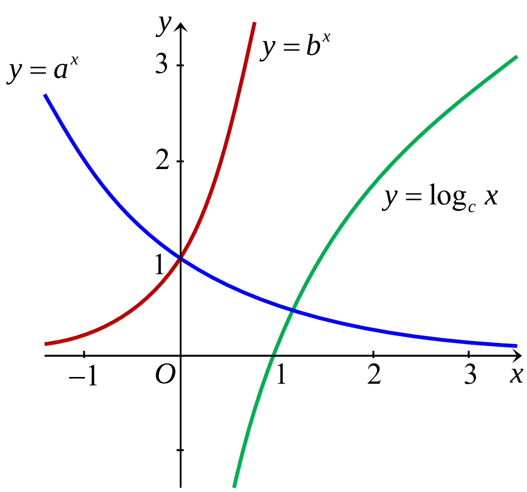
x	1		2
$g'(x)$	|	+	|
$g(x)$	|	$\nearrow$	|

. Vậy (*) xảy ra khi $m \geq g(2) \Leftrightarrow m \geq 3e^4+1$.

BÌNH LUẬN

Sử dụng $\left(a^u\right)' = u'a^u \ln a$ và phương pháp hàm số như các bài trên.

Câu 23: (CHUYÊN BẮC GIANG) Trong hình vẽ dưới đây có đồ thị của các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = \log_c x$.



.

Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?

A. $c < a < b$. B. $a < c < b$. C. $b < c < a$. D. $a < b = c$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Từ đồ thị

Ta thấy hàm số $y=a^x$ nghịch biến $\Rightarrow 0<a<1$.

Hàm số $y=b^x, y=\log_c x$ đồng biến $\Rightarrow b>1, c>1$

$\Rightarrow a<b, a<c$ nên loại A, C

Nếu $b=c$ thì đồ thị hàm số $y=b^x$ và $y=\log_c x$ phải đối xứng nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất $y=x$. Nhưng ta thấy đồ thị hàm số $y=\log_c x$ cắt đường $y=x$ nên loại D.

Câu 24: (CHUYÊN BẮC GIANG) Biết rằng phương trình $(x-2)^{\log_2[4(x-2)]}=4.(x-2)^3$ có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1<x_2)$. Tính $2x_1-x_2$.

A. 1.　　B. 3.　　C. -5.　　D. -1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

- Điều kiện $x>2$.
- Phương trình thành $(x-2)^{\log_2 4+\log_2(x-2)}=4.(x-2)^3$
- $\Leftrightarrow (x-2)^2.(x-2)^{\log_2(x-2)}=4.(x-2)^3$ hay $(x-2)^{\log_2(x-2)}=4.(x-2)$.
- Lấy lôgarit cơ số 2 hai vế ta được $\log_2(x-2).\log_2(x-2)=\log_2[4(x-2)]$

$$\Leftrightarrow \log_2^2(x-2)=2+\log_2(x-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2(x-2)=-1\\ \log_2(x-2)=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{2}\\ x=6\end{array}\right..$$

- Suy ra $x_1=\dfrac{5}{2}$ và $x_2=6$. Vậy $2x_1-x_2=2.\dfrac{5}{2}-6=-1$.

Câu 25: (CHUYÊN KHTN L4) Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\ln x+\ln y\ge \ln(x^2+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$

A. $P=6$.　　B. $P=2\sqrt{2}+3$.　　C. $P=2+3\sqrt{2}$.　　D. $P=\sqrt{17}+\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.

Từ $\ln x+\ln y\ge \ln(x^2+y)\Leftrightarrow xy\ge x^2+y$. Ta xét:

Nếu $0<x\le 1$ thì $y\ge xy\ge x^2+y\Leftrightarrow 0\ge x^2$ mâu thuẫn.

Nếu $x>1$ thì $xy\ge x^2+y\Leftrightarrow y(x-1)\ge x^2 \Leftrightarrow y\ge \dfrac{x^2}{x-1}$. Vậy $P=x+y\ge x+\dfrac{x^2}{x-1}$.

Ta có $f\left(x\right)=x+\dfrac{x^2}{x-1}$ xét trên $\left(1;+\infty\right)$.

Có $f'\left(x\right)=\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2-2x+1}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}(loai)\\x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}(nhan)\end{array}\right.$

Vậy $\min\limits_{(1;+\infty)} f\left(x\right)=f\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}+3$.

Câu 26: (CHUYÊN KHTN L4) Tìm tập hợp tất cả các tham số m sao cho phương trình $4^{x^2-2x+1}-m.2^{x^2-2x+2}+3m-2=0$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $(-\infty;1)$. B. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. C. $[2;+\infty)$. D. $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=2^{(x-1)^2}\quad(t\geq 1)$

Phương trình có dạng: $t^2-2mt+3m-2=0(*)$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2>0\\x_{1,2}=m\pm\sqrt{m^2-3m+2}>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2>0\\\sqrt{m^2-3m+2}<m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2>0\\m-1\geq 0\\m^2-3m+2<m^2-2m+1\end{cases}\Leftrightarrow m>2$$

Chọn đáp án: D

BÌNH LUẬN

Trong bài này do đề bài yêu cầu phương trình có 4 nghiệm phân biệt nên ta cần chú ý mỗi $t\geq 1$ thì ta nhận được bao nhiêu giá trị x

Từ phương trình (*) chúng ta có thể cô lập m và ứng dụng hàm số để biện luận số nghiệm của phương trình thỏa đề bài.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\geq m$ có nghiệm với mọi $x\geq 1$?

A. $m\geq 6$. B. $m>6$. C. $m\leq 6$. D. $m<6$.

Hướng dẫn giải

BPT $\Leftrightarrow \log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\leq \mathrm{m}\Leftrightarrow \log_2(5^x-1).\left[1+\log_2(5^x-1)\right]\leq \mathrm{m}$

Đặt $t=\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ do $x\geq 1\Rightarrow t\in\left[2;+\infty\right)$

BPT $\Leftrightarrow t(1+t)\ge m \Leftrightarrow t^2+t\ge m \Leftrightarrow f(t)\ge m$

Với $f(t)=t^2+t$

$f'(t)=2t+1>0$ với $t\in[2;+\infty)$ nên hàm đồng biến trên $t\in[2;+\infty)$

Nên $Minf(t)=f(2)=6$

Do đó để để bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\ge m$ có nghiệm với mọi $x\ge 1$ thì :

$m\le Minf(t)\Leftrightarrow m\le 6$

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x^2-3}=m\left(\log_4 x^2-3\right)$ có nghiệm thuộc $[32;+\infty)$?

A. $m\in\left(1;\sqrt{3}\right]$. **B.** $m\in\left[1;\sqrt{3}\right)$. **C.** $m\in\left[-1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $m\in\left(-\sqrt{3};1\right]$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x>0$. Khi đó phương trình tương đương: $\sqrt{\log_2^2 x-2\log_2 x-3}=m\left(\log_2 x-3\right)$.

Đặt $t=\log_2 x$ với $x\ge 32\Rightarrow \log_2 x\ge \log_2 32=5$ hay $t\ge 5$.

Phương trình có dạng $\sqrt{t^2-2t-3}=m\left(t-3\right)\quad (*)$.

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: "Tìm m để phương trình $(*)$ có nghiệm $t\ge 5$"

Với $t\ge 5$ thì $(*)\Leftrightarrow \sqrt{(t-3).(t+1)}=m(t-3)\Leftrightarrow \sqrt{t-3}.\left(\sqrt{t+1}-m\sqrt{t-3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{t+1}-m\sqrt{t-3}=0\Leftrightarrow m=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}$

Ta có $\dfrac{t+1}{t-3}=1+\dfrac{4}{t-3}$. Với $t\ge 5\Rightarrow 1<1+\dfrac{4}{t-3}\le 1+\dfrac{4}{5-3}=3$ hay $1<\dfrac{t+1}{t-3}\le 3\Rightarrow 1<\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}\le\sqrt{3}$

suy ra $1<m\le\sqrt{3}$. Vậy phương trình có nghiệm với $1<m\le\sqrt{3}$.

BÌNH LUẬN

Chúng ta có thể dùng hàm số để tìm max, min của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}, t\ge 5$

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(7x^2+7\right)\ge\log_2\left(mx^2+4x+m\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in(2;5]$. **B.** $m\in(-2;5]$. **C.** $m\in[2;5)$. **D.** $m\in[-2;5)$.

Hướng dẫn giải

Bất phương trình tương đương $7x^2+7\ge mx^2+4x+m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(7-m)x^2-4x+7-m\ge 0 & (2)\\ mx^2+4x+m>0 & (3)\end{cases},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

✓ $m=7$: (2) không thỏa $\forall x\in\mathbb{R}$

✓ $m=0$: (3) không thỏa $\forall x\in\mathbb{R}$

$$(1) \text{ thỏa } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-m>0 \\ \Delta_2' = 4-(7-m)^2 \le 0 \\ m>0 \\ \Delta_3' = 4-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ m \le 5 \\ m>0 \\ m>2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2<m\le 5.$$

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5\left(x^2+1\right) > \log_5\left(x^2+4x+m\right)-1 \quad (1)$.

A. $m \in [-12;13]$. **B.** $m \in [12;13]$. **C.** $m \in [-13;12]$. **D.** $m \in [-13;-12]$.

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 > \dfrac{x^2+4x+m}{5} \\ x^2+4x+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -x^2-4x = f(x) \\ m < 4x^2-4x+5 = g(x) \end{cases}$$

Hệ trên thỏa mãn $\forall x \in (2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \underset{2<x<3}{Max}\, f(x) = -12 & \text{khi } x=2 \\ m \le \underset{2<x<3}{Min}\, f(x) = 13 & \text{khi } x=2 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \le m \le 13.$

Câu 31: Phương trình $2^{x-3} = 3^{x^2-5x+6}$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1 < x_2$, hãy chọn phát biểu đúng?

A. $3x_1 - 2x_2 = \log_3 8$. **B.** $2x_1 - 3x_2 = \log_3 8$.

C. $2x_1 + 3x_2 = \log_3 54$. **D.** $3x_1 + 2x_2 = \log_3 54$.

Hướng dẫn giải

Logarit hóa hai vế của phương trình (theo cơ số 2) ta được: $(3) \Leftrightarrow \log_2 2^{x-3} = \log_2 3^{x^2-5x+6}$

$$\Leftrightarrow (x-3)\log_2 2 = \left(x^2-5x+6\right)\log_2 3 \Leftrightarrow (x-3)-(x-2)(x-3)\log_2 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3).\left[1-(x-2)\log_2 3\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ 1-(x-2)\log_2 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ (x-2)\log_2 3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x-2 = \dfrac{1}{\log_2 3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x = \log_3 2 + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x = \log_3 2 + \log_3 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x = \log_3 18 \end{array}\right.$$

Câu 32: Phương trình $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3$ có tổng các nghiệm là ?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4 .

Hướng dẫn giải

$$3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3 \qquad (7)$$

$$(7) \Leftrightarrow 27.3^{3x} + \frac{27}{3^{3x}} + 81.3^x + \frac{81}{3^x} = 10^3 \Leftrightarrow 27.\left(3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}}\right) + 81.\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) = 10^3 \quad (7')$$

Đặt $t = 3^x + \frac{1}{3^x} \overset{Côsi}{\geq} 2\sqrt{3^x.\frac{1}{3^x}} = 2$

$$\Rightarrow t^3 = \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)^3 = 3^{3x} + 3.3^{2x}.\frac{1}{3^x} + 3.3^x.\frac{1}{3^{2x}} + \frac{1}{3^{3x}} \Leftrightarrow 3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} = t^3 - 3t$$

Khi đó: $(7') \Leftrightarrow 27\left(t^3 - 3t\right) + 81t = 10^3 \Leftrightarrow t^3 = \frac{10^3}{27} \Leftrightarrow t = \frac{10}{3} > 2 \quad (N)$

Với $t = \frac{10}{3} \Rightarrow 3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{10}{3} \quad (7")$

Đặt $y = 3^x > 0$. Khi đó: $(7") \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 \quad (N) \\ y = \frac{1}{3} \quad (N) \end{array}\right.$

Với $y = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$

Với $y = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = -1}$

Câu 33: Phương trình $3^{2x} + 2x\left(3^x + 1\right) - 4.3^x - 5 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm không âm ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

$$3^{2x} + 2x\left(3^x + 1\right) - 4.3^x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left(3^{2x} - 1\right) + 2x\left(3^x + 1\right) - \left(4.3^x + 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x - 1\right)\left(3^x + 1\right) + (2x - 4)\left(3^x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(3^x + 2x - 5\right)\left(3^x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow 3^x + 2x - 5 = 0$$

Xét hàm số $f(x) = 3^x + 2x - 5$, ta có : $f(1) = 0$.

$f'(x) = 3^x \ln 3 + 2 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 1$

BÌNH LUẬN

Có thể đặt $t = 3^x > 0$ sau đó tính delta theo x

Câu 34: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^{x^2+4} = 2^{2\left(x^2+1\right)} + \sqrt{2^{2\left(x^2+2\right)} - 2^{x^2+3} + 1}$. Khi đó, tổng hai nghiệm bằng?

A. 0. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

$$2^{x^2+4} = 2^{2\left(x^2+1\right)} + \sqrt{2^{2\left(x^2+2\right)} - 2^{x^2+3} + 1} \Leftrightarrow 8.2^{x^2+1} = 2^{2\left(x^2+1\right)} + \sqrt{4.2^{2\left(x^2+1\right)} - 4.2^{x^2+1} + 1}$$

Đặt $t=2^{x^2+1}\left(t\ge 2\right)$, phương trình trên tương đương với

$8t=t^2+\sqrt{4t^2-4t+1}\Leftrightarrow t^2-6t-1=0\Leftrightarrow t=3+\sqrt{10}$ (vì $t\ge 2$). Từ đó suy ra

$$2^{x^2+1}=3+\sqrt{10}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{\log_2\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}} \\ x_2=-\sqrt{\log_2\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}} \end{array}\right.$$

Vậy tổng hai nghiệm bằng 0.

Câu 35: Với giá trị của tham số m thì phương trình $\left(m+1\right)16^x-2\left(2m-3\right)4^x+6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. $-4<m<-1$. B. Không tồn tại m. C. $-1<m<\dfrac{3}{2}$. D. $-1<m<-\dfrac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $4^x=t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $\underbrace{\left(m+1\right)t^2-2\left(2m-3\right)t+6m+5}_{f(t)}=0.\ (*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa mãn $0<t_1<1<t_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m+1\ne 0 \\ \left(m+1\right)f\left(1\right)<0 \\ \left(m+1\right)\left(6m+5\right)>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m+1\ne 0 \\ \left(m+1\right)\left(3m+12\right)<0 \\ \left(m+1\right)\left(6m+5\right)>0 \end{cases}\Leftrightarrow -4<m<-1.$$

BÌNH LUẬN

Tìm mối quan hệ nghiệm giữa biến cũ và mới, do $\begin{cases} t=4^x\Leftrightarrow x=\log_4 t \\ 0<t<1\Rightarrow \log_4 t<0 \end{cases}$ nên $0<t_1<1<t_2$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Câu 36: Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thoả mãn $x_1+x_2=3$?

A. $m=4$. B. $m=2$. C. $m=1$. D. $m=3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $4^x-m.2^{x+1}+2m=0\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-2m.2^x+2m=0 \qquad (*)$

Phương trình $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn 2^x có: $\Delta'=\left(-m\right)^2-2m=m^2-2m$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2-2m\ge 0\Leftrightarrow m\left(m-2\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le 0 \end{array}\right.$

Áp dụng định lý Vi-ét ta có: $2^{x_1}.2^{x_2}=2m \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2m$

Do đó $x_1+x_2=3 \Leftrightarrow 2^3=2m \Leftrightarrow m=4$.

Thử lại ta được $m=4$ thỏa mãn.**Chọn A.**

BÌNH LUẬN

Do phương trình $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn $2^x>0$ có thể có nghiệm $2^x<0$ (vô lí) nên khi giải ra tham số $m=4$ thì phải thử lại.

Câu 37: (CHUYÊN VINH – L2)Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$.
B. $m\in[1;+\infty)$.
C. $m\in(-4;1)$.
D. $m\in(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t=\log_3 x$, khi đó $x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow t\in\mathbb{R}$.

$y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ trở thành $y=\dfrac{1}{mt^2-4t+m+3}$.

Hàm số $y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi hàm số $y=\dfrac{1}{mt^2-4t+m+3}$ xác định trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow mt^2-4t+m+3=0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'=4-m^2-3m<0 \Leftrightarrow m<-4 \vee m>1$.

Câu 38: (CHUYÊN VINH – L2)Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x-\dfrac{2}{\log_3(x+1)}=m$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $-1<m\neq 0$.
B. $m>-1$.
C. Không tồn tại m.
D. $-1<m<0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases}x+1>0\\x+1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x\neq 0\end{cases}$

Xét hàm số $f(x)=x-\dfrac{2}{\log_3(x+1)}$; $f'(x)=1+\dfrac{2}{(x+1).\ln 3.\log_3^2(x+1)}>0, \forall x\in(-1;0)\cup(0:+\infty)$

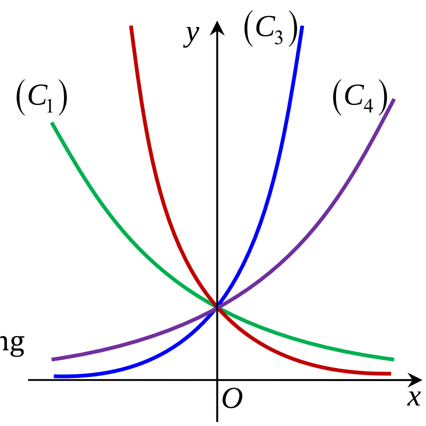
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $x-\dfrac{2}{\log_3(x+1)}=m$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>-1$

Câu 39: **(TIÊN LÃNG – HP)** Cho bốn hàm số $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ (1), $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ (2), $y=4^x$ (3), $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ (4) có đồ thị là 4 đường cong theo phía trên đồ thị, thứ tự từ trái qua phải là $(C_1),(C_2),(C_3),(C_4)$ như hình vẽ bên.

Tương ứng hàm số - đồ thị đúng là



A. $(1)-(C_2),(2)-(C_3),(3)-(C_4),(4)-(C_1)$.

B. $(1)-(C_1),(2)-(C_2),(3)-(C_3),(4)-(C_4)$.

C. $(1)-(C_4),(2)-(C_1),(3)-(C_3),(4)-(C_2)$.

D. $(1)-(C_1),(2)-(C_2),(3)-(C_3),(4)-(C_4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ và $y=4^x$ có cơ số lớn hơn 1 nên hàm đồng biến nên nhận đồ thị là (C_3) hoặc (C_4). Lấy $x=2$ ta có $\left(\sqrt{3}\right)^2<4^2$ nên đồ thị $y=4^x$ là (C_3) và đồ thị $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ là (C_4).

Ta có đồ thị hàm số $y=4^x$ và $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ đối xứng nhau qua Oy nên đồ thị $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ là (C_2).

Còn lại (C_1) là đồ thị của $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$.

Vậy $(1)-(C_4),(2)-(C_1),(3)-(C_3),(4)-(C_2)$

Câu 40: **(CHUYÊN SƠN LA – L2)** Cho phương trình $4\log_9^2 x+m\log_{\frac{1}{3}} x+\dfrac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x+m-\dfrac{2}{9}=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=3$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $1<m<2$. **B.** $3<m<4$. **C.** $0<m<\dfrac{3}{2}$. **D.** $2<m<3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $4\log_9^2 x+m\log_{\frac{1}{3}} x+\dfrac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x+m-\dfrac{2}{9}=0$ Đk: $x>0$

$\Leftrightarrow 4\left(\log_{3^2} x\right)^2 + m\log_{3^{-1}} x + \frac{1}{6}\log_{3^{\frac{-1}{2}}} x + m - \frac{2}{9} = 0$

$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 - m\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 x + m - \frac{2}{9} = 0$

$\Leftrightarrow \log_3{}^2 x - \left(m + \frac{1}{3}\right)\log_3 x + m - \frac{2}{9} = 0 \quad (1)$

Đặt $t = \log_3 x$. Khi đó phương trình $(1) \Leftrightarrow t^2 - \left(m + \frac{1}{3}\right)t + m - \frac{2}{9} = 0 \quad (2)$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2 = 3 \Leftrightarrow \log_3 x_1.x_2 = 1$

$\Leftrightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 1 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 1$

(Với $t_1 = \log_3 x_1$ và $t_2 = \log_3 x_2$)

Áp dụng hệ thức Vi-et cho phương trình (2)

Ta có $t_1 + t_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{-b}{a} = 1 \Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$

Vậy $0 < m < \frac{3}{2}$ là mệnh đề đúng.

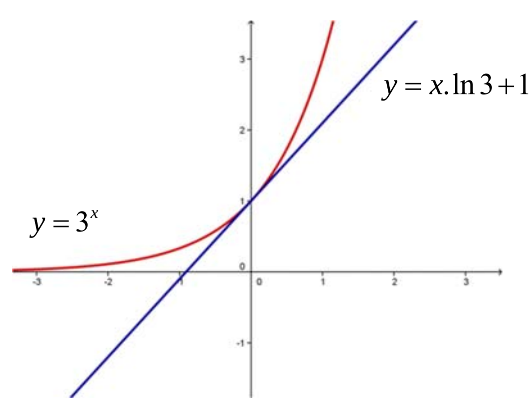
Câu 41: **(CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH – L2)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^x = mx + 1$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m > 0$. **B.** $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq \ln 3 \end{cases}$. **C.** $m \geq 2$. **D.** Không tồn tại m

Hướng dẫn giải

Chọn **B**

Ta có: Số nghiệm của phương trình $3^x = mx + 1$ phụ thuộc vào số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 3^x$ và đường thẳng $y = mx + 1$.



Ta thấy $y = mx + 1$ luôn đi qua điểm cố định $(0; 1)$ nên

+Nếu $m = 0$: phương trình có nghiệm duy nhất

+ Nếu $m < 0$: $y = mx + 1$ là hàm nghịch biến nên có đồ thị cắt đồ thị hàm số $y = 3^x$ tại một điểm duy nhất.

+ Nếu $m > 0$:Để thỏa mãn ycbt thì đường thẳng $y = mx + 1$ phải khác tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 3^x$ tại điểm $(0; 1)$, tức là $m \neq \ln 3$.

Vậy $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq \ln 3 \end{cases}$

BÀI TOÁN VẬN DỤNG (8 - 9 - 10)

Chủ đề 3. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

Câu 1: (SGD VĨNH PHÚC)Gọi $S(t)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=t$ $(t>0)$. Tìm $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t)$.

A. $-\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}-\ln 2$. **D.** $\ln 2+\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1:

*Tìm a,b,c sao cho $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{(x+2)^2}$

$\Leftrightarrow 1=a(x+2)^2+(bx+c)(x+1) \Leftrightarrow 1=ax^2+4ax+4a+bx^2+bx+cx+c$

$\Leftrightarrow 1=(a+b)x^2+(4a+b+c)x+4a+c \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 4a+b+c=0 \\ 4a+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-3 \end{cases}$.

*Vì trên $[0;t]$, $y=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2}>0$ nên ta có:

Diện tích hình phẳng: $S(t)=\int\limits_0^t\left(\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^t\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x+3}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^t\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+2)}-\dfrac{1}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\ln\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}\right)\right|_0^t$

$=\ln\dfrac{t+1}{t+2}+\dfrac{1}{t+2}+\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

*Vì $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{t+1}{t+2}\right)=1 \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left(\dfrac{t+1}{t+2}\right)=0$ và $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t+2}=0$

Nên $\lim\limits_{t\to+\infty}S(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\ln\dfrac{t+1}{t+2}+\dfrac{1}{t+2}+\ln 2-\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

Cách 2: Dùng Máy tính cầm tay.

Diện tích hình phẳng: $S(t)=\int_0^t\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x$

Cho $t=100$ ta bấm máy $=\int_0^{100}\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x\approx 0,193$

Dùng máy tính kiểm tra 4 kết quả ta được đáp án B.

Câu 2: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho các tích phân $I=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\tan x}dx$ và $J=\int_0^{\alpha}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ với $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, khẳng định **sai** là

A. $I=\int_0^{\alpha}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$.

B. $I-J=\ln\left|\sin\alpha+\cos\alpha\right|$.

C. $I=\ln\left|1+\tan\alpha\right|$.

D. $I+J=\alpha$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\frac{1}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$ nên A đúng.

$I-J=\int_0^{\alpha}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\alpha}\frac{d(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}=\ln\left|\cos x+\sin x\right|\Big|_0^{\alpha}=\ln\left|\cos\alpha+\sin\alpha\right|$ B đúng

$I+J=\int_0^{\alpha}dx=x\Big|_0^{\alpha}=\alpha$ D đúng.

Câu 3: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho hàm số $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\left(4t^3-8t\right)dt$. Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$. Tính $M-m$.

A. 18 **B.** 12 **C.** 16 **D.** 9

Hướng dẫn giải

$f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\left(4t^3-8t\right)dt=\left(t^4-4t^2\right)\Big|_1^{\sqrt{x}}=x^2-4x+3$, với $x\ge 0$.

$f'(x)=2x-4;f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in[1;6]$.

$f(0)=3;f(2)=-1;f(6)=15$. Suy ra $M=15,m=-1$. Suy ra $M-m=16$.

Đáp án: **C.**

Câu 4: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Giả sử $\int x(1-x)^{2017}\,dx=\frac{(1-x)^a}{a}-\frac{(1-x)^b}{b}+C$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $2a-b$ bằng:

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2020.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int x(1-x)^{2017}\,dx=\int(x-1+1)(1-x)^{2017}\,dx=\int\left((1-x)^{2017}-(1-x)^{2018}\right)dx=-\frac{(1-x)^{2018}}{2018}+\frac{(1-x)^{2019}}{2019}+C$$

Vậy $a=2019,b=2018\Rightarrow 2a-b=2020$.

Chọn D.

Câu 5: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{e^x+3}$ và $F(0)=-\frac{1}{3}\ln 4$. Tập nghiệm S của phương trình $3F(x)+\ln(x^3+3)=2$ là:

A. $S=\{2\}$. **B.** $S=\{-2;2\}$. **C.** $S=\{1;2\}$. **D.** $S=\{-2;1\}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x)=\int\frac{dx}{e^x+3}=\frac{1}{3}\int\left(1-\frac{e^x}{e^x+3}\right)dx=\frac{1}{3}\left(x-\ln\left(e^x+3\right)\right)+C$.

Do $F(0)=-\frac{1}{3}\ln 4$ nên $C=0$. Vậy $F(x)=\frac{1}{3}\left(x-\ln\left(e^x+3\right)\right)$.

Do đó: $3F(x)+\ln\left(e^x+3\right)=2\Leftrightarrow x=2$

Chọn A.

Câu 6: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho $f(x),g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[2;6]$ và thỏa mãn $\int_2^3 f(x)dx=3;\int_3^6 f(x)dx=7;\int_3^6 g(x)dx=5$. Hãy tìm mệnh đề KHÔNG đúng.

A. $\int_3^6[3g(x)-f(x)]dx=8$

B. $\int_2^3[3f(x)-4]dx=5$

C. $\int_2^{\ln e^6}[2f(x)-1]dx=16$

D. $\int_3^{\ln e^6}[4f(x)-2g(x)]dx=16$

Hướng dẫn giải

$$\int_2^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx=\int_2^6 \mathrm{f}(x)dx=10$$

Ta có: $\int_3^6[3g(x)-f(x)]dx=3\int_3^6 g(x)dx-\int_3^6 f(x)dx=15-7=8$ nên A đúng

$\int_2^3[3f(x)-4]dx=3\int_2^3 \mathrm{f}(x)dx-4\int_2^3 dx=9-4=5$ nên B đúng

$\int_2^{\ln e^6}[2f(x)-1]dx=\int_2^6[2f(x)-1]dx=2\int_2^6 \mathrm{f}(x)dx-1\int_2^6 dx=20-4=16$ nên C đúng

$\int_3^{\ln e^6}[4f(x)-2g(x)]dx=\int_3^6[4f(x)-2g(x)]dx=4\int_3^6 \mathrm{f}(x)dx-2\int_3^6 g(x)dx=28-10=18$

Nên D sai

Chọn đáp án D

Câu 7: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Giả sử $\int e^{2x}(2x^3+5x^2-2x+4)dx=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}+C$. Khi đó $a+b+c+d$ bằng

A. -2 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Hướng dẫn giải

Chọn **B.**

Ta có $\int e^{2x}(2x^3+5x^2-2x+4)dx=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}+C$ nên

$$\begin{aligned}\left((ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}+C\right)'&=(3ax^2+2bx+c)e^{2x}+2e^{2x}(ax^3+bx^2+cx+d)\\&=\left(2ax^3+(3a+2b)x^2+(2b+2c)x+c+2d\right)e^{2x}\\&=(2x^3+5x^2-2x+4)e^{2x}\end{aligned}$$

Do đó $\begin{cases}2a=2\\3a+2b=5\\2b+2c=-2\\c+2d=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=-2\\d=3\end{cases}$. Vậy $a+b+c+d=3$.

Câu 8: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho biết $\int_{-1}^5 f(x)dx=15$. Tính giá trị của $P=\int_0^2[f(5-3x)+7]\mathrm{dx}$

A. $P=15$ **B.** $P=37$ **C.** $P=27$ **D.** $P=19$

Hướng dẫn giải

Để tính P ta đặt $\begin{array}{l} t = 5 - 3x \Rightarrow dx = -\dfrac{dt}{3} \\ x = 0 \Rightarrow t = 5 \\ x = 2 \Rightarrow t = -1 \end{array}$ nên

$$P = \int_5^{-1} [f(t) + 7](-\frac{dt}{3}) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{5} [f(t) + 7]\,\mathrm{dt} = \frac{1}{3}\left(\int_{-1}^{5} f(t)dt + 7\int_{-1}^{5} dt\right)$$

$$= \frac{1}{3}.15 + \frac{1}{3}.7.(6) = 19$$

chọn đáp án D

Câu 9: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho hàm số $f(x) = a\sin 2x - b\cos 2x$ thỏa mãn $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ và $\int_a^b adx = 3$. Tính tổng $a + b$ bằng:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn **C.**

$f'(x) = 2a\cos 2x + 2b\sin 2x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \Leftrightarrow -2a = -2 \Leftrightarrow a = 1$

$\int_a^b adx = \int_1^b dx = 3 \Leftrightarrow b - 1 = 3 \Leftrightarrow b = 4$

Vậy $a + b = 1 + 4 = 5$.

Câu 10: (TRẦN HƯNG ĐẠO – NB) Biết rằng: $\int_0^{\ln 2}\left(x + \frac{1}{2e^x + 1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^a 2 + b\ln 2 + c\ln\frac{5}{3}$. Trong đó a, b, c là những số nguyên. Khi đó $S = a + b - c$ bằng:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$\int_0^{\ln 2}\left(x + \frac{1}{2e^x + 1}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} x\mathrm{d}x + \int_0^{\ln 2}\frac{1}{2e^x + 1}\mathrm{d}x$.

Tính $\int_0^{\ln 2} x\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2}$

Tính $\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2e^x + 1}\mathrm{d}x$

Đặt $t = 2e^x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2e^x\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t - 1}$. Đổi cận : $x = \ln 2 \Rightarrow t = 5, x = 0 \Rightarrow t = 3$.

$$\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2e^x+1}\mathrm{d}x=\int_3^5\frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)}=\int_3^5\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln|t-1|-\ln|t|\right)\Big|_3^5=\ln 4-\ln 5-\ln 2+\ln 3=\ln 2-\ln\frac{5}{3}.$$

$$\int_0^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 2+\ln 2-\ln\frac{5}{3}\Rightarrow a=2,b=1,c=-1$$

Vậy $a+b-c=4$.

Câu 11: (LẠNG GIANG SỐ 1) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{1}{2}\left(x^2-4x+3\right)$ và hai tiếp tuyến của (C) xuất phát từ $M(3;-2)$ là

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $y'=\frac{1}{2}(2x-4)=x-2$.

Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Khi đó, $y_0=\frac{1}{2}\left(x_0^2-4x_0+3\right)$ và $y'(x_0)=x_0-2$.

Phương trình của tiếp tuyến của (C) tại điểm có tọa độ $(x_0;y_0)$ là

$$y=(x_0-2)(x-x_0)+\frac{1}{2}\left(x_0^2-4x_0+3\right)$$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(3;-2)$ nên

$$-2=(x_0-2)(3-x_0)+\frac{1}{2}\left(x_0^2-4x_0+3\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\Rightarrow y=-x+1\\x_0=5\Rightarrow y=3x-11\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm

$$S=\left|\int_1^3\left[\frac{1}{2}\left(x^2-4x+3\right)-(-x+1)\right]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_3^5\left[\frac{1}{2}\left(x^2-4x+3\right)-(3x-11)\right]\mathrm{d}x\right|=\frac{8}{3}$$

Câu 12: (LẠNG GIANG SỐ 1) Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=a\pi+b\ln 2$, với a, b là các số thực. Tính $16a-8b$

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}\tan x \end{cases}$. Ta có

$$I = \frac{1}{2}x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{4}$$

Do đó, $16a - 8b = 4$.

Câu 13: (LẠNG GIANG SỐ 1) Giả sử $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^5 f(z)\mathrm{d}z = 9$. Tổng $\int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\mathrm{d}t$ bằng

A. 12. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 3$; $\int\limits_0^5 f(z)\mathrm{d}z = 9 \Rightarrow \int\limits_0^5 f(t)\mathrm{d}t = 9$

$$9 = \int\limits_0^5 f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\mathrm{d}t = 3 + \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\mathrm{d}t = 6.$$

Câu 14: (LẠNG GIANG SỐ 1) Tích phân $\int\limits_0^{\ln 2}\frac{e^{2x+1}+1}{e^x}\mathrm{d}x = e + \frac{a}{b}$. Tính tích $a.b$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\int\limits_0^{\ln 2}\frac{e^{2x+1}+1}{e^x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\ln 2}e^{x+1}\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\ln 2}e^{-x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\ln 2}e^{x+1}\mathrm{d}(x+1) - \int\limits_0^{\ln 2}e^{-x}\mathrm{d}(-x)$$

$$= e^{(x+1)}\Big|_0^{\ln 2} - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} = (2e - e) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = e + \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow ab = 2.$$

Câu 15: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Biết $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3}\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{a} + \frac{\sqrt{3}\pi^2}{b} + c\pi + d\sqrt{3}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $a+b+c+d$.

A. $a+b+c+d = 28$. **B.** $a+b+c+d = 16$. **C.** $a+b+c+d = 14$. **D.** $a+b+c+d = 22$.

Hướng dẫn giải

Chọn **A.**

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3}dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(\sqrt{1+x^6}-x^3\right)\sin x}{1+x^6-x^6}dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+x^6}-x^3\right)\sin xdx.$$

Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3} \\ x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$.

$$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+t^6}+t^3\right)\sin(-t)(-dt)=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+t^6}+t^3\right)\sin tdt=-\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{1+x^6}+x^3\right)\sin xdx$$

Suy ra $2I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(-2x^3\sin x\right)dx\Leftrightarrow I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x^3\sin xdx$.

$$\begin{array}{ccc} x^3 & (+) & +\sin x \\ 3x^2 & (-) & -\cos x \\ 6x & (+) & -\sin x \\ 6 & (-) & +\cos x \\ 0 & & +\sin x \end{array}$$

$$I=\left(-x^3\sin x+3x^2\cos x+6x\sin x-6\sin x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^3}{27}-\frac{\sqrt{3}\pi^2}{3}-2\pi+6\sqrt{3}$$

Suy ra: $a=27, b=-3, c=-2, d=6$. Vậy $a+b+c+d=28$.

Câu 16: (NGÔ GIA TỰ - VP) Có bao nhiêu giá trị của a trong đoạn $\left[\dfrac{\pi}{4};2\pi\right]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^a\frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow t^2=1+3\cos x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=-3\sin x\mathrm{d}x.$

Đổi cận: + Với $x=0\Rightarrow t=2$

+ Với $x=a\Rightarrow t=\sqrt{1+3\cos a}=A.$

Khi đó $\int\limits_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\mathrm{d}x = \int\limits_A^2 \frac{2}{3}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t\Big|_A^2 = \frac{2}{3}(2-A) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow A=1 \Rightarrow \sqrt{1+3\cos a}=1 \Rightarrow \cos a = 0$

$\Rightarrow a = \frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$. Do $a\in\left[\frac{\pi}{4};2\pi\right] \Rightarrow \frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le k\le\frac{3}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}k=0\\k=1\end{array}\right.$.

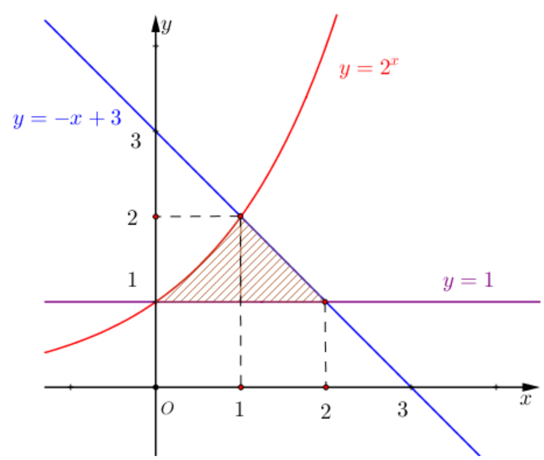
Bình luận: Khi cho $a=\frac{\pi}{2}+\pi$ thì tích phân không xác định vì mẫu thức không xác định (trong căn bị âm). Vậy đáp án phải là B, nghĩa là chỉ chấp nhận $a=\frac{\pi}{2}$.

Câu 17: (NGÔ GIA TỰ - VP) Diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường: $y=2^x$, $y=-x+3$ và $y=1$ là:

A. $S=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2}$. **B.** $S=\frac{1}{\ln 2}+1$. **C.** $S=\frac{47}{50}$. **D.** $S=\frac{1}{\ln 2}+3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Xét phương trình hoành độ giao điểm của các đường. Ta có:

- $2^x=-x+3 \Leftrightarrow x=1$
- $2^x=1 \Leftrightarrow x=0$
- $-x+3=1 \Leftrightarrow x=2$

Diện tích cần tìm là: $S=\int\limits_0^1\left(2^x-1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left(-x+3-1\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2^x}{\ln 2}-x\right)\Big|_0^1+\left(\frac{-x^2}{2}+2x\right)\Big|_1^2=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2}$

Câu 18: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Có bao nhiêu số $a\in(0;20\pi)$ sao cho $\int\limits_0^a \sin^5 x\sin 2x dx=\frac{2}{7}$.

A. 20. **B.** 19. **C.** 9. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_0^a \sin^5 x\sin 2xdx = 2\int\limits_0^a \sin^6 x\cos xdx = 2\int\limits_0^a \sin^6 xd\left(\sin x\right) = \frac{2}{7}\sin^7 x\Big|_0^a = \frac{2}{7}\sin^7 a = \frac{2}{7}$.

Do đó $\sin^7 a = 1 \Leftrightarrow \sin a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Vì $a \in \left(0;20\pi\right)$ nên $0 < \frac{\pi}{2} + k2\pi < 20\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 10$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên có 10 giá trị của k

Câu 19: (THTT – 477) Giá trị của $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_n^{n+1}\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** e. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $I = \int\limits_n^{n+1}\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$

Đặt $t = 1+e^x \Rightarrow \mathrm{d}t = e^x\mathrm{d}x$. Đổi cận: Khi $x = n \Rightarrow t = 1+e^n; x = n+1 \Rightarrow t = 1+e^{n+1}$

Khi đó: $I = \int\limits_{1+e^n}^{1+e^{n+1}}\frac{1}{t\left(t-1\right)}\mathrm{d}t = \int\limits_{1+e^n}^{1+e^{n+1}}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \left(\ln\left|t-1\right| - \ln\left|t\right|\right)\Big|_{1+e^n}^{1+e^{n+1}} = 1+\ln\frac{1+e^n}{1+e^{n+1}}$

Mà $\frac{1+e^n}{1+e^{n+1}} = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n + 1}{\left(\frac{1}{e}\right)^n + e} \to \frac{1}{e}$ khi $n \to +\infty$, Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} I = 1+\ln\frac{1}{e} = 0$

Câu 20: (THTT – 477) Nếu $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n x\cos xdx = \frac{1}{64}$ thì n bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

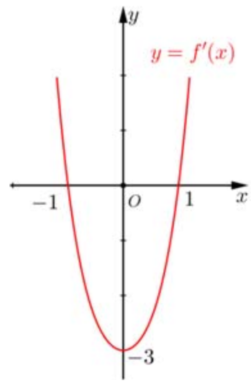
Chọn A.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$. Đổi cận: khi $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Khi đó: $I = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} t^n\mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{64}$.

Suy ra $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{64}$ có nghiệm duy nhất $n = 3$ (tính đơn điệu).

Câu 21: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \left(a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Biết rằng đồ thị $\left(C\right)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

A. $S=9$. **B.** $S=\dfrac{27}{4}$. **C.** $\dfrac{21}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Từ đồ thị suy ra $f'(x)=3x^2-3$.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-3)dx=x^3-3x+C$.

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ x_0 âm nên $f'(x_0)=0\Leftrightarrow 3x_0^2-3=0\Leftrightarrow x_0=-1$.

Suy ra $f(-1)=4\Leftrightarrow C=2\Rightarrow (C): y=x^3-3x+2$

Xét phương trình $x^3-3x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx=\dfrac{27}{4}$.

Câu 22: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_{1}^{3} f(-2x)\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x$

A. $I=11$. **B.** $I=5$. **C.** $I=2$. **D.** $I=14$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow \int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=8$

$$\int_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x = \int_1^3 f(2x)\mathrm{d}x = 3$$

Xét tích phân $K = \int_1^3 f(2x)\mathrm{d}x = 3$

Đặt $u = 2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2}$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow u = 2;\ x = 3 \Rightarrow u = 6$.

$$K = \frac{1}{2}\int_2^6 f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow \int_2^6 f(x)\mathrm{d}x = 6$$

Vậy $I = \int_{-1}^6 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^6 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^6 f(x)\mathrm{d}x = 8 + 6 = 14$.

Câu 23: (SỞ GD HÀ NỘI) Biết rằng $\int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}}dx = \dfrac{a}{5}e^2 + \dfrac{b}{3}e + c\ \left(a,b,c \in \mathbb{R}\right)$. Tính $T = a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3}$.

A. $T = 6$. **B.** $T = 9$. **C.** $T = 10$. **D.** $T = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3x \Rightarrow 2tdt = 3dx$

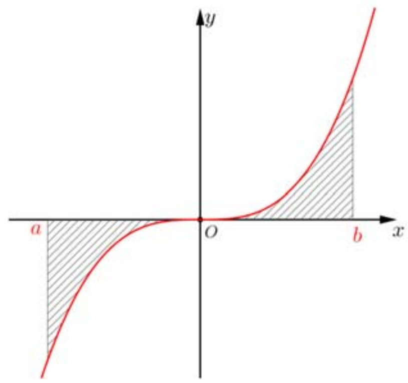
Đổi cận: + $x = 0 \Rightarrow t = 1$

+ $x = 1 \Rightarrow t = 2$

$$\Rightarrow \int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}}dx = 2\int_1^2 te^t dt = 2\left(te^t\Big|_1^2 - \int_1^2 e^t dt\right) = 2\left(te^t\Big|_1^2 - e^t\Big|_1^2\right) = 2\left(2e^2 - e - e^2 + e\right) = 2e^2.$$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = c = 0 \end{cases} \Rightarrow T = 10$ nên câu C đúng.

Câu 24: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ dưới đây).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. Chọn công thức đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?

A. $S_D = \int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S_D = -\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S_D = \int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S_D = -\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+ Nhìn đồ thị ta thấy:

- Đồ thị (C) cắt trục hoành tại $O(0;0)$
- Trên đoạn $[a;0]$, đồ thị (C) ở dưới trục hoành nên $|f(x)| = -f(x)$
- Trên đoạn $[0;b]$, đồ thị (C) ở trên trục hoành nên $|f(x)| = f(x)$

+ Do đó: $S_D = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^0 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Câu 25: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GL) Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}dx = 4 + a\ln 2 + b\ln 5$, với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - b$.

A. $S = 9$. **B.** $S = 11$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = -3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x + \int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$

$= \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x}dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x}dx = \int_1^2 \frac{5-2x}{x}dx + \int_2^5 \frac{2x-3}{x}dx$

$$= \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - x\right)dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x}\right)dx = \left(5\ln|x| - x\right)\Big|_1^2 + \left(2x - 3\ln|x|\right)\Big|_2^5$$

$$= 8\ln 2 - 3\ln 5 + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a - b = 11.$$

Câu 26: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Biết $I = \int\limits_0^4 x\ln(2x+1)\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\ln 3 - c$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 60$. **B.** $S = 70$. **C.** $S = 72$. **D.** $S = 68$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $I = \int\limits_0^4 x\ln(2x+1)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2}{2x+1}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$I = \int\limits_0^4 x\ln(2x+1)\,dx = \left.\frac{x^2\ln(2x+1)}{2}\right|_0^4 - \int\limits_0^4 \frac{x^2}{2x+1}dx$$

$$= 8\ln 9 - \int\limits_0^4 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2x+1)}\right)dx = 16\ln 3 - \left.\left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\ln|2x+1|\right)\right|_0^4 = \frac{63}{4}\ln 3 - 3$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}\ln 3 - c = \frac{63}{4}\ln 3 - 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 63 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow S = 70.$$

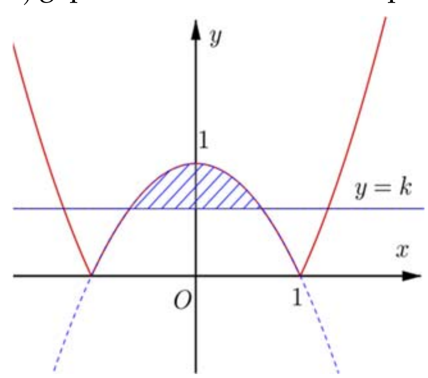
Câu 27: (PHAN ĐÌNH PHÙNG – HN) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = k, 0 < k < 1$. Tìm k để diện tích của hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên.

A. $k = \sqrt[3]{4}$.

B. $k = \sqrt[3]{2} - 1$.

C. $k = \frac{1}{2}$.

D. $k = \sqrt[3]{4} - 1$.

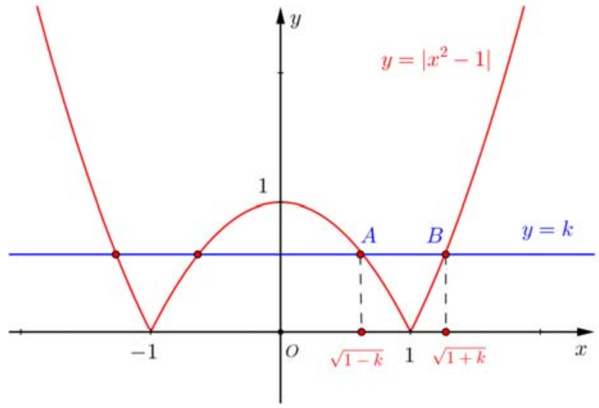


Hướng dẫn giải

Chọn D.

Do đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng nên yêu cầu bài toán trở thành:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=1-x^2, y=k, x=0$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y=1-x^2, y=x^2-1, y=k, x>0$.



$$\int_0^{\sqrt{1-k}} \left(1-x^2-k\right)\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{1-k}}^{1} \left(k-1+x^2\right)\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{1+k}} \left(k-x^2+1\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow (1-k)\sqrt{1-k}-\frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k}$$

$$=\frac{1}{3}-(1-k)-\frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k}+(1-k)\sqrt{1-k}+(1+k)\sqrt{1+k}-\frac{1}{3}(1+k)\sqrt{1+k}-(1+k)+\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+k)\sqrt{1+k}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+k}\right)^3=2 \Leftrightarrow k=\sqrt[3]{4}-1.$$

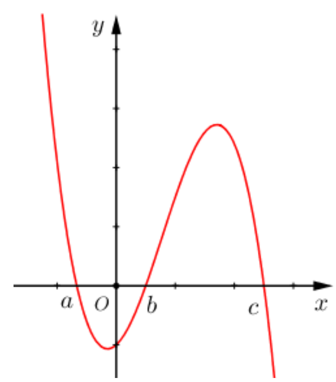
Câu 28: (CHUYÊN THÁI BÌNH) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(c)>f(a)>f(b)$.

B. $f(c)>f(b)>f(a)$.

C. $f(a)>f(b)>f(c)$.

D. $f(b)>f(a)>f(c)$.



Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên các đoạn $[a;b]$ và $[b;c]$, lại có $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Do đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y=f'(x) \\ y=0 \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ là:

$$S_1 = \int_a^b \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x = -\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = -f(x)\Big|_a^b = f(a) - f(b).$$

Vì $S_1 > 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$ (1)

Tương tự: diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = f'(x) \\ y = 0 \\ x = b \\ x = c \end{cases}$ là:

$$S_2 = \int_b^c \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x = \int_b^c f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_b^c = f(c) - f(b).$$

$S_2 > 0 \Rightarrow f(c) > f(b)$ (2).

Mặt khác, dựa vào hình vẽ ta có: $S_1 < S_2 \Leftrightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta **chọn đáp án A.**

(có thể so sánh $f(a)$ với $f(b)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[a;b]$ và so sánh $f(b)$ với $f(c)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[b;c]$).

Câu 29: Cho tam giác đều ABC có diện tích bằng $\sqrt{3}$ quay xung quanh cạnh AC của nó. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

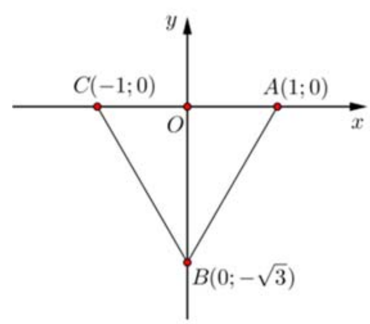
A. $V = 2\pi$. **B.** $V = \pi$. **C.** $V = \frac{7}{4}\pi$. **D.** $V = \frac{7}{8}\pi$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

$S_{ABC} = \sqrt{3} \Rightarrow AB = BC = CA = 2$. Chọn hệ trục vuông góc Oxy sao cho $O(0;0), A(1;0), B(0;-\sqrt{3})$ với O là trung điểm AC. Phương trình đường thẳng AB là $y = \sqrt{3}(x-1)$, thể tích khối tròn xoay khi quay ABO quanh trục AC (trùng Ox) tính bởi

$V' = \pi \int_0^1 \sqrt{3}(x-1)dx = \pi$. Vậy thể tích cần tìm $V = 2V' = 2\pi$.



Câu 30: Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị của $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}.\cos x}{1+2^x}\mathrm{d}x$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}\cos x}{1+2^x}\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x\cos x}{\left(1+2^x\right).2}\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{2^x\cos x}{\left(1+2^x\right).2}\mathrm{d}x \ (1)$

Đặt $x=-t$ ta có $x=0$ thì $t=0, \mathrm{x}=-\frac{\pi}{2}$ thì $t=\frac{\pi}{2}$ và $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x\cos x}{\left(1+2^x\right).2}\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{-t}\cos\left(-t\right)}{\left(1+2^{-t}\right).2}\mathrm{d}\left(-t\right) = -\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\left(1+2^t\right).2}\mathrm{d}t = -\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(1+2^x\right).2}\mathrm{d}x$$

Thay vào (1) có

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}\cos x}{1+2^x}\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x\cos x}{\left(1+2^x\right).2}\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(1+2^x\right).2}dx$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1+2^x\right)\cos x}{\left(1+2^x\right).2}\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2}\mathrm{d}x = \left.\frac{\sin x}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Vậy $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{x-1}\,\mathrm{cosx}}{1+2^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

Câu 31: **(CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3)**Cho f, g là hai hàm liên tục trên $\left[1;3\right]$ thỏa: $\int\limits_1^3\left[f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=10$. $\int\limits_1^3\left[2f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int\limits_1^3\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$.

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

- Ta có $\int\limits_1^3\left[f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=10 \Leftrightarrow \int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x+3\int\limits_1^3 g\left(x\right)\mathrm{d}x=10$.

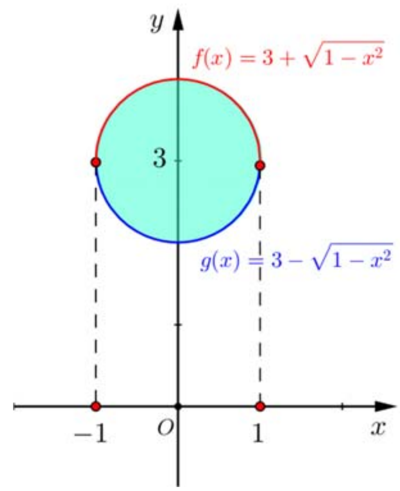
- Tương tự $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]dx = 6 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = 6$.
- Xét hệ phương trình $\begin{cases} u+3v=10 \\ 2u-v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases}$, trong đó $u=\int_1^3 f(x)dx$, $v=\int_1^3 g(x)dx$.
- Khi đó $\int_1^3 [f(x)+g(x)]dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 4+2=6$.

Câu 32: (PHAN ĐÌNH PHÙNG) Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C): x^2+(y-3)^2=1$ xung quanh trục hoành là

A. $V=6\pi$. **B.** $V=6\pi^3$. **C.** $V=3\pi^2$. **D.** $V=6\pi^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



$x^2+(y-3)^2=1 \Leftrightarrow y=3\pm\sqrt{1-x^2}$.

$V=\pi\int_{-1}^{1}\left[\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx = 12\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Đặt $x=\sin t \Rightarrow dx=\cos t.dt$. Với $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \\ x=-11 \Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow V=12\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt = 12\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt = 6\pi^2$.

Câu 33: (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$ cho (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=7$. Để diện tích elip (E) gấp 7 lần diện tích hình tròn (C) khi đó

A. $ab=7$. **B.** $ab=7\sqrt{7}$. **C.** $ab=\sqrt{7}$. **D.** $ab=49$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0) \Rightarrow y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Diện tích (E) là $S_{(E)}=4\int_0^a \dfrac{b\sqrt{a^2-x^2}dx}{a} = 4\dfrac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$

Đặt $x=a\sin t$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx=a\cos tdt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow \text{t}=0; x=a\Rightarrow \text{t}=\dfrac{\pi}{2}$

$$S_{(E)}=4\frac{b}{a}\int_0^a \text{a}^2.\cos^2\text{tdt}=2ab\int_0^a\left(1+\cos 2\text{t}\right)\text{dt}=\pi ab$$

Mà ta có $S_{(C)}=\pi.R^2=7\pi.$

Theo giả thiết ta có $S_{(E)}=7.S_{(C)}\Leftrightarrow \pi ab=49\pi\Leftrightarrow ab=49.$

Câu 34: (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Giả sử tích phân $\int_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)^{2017}\text{d}x=a+\dfrac{b}{c}\ln 3$. Với phân số $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Lúc đó

A. $b+c=6057.$ **B.** $b+c=6059.$ **C.** $b+c=6058.$ **D.** $b+c=6056.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $I=\int_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)^{2017}\text{d}x=2017\int_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)\text{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(2x+1\right)\\ \text{d}v=x\text{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{d}u=\dfrac{2}{2x+1}\text{d}x\\ v=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{8}\end{cases}$

Do đó $\int_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)\text{d}x=\left(\ln\left(2x+1\right)\right)\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{8}\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1\left(\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{8}\right)\dfrac{2}{2x+1}\right)\text{d}x$

$$=\frac{3}{8}\ln 3-\left(\frac{x^2-x}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{8}\ln 3$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 x.\ln\left(2x+1\right)^{2017}\text{d}x=2017\left(\frac{3}{8}\ln 3\right)=\frac{6051}{8}\ln 3.$$

Khi đó $b+c=6059.$

Câu 35: (NGÔ QUYỀN – HP) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my=x^2$, $mx=\dfrac{1}{2}y^2$, $\left(m>0\right)$. Tìm giá trị của m để $S=3$.

A. $m=\dfrac{3}{2}.$ **B.** $m=2.$ **C.** $m=3.$ **D.** $m=\dfrac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $2my = x^2 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2m}x^2 > 0$ (do $m > 0$).

và $mx = \dfrac{1}{2}y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2mx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{2mx} \geq 0 \\ y = -\sqrt{2mx} < 0 \end{array}\right.$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $2my = x^2$ và $mx = \dfrac{1}{2}y^2$ ta có

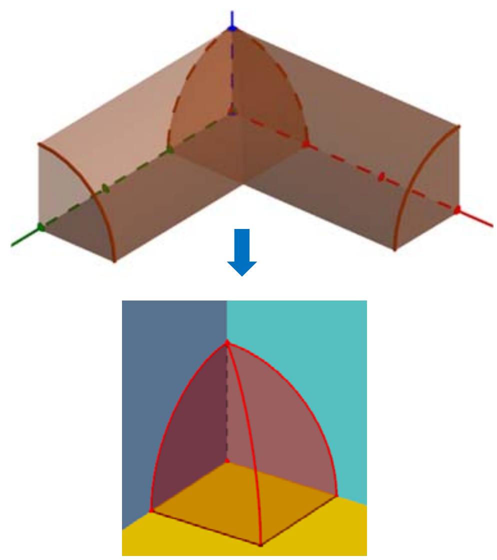
$\dfrac{1}{2m}x^2 = \sqrt{2mx} \Leftrightarrow x^2 = 2m\sqrt{2mx} \Leftrightarrow x^4 - 8m^3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$.

Khi đó $S = \int\limits_0^{2m} \left|\dfrac{1}{2m}x^2 - \sqrt{2mx}\right| \mathrm{d}x = \left|\int\limits_0^{2m} \left(\dfrac{1}{2m}x^2 - \sqrt{2mx}\right) \mathrm{d}x\right|$

$= \left|\left.\left(\dfrac{1}{2m}.\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2\sqrt{2m}}{3}x\sqrt{x}\right)\right|_0^{2m}\right| = \dfrac{4m^2}{3}$.

Để $S = 3 \Leftrightarrow \dfrac{4m^2}{3} = 3 \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow m = \dfrac{3}{2}$ (do $m > 0$).

Câu 36: (CHUYÊN KHTN L4) Gọi (H) là phần giao của hai khối $\dfrac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của (H).



A. $V_{(H)} = \dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $V_{(H)} = \dfrac{3a^3}{4}$.

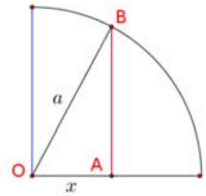
C. $V_{(H)} = \dfrac{a^3}{2}$. **D.** $V_{(H)} = \dfrac{\pi a^3}{4}$.

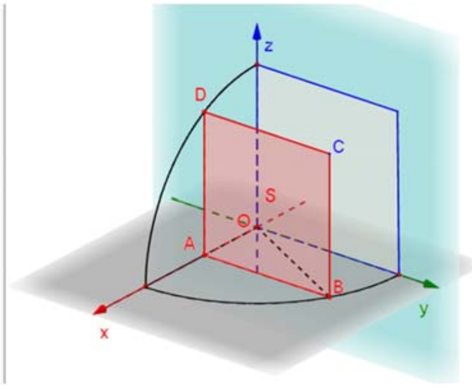
Hướng dẫn giải

Chọn đáp án A.

Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x) = a^2 - x^2$

Thể tích khối (H) là $\int\limits_0^a S(x)dx = \int\limits_0^a (a^2 - x^2)dx = \dfrac{2a^3}{3}$.





Câu 37: (CHUYÊN KHTN L4) Với các số nguyên a,b thỏa mãn $\int_1^2 (2x+1)\ln x\mathrm{d}x = a+\frac{3}{2}+\ln b$.

Tính tổng $P=a+b$.

A. $P=27$. **B.** $P=28$. **C.** $P=60$. **D.** $P=61$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

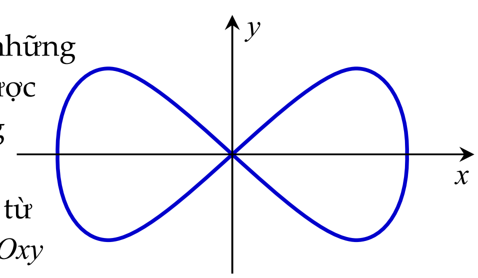
Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=(2x+1)\mathrm{d}x \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=x^2+x \end{cases}$

$$\int_1^2 (2x+1)\ln x\mathrm{d}x = \left(x^2+x\right)\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(x^2+x\right).\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=6\ln 2-\int_1^2 (x+1)\mathrm{d}x = 6\ln 2-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_1^2 = 6\ln 2-\left(4-\frac{3}{2}\right) = -4+\frac{3}{2}+\ln 64$$

$P=a+b=-4+64=60$.

Câu 38: **(CHUYÊN VINH – L2)**Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2=x^2\left(25-x^2\right)$ như hình vẽ bên.



Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

A. $S=\frac{125}{6}\left(m^2\right)$ **B.** $S=\frac{125}{4}\left(m^2\right)$ **C.** $S=\frac{250}{3}\left(m^2\right)$ **D.** $S=\frac{125}{3}\left(m^2\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

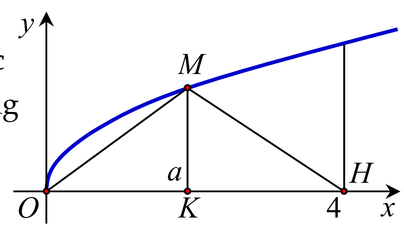
Vì tính đối xứng trụ nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy.

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y=\pm\frac{1}{4}x\sqrt{5-x^2}$.

Góc phần tư thứ nhất $y=\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2};x\in[0;5]$

Nên $S_{(I)}=\frac{1}{4}\int\limits_0^5 x\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x=\frac{125}{12}\Rightarrow S=\frac{125}{3}(m^3)$

Câu 39: **(CHUYÊN VINH – L2)** Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\ (0<a<4)$ cắt đồ thị hàm $y=\sqrt{x}$ tại M (hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó



A. $a=2$. **B.** $a=2\sqrt{2}$. **C.** $a=\frac{5}{2}$. **D.** $a=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$. Khi đó $V=\pi\int\limits_0^4 x\mathrm{d}x=8\pi$

Ta có $M\left(a;\sqrt{a}\right)$

Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

- Hình nón (N_1) có đỉnh là O, chiều cao $h_1=OK=a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$;
- Hình nón (N_2) thứ 2 có đỉnh là H, chiều cao $h_2=HK=4-a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$

Khi đó $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2h_1+\frac{1}{3}\pi R^2h_2=\frac{4}{3}\pi a$

Theo đề bài $V=2V_1\Leftrightarrow 8\pi=2.\frac{4}{3}\pi a\Rightarrow a=3$.

Câu 40: **(CHUYÊN VINH – L2)** Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y=x^2-4x+4$, trục tung và trục hoành. Xác định k để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.

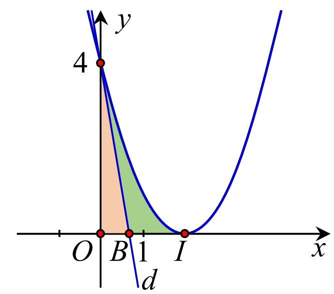
A. $k=-4$. **B.** $k=-8$. **C.** $k=-6$. **D.** $k=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$ và trục hoành là: $x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=2$.

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung và trục hoành là: $S = \int_0^2 \left|x^2 - 4x + 4\right| \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$.



Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k có dạng: $y = kx + 4$.

Gọi B là giao điểm của (d) và trục hoành. Khi đó $B\left(\frac{-4}{k};0\right)$.

Đường thẳng (d) chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau khi $B \in OI$ và $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}S = \frac{4}{3}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{-4}{k} < 2 \\ S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.4.\frac{-4}{k} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -2 \\ k = -6 \end{cases} \Leftrightarrow k = -6.$$

Câu 41: **(CHUYÊN TUYÊN QUANG –L1)** Tính tích phân $\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}} \frac{-4x^4 + x^2 - 3}{x^4 + 1} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(a\sqrt{3} + b + c\pi\right) + 4$. Với a, b, c là các số nguyên. Khi đó biểu thức $a + b^2 + c^4$ có giá trị bằng

A. 20. **B.** 241. **C.** 196. **D.** 48.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{-4x^4 + x^2 - 3}{x^4 + 1} \mathrm{d}x = \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \left(-4 + \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\right) \mathrm{d}x = -4\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x + \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} \mathrm{d}x = I + J$.

Tính $I = -4\int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x = -4x\Big|_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 4$.

Tính $J = \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} \mathrm{d}x = \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \mathrm{d}x = \int_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} \mathrm{d}x.$

Đặt $t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$. Khi $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \sqrt{2} \end{cases}$.

Khi đó $J=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$. Đặt $t=\sqrt{2}\tan u\Rightarrow dt=\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)du$. Khi $\begin{cases}t=0\Rightarrow u=0\\ t=\sqrt{2}\Rightarrow u=\frac{\pi}{4}\end{cases}$.

Suy ra $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)}{2\left(1+\tan^2 u\right)}du=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}du=\frac{\sqrt{2}}{2}u\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$.

Vậy $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}\frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(-16\sqrt{3}-16+\pi\right)+4\Rightarrow\begin{cases}a=b=-16\\ c=1\end{cases}$.

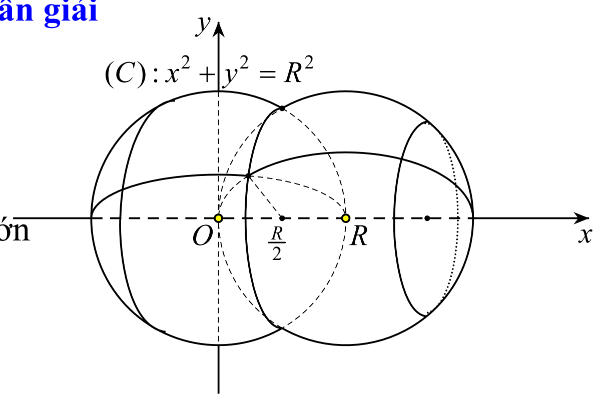
Vậy $a+b^2+c^4=241$.

Câu 42: **(CHU VĂN AN – HN)** Cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2).

A. $V=\pi R^3$. **B.** $V=\frac{\pi R^3}{2}$. **C.** $V=\frac{5\pi R^3}{12}$. **D.** $V=\frac{2\pi R^3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ

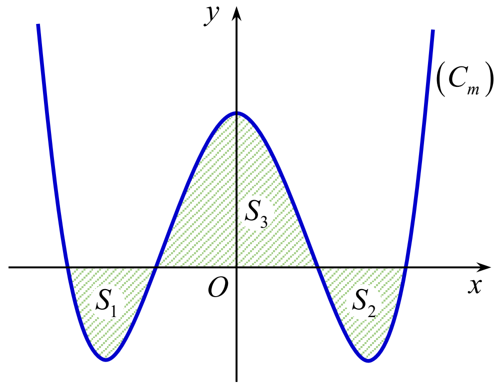
Khối cầu $S(O,R)$ chứa một đường tròn lớn là

$$(C): x^2+y^2=R^2$$

Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

$$V=2\pi\int\limits_{\frac{R}{2}}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{R}{2}}^{R}=\frac{5\pi R^3}{12}.$$

Câu 43: **`(CHU VĂN AN – HN)** Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ :



Gọi S_1, S_2 và S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Tìm m để $S_1 + S_2 = S_3$.

A. $m = -\dfrac{5}{2}$. **B.** $m = -\dfrac{5}{4}$. **C.** $m = \dfrac{5}{2}$. **D.** $m = \dfrac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử $x = b$ là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$. Khi đó ta có

$$b^4 - 3b^2 + m = 0 \ (1)$$

Nếu xảy ra $S_1 + S_2 = S_3$ thì

$$\int_0^b \left(x^4 - 3x^2 + m\right)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \frac{b^5}{5} - b^3 + mb = 0 \Rightarrow \frac{b^4}{5} - b^2 + m = 0 \ (2) \ \left(\text{do } b > 0\right)$$

Từ (1) và (2), trừ vế theo vế ta được $\dfrac{4}{5}b^4 - 2b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = \dfrac{5}{2}$ (do $b > 0$).

Thay trở ngược vào (1) ta được $m = \dfrac{5}{4}$.

BÀI TOÁN VẬN DỤNG (8 - 9 - 10)

Chủ đề 4. SỐ PHỨC

Câu 1: **(TRẦN HƯNG ĐẠO – NB)** Cho các số phức z_1, z_2 khác nhau thỏa mãn: $|z_1| = |z_2|$. Chọn phương án đúng:

A. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = 0$.

B. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số phức với phần thực và phần ảo đều khác 0.

C. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số thực.

D. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số thuần ảo.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương pháp tự luận:

Vì $|z_1| = |z_2|$ và $z_1 \neq z_2$ nên cả hai số phức đều khác 0. Đặt $w = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ và $|z_1| = |z_2| = a$, ta có

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} = \frac{\frac{a^2}{z_1} + \frac{a^2}{z_2}}{\frac{a^2}{z_1} - \frac{a^2}{z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{z_2 - z_1} = -w$$

Từ đó suy ra w là số thuần ảo. Chọn D.

Phương pháp trắc nghiệm:

Số phức z_1, z_2 khác nhau thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$ nên chọn $z_1 = 1; z_2 = i$, suy ra $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{1+i}{1-i} = i$ là số thuần ảo. Chọn D.

Câu 2: (TRẦN HƯNG ĐẠO – NB) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

A. $S = 9\pi$. **B.** $S = 12\pi$. **C.** $S = 16\pi$. **D.** $S = 25\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$w = 2z + 1 - i \Rightarrow z = \frac{w - 1 + i}{2}$$

$$|z - 3 + 4i| \leq 2 \Leftrightarrow \left|\frac{w - 1 + i}{2} - 3 + 4i\right| \leq 2 \Leftrightarrow |w - 1 + i - 6 + 8i| \leq 4 \Leftrightarrow |w - 7 + 9i| \leq 4 \ (1)$$

Giả sử $w = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$, khi đó $(1) \Leftrightarrow (x - 7)^2 + (y + 9)^2 \leq 16$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7; -9)$, bán kính $r = 4$.

Vậy diện tích cần tìm là $S = \pi.4^2 = 16\pi$.

Câu 3: (TRẦN HƯNG ĐẠO – NB) Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+3i|=|z+2-i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

A. $z=1-2i$. **B.** $z=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$. **C.** $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$. **D.** $z=-1+2i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương pháp tự luận

Giả sử $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

$|z+3i|=|z+2-i|\Leftrightarrow|x+(y+3)i|=|(x+2)+(y-1)i|\Leftrightarrow x^2+(y+3)^2=(x+2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow 6y+9=4x+4-2y+1\Leftrightarrow 4x-8y-4=0\Leftrightarrow x-2y-1=0\Leftrightarrow x=2y+1$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2y+1)^2+y^2}=\sqrt{5y^2+4y+1}=\sqrt{5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}\ge\frac{\sqrt{5}}{5}$

Suy ra $|z|_{\min}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ khi $y=-\frac{2}{5}\Rightarrow x=\frac{1}{5}$

Vậy $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i.$

Phương pháp trắc nghiệm

Giả sử $z=x+yi\quad\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

$|z+3i|=|z+2-i|\Leftrightarrow|x+(y+3)i|=|(x+2)+(y-1)i|\Leftrightarrow x^2+(y+3)^2=(x+2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow 6y+9=4x+4-2y+1\Leftrightarrow 4x-8y-4=0\Leftrightarrow x-2y-1=0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa điều kiện $|z+3i|=|z+2-i|$ là đường thẳng $d:x-2y-1=0$.

Phương án A: $z=1-2i$ có điểm biểu diễn $(1;-2)\notin d$ nên loại A.

Phương án B: $z=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\notin d$ nên loại B.

Phương án D: $z=-1+2i$ có điểm biểu diễn $(-1;2)\notin d$ nên loại B.

Phương án C: $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(\frac{1}{5};-\frac{2}{5}\right)\in d$

Câu 4: (LẠNG GIANG SỐ 1) Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $4-\sqrt{7}$. **B.** $4+\sqrt{7}$. **C.** 7. **D.** $4+\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi $z=x+yi$ với $x;y\in\mathbb{R}$.

Ta có $8=|z-3|+|z+3|\ge|z-3+z+3|=|2z|\Leftrightarrow|z|\le 4$.

Do đó $M = max\left|z\right| = 4$.

Mà $\left|z-3\right|+\left|z+3\right|=8 \Leftrightarrow \left|x-3+yi\right|+\left|x+3+yi\right|=8 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-3\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x+3\right)^2+y^2}=8$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$8=1.\sqrt{\left(x-3\right)^2+y^2}+1.\sqrt{\left(x+3\right)^2+y^2}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left[\left(x-3\right)^2+y^2+\left(x+3\right)^2+y^2\right]}$$

$$\Leftrightarrow 8\le\sqrt{2\left(2x^2+2y^2+18\right)} \Leftrightarrow 2\left(2x^2+2y^2+18\right)\ge 64$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2\ge 7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{7} \Leftrightarrow \left|z\right|\ge\sqrt{7}.$$

Do đó $M = min\left|z\right| = \sqrt{7}$.

Vậy $M+m=4+\sqrt{7}$.

Câu 5: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-2-3i\right|=1$. Giá trị lớn nhất của $\left|\overline{z}+1+i\right|$ là

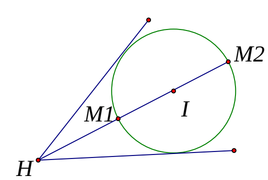
A. $\sqrt{13}+2$. **B.** 4. **C.** 6. **D.** $\sqrt{13}+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi$ ta có $z-2-3i=x+yi-2-3i=x-2+\left(y-3\right)i$.

Theo giả thiết $\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=1$ nên điểm M biểu diễn cho số phức z nằm trên đường tròn tâm $I\left(2;3\right)$ bán kính $R=1$.



Ta có $\left|\overline{z}+1+i\right|=\left|x-yi+1+i\right|=\left|x+1+\left(1-y\right)i\right|=\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2}$.

Gọi $M\left(x;y\right)$ và $H\left(-1;1\right)$ thì $HM=\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2}$.

Do M chạy trên đường tròn, H cố định nên MH lớn nhất khi M là giao của HI với đường tròn.

Phương trình $HI:\begin{cases}x=2+3t\\y=3+2t\end{cases}$, giao của HI và đường tròn ứng với t thỏa mãn:

$9t^2+4t^2=1 \Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{\sqrt{13}}$ nên $M\left(2+\frac{3}{\sqrt{13}};3+\frac{2}{\sqrt{13}}\right), M\left(2-\frac{3}{\sqrt{13}};3-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

Tính độ dài MH ta lấy kết quả $HM=\sqrt{13}+1$.

Câu 6: (THTT – 477) Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $z_1+z_2+z_3=0$ và $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai** ?

A. $\left|z_1^3+z_2^3+z_3^3\right|=\left|z_1^3\right|+\left|z_2^3\right|+\left|z_3^3\right|$. **B.** $\left|z_1^3+z_2^3+z_3^3\right|\le\left|z_1^3\right|+\left|z_2^3\right|+\left|z_3^3\right|$.

C. $\left|z_1^3+z_2^3+z_3^3\right|\ge\left|z_1^3\right|+\left|z_2^3\right|+\left|z_3^3\right|$. **D.** $\left|z_1^3+z_2^3+z_3^3\right|\ne\left|z_1^3\right|+\left|z_2^3\right|+\left|z_3^3\right|$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: Ta có: $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_2 + z_3 = -z_1$

$(z_1 + z_2 + z_3)^3 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3(z_1z_2 + z_1z_3)(z_1 + z_2 + z_3) + 3z_2z_3(z_2 + z_3)$

$= z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3 \Rightarrow z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3z_1z_2z_3$.

$\Rightarrow \left|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3\right| = \left|3z_1z_2z_3\right| = 3|z_1||z_2||z_3| = 3$

Mặt khác $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3 = 3$. Vậy phương án D sai.

Cách 2: thay thử $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ vào các đáp án, thấy đáp án D bị sai

Câu 7: (THTT – 477) Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

B. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

C. $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

D. $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cách 1: Kí hiệu Re: là phần thực của số phức.

Ta có $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z}_1z_2 + \overline{z}_2z_3 + \overline{z}_3z_1) = 3 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z}_1z_2 + \overline{z}_2z_3 + \overline{z}_3z_1)$ (1).

$|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|^2 = |z_1z_2|^2 + |z_2z_3|^2 + |z_3z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z}_1\overline{z}_2z_2z_3 + \overline{z}_2\overline{z}_3z_3z_1 + \overline{z}_3\overline{z}_1z_1z_2)$

$= |z_1|^2.|z_2|^2 + |z_2|^2.|z_3|^2 + |z_3|^2.|z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}_1|z_2|^2 z_3 + \overline{z}_2|z_3|^2 z_1 + \overline{z}_3|z_1|^2 z_2\right)$

$= 3 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z}_1z_3 + \overline{z}_2z_1 + \overline{z}_3z_2) == 3 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z}_1z_2 + \overline{z}_3z_3 + \overline{z}_3z_1)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

Các h khác: B hoặc C đúng suy ra D đúngLoại B, C.

Chọn $z_1 = z_2 = z_3 \Rightarrow$ A đúng và D sai

Cách 2: thay thử $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ vào các đáp án, thấy đáp án D bị sai

Câu 8: (THTT – 477) Cho $P(z)$ là một đa thức với hệ số thực.Nếu số phức z thỏa mãn $P(z) = 0$ thì

A. $P(|z|) = 0$.

B. $P\left(\frac{1}{z}\right) = 0$.

C. $P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = 0$.

D. $P(\overline{z}) = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Giả sử $P(z)$ có dạng $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + ... + a_nz^n$ $(a_0;\ a_1;\ a_2;...;a_n \in \mathbb{R};\ a_n \neq 0)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1z + a_2z^2 + ... + a_nz^n = 0 \Rightarrow \overline{a_0 + a_1z + a_2z^2 + ... + a_nz^n} = 0$

$\Rightarrow a_0 + a_1\overline{z} + a_2\overline{z}^2 + ... + a_n\overline{z}^n = 0 \Rightarrow P(\overline{z}) = 0$

Câu 9: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Cho số phức z thỏa mãn $|z|\le 1$. Đặt $A=\dfrac{2z-i}{2+iz}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|A|\le 1$. **B.** $|A|\ge 1$. **C.** $|A|<1$. **D.** $|A|>1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt Có $a=a+bi,\ (a,\ b\in\mathbb{R})\Rightarrow a^2+b^2\le 1$ (do $|z|\le 1$)

$$|A|=\left|\frac{2z-i}{2+iz}\right|=\left|\frac{2a+(2b-1)i}{2-b+ai}\right|=\sqrt{\frac{4a^2+(2b+1)^2}{(2-b)^2+a^2}}$$

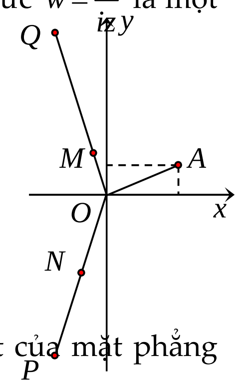
Ta chứng minh $\dfrac{4a^2+(2b+1)^2}{(2-b)^2+a^2}\le 1$.

Thật vậy ta có $\dfrac{4a^2+(2b+1)^2}{(2-b)^2+a^2}\le 1\Leftrightarrow 4a^2+(2b+1)^2\le (2-b)^2+a^2\Leftrightarrow a^2+b^2\le 1$

Dấu "=" xảy ra khi $a^2+b^2=1$.

Vậy $|A|\le 1$.

Câu 10: (CHUYÊN ĐH VINH) Cho số phức z thỏa mãn $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z. Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w=\dfrac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q. Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là



A. điểm Q. **B.** điểm M.

C. điểm N. **D.** điểm P.

Hướng dẫn giải

☑Đáp án: **D.**

Do điểm A là điểm biểu diễn của z nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy nên gọi $z=a+bi\,(a,b>0)$.

Do $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lại có $w=\dfrac{1}{iz}=\dfrac{-b}{a^2+b^2}-\dfrac{a}{a^2+b^2}i$ nên điểm biểu diễn w nằm trong góc phần tư thứ ba của mặt phẳng Oxy.

$$|w|=\left|\frac{1}{iz}\right|=\frac{1}{|i|.|z|}=\sqrt{2}=2|z|=2OA.$$

Vậy điểm biểu diễn của số phức w là điểm P.

Câu 11: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\left|1+\frac{5i}{z}\right|$.

A. 5. B. 4. C. 6. D. 8.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A=\left|1+\frac{5i}{z}\right|\le|1|+\left|\frac{5i}{z}\right|=1+\frac{5}{|z|}=6$. Khi $z=i\Rightarrow A=6$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 12: Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\varpi=\frac{z+2\bar{z}-3i}{z^2+2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(2+i)(z+i)=3-i+z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{ON}\right)=2\varphi$, trong đó $\varphi=\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}\right)$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM. Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ (I). B. Góc phần tư thứ (II).
C. Góc phần tư thứ (III). D. Góc phần tư thứ (IV).

Hướng dẫn giải

Ta có: $(2+i)(z+i)=3-i+z\Rightarrow z=1-i\Rightarrow w=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}i\Rightarrow M\left(\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)\Rightarrow\tan\varphi=\frac{1}{5}$.

Lúc đó: $\sin 2\varphi=\frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\frac{5}{13}>0;\ \cos 2\varphi=\frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\frac{12}{13}>0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 13: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất $M_{\max}$ và giá trị nhỏ nhất $M_{\min}$ của biểu thức $M=\left|z^2+z+1\right|+\left|z^3+1\right|$.

A. $M_{\max}=5;\ M_{\min}=1$. B. $M_{\max}=5;\ M_{\min}=2$.
C. $M_{\max}=4;\ M_{\min}=1$. D. $M_{\max}=4;\ M_{\min}=2$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $M\le|z|^2+|z|+1+|z|^3+1=5$, khi $z=1\Rightarrow M=5\Rightarrow M_{\max}=5$.

Mặt khác: $M=\frac{\left|1-z^3\right|}{|1-z|}+\left|1+z^3\right|\ge\frac{\left|1-z^3\right|}{2}+\frac{\left|1+z^3\right|}{2}\ge\frac{\left|1-z^3+1+z^3\right|}{2}=1$, khi $z=-1\Rightarrow M=1\Rightarrow M_{\min}=1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 14: Cho số phức z thỏa $|z|\ge 2$. Tìm tích của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|\frac{z+i}{z}\right|$.

A. $\frac{3}{4}$. B. 1. C. 2. D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $P=\left|1+\frac{i}{z}\right|\le 1+\frac{1}{|z|}\le\frac{3}{2}$. Mặt khác: $\left|1+\frac{i}{z}\right|\ge 1-\frac{1}{|z|}\ge\frac{1}{2}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$, xảy ra khi $z=-2i$; giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ xảy ra khi $z=2i$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 15: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4=1$. Tính giá trị biểu thức $P=\left(z_1^2+1\right)\left(z_2^2+1\right)\left(z_3^2+1\right)\left(z_4^2+1\right)$.

A. $P=2$. B. $P=\frac{17}{9}$. C. $P=\frac{16}{9}$. D. $P=\frac{15}{9}$.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình $\Leftrightarrow f(z)=(2z-i)^4-(z-1)^4=0$.

Suy ra: $f(z)=15(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$. Vì $z_1^2+1=(z_1-i)(z_1+i)\Rightarrow P=\frac{f(i).f(-i)}{225}$ (1).

Mà $f(i)=i^4-(i-1)^4=5$; $f(-i)=(-3i)^4-(i+1)^4=85$. Vậy từ $(1)\Rightarrow P=\frac{17}{9}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 16: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z-2i$.

A. $\sqrt{26+6\sqrt{17}}$. B. $\sqrt{26-6\sqrt{17}}$. C. $\sqrt{26+8\sqrt{17}}$. D. $\sqrt{26-4\sqrt{17}}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z=x+yi$; $(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})\Rightarrow z-2i=x+(y-2)i$. Ta có: $|z-1+2i|=9\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

Đặt $x=1+3\sin t$; $y=-2+3\cos t$; $t\in[0;2\pi]$.

$\Rightarrow|z-2i|^2=(1+3\sin t)^2+(-4+3\cos t)^2=26+6(\sin t-4\cos t)=26+6\sqrt{17}\sin(t+\alpha)$; $(\alpha\in\mathbb{R})$.

$\Rightarrow\sqrt{26-6\sqrt{17}}\le|z-2i|\le\sqrt{26+6\sqrt{17}}\Rightarrow|z-2i|_{\max}=\sqrt{26+6\sqrt{17}}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 17: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$.

A. $3\sqrt{15}$ B. $6\sqrt{5}$ C. $\sqrt{20}$ D. $2\sqrt{20}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z=x+yi;\ (x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$. Ta có: $|z|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x\in[-1;1]$.

Ta có: $P=|1+z|+3|1-z|=\sqrt{(1+x)^2+y^2}+3\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2(1+x)}+3\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2(1+x)}+3\sqrt{2(1-x)};\ x\in[-1;1]$. Hàm số liên tục trên $[-1;1]$ và với $x\in(-1;1)$ ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\dfrac{3}{\sqrt{2(1-x)}}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{5}\in(-1;1)$.

Ta có: $f(1)=2;\ f(-1)=6;\ f\left(-\dfrac{4}{5}\right)=2\sqrt{20}\Rightarrow P_{\max}=2\sqrt{20}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 18: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính giá trị của $M.m$.

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. B. $\dfrac{39}{4}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $\dfrac{13}{4}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z=x+yi;\ (x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$. Ta có: $|z|=1\Leftrightarrow z.\overline{z}=1$

Đặt $t=|z+1|$, ta có $0=|z|-1\le|z+1|\le|z|+1=2\Rightarrow t\in[0;2]$.

Ta có $t^2=(1+z)(1+\overline{z})=1+z.\overline{z}+z+\overline{z}=2+2x\Rightarrow x=\dfrac{t^2-2}{2}$.

Suy ra $|z^2-z+1|=|z^2-z+z.\overline{z}|=|z||z-1+\overline{z}|=\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|=|t^2-3|$.

Xét hàm số $f(t)=t+|t^2-3|, t\in[0;2]$. Bằng cách dùng đạo hàm, suy ra

$\max f(t)=\dfrac{13}{4};\ \min f(t)=\sqrt{3}\Rightarrow M.n=\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 19: Gọi điểm A,B lần lượt biểu diễn các số phức z và $z'=\dfrac{1+i}{2}z;\ (z\ne0)$ trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng). Với O là gốc tọa độ, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tam giác OAB đều.

B. Tam giác OAB vuông cân tại O.

C. Tam giác OAB vuông cân tại B.

D. Tam giác OAB vuông cân tại A.

Hướng dẫn giải

Ta có: $OA=|z|;|OB|=|z'|=\left|\frac{1+i}{2}.z\right|=\left|\frac{1+i}{2}\right|.|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}|z|.$

Ta có: $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\Rightarrow BA=|z-z'|=\left|z-\frac{1+i}{2}z\right|=\left|\frac{1-i}{2}\right|.|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}|z|.$

Suy ra: $OA^2=OB^2+AB^2$ và $AB=OB\Rightarrow OAB$ là tam giác vuông cân tại B.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 20: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+4|=2|z|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{6}\le|z|\le\frac{\sqrt{3}+1}{6}$.

B. $\sqrt{5}-1\le|z|\le\sqrt{5}+1.$

C. $\sqrt{6}-1\le|z|\le\sqrt{6}+1.$

D. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}\le|z|\le\frac{\sqrt{2}+1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức $|u|+|v|\ge|u+v|$, ta được

$$2|z|+|-4|=|z^2+4|+|-4|\ge|z|^2\Rightarrow|z|^2-2|z|-4\le0\Rightarrow|z|\le\sqrt{5}+1.$$

$$2|z|+|z|^2=|z^2+4|+|-z^2|\ge4\Rightarrow|z|^2+2|z|-4\ge0\Rightarrow|z|\ge\sqrt{5}-1.$$

Vậy, $|z|$ nhỏ nhất là $\sqrt{5}-1$, khi $z=-i+i\sqrt{5}$ và $|z|$ lớn nhất là $\sqrt{5}+1$, khi $z=i+i\sqrt{5}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 21: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=2$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z.

A. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$. B. $\sqrt{11+4\sqrt{5}}$ C. $\sqrt{6+4\sqrt{5}}$ D. $\sqrt{5+6\sqrt{5}}$

Hướng dẫn giải

Gọi $z=x+yi;\ (x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$. Ta có: $|z-1+2i|=2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=4$.

Đặt $x=1+2\sin t;y=-2+2\cos t;\ t\in[0;2\pi]$.

Lúc đó: $|z|^2=(1+2\sin t)^2+(-2+2\cos t)^2=9+(4\sin t-8\cos t)=9+\sqrt{4^2+8^2}\sin(t+\alpha);\ (\alpha\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow|z|^2=9+4\sqrt{5}\sin(t+\alpha)\Rightarrow z\in\left[-\sqrt{9+4\sqrt{5}};\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right]$

$\Rightarrow z_{\max}=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ đạt được khi $z=\frac{5+2\sqrt{5}}{5}+\frac{-10+4\sqrt{5}}{5}i.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 22: Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ theo thứ tự biểu diễn các số phức $1+2i;\ 1+\sqrt{3}+i;\ 1+\sqrt{3}-i;\ 1-2i$. Biết $ABCD$ là tứ giác nội tiếp tâm I. Tâm I biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $z=\sqrt{3}$. B. $z=1-\sqrt{3}i$. C. $z=1$. D. $z=-1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3}-i$; $\overrightarrow{DB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3}+3i$. Mặt khác $\dfrac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i}=\sqrt{3}i$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB}=0$. Tương tự (hay vì lí do đối xứng qua Ox), $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AC}=0$. Từ đó suy ra AD là một đường kính của đường tròn đi qua A, B, C, D. Vậy $I(1;0)\Rightarrow z=1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 23: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy điểm M là điểm biểu diễn số phức $z=(2+i)^2(4-i)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và vectơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\cos 2\varphi$.

A. $-\dfrac{425}{87}$. B. $\dfrac{475}{87}$. C. $-\dfrac{475}{87}$. D. $\dfrac{425}{87}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z=(2+i)^2(4-i)=16+13i\Rightarrow M(16;13)\Rightarrow \tan\varphi=\dfrac{13}{16}$.

Ta có: $\cos 2\varphi=\dfrac{1+\tan^2\varphi}{1-\tan^2\varphi}=\dfrac{425}{87}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 24: Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau và thỏa mãn $\dfrac{z_1}{z_2^2}\in\mathbb{R}$ và $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$. Tính môđun của số phức z_1.

A. $|z_1|=\sqrt{5}$. B. $|z_1|=3$. C. $|z_1|=2$. D. $|z_1|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z_1=a+bi\Rightarrow z_2=a-bi;\ (a\in\mathbb{R};\ b\in\mathbb{R})$. Không mất tính tổng quát ta gọi $b\ge 0$.

Do $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}\Rightarrow|2bi|=2\sqrt{3}\Rightarrow b=\sqrt{3}$.

Do z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau nên $z_1.z_2\in\mathbb{R}$, mà $\dfrac{z_1}{z_2^2}=\dfrac{z_1^3}{(z_1z_2)^2}\in\mathbb{R}\Rightarrow z_1^3\in\mathbb{R}$.

Ta có: $z_1^3=(a+bi)^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 3a^2b-b^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\3a^2=b^2\end{array}\right.\Rightarrow a^2=1$.

Vậy $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}=2$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 25: Cho số phức $z=\left(\dfrac{2+6i}{3-i}\right)^m$, m nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m\in[1;50]$ để z là số thuần ảo?

A.24. B.26. C.25. D.50.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z=\left(\dfrac{2+6i}{3-i}\right)^m=(2i)^m=2^m.i^m$

z là số thuần ảo khi và chỉ khi $m=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$ (do $z\neq 0;\ \forall m\in\mathbb{N}^*$).

Vậy có 25 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 26: Nếu $|z|=1$ thì $\dfrac{z^2-1}{z}$

A. lấy mọi giá trị phức. B. là số thuần ảo.

C. bằng 0. D. lấy mọi giá trị thực.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\dfrac{z^2-1}{z}=z-\dfrac{1}{z}=z-\dfrac{\overline{z}}{z.\overline{z}}=z-\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}=z-\overline{z}$ là số thuần ảo.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 27: Cho số phức z thỏa mãn $|(1-i)z-6-2i|=\sqrt{10}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z.

A. $4\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$. C. 3. D. $3+\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Gọi $z=x+yi;\ (x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$.

Ta có:

$|(1-i)z-6-2i|=\sqrt{10}\Leftrightarrow|(1-i)|.\left|z+\dfrac{-6-2i}{1-i}\right|=\sqrt{10}\Leftrightarrow|z-2-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-4)^2=5.$

Đặt $x=2+\sqrt{5}\sin t;y=4+\sqrt{5}\cos t;\ t\in[0;2\pi]$.

Lúc đó:

$|z|^2=\left(2+\sqrt{5}\sin t\right)^2+\left(4+\sqrt{5}\cos t\right)^2=25+\left(4\sqrt{5}\sin t+8\sqrt{5}\cos t\right)=25+\sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2+\left(8\sqrt{5}\right)^2}\sin(t+\alpha);$

$\Rightarrow|z|^2=25+20\sin(t+\alpha)\Rightarrow z\in\left[\sqrt{5};3\sqrt{5}\right]$

$\Rightarrow z_{\max}=3\sqrt{5}$ đạt được khi $z=3+6i.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 28: Gọi $z = x + yi\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$ là số phức thỏa mãn hai điều kiện $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26$ và $\left|z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tích xy.

A. $xy = \frac{9}{4}$. B. $xy = \frac{13}{2}$. C. $xy = \frac{16}{9}$. D. $xy = \frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + iy\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$. Thay vào điều kiện thứ nhất, ta được $x^2 + y^2 = 36$.

Đặt $x = 3\cos t, y = 3\sin t$. Thay vào điều kiện thứ hai, ta có

$$P = \left|z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right| = \sqrt{18 - 18\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} \le 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow t = -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 29: Có bao nhiêu số phức z thỏa $\left|\frac{z+1}{i-z}\right| = 1$ và $\left|\frac{z-i}{2+z}\right| = 1$?

A.1. B.2. C.3. D.4.

Hướng dẫn giải

Ta có : $\begin{cases} \left|\frac{z+1}{i-z}\right| = 1 \\ \left|\frac{z-i}{2+z}\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z+1| = |i-z| \\ |z-i| = |2+z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 4x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 30: Gọi điểm A, B lần lượt biểu diễn các số phức z_1; z_2; $\left(z_1.z_2 \ne 0\right)$ trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng) và $z_1^2 + z_2^2 = z_1.z_2$. Với O là gốc tọa độ, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tam giác OAB đều.

B. Tam giác OAB vuông cân tại O.

C. Tam giác OAB vuông cân tại B.

D. Diện tích tam giác OAB không đổi.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z_1^2 + z_2^2 = z_1.z_2 \Rightarrow z_1^2 = z_1\left(z_2 - z_1\right)$; $|z_1|^2 = |z_1|.|z_2 - z_1|$. Do $z_1 \ne 0 \Rightarrow |z_2 - z_1| = \frac{|z_2|^2}{|z_1|}$; (1)

Mặt khác: $z_1^2 = z_2\left(z_1 - z_2\right) \Rightarrow |z_1|^2 = |z_2|.|z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = \frac{|z_1|^2}{|z_2|}$ (do $z_2 \ne 0$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{|z_2|^2}{|z_1|}=\dfrac{|z_1|^2}{|z_2|}\Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$. Vậy ta có: $|z_1|=|z_2|=|z_2-z_1|\Rightarrow OA=OB=AB$

.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 31: Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z+2i$.

A. $\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{2}$ D. $3+\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi $z=x+yi;\ (x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-2-4i|=|z-2i|\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}\Leftrightarrow x+y-4=0\Leftrightarrow y=4-x.$

Ta có: $|z+2i|^2=x^2+(y+2)^2=x^2+(6-x)^2=2x^2-12x+36=2(x-3)^2+18\geq 18$

$\Rightarrow |z+2i|_{\min}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ khi $z=3+i$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 32: Tìm điều kiện cần và đủ về các số thực $m,\ n$ để phương trình $z^4+mz^2+n=0$ **không** có nghiệm thực.

A. $m^2-4n>0$.

B. $m^2-4n<0$ hoặc $\begin{cases}m^2-4n>0\\ m<0\\ n>0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}m^2-4n\geq 0\\ m>0\\ n>0\end{cases}$.

D. $m^2-4n<0$ hoặc $\begin{cases}m^2-4n\geq 0\\ m>0\\ n>0\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình $z^4+mz^2+n=0$ không có nghiệm thực trong các trường hợp:

TH 1: Phương trình vô nghiệm, tức là $m^2-4n<0$.

TH 2: Phương trình $t^4+mt^2+n=0;\ (t=z^2)$ có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geq 0\\ S<0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4n\geq 0\\ m>0\\ n>0\end{cases}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 33: Nếu $|z|=a;\ (a>0)$ thì $\dfrac{\overline{z}^2-a}{\overline{z}}$

A. lấy mọi giá trị phức.

B. là số thuần ảo.

C. bằng 0.

D. lấy mọi giá trị thực.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\dfrac{\overline{z}^2-a^2}{\overline{z}}=\overline{z}-\dfrac{a}{\overline{z}}=\overline{z}-\dfrac{a^2z}{\overline{z}.z}=\overline{z}-\dfrac{a^2z}{\left|\overline{z}\right|^2}=\overline{z}-z$ là số thuần ảo.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 34: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z-1+i$.

A. 4. B. $2\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z=x+yi;\ (x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})\Rightarrow z-1+i=(x-1)+(y+1)i$. Ta có: $|z-1+2i|=9\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=9$.

Đặt $x=1+3\sin t;\ y=-2+3\cos t;\ t\in[0;2\pi]$.

$\Rightarrow |z-1+i|^2=(3\sin t)^2+(-1+3\cos t)^2=10-6\cos t\Rightarrow 2\le|z-2i|\le 4\Rightarrow |z-1+i|_{\min}=2$, khi $z=1+i$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 35: Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\varpi=\dfrac{2z+\overline{z}+1-i}{z^2+i}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(1-i)(z-i)=2-i+z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{ON}\right)=2\varphi$, trong đó $\varphi=\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}\right)$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM. Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ (I). B. Góc phần tư thứ (II).

C. Góc phần tư thứ (III). D. Góc phần tư thứ (IV).

Hướng dẫn giải

Ta có: $(1-i)(z-i)=2-i+z\Rightarrow z=3i\Rightarrow w=-\dfrac{7}{82}-\dfrac{19}{82}i\Rightarrow M\left(-\dfrac{7}{82};-\dfrac{19}{82}\right)\Rightarrow \tan\varphi=\dfrac{19}{7}$.

Lúc đó: $\sin 2\varphi=\dfrac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\dfrac{133}{205}>0;\ \cos 2\varphi=\dfrac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}=-\dfrac{156}{205}<0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 36: Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $M=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun của số phức $z+i$.

A. $|z+i|=2\sqrt{41}$ B. $|z+i|=3\sqrt{5}$.

C. $|z+i|=5\sqrt{2}$ D. $|z+i|=\sqrt{41}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi;\ (x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R})$. Ta có: $|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (C):(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$: tâm $I(3;4)$ và $R = \sqrt{5}$.

Mặt khác: $M = |z+2|^2 - |z-i|^2 = (x+2)^2 + y^2 - \left[(x^2) + (y-1)^2\right] = 4x + 2y + 3 \Leftrightarrow d: 4x + 2y + 3 - M = 0.$

Do số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện nên d và (C) có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I;d) \le R \Leftrightarrow \frac{|23-M|}{2\sqrt{5}} \le \sqrt{5} \Leftrightarrow |23-M| \le 10 \Leftrightarrow 13 \le M \le 33$$

$$\Rightarrow M_{\max} = 33 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 30 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow z + i = 5 - 4i \Rightarrow |z+i| = \sqrt{41}.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 37: Các điểm $A,\ B,\ C$ và $A',\ B',\ C'$ lần lượt biểu diễn các số phức $z_1,\ z_2,\ z_3$ và $z_1',\ z_2',\ z_3'$ trên mặt phẳng tọa độ ($A,\ B,\ C$ và $A',\ B',\ C'$ đều không thẳng hàng). Biết $z_1 + z_2 + z_3 = z_1' + z_2' + z_3'$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

B. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trực tâm.

C. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

D. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng tâm đường tròn ngoại tiếp.

Hướng dẫn giải

Gọi $z_1 = x_1 + y_1 i;\ z_2 = x_2 + y_2 i;\ z_3 = x_3 + y_3 i;\ \left(x_k';\ y_k' \in \mathbb{R};\ k = \overline{1;3}\right)$.

Khi đó: $A(x_1;y_1);\ B(x_2;y_2);\ C(x_3;y_3)$, gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

Tương tự, gọi $z_1' = x_1' + y_1' i;\ z_2' = x_2' + y_2' i;\ z_3' = x_3' + y_3' i;\ \left(x_k';\ y_k' \in \mathbb{R};\ k = \overline{1;3}\right)$.

Khi đó: $A'(x_1';y_1');\ B'(x_2';y_2');\ C'(x_3';y_3')$,

gọi G' là trọng tâm $\Delta A'B'C' \Rightarrow G'\left(\frac{x_1'+x_2'+x_3'}{3};\frac{y_1'+y_2'+y_3'}{3}\right)$.

Do $z_1 + z_2 + z_3 = z_1' + z_2' + z_3' \Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3) + (y_1+y_2+y_3)i = (x_1'+x_2'+x_3') + (y_1'+y_2'+y_3')i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x_1' + x_2' + x_3' \\ y_1 + y_2 + y_3 = y_1' + y_2' + y_3' \end{cases} \Rightarrow G \equiv G'.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 38: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy điểm M là điểm biểu diễn số phức $z = (2-3i)(1+i)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và vecto $\overrightarrow{OM}$. Tính $\sin 2\varphi$.

A. $-\frac{5}{12}$.

B. $\frac{5}{12}$.

C. $\frac{12}{5}$.

D. $-\frac{12}{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z=(2-3i)(1+i)=5-i\Rightarrow M(5;-1)\Rightarrow \tan\varphi=-\frac{1}{5}$.

Ta có: $\sin 2\varphi=\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}=-\frac{5}{12}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 39: Cho số phức $z=\frac{-m+i}{1-m(m-2i)}$, $m\in\mathbb{R}$. Tìm môđun lớn nhất của z.

A. 1.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z=\frac{-m+i}{1-m(m-2i)}=\frac{m}{m^2+1}+\frac{i}{m^2+1}\Rightarrow |z|=\sqrt{\frac{1}{m^2+1}}\le 1\Rightarrow |z|_{\max}=1\Leftrightarrow z=i;\ m=0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 40: Cho số phức z có $|z|=m;\ (m>0)$. Với $z\ne m;$ tìm phần thực của số phức $\frac{1}{m-z}$.

A. m.

B. $\frac{1}{m}$.

C. $\frac{1}{4m}$.

D. $\frac{1}{2m}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $\mathrm{Re}(z)$ là phần thực của số phức z.

Ta xét: $\frac{1}{m-z}+\overline{\left(\frac{1}{m-z}\right)}=\frac{1}{m-z}+\frac{1}{m-\overline{z}}=\frac{m-\overline{z}+m-z}{(m-z)(m-\overline{z})}=\frac{2m-z-\overline{z}}{m^2+z.\overline{z}-mz-m\overline{z}}$

$=\frac{2m-z-\overline{z}}{2m^2-mz-m\overline{z}}=\frac{2m-z-\overline{z}}{m(2m-z-\overline{z})}=\frac{1}{m}\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{1}{m-z}\right)=\frac{1}{2m}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 41: Cho số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=\sqrt{3}$, $|z_2|=2$ được biểu diễn trong mặt phẳng phức lần lượt là các điểm M,N. Biết $\angle\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)=\frac{\pi}{6}$, tính giá trị của biểu thức $\left|\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|$.

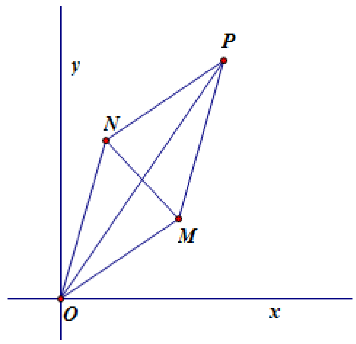
A. $\sqrt{13}$

B. 1

C. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{1}{\sqrt{13}}$

Hướng dẫn giải



Dựng hình bình hành $OMPN$ trong mặt phẳng phức, khi đó biểu diễn của :

$\begin{cases} |z_1+z_2| = OP \\ |z_1-z_2| = MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1+z_2| = \sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cos(150^0)} = 1 \\ |z_1-z_2| = \sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cos(30^0)} = 1 \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right| = \frac{|z_1+z_2|}{|z_1-z_2|} = 1$. Chọn **B**.

Câu 42: **(CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3)**Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3-4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn I, bán kính R. Khi đó.

A. $I(-1;-2), R=\sqrt{5}$. **B.** $I(1;2), R=\sqrt{5}$. **C.** $I(-1;2), R=5$. **D.** $I(1;-2), R=5$.

Hướng dẫn giải

ChọnC.(đã sửa đề bài)

Đặt $z = a+bi$ và $|z| = c > 0$, với $a;b;c \in \mathbb{R}$.

Lại có $w = (3-4i)z - 1 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{w+1-2i}{3-4i}$.

Gọi $w = x+yi$ với $x;y \in \mathbb{R}$.

Khi đó $|z| = c \Rightarrow \left|\frac{w+1-2i}{3-4i}\right| = c \Leftrightarrow \frac{|w+1-2i|}{|3-4i|} = c \Leftrightarrow |x+yi+1-2i| = 5c$

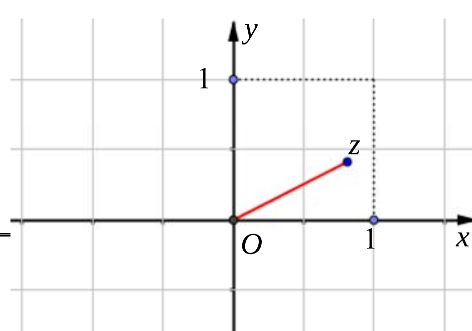
$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = 5c \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2 = 25c^2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn $I(-1;2)$.

Khi đó chỉ có đáp án C có khả năng đúng và theo đó $R=5 \Rightarrow 5c=5 \Rightarrow c=1$.

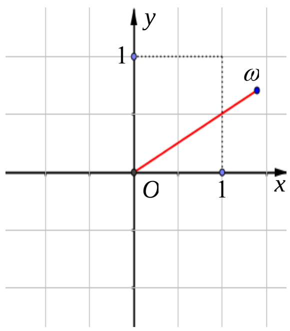
Thử $c=1$ vào phương trình (1) thì thỏa mãn.

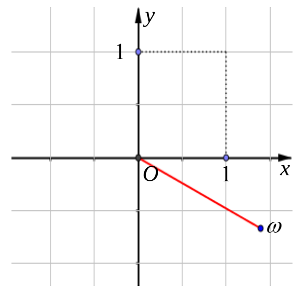
Câu 43: **(CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3)**Số phức z được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ như hình vẽ:



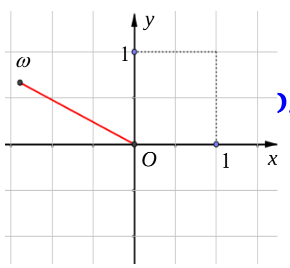
Hỏi hình nào biểu diễn cho số phức $\varpi = \dfrac{i}{z}$?

A.

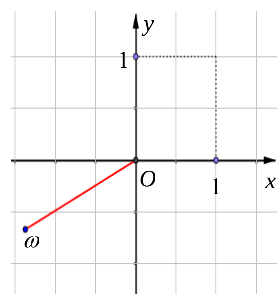




B.



).



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết điểm biểu diễn số phức z nằm ở góc phần tư thứ nhất nên $a, b > 0$.

Ta có $\varpi = \dfrac{i}{z} = \dfrac{i}{a - bi} = \dfrac{i(a + bi)}{a^2 + b^2} = -\dfrac{b}{a^2 + b^2} + \dfrac{a}{a^2 + b^2} i$

Do $a, b > 0$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{a^2 + b^2} < 0 \\ \dfrac{a}{a^2 + b^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow$ điểm biểu diễn số phức ω nằm ở góc phần tư thứ hai.

Vậy chọn **C**.

Câu 44: (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Trong các số phức z thỏa $|z + 3 + 4i| = 2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó

A. Không tồn tại số phức z_0.

B. $|z_0| = 2$.

C. $|z_0| = 7$.

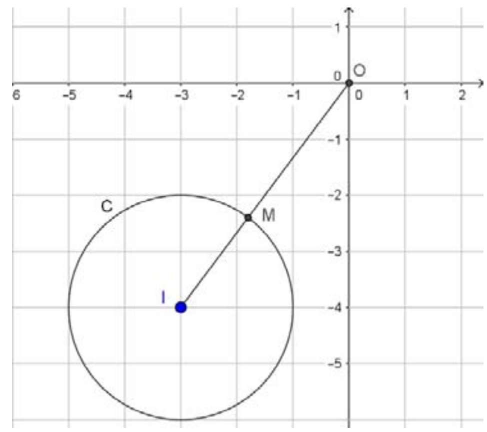
D. $|z_0| = 3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D

Cách 1:

Đặt $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó $|z+3+4i|=2\Leftrightarrow(a+3)^2+(b+4)^2=4$.



Suy ra biểu diễn hình học của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(-3;-4)$ và bán kính $R=5$.

Gọi $M(z)$ là điểm biểu diễn số phức z. Ta có: $M(z)\in(C)$.

$|z|=OM\geq OI-R=3$.

Vậy $|z|$ bé nhất bằng 3 khi $M(z)=(C)\cap IM$.

Cách 2:

Đặt $\begin{cases}a+3=2\cos\varphi\\ b+4=2\sin\varphi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3+2\cos\varphi\\ b=-4+2\sin\varphi\end{cases}$.

$\Rightarrow|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(2\cos\varphi-3)^2+(2\sin\varphi-4)^2}=\sqrt{29-12\cos\varphi-16\sin\varphi}$.

$=\sqrt{29-20\left(\dfrac{3}{5}\cos\varphi+\dfrac{4}{5}\sin\varphi\right)}=\sqrt{29-20\cos(\alpha-\varphi)}\geq\sqrt{9}$.

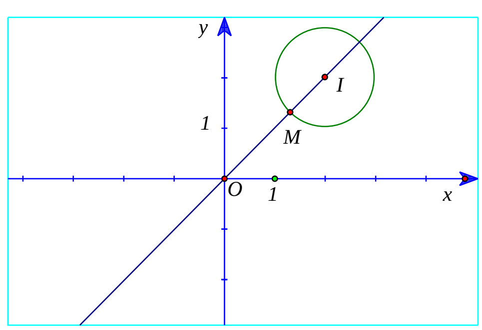
$\Rightarrow|z_0|=3$

Câu 45: (NGUYỄN TRÃI – HD) Cho số phức z thỏa mãn: $|z-2-2i|=1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5}-1$ **B.** $\sqrt{5}+1$ **C.** $\sqrt{5}-2$ **D.** $\sqrt{5}+2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\left|z - 2 - 2i\right| = 1 \Leftrightarrow \left|(x-2) + (y-2)i\right| = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$

Tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2;2)$ và bán kính $R = 1$.

$\left|z - i\right| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = IM$, với $I(2;2)$ là tâm đường tròn, M là điểm chạy trên đường tròn. Khoảng cách này ngắn nhất khi M là giao điểm của đường thẳng nối hai điểm $N(0;1) \in Oy, I(2;2)$ với đường tròn (C).

$IM_{\min} = IN - R = \sqrt{5} - 1$

Câu 46: (HAI BÀ TRƯNG – HUẾ) Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện: $\left|z+4\right| + \left|z-4\right| = 10$.

A. Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm $O(0;0)$ và có bán kính $R = 4$..

B. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

C. Tập hợp các điểm cần tìm là những điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn phương trình $\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 12$.

D. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$.

Gọi $A(4;0)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = 4$.

Gọi $B(-4;0)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = -4$.

Khi đó: $\left|z+4\right| + \left|z-4\right| = 10 \Leftrightarrow MA + MB = 10.$ (*)

Hệ thức trên chứng tỏ tập hợp các điểm M là elip nhận A, B là các tiêu điểm.

Gọi phương trình của elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \left(a > b > 0, a^2 = b^2 + c^2\right)$

Từ (*) ta có: $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$.

$AB = 2c \Leftrightarrow 8 = 2c \Leftrightarrow c = 4 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9$

Vậy quỹ tích các điểm M là elip: $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 47: (HAI BÀ TRƯNG – HUẾ) Tính $S = 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + 2017i^{2017}$.

A. $S = 2017 - 1009i$. **B.** $1009 + 2017i$. **C.** $2017 + 1009i$. **D.** $1008 + 1009i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$S=1009+i+2i^2+3i^3+4i^4+...+2017i^{2017}$$
$$=1009+\left(4i^4+8i^8+...+2016i^{2016}\right)+\left(i+5i^5+9i^9+...+2017i^{2017}\right)+$$
$$+\left(2i^2+6i^6+10i^{10}+...+2014i^{2014}\right)+\left(3i^3+7i^7+11i^{11}+...+2015i^{2015}\right)$$
$$=1009+\sum_{n=1}^{504}(4n)+i\sum_{n=1}^{505}(4n-3)-\sum_{n=1}^{504}(4n-2)-i\sum_{n=1}^{504}(4n-1)$$
$$=1009+509040+509545i-508032-508536i$$
$$=2017+1009i.$$

Cách khác:

Đặt

$f(x)=1+x+x^2+x^3+....+x^{2017}$

$f'(x)=1+2x+3x^2+...+2017x^{2016}$

$xf'(x)=x+2x^2+3x^3+...+2017x^{2017}$ (1)

Mặt khác:

$$f(x)=1+x+x^2+x^3+....+x^{2017}=\frac{x^{2018}-1}{x-1}$$

$$f'(x)=\frac{2018x^{2017}(x-1)-\left(x^{2018}-1\right)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow xf'(x)=x.\frac{2018x^{2017}(x-1)-\left(x^{2018}-1\right)}{(x-1)^2}\ (2)$$

Thay $x=i$ vào (1) và (2) ta được:

$$S=1009+i.\frac{2018i^{2017}(i-1)-\left(i^{2018}-1\right)}{(i-1)^2}=1009+i\frac{-2018-2018i+2}{-2i}=2017+1009i$$

Câu 48: Trong mặt phẳng phức Oxy, các số phức z thỏa $|z+2i-1|=|z+i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1,3)$.

A. $3+i$. **B.** $1+3i$. **C.** $2-3i$. **D.** $-2+3i$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\,(x,y\in R)$

Gọi $E(1,-2)$ là điểm biểu diễn số phức $1-2i$

Gọi $F(0,-1)$ là điểm biểu diễn số phức $-i$

Ta có : $|z+2i-1|=|z+i|\Leftrightarrow ME=MF\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực $EF: x-y-2=0$.

Để MA ngắn nhất khi $MA\perp EF$ tại $M\Leftrightarrow M(3,1)\Rightarrow z=3+i$ => **Đáp án A.**

Câu 49: Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp biểu diễn số phức Z thỏa $1 \le |z+1-i| \le 2$ là hình vành khăn. Chu vi P của hình vành khăn là bao nhiêu ?

A. $P = 4\pi$. **B.** $P = \pi$. **B.** $P = 2\pi$. **D.** $P = 3\pi$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi\,(x, y \in R)$

Gọi $A(-1,1)$ là điểm biểu diễn số phức $-1+i$

$1 \le |z+1-i| \le 2 \Leftrightarrow 1 \le MA \le 2$. Tập hợp điểm biểu diễn là hình vành khăn giới hạn bởi 2 đường tròn đồng tâm có bán kính lần lượt là $R_1 = 2, R_2 = 1$ $\Rightarrow P = P_1 - P_2 = 2\pi(R_1 - R_2) = 2\pi$

=> Đáp án C.

Lưu ý cần nắm vững lý thuyết và hình vẽ của dạng bài này khi học trên lớp tránh nhầm lẫn sang tính diện tích hình tròn.

Câu 50: Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $\left|z^2 + \left(\overline{z}\right)^2 + 2|z|^2\right| = 16$ là hai đường thẳng d_1, d_2. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1, d_2 là bao nhiêu ?

A. $d(d_1,d_2) = 2$. **B.** $d(d_1,d_2) = 4$. **C.** $d(d_1,d_2) = 1$. **D.** $d(d_1,d_2) = 6$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi\,(x, y \in R)$

Ta có : $\left|z^2 + \left(\overline{z}\right)^2 + 2|z|^2\right| = 16 \Leftrightarrow \left|x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 - 2xyi - y^2 + 2x^2 + 2y^2\right| = 16$

$\Leftrightarrow |4x^2| = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow d(d_1,d_2) = 4$

Ta chọn đáp án B.

Ở đây lưu ý hai đường thẳng x = 2 và x = -2 song song với nhau.

Câu 51: **(CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH – L2)** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$.

Tính $\min|w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

A. $\min|w| = \frac{3}{2}$. **B.** $\min|w| = 2$. **C.** $\min|w| = 1$. **D.** $\min|w| = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\left|z^2-2z+5\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right| \Leftrightarrow \left|(z-1+2i)(z-1-2i)\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-1+2i=0 \\ \left|(z-1-2i)\right|=\left|(z+3i-1)\right| \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $z-1+2i=0 \Rightarrow w=-1 \Rightarrow |w|=1$ (1).

Trường hợp 2: $|z-1-2i|=|z+3i-1|$

Gọi $z=a+bi$ (với $a,b\in\mathbb{R}$) khi đó ta được $\left|a-1+(b-2)i\right|=\left|(a-1)+(b+3)i\right| \Leftrightarrow (b-2)^2=(b+3)^2 \Leftrightarrow b=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $w=z-2+2i=a-2+\dfrac{3}{2}i \Rightarrow |w|=\sqrt{(a-2)^2+\dfrac{9}{4}}\ge\dfrac{3}{2}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\min|w|=1$.

Câu 52: **(CHUYÊN SƠN LA – L2)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện : $|z-1+2i|=\sqrt{5}$ và $w=z+1+i$ có môđun lớn nhất. Số phức z có môđun bằng:

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

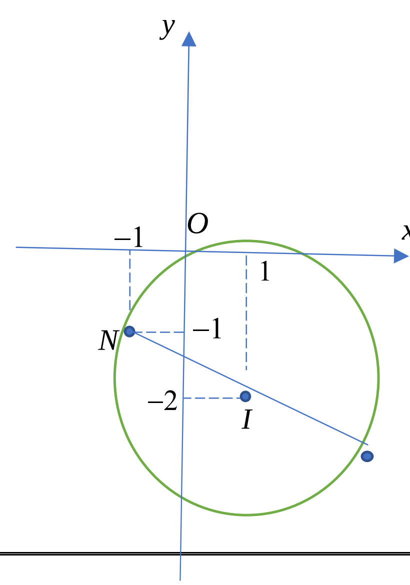
Chọn B.

Gọi $z=x+yi$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ $\Rightarrow z-1+2i=(x-1)+(y+2)i$

Ta có: $|z-1+2i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=5$

Suy ra tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;-2)$ bán kính $R=\sqrt{5}$ như hình vẽ:

Dễ thấy $O\in(C)$, $N(-1;-1)\in(C)$



Theo đề ta có:

$M(x;y)\in(C)$ là điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn:

$w=z+1+i=x+yi+1+i=(x+1)+(y+1)i$

$\Rightarrow |z+1+i|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\left|\overline{MN}\right|$

Suy ra $|z+1+i|$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất

Mà $M,N\in(C)$ nên MN lớn nhất khi MN là đường kính đường tròn (C)

$\Leftrightarrow I$ là trung điểm $MN \Rightarrow M(3;-3) \Rightarrow z=3-3i \Rightarrow |z|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

Câu 53: **(CHUYÊN SƠN LA – L2)** Giả sử A,B theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2. Khi đó độ dài của $\overrightarrow{AB}$ bằng

A. $|z_2+z_1|$. **B.** $|z_2-z_1|$. **C.** $|z_1|+|z_2|$. **D.** $|z_1|-|z_2|$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Giả sử $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

Theo đề bài ta có: $A(a;b)$, $B(c;d)$ $\Rightarrow AB=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$.

$z_2-z_1=(a-c)+(d-b)i \Rightarrow |z_2-z_1|=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$.

Câu 54: **(CHU VĂN AN – HN)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|z+i|+|z-2-i|$.

A. $\max T=8\sqrt{2}$. **B.** $\max T=4$. **C.** $\max T=4\sqrt{2}$. **D.** $\max T=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$T=|z+i|+|z-2-i|=|(z-1)+(1+i)|+|(z-1)-(1+i)|$.

Đặt $w=z-1$. Ta có $|w|=1$ và $T=|w+(1+i)|+|w-(1+i)|$.

Đặt $w=x+y.i$. Khi đó $|w|^2=2=x^2+y^2$.

$$\begin{aligned}T&=|(x+1)+(y+1)i|+|(x-1)+(y-1)i|\\&=1.\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}+1.\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\\&\le\sqrt{(1^2+1^2)\left((x+1)^2+(y+1)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\right)}\\&=\sqrt{2(2x^2+2y^2+4)}=4\end{aligned}$$

Vậy $\max T=4$.

Câu 55: **(CHU VĂN AN – HN)** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2|+|z+2|=10$.

A. Đường tròn $(x-2)^2+(y+2)^2=100$. **B.** Elip $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.

C. Đường tròn $(x-2)^2+(y+2)^2=10$. **D.** Elip $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức 2

Gọi B là điểm biểu diễn số phức -2

Ta có: $|z+2|+|z-2|=10 \Leftrightarrow MB+MA=10$.

Ta có $AB=4$. Suy ra tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là Elip với 2 tiêu điểm là $A(2;0)$, $B(-2;0)$, tiêu cự $AB=4=2c$, độ dài trục lớn là $10=2a$, độ dài trục bé là $2b=2\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{25-4}=2\sqrt{21}$.

Vậy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2|+|z+2|=10$ là Elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$.

BÀI TOÁN VẬN DỤNG (8 - 9 - 10)

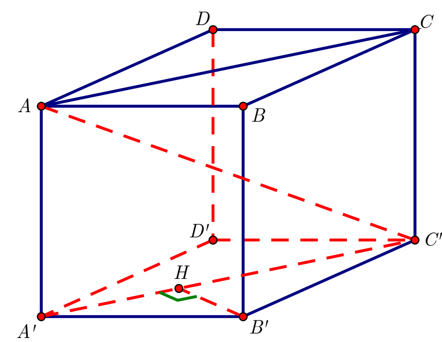
Chủ đề 5. KHỐI ĐA DIỆN

Câu 1: (SGD VĨNH PHÚC) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có: $A'C' = \sqrt{(A'B')^2 + (B'C')^2} = 2a$. Kẻ $B'H \perp A'C'$.

$$B'H = \frac{A'B'.B'C'}{B'C'} = \frac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vì $BB'//(ACC'A')$ nên $d(BB', AC') = d(BB', (ACC'A'))$

$$d(BB', (ACC'A')) = B'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

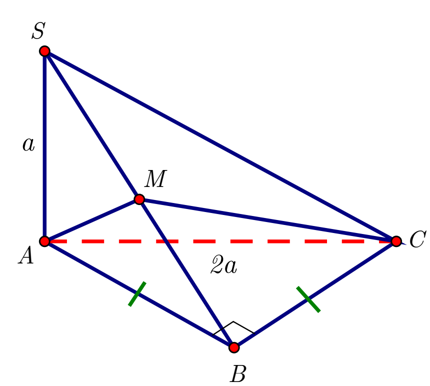
Nên $d(BB', AC') = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2: (SGD VĨNH PHÚC) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = 2a$ và $SA = a$. Gọi M là trung điểm cạnh SB. Tính thể tích khối chóp $S.AMC$.

A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{a^3}{9}$. D. $\frac{a^3}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Xét tam giác vuông cân ABC có: $AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.a.a^2 = \frac{a^3}{3}$$

Áp dụng định lí Sim-Son ta có:

$$\frac{V_{SAMC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SC}{SC} = \frac{1}{2}$$

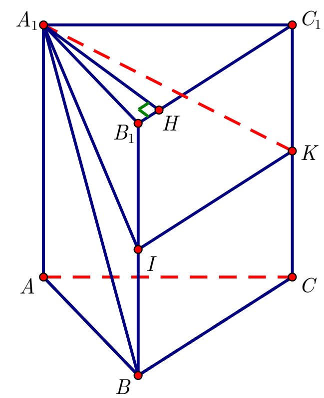
$\Rightarrow V_{S.AMC}=\frac{1}{2}V_{S.ABC}=\frac{a^3}{6}$

Câu 3: (SGD VĨNH PHÚC) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB=a$, $AC=2a$, $AA_1=2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC}=120°$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CC_1, BB_1. Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (A_1BK).

A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. B. $a\sqrt{15}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có $IK=B_1C_1=BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos 120^0}=a\sqrt{7}$

Kẻ $AH\perp B_1C_1$ khi đó AH là đường cao của tứ diện A_1BIK

Vì $A_1H.B_1C_1=A_1B_1.A_1C_1.\sin 120^0\Rightarrow A_1H=\frac{a\sqrt{21}}{7}$

$S_{\triangle IKB}=\frac{1}{2}IK.KB=\frac{1}{2}a^2\sqrt{35}\Rightarrow V_{A_1.IBK}=\frac{1}{6}a^3\sqrt{15}(dvtt)$

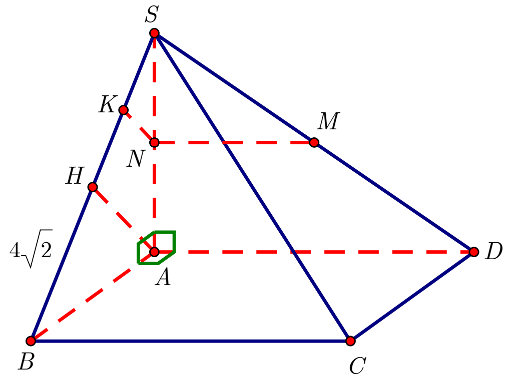
Mặt khác áp dụng định lý Pitago và công thức Hê-rông ta tính đc $S_{\Delta A_1BK}=3a\sqrt{3}\,(dvdt)$

Do đó $d\left(I,(A_1BK)\right)=\frac{3V_{A_1IBK}}{S_{\Delta A_1BK}}=\frac{a\sqrt{5}}{6}$.

Câu 4: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Tam giác SAB vuông cân tại A và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và $SB=4\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Tính khoảng cách l từ điểm M đến mặt phẳng (SBC).

A. $l=2$ B. $l=2\sqrt{2}$ C. $l=\sqrt{2}$ D. $l=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải



Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD),(SAB)\cap(ABCD)=AB\\ SA\perp AB\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.

Gọi N,H,K lần lượt là trung điểm các cạnh SA,SB và đoạn SH.

Ta có $\begin{cases}BC\perp SA\\ BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$.

Mà $AH\perp SB$ ($\triangle ABC$ cân tại A có AH là trung tuyến).

Suy ra $AH\perp(SBC)$, do đó $KN\perp(SBC)$ (vì $KN \parallel AH$, đường trung bình).

Mặt khác $MN \parallel BC\Rightarrow MN \parallel (SBC)$.

Nên $d\left(M,(SBC)\right)=d\left(N,(SBC)\right)=NK=\frac{1}{2}AH=2\sqrt{2}$.

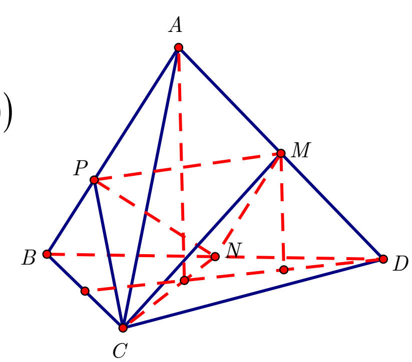
Đáp án: B.

Câu 5: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 3. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AD,BD. Lấy điểm không đổi P trên cạnh AB (khác A,B). Thể tích khối chóp $PMNC$ bằng

A. $\frac{9\sqrt{2}}{16}$ B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $\frac{27\sqrt{2}}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn A



Do $AB \parallel (CMN)$ nên $d\left(P,(CMN)\right)=d\left(\text{A},(CMN)\right)=d\left(\text{D},(CMN)\right)$

Vậy $V_{PCMN}=V_{DPMN}=V_{MCND}=\frac{1}{4}V_{ABCD}$

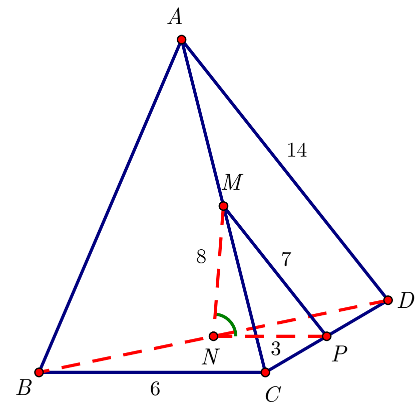
(Do diện tích đáy và chiều cao đều bằng một nửa).

Mặt khác $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{27\sqrt{2}}{12}$ nên $V_{MCND} = \frac{1}{4}.\frac{27\sqrt{2}}{12} = \frac{9\sqrt{2}}{16}$

Câu 6: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = 14, BC = 6$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD và $MN = 8$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BC và MN. Tính $\sin\alpha$.

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Hướng dẫn giải



Gọi P là trung điểm của cạnh CD, ta có $\alpha = \widehat{(MN, BC)} = \widehat{(MN, NP)}$.

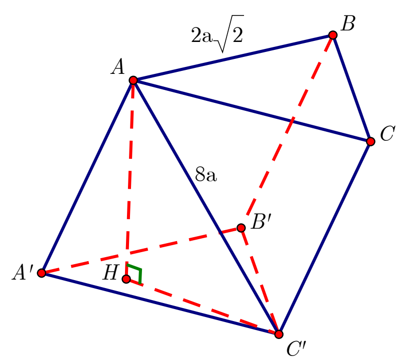
Trong tam giác MNP, ta có $\cos\widehat{MNP} = \frac{MN^2 + PN^2 - MP^2}{2MN.NP} = \frac{1}{2}$. Suy ra $\widehat{MNP} = 60°$.

Suy ra $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là đều cạnh $AB = 2a\sqrt{2}$. Biết $AC' = 8a$ và tạo với mặt đáy một góc 45^0 . Thể tích khối đa diện $ABCC'B'$ bằng

A. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{8a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{16a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{16a^3\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu của A lên $mp(A'B'C')$

$\Rightarrow \widehat{HC'A} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta AHC'$ vuông cân tại H.

$\Rightarrow AH = \frac{AC'}{\sqrt{2}} = \frac{8a}{\sqrt{2}} = 4a\sqrt{2}.$

NX:

$V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}AH.S_{ABC} = \frac{2}{3}.4a\sqrt{2}.\frac{\left(2a\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{16a^3\sqrt{6}}{3}.$

Chọn D.

Gọi H là hình chiếu của A lên $mp(A'B'C')$

$\Rightarrow \widehat{HC'A} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta AHC'$ vuông cân tại H.

$$\Rightarrow AH = \frac{AC'}{\sqrt{2}} = \frac{8a}{\sqrt{2}} = 4a\sqrt{2}.$$

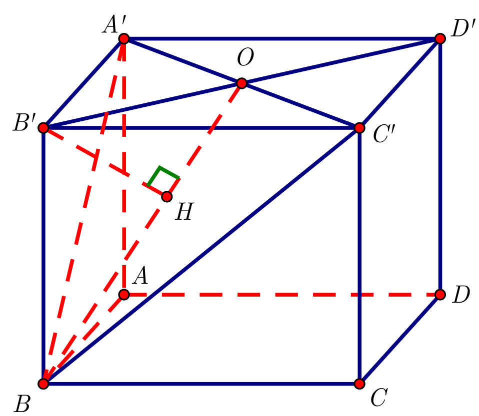
NX: $V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}AH.S_{ABC} = \frac{2}{3}.4a\sqrt{2}.\frac{\left(2a\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{16a^3\sqrt{6}}{3}.$

Câu 8: (T.T DIỆU HIỀN) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $2a$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi $O = A'C' \cap B'D'$ và từ B' kẽ $B'H \perp BO$

Ta có $CD' // (BA'C')$ nên

$$d(BC';CD') = d(D';(BA'C')) = d(B';(BA'C')) = B'H = \frac{BB'.B'O}{BO} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

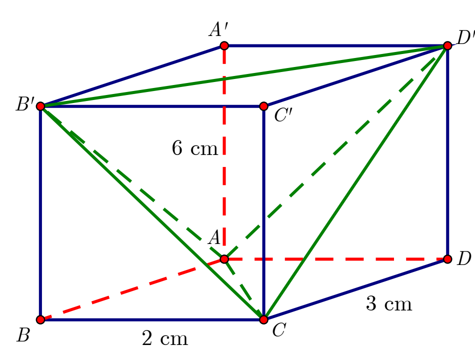
Câu 9: (T.T DIỆU HIỀN) Một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước là $2cm$, $3cm$ và $6cm$. Thể tích của khối tứ diện $A.CB'D'$ bằng

A. $8\ cm^3$. B. $12\ cm^3$. C. $6\ cm^3$. D. $4\ cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có :



$V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{B.AB'C} + V_{D.ACD'} + V_{A'.B'AD'} + V_{C.B'C'D'} + V_{A.CB'D'}$

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 4V_{B.AB'C} + V_{A.CB'D'}$

$\Rightarrow V_{A.CB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4V_{B.AB'C}$

$\Rightarrow V_{A.CB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4.\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}$

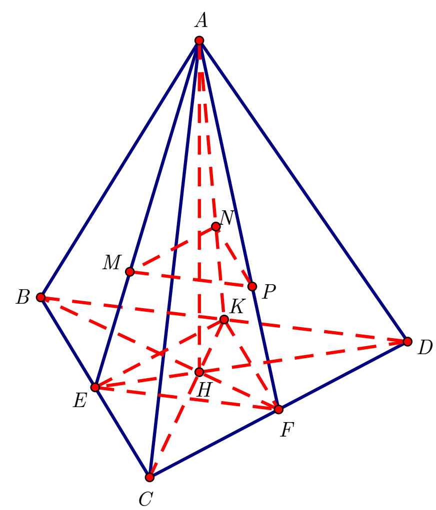
$\Rightarrow V_{A.CB'D'} = \frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3}.2.3.6 = 12\,cm^3$

Câu 10: (LẠNG GIANG SỐ 1) Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $2cm$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của ba tam giác ABC, ABD, ACD. Tính thể tích V của khối chóp $AMNP$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}}{162}cm^3$. **B.** $V = \frac{2\sqrt{2}}{81}cm^3$. **C.** $V = \frac{4\sqrt{2}}{81}cm^3$. **D.** $V = \frac{\sqrt{2}}{144}cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Tam giác BCD đều $\Rightarrow DE = \sqrt{3} \Rightarrow DH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$S_{\Delta EFK} = \frac{1}{2}.d_{(E,FK)}.FK = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}d_{(D,BC)}.\frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow V_{SKFE} = \frac{1}{3}AH.S_{\Delta EFK} = \frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{6}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Mà $\frac{AM}{AE} = \frac{AN}{AK} = \frac{AP}{AF} = \frac{2}{3}$

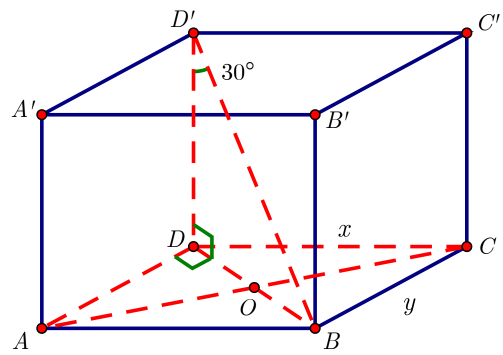
Lại có: $\frac{V_{AMNP}}{V_{AEKF}} = \frac{AM}{AE}.\frac{AN}{AK}.\frac{AP}{AF} = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{8}{27}V_{AEKF} = \frac{4\sqrt{2}}{81}$.

Câu 11: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\widehat{BCD} = 60°, AC = a\sqrt{7}, BD = a\sqrt{3}, AB > AD$, đường chéo BD' hợp với mặt phẳng $(ADD'A')$ góc $30°$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $\sqrt{39}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{39}}{3}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $3\sqrt{3}a^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn **D.**



- Đặt $x = CD; y = BC \quad (x > y)$
- Áp dụng định lý hàm cos và phân giác trong tam giác BCD
  $3a^2 = x^2 + y^2 - xy$ và $x^2 + y^2 = 5a^2$

  $\Rightarrow x = 2a; \quad y = a$

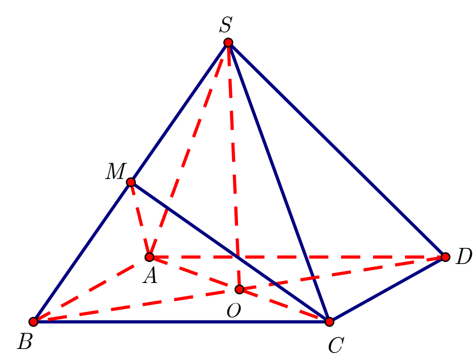
- Với $x = 2y = 2a$ và $\widehat{C} = 60 \rightarrow BD \perp AD \rightarrow \widehat{BD';(ADD'A')} = 30 \rightarrow DD' = 3a$
- $S_{ABCD} = xy.\sin 60 = a^2\sqrt{3}$
- Vậy V hình hộp $= a^3 3\sqrt{3}$

Câu 12: (NGÔ GIA TỰ - VP) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích $V = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Nếu $SB \perp SD$ thì khoảng cách từ B đến mặt phẳng (MAC) bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Giả sử hình chóp có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Khi đó, $BD = a\sqrt{2}$.

Tam giác SBD vuông cân tại S nên $SD = SB = a$ và $SO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra các tam giác SCD, SAD là các tam giác đều cạnh a và $SD \perp (MAC)$ tại M.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Mà $\frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow a = 1$

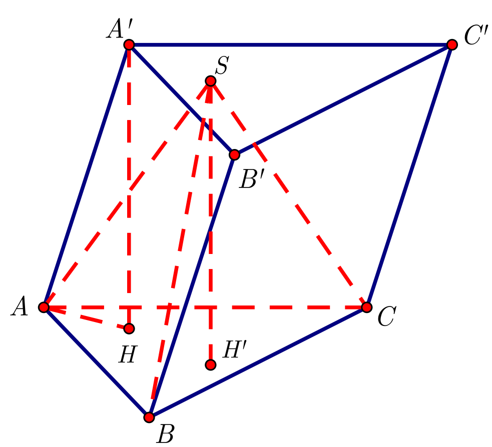
Vì O là trung điểm BD nên $d\left(B,(MAC)\right) = d\left(D,(MAC)\right) = DM = \frac{1}{2}$.

Câu 13: (THTT – 477) Một hình lăng trụ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b và tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Thể tích của khối chóp có đáy là đáy của lăng trụ và đỉnh là một điểm bất kì trên đáy còn lại là

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2b\sin\alpha$. B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b\sin\alpha$. C. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2b\cos\alpha$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b\cos\alpha$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABC). Khi đó $\alpha = \widehat{A'AH}$.

Ta có $A'H = A'A.\sin\alpha = b\sin\alpha$ nên thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^2b\sqrt{3}\sin\alpha}{4}$.

Lại có chiều cao của chóp theo yêu cầu đề bài chính là chiều cao của lăng trụ và bằng $A'H$ nên thể tích khối chóp là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^2b\sqrt{3}\sin\alpha}{12}$.

Câu 14: (THTT – 477) Các đường chéo của các mặt của một hình hộp chữ nhật bằng a, b, c. Thể tích của khối hộp đó là

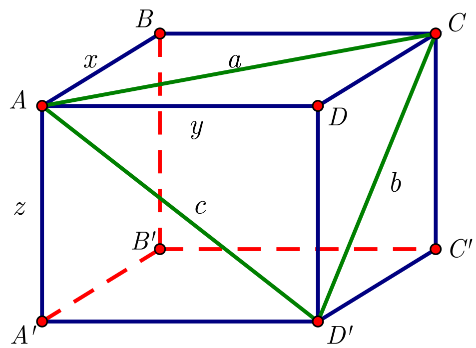
A. $V = \sqrt{\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8}}$.

B. $V = \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8}$.

C. $V = abc$.

D. $V = a + b + c$.

Hướng dẫn giải



Chọn A.

Giả sử hình hộp chữ nhật có ba kích thước: x, y, z.

Theo yêu cầu bài toán ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y^2 + z^2 = c^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = a^2 - x^2 \\ y^2 + z^2 = c^2 \\ z^2 = b^2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = a^2 - x^2 \\ a^2 - x^2 + b^2 - x^2 = c^2 \\ z^2 = b^2 - x^2 \end{cases}$

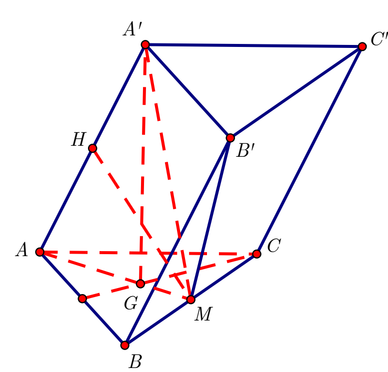
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \\ x^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ z^2 = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \end{cases} \Rightarrow V = \sqrt{\dfrac{\left(a^2 + c^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}{8}}$$

Câu 15: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



M là trung điểm của BC thì $BC \perp \left(AA'M\right)$.

Gọi MH là đường cao của tam giác $A'AM$ thì

$MH \perp A'A$ và $HM \perp BC$ nên HM là khoảng cách

AA' và BC.

Ta có $A'A.HM = A'G.AM \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4}.A'A = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{A'A^2 - \frac{a^2}{3}}$

$\Leftrightarrow A'A^2 = 4\left(A'A^2 - \frac{a^2}{3}\right) \Leftrightarrow 3A'A^2 = \frac{4a^2}{3} \Leftrightarrow A'A^2 = \frac{4a^2}{9} \Leftrightarrow A'A = \frac{2a}{3}$.

Đường cao của lăng trụ là $A'G = \sqrt{\frac{4a^2}{9} - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a}{3}$.

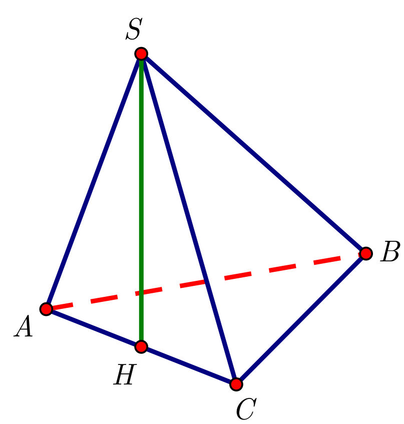
Thể tích $V_{LT} = \frac{a}{3}.\frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 16: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^0$, $\widehat{ASC} = 90^0$, $SA = SB = SC = a$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = 2a\sqrt{6}$.   B. $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.   C. $d = a\sqrt{6}$.   D. $d = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



+ Ta có: ΔSAB, ΔSBC là các đều cạnh a nên $AB = BC = a$

+ Ta có: ΔSAC vuông cân tại S nên $AC = a\sqrt{2}$

+ Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ nên ΔABC vuông tại B có $S_{ABC} = \frac{a^2}{2}$

+ Gọi H là trung điểm của AC. Ta có: $HA = HB = HC$ và $SA = SB = SC$ nên $SH \perp (ABC)$ và $SH = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

+ Vậy $d\left[A;(SBC)\right]=\dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{SBC}}=\dfrac{SH.S_{ABC}}{S_{SBC}}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a^2}{2}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 17: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GL) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2a\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAD}$ bằng 120^0. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc gữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45^0. Tính khoảng cách h từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $h=2a\sqrt{2}$. **B.** $h=\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $h=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $h=a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi H là chân đường cao hạ từ A của tam giác ABC.

Xét tam giác ABH :

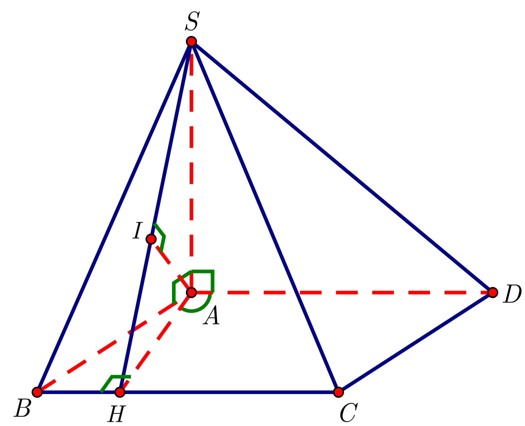
$\sin\angle B=\dfrac{AH}{AB}\Rightarrow AH=2a\sqrt{3}.\sin 60^0=3a.$

$\cos\angle B=\dfrac{BH}{AB}\Rightarrow BH=2a\sqrt{3}.\cos 60^0=a\sqrt{3}.$

Xét tam giác SAH vuông tại A:

$\tan\angle SHA=\dfrac{SA}{AH}\Rightarrow SA=3a\tan 45^0=3a.$

Trong tam giác SAH vuông tại A, kẻ $AI\perp SH$ tại I. Ta có $AI\perp(SBC)$ nên AI là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).



Xét tam giác SAH , ta có: $\dfrac{1}{AI^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{(3a)^2}+\dfrac{1}{(3a)^2}=\dfrac{2}{9a^2}.$

$\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=AI=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}.$

Câu 18: (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH) Khi chiều cao của một hình chóp đều tăng lên n lần nhưng mỗi cạnh đáy giảm đi n lần thì thể tích của nó.

A. Không thay đổi. **B.** Tăng lên n lần. **C.** Tăng lên $n-1$ lần. **D.** Giảm đi n lần.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $V=\dfrac{1}{3}.h.S$, với h là chiều cao, S là diện tích đáy

$S=\dfrac{x^2a}{4\tan\left(\dfrac{180^0}{a}\right)}$ với x là độ dài cạnh của đa giác đều, a là số đỉnh của đa giác đều.

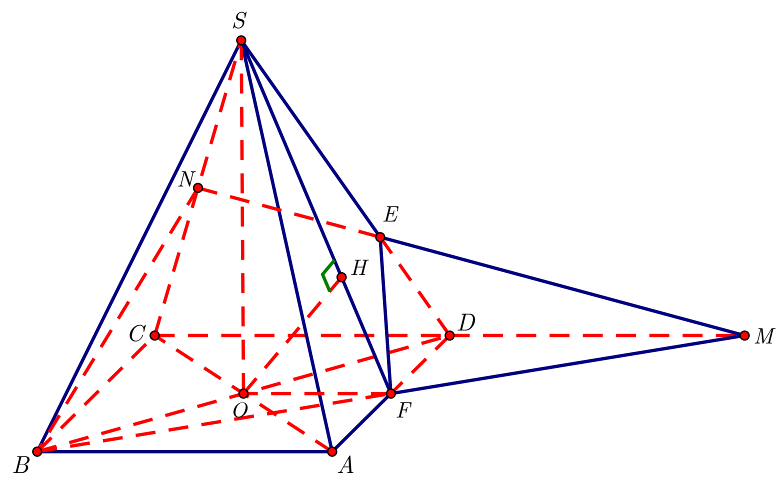
Ycbt $\Leftrightarrow V_1=\frac{1}{3}.nh.\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2 a}{4\tan\left(\frac{180^0}{a}\right)}=\frac{1}{n}.\frac{1}{3}.h.S=\frac{1}{n}.V$.

Câu 19: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc $60°$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé) bằng:

A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{7}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Giả sử các điểm như hình vẽ.

$E=SD\cap MN\Rightarrow E$ là trọng tâm tam giác SCM, $DF\,//\,BC\Rightarrow F$ là trung điểm BM.

Ta có: $\left(\widehat{SD,(ABCD)}\right)=\widehat{SDO}=60°\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{6}}{2}$, $SF=\sqrt{SO^2+OF^2}=\frac{a\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow d\left(O,(SAD)\right)=OH=h=\frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}};S_{SAD}=\frac{1}{2}SF.AD=\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$

$\frac{V_{MEFD}}{V_{MNBC}}=\frac{ME}{MN}\cdot\frac{MF}{MB}\cdot\frac{MD}{MC}=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow V_{BFDCNE}=\frac{5}{6}V_{MNBC}=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot d\left(M,(SAD)\right)\cdot\frac{1}{2}S_{SBC}=\frac{5}{18}\cdot 4h\cdot\frac{1}{2}S_{SAD}=\frac{5a^3\sqrt{6}}{72}$

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}\Rightarrow V_{SABFEN}=V_{S.ABCD}-V_{BFDCNE}=\frac{7a^3\sqrt{6}}{36}$.

Suy ra: $\frac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}}=\frac{7}{5}$.

Câu 20: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

A. 8. **B.** $8\sqrt{2}$. **C.** $16\sqrt{2}$. **D.** $24\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi chiều dài 3 cạnh của hình hộp chữ nhật lần lượt là: a, b, $c > 0$

Ta có $AC'^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 36; S = 2ab + 2bc + 2ca = 36 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 72 \Rightarrow a+b+c = 6\sqrt{2}$

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{6\sqrt{2}}{3}\right)^3 = 16\sqrt{2}$. Vậy $V_{Max} = 16\sqrt{2}$

Câu 21: (CHUYÊN ĐHSP HN) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi A', B', C' tương ứng là các điểm đối xứng của A, B, C qua S. Thể tích của khối bát diện có các mặt ABC, $A'B'C'$, $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ là

A. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Chọn A.

Cách 1: Ta tính thể tích khối chóp $S.ABC$:

Gọi H là tâm tam giác ABC đều cạnh a $\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng *(ABC)* bằng 60^0 $\Rightarrow \widehat{SCH} = 60^o \Rightarrow SH = a \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

$V = 2V_{B.ACA'C'} = 2.4V_{B.ACS} = 8V_{S.ABC} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

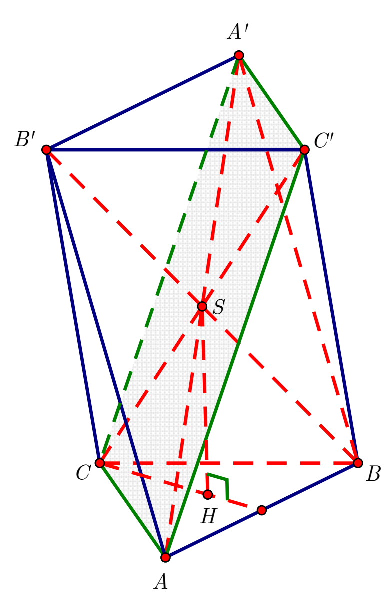
Cách 2: Ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Diện tích tam giác SBC là: $S_{\Delta SBC} = \frac{a^2\sqrt{39}}{12}$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là:

$d(A,(SBC)) = \frac{3a}{\sqrt{13}}$.

Tứ giác $BCB'C'$ là hình chữ nhật vì có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



Có $SB=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow BB'=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow B'C=\frac{a\sqrt{39}}{3}$.

Diện tích $BCB'C'$ là: $S_{BCB'C'}=\frac{a^2\sqrt{39}}{3}$.

Thể tích khối 8 mặt cần tìm là:

$V=2.\frac{1}{3}d\left(A,(SBC)\right).S_{BCB'C'}=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Cách 3 (Tham khảo lời giải của Ngọc HuyềnLB).

Thể tích khối bát diện đã cho là $V=2V_{A'B'C'BC}=2.4V_{A'.SBC}=8V_{S.ABC}=8.\frac{1}{3}SG.S_{ABC}$

Ta có: $\widehat{\left(SA;(ABC)\right)}=\widehat{SAG}=60^0$. Xét ΔSGA vuông tại G: $\tan\widehat{SAG}=\frac{SG}{AG}\Leftrightarrow SG=AG.\tan\widehat{SAG}=a$.

Vậy $V=8.\frac{1}{3}SG.S_{ABC}=8.\frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 22: (CHUYÊN THÁI BÌNH) Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=a$, $SB=a\sqrt{2}$, $SC=a\sqrt{3}$. Thể tích lớn nhất của khối chóp là

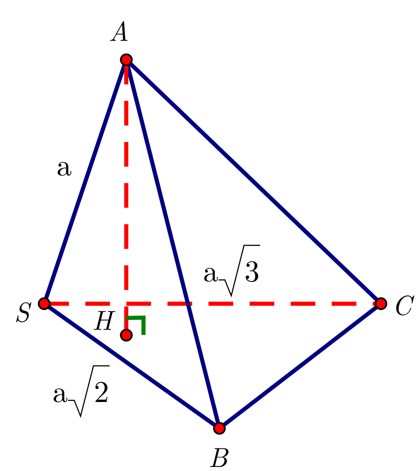
A. $a^3\sqrt{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Chọn D.

Gọi H là hình chiếu của A lên $(SBC)\Rightarrow V=\frac{1}{3}AH.S_{SBC}$.

Ta có $AH\le SA$; dấu "=" xảy ra khi $AS\perp(SBC)$.

$S_{SBC}=\frac{1}{2}SB.SC.\sin\widehat{SBC}\le\frac{1}{2}SB.SC$, dấu "=" xảy ra khi $SB\perp SC$.



Khi đó, $V=\frac{1}{3}AH.S_{SBC}\le\frac{1}{3}AS\cdot\frac{1}{2}SB\cdot SC=\frac{1}{6}SA\cdot SB\cdot SC$.

Dấu "=" xảy ra khi SA,SB,SC đôi một vuông góc với nhau.

Suy ra thể tích lớn nhất của khối chóp là $V=\frac{1}{6}SA.SB.SC=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

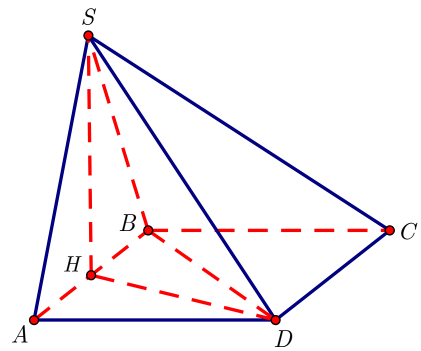
Câu 23: (CHUYÊN THÁI BÌNH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD=\dfrac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S lên mặt $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Tính chiều cao của khối chóp $H.SBD$ theo a.

A. $\dfrac{\sqrt{3}a}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a}{5}$.

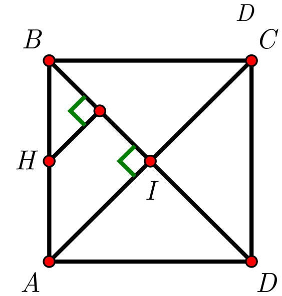
Chọn A.

Ta có ΔSHD vuông tại H

$$\Rightarrow SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{17}}{2}\right)^2-\left(a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}=a\sqrt{3}.$$



Cách 1. Ta có $d(H,BD)=\dfrac{1}{2}d(A,BD)=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.



Chiều cao của chóp $H.SBD$ là

$$d(H,(SBD))=\frac{SH.d(H,BD)}{\sqrt{SH^2+\left[d(H,BD)\right]^2}}=\frac{a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{3a^2+\dfrac{a^2}{8}}}=\frac{a^2\sqrt{6}.2\sqrt{2}}{4.5a}=\frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

Cách 2. $S.ABCD=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3 \Rightarrow V_{H.SBD}=\dfrac{1}{2}V_{A.SBD}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABC}=\dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

Tam giác ΔSHB vuông tại $H \Rightarrow SB=\sqrt{SH^2+HB^2}=\sqrt{3a^2+\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

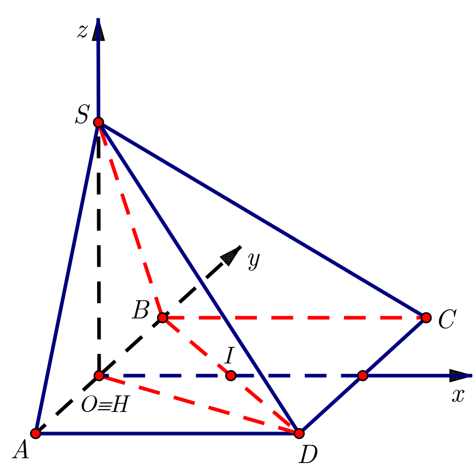
Tam giác ΔSBD có $SB=\dfrac{a\sqrt{13}}{2}; BD=a\sqrt{2}; SD=\dfrac{a\sqrt{17}}{2} \Rightarrow S_{\Delta SBD}=\dfrac{5a^2}{4}$.

$$\Rightarrow d(H,(SBD))=\frac{3V_{S.HBD}}{S_{\Delta SBD}}=\frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

Cách 3. Gọi I là trung điểm BD. Chọn hệ trục $Oxyz$ với $O\equiv H$; $Ox\equiv HI$; $Oy\equiv HB$; $Oz\equiv HS$.

Ta có $H(0;0;0)$; $B\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$; $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$; $I\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$

Vì $(SBD)\equiv(SBI)$



$\Rightarrow (SBD): \dfrac{2x}{a}+\dfrac{2y}{a}+\dfrac{z}{a\sqrt{3}}=1 \Leftrightarrow 2x+2y+\dfrac{\sqrt{3}}{3}z-a=0$.

Suy ra $d\left(H,(SBD)\right)=\dfrac{\left|2.0+2.0+\dfrac{\sqrt{3}}{3}.0-a\right|}{\sqrt{4+4+\dfrac{1}{3}}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 24: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng a^3. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tính theo a khoảng cách giữa SA và CD.

A. $2\sqrt{3}a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì đáy $ABCD$ là hình bình hành

$\Rightarrow V_{SABD}=V_{SBCD}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3}{2}$.

Ta có:

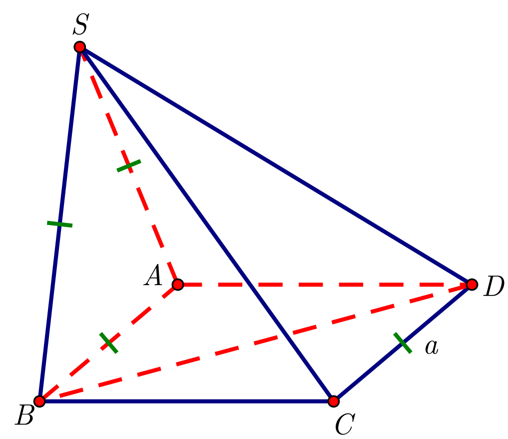
Vì tam giác SAB đều cạnh a

$\Rightarrow S_{SAB}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vì $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB)$ nên

$d(CD,SA)=d\left(CD,(SAB)\right)=d\left(D,(SAB)\right)$

$=\dfrac{3V_{SABD}}{S_{SBD}}=\dfrac{3.\dfrac{a^3}{2}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}=2\sqrt{3}a$.



Câu 25: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Tìm V_{max} là giá trị lớn nhất của thể tích các khối hộp chữ nhật có đường chéo bằng $3\sqrt{2}cm$ và diện tích toàn phần bằng $18cm^2$.

A. $V_{\max}=6cm^3$. **B.** $V_{\max}=5cm^3$.

C. $V_{\max}=4cm^3$. **D.** $V_{\max}=3cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn **C.**

Đặt a,b,c là kích thước của hình hộp thì ta có hệ $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=18 \\ ab+bc+ac=9 \end{cases}$.

Suy ra $a+b+c=6$. Cần tìm GTLN của $V=abc$.

Ta có $b+c=6-a \Rightarrow bc=9-a(b+c)=9-a(6-a)$.

Do $(b+c)^2 \ge 4bc \Rightarrow (6-a)^2 \ge 4\left[9-a(6-a)\right] \Leftrightarrow 0<a\le 4$.

Tương tự $0 < b,c \le 4$.

Ta lại có $V = a\left[9 - a\left(6-a\right)\right]$. Khảo sát hàm số này tìm được GTLN của V là 4.

Câu 26: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. $SA = SB = SC = a$, Cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{a^3}{8}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{3a^3}{8}$. D. $\frac{a^3}{2}$.

Hướng dẫn giải

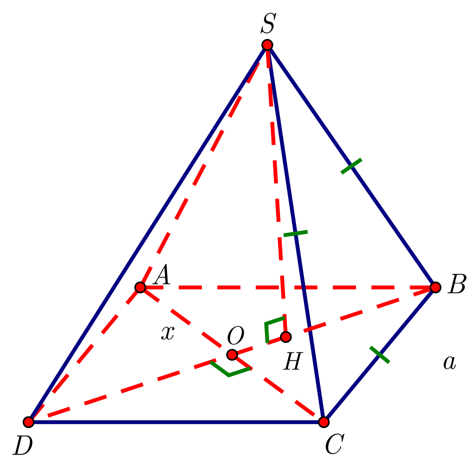
Chọn D.

Khi SD thay đổi thi AC thay đổi. Đặt $AC = x$.

Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $SA = SB = SC$ nên chân đường cao SH trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$\Rightarrow H \in BO$.



Ta có $OB = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}OB.AC = \frac{1}{2}x.\frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2} = \frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}$

$HB = R = \frac{a.a.x}{4S_{ABC}} = \frac{a^2x}{4.\frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$.

$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{4a^2 - x^2}} = \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$

$V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2.\frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.\frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}$

$= \frac{1}{3}a\left(x.\sqrt{3a^2 - x^2}\right) \le \frac{1}{3}a\left(\frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2}\right) = \frac{a^3}{2}$

Câu 27: (THTT – 477) Cho khối đa diện đều n mặt có thể tích V và diện tích mỗi mặt của nó bằng S. Khi đó, tổng các khoảng cách từ một điểm bất kì bên trong khối đa diện đó đến các mặt của nó bằng

A. $\frac{nV}{S}$. B. $\frac{V}{nS}$.

C. $\frac{3V}{S}$. D. $\frac{V}{3S}$.

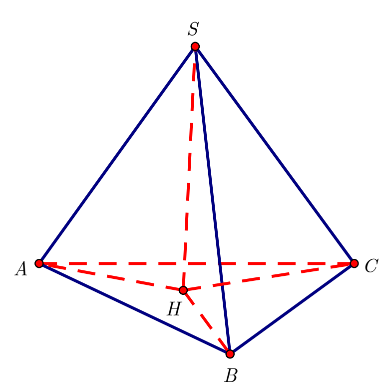
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Xét trong trường hợp khối tứ diện đều.

Các trường hợp khác hoàn toàn tương tự.

$V_{H.ABC} = \frac{1}{3}h_1.S$; $V_{H.SBC} = \frac{1}{3}h_2.S$; $V_{H.SAB} = \frac{1}{3}h_3.S$; $V_{H.SAC} = \frac{1}{3}h_4.S$



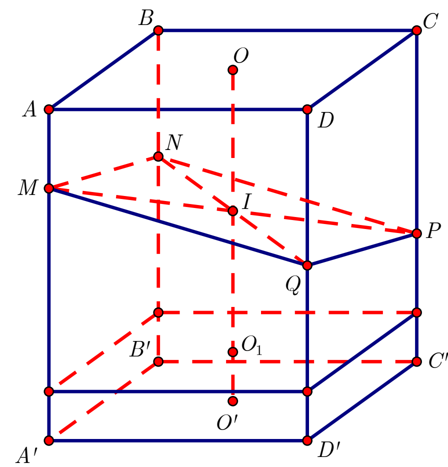
$$h_1 = \frac{3V_1}{S}; h_2 = \frac{3V_2}{S}; h_3 = \frac{3V_3}{S}; h_4 = \frac{3V_4}{S}$$

$$\Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)}{S} = \frac{3V}{S}$$

Câu 28: (LƯƠNG ĐẮC BẰNG) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q. Biết $AM = \frac{1}{3}a$, $CP = \frac{2}{5}a$. Thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$ là:

A. $\frac{11}{30}a^3$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{11}{15}a^3$.

HD: Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành có tâm là I thuộc đoạn OO'.



Ta có: $OI = \frac{AM + CP}{2} = \frac{11}{30}a < \frac{a}{2}$

Gọi O_1 là điểm đối xứng O qua I thì :

$OO_1 = 2OI = \frac{11}{15}a$ < a. Vậy O_1 nằm trong đoạn OO'.

Vẽ mặt phẳng qua O_1 song song với (ABCD) cắt các cạnh *AA'; BB';CC'; DD'* lần lượt tại

A_1, B_1,C_1, D_1. Khi đó I là tâm của hình hộp

ABCD.A $B_1C_1D_1$.

Vậy V(ABCD. MNPQ)=V(MNPQ.A_1 $B_1C_1D_1$)

$$= \frac{1}{2}V(ABCD.A_1B_1C_1D_1) = \frac{1}{2}a^2 OO_1 = \frac{11}{30}a^3$$

Câu 29: (CHUYÊN VĨNH PHÚC) Người ta gọt một khối lập phương gỗ để lấy khối tám mặt đều nội tiếp nó (tức là khối có các đỉnh là các tâm của các mặt khối lập phương). Biết các cạnh của khối lập phương bằng a. Hãy tính thể tích của khối tám mặt đều đó:

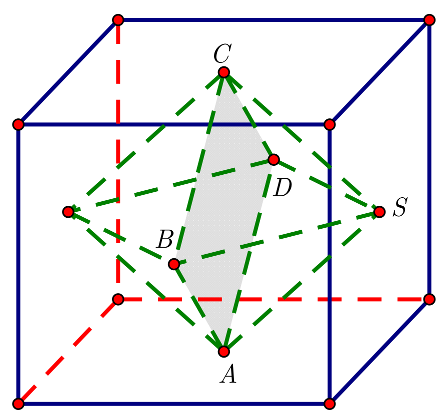
A. $\frac{a^3}{4}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{a^3}{12}$ **D.** $\frac{a^3}{8}$

Đáp án B

Dựng được hình như hình bên

+ Thấy được thể tích khối cần tính bằng 2 lần thể tích của hình chóp S.ABCD

+ Nhiệm vụ bây giờ đi tìm thể tích của S.ABCD



+ ABCD là hình vuông có tâm O đồng thời chính là hình chiếu của S lên mặt đáy

$SO=\frac{a}{2}$; $BD=$ cạnh của hình lập phương $=a$. Suy ra các cạnh của hình vuông $ABCD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a^3=\frac{a^3}{12}$. $V_{\text{khối đa diện}}=2.V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{6}$.

Câu 30: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

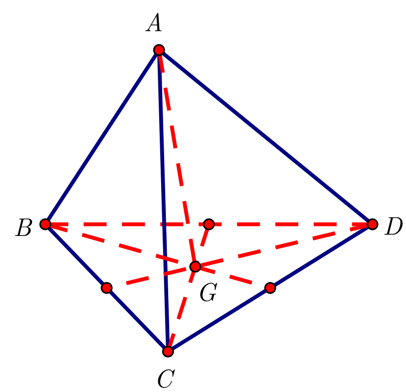
A. $V=3$. **B.** $V=4$. **C.** $V=6$. **D.** $V=5$.

Chọn B.

- ***Cách 1:***

Phân tích: tứ diện $ABCD$ và khối chóp $A.GBC$ có cùng đường cao là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD). Do G là trọng tâm tam giác BCD nên ta có $S_{\Delta BGC}=S_{\Delta BGD}=S_{\Delta CGD}\Rightarrow S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta BGC}$ (xem phần chứng minh).

Áp dụng công thức thể tích hình chóp ta có:

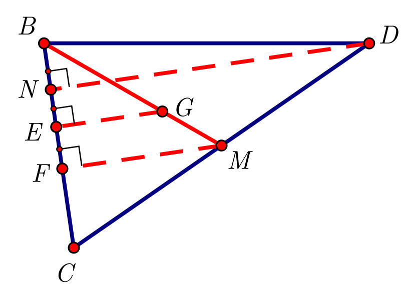


$$\left.\begin{array}{l} V_{ABCD}=\frac{1}{3}h.S_{\Delta BCD} \\ V_{A.GBC}=\frac{1}{3}h.S_{\Delta GBC}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{A.GBC}}=\frac{\frac{1}{3}h.S_{\Delta BCD}}{\frac{1}{3}h.S_{\Delta GBC}}=\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta GBC}}=3$$

$$\Rightarrow V_{A.GBC}=\frac{1}{3}V_{ABCD}=\frac{1}{3}.12=4.$$

Chứng minh: Đặt $DN=h;BC=a$.

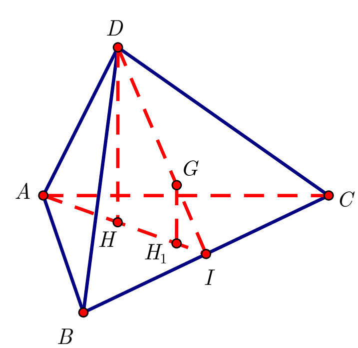
Từ hình vẽ có:



+) $MF//ND\Rightarrow \frac{MF}{DN}=\frac{CM}{CD}=\frac{1}{2}\Rightarrow MF=\frac{1}{2}DN\Rightarrow MF=\frac{h}{2}$.

+) $GE//MF\Rightarrow \frac{GE}{MF}=\frac{BG}{BM}=\frac{2}{3}\Rightarrow GE=\frac{2}{3}MF=\frac{2}{3}.\frac{h}{2}=\frac{h}{3}$

+) $\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta GBC}}=\frac{\frac{1}{2}DN.BC}{\frac{1}{2}GE.BC}=\frac{\frac{1}{2}ha}{\frac{1}{2}\frac{h}{3}a}=3\Rightarrow S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta GBC}$



+) Chứng minh tương tự có $S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta GBD}=3S_{\Delta GCD}$

$\Rightarrow S_{\Delta BGC}=S_{\Delta BGD}=S_{\Delta CGD}$.

- ***Cách 2:***

☑ $\dfrac{d\left(G;\left(ABC\right)\right)}{d\left(D;\left(ABC\right)\right)}=\dfrac{GI}{DI}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow d\left(G;\left(ABC\right)\right)=\dfrac{1}{3}d\left(D;\left(ABC\right)\right)$.

Nên $V_{G.ABC}=\dfrac{1}{3}d\left(G;\left(ABC\right)\right).S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.V_{DABC}=4.$

Câu 31: Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4, diện tích đáy bằng diện tích của mặt cầu có bán kính bằng 1. Tính thể tích V khối trụ đó.

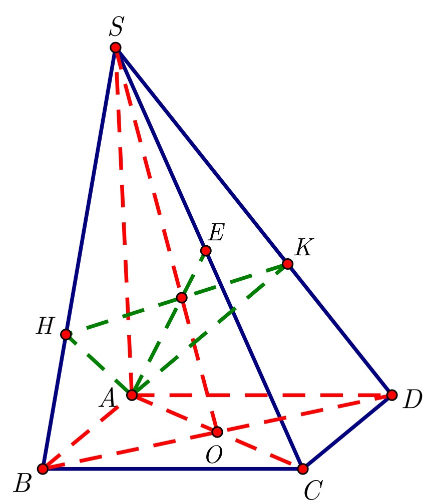
A. $V=4$. **B.** $V=6$. **C.** $V=8$. **D.** $V=10$.

Đáp án B

B, D nhìn AC dưới một góc $90°$.

$SD=a\sqrt{5}; KD=\dfrac{AD^2}{SD}=\dfrac{a^2}{a\sqrt{5}}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$; $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=a\sqrt{6}$

Ta có: $\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{AK^2}\Rightarrow AK=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}\left(1\right)$



$SC^2=SD^2+CD^2\Rightarrow$ tam giác SCD vuông tại D.

Khi đó tam giác KDC vuông tại D.

$\Rightarrow KC=\sqrt{CD^2+KD^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

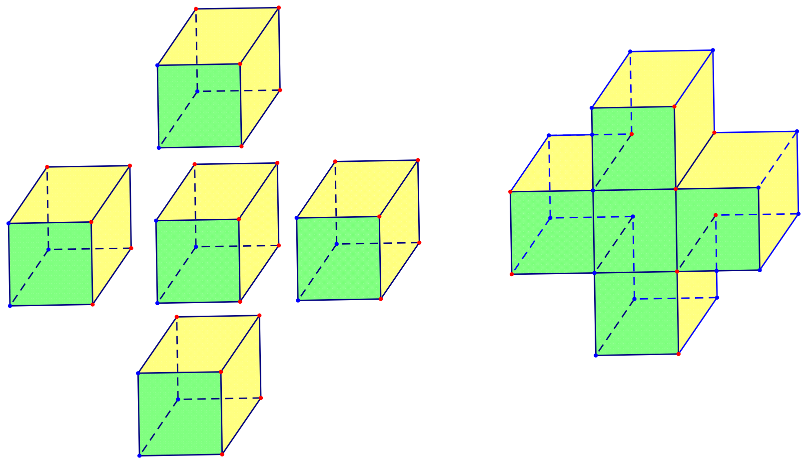
Ta có: $AK^2+KC^2=AC^2$. Vậy $\widehat{AKC}=90°$. Tương tự $\widehat{AHC}=90^0$

Vậy AC chính là đường kính mặt cầu ngoại tiếp khối $ABCDEHK$.

$AC=a\sqrt{2}\Rightarrow OA=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. $V=\dfrac{4}{3}\pi OA^3=\dfrac{4}{3}\pi\dfrac{a^3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

Câu 32: Ghép 5 khối lập phương cạnh *a* để được khối hộp chữ thập như hình vẽ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối chữ thập

A. $S_{tp}=20a^2$. **B.** $S_{tp}=30a^2$. **C.** $S_{tp}=12a^2$. **D.** $S_{tp}=22a^2$.



Diện tích mỗi mặt khối lập phương: $S_1 = a^2$

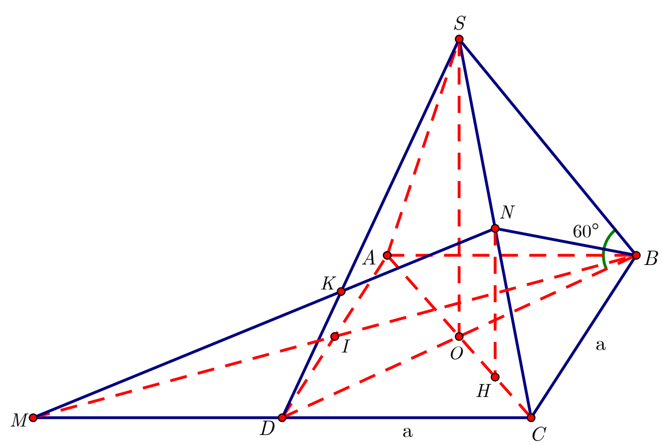
Diện tích toàn phần các khối lập phương: $S_2 = 6a^2$

Diện tích toàn phần khối chữ thập: $S = 5S_2 - 8S_1 = 22a^2$

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc $60°$. Gọi M là điểm đối xứng với C qua D; N là trung điểm của SC, mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích giữa hai phần đó.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{1}{7}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Đáp án D



Đặt $\begin{cases} V_1 = V_{SABIKN} \\ V_2 = V_{NBCDIK} \end{cases} \to \frac{V_1}{V_2} = ?$

* $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{6}}{6}a^3$

*

$V_{N.BMC} = \frac{1}{3}.NH.S_{\Delta BMC} = \frac{1}{3}.\frac{SO}{2}.S_{\Delta BMC}$

$= \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{1}{2}.a.2a = \frac{\sqrt{6}}{12}a^3$

* Nhận thấy K là trọng tâm của tam giác SMC $\to \frac{MK}{MN} = \frac{2}{3}$

* $\frac{V_{M.DIK}}{V_{M.CBN}} = \frac{MD}{MC}.\frac{MI}{MB}.\frac{MK}{MN} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

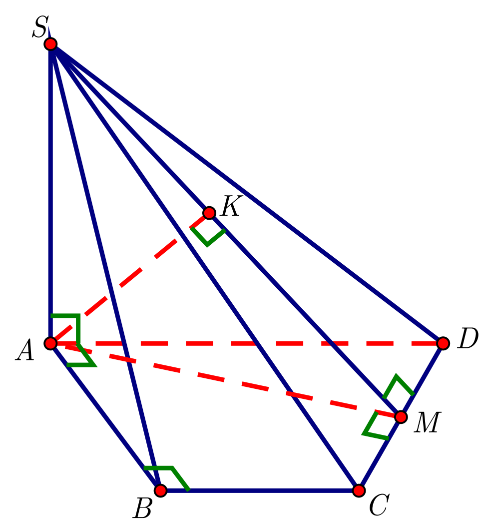
$\to V_2 = V_{M.CBN} - V_{M.DIK} = \frac{5}{6}V_{M.CBN} = \frac{5}{6}.\frac{\sqrt{6}}{12}a^3 = \frac{5\sqrt{6}}{72}a^3$

$$\to V_1 = V_{S.ABCD} - V_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}a^3 - \frac{5\sqrt{6}}{72}a^3 = \frac{7\sqrt{6}}{72}a^3 \to \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{7\sqrt{6}}{72}a^3}{\frac{5\sqrt{6}}{72}a^3} = \frac{7}{5}$$

Câu 34: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B biết $AB = 2a$, $AD = 3BC = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a, biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{6}}{4}a$.

A. $6\sqrt{6}a^3$. **B.** $2\sqrt{6}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $6\sqrt{3}a^3$.

Hướng dẫn giải



Dựng $AM \perp CD$ tại M.

Dựng $AH \perp SM$ tại H.

Ta có: $AH = \frac{3\sqrt{6}}{4}a$.

$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}.AB = 4a^2$

$CD = \sqrt{(AD - BC)^2 + AB^2} = 2a\sqrt{2}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2$

$S_{ACD} = S_{ABCD} - S_{ABC} = 3a^2$

$S_{ACD} = \frac{1}{2}AM.CD \Rightarrow AM = \frac{2S_{ACD}}{CD} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$

Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2} \Rightarrow AS = \frac{AH.AM}{\sqrt{AM^2 - AH^2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}a$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = 2\sqrt{6}a^3$

Câu 35: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và (ABC) bằng $60°$, tam giác ABC vuông tại C và góc $\widehat{BAC} = 60°$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên (ABC) trùng với trọng tâm của ΔABC. Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

A. $\frac{13a^3}{108}$. **B.** $\frac{7a^3}{106}$. **C.** $\frac{15a^3}{108}$. **D.** $\frac{9a^3}{208}$.

Hướng dẫn giải

Gọi M, N là trung điểm của AB, AC

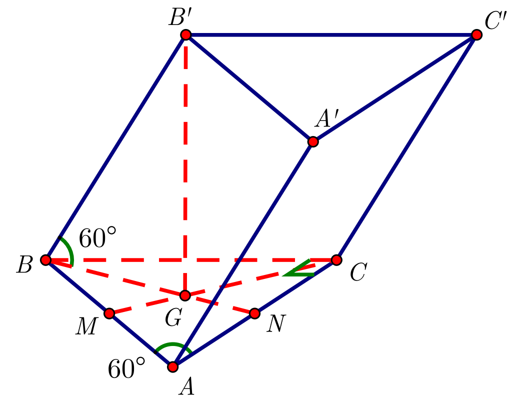
và G là trọng tâm của ΔABC.

$B'G \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{BB',(ABC)}\right) = \widehat{B'BG} = 60^0$.

$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.B'G = \frac{1}{6}.AC.BC.B'G$

Xét $\Delta B'BG$ vuông tại G, có $\widehat{B'BG} = 60^0$

$\Rightarrow B'G = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (nửa tam giác đều)



Đặt $AB = 2x$. Trong ΔABC vuông tại C có $\widehat{BAC} = 60^0$

$\Rightarrow$ tam giác ABC là nữa tam giác đều $\Rightarrow AC = \frac{AB}{2} = x,\ BC = x\sqrt{3}$

Do G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow BN = \frac{3}{2}BG = \frac{3a}{4}$.

Trong ΔBNC vuông tại C: $BN^2 = NC^2 + BC^2$

$$\Leftrightarrow \frac{9a^2}{16} = \frac{x^2}{4} + 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9a^2}{52} \Rightarrow x = \frac{3a}{2\sqrt{13}} \Rightarrow \begin{cases} AC = \frac{3a}{2\sqrt{13}} \\ BC = \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \end{cases}$$

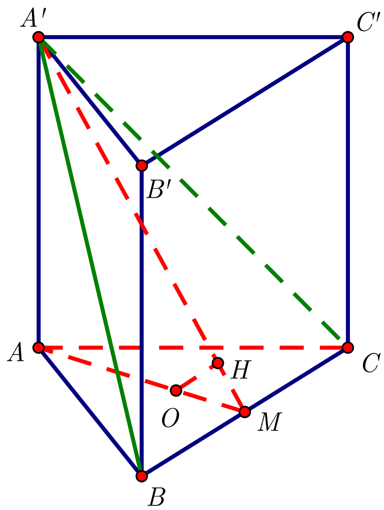
Vậy, $V_{A'ABC} = \frac{1}{6}.\frac{3a}{2\sqrt{13}}.\frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3}{208}$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$.Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm của BC,
ta có $(A'AM)\perp(A'BC)$ theo giao tuyến $A'M$.



Trong $(A'AM)$ kẻ $OH \perp A'M\,(H \in A'M)$.

$\Rightarrow OH \perp (A'BC)$

Suy ra: $d\left(O,(A'BC)\right)=OH=\dfrac{a}{6}$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Xét hai tam giác vuông $A'AM$ và OHM có góc $\widehat{M}$ chung nên chúng đồng dạng.

Suy ra: $\dfrac{OH}{A'A}=\dfrac{OM}{A'M}\Rightarrow\dfrac{\frac{a}{6}}{A'A}=\dfrac{\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{A'A^2+AM^2}}\Rightarrow\dfrac{1}{A'A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{A'A^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$.

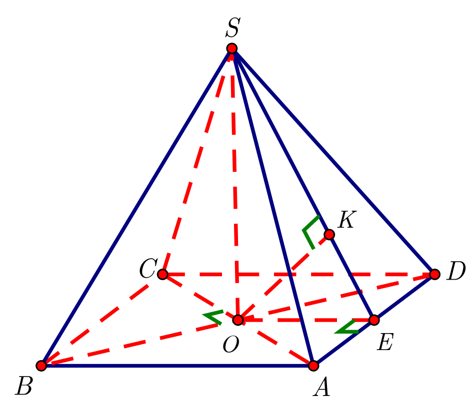
$\Rightarrow A'A=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Thể tích: $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.A'A=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 37: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Biết thể tích khối chóp bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng BC và SA.

A. $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{6}}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm hình vuông $S.ABCD$, suy ra $SO\perp(ABCD)$.



Đặt $SO=x$. Ta có $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO=\dfrac{1}{3}a^2.x=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $BC\parallel AD$ nên $BC\parallel(SAD)$. Do đó

$d\left[BC,SA\right]=d\left[BC,(SAD)\right]=d\left[B,(SAD)\right]=2d\left[O,(SAD)\right]$.

Kẻ $OK\perp SE$. Khi đó $d\left[O,(SAD)\right]=OK=\dfrac{SO.OE}{\sqrt{SO^2+OE^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Vậy $d\left[BC,SA\right]=2OK=\dfrac{2a}{\sqrt{6}}$. **Chọn C.**

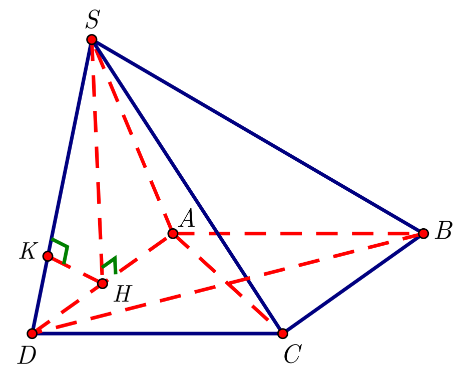
Câu 38: **(ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác $\left(SAD\right)$ cân tại S và mặt bên $\left(SAD\right)$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$.

A. $h=\dfrac{2}{3}a.$ **B.** $h=\dfrac{4}{3}a.$ **C.** $h=\dfrac{8}{3}a.$ **D.** $h=\dfrac{3}{4}a.$

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm AD.

Suy ra $SH\perp AD\Rightarrow SH\perp\left(ABCD\right)$.



Đặt $SH=x$.

Ta có $V=\dfrac{1}{3}.x.\left(a\sqrt{2}\right)^2=\dfrac{4}{3}a^3\Rightarrow x=2a$.

Ta có $d\left[B,\left(SCD\right)\right]=d\left[A,\left(SCD\right)\right]$

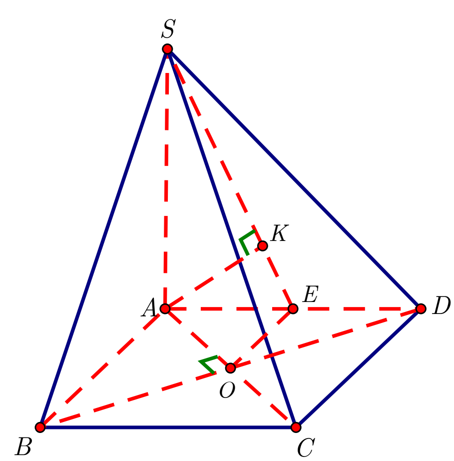
$=2d\left[H,\left(SCD\right)\right]=2HK=\dfrac{4a}{3}$. **Chọn B.**

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD}=60^0$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\Delta SAB=\Delta SAD\ \left(c-g-c\right)$, suy ra $SB=SD$.



Lại có $\widehat{SBD}=60^0$, suy ra

ΔSBD đều cạnh $SB=SD=BD=a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SAB, ta có

$SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=a$.

Gọi E là trung điểm AD, suy ra

$OE\parallel AB$ và $AE\perp OE$.

Do đó

$d\left[AB,SO\right]=d\left[AB,\left(SOE\right)\right]=d\left[A,\left(SOE\right)\right]$.

Kẻ $AK \perp SE$.

Khi đó $d\left[A,\left(SOE\right)\right] = AK = \dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **Chọn D.**

Câu 40: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD'.

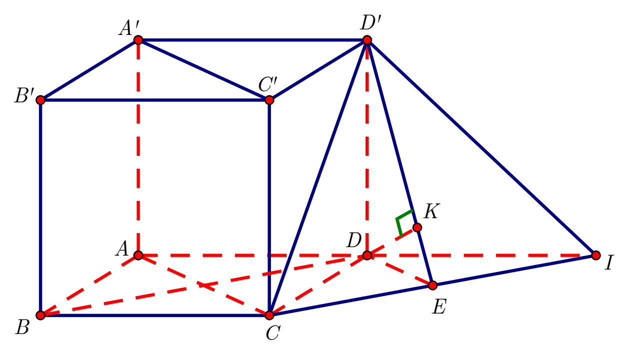
A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là điểm đối xứng của A qua D, suy ra $BCID$ là hình bình hành nên $BD \parallel CI$.

Do đó $d\left[BD, CD'\right] = d\left[BD, \left(CD'I\right)\right] = d\left[D, \left(CD'I\right)\right]$.

Kẻ $DE \perp CI$ tại E, kẻ $DK \perp D'E$. Khi đó $d\left[D, \left(CD'I\right)\right] = DK$.



Xét tam giác IAC, ta có $DE \parallel AC$ (do cùng vuông góc với CI) và có D là trung điểm của AI nên suy ra DE là đường trung bình của tam giác. Suy ra $DE = \dfrac{1}{2}AC = a$.

Tam giác vuông $D'DE$, có $DK = \dfrac{D'D.DE}{\sqrt{D'D^2 + DE^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **Chọn C.**

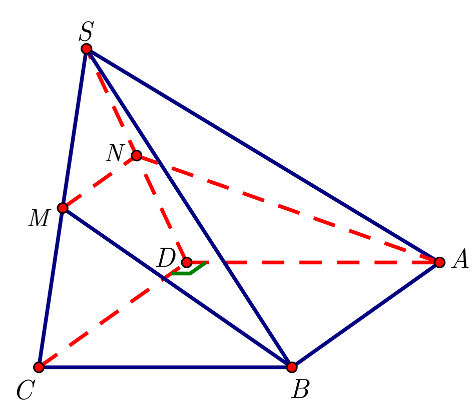
Câu 41: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ đi qua A, B và trung điểm M của SC. Tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó là:

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{5}{8}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Kẻ $MN \parallel CD$ $\left(N \in CD\right)$, suy ra hình thang $ABMN$ là thiết diện của khối chóp.

Ta có $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN}$.



Mà $\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $V_{S.ABM} = \dfrac{1}{2} V_{S.ABC} = \dfrac{1}{4} V_{S.ABCD}$.

Và $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SM}{SC} \cdot \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{1}{8} V_{S.ABCD}$.

Suy ra $V_{S.ABMN} = \dfrac{1}{4} V_{S.ABCD} + \dfrac{1}{8} V_{S.ABCD} = \dfrac{3}{8} V_{S.ABCD}$.

Từ đó suy ra $V_{ABMNDC} = \dfrac{5}{8} V_{S.ABCD}$ nên $\dfrac{V_{S.ABMN}}{V_{ABMNDC}} = \dfrac{3}{5}$.

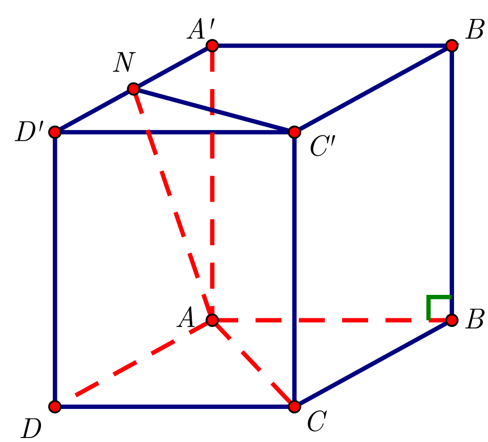
Chọn D.

Câu 42: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh bằng 1, $\widehat{BAD} = 120^0$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $V = \sqrt{6}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $V = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 120^0$, suy ra $\widehat{ADC} = 60^0$.



Do đó tam giác ABC và ADC là các tam giác đều.

Vì N là trung điểm $A'D'$ nên

$C'N \perp A'D'$ và $C'N = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $30^0 = \widehat{AC',(ADD'A')} = \widehat{AC',AN} = \widehat{C'AN}$.

Tam giác $C'AN$, có $AN = \dfrac{C'N}{\tan \widehat{C'AN}} = \dfrac{3}{2}$.

Tam giác $AA'N$, có $AA' = \sqrt{AN^2 - A'N^2} = \sqrt{2}$.

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = AB^2.\sin \widehat{BAD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

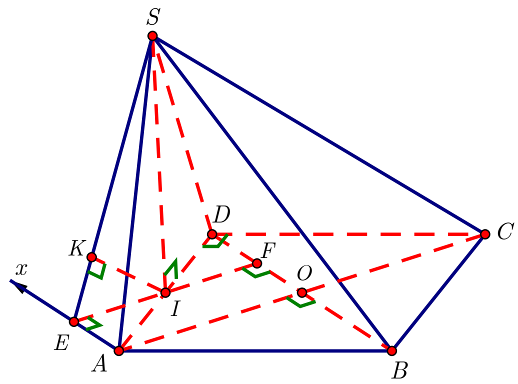
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AA' = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (đvtt). **Chọn C.**

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** a.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của AD nên suy ra $SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.



Kẻ $Ax \parallel BD$. Do đó $d[BD,SA] = d[BD,(SAx)] = d[D,(SAx)] = 2d[I,(SAx)]$.

Kẻ $IE \perp Ax$, kẻ $IK \perp SE$. Khi đó $d[I,(SAx)] = IK$.

Gọi F là hình chiếu của I trên BD, ta có $IE = IF = \frac{AO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác vuông SIE, có $IK = \frac{SI.IE}{\sqrt{SI^2 + IE^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}$.

Vậy $d[BD,SA] = 2IK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. **Chọn C.**

Câu 44: **(CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3)** Cho hình lăng trụ có tất cả các cạnh đều bằng a, đáy là lục giác đều, góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ

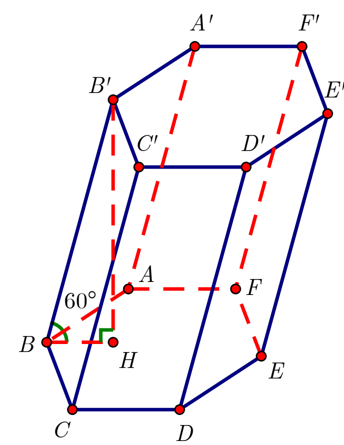
A. $V = \frac{27}{8}a^3$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **C.** $V = \frac{3}{2}a^3$. **D.** $\frac{9}{4}a^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $ABCDEF$ là lục giác đều nên góc ở đỉnh bằng $120°$.

ABC là tam giác cân tại B, DEF là tam giác cân tại E.



$$S_{ABC} = S_{DEF} = \frac{1}{2}a.a.\sin 120° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos B}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2 - 2.a.a.\left(-\frac{1}{2}\right)} = a\sqrt{3}$$

$$S_{ACDF} = AC.AF = a\sqrt{3}.a = a^2\sqrt{3}$$

$$S_{ABCDEF} = S_{ABC} + S_{ACDF} + S_{DEF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + a^2\sqrt{3} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\widehat{B'BH} = 60° \Rightarrow B'H = BB'.\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra $V = BH'.S_{ABCDEF} = a\sqrt{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9}{4}a^3$

Câu 45: **(NGUYỄN TRÃI – HD)** Một cốc nước có dạng hình trụ đựng nước chiều cao $12cm$, đường kính đáy $4cm$, lượng nước trong cốc cao $8cm$. Thả vào cốc nước 4 viên bi có cùng đường kính $2cm$. Hỏi nước dâng cao cách mép cốc bao nhiêu xăng-ti-mét? (làm tròn sau dấu phẩy 2 chữ số thập phân, bỏ qua độ dày của cốc)

A. $2,67cm$. **B.** $2,75cm$. **C.** $2,25cm$. **D.** $2,33cm$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Lượng nước dâng lên chính là tổng thể tích của 4 viên bi thả vào bằng $V_b = 4.\frac{4}{3}\pi {r_b}^3$ $= \frac{16\pi}{3}\text{cm}^3$.

Dễ thấy phần nước dâng lên là hình trụ có đáy bằng với đáy cốc nước và thể tích là $\frac{16\pi}{3}\text{cm}^3$.

Chiều cao của phần nước dâng lên là h_d thỏa mãn: $\frac{16\pi}{3} = \pi r^2 h_d$ nên $h_d = \frac{4}{3}\text{cm}$.

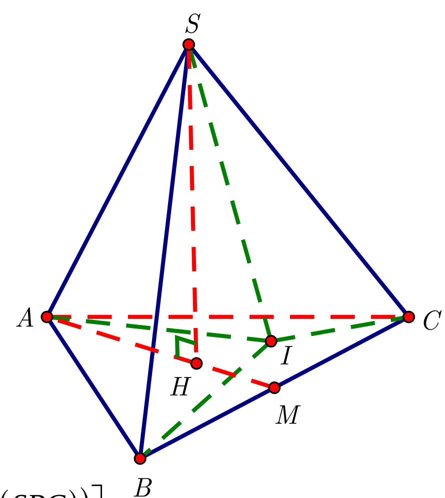
Vậy nước dâng cao cách mép cốc là $12 - 8 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,67$ cm.

Câu 46: (CHUYÊN BẮC GIANG) Cho tứ diện đều cạnh a và điểm I nằm trong tứ diện. Tính tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện.

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{34}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



$$AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Ta có $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Mặt khác, $V_{SABC} = V_{ISAB} + V_{IABC} + V_{ISAC} + V_{ISBC}$ $= \frac{1}{3}S_{ABC}.\left[d\left(I;(SAB)\right) + d\left(I;(ABC)\right) + d\left(I;(SAC)\right) + d\left(I;(SBC)\right)\right]$

$$\Leftrightarrow d\left(I;(SAB)\right) + d\left(I;(ABC)\right) + d\left(I;(SAC)\right) + d\left(I;(SBC)\right) = \frac{3V_{SABC}}{S_{ABC}} = \frac{3.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 47: (CHUYÊN KHTN L4) Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $SC \perp (ABC)$ và $SC = a$. Mặt phẳng qua C, vuông góc với SB cắt SA, SB lần lượt tại E và F. Tính thể tích khối chóp $S.CEF$.

A. $V_{SCEF} = \frac{\sqrt{2}a^3}{36}$. **B.** $V_{SCEF} = \frac{a^3}{18}$. **C.** $V_{SCEF} = \frac{a^3}{36}$. **D.** $V_{SCEF} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

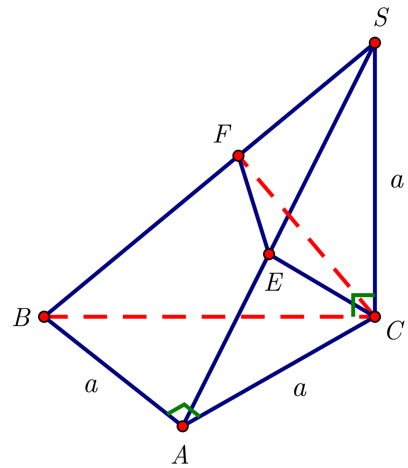
Hướng dẫn giải

Chọn đáp án C.

Từ C hạ $CF \perp SB, \left(F \in SB\right)$, $CE \perp SA, \left(E \in SA\right)$

Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp SC \end{cases} \Rightarrow AB \perp \left(SAC\right) \Rightarrow AB \perp CE \Rightarrow CE \perp \left(SAB\right) \Rightarrow CE \perp SB$

Vậy mặt phẳng qua C và vuông góc SB là mặt $\left(CEF\right)$.



Ta có $\dfrac{V_{SCEF}}{V_{SCAB}} = \dfrac{SE}{SA}.\dfrac{SF}{SB}$

Tam giác vuông SAC vuông tại C ta có: $SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$

và $\boxed{\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SC^2}{SA^2}} = \dfrac{a^2}{2a^2} \Rightarrow \dfrac{SE}{SA} = \dfrac{1}{2}$

Tam giác vuông SBC vuông tại C ta có: $SB = \sqrt{SC^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$

và $\boxed{\dfrac{SF}{SB} = \dfrac{SC^2}{SB^2}} = \dfrac{a^2}{3a^2} \Rightarrow \dfrac{SF}{SC} = \dfrac{1}{3}$

Do đó $\dfrac{V_{SCEF}}{V_{SCAB}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow V_{SCEF} = \dfrac{1}{6}V_{SABC} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{36}a^3$.

Câu 48: (CHUYÊN VINH – L2) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{2}{3}$. Thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}V$ **B.** $\dfrac{9}{16}V$ **C.** $\dfrac{20}{27}V$ **D.** $\dfrac{11}{18}V$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt

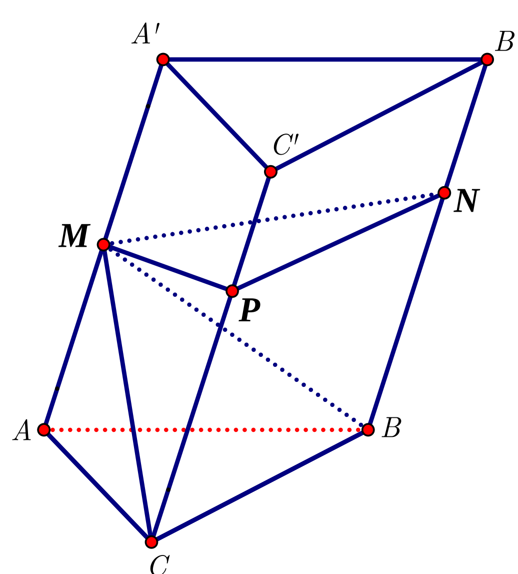
$V_1 = V_{M.NPCB} = \dfrac{1}{3}d\left(M,\left(CC'B'B\right)\right).S_{NPCB}$

$= \dfrac{1}{3}d\left(M,\left(CC'B'B\right)\right).\dfrac{2}{3}S_{CC'B'B} = \dfrac{2}{9}V$

$V_2 = V_{M.ABC} = \dfrac{1}{3}d\left(M,\left(ABC\right)\right).S_{ABC}$

$= \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}d\left(A',\left(ABC\right)\right).S_{ABC} = \dfrac{1}{6}V$

Vậy $V_{ABC.MNP} = V_1 + V_2 = \dfrac{2}{9}V + \dfrac{1}{6}V = \dfrac{11}{8}V$



BÀI TOÁN VẬN DỤNG (8 - 9 - 10)

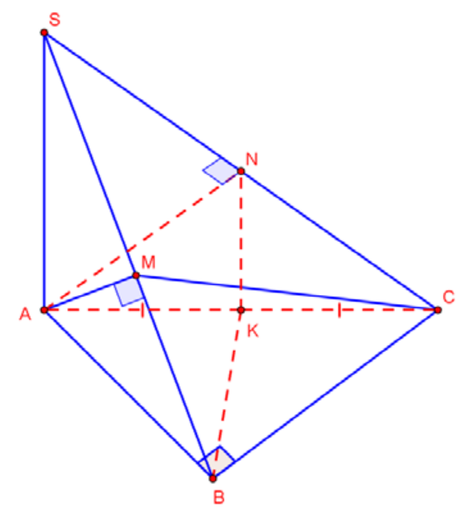
Chủ đề 6. KHỐI TRÒN XOAY

Câu 1: (SGD VĨNH PHÚC) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = 1$, $AC = 2$ và $\widehat{BAC} = 60°$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Tính bán kính R của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, M, N.

A. $R = \sqrt{2}$.   B. $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.   C. $R = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.   D. $R = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



*Gọi K là trung điểm của AC suy ra : $AK = AB = KC = 1$

*Lại có $\widehat{BAC} = 60° \Rightarrow \widehat{ABK} = 60°; \widehat{KBC} = 30° \Rightarrow \widehat{ABC} = 90° (1)$

*Theo giả thiết $\widehat{ANC} = 90° (2)$

* Chứng minh $\widehat{AMC} = 90° (3)$

Thật vậy, ta có:

$BC \perp SA; BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$

$AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MC$

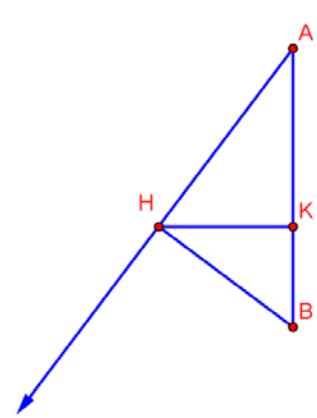
Từ $(1);(2);(3)$ suy ra các điểm A, B, C, M, N nội tiếp đường tròn tâm K, bán kính $KA = KB = KC = KM = KN = \dfrac{1}{2}AC = 1$.

Câu 2: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$,vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a. Gọi H là hình chiếu của B lên tia , khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng

A. $\dfrac{(2+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$ B. $\dfrac{(3+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$ C. $\dfrac{(1+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$ D. $\dfrac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Khi quay quanh tam giác AHB thì đường gấp khúc AHB vẽ lên một mặt tròn xoay. Diện tích mặt tròn xoay này bằng tổng diện tích xung quanh hai hình nón đường sinh AH và BH.

Ta có $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = a\sqrt{3}$

$HK = \dfrac{AH.BH}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Diện tích xung quanh hình nón có đường sinh AH là $S_1 = \pi\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{3a^2\pi}{2}$

Diện tích xung quanh hình nón có đường sinh BH là $S_2 = \pi\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a = \dfrac{\sqrt{3}a^2\pi}{2}$

Diện tích mặt tròn xoay cần tìm là $S = S_1 + S_2 = \dfrac{(3+\sqrt{3})a^2\pi}{2}$.

Câu 3: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, cạnh huyền $BC = 6\,(cm)$, các cạnh bên cùng tạo với đáy một góc $60°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $48\pi cm^2$. **B.** $12\pi cm^2$. **C.** $16\pi cm^2$. **D.** $24cm^2$.

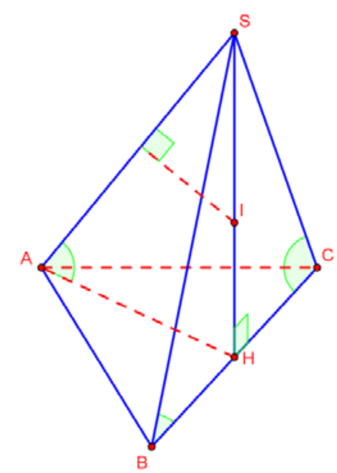
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC). Gọi O là trung điểm của BC.

Tam giác ABC vuông tại A, O là trung điểm của cạnh huyền BC, suy ra $OA = OB = OC$ (1).

Xét các tam giác $\Delta SHA, \Delta SHB, \Delta SHC$ có:



$$\begin{cases} SH\ chung \\ \widehat{SHA} = \widehat{SHB} = \widehat{SHC} = 90° \\ \widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = 60° \end{cases} \Rightarrow \Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC\,(g.c.g) \Rightarrow HA = HB = HC\ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra H trùng O. Khi đó SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Trong ΔSAH dựng trung trực của SA cắt SH tại I.

Khi đó $IA = IB = IC = IS$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

ΔSBC đều cạnh bằng $6\,(cm)$ $\Rightarrow SO = 3\sqrt{3} \Rightarrow SI = \dfrac{2}{3}.SO = \dfrac{2}{3}.3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $S = 4\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 48\pi\left(cm^2\right)$.

Câu 4: (NGÔ GIA TỰ - VP) Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn (O) và (O'), chiều cao bằng $2R$ và bán kính đáy R. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc $30°$, (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung. Tính độ dài dây cung đó theo R.

A. $\dfrac{4R}{3\sqrt{3}}$. B. $\dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. C. $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. D. $\dfrac{2R}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

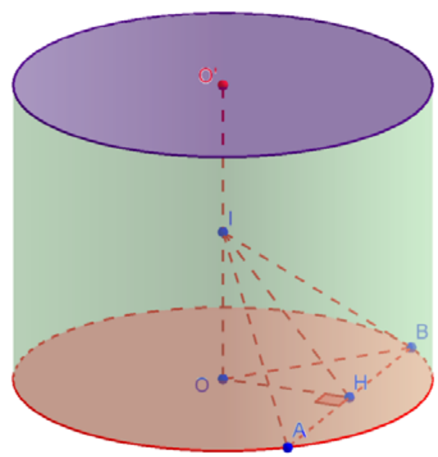
Dựng $OH \perp AB \Rightarrow AB \perp (OIH) \Rightarrow (OIH) \perp (IAB)$

$\Rightarrow IH$ là hình chiếu của OI lên (IAB)

Theo bài ta được $\widehat{OIH} = 30°$

Xét tam giác vuông OIH vuông tại O $\Rightarrow OH = OI\tan 30° = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác OHA vuông tại H $\Rightarrow AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \dfrac{R\sqrt{6}}{3} \Rightarrow AB = \dfrac{2R\sqrt{6}}{3}$



Câu 5: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Cho khối nón đỉnh O, trục OI. Mặt phẳng trung trực của OI chia khối chóp thành hai phần. Tỉ số thể tích của hai phần là:

A. $\dfrac{1}{2}$. B. $\dfrac{1}{8}$. C. $\dfrac{1}{4}$. D. $\dfrac{1}{7}$.

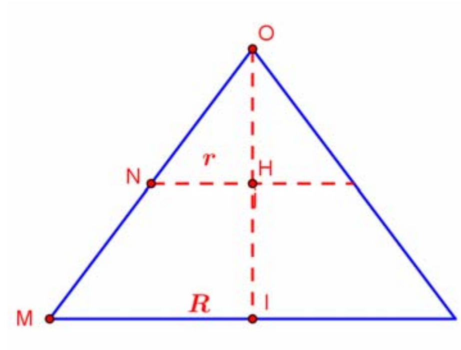
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi R là bán kính đáy của khối nón trục OI. $\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi R^2.OI$

Giả sử mặt phẳng trung trực của OI cắt trục OI tại H, cắt đường sinh OM tại N. Khi đó mặt phẳng này chia khối nón thành 2 phần, phần trên là khối nón mới có bán kính $r = \dfrac{R}{2}$, có chiều cao là $\dfrac{OI}{2}$

$\Rightarrow V_1 = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2\left(\dfrac{OI}{2}\right) = \dfrac{\pi.R^2.OI}{24}$. Phần dưới là khối nón cụt có thể tích



$$V_2 = V - V_1 = \frac{\pi R^2.OI}{3} - \frac{\pi R^2.OI}{24} = \frac{7\pi R^2.OI}{24}.$$

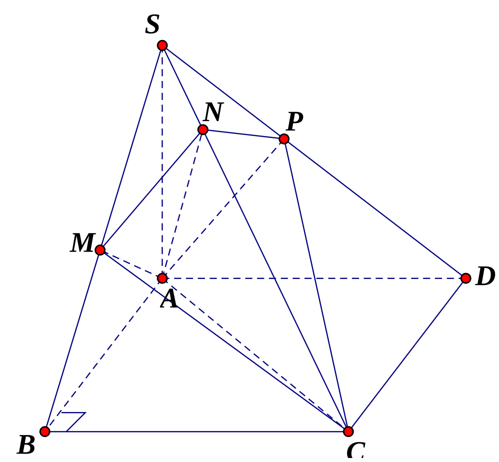
Vậy tỉ số thể tích là: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi R^2.OI}{24}}{\frac{7\pi R^2.OI}{24}} = \frac{1}{7}$

Câu 6: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V = \frac{32\pi}{3}$. B. $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. C. $V = \frac{108\pi}{3}$. D. $V = \frac{125\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có:

$CB \perp (SAD), AM \subset (SAB) \Rightarrow AM \perp CB$ (1)

$(\alpha) \perp SC, AM \subset (\alpha) \Rightarrow AM \perp SC$ (2)

Từ

$(1),(2) \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MC \Rightarrow \widehat{AMC} = 90°$.

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{APC} = 90°$

Có $AN \perp SC \Rightarrow \widehat{ANC} = 90°$

Ta có: $\widehat{AMC} = \widehat{APC} = \widehat{APC} = 90°$

$\Rightarrow$ khối cầu đường kính AC là khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

Bán kính cầu này là $r = \frac{AC}{2} = 2$.

Thể tích cầu: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32\pi}{3}$

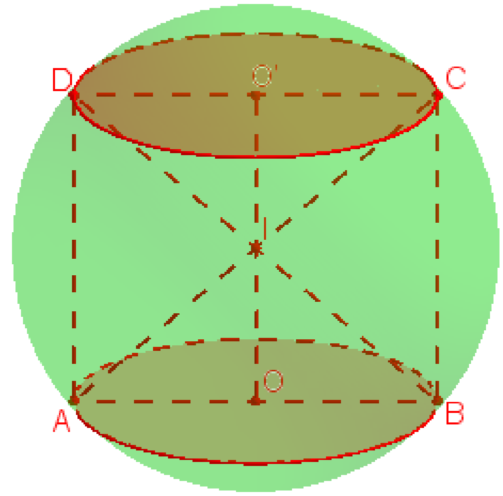
Câu 7: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho mặt cầu (S) bán kính R. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp mặt cầu. Tính chiều cao h theo bán kính R sao cho diện tích xung quanh hình trụ lớn nhất

A. $h = R\sqrt{2}$. B. $h = R$. C. $h = \frac{R}{2}$. D. $h = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $OO' = h; IA = R, AO = r \Rightarrow r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$.



Diện tích xung quanh của hình trụ

$S = 2\pi rh = \pi h\sqrt{4R^2 - h^2} \le \pi\frac{h^2 + 4R^2 - h^2}{2}$,

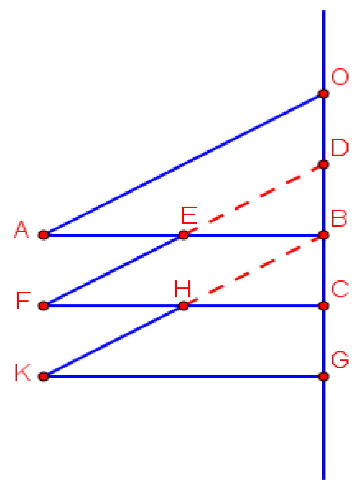
(dùng BĐT $ab \le \frac{a^2 + b^2}{2}$).

Vậy $S_{\max} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow h^2 = 4R^2 - h^2 \Leftrightarrow h = R\sqrt{2}$.

Câu 8: (BẮC YÊN THÀNH) Cho ba hình tam giác đều cạnh bằng a chồng lên nhau như hình vẽ (cạnh đáy của tam giác trên đi qua các trung điểm hai cạnh bên của tam gác dưới). Tính theo a thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay chúng xung quanh đường thẳng d.

A. $\frac{13\sqrt{3}\pi a^3}{96}$. B. $\frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$.

C. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$. D. $\frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.



Chọn B.

Nếu ba hình tam giác không chồng lên nhau thì

thể tích của khối tròn xoay là $V_1 = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{8}$

Thể tích phần bị chồng lên là $V_2 = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{96}$

$\Rightarrow$ Thể tích cần tính là $V = V_1 - V_2 = \frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$

Hoặc làm như sau:

Đặt $V_1; V_2; V_3; V_4$ lần lượt là thể tích: khối nón sinh bởi tam giác OAB quay quanh OB, khối tròn xoay sinh bởi hình $BCFE; GCHK$, khối nón sinh bởi tam giác DEB khi quay quanh BC. Khi đó: Thể tích khối cần tìm là:

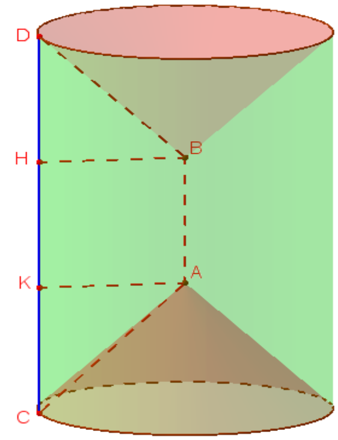
$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 3V_1 - 2V_4 = 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{a^2}{16}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}.$$

Câu 9: (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH) Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = 1$, đáy lớn $CD = 3$, cạnh bên $AD = \sqrt{2}$ quay quanh đường thẳng AB. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.

A. $V = 3\pi$. B. $V = \frac{4}{3}\pi$. C. $V = \frac{7}{3}\pi$. D. $V = \frac{5}{3}\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Theo hình vẽ: $AH = HD = 1$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng thể tích khối trụ có bán kính $r = AH = 1$, chiều cao $CD = 3$ trừ đi thể tích hai khối nón bằng nhau (khối nón đỉnh A, đỉnh B và đáy là đáy của hình trụ).

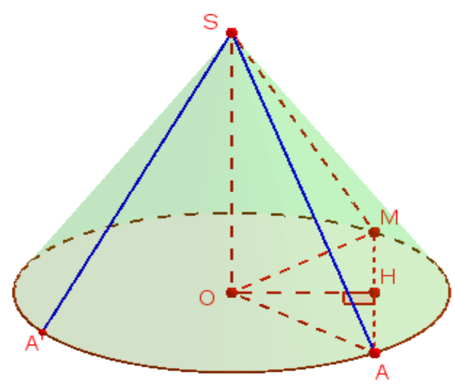
Vậy $V = \pi.AH^2.CD - 2.\frac{1}{3}\pi.AH^2.HD = \pi\left(3 - \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3}\pi$.

Câu 10: (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH) Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, góc ở đỉnh bằng $120°$. Trên đường tròn đáy, lấy điểm A cố định và điểm M di động. Có bao nhiêu vị trí điểm của điểm M để diện tích tam giác SAM đạt giá trị lớn nhất?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi r là bán kính đáy của hình nón.

Vì góc ở đỉnh $\widehat{ASA'} = 120° \Rightarrow \widehat{ASO} = 60°$.

Suy ra $SO = OA.\cot\widehat{ASO} = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

Gọi H là trung điểm của AM và đặt $x = OH$.

Ta có: $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{r^2}{3} + x^2}$, $AM = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{r^2 - x^2}$.

Diện tích tam giác ΔSAM bằng $s = \frac{1}{2}SH.AM = \sqrt{\frac{r^2}{3} + x^2}.\sqrt{r^2 - x^2} \le \frac{2}{3}r^2$.

$s_{\max} = \frac{2}{3}r^2$ đạt được khi $\frac{r^2}{3} + x^2 = r^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{r^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Tức là $OH = SO$.

Theo tính chất đối xứng của của đường tròn ta có hai vị trí của M thỏa yêu cầu.

Câu 11: (PHAN ĐÌNH PHÙNG – HN) Trong các hình nón nội tiếp một hình cầu có bán kính bằng 3, tính bán kính mặt đáy của hình nón có thể tích lớn nhất.

A. Đáp án khác. **B.** $R = 4\sqrt{2}$.

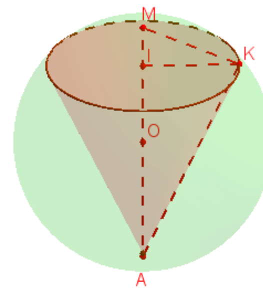
C. $R = \sqrt{2}$. **D.** $R = 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Giả sử chóp đỉnh A như hình vẽ là hình chóp có thể tích lớn nhất.

ΔAKM vuông tại K. Ta thấy $IK = r$ là bán kính đáy của chóp, $AI = h$ là chiều cao của chóp.



$IK^2 = AI.IM \Rightarrow r^2 = h(6-h)$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^2(6-h)$ $(0<h<6)$.

$V_{\max} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi h^2(6-h)$ max $\Leftrightarrow y = -h^3 + 6h^2$ max trên $(0;6)$

Câu 12: (CHUYÊN ĐH VINH) Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đó, đặt $\alpha = \widehat{CAB}$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Tìm α sao cho thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\alpha = 60°$. **B.** $\alpha = 45°$. **C.** $\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\alpha = 30°$.

Hướng dẫn giải

Đáp án: C.

$AC = AB.\cos\alpha = 2R.\cos\alpha$

$CH = AC.\sin\alpha = 2R.\cos\alpha.\sin\alpha$;

$AH = AC.\cos\alpha = 2R.\cos^2\alpha$

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB là

$V = \frac{1}{3}AH.\pi CH^2 = \frac{8}{3}R^3.\cos^4\alpha.\sin^2\alpha$.

Đặt $t = \cos^2\alpha$ $(0<t<1)$

$\Rightarrow V = \frac{8}{3}R^3t^2(1-t)$

$= \frac{8}{6}R^3.t.t(2-2t) \le \frac{8}{6}R^3\left(\frac{t+t+2-2t}{3}\right)^3$

Vậy V lớn nhất khi $t = \frac{2}{3}$ khi $\alpha = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

✍ Chú ý: có thể dùng PP hàm số để tìm GTNN của hàm $f(t) = t^2(1-t)$

Câu 13: (SỞ GD BẮC NINH) Cho một hình nón (N) có đáy là hình tròn tâm O. Đường kính $2a$ và đường cao $SO = a$. Cho điểm H thay đổi trên đoạn thẳng SO. Mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo đường tròn (C). Khối nón có đỉnh là O và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2\pi a^3}{81}$.   B. $\frac{4\pi a^3}{81}$.   C. $\frac{7\pi a^3}{81}$.   D. $\frac{8\pi a^3}{81}$.

Hướng dẫn giải

Gọi (α) là mặt phẳng qua trục của hình nón (N) cắt hình nón (N) theo thiết là tam giác SAB, cắt hình nón đỉnh S và có đáy là đường tròn (C) theo thiết diện là tam giác SCD, gọi I là giao điểm của SO và CD.Ta có: $AB = 2a \Rightarrow OA = a = SO$.Do đó tam giác SOA vuông cân tại S.Suy ra tam giác SIC vuông cân tại I.Đặt $SI = AC = x\,(0 < x < a) \Rightarrow OI = a - x$

Thể tích khối nón có đỉnh là O và đáy là hình tròn (C) là:

$$V = \frac{1}{3}.\pi.IC^2.OI = \frac{1}{3}.\pi.x^2(a-x) = \frac{1}{3}\pi\left(-x^3 + ax^2\right)\ .V'(x) = \frac{1}{3}.\pi.\left(-3x^2 + 2ax\right)$$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2a}{3} \end{array}\right.$. Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{2a}{3}$		a
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\frac{4a^3\pi}{81}$	$\searrow$	

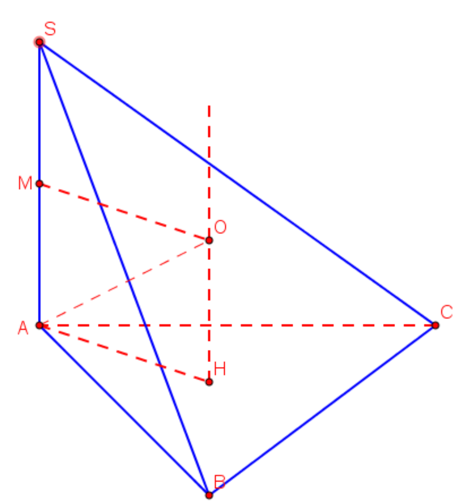
Chọn đáp án B

Câu 14: (SỞ GD BẮC NINH) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), SA = a, AB = a, AC = 2a,\ \widehat{BAC} = 60^0$. Tính diện tích hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{5}{3}.\pi a^2$.   B. $20\pi a^2$.   C. $\frac{20}{3}\pi a^2$.   D. $5\pi a^2$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, d là đường thẳng đi qua H và vuông góc với mặt phẳng (ABC), gọi (α) là mặt phẳng trung trực của SA, O là giao điểm của d và (α). Khi đó O là tâm của hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.



Theo định lí hàm số cosin ta có :

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC}}$$
$$= \sqrt{a^2 + (2a)^2 - 2a.2a.\cos 60^0} = a\sqrt{3}$$

Diện tích tam giác ABC:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.\text{AB}.\text{AC}.\sin\widehat{BAC} = \frac{a^2.\sqrt{3}}{2}$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC :

$$AH = \frac{AB.BC.AC}{4.S_{\Delta ABC}} = \frac{a.2a.\text{a}\sqrt{3}}{4.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = a$$

Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$:

$$R = OA = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \sqrt{(a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Diện tích hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi.\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 5\pi a^2$$

Chọn đáp án D

Câu 15: (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a.

Tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2$ là

A. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

C. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. Đường tròn có tâm là trọng tâm tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn giải

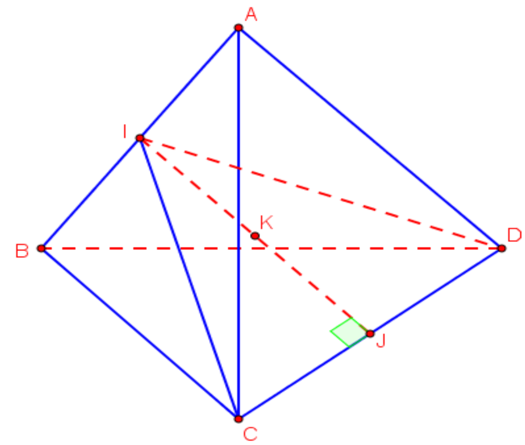
Chọn B.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi K là trung điểm IJ. (Lúc này, K là trọng tâm tứ diện).

Áp dụng định lý đường trung tuyến trong tam giác, ta có:

$$\begin{cases} MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{AB^2}{2}=2MI^2+\dfrac{a^2}{2} \\ MC^2+MD^2=2MJ^2+\dfrac{CD^2}{2}=2MJ^2+\dfrac{a^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=2\left(MI^2+MJ^2\right)+a^2=2\left(2MK^2+\frac{IJ^2}{2}\right)+a^2$$



Ta có: $IJ^2=\dfrac{IC^2+ID^2}{2}-\dfrac{CD^2}{4}=IC^2-\dfrac{a^2}{4}=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a^2}{2}$

$\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MK^2+\dfrac{3a^2}{2}$.

Do đó: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=2a^2\Leftrightarrow 4MK^2+\dfrac{3a^2}{2}=2a^2\Leftrightarrow MK=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy tập hợp các điểm M thoả mãn hệ thức đề bài là mặt cầu tâm K, bán kính bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 16: (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SA=2a$, tam giác ABC cân tại $A, BC=2a\sqrt{2}$, $\cos\widehat{ACB}=\dfrac{1}{3}$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

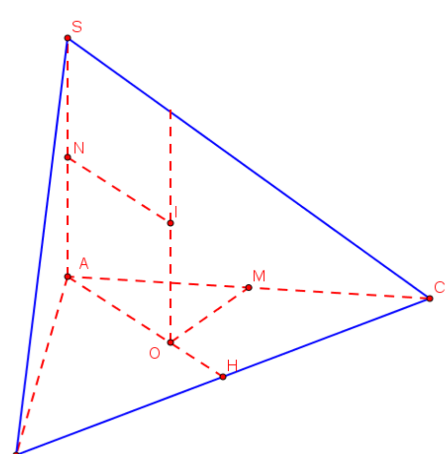
A. $S=\dfrac{97\pi a^2}{4}$. B. $S=\dfrac{97\pi a^2}{2}$. C. $S=\dfrac{97\pi a^2}{\sqrt{3}}$. D. $S=\dfrac{97\pi a^2}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi H là trung điểm của $BC\Rightarrow HC=\dfrac{BC}{2}=a\sqrt{2}$.

Do ΔABC cân tại A $\Rightarrow AH\perp BC$.



$\cos\widehat{ACB} = \frac{1}{3} \Rightarrow AC = 3HC \Rightarrow AC = 3a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{18a^2 - 2a^2} = 4a$.

Gọi M là trung điểm AC, trong mp (ABC)

vẽ đường trung trực AC cắt AH tại $O \Rightarrow O$

là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Ta có $\cos\widehat{ACH} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\widehat{CAH} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\widehat{CAH} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Trong ΔAMO vuông tại $M \Rightarrow AO = \frac{AM}{\cos\widehat{CAH}} = \frac{3a\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{9a}{4}$

Gọi N là trung điểm SA. Trong mp (SAH) vẽ trung trực SA cắt đường thẳng qua O và vuông góc mp (ABC) tại I. Chứng minh được I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Ta có $ANIO$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow$ đường chéo $AI = \sqrt{AO^2 + AN^2} = \sqrt{\frac{81a^2}{16} + a^2} = \sqrt{\frac{97a^2}{16}} = \frac{\sqrt{97}}{4}a$.

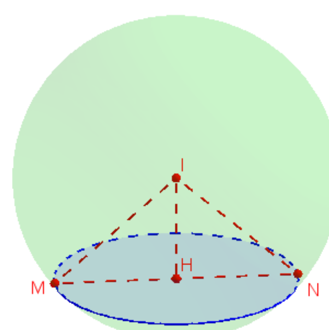
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\frac{97a^2}{16} = \frac{97}{4}\pi a^2$ (đvdt).

Câu 17: (LƯƠNG TÂM) Cho mặt cầu (S) Có tâm I, bán kính $R = 5$. Một đường thẳng Δ cắt (S) tại 2 điểm M, N phân biệt nhưng không đi qua I. Đặt $MN = 2m$. Với giá trị nào của m thì diện tích tam giác IMN lớn nhất?

A. $m = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m = \frac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** $m = \frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm MN, ta có : $IH = \sqrt{25 - m^2}$



Diện tích tam giác IMN : $S_{IMN} = \frac{1}{2}IH.MN = m\sqrt{25 - m^2}$
$= \sqrt{m^2(25 - m^2)} \le \frac{m^2 + 25 - m^2}{2}$

Suy ra $S_{IMN} \le \frac{25}{2}$. Dấu '=' xãy ra khi $m^2 = 25 - m^2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{\sqrt{2}}$

Chọn (D)

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. **B.** $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **D.** $V=\dfrac{5\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

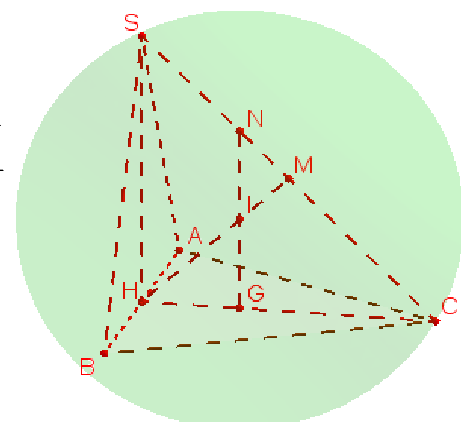
Đáp án B

Gọi O là tâm đường tròn tam giác ABC suy ra O là trọng tâm, H là trung điểm AB, kẻ đường thẳng qua O song song SH cắt SC tại N ta được $NO\perp\left(ABC\right)$, gọi M là trung điểm SC, HM cắt NO tại I.

Ta có $HS=HC$ nên $HM\perp SC\Rightarrow IS=IC=IA=IB=r$

Ta có

$$\angle NIM=\angle HCS=45^0,\frac{CN}{CS}=\frac{CO}{CH}=\frac{2}{3}\Rightarrow CN=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow SM=\frac{\sqrt{6}}{4},SN=\frac{1}{\sqrt{6}}$$



Suy ra $NM=SM-SN=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

ΔNMI vuông tại M $\tan 45^0=\dfrac{NM}{IM}\Rightarrow IM=NM=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

Suy ra $r=IC=\sqrt{IM^2+MC^2}=\sqrt{\dfrac{5}{12}}$

Vậy $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

Cách khác:

Gọi $P,\ Q$ lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB *và* ABC.

Do các tam giác SAB *và* ABC là các tam giác đều cạnh bằng 1 nên $P,\ Q$ lần lượt tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

+ Qua P đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $\left(SAB\right)$, qua O dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$. Hai trục này cắt nhau tại I, suy ra $IA=IB=IC=IS$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $R=IC$.

+ Xét ΔIQC : $\mathrm{IC}=\sqrt{IG^2+GC^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

Vậy $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

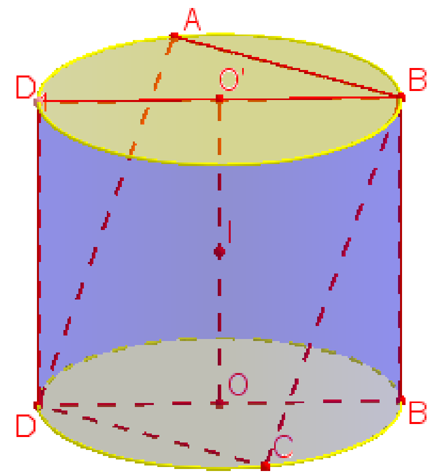
Câu 19: Cho hình trụ có chiều cao $h=2$, bán kính đáy $r=3$. Một mặt phẳng $\left(P\right)$ không vuông góc với đáy của hình trụ, lần lượt cắt hai đáy theo đoạn giao tuyến AB và CD sao cho $ABCD$ là hình vuông. Tính diện tích S của hình vuông $ABCD$.

A. $S=12\pi.$ **B.** $S=12.$ **C.** $S=20.$ **D.** $S=20\pi.$

Hướng dẫn giải

Kẻ đường sinh BB' của hình trụ. Đặt độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$ là x, $x>0$.

Do $\begin{cases} CD\perp BC \\ CD\perp BB' \end{cases} \Rightarrow CD\perp B'C \Rightarrow \Delta B'CD$ vuông tại C. Khi đó , $B'D$ là đường kính của đường



Tròn $\left(O'\right)$. Xét $\Delta B'CD$ vuông tại C

$\Rightarrow B'D^2=CD^2+CB'^2 \Rightarrow 4r^2=x^2+CB^2$ (1)

Xét tam giác $\Delta BB'C$ vuông tại B

$\Rightarrow BC^2=BB'^2+CB'^2 \Rightarrow x^2=h^2+CB'^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x^2=\dfrac{4r^2+h^2}{2}=20$.

Suy ra diện tích hình vuông $ABCD$ là $S=20$.

Câu 20: Cho hình chóp đều S.ABC có $AB=a$, $SB=2a$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là:

A. $S=\dfrac{3\pi a^2}{11}$ **B.** $S=\dfrac{3a^2}{11}$ **C.** $S=\dfrac{12\pi a^2}{11}$ **D.** $S=\dfrac{12a^2}{11}$

Hướng dẫn giải

1) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

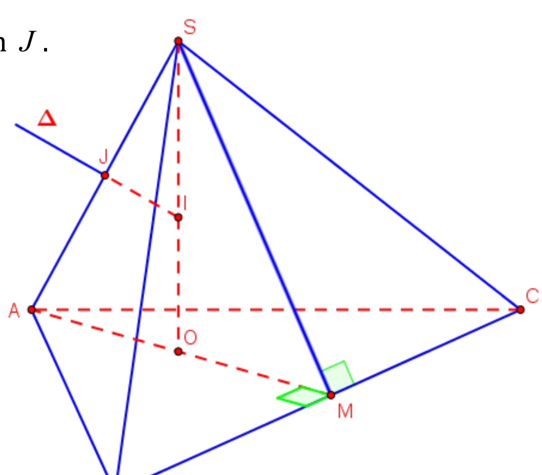
- Xác định tâm mặt cầu

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC,

do $S.ABC$ là hình chóp đều nên SO là trục đường tròn

ngoại tiếp tam giác ABC.Trong tam giác SOA dựng đường trung

trực Δ của cạnh bên SA, Δ cắt SO tại I và cắt SA tại trung điểm J.



Ta có: $\begin{cases} I\in SO \Rightarrow IA=IB=IC \\ I\in\Delta \Rightarrow IA=IS \end{cases} \Rightarrow IA=IB=IC=IS$

Vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- Tính bán kính mặt cầu

Gọi $M=AO\cap BC$ thì M là trung điểm của BC.

Ta có: $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông SOA ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$

Xét hai tam giác vuông đồng dạng SJI và SOA ta có:

$$\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SO} \Rightarrow R = SI = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{4a^2}{2.\frac{a\sqrt{33}}{3}} = \frac{2a\sqrt{33}}{11}$$

2) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

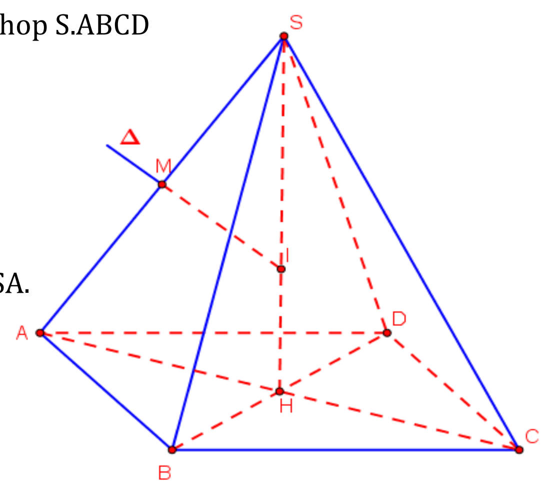
Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{2a\sqrt{33}}{11}\right)^2 = \frac{12\pi a^2}{11}$.

Câu 21: Cho hình chóp đều S.ABC có đường cao $SH = a$; góc SAB bằng 45 độ. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là

A. $\frac{a}{2}$ **B.** a **C.** $\frac{3a}{2}$ **D.** $2a$

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chop S.ABCD



Khi đó $IA = IB = IC = ID = IS$ hay $\begin{cases} IA = IB = IC = ID (1) \\ IA = IS (2) \end{cases}$

Gọi H là giao điểm của AC và BD.Từ (1) suy ra $I \in SH (*)$

Trong mặt phẳng (SAH) dựng đường thẳng Δ là trung trực của SA.

Từ (2), suy ra $\begin{array}{l} I \in \Delta (2*) \\ (*) + (2*) \to SH \cap \Delta = \{I\} \end{array}$

Gọi M là trung điểm của SA, khi đó:

$\frac{SI}{SA} = \frac{SM}{SH} \to R = SI = \frac{SM.SA}{SH} = \frac{SA.SA.}{2SH} = \frac{SA^2}{2SH}$.Do SAB cân tại S và có $\angle SAB = 45^0$ nên SAB vuông cân tại S. Đặt $SA = x$, khi đó $AB = x\sqrt{2}; HA = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{x\sqrt{6}}{3}$

Trong tam giác vuông SHA có: $SA^2 - HA^2 = SH^2 \leftrightarrow x^2 - \frac{6x^2}{9} = a^2 \leftrightarrow x^2 = 3a^2 \to R = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}$. **Đáp án C**

Câu 22: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông, cạnh 2a, tâm O, mặt bên (SAB) là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

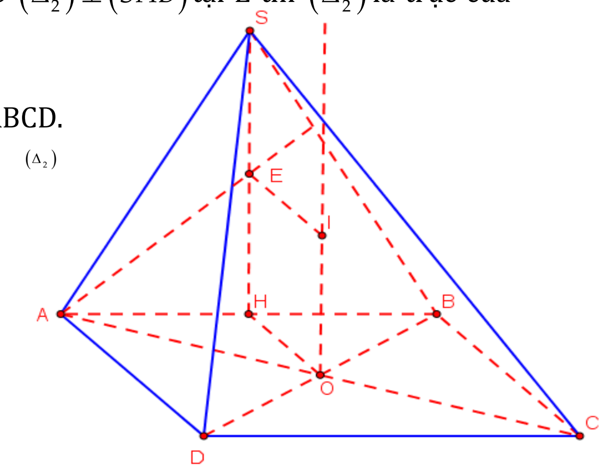
A. $R=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$ B. $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $R=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Hướng dẫn giải

Qua O, kẻ $(\Delta_1)\perp(ABCD)$ thì (Δ_1) là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

Do $(SAB)\perp(ABCD)$ nên kẻ $SH\perp AB$ thì $SH\perp(ABCD)$

Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều SAB và kẻ $(\Delta_2)\perp(SAB)$ tại E thì (Δ_2) là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.



(Δ_1) cắt (Δ_2) tại I : tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Tứ giác OHEI có 3 góc vuông O, H, E nên là hình chữ nhật

$$SH=2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}\Rightarrow EH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trong ΔAIO: $R=AI=\sqrt{OA^2+OI^2}=\sqrt{2a^2+\dfrac{3a^2}{9}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$.

Đáp án A.

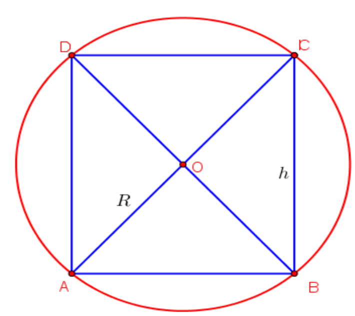
Câu 23: Cho hình cầu tâm O, đường kính 2R và hình trụ tròn xoay nội tiếp trong hình cầu. Hãy tìm kích thước của hình trụ khi nó có thể tích đạt giá trị lớn nhất.

A. $r=\dfrac{R\sqrt{6}}{3}$ B. $r=\dfrac{2R}{3}$ C. $r=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ D. $r=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải

Gọi h và r là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ. Bài toán quy về việc tính h và r phụ thuộc theo R khi hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong hình tròn (O, R) thay đổi về $V=\pi r^2h$ đạt giá trị lớn nhất

Ta có : $AC^2=AB^2+BC^2\Leftrightarrow 4R^2=4r^2+h^2$



$$V=\pi\left(R^2-\frac{1}{4}h^2\right)h=\pi\left(-\frac{1}{4}h^3+R^2h\right)\quad(0<h<2R)$$

$$V'=\pi\left(-\frac{3}{4}h^2+R^2\right)\Leftrightarrow h=\pm\frac{2R}{\sqrt{3}}$$

h	0		$\frac{2R}{\sqrt{3}}$		$2R$
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Vậy $V_{\max}=\dfrac{4}{9}\pi R^3\sqrt{3}\Leftrightarrow h=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$

Lúc đó $r^2=R^2-\dfrac{1}{4}.\dfrac{4R^2}{3}=\dfrac{2R^2}{3}\Rightarrow r=\dfrac{R\sqrt{6}}{3}$. **Chọn A.**

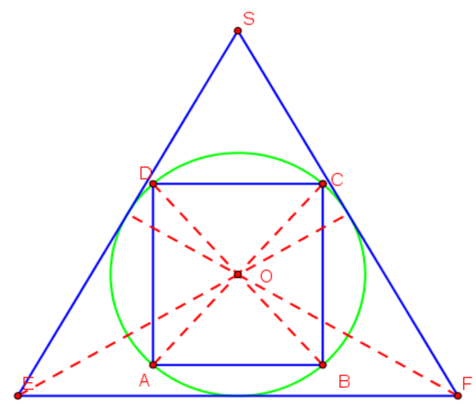
Câu 24: Cho hình cầu (S) tâm O, bán kính R. Hình cầu (S) ngoại tiếp một hình trụ tròn xoay (T) có đường cao bằng đường kính đáy và hình cầu (S) lại nội tiếp trong một nón tròn xoay (N) có góc ở đỉnh bằng 60°. Tính tỉ số thể tích của hình trụ (T) và hình nón (N).

A. $\frac{V_T}{V_N}=\frac{\sqrt{2}}{6}$ **B.** $\frac{V_T}{V_N}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{V_T}{V_N}=\frac{6\sqrt{2}}{2}$ **D.** Đáp án khác.

Hướng dẫn giải

Bài toán quy về hình nón tâm O ngoại tiếp hình vuông ABCD và nội tiếp tam giác đều SEF mà EF // AB.Vì OAB là tam giác vuông cân nên $AB=BC=R\sqrt{2}$.Suy ra $V_T=\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2BC=\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$

Ta thấy, tâm O của hình tròn cũng chính là tâm của hình vuông ABCD đồng thời cũng là trọng tâm của tam giác đều SEF.



Như vậy, đường cao của tam giác SEF là $SH=3OH=3R$

Trong tam giác EOH (vuông tại H, $\widehat{EOH}=30^\circ$). Ta có :

$EH=OH.\sqrt{3}=R\sqrt{3}$

Thể tích của hình nón $V_N=\frac{1}{3}\pi EH^2.SH=\frac{1}{3}\pi 3R^2.3R=3\pi R^3$

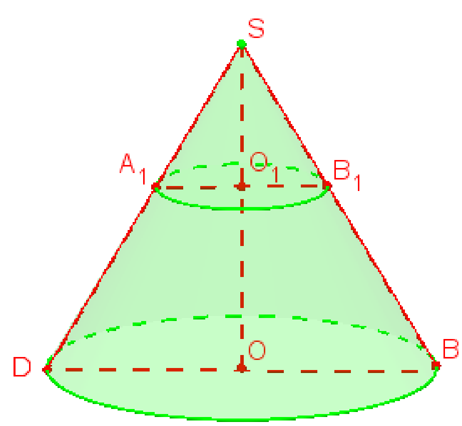
Vậy $\frac{V_T}{V_N}=\frac{\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}}{3\pi R^3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$. **Chọn A.**

Câu 25: Cho hình nón N có bán kính đáy R, đường cao SO. Gọi (P) mà mặt phẳng vuông góc với SO tại O_1 sao cho $SO_1=\frac{1}{3}SO$. Một mặt phẳng qua trục hình nón cắt phần khối nón N nằm giữa (P) và đáy hình nón theo thiết diện là hình tứ giác có hai đường chéo vuông góc. Tính thể tích phần hình nón N nằm giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng chứa đáy hình nón N .

A. $\frac{7\pi R^3}{9}$ **B.** $\frac{\pi R^3}{9}$ **C.** $\frac{26\pi R^3}{81}$ **D.** $\frac{52\pi R^3}{81}$

Hướng dẫn giải

Gọi thiết diện thu được là AA_1B_1B



Vì $SO_1=\frac{1}{3}SO$ nên $A_1B_1=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}.2R$

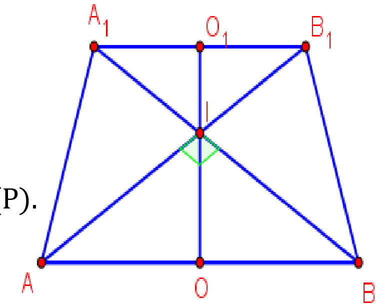
Mặt khác $AB_1\perp A_1B$ tại I nên

$IO=\frac{1}{2}AB, IO_1=\frac{1}{2}A_1B_1$

Vậy $OO_1=R+\frac{R}{3}=\frac{4R}{3}$

Dễ thấy $SO_1 = \frac{1}{2}OO_1 = \frac{2R}{3}$

Từ đó $SO = 2R$



Gọi thể tích phần hình nón phải tính là V* thì $V^* = V_1 - V_2$, trong đó:

V_1 là thể tích của hình nón N .

V_2 là thể tích hình nón đỉnh S và đáy là thiết diện của N được cắt bởi (P).

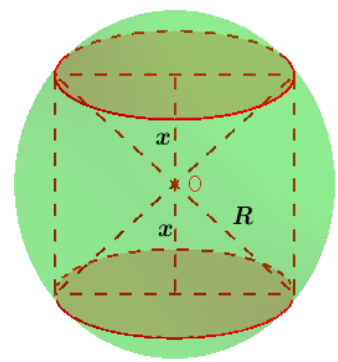
Ta có thể tích phần hình nón phải tính là

$$V^* = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi OB^2.SO - \frac{1}{3}\pi O_1B_1^2.SO_1 = \frac{1}{3}\pi\left(R^2.2R - \frac{R^2}{9}.\frac{2R}{3}\right) = \frac{52\pi R^3}{81}$$

Câu 26: Chiều cao của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình cầu có bán kính R là

A. $R\sqrt{3}$. B. $\frac{R\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải



Giả sử $2x$ là chiều cao hình trụ $(0 < x < R)$ (xem hình vẽ)

Bán kính của khối trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Thể tích khối trụ là:

$V = \pi(R^2 - x^2)2x$. Xét hàm số $V(x) = \pi(R^2 - x^2)2x,\ 0 < x < R$

Ta có : $V'(x) = 2\pi(R^2 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

. Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$		R
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

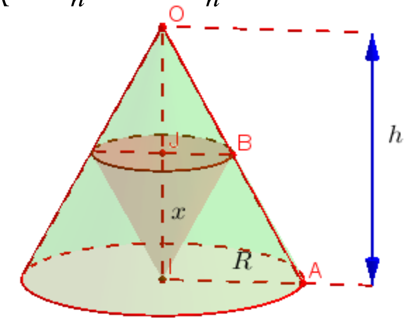
Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao của khối trụ là $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$; $V_{\max} = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 27: Cho hình nón có chiều cao h. Tính chiều cao x của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón theo h.

A. $x = \frac{h}{2}$. B. $x = \frac{h}{3}$. C. $x = \frac{2h}{3}$. D. $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Gọi r, R theo thứ tự là bán kính đáy hình nón và khối trụ cần tìm. O là đỉnh của hình nón, I là tâm của đáy hình nón, J là tâm của đáy hình trụ và khác I. OA là một đường sinh của hình nón, B là điểm chung của OA với khối trụ. Ta có: $\frac{r}{R} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow r = \frac{R}{h}(h-x)$.



Thể tích khối trụ là: $V = \pi x R^2 = \pi x \frac{R^2}{h^2}(h-x)^2$

Xét hàm số $V(x) = \pi x \frac{R^2}{h^2}(h-x)^2$, $0 < x < h$.

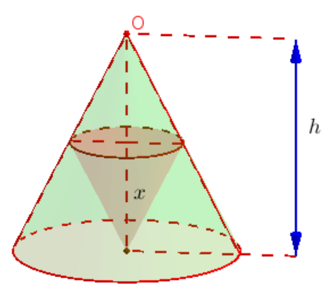
Ta có $V'(x) = \pi \frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$ hay $x = h$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{h}{3}$		h
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\pi R^2 h}{81}$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao của khối trụ là $x = \frac{h}{3}$; $V_{\max} = \frac{4\pi R^2 h}{27}$.

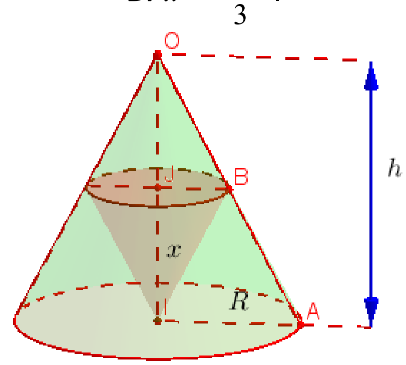
Câu 28: Cho hình nón đỉnh O, chiều cao là h. Một khối nón khác có đỉnh là tâm của đáy và có đáy là là một thiết diện song song với đáy của hình nón đỉnh O đã cho (hình vẽ). Tính chiều cao x của khối nón này để thể tích của nó lớn nhất, biết $0 < x < h$.



A. $x = \frac{h}{3}$. **B.** $x = h\sqrt{3}$. **C.** $x = \frac{2h}{3}$. **D.** $x = \frac{h\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Từ hình vẽ ta có $\frac{JB}{IA} = \frac{OJ}{OI} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow JB = \frac{R(h-x)}{h}$.



Thể tích khối nón cần tìm là: $V = \frac{1}{3}\pi \frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x$.

Xét hàm số $V(x) = \frac{1}{3}\pi \frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x$, $0 < x < h$.

Ta có $V'(x) = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x) = 0 \Leftrightarrow x = h$ hay $x = \frac{h}{3}$.

Bảng biến thiên:

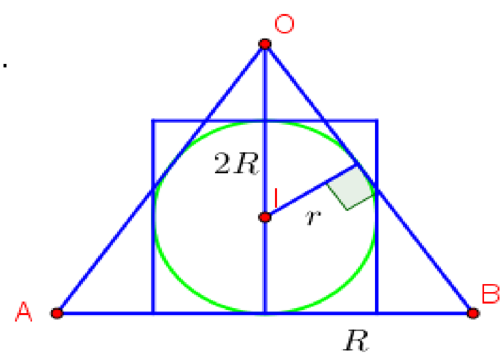
x	0		$\frac{h}{3}$		h
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\pi R^2 h}{81}$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối nón cần tìm lớn nhất khi chiều cao của nó là $x = \frac{h}{3}$; $V_{\max} = \frac{4\pi R^2 h}{81}$.

Câu 29: Cho một hình nón có bán kính đáy là R, chiều cao là $2R$, ngoại tiếp một hình cầu $S(O;r)$. Khi đó, thể tích của khối trụ ngoại tiếp hình cầu $S(O;r)$ là

A. $\frac{16\pi R^3}{\left(\sqrt{5}-1\right)^3}$. **B.** $\frac{4\pi R^3}{1+2\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{16\pi R^3}{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}$. **D.** $\frac{4\pi R^3}{2\sqrt{5}-1}$.

Hướng dẫn giải



Giả sử hình nón có đỉnh O và đường kính đáy là AB.

Ta có $OA = OB = \sqrt{R^2 + (2R)^2} = R\sqrt{5}$.

Tam giác OAB có diện tích là $S = 2R^2$,

chu vi là $2p = 2R(1+\sqrt{5})$.

Do đó bán kính khối cầu $S(O;r)$ là $r = \frac{S}{p} = \frac{2R}{1+\sqrt{5}}$.

Thể tích khối trụ cần tìm là: $V_{tru} = \pi r^2 h = 2\pi r^3 = \frac{16\pi R^3}{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}$.

Câu 30: **Hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước bằng:**

A. $\frac{64\pi R^3}{81}$ B. $\frac{32\pi^2 R^3}{81}$ C. $\frac{32\pi R^3}{81}$ D. $\frac{64\pi^2 R^3}{81}$

Hướng dẫn giải

Kí hiệu bán kính đáy hình nón là x, chiều cao hình nón là $y\left(0 < x \le R, 0 < y < 2R\right)$. Gọi SS' là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì ta có

$x^2 = y(2R-y)$. Gọi V_1 là thể tích khối nón thì $V_1 = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi y.y(2R-y) = \frac{\pi}{6}(4R-2y).y.y$

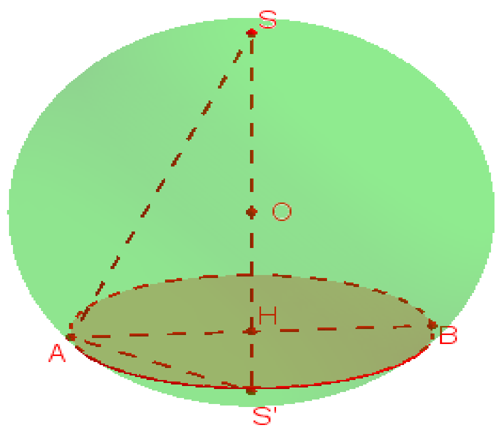
$\le \frac{\pi}{6}\left(\frac{4R-2y+y+y}{3}\right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}$

Vậy thể tích V_1 đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{32\pi R^3}{81}$ khi và chỉ khi $4R-2y = y \Leftrightarrow y = \frac{4R}{3}$, từ đó $x^2 = \frac{4R}{3}\left(2R-\frac{4R}{3}\right) = \frac{8R^2}{9}$ hay $x = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$. **Chọn C.**

Câu 31: **Tìm hình nón có thể tích nhỏ nhất ngoại tiếp mặt cầu bán kính r cho trước có thể tích bằng:**

A. $\frac{1}{6}\pi r^3$ B. $\frac{8}{3}\pi r^3$ C. $\frac{2}{3}\pi r^3$ D. $\frac{4}{3}\pi r^3$

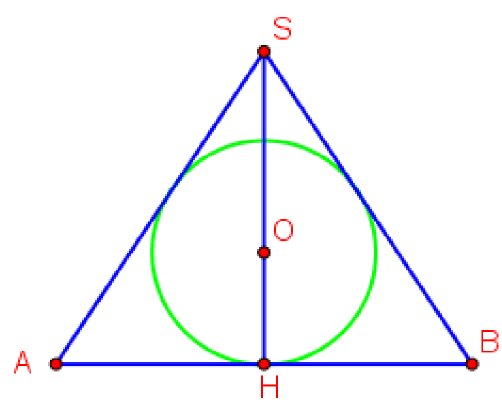
Hướng dẫn giải



Xét mặt phẳng chứa trục của hình nón, mặt phẳng này cắt hình nón theo tam giác cân SAB và cắt mặt cầu nội tiếp hình nón theo đường tròn bán kính r và hình tròn này nội tiếp tam giác cân SAB $(h.79b)$

Kí hiệu bán kính đáy hình nón là x , chiều cao hình nón là $y(x>0, y>2r)$ thì $(AH+SA)r = \frac{1}{2}AB.SH$

$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)r = xy \Leftrightarrow x^2 = \frac{r^2 y}{y-2r}$ \



Vậy thể tích hình nón ngoại tiếp mặt cầu bán kính r là

$V_2 = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi r^2 : \frac{y^2}{y-2r}$

Ta có $\frac{y^2}{y-2r} = \frac{y^2-4r^2+4r^2}{y-2r} = y+2r+\frac{4r^2}{y-2r}$

$$= y-2r+\frac{4r^2}{y-2r}+4r \geq 2\sqrt{(y-2r).\frac{4r^2}{y-2r}}+4r=8r$$

Từ đó $V_2 \geq \frac{1}{3}\pi.8r^3$, tức là V_2 đạt giá trị bé nhất khi và chỉ khi $y-2r=\frac{4r^2}{y-2r} \Leftrightarrow y=4r$ từ đó $x=r\sqrt{2}$

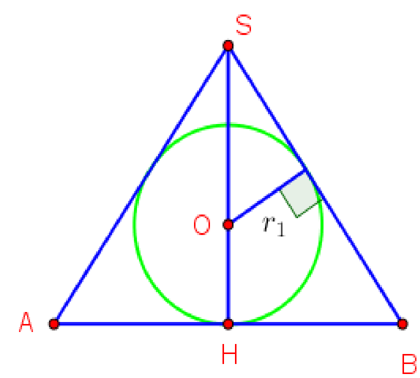
.

Câu 32: Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích hình nón và thể tích hình cầu nội tiếp hình nón. Khi r và h thay đổi, tìm giá trị bé nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 2

Hướng dẫn giải

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trục của hình nón thì (P) cắt hình nón. Theo tam giác cân SAB, cắt mặt cầu theo đường tròn lớn, đường tròn này nội tiếp tam giác cân. Khi đó, bán kính r_1 của hình cầu nội tiếp hình nón được tính bởi công thức $r_1=\frac{rh}{r+\sqrt{h^2+r^2}}$



$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{4}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}+1\right)^3}{\frac{h^2}{r^2}}=\frac{1}{4}\frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^3}{x}$$, ở đó $\frac{h^2}{r^2}=x>0$

Xét $f(x)=\frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^3}{4x}, f'(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2\left(x-2-2\sqrt{1+x}\right)}{4.2x^2\sqrt{x+1}}$

Vì $\frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2}{4.2x^2\sqrt{x+1}}>0$ nên khi xét dấu của $f(x)$, ta chỉ cần xét dấu của $g(x)=x-2-2\sqrt{1+x}$.

Ta có $g'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Dễ thấy $g'(x)>0$ vì khi $x>0$ thì $\frac{1}{\sqrt{x+1}}<1$, đồng thời $g(x)=0 \Leftrightarrow x=8$

Vậy $g(x)$ là hàm tăng trên miền $x>0$ và $g(8)=0$ nên

Với $0<x\leq 8$ thì $g(x)\leq 0$;

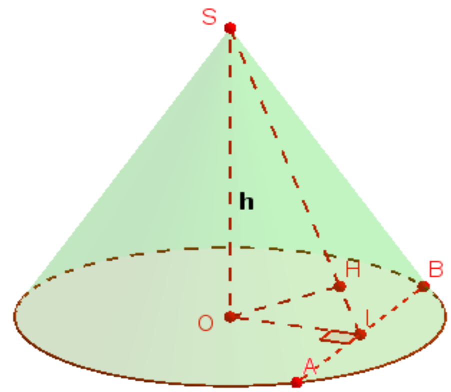
Câu 33: Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h=20cm$, bán kính đáy $r=25cm$. Một mặt phẳng (P) đi qua 2 đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm O của đáy là 12 cm. Khi đó diện tích thiết diện của (P) với khối nón bằng:

A. 500 cm^2 B. 475 cm^2 C. 450 cm^2 D. 550 cm^2

Hướng dẫn giải

Gọi S là đỉnh của khối nón. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt khối nón theo hai đường sinh bằng nhau là $SA=SB$ nên ta có thiết diện là tam giác cân SAB.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB, ta có $OI \perp AB$. Từ tâm O của đáy ta kẻ $OH \perp SI$ tại H, ta có $OH \perp (SAB)$ và do đó theo giả thiết ta có $OH = 12\,cm$. Xét tam giác vuông SOI ta có:



$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2}$$

$$\Rightarrow OI = 15(cm)$$

Mặt khác, xét tam giác vuông SOI ta còn có : $OS.OI = SI.OH$

Do đó $SI = \frac{OS.OI}{OH} = \frac{20.15}{12} = 25(cm)$

Gọi S_t là diện tích của thiết diện SAB. Ta có: $S_t = \frac{1}{2}AB.SI$, trong đó $AB = 2AI$

Vì $AI^2 = OA^2 - OI^2 = 25^2 - 15^2 = 20^2$ nên $AI = 20\,cm$ và $AB = 40\,cm$

Vậy thiết diện SAB có diện tích là: $S_t = \frac{1}{2}.40.25 = 500\left(cm^2\right)$. **Chọn A.**

Câu 34: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ tạo với mặt đáy góc 60^0 và điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$ bằng:

A. $\frac{85a}{108}$. **B.** $\frac{3a}{2}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** $\frac{31a}{36}$.

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm $B'C'$, ta có

$$60^0 = \widehat{\left(AB'C'\right),\left(A'B'C'\right)} = \widehat{AM, A'M} = \widehat{AMA'}.$$

Trong $\Delta AA'M$, có $A'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$$AA' = A'M.\tan\widehat{AMA'} = \frac{3a}{2}.$$

Gọi G' là trọng tâm tam giác đều $A'B'C'$, suy ra G' cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$.

Vì lặng trụ đứng nên $GG' \perp \left(A'B'C'\right)$.

Do đó GG' là trục của tam giác $A'B'C'$.

Trong mặt phẳng $\left(GC'G'\right)$, kẻ trung trực d của đoạn thẳng GC' cắt GG' tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$, bán kính $R = GI$.

Ta có $\Delta GPI \backsim \Delta GG'C' \Rightarrow \dfrac{GP}{GI} = \dfrac{GG'}{GC'}$

$$\Rightarrow R = GI = \frac{GP.GC'}{GG'} = \frac{GC'^2}{2GG'} = \frac{GG'^2 + G'C'^2}{2GG'} = \frac{31a}{36}$$. **Chọn D.**

Câu 35: Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30^0. Khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ bằng:

A. R. **B.** $R\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{R\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Từ hình vẽ kết hợp với giả thiết, ta có $OA = O'B = R$.

Gọi AA' là đường sinh của hình trụ thì

$O'A' = R,\ AA' = R\sqrt{3}$ và $\widehat{BAA'} = 30^0$.

Vì $OO' \parallel (ABA')$ nên

$$d[OO',(AB)] = d[OO',(ABA')] = d[O',(ABA')].$$

Gọi H là trung điểm $A'B$, suy ra

$$\left.\begin{array}{l} O'H \perp A'B \\ O'H \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow O'H \perp (ABA') \text{ nên } d[O',(ABA')] = O'H.$$

Tam giác ABA' vuông tại A' nên $BA' = AA'\tan 30^0 = R$.

Suy ra tam giác $A'BO'$ đều có cạnh bằng R nên $O'H = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC, R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB). Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $R = d[G,(SAB)]$. **B.** $3\sqrt{13}R = 2SH$. **C.** $\dfrac{R^2}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{39}$. **D.** $\dfrac{R}{a} = \sqrt{13}$.

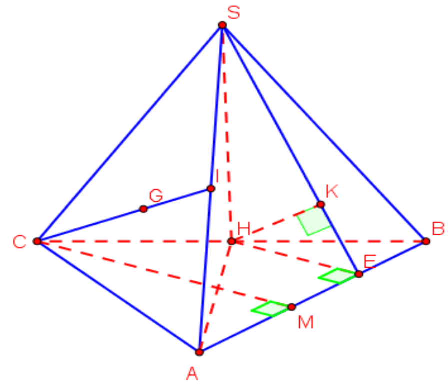
Hướng dẫn giải

Ta có $60^0 = \widehat{SA,(ABC)} = \widehat{SA,HA} = \widehat{SAH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SHA, ta có $SH = AH.\tan\widehat{SAH} = \dfrac{3a}{2}$.

Vì mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với (SAB) nên bán kính mặt cầu $R = d\left[G,(SAB)\right]$.



Ta có $d\left[G,(SAB)\right] = \dfrac{1}{3}d\left[C,(SAB)\right] = \dfrac{2}{3}d\left[H,(SAB)\right]$.

Gọi $M,\ E$ lần lượt là trung điểm AB và MB.

Suy ra $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} HE \perp AB \\ HE = \dfrac{1}{2}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \end{cases}$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SE, suy ra $HK \perp SE$. (1)

Ta có $\begin{cases} HE \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HK.\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $HK \perp (SAB)$ nên $d\left[H,(SAB)\right] = HK$.

Trong tam giác vuông SHE, ta có $HK = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{3a}{2\sqrt{13}}$.

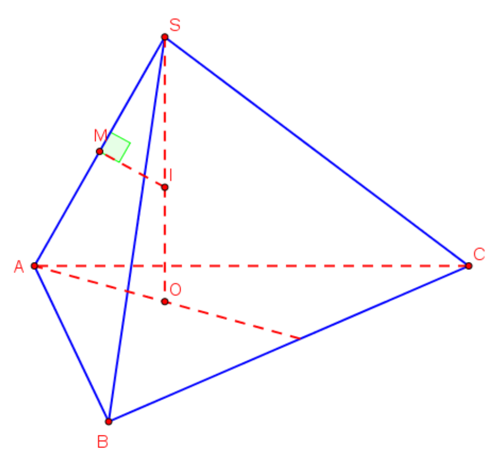
Vậy $R = \dfrac{2}{3}HK = \dfrac{a}{\sqrt{13}}$. **Chọn D.**

Câu 37: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Gọi h là chiều cao của khối chóp và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp. Tỉ số $\dfrac{R}{h}$ bằng:

A. $\dfrac{7}{12}$ **B.** $\dfrac{7}{24}$. **C.** $\dfrac{7}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm ΔABC, suy ra $SO \perp (ABC)$ và $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Trong SOA, ta có $h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{a}{2}$.

Trong mặt phẳng SOA, kẻ trung trực d của đoạn SA cắt SO tại I, suy ra

• $I \in d$ nên $IS = IA$.

● $I \in SO$ nên $IA = IB = IC$.

Do đó $IA = IB = IC = IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

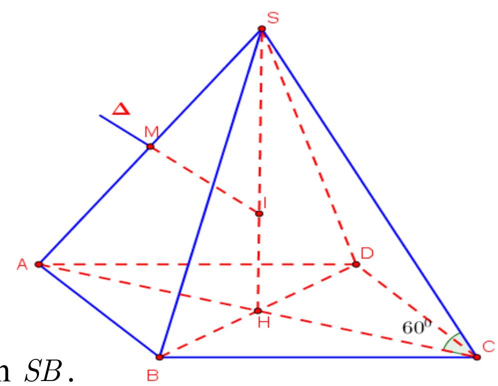
Gọi M là tung điểm SA, ta có ΔSMI ÿ ΔSOA nên

$$R = SI = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{7a}{12}.$$ Vậy $\frac{R}{h} = \frac{7}{6}$. **Chọn C.**

Câu 38: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}$.

Hướng dẫn giải



Gọi $O = AC \cap BD$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $60^0 = \widehat{SB,(ABCD)} = \widehat{SB,OB} = \widehat{SBO}$.

Trong ΔSOB, ta có $SO = OB.\tan\widehat{SBO} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có SO là trục của hình vuông $ABCD$.

Trong mặt phẳng SOB, kẻ đường trung trực d của đoạn SB.

Gọi $I = SO \cap d \Rightarrow \begin{cases} I \in SO \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IS = IB \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS = R$.

Xét ΔSBD có $\begin{cases} SB = SD \\ \widehat{SBD} = \widehat{SBO} = 60^o \end{cases} \Rightarrow \Delta SBD$ đều.

Do đó d cũng là đường trung tuyến của ΔSBD. Suy ra I là trọng tâm ΔSBD.

Bán kính mặt cầu $R = SI = \frac{2}{3}SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Suy ra $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}$. **Chọn D.**

Câu 39: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng a. Khi đó mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng:

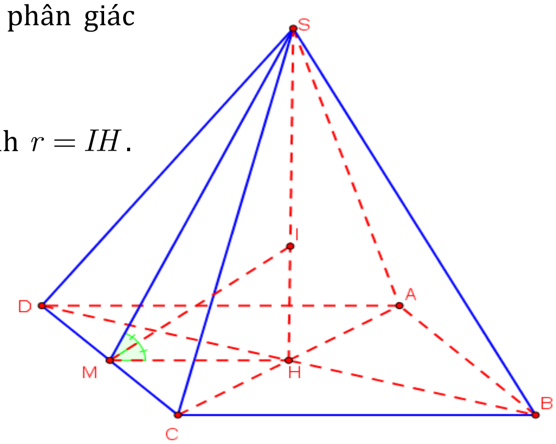
A. $\frac{a\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$. **C.** $\frac{a\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}$. **D.** $\frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có SH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy.

Gọi M là trung điểm của CD và I là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{SMH}$ $(I \in SH)$.



Suy ra I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính $r = IH$.

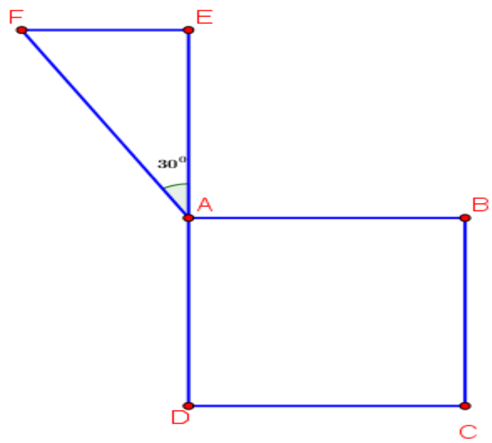
Ta có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $MH = \dfrac{a}{2}$.

Dựa vào tính chất của đường phân giác ta có:

$$\frac{IS}{IH} = \frac{MS}{MH} \Rightarrow \frac{SH}{IH} = \frac{MS + MH}{MH} \Rightarrow IH = \frac{SH.MH}{MS + MH} = \frac{a}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{a\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{4}.$$ **Chọn B.**

Câu 40: (CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3) Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục DF



A. $\dfrac{10\pi a^3}{9}$. **B.** $\dfrac{10\pi a^3}{7}$. **C.** $\dfrac{5\pi a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $EF = AF.\tan\beta = a.\tan 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Khi quay quanh trục DF, tam giác AEF tạo ra một hình nón có thể tích

$V_1 = \dfrac{1}{3}\pi.EF^2.AF = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a = \dfrac{\pi a^3}{9}$

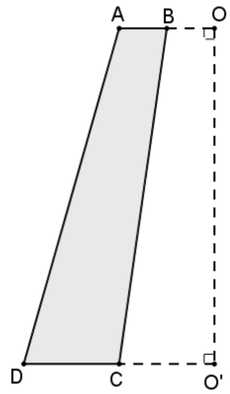
Khi quay quanh trục DF, hình vuông $ABCD$ tạo ra một hình trụ có thể tích

$V_2 = \pi.DC^2.BC = \pi.a^2.a = \pi a^3$

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục DF là

$V = V_1 + V_2 = \dfrac{\pi a^3}{9} + \pi a^3 = \dfrac{10}{9}\pi a^3$

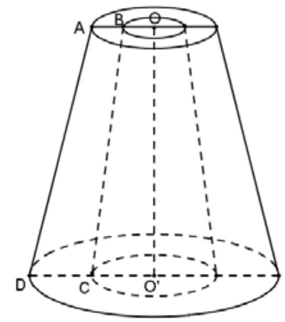
Câu 41: (NGÔ QUYỀN – HP) Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục OO', biết $OO' = 80,\ O'D = 24,\ O'C = 12,\ OA = 12,\ OB = 6$.



A. $V = 43200\pi$. **B.** $V = 21600\pi$. **C.** $V = 20160\pi$. **D.** $V = 45000\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Công thức tính thể tích khối nón cụt $V = \frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2\right)$.

Trong đó h là độ dài đường cao, $R_1; R_2$ lần lượt là bán kính hai đáy.

Gọi V_1 là thể tích khối nón cụt khi quay hình thang $AOO'D$ quanh trục OO'.

Gọi V_2 là thể tích khối nón cụt khi quay hình thang $BOO'C$ quanh trục OO'.

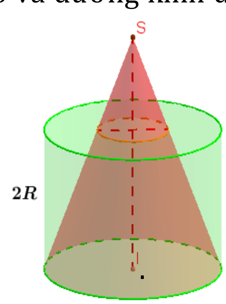
Khi đó $V = V_1 - V_2$.

Ta có $V_1 = \frac{1}{3}\pi.OO'.\left(O'D^2 + OA^2 + O'D.OA\right) = 26880\pi$

và $V_2 = \frac{1}{3}\pi.OO'.\left(O'C^2 + OB^2 + O'C.OB\right) = 6720\pi$.

Vậy $V = V_1 - V_2 = 26880\pi - 6720\pi = 20160\pi$.

Câu 42: (CHUYÊN BẮC GIANG) Cho hình nón có độ dài đường kính đáy là $2R$, độ dài đường sinh là $R\sqrt{17}$ và hình trụ có chiều cao và đường kính đáy đều bằng $2R$, lồng vào nhau như hình vẽ.

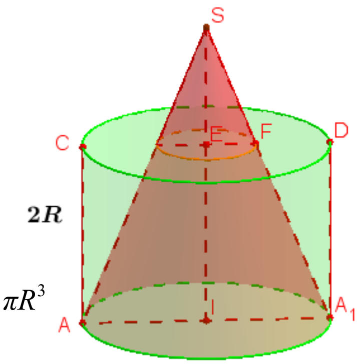


Tính thể tích phần khối trụ không giao với khối nón

A. $\frac{5}{12}\pi R^3$. B. $\frac{1}{3}\pi R^3$. C. $\frac{4}{3}\pi R^3$. D. $\frac{5}{6}\pi R^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \sqrt{17R^2 - R^2} = 4R \Rightarrow SE = 2R, EF = \frac{R}{2}$.

Thể tích khối nón lớn (có đường cao SI) là $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2.4\text{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

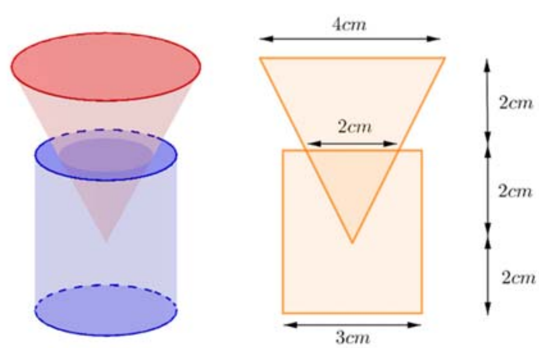
Thể tích khối nón nhỏ (có đường cao SE) là $V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2.2R = \frac{1}{6}\pi R^3$

Thể tích phần khối giao nhau giữ khối nón và khối trụ là $V_3 = V_1 - V_2V_2 = \frac{7}{6}\pi R^3$.

Thể tích khối trụ là là $V_4 = \pi R^2.2R = 2\pi R^3$.

Vậy thể tích phần khối trụ không giao với khối nón là $V = V_4 - V_3 = \frac{5}{6}\pi R^3$.

Câu 43: (CHUYÊN KHTN L4) Một nút chai thủy tinh là một khối tròn xoay (H), một mặt phẳng chứa trục của (H) cắt (H) theo một thiết diện như trong hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) (đơn vị cm^3).



A. $V_{(H)} = 23\pi$. B. $V_{(H)} = 13\pi$. C. $V_{(H)} = \frac{41\pi}{3}$. D. $V_{(H)} = 17\pi$.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án C.

Thể tích khối trụ là $V_{tru} = Bh = \pi 1.5^2.4 = 9\pi$. Thể tích khối nón là $V_{non} = \frac{1}{3}\pi 2^2.4 = \frac{16\pi}{3}$.

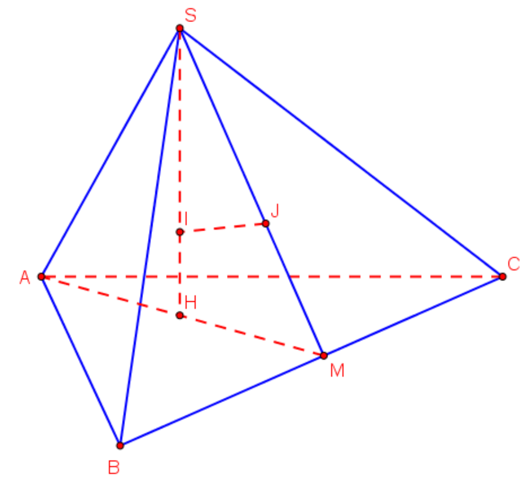
Thể tích phần giao là: $V_{p.giao} = \frac{1}{3}\pi 1^2.2 = \frac{2\pi}{3}$. Vậy $V_{(H)} = 9\pi + \frac{16\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{41\pi}{3}$.

Câu 44: (CHUYÊN KHTN L4) Cho một mặt cầu bán kính bằng 1. Xét các hình chóp tam giác đều ngoại tiếp mặt cầu trên. Hỏi thể tích nhỏ nhất của chúng là bao nhiêu?

A. $\min V = 8\sqrt{3}$. **B.** $\min V = 4\sqrt{3}$. **C.** $\min V = 9\sqrt{3}$. **D.** $\min V = 16\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Hướng dẫn giải

Gọi cạnh đáy của hình chóp là a

Ta có $\Delta SIJ \sim \Delta SMH$

$\Rightarrow \frac{SI}{SM} = \frac{IJ}{MH} \Rightarrow MH(SH - IH) = IJ\sqrt{SH^2 - HM^2}$

$\Rightarrow MH^2(SH-1)^2 = SH^2 - HM^2$

$\Rightarrow (a^2 - 12)SH^2 - 2a^2 SH = 0$

$\Rightarrow SH = \frac{2a^2}{a^2 - 12}(a^2 \neq 12)$

$S = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{2a^4}{a^2 - 12} = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{1}{\frac{1}{a^2} - \frac{12}{a^4}}$ .Ta có $\frac{1}{a^2} - \frac{12}{a^4} \leq \frac{1}{48} \Rightarrow S \geq 8\sqrt{3}$

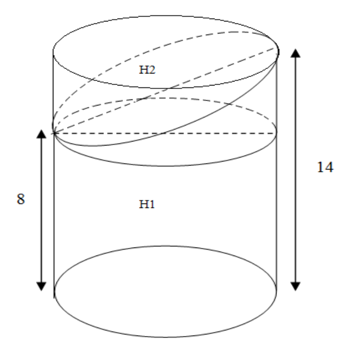
Câu 45: (CHUYÊN KHTN L4) Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối (H) như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một hình elip có độ dài trục lớn bằng 8, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14 (xem hình vẽ).Tính thể tích của (H).

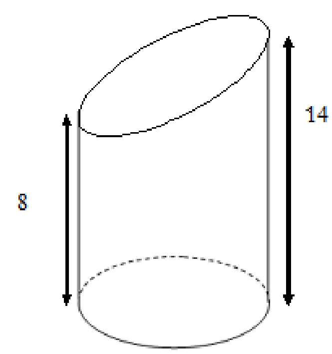
A. $V_{(H)} = 192\pi$.

B. $V_{(H)} = 275\pi$.

C. $V_{(H)} = 704\pi$.

D. $V_{(H)} = 176\pi$.





Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đường kính đáy của khối trụ là $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

Bán kính đáy của khối trụ là $R = 4$

Thể tích của khối trụ $H1$ là $V_1 = \pi.R^2.h_1 = \pi.4^2.8 = 128\pi$.

Thể tích của khối trụ $H2$ là $V_2 = \pi.R^2.h_2 = \pi.4^2.6 = 96\pi$.

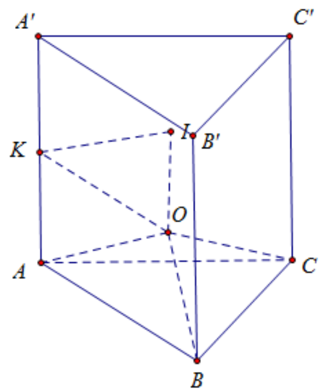
Thể tích của H là $V = V_1 + \frac{1}{2}V_2 = 128\pi + \frac{1}{2}.96\pi = 176\pi$.

Câu 46: (CHUYÊN VINH – L2) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, BC = \sqrt{3}a$. Cạnh bên $AA' = 2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ bằng

A. a. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\sqrt{5}a$. **D.** $\sqrt{3}a$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Dễ thấy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đứng đã cho.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đường thẳng qua O vuông góc với (ABC) cắt mặt phẳng trung trực của AA' tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Mặt khác $\cos\widehat{A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = \dfrac{1}{2}$

Ta có: $R_{ABC} = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin 120^0} = a$ do đó $R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Câu 47: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; tam giác ABC cân tại A, $AB = a$; $\widehat{BAC} = 120°$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính bán kính mặt cầu đi qua 5 điểm A, B, C, K, H.

A. $R = a\sqrt{3}$ **B.** $R = a$

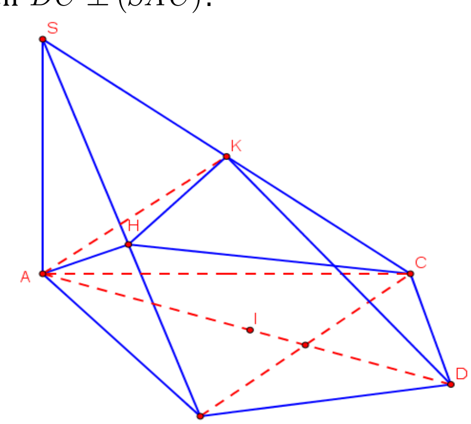
C. $R = 2a$ **D.** Không tồn tại mặt cầu như vậy

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AD là một đường kính của đường tròn (I).

Tam giác ACD vuông tại C, suy ra: $DC \perp AC$ mà $DC \perp SA$ nên $DC \perp (SAC)$.

Ta lại có: $\begin{cases} AK \perp KC \\ AK \perp DC (do\, DC \perp (KCD) \end{cases} \Rightarrow AK \perp KC$.



Suy ra tam giác AKD vuông tại K, suy ra: $IA = ID = IK$.

Tương tự như trên ta cũng có: $IA = ID = IH$.

Vậy thì $IA = IB = IC = IK = IH$,

do đó 5 điểm A, B, C, K, H cùng nằm trên một mặt cầu(đpcm).

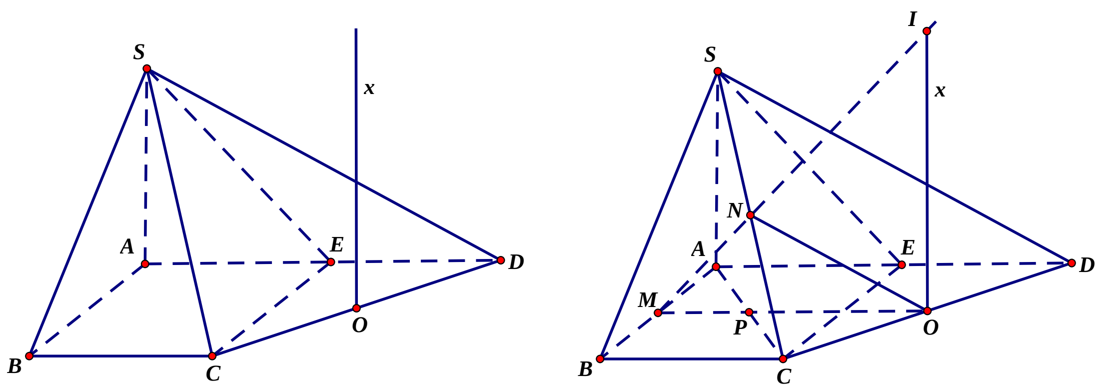
Bán kính R của mặt cầu cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Áp dụng định lý *cos* ta có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos120^\circ}=a\sqrt{3}$.

Áp dụng định lý *sin* ta có: $\frac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\frac{BC}{2\sin A}=\frac{a\sqrt{3}}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}}=a$. Chọn B.

Câu 48: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$; đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a; AD=2a$; $SA=a$. Gọi E là trung điểm của AD. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

A. $R=\frac{a\sqrt{7}}{2}$ **B.** $R=a\sqrt{7}$ **C.** $R=\frac{a\sqrt{11}}{2}$ **D.** $R=a\sqrt{11}$



Hướng dẫn giải

Gọi O là trung điểm của CD.

Kẻ tia $Ox \parallel SA$ thì $Ox\perp(ABCD)$.

Ta có: O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông CDE và $Ox\perp(ABCD)$, nên Ox là trục của đường tròn (CDE).

Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,SC.

Ta có: $SM=\sqrt{SA^2+AM^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$; $MC=\sqrt{MB^2+BC^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ nên suy ra $SM=MC$.

Do đó tam giác SMC cân tại M, suy ra $MN\perp SC$.

Dễ thấy $(MNO)//(SAD)$ và $CE\perp(SAD)$ nên suy ra $CE\perp(MNO)$ và do đó $CE\perp MN$.

Vậy nên $MN\perp(SEC)$, do đó MN là trục của đường tròn (SEC).

Gọi I là giao điểm của MN và SO thì I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$ là $R=\sqrt{IC}=\sqrt{IO^2+OC^2}$.

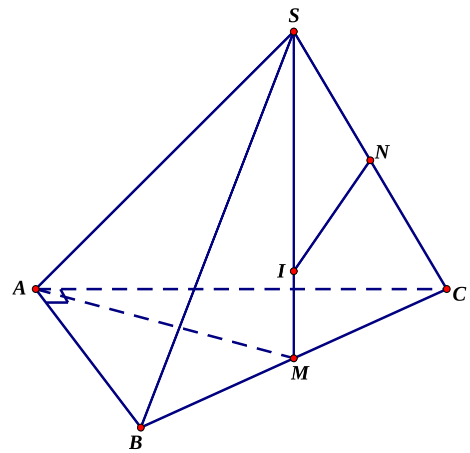
Trong đó $OC=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ và $IO=3NP=3.\frac{SA}{2}=\frac{3a}{2}$ (P là giao điểm của MO và AC).

Vậy thì $R=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{11}}{2}$. Chọn C.

Câu 49: Cho khối chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B, biết $AB=1; AC=\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm BC, biết $SM\perp(ABC)$. Tổng diện tích các mặt cầu ngoại tiếp các tứ diện $SMAB$ vàb $SMAC$ bằng 15π. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{21\pi}{4}$ **B.** 20π **C.** $\frac{25\pi}{4}$ **D.** 4π

Hướng dẫn giải



Dễ kiểm tra được $BC=2a$ và tam giác MAB đều cạnh a. Đặt $SM=h$.

Gọi R_1, R_2 và R lần lượt là bán kính các mặt cầu ngoại tiếp của các hình $SMAB$, $SMAC$ và $S.ABC$.

Gọi r_1, r_2 và r lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác MAB, MAC và ABC.

Ta có: $r_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $r_2=\frac{AC}{2.\sin 120°}=1$.

Vì $SA\perp(MAB)$, $SA\perp(MAC)$ nên dễ kiểm tra được:

$R_1^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+r_1^2=\frac{h^2}{4}+\frac{3}{4}$ và $R_2^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+r_2^2=\frac{h^2}{4}+1$.

Theo giả thiết tổng diện tích các mặt cầu thì: $4\pi\left(R_1^2+R_2^2\right)=15\pi$

Suy ra: $\frac{h^2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{h^2}{4}+1=\frac{15}{4}$. Từ đây tìm được $h=2$.

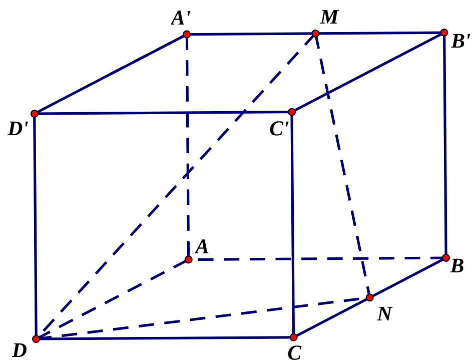
Dựng trung trực của SC, cắt SM tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của $S.ABC$.

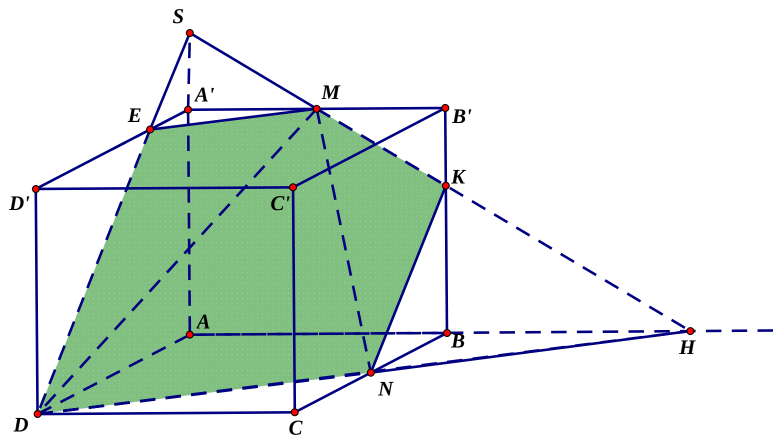
Dễ kiểm tra $SI.SM=SN.SC$, suy ra $R=SI=\frac{SN.SC}{SM}=\frac{5}{4}$.

Vậy thì diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S=4\pi\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25\pi}{4}$. Chọn C.

Câu 50: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$ và BC. Mặt phẳng (DMN) chia hình lập phương thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh A, V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\frac{V1}{V2}$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{55}{89}$. **C.** $\frac{37}{48}$. **D.** $\frac{1}{2}$.





Hướng dẫn giải

Gọi $H = AB \cap DN$; MH cắt $B'B$ tại K, cắt $A'A$ tại S; SD cắt $A'D'$ tại E.

Thiết diện tương ứng là ngũ giác $DNKME$.

Phần đa diện chứa A có thể tích là: $V_1 = V_{S.ADH} - V_{S.A'EM} - V_{K.BNH}$.

Dùng tam giác đồng dạng kiểm tra được: $BA = BH$; $AH = 4A'M$; $AD = 4A'E$ và $SA' = B'K = \frac{1}{3}A'A$.

Đặt độ dài cạnh hình lập phương bằng 1 thì: $SA' = \frac{1}{3}$; $KB = \frac{2}{3}$.

Ta có: $V_{S.ADH} = \frac{1}{6}SA.AD.AH = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}\right).1.2 = \frac{4}{9}$.

$$V_{S.A'EM} = \frac{1}{64}V_{S.ADH} = \frac{1}{144};\ V_{K.BNH} = \frac{1}{8}V_{S.ADH} = \frac{1}{18}$$

Vậy thì phần đa diện chứa A có thể tích là: $\frac{4}{9} - \frac{1}{144} - \frac{1}{18} = \frac{55}{144}$.

Suy ra phần đa diện không chứa A có thể tích là: $1^3 - \frac{55}{144} = \frac{89}{144}$. Chọn B.

BÀI TOÁN VẬN DỤNG (8 - 9 - 10)

Chủ đề 7. TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

Câu 1: (SGD VĨNH PHÚC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(1;2;0\right)$, $B\left(3;4;1\right)$, $D\left(-1;3;2\right)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $ABCD$ là hình thang có hai cạnh đáy AB, CD và có góc C bằng $45°$.

A. $C\left(5;9;5\right)$. **B.** $C\left(1;5;3\right)$. **C.** $C\left(-3;1;1\right)$. **D.** $C\left(3;7;4\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1. $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$.

Đường thẳng CD có phương trình là $CD:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=3+2t\\ z=2+t\end{cases}$.

Suy ra $C\left(-1+2t;3+2t;2+t\right);\overrightarrow{CB}=(4-2t;1-2t;-1-t)$, $\overrightarrow{CD}=(-2t;-2t;-t)$.

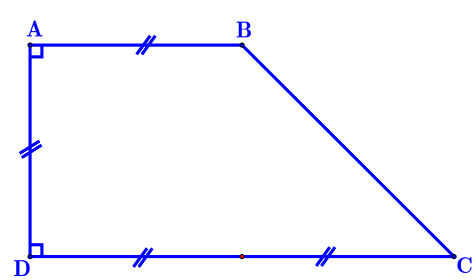
Ta có $\cos\widehat{BCD}=\dfrac{(4-2t)(-2t)+(1-2t)(-2t)+(-1-t)(-t)}{\sqrt{(4-2t)^2+(1-2t)^2+(-1-t)^2}\sqrt{(-2t)^2+(-2t)^2+(-t)^2}}$

Hay $\dfrac{(4-2t)(-2t)+(1-2t)(-2t)+(-1-t)(-t)}{\sqrt{(4-2t)^2+(1-2t)^2+(-1-t)^2}\sqrt{(-2t)^2+(-2t)^2+(-t)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1).

Lần lượt thay t bằng $3;1;-1;2$ (tham số t tương ứng với toạ độ điểm C ở các phương án A, B, C, D), ta thấy $t=2$ thoả (1).

Cách 2.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1),\overrightarrow{AD}=(-2;1;2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ và $AB=AD$. Theo giả thiết, suy ra $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$. Kí hiệu $C(a;b;c)$, ta có $\overrightarrow{DC}=(a+1;b-3;c-2)$, $2\overrightarrow{AB}=(4;4;2)$. Từ đó $C(3;7;4)$.



Câu 2: (SGD VĨNH PHÚC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t_1\\y=0\\z=0\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=1\\y=t_2\\z=0\end{cases}$, $d_3:\begin{cases}x=1\\y=0\\z=t_3\end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $H(3;2;1)$ và cắt ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC.

A. $2x+2y+z-11=0$. **B.** $x+y+z-6=0$. **C.** $2x+2y-z-9=0$. **D.** $3x+2y+z-14=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(1;b;0)$, $C(1;0;c)$.

$\overrightarrow{AB}=(1-a;b;0)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{CH}=(2;2;1-c)$, $\overrightarrow{AH}=(3-a;2;1)$.

Yêu cầu bài toán

$$\begin{cases}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{CH}=0\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=0\\\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2bc+2c(a-1)+(1-c)b(a-1)=0\\a=b+1\\c=2b\end{cases}\Rightarrow 9b^2-2b^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b=\dfrac{9}{2}\end{array}\right.$$

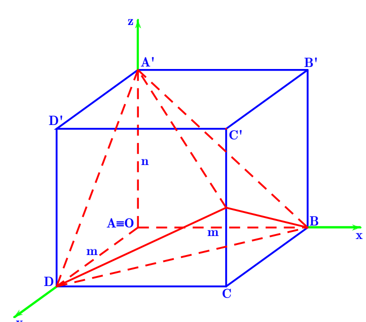
Nếu $b=0$ suy ra $A\equiv B$ (loại).

Nếu $b=\dfrac{9}{2}$, tọa độ $A\left(\dfrac{11}{2};0;0\right)$, $B\left(1;\dfrac{9}{2};0\right)$, $C(1;0;9)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là $2x+2y+z-11=0$.

Câu 3: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với $m,n>0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{245}{108}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** $\dfrac{64}{27}$. **D.** $\dfrac{75}{32}$.

Hướng dẫn giải



Tọa độ điểm $C(m;m;0), C'(m;m;;n), M\left(m;m;\dfrac{n}{2}\right)$

$\overrightarrow{BA'}=(-m;0;n), \overrightarrow{BD}=(-m;m;0), \overrightarrow{BM}=\left(0;m;\dfrac{n}{2}\right)$

$\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right]=(-mn;-mn;-m^2)$

$$V_{BDA'M} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BM}\right| = \frac{m^2n}{4}$$

Ta có $m.m.(2n) \le \left(\frac{m+m+2n}{3}\right)^3 = \frac{512}{27} \Rightarrow m^2n \le \frac{256}{27}$

$$\Rightarrow V_{BDA'M} \le \frac{64}{27}$$

Chọn đáp án: C

Câu 4: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hai mặt phẳng $4x-4y+2z-7=0$ và $2x-2y+z+1=0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó là

A. $V = \frac{27}{8}$ B. . $V = \frac{81\sqrt{3}}{8}$. C. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ D. $V = \frac{64}{27}$

Hướng dẫn giải

Theo bài ra hai mặt phẳng $4x-4y+2z-7=0$ và $2x-2y+z+1=0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Mà hai mặt phẳng $(P): 4x-4y+2z-7=0$ và $(Q): 2x-2y+z+1=0$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng sẽ bằng cạnh của hình lập phương.

Ta có $M(0;0;-1) \in (Q)$ nên $d((Q),(P)) = d(M,(P)) = \left|\frac{-2-7}{\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}}\right| = \frac{3}{2}$

Vậy thể tích khối lập phương là: $V = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.

Câu 5: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;0)$, $B(0;-\sqrt{2};0)$, $M\left(\frac{6}{5};-\sqrt{2};2\right)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=2-t \end{cases}$. Điểm C thuộc d sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhấ thì độ dài CM bằng

A. $2\sqrt{3}$. B. 4. C. 2. D. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Do AB có độ dài không đổi nên chu vi tam giác ABC nhỏ nhất khi $AC+CB$ nhỏ nhất.

Vì $C \in d \Rightarrow C(t;0;2-t) \Rightarrow AC = \sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9}$, $BC = \sqrt{\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}\right)^2+4}$

$$\Rightarrow AC+CB = \sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9} + \sqrt{\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}\right)^2+4}.$$

Đặt $\vec{u}=\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2};3\right),\vec{v}=\left(-\sqrt{2}t+\sqrt{2};2\right)$ ápdụngbấtđẳngthức $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$

$\Rightarrow\sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9}+\sqrt{\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}\right)^2+4}\ge\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)^2+25}$. Dấubằngxảyrakhivàchỉ

khi $\dfrac{\sqrt{2}t-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}t+\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow t=\dfrac{7}{5}\Rightarrow C\left(\dfrac{7}{5};0;\dfrac{3}{5}\right)\Rightarrow CM=\sqrt{\left(\dfrac{6}{5}-\dfrac{7}{5}\right)^2+2+\left(2-\dfrac{3}{5}\right)^2}=2.$

Chọn C.

Câu 6: (T.T DIỆU HIỀN) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;0;1)$ $(P): x-y+z+1=0$. Tìm điểm $N\in(P)$ sao cho $S=2NA^2+NB^2+NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $N\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{4};\dfrac{3}{4}\right)$. B. $N(3;5;1)$. C. $N(-2;0;1)$. D. $N\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};-2\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm BC và J là trung điểm AI. Do đó $I\left(-1;\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và $J\left(0;\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{4}\right)$.

Khi đó $S=2NA^2+2NI^2+\dfrac{1}{2}BC^2=4NJ^2+IJ^2+\dfrac{1}{2}BC^2$.

Do đó S nhỏ nhất khi NJ nhỏ nhất. Suy ra J là hình chiếu của N trên (P).

Phương trình đường thẳng $NJ:\begin{cases}x=t\\ y=\dfrac{3}{4}-t\\ z=\dfrac{5}{4}+t\end{cases}$.

Tọa độ điểm J là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-y+z+1=0\\ x=t\\ y=\dfrac{3}{4}-t\\ z=\dfrac{5}{4}+t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{5}{4}\\ z=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

Câu 7: (LẠNG GIANG SỐ 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1\\ y=1,t\in\mathbb{R};\\ z=t\end{cases}$ $d_2:\begin{cases}x=2\\ y=u\\ z=1+u\end{cases}, u\in\mathbb{R};$ $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả d_1,d_2 và có tâm thuộc đường thẳng Δ?

A. $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$. B. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$.

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

D. $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(z-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1;1;0)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d_1}}=(0;0;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(2;0;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d_2}}=(0;1;1)$.

Gọi I là tâm của mặt cầu. Vì $I\in\Delta$ nên ta tham số hóa $I(1+t;t;1+t)$, từ đó

$$\overrightarrow{IM_1}=(-t;1-t;-1-t),\qquad \overrightarrow{IM_2}=(1-t;-t;-t).$$

Theo giả thiết ta có $d(I;d_1)=d(I;d_2)$, tương đương với

$$\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM_1};\overrightarrow{u_{d_1}}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_{d_1}}\right|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM_2};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_{d_2}}\right|}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(1-t)^2+t^2}}{1}=\frac{\sqrt{2(1-t)^2}}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow t=0$$

Suy ra $I(1;0;1)$ và bán kính mặt cầu là $R=d(I;d_1)=1$. Phương trình mặt cầu cần tìm là

$$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1.$$

Câu 8: (LẠNG GIANG SỐ 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$; $B(0;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+12=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất?

A. $M(2;2;9)$.

B. $M\left(-\frac{6}{11};-\frac{18}{11};\frac{25}{11}\right)$.

C. $M\left(\frac{7}{6};\frac{7}{6};\frac{31}{4}\right)$.

D. $M\left(-\frac{2}{5};-\frac{11}{5};\frac{18}{5}\right)$.

Hướng dẫn giải

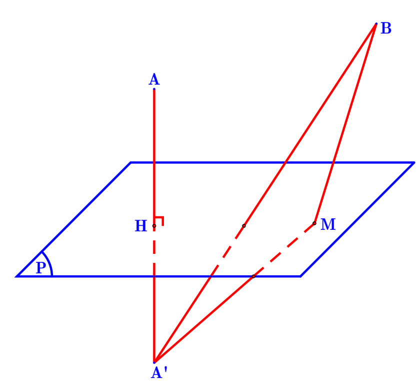
Chọn D.

Thay tọa độ $A(1;0;2)$; $B(0;-1;2)$ vào phương trình mặt phẳng (P), ta được $P(A)P(B)>0$ $\Rightarrow$ hai điểm A, B cùng phía với đối với mặt phẳng (P).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P). Ta có

$$MA+MB=MA'+MB\geq A'B.$$

Nên $\min(MA+MB)=A'B$ khi và chỉ khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).



Phương trình $AA':\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=2-2t\end{cases}$ (AA' đi qua $A(1;0;2)$ và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;2;-1)$).

Gọi H là giao điểm của AA' trên (P), suy ra tọa độ của H là $H(0;-2;4)$, suy ra $A'(-1;-4;6)$,

nên phương trình $A'B:\begin{cases}x=t\\y=-1+3t\\z=2-4t\end{cases}$.

Vì M là giao điểm của $A'B$ với (P) nên ta tính được tọa độ $M\left(-\frac{2}{5};-\frac{11}{5};\frac{18}{5}\right)$.

Câu 9: (LẠNG GIANG SỐ 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+2z-4=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là

A. $d:\begin{cases}x=-3+t\\y=1-2t\,(t\in\mathbb{R})\\z=1-t\end{cases}$.

B. $d:\begin{cases}x=3t\\y=2+t\,(t\in\mathbb{R})\\z=2+2t\end{cases}$.

C. $d:\begin{cases}x=-2-4t\\y=-1+3t\,(t\in\mathbb{R})\\z=4-t\end{cases}$.

D. $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=3-3t\,(t\in\mathbb{R})\\z=3-2t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vectơ chỉ phương của $\Delta:\vec{u}_\Delta(1;1;-1)$, vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;2;2)$.

Vì $\begin{cases}d\perp\Delta\\d\subset(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}_d\perp\vec{u}_\Delta\\\vec{u}_d\perp\vec{n}_{(P)}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}_d=\left[\vec{u}_\Delta;\vec{n}_{(P)}\right]=(4;-3;1)$.

Tọa độ giao điểm $H=\Delta\cap(P)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=2-t\\x+2y+2z-4=0\end{cases}\Rightarrow t=-2\Rightarrow H(-2;-1;4)$.

Lại có $(d;\Delta)\cap(P)=d$, mà $H=\Delta\cap(P)$. Suy ra $H\in d$.

Vậy đường thẳng d đi qua $H(-2;-1;4)$ và có VTCP $\vec{u}_d=(4;-3;1)$ nên có phương trình $d:\begin{cases}x=-2-4t\\y=-1+3t\,(t\in\mathbb{R})\\z=4-t\end{cases}$.

Câu 10: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Trong không gian cho điểm $M(1;-3;2)$.Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A,B,C mà $OA=OB=OC\neq0$

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn **C.**

Giả sử mặt phẳng (α) cần tìm cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0c)(a,b,c \neq 0)$

$(\alpha): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$; (α) qua $M(1;-3;2)$ nên: $(\alpha): \frac{1}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1(*)$

$$OA=OB=OC \neq 0 \Rightarrow |a|=|b|=|c| \neq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c(1) \\ a=b=-c(2) \\ a=-b=c(3) \\ a=-b=-c(4) \end{array}\right.$$

Thay (1) vào $(*)$ ta có phương trình vô nghiệm

Thay $(2),(3),(4)$ vào $(*)$ ta được tương ứng $a=-4, a=6, a=\frac{-3}{4}$

Vậy có 3 mặt phẳng.

Câu 11: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $E(8;1;1)$.Viết phương trình mặt phẳng (α) qua E và cắt nửa trục dương Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho OG nhỏ nhất với G là trọng tâm tam giác ABC.

A. $x+y+2z-11=0$.

B. $8x+y+z-66=0$.

C. $2x+y+z-18=0$.

D. $x+2y+2z-12=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn **D.**

Cách 1 :

Với đáp án A: $A(11;0;0); B(0;11;0); C(0;0;\frac{11}{2}) \Rightarrow G(\frac{11}{3};\frac{11}{3};\frac{11}{6}) \Rightarrow OG^2=\frac{121}{4}$

Với đáp án B: $A(\frac{33}{4};0;0); B(0;66;0); C(0;0;66) \Rightarrow G(\frac{11}{4};22;22) \Rightarrow OG^2=\frac{15609}{16}$

Với đáp án C: $A(9;0;0); B(0;18;0); C(0;0;18) \Rightarrow G(3;\frac{18}{3};\frac{18}{3}) \Rightarrow OG^2=81$

Với đáp án D: $A(-12;0;0); B(0;6;0); C(0;0;6) \Rightarrow G(-4;2;2) \Rightarrow OG^2=24$

Cách 2 :

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Theo đề bài ta có : $\frac{8}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Cần tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$.

Ta có $(a^2+b^2+c^2)(4+1+1) \geq (a.2+b.1+c.1)^2 \Rightarrow 6.(a^2+b^2+c^2) \geq (2a+b+c)^2$

Mặt khác

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(4+1+1)} \ge (a.2+b.1+c.1)$$
$$\ge (2a+b+c)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$\ge (4+1+1)^2 = 36$$

Suy ra $a^2+b^2+c^2 \ge 6^3$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a^2}{4}=b^2=c^2 \Rightarrow a=2b=2c.$

Vậy $a^2+b^2+c^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 216 khi $a=12, b=c=6$.

Vậy phương trình mặt phẳng là : $\frac{x}{12}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1$ hay $x+2y+2z-12=0$.

Câu 12: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S). Gọi M, N là tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

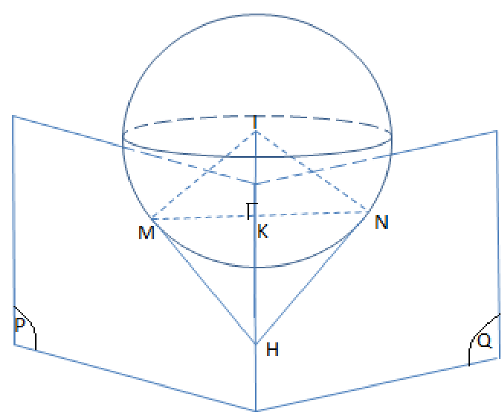
A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B .

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1), R=\sqrt{2}$

Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(2;-1;4)$ làm vectơ chỉ phương



Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng d .

$H \in d \Leftrightarrow H(2t+2;-t;4t)$

Lại có :

$\overrightarrow{IH}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow (2t+1;-t-2;4t-1).(2;-1;4)=0$

$\Leftrightarrow 2(2t+1)+t+2+4(4t-1)=0 \Leftrightarrow t=0$

Suy ra tọa độ điểm $H(2;0;0)$.

Vậy $IH=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

Suy ra: $HM=\sqrt{6-2}=2$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng HI.

Suy ra: $\frac{1}{MK^2}=\frac{1}{MH^2}+\frac{1}{MI^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

Suy ra: $MK=\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow MN=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Câu 13: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua M lần lượt cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C khác O. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$.

A. 54. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 18.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0,0,c)$ với $a,b,c>0$.

Phương trình mặt phẳng (P) : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì : $M\in(P)\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là : $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có : $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\frac{2}{b}.\frac{1}{c}}$

Hay $1\ge 3\sqrt[3]{\frac{2}{abc}}\Leftrightarrow 1\ge\frac{54}{abc}$

Suy ra : $abc\ge 54\Leftrightarrow\frac{1}{6}abc\ge 9$

Vậy : $V_{OABC}\ge 9$.

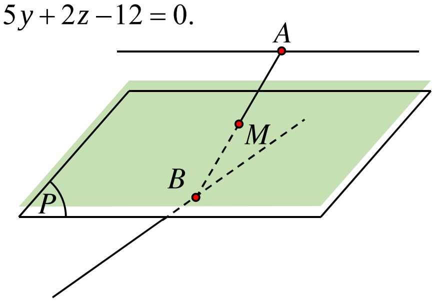
Câu 14: (THTT – 477) Cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=2-2t'\\y=3\\z=t'\end{cases}$. Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

A. $x+5y+2z+12=0.$ B. $x+5y-2z+12=0.$

C. $x-5y+2z-12=0.$ D. $x+5y+2z-12=0.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.



d_1 qua $A(2;1;0)$ và có VTCP là $\vec{u}_1=(1;-1;2)$;

d_2 qua $B(2;3;0)$ và có VTCP là $\vec{u}_2=(-2;0;1)$.

Có $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-1;-5;-2)$; $\overrightarrow{AB}=(0;2;0)$, suy ra $[\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{AB}=-10$, nên $d_1;d_2$ là chéo nhau.

Vậy mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1,d_2 là đường thẳng song song với d_1,d_2 và đi qua trung điểm $I(2;2;0)$ của đoạn thẳng AB.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) cần lập là: $x+5y+2z-12=0$.

Câu 15: (THTT – 477) Cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trên (α) sao cho mọi điểm của d cách đều 2 điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases}x=t\\y=7-3t\\z=2t\end{cases}$. B. $\begin{cases}x=t\\y=7+3t\\z=2t\end{cases}$. C. $\begin{cases}x=-t\\y=7-3t\\z=2t\end{cases}$. D. $\begin{cases}x=2t\\y=7-3t\\z=t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mọi điểm trên d cách đều hai điểm A,B nên d nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;0)$ và trung điểm AB là $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};1\right)$ nên mặt phẳng trung trực của AB là:

$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)-\left(y-\frac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow 3x+y-7=0$.

Mặt khác $d\subset(\alpha)$ nên d là giao tuyến của hai mặt phẳng: $\begin{cases}3x+y-7=0\\x+y+z-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=7-3x\\z=2x\end{cases}$.

Vậy phương trình $d:\begin{cases}x=t\\y=7-3t\\z=2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Câu 16: (SỞ GD HÀ NỘI) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(-2;0;3)$, $M(0;0;1)$ và $N(0;3;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm M, N sao cho khoảng cách từ điểm B đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ điểm A đến (P). Có bao mặt phẳng (P) thỏa mãn đầu bài ?

A. Có vô số mặt phẳng (P).

B. Chỉ có một mặt phẳng (P).

C. Không có mặt phẳng (P) nào.

D. Có hai mặt phẳng (P).

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Giả sử (P) có phương trình là: $ax+by+cz+d=0\left(a^2+b^2+c^2\neq 0\right)$

Vì $M\in(P)\Rightarrow c+d=0\Leftrightarrow d=-c.$

Vì $N\in(P)\Rightarrow 3b+c+d=0$ hay $b=0$ vì $c+d=0.$

$\Rightarrow(P): ax+cz-c=0.$

Theo bài ra: $d(B,(P))=2d(A,(P))\Leftrightarrow\frac{|-2a+3c-c|}{\sqrt{a^2+c^2}}=2\frac{|a-c|}{\sqrt{a^2+c^2}}\Leftrightarrow|c-a|=|a-c|$

Vậy có vô số mặt phẳng (P).

Câu 17: (SỞ GD HÀ NỘI) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B phân biệt. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S=\sqrt{7}$.

B. $S=4$.

C. $S=2\sqrt{7}$.

D. $S=2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cách 1: Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Có $OM=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ nên M nằm trong mặt cầu

Khi đó diện tích AOB lớn nhất khi OM ⊥ AB. Khi đó $AB=2\sqrt{R^2-OM^2}=2\sqrt{7}$ và $S_{AOB}=\frac{1}{2}OM.AB=\sqrt{7}$

Cách 2: gọi H là hình chiếu của O xuống đường thẳng d, đặt $OH=x$ $(0<x\le 1)$ Khi đó $AB=2\sqrt{R^2-OH^2}=2\sqrt{8-x^2}$ và $S_{AOB}=\frac{1}{2}OH.AB=x\sqrt{8-x^2}$.

Khảo sát hàm số $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ trên $(0;1]$ thu được giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{7}$ Đạt được tại $x=1$

Câu 18: (BẮC YÊN THÀNH) Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm $M(1;9;4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho $OA=OB=OC$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a,b,c\ne 0$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ nên $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{4}{c}=1$ (1).

Vì $OA=OB=OC$ nên $|a|=|b|=|c|$, do đó xảy ra 4 trường hợp sau:

+) TH1: $a=b=c$.

Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}+\frac{9}{a}+\frac{4}{a}=1\Leftrightarrow a=14$, nên phương trình mp (α) là $x+y+z-14=0$.

+) TH2: $a=b=-c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}+\frac{9}{a}-\frac{4}{a}=1\Leftrightarrow a=6$, nên pt mp (α) là $x+y-z-6=0$.

+) TH3: $a=-b=c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}+\frac{4}{a}=1\Leftrightarrow a=-4$, nên pt mp (α) là $x-y+z+4=0$.

+) TH4: $a=-b=-c$. Từ (1) có $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}-\frac{4}{a}=1\Leftrightarrow a=-12$, nên pt mp (α) là $x-y-z+12=0$.

Vậy có 4 mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 19: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a+b+c=2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ $M(2016;0;0)$ tới mặt phẳng (P).

A. 2017.   B. $\frac{2014}{\sqrt{3}}$.   C. $\frac{2016}{\sqrt{3}}$.   D. $\frac{2015}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn OA

$\Rightarrow (\alpha)$ đi qua điểm $D\left(\frac{a}{2};0;0\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OA}=(a;0;0)=a(1;0;0)$

$\Rightarrow (\alpha): x-\frac{a}{2}=0$.

Gọi (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn OB

$\Rightarrow (\beta)$ đi qua điểm $E\left(0;\frac{a}{2};0\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OB}=(0;a;0)=a(0;1;0)$

$\Rightarrow (\beta): y-\frac{a}{2}=0$.

Gọi (γ) là mặt phẳng trung trực của đoạn OC

$\Rightarrow (\gamma)$ đi qua điểm $F\left(0;0;\frac{a}{2}\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OC}=(0;0;a)=a(0;0;1)$

$\Rightarrow (\gamma): z-\frac{a}{2}=0$.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ $\Rightarrow I=(\alpha)\cap(\beta)\cap(\gamma)\Rightarrow I\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Mà theo giả thiết, $a+b+c=2 \Leftrightarrow \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=1 \Rightarrow I\in(P): x+y+z=1$.

Vậy, $d(M,(P))=\frac{|2016-1|}{\sqrt{3}}=\frac{2015}{\sqrt{3}}$.

Câu 20: (SỞ BÌNH PHƯỚC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$. Biết mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{2}{9}$.   B. $\frac{1}{6}$.   C. $\frac{3}{8}$.   D. $\frac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cách 1: Ta có $\left(ABC\right):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$

Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(1;2;3\right)$ và bán kính $R=\sqrt{\dfrac{72}{7}}.$

Mặt phẳng $\left(ABC\right)$ tiếp xúc **với** $\left(S\right)\Leftrightarrow d\left(I;\left(ABC\right)\right)=R\Leftrightarrow \dfrac{\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\sqrt{\dfrac{72}{7}}.$

Mà $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=7\Rightarrow \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{7}{2}.$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có

$$\left(1^2+2^2+3^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2=7^2\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{7}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{\frac{1}{a}}=\dfrac{2}{\frac{1}{b}}=\dfrac{3}{\frac{1}{c}}\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=7\end{cases}\Leftrightarrow a=2,\ b=1,\ c=\dfrac{2}{3}$, khi đó $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}abc=\dfrac{2}{9}.$

Cách 2: Ta có $\left(ABC\right):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$ mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I(1;2;3),R=\sqrt{\dfrac{72}{7}}$.

Ta có $\left(ABC\right)$ tiếp xúc với mặt cầu $\left(S\right)\Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)=R\Leftrightarrow \dfrac{\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\sqrt{\dfrac{72}{7}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|7-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=7-\frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-1\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{3}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$\Rightarrow V_{OABC}=\dfrac{1}{6}abc=\dfrac{2}{9}.$

Cách 3: Giống **Cách 2** khi đến $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{7}{2}$.

Đến đây ta có thể tìm a, b, c bằng bất đẳng thức như sau:

Ta có $7^2 = \left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2 = \left(1.\frac{1}{a}+2.\frac{1}{b}+3.\frac{1}{c}\right)^2 \le \left(1^2+2^2+3^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{7}{2}$

Mà $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \frac{7}{2} \Rightarrow$ Dấu "=" của BĐT xảy ra $\frac{\frac{1}{a}}{1} = \frac{\frac{1}{b}}{2} = \frac{\frac{1}{c}}{3}$, kết hợp với giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c} = 7$ ta được $a=2$, $b=1$, $c=\frac{2}{3}$. Vậy: $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{2}{9}$.

Ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{2}{9}$.

Cách 4: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{\frac{72}{7}}$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1$.

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c} = 7 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{7}}{a}+\frac{\frac{2}{7}}{b}+\frac{\frac{3}{7}}{c} = 1$ nên $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right) \in (ABC)$

Thay tọa độ $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$ vào phương trình mặt cầu (S) ta thấy đúng nên $M \in (S)$.

Suy ra: (ABC) tiếp xúc với (S) thì M là tiếp điểm.

Do đó: (ABC) qua $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$, có VTPT là $\overrightarrow{MI} = \left(\frac{6}{7};\frac{12}{7};\frac{18}{7}\right) \to \vec{n} = (1;2;3)$

(ABC) có phương trình: $x+2y+3z-2=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow a=2$, $b=1$, $c=\frac{2}{3}$.

Vậy $V = \frac{1}{6}abc = \frac{2}{9}$

Câu 21: (LƯƠNG TÂM) Phương trình của mặt phẳng nào sau đây đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất?

A. $6x+3y+2z+18=0$.
B. $6x+3y+3z-21=0$.
C. $6x+3y+3z+21=0$.
D. $6x+3y+2z-18=0$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(a,b,c>0)$

(ABC): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (1)

M(1;2;3) thuộc (ABC): $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$.

Thể tích tứ diện OABC: $V=\frac{1}{6}abc$

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\Rightarrow 1\geq\frac{27.6}{abc}\Rightarrow\frac{1}{6}abc\geq 27\Rightarrow V\geq 27$

Ta có: V đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow V=27\Leftrightarrow\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=6\\c=9\end{cases}$

Vậy (ABC): $6x+3y+2z-18=0$. **Chọn (D)**

Câu 22: (PHAN ĐÌNH PHÙNG – HN) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+y-z+5=0$ và hai điểm $A(1;0;2)$, $B(2;-1;4)$. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

A. $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x-y+z-5=0\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x-7y-4z+14=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

D. $\begin{cases}3x-7y-4z+5=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta thấy hai điểm A,B nằm cùng 1 phía với mặt phẳng (P) và AB song song với (P). Điểm $M\in(P)$ sao cho tam giác ABM có diện tích nhỏ nhất

$\Leftrightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{AB.d(M;AB)}{2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(M;AB)$ nhỏ nhất, hay $M\in\Delta=(P)\cap(Q)$, (Q) là mặt phẳng đi qua AB và vuông góc với (P).

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$, vtpt của (P) $\overrightarrow{n_{(P)}}=(3;1;-1)$

Suy ra vtpt của (Q): $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(-1;7;4)$

PTTQ $(Q):-1(x-1)+7y+4(z-2)=0$

$\Leftrightarrow x-7y-4z+7=0$

Quỹ tích M là $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

Câu 23: (CHUYÊN ĐH VINH) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm véctơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

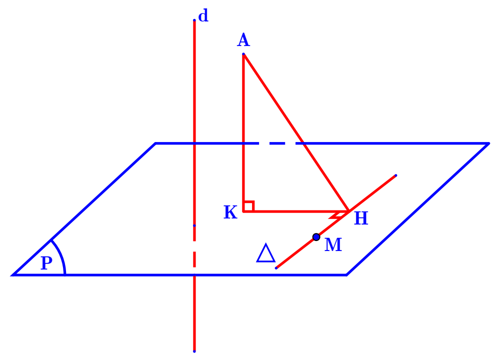
A. $\vec{u}=(2;1;6)$.
B. $\vec{u}=(1;0;2)$.
C. $\vec{u}=(3;4;-4)$.
D. $\vec{u}=(2;2;-1)$.

Hướng dẫn giải

Đáp án: B.

Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với d.

Phương trình của $(P): 2x+2y-z+9=0$.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên $\Delta, (P)$.

Ta có $K(-3;-2;-1)$

$d(A,\Delta) = AH \geq AK$

Vậy khoảng cách từ A đến Δ bé nhất khi Δ đi qua M, K. Δ có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;0;2)$

Câu 24: (MINH HỌA L2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m>0; n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua d. Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A. $R=1$. B. $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $R=\frac{3}{2}$. D. $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $I(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (Oxy)

Ta có: Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+z=1$

Suy ra phương trình tổng quát của (ABC) là $nx+my+mnz-mn=0$

Mặt khác $d(I;(ABC))=\frac{|1-mn|}{\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}=1$ (vì $m+n=1$) và $ID=1=d((I;(ABC))$.

Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D. Khi đó $R=1$.

Câu 25: Cho ba điểm $A(3;1;0), B(0;-1;0), C(0;0;-6)$. Nếu tam giác $A'B'C'$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$ thì có tọa độ trọng tâm là:

A. $(1;0;-2)$. B. $(2;-3;0)$. C. $(3;-2;0)$. D. $(3;-2;1)$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

* Cách diễn đạt thứ nhất:

Gọi G, G' theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, A'B'C'. Với mọi điểm T trong không gian có:

$(1): \overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{TA}-\overrightarrow{TA'}\right)+\left(\overrightarrow{TB}-\overrightarrow{TB'}\right)+\left(\overrightarrow{TC}-\overrightarrow{TC'}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{TA'}+\overrightarrow{TB'}+\overrightarrow{TC'} \qquad (2)$

Hệ thức (2) chứng tỏ . Nếu $T \equiv G$ tức là $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$ thì ta cũng có $\overrightarrow{TA'}+\overrightarrow{TB'}+\overrightarrow{TC'}=\vec{0}$ hay $T \equiv G'$ hay (1) là hệ thức cần và đủ để hai tam giác ABC, A'B'C' có cùng trọng tâm.

Ta có tọa độ của G là: $G=\left(\frac{3+0+0}{3};\frac{1-1+0}{3};\frac{0+0-6}{3}\right)=(1;0;-2)$

Đó cũng là tọa độ trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$

* Cách diễn đạt thứ hai:

Ta có: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

(1)

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{C'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}\right)+3\overrightarrow{G'G}=\vec{0}$ (2)

Nếu G, G' theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, A'B'C' nghĩa là

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}$ thì $(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{G'G}=\vec{0} \Leftrightarrow G' \equiv G$

Tóm lại (1) là hệ thức cần và đủ để hai tam giác ABC, A'B'C' có cùng trọng tâm.

Ta có tọa độ của G là: $G=\left(\frac{3+0+0}{3};\frac{1-1+0}{3};\frac{0+0-6}{3}\right)=(1;0;-2)$. Đó cũng là tọa độ trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$

Câu 26: (AN LÃO)Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(-2;-2;1)$, $B(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ qua A, vuông góc với d đồng thời cách điểm B một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(2;1;6)$ B. $\vec{u}=(2;2;-1)$ C. $\vec{u}=(25;-29;-6)$ D. $\vec{u}=(1;0;2)$

Hướng dẫn giải

Cách 1 (Tự luận)

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d, B' là hình chiếu của B lên (P)

Khi đó đường thẳng Δ chính là đường thẳng AB' và $\vec{u}=\overrightarrow{B'A}$

Ta có $(P):\begin{cases}\text{Qua } A(-2;-2;1)\\ \text{VTPT } \overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)\end{cases} \Rightarrow (P): 2x+2y-z+9=0$

Gọi d' là đường thẳng qua B và song song d' $\Rightarrow d'\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+2t\\ z=-3-t\end{cases}$

B' là giao điểm của d' và (P) $\Rightarrow B'(-3;-2;-1) \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{B'A} = (1;0;2) \Rightarrow$ ***Chọn D***

Cách 2: Không cần viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d.

Gọi d' là đường thẳng qua B và song song d' $\Rightarrow d'\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+2t \\ z = -3-t \end{cases}$

B'$\in$ d'$\Rightarrow \overrightarrow{B'A} = \left(-2t-3;-2t-4;t+4\right)$

AB'$\perp$ d $\Rightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{B'A} = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{B'A} = (1;0;2) \Rightarrow$ ***Chọn D***

Câu 27: (AN LÃO)Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d.

<u>A.</u> $(P): x+2y+5z-4=0.$ B. $(P): x+2y+5z-5=0.$

C. $(P): x+2y-z-4=0.$ D. $(P): 2x-y-3=0.$

Hướng dẫn giải

Cách 1 (Tự luận)

Đường thẳng d qua M(2;1;0) và có VTCP $\overrightarrow{u_d} = (1;2;-1)$

Ta có: AB$\perp$ d và AB$\perp$ Oz nên AB có VTCP là: $\overrightarrow{u_{AB}} = \left[\overrightarrow{u_d}, \vec{k}\right] = (2;-1;0)$

(P) chứa d và AB nên (P) đi qua M(2;1; 0), có VTPT là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_{AB}}\right] = (1;2;5)$

$\Rightarrow (P): x+2y+5z-4=0 \Rightarrow$ ***Chọn A***

Cách 2: Dùng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Đường thẳng d qua 2 điểm M(2;1;0) và N(3;3;-1)

Giả sử mp(P) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)

$\Rightarrow (P): \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

AB$\perp$ d $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Rightarrow a = 2b$ (1)

(P) chứa d nên d cũng đi qua M, N $\Rightarrow \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ (2), $\dfrac{3}{a} + \dfrac{3}{b} + \dfrac{-1}{c} = 1$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ a = 4, b = 2, c = $\dfrac{4}{5}$ $\Rightarrow (P): x+2y+5z-4=0 \Rightarrow$ ***Chọn A***

Câu 28: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;0;0), N(m,n,0), P(0;0;p)$. Biết $MN=\sqrt{13}, \widehat{MON}=60^0$, thể tích tứ diện $OMNP$ bằng 3. Giá trị của biểu thức $A=m+2n^2+p^2$ bằng

A. 29.
B. 27.
C. 28.
D. 30.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{OM}=(3;0;0), \overrightarrow{ON}=(m;n;0) \Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=3m$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|\cos 60^0 \Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}=\dfrac{1}{2}$

$MN=\sqrt{(m-3)^2+n^2}=\sqrt{13}$

Suy ra $m=2; n=\pm 2\sqrt{3}$

$\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right].\overrightarrow{OP}=6\sqrt{3}p \Rightarrow V=\dfrac{1}{6}\left|6\sqrt{3}p\right|=3 \Rightarrow p=\pm\sqrt{3}$

Vậy $A=2+2.12+3=29.$

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$ bằng:

A. $5\sqrt{10}$.
B. $6\sqrt{10}$.
C. $10\sqrt{6}$.
D. $10\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có trung điểm BD là $I(-1;-2;4)$, $BD=12$ và điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $A(a;b;0)$.

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} AB^2=AD^2 \\ AI^2=\left(\dfrac{1}{2}BD\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2+b^2+8^2=(a+5)^2+(b+4)^2 \\ (a+1)^2+(b+2)^2+4^2=36 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-2a \\ (a+1)^2+(6-2a)^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=\dfrac{17}{5} \\ b=\dfrac{-14}{5} \end{cases} \Rightarrow$ A(1; 2; 0) hoặc $A\left(\dfrac{17}{5};\dfrac{-14}{5};0\right)$ (loại).

Với $A(1;2;0) \Rightarrow C(-3;-6;8)$.

Câu 30: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1), B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$ $D(2;2;-1)$. Biết $M(x;y;z)$, để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 7.
B. 8.
C. 9.
D. 6.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của $ABCD$ ta có: $G\left(\frac{7}{3};\frac{14}{3};0\right)$.

Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

$\ge GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$. Dấu bằng xảy ra khi $M\equiv G\left(\frac{7}{3};\frac{14}{3};0\right)\Rightarrow x+y+z=7$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2;2;6),B(-3;1;8),C(-1;0;7),D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD, $SH\perp(ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1,S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

A. $I(0;-1;-3)$. **B.** $I(1;0;3)$ **C.** $I(0;1;3)$. **D.** $I(-1;0;-3)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;2),\overrightarrow{AC}=(1;-2;1)\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{DC}=(-2;-2;4),\overrightarrow{AB}=(-1;-1;2)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=2.\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow ABCD$ là hình thang và $S_{ABCD}=3S_{ABC}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Vì $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}\Rightarrow SH=3\sqrt{3}$

Lại có H là trung điểm của $CD\Rightarrow H(0;1;5)$

Gọi $S(a;b;c)\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(-a;1-b;5-c)\Rightarrow\overrightarrow{SH}=k\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=k(3;3;3)=(3k;3k;3k)$

Suy ra $3\sqrt{3}=\sqrt{9k^2+9k^2+9k^2}\Rightarrow k=\pm1$

+) Với $k=1\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(3;3;3)\Rightarrow S(-3;-2;2)$

+) Với $k=-1\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(-3;-3;-3)\Rightarrow S(3;4;8)$

Suy ra $I(0;1;3)$

Câu 32: Cho điểm $I(1;7;5)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z}{3}$. Phương trình mặt cầu có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác diện tích tam giác IAB bằng $2\sqrt{6015}$ là:

A. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2018$. **B.** $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2017$.

C. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2016$. **D.** $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2019$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của $I(1;7;5)$ trên $d\Rightarrow H(0;0;-4)\Rightarrow IH=d(I;d)=2\sqrt{3}$

$S_{\Delta AIB}=\frac{IH.AB}{2}\Rightarrow AB=\frac{2S_{\Delta AIB}}{IH}=\sqrt{8020}\Rightarrow R^2=IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=2017$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2017$.

Lựa chọn đáp án **B.**

Câu 33: Cho điểm $I(0;0;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+t\\ y=2t\\ z=2+t\end{cases}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm $A,\ B$ sao cho tam giác IAB vuông là:

A. $x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{3}{2}$.

B. $x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{8}{3}$.

C. $x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{2}{3}$.

D. $x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

• Gọi $H(-1+t;2t;2+t)\in d$ là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d $\Rightarrow \overrightarrow{IH}=(-1+t;2t;-1+t)$

• Ta có vectơ chỉ phương của d : $\overrightarrow{a_d}=(1;2;1)$ và $IH\perp d$

$\Rightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{a_d}=0\Leftrightarrow -1+t+4t-1+t=0\Leftrightarrow -2+6t=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow H\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{3}\right)$

$\Rightarrow IH=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

• Vì tam giác IAB vuông tại I và $IA=IB=R$. Suy ra tam giác IAB vuông cân tại I, do đó bán kính:

$R=IA=AB\cos 45^0=2IH.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}IH=\sqrt{2}.\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

• Vậy phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{8}{3}$.

Lựa chọn đáp án **B.**

Câu 34: Cho điểm $A(2;5;1)$ và mặt phẳng $(P):6x+3y-2z+24=0$, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P). Phương trình mặt cầu (S) có diện tích 784π và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H, sao cho điểm A nằm trong mặt cầu là:

A. $(x-8)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=196$.

B. $(x+8)^2+(y+8)^2+(z-1)^2=196$.

C. $(x+16)^2+(y+4)^2+(z-7)^2=196$.

D. $(x-16)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=196$.

Hướng dẫn giải

• Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Suy ra $d:\begin{cases}x=2+6t\\ y=5+3t\\ z=1-2t\end{cases}$

• Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) nên $H=d\cap(P)$.

Vì $H\in d$ nên $H(2+6t;5+3t;1-2t)$.

• Mặt khác, $H\in(P)$ nên ta có: $6(2+6t)+3(5+3t)-2(1-2t)+24=0\Leftrightarrow t=-1$

Do đó, $H(-4;2;3)$.

• Gọi I,R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu.

Theo giả thiết diện tích mặt cầu bằng 784π, suy ra $4\pi R^2=784\pi \Rightarrow R=14$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H nên $IH\perp(P)\Rightarrow I\in d$.

Do đó tọa độ điểm I có dạng $I(2+6t;5+3t;1-2t)$, với $t\neq -1$.

• Theo giả thiết, tọa độ điểm I thỏa mãn:

$$\begin{cases} d(I,(P))=14 \\ AI<14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|6(2+6t)+3(5+3t)-2(1-2t)+24|}{\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}}=14 \\ \sqrt{(6t)^2+(3t)^2+(-2t)^2}<14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right. \\ -2<t<2 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$$

Do đó: $I(8;8;-1)$.

• Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-8)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=196$.

Lựa chọn đáp án **A.**

Câu 35: Cho mặt phẳng $(P):x-2y-2z+10=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$, $\Delta_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{4}$. Mặt cầu (S) có tâm thuộc Δ_1, tiếp xúc với Δ_2 và mặt phẳng (P), có phương trình:

A. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ hoặc $\left(x-\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4}$.

B. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ hoặc $\left(x+\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4}$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$.

D. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3$.

Hướng dẫn giải

• $\Delta_1:\begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$; Δ_2 đi qua điểm $A(2;0;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a_2}=(1;1;4)$.

• Giả sử $I(2+t;t;1-t)\in\Delta_1$ là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S).

• Ta có: $\overrightarrow{AI}=(t;t;4-t) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AI},\vec{a_2}\right]=(5t-4;4-5t;0) \Rightarrow d(I;\Delta_2)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\vec{a_2}\right]\right|}{\left|\vec{a_2}\right|}=\dfrac{|5t-4|}{3}$

$$d(I,(P))=\frac{|2+t-2t-2(1-t)+10|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|t+10|}{3}.$$

• (S) tiếp xúc với Δ_2 và $(P)\Leftrightarrow d(I,\Delta_2)=d(I,(P))\Leftrightarrow |5t-4|=|t+10|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{7}{2} \\ t=-1 \end{array}\right.$.

• Với $t=\dfrac{7}{2}\Rightarrow I\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{7}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$, $R=\dfrac{9}{2}\Rightarrow(S):\left(x-\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4}$.

• Với $t=-1 \Rightarrow I(1;-1;2), R=3 \Rightarrow (S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$.

Lựa chọn đáp án **A.**

Câu 36: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho $(P):x+4y-2z-6=0$,$(Q):x-2y+4z-6=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x+y+z+6=0$. **B.** $x+y+z-6=0$. **C.** $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn $M(6;0;0), N(2;2;2)$ thuộc giao tuyến của $(P),(Q)$

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (α) với các trục Ox, Oy, Oz

$\Rightarrow (\alpha): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 (a,b,c \neq 0)$

(α) chứa $M, N \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{a}=1 \\ \frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}=1 \end{cases}$

Hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow OA=OB=OC \Rightarrow |a|=|b|=|c|$

Vây phương trình $x+y+z-6=0$.

Câu 37: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$,cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1;1;1), B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0), D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' thỏa : $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất ?

A. $16x+40y-44z+39=0$. **B.** $16x+40y+44z-39=0$.

C. $16x-40y-44z+39=0$. **D.** $16x-40y-44z-39=0$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có : $4=\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'} \geq 3\sqrt[3]{\frac{AB.AC.AD}{AB'.AC'.AD'}}$

$\Rightarrow \frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow \frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}}=\frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow V_{AB'C'D'} \geq \frac{27}{64}V_{ABCD}$

Để $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{AD'}{AD}=\frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$

Lúc đó mặt phẳng $(B'C'D')$ song song với mặt phẳng (BCD) và đi qua $B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$

$\Rightarrow (B'C'D'): 16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

Câu 38: Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục *Ox, Oy, Oz* lần lượt tại A, B, C (khác gốc toạ độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) có phương trình là:

A. $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$.

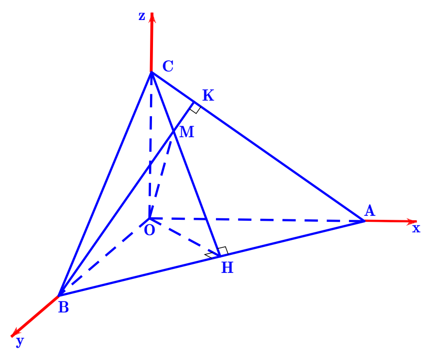
C. $3x + 2y + z - 10 = 0$.

D. $x + 2y + 3z + 14 = 0$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, K là hình chiếu vuông góc B trên AC. M là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $M = BK \cap CH$

Ta có : $\left.\begin{matrix} AB \perp CH \\ AB \perp CO \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (COH) \Rightarrow AB \perp OM$ (1) (1)



Chứng minh tương tự, ta có: $AC \perp OM$ (2).

Từ (1) và (2), ta có: $OM \perp (ABC)$

Ta có: $\overrightarrow{OM}(1;2;3)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có một *VTPT* là $\overrightarrow{OM}(1;2;3)$ nên có phương trình là: $(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Cách 2:

+) Do A, B, C lần lượt thuộc các trục Ox, Oy, Oz nên $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ ($a, b, c \neq 0$).

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

+) Do M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ M \in (ABC) \end{cases}$. Giải hệ điều kiện trên ta được a, b, c

Vậy phương trình mặt phẳng: $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Câu 39: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $N(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

A. $(P): x + y + z - 3 = 0$.

B. $(P): x + y - z + 1 = 0$.

C. $(P): x - y - z + 1 = 0$.

D. $(P): x + 2y + z - 4 = 0$.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox, Oy, Oz

$\Rightarrow (P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 (a,b,c\neq 0)$

Ta có: $\begin{cases} N\in(P) \\ NA=NB \\ NA=NC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \\ |a-1|=|b-1| \\ |a-1|=|c-1| \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=3 \Rightarrow x+y+z-3=0$

Câu 40: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$, $d_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (α) cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $7x-2y-4z=0$.

B. $7x-2y-4z+3=0$.

C. $2x+y+3z+3=0$.

D. $14x-4y-8z+3=0$.

Hướng dẫn giải

Ta có d_1 đi qua $A(2;2;3)$ và có $\overrightarrow{u_{d_1}}=(2;1;3)$, d_2 đi qua $B(1;2;1)$ và có $\overrightarrow{u_{d_2}}=(2;-1;4)$

$\overrightarrow{AB}=(-1;1;-2); \left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]=(7;-2;-4)$;

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]\overrightarrow{AB}=-1\neq 0$ nên d_1, d_2 chéo nhau.

Do (α) cách đều d_1, d_2 nên (α) song song với $d_1, d_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]=(7;-2;-4)$

$\Rightarrow (\alpha)$ có dạng $7x-2y-4z+d=0$

Theo giả thiết thì $d(A,(\alpha))=d(B,(\alpha)) \Leftrightarrow \dfrac{|d-2|}{\sqrt{69}}=\dfrac{|d-1|}{\sqrt{69}} \Leftrightarrow d=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow (\alpha): 14x-4y-8z+3=0$

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua $A(3;-1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(P): x-y+z-5=0$, đồng thời tạo với $\Delta: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$ một góc 45^0. Phương trình đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=-1-15t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = 1 - 15t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = 1 - 15t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta} = (1;2;2)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = (a;b;c)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (1;-1;1)$

$d \subset (P) \Rightarrow \overrightarrow{a_d} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow b = a + c;\ (1)$

$(\Delta, d) = 45^0 \Leftrightarrow \cos(\Delta, d) = \cos 45^0$

$$\Leftrightarrow \frac{|a + 2b + 2c|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a + 2b + 2c)^2 = 9(a^2 + b^2 + c^2);\ (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $14c^2 + 30ac = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ 15a + 7c = 0 \end{array}\right.$

Với $c = 0$, chọn $a = b = 1$, phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$

Với $15a + 7c = 0$, chọn $a = 7 \Rightarrow c = -15; b = -8$, phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = 1 - 15t \end{cases}$

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với $(P): 2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là.

A. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z-2}{7}$.

B. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z+2}{7}$.

C. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{7}$.

D. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z-2}{-7}$.

Hướng dẫn giải

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta} = (1;-2;2)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = (a;b;c)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (2;-1;-1)$

Vì $d // (P)$ nên $\overrightarrow{a_d} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_d}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Leftrightarrow 2a - b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a - b$

$$\cos(\Delta, d) = \frac{|5a - 4b|}{3\sqrt{5a^2 - 4ab + 2b^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5a - 4b)^2}{5a^2 - 4ab + 2b^2}}$$

Đặt $t = \dfrac{a}{b}$, ta có: $\cos(\Delta, d) = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{(5t - 4)^2}{5t^2 - 4t + 2}}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}$, ta suy ra được: $\max f(t)=f\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $\max\left[\cos(\Delta,d)\right]=\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{27}} \Leftrightarrow t=-\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{a}{b}=-\frac{1}{5}$

Chọn $a=1 \Rightarrow b=-5, c=7$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{7}$

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt $\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$, sao cho góc giữa d và $\Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{2}$ là nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$. B. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-2}$. C. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{-2}$. D. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M=d\cap\Delta_1 \Rightarrow M(1+2t;2+t;-2-t)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{AM}=(2t+2;t+2;-1-t)$

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2}=(-1;2;2)$

$\cos(d;\Delta_2)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{t^2}{6t^2+14t+9}}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2}{6t^2+14t+9}$, ta suy ra được $\min f(t)=f(0)=0 \Leftrightarrow t=0$

Do đó $\min\left[\cos(\Delta,d)\right]=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(2;2-1)$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và $d_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P): x+y+z-7=0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A,B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là.

A. $\begin{cases} x=12-t \\ y=5 \\ z=-9+t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=6-t \\ y=\frac{5}{2} \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=6 \\ y=\frac{5}{2}-t \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=6-2t \\ y=\frac{5}{2}+t \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

$A\in d_1 \Rightarrow A(1+2a;a;-2-a)$

$B\in d_2 \Rightarrow B(1+b;-2+3b;2-2b)$

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(b-2a;3b-a-2;-2b+a+4)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$

Vì $\Delta//(P)$ nên $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}=0\Leftrightarrow b=a-1$.Khi đó $\overrightarrow{AB}=(-a-1;2a-5;6-a)$

$$AB=\sqrt{(-a-1)^2+(2a-5)^2+(6-a)^2}$$
$$=\sqrt{6a^2-30a+62}$$
$$=\sqrt{6\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}\geq\frac{7\sqrt{2}}{2};\forall a\in\mathbb{R}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=\frac{5}{2}\Rightarrow A\left(6;\frac{5}{2};-\frac{9}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{7}{2};0;\frac{7}{2}\right)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A\left(6;\frac{5}{2};-\frac{9}{2}\right)$ và vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-1;0;1)$

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases}x=6-t\\ y=\frac{5}{2}\\ z=-\frac{9}{2}+t\end{cases}$

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$ và $d_2:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=1+t\\ z=3\end{cases}$. Phương trình đường thẳng vuông góc với $(P):7x+y-4z=0$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $\frac{x-7}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{1}$.

B. $\frac{x-2}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-4}$.

C. $\frac{x+2}{-7}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{4}$.

D. $\frac{x-2}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Gọi d là đường thẳng cần tìm

Gọi $A=d\cap d_1, B=d\cap d_2$

$$A\in d_1\Rightarrow A(2a;1-a;-2+a)$$
$$B\in d_2\Rightarrow B(-1+2b;1+b;3)$$
$$\overrightarrow{AB}=(-2a+2b-1;a+b;-a+5)$$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(7;1;-4)$

$d\perp(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_p}$ cùng phương

$\Leftrightarrow$ có một số k thỏa $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{n_p}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+2b-1=7k\\a+b=k\\-a+5=-4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+2b-7k=1\\a+b-k=0\\-a+4k=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\k=-1\end{cases}$$

d đi qua điểm $A(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{n_P}=(7;1-4)$

Vậy phương trình của d là $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-4}$

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $\Delta_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{3}$. Phương trình đường thẳng song song với $d:\begin{cases}x=3\\y=-1+t\\z=4+t\end{cases}$ và cắt hai đường thẳng $\Delta_1;\Delta_2$ là:

A. $\begin{cases}x=2\\y=3-t\\z=3-t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=-2\\y=-3-t\\z=-3-t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=-2\\y=-3+t\\z=-3+t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=2\\y=-3+t\\z=3+t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm

Gọi $A=\Delta\cap\Delta_1, B=\Delta\cap\Delta_2$

$A\in\Delta_1\Rightarrow A(-1+3a;2+a;1+2a)$

$B\in\Delta_2\Rightarrow B(1+b;2b;-1+3b)$

$\overrightarrow{AB}=(-3a+b+2;-a+2b-2;-2a+3b-2)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(0;1;1)$

$\Delta//d\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{a_d}$ cùng phương

$\Leftrightarrow$ có một số k thỏa $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{a_d}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+b+2=0\\-a+2b-2=k\\-2a+3b-2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+b=-2\\-a+2b-k=2\\-2a+3b-k=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\k=-1\end{cases}$$

Ta có $A(2;3;3);B(2;2;2)$

Δ đi qua điểm $A(2;3;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(0;-1;-1)$

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases}x=2\\y=3-t\\z=3-t\end{cases}$

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$, và mặt thẳng $(P):3x+5y-z-2=0$. Gọi d' là hình chiếu của d lên (P). Phương trình tham số của d' là

A. $\begin{cases}x=-62t\\y=25t\\z=2-61t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=2+61t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=-2+61t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=2+61t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Gọi $A=d\cap(P)$

$A\in d\Rightarrow A(12+4a;9+3a;1+a)$

$A\in(P)\Rightarrow a=-3\Rightarrow A(0;0;-2)$

d đi qua điểm $B(12;9;1)$

Gọi H là hình chiếu của B lên (P)

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

BH đi qua $B(12;9;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{BH}}=\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

$BH:\begin{cases}x=12+3t\\y=9+5t\\z=1-t\end{cases}$

$H\in BH\Rightarrow H(12+3t;9+5t;1-t)$

$H\in(P)\Rightarrow t=-\dfrac{78}{35}\Rightarrow H\left(\dfrac{186}{35};-\dfrac{15}{7};\dfrac{113}{35}\right)$

$\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{186}{35};-\dfrac{15}{7};\dfrac{183}{35}\right)$

d' đi qua $A(0;0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{d'}}=(62;-25;61)$

Vậy phương trình tham số của d' là $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=-2+61t\end{cases}$

Cách 2:

- Gọi (Q) qua d và vuông góc với (P)

  d đi qua điểm $B(12;9;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(4;3;1)$

  (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

  (Q) qua $B(12;9;1)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(-8;7;11)$

  $(Q):8x-7y-11z-22=0$

- d' là giao tuyến của (Q) và (P)

Tìm một điểm thuộc d', bằng cách cho $y=0$

Ta có hệ $\begin{cases}3x-z=2\\8x-11z=22\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}\Rightarrow M(0;0;-2)\in d'$

d' đi qua điểm $M(0;0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(62;-25;61)$

Vậy phương trình tham số của d' là $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=-2+61t\end{cases}$

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+4t\\z=3+t\end{cases}$. Hình chiếu song song của d lên mặt phẳng (Oxz) theo phương $\Delta:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=3+2t\\y=0\\z=1-4t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=3+t\\y=0\\z=1+2t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=-1-2t\\y=0\\z=5-4t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=3-2t\\y=0\\z=1+t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Giao điểm của d và mặt phẳng (Oxz) là : $M_0(5;0;5)$.

Trên $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+4t\\z=3+t\end{cases}$ chọn M bất kỳ không trùng với $M_0(5;0;5)$; ví dụ: $M(1;-2;3)$. Gọi A là hình chiếu song song của M lên mặt phẳng (Oxz) theo phương $\Delta:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

+/ Lập phương trình d' đi qua M và song song hoặc trùng với $\Delta:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

+/ Điểm A chính là giao điểm của d' và (Oxz)

+/ Ta tìm được $A(3;0;1)$

Hình chiếu song song của $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+4t\\z=3+t\end{cases}$ lên mặt phẳng (Oxz) theo phương $\Delta:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ là đường thẳng đi qua $M_0(5;0;5)$ và $A(3;0;1)$.

Vậy phương trình là: $\begin{cases}x=3+t\\y=0\\z=1+2t\end{cases}$

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(3;0;2)$ và mặt cầu $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất là:

A. $x-4y-5z+17=0$.

B. $3x-2y+z-7=0$.

C. $x-4y+5z-13=0$.

D. $3x+2y+z-11=0$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$, bán kính $R=5$. Do $IA=\sqrt{17}<\mathrm{R}$ nên AB luôn cắt (S). Do đó (α) luôn cắt (S) theo đường tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{R^2-\left(d\left(I,(\alpha)\right)\right)^2}$. Để bán kính r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)$ lớn nhất.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mp(ABC).

Ta có $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1;-1;-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2;-3;-2)$ suy ra (ABC) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;4;-5)$

(α) có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(-9-6;-3)=-3(3;2;1)$

Phương trình $(\alpha):3(x-2)+2(y-1)+1(z-3)=0\Leftrightarrow 3x+2y+z-11=0$.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(\mathrm{x}-2)^2+(\mathrm{y}-3)^2+(\mathrm{z}-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B. Để độ dài AB lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là:

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

B. $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$.

C. $\begin{cases}x=-3+5t\\y=3\\z=-3+8t\end{cases}$.

D. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$. Do $d(\mathrm{I},(\alpha))<\mathrm{R}$ nên Δ luôn cắt (S) tại A, B.

Khi đó $AB=\sqrt{R^2-\left(d(\mathrm{I},\Delta)\right)^2}$. Do đó, AB lớn nhất thì $d\left(I,(\Delta)\right)$ nhỏ nhất nên Δ qua H, với H là hình chiếu vuông góc của I lên (α). Phương trình $BH:\begin{cases}\mathrm{x}=2+2\mathrm{t}\\\mathrm{y}=3-2t\\\mathrm{z}=5+\mathrm{t}\end{cases}$

$H\in(\alpha)\Rightarrow 2(2+2t)-2(3-2t)+5+t+15=0\Leftrightarrow \mathrm{t}=-2\Rightarrow H(-2;\ 7;\ 3)$.

Do vậy $\overrightarrow{AH}=(1;4;6)$ là véc tơ chỉ phương của Δ. Phương trình của $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$. Tọa độ điểm M nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $M\left(-\dfrac{11}{3};\dfrac{14}{3};\dfrac{13}{3}\right)$.

B. $M\left(\dfrac{29}{3};-\dfrac{26}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$.

C. $M\left(-\dfrac{29}{3};\dfrac{26}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$.

D. $M\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{14}{3};-\dfrac{13}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;1)$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) : $d(I;(P))=6<R$ nên (P) cắt (S).

Khoảng cách từ M thuộc (S) đến (P) lớn nhất $\Rightarrow M\in(d)$ đi qua I và vuông góc với (P)

Phương trình $(d):\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2-2t\\ z=1-t\end{cases}$.

Ta có : $M\in(d)\Rightarrow M(3+2t;-2-2t;1-t)$

Mà : $M\in(S)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{10}{3}\Rightarrow M_1\left(\dfrac{29}{3};-\dfrac{26}{3};-\dfrac{7}{3}\right)\\ t=-\dfrac{10}{3}\Rightarrow M_2\left(-\dfrac{11}{3};\dfrac{14}{3};\dfrac{13}{3}\right)\end{array}\right.$

Thử lại ta thấy : $d(M_1,(P))>d(M_2,(P))$ nên $M\left(-\dfrac{11}{3};\dfrac{14}{3};\dfrac{13}{3}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc của hệ trục tọa độ, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ $(a>0,b>0)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Giá trị của tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là:

A. $\dfrac{1}{3}$.

B. $\dfrac{1}{2}$.

C. -1.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow C(a;a;0)\Rightarrow C'(a;a;b)\Rightarrow M\left(a;a;\dfrac{b}{2}\right)$

Cách 1.

Ta có $\overrightarrow{MB}=\left(0;-a;-\frac{b}{2}\right)$; $\overrightarrow{BD}=(-a;a;0)$ và $\overrightarrow{A'B}=(a;0;-b)$

Ta có $\vec{u}=\left[\overrightarrow{MB};\overrightarrow{BD}\right]=\left(\frac{ab}{2};\frac{ab}{2};-a^2\right)$ và $\left[\overrightarrow{BD};\overrightarrow{A'B}\right]=\left(-a^2;-a^2;-a^2\right)$

Chọn $\vec{v}=(1;1;1)$ là VTPT của $(A'BD)$

$(A'BD)\perp(MBD)\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow \frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}-a^2=0\Leftrightarrow a=b\Rightarrow \frac{a}{b}=1$

Cách 2.

$AB=AD=BC=CD=a\Rightarrow\begin{cases}A'B=A'D\\MB=MD\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A'X\perp BD\\MX\perp BD\end{cases}$ với X là trung điểm BD

$\Rightarrow\left[\widehat{(A'BD);(MBD)}\right]=\left(\widehat{A'X;MX}\right)$

$X\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$ là trung điểm BD

$\overrightarrow{A'X}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-b\right)$

$\overrightarrow{MX}=\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$

$(A'BD)\perp(MBD)\Rightarrow A'X\perp MX$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'X}.\overrightarrow{MX}=0$

$\Rightarrow -\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{b^2}{2}=0$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=1$

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z+4=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$. Giá trị của điểm M trên (S) sao cho $d(M,(P))$ đạt GTNN là:

A. $(1;1;3)$.

B. $\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

D. $(1;-2;1)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $d(M,(P)) = 3 > R = 2 \Rightarrow (P) \cap (S) = \varnothing$.

Đường thẳng *d* đi qua *I* và vuông góc với *(P)* có pt: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1+2t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của *d* và *(S)* là: $A\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

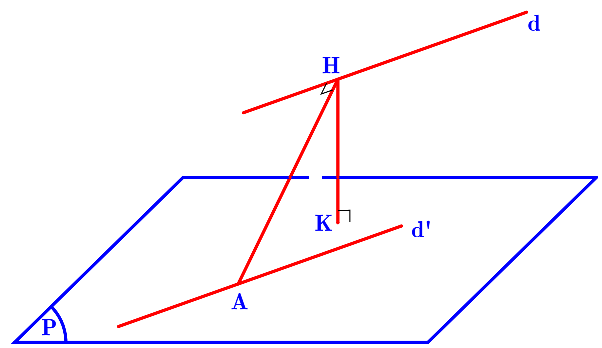
Ta có: $d(A,(P)) = 5 \geq d(B,(P)) = 1$. $\Rightarrow d(A,(P)) \geq d(M,(P)) \geq d(B,(P))$.

Vậy: $\Rightarrow d(M,(P))_{\min} = 1 \Leftrightarrow M \equiv B$.

Câu 54: Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz,* cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mp(P) là

A. $\frac{97\sqrt{3}}{15}$. B. $\frac{76\sqrt{790}}{790}$. C. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. D. $\frac{3\sqrt{29}}{29}$.

Hướng dẫn giải



(P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng d nên (P) chứa đường thẳng d' đi qua điểm A và song song với đường thẳng d.
Gọi H là hình chiếu của A trên d, K là hình chiếu của H trên (P).

Ta có $d(d,(P)) = HK \leq AH$ (AH không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d,(P))$ là AH

$\Rightarrow d(d,(P))$ lớn nhất khi AH vuông góc với (P).

Khi đó, nếu gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và d thì (P) vuông góc với (Q).

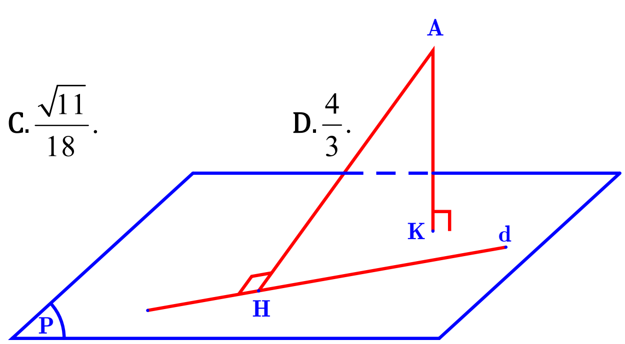
$\Rightarrow \vec{n}_P = \left[\vec{u}_d, \vec{n}_Q\right] = (98;14;-70)$

$\Rightarrow (P): 7x + y - 5z - 77 = 0 \Rightarrow d(M,(P)) = \frac{97\sqrt{3}}{15}$.

Câu 55: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\frac{11\sqrt{18}}{18}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{11}}{18}$. D. $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu của A trên d; K là hình chiếu của A trên (P).

Ta có $d\left(A,(P)\right)=AK\le AH$ (Không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d,(P))$ là AH

$\Longrightarrow d\left(A,(P)\right)$ lớn nhất khi $K\equiv H$.

Ta có $H(3;1;4)$, (P) qua H và $\perp AH$

$\Rightarrow (P): x-4y+z-3=0$

Vậy $d\left(M,(P)\right)=\dfrac{11\sqrt{18}}{18}$.

Câu 56: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ và hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=2+2t\end{cases}$; $d':\begin{cases}x=3-t'\\ y=1+t'\\ z=1-2t'\end{cases}$.

Biết rằng có 2 đường thẳng có các đặc điểm: song song với (P); cắt d,d' và tạo với d góc 30^{O}. Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. D. $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, $\overrightarrow{n_P}$ là VTPT của mặt phẳng (P).

Gọi $M(1+t;t;2+2t)$ là giao điểm của Δ và d; $M'(3-t';1+t';1-2t')$ là giao điểm của Δ và d'

Ta có: $\overrightarrow{MM'}(2-t'-t;1+t'-t;-1-2t'-2t)$

$MM' \,//\, (P)\Leftrightarrow\begin{cases}M\notin(P)\\ \overrightarrow{MM'}\perp\overrightarrow{n_P}\end{cases}\Leftrightarrow t'=-2\Rightarrow\overrightarrow{MM'}(4-t;-1-t;3-2t)$

Ta có $\cos 30^{O}=\cos\left(\overrightarrow{MM'},\vec{u}_d\right)\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{|-6t+9|}{\sqrt{36t^2-108t+156}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\ t=-1\end{array}\right.$

Vậy, có 2 đường thẳng thoả mãn là $\Delta_1:\begin{cases}x=5\\ y=4+t\\ z=10+t\end{cases}$; $\Delta_2:\begin{cases}x=t'\\ y=-1\\ z=t'\end{cases}$.

Khi đó, $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{1}{2}$.

Câu 57: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;1); B(3;-2;0); C(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến (P) lớn nhất biết rằng (P) không cắt đoạn BC. Khi đó, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $G(-2;0;3)$. B. $F(3;0;-2)$. C. $E(1;3;1)$. D. $H(0;3;1)$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm đoạn BC; các điểm B',C',I' lần lượt là hình chiếu của B,C,I trên (P).

Ta có tứ giác $BCC'B'$ là hình thang và II' là đường trung bình.

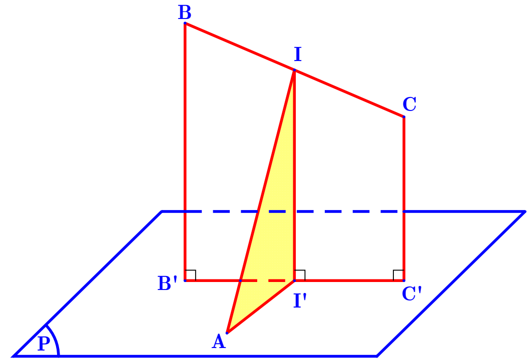
$\Rightarrow d(B,(P))+d(C,(P))=BB'+CC'=2II'$.

Mà $II'\le IA$ (với IA không đổi)

Do vậy, $d(B,(P))+d(C,(P))$ lớn nhất khi $I'\equiv A$

$\Rightarrow (P)$ đi qua A và vuông góc $\overrightarrow{IA}$ với $I(2;0;-1)$.

$\Rightarrow (P):-x+2z-1=0\Rightarrow E(1;3;1)\in(P)$.



Câu 58: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ trong đó b,c dương và mặt phẳng $(P):y-z+1=0$. Biết rằng $mp(ABC)$ vuông góc với $mp(P)$ và $d(O,(ABC))=\frac{1}{3}$, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $b+c=1$. B. $2b+c=1$. C. $b-3c=1$. D. $3b+c=3$.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình mp(ABC) là $\frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$(ABC)\perp(P)\Rightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0\Rightarrow b=c\,(1)$

Ta có $d(O,(ABC))=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=8\,(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow b+c=1$.

Câu 59: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3);B(0;1;1);C(1;0;-2)$. Điểm $M\in(P):x+y+z+2=0$ sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Khi đó, điểm M cách $(Q):2x-y-2z+3=0$ một khoảng bằng

A. $\frac{121}{54}$. B. 24. C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{101}{54}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x;y;z)$. Ta có $T=6x^2+6y^2+6z^2-8x-8y+6z+31$

$\Rightarrow T=6\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{145}{6}$

$\Rightarrow T=6MI^2+\frac{145}{6}$ với $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow T$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$\Rightarrow M\left(-\dfrac{5}{18};-\dfrac{5}{18};-\dfrac{13}{9}\right)$.

Câu 60: (***Đề minh họa L1)*** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;1;-1)$ và $D(3;1;4)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

A. 1. **B.** 4. **C.** 7. D. Có vô số mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

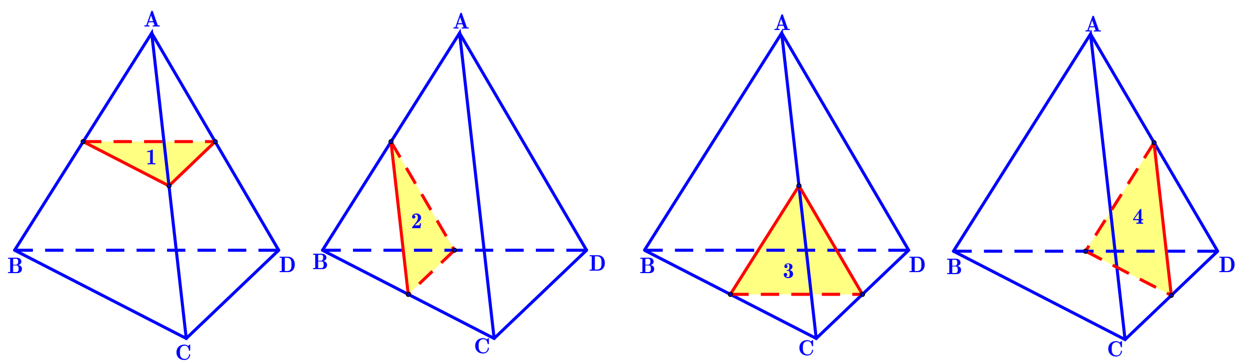
Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$; $\overrightarrow{AC}=(1;3;-1)$; $\overrightarrow{AD}=(2;3;4)$.

Suy ra: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-4;0;-4)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-24\neq 0$

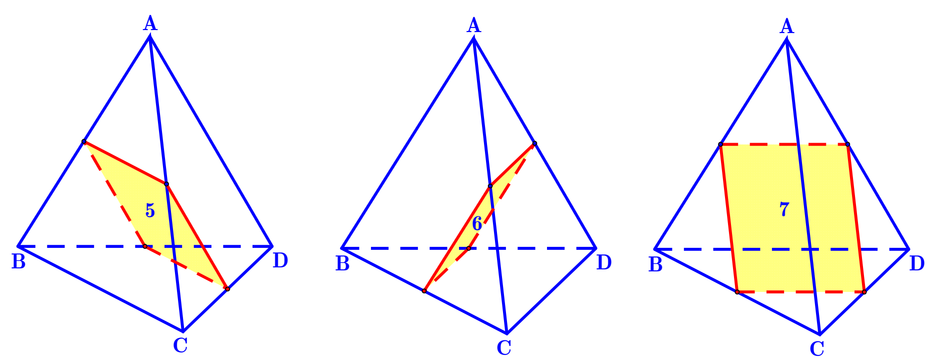
$\Rightarrow$ 4 điểm *A, B, C, D* không đồng phẳng.

Khi đó, mặt phẳng cách đều cả 4 điểm *A, B, C, D* sẽ có hai loại:

Loại 1: Có 1 điểm nằm khác phía với 3 điểm còn lại (đi qua các trung điểm của 3 cạnh chung đỉnh) $\Rightarrow$ có 4 mặt phẳng như thế).



Loại 2: Có 2 điểm nằm khác phía với 2 điểm còn lại (đi qua các trung điểm của 4 cạnh thuộc hai cặp cạnh chéo nhau) $\Rightarrow$ có 3 mặt phẳng như thế).



Vậy có tất cả 7 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 61: (***Đề minh họa L1***)Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

B. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

D. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Hướng dẫn giải

Do Δ cắt d nên tồn tại giao điểm giữa chúng. Gọi $B=\Delta\cap d\Leftrightarrow\begin{cases}B\in\Delta\\B\in d\end{cases}$.

Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=t+1\\y=t\\z=t-1\end{cases},t\in\mathbb{R}$. Do $B\in d$, suy ra $B(t+1;t;t-1)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(t;t;2t-3)$

Do $A,B\in\Delta$ nên $\overrightarrow{AB}$ là vectơ chỉ phương của Δ.

Theo đề bài, Δ vuông góc d nên $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$ ($\vec{u}=(1;1;2)$ là vector chỉ phương của d). Suy ra $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$. Giải được $t=1\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$. Vậy $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 62: (***Đề thử nghiệm 2017)*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;\ 6;\ 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{BM}$.

A. $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$.
B. $\dfrac{AM}{BM}=2$.
C. $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{3}$.
D. $\dfrac{AM}{BM}=3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $M\in(Oxz)\Rightarrow M(x;0;z)$; $\overrightarrow{AB}=(7;3;1)\Rightarrow AB=\sqrt{59}$; $\overrightarrow{AM}=(x+2;-3;z-1)$ và

Ta có: A,B,M thẳng hàng $\Rightarrow\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}\quad(k\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=7k\\-3=3k\\z-1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-9\\-1=k\\z=0\end{cases}\Rightarrow M(-9;0;0)$.

và $\overrightarrow{BM}=(-14;-6;-2)\quad\Rightarrow BM=\sqrt{118}=2AB.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 63: (***Đề thử nghiệm 2017)*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

A. $(P):2x-2z+1=0$.
B. $(P):2y-2z+1=0$.
C. $(P):2x-2y+1=0$.
D. $(P):2y-2z-1=0$.

Hướng dẫn giải

Ta có: d_1 đi qua điểm $A(2;0;0)$ và có VTCP $\vec{u}_1=(-1;1;1)$.

và d_2 đi qua điểm $B(0;1;2)$ và có VTCP $\vec{u}_2=(2;-1;-1)$. Vì (P) song songvới hai đường thẳng d_1 và d_2 nên VTPT của (P) là $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(0;1;-1)$

Khi đó (P) có dạng $y-z+D=0 \Rightarrow$ loại đáp án A và C.

Lại có (P) cách đều d_1 và d_2 nên (P) đi qua trung điểm $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ của AB. Do đó $(P): 2y-2z+1=0$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 64: (***Tạp chí THTT Lần 5***) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và cách M một khoảng lớn nhất.

A. $x+2y-z=0$. B. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-1}=1$. C. $x-y-z=0$. D. $x+y+z-2=0$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của M trên (P) $\Rightarrow \Delta MHO$ vuông tại H $\Rightarrow MH \le MO$

$\Rightarrow MH_{\max} = MO$. Khi đó (P) đi qua M và vuông góc với MO $\Rightarrow \overrightarrow{MO}(1;2;-1)$ là vecto pháp tuyến của $(P) \Rightarrow$ phương trình của mặt phẳng (P) là $1(x-0)+2(y-0)-1(z-0)=0$

hay $x+2y-z=0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 65: (***THPT Hai Bà Trưng Lần 1***) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-2), B(3;-1;-4), C(-2;2;0)$. Tìm điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1. Khi đó có tọa độ điểm D thỏa mãn bài toán là:

A. $D(0;3;-1)$. B. $D(0;-3;-1)$. C. $D(0;1;-1)$. D. $D(0;2;-1)$.

Hướng dẫn giải

Vì $D\in(Oyz) \Rightarrow D(0;b;c)$, do cao độ âm nên $c<0$.

Khoảng cách từ $D(0;b;c)$ đến mặt phẳng $(Oxy): z=0$ bằng 1 $\Leftrightarrow \frac{|c|}{1}=1 \Rightarrow c=-1$ (do $c<0$).

Suy ra tọa độ $D(0;b;-1)$. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-4;2;2)$; $\overrightarrow{AD}=(-2;b;1)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(2;6;-2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].AD=-4+6b-2=6b-6=6(b-1)$

$\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].AD\right|=|b-1|$

Mà $V_{ABCD}=2 \Leftrightarrow |b-1|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D(0;3;-1) \\ D(0;-1;-1) \end{array}\right.$. Chọn đáp án $D(0;3;-1)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 66: (***THPT Hai Bà Trưng Lần 1***) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H\left(1;2;3\right)$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua điểm H, cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Phương trình của mặt phẳng $\left(P\right)$ là

A. $(P): 3x+y+2z-11=0.$ B. $(P): 3x+2y+z-10=0.$

C. $(P): x+3y+2z-13=0.$ D. $(P): x+2y+3z-14=0.$

Hướng dẫn giải

Do tứ diện $OABC$ có ba cạnh $OA,\ OB,\ OC$ đôi một vuông góc nên nếu H là trực tâm của tam giác ABC dễ dàng chứng minh được $OH\perp\left(ABC\right)$ hay $OH\perp\left(P\right)$.

Vậy mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua điểm $H\left(1;2;3\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OH}\left(1;2;3\right)$ nên phương trình $\left(P\right)$ là $\left(x-1\right)+2\left(y-2\right)+3\left(z-3\right)=0\Leftrightarrow x+2y+3z-14=0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 67: (***THPT Chuyên ĐHKH Huế Lần 1***) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A\left(0;0;4\right)$, điểm M nằm trên mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ và $M\neq O$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của O lên AM và E là trung điểm của OM. Biết đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

A. $R=2$. B. $R=1$. C. $R=4$. D. $R=\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có tam giác OAM luôn vuông tại O. Gọi I là trung điểm của OA (Điểm I cố định).

Ta có tam giác ADO vuông tại D có ID là đường trung tuyến nên $ID=\dfrac{1}{2}OA=2$ $\left(1\right)$

Ta có IE là đường trung bình của tam giác OAM nên IE song song với AM mà $OD\perp AM\Rightarrow OD\perp IE$ Mặt khác tam giác EOD cân tại E. Từ đó suy ra IE là đường trung trực của OD

Nên $\widehat{DOE}=\widehat{ODE};\widehat{IOD}=\widehat{IDO}\Rightarrow\widehat{IDE}=\widehat{IOE}=90^\circ\Rightarrow ID\perp DE$ $\left(2\right)$

Vậy DE luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm I bán kính $R=\dfrac{OA}{2}=2$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 68: (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A\left(0;0;4\right)$, điểm M nằm trên mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ và $M\neq O$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của O lên AM và E là trung điểm của OM. Biết đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

A. $R=2$. B. $R=1$. C. $R=4$. D. $R=\sqrt{2}$.

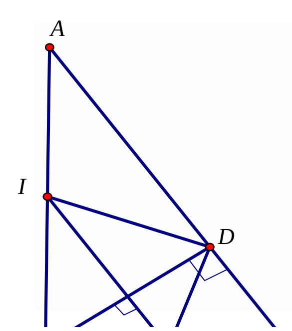
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có tam giác OAM luôn vuông tại O.

Gọi I là trung điểm của OA (Điểm I cố định)

Ta có tam giác ADO vuông tại D có ID là đường trung tuyến nên $ID=\dfrac{1}{2}OA=2$ $\left(1\right)$



Ta có IE là đường trung bình của tam giác OAM
nên IE song song với AM mà $OD \perp AM \Rightarrow OD \perp IE$
Mặt khác tam giác EOD cân tại E. Từ đó suy ra
IE là đường trung trực của OD
Nên $\widehat{DOE} = \widehat{ODE}; \widehat{IOD} = \widehat{IDO} \Rightarrow \widehat{IDE} = \widehat{IOE} = 90° \Rightarrow ID \perp DE$ (2)

Vậy DE luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm I bán kính $R = \frac{OA}{2} = 2$

Câu 69: (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Lúc đó

A. $m.n=2$. B. $m.n=-2$. C. $m.n=4$. D. $m.n=-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng (P) qua A có dạng

$a(x-0)+b(y-8)+c(z-2)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-8b-2c=0$.

Điều kiện tiếp xúc:

$$d(I;(P))=6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|5a-3b+7c-8b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|5a-11b+5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=6\sqrt{2}. \ (*)$$

Mà $d(B;(P))=\dfrac{|9a-7b+23c-8b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|9a-15b+21c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$=\frac{|5a-11b+5c+4(a-b+4c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \le$$

$$\le \frac{|5a-11b+5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+4\frac{|a-b+4c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \le 6\sqrt{2}+4\frac{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=18\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{1}=\frac{b}{-1}=\frac{c}{4}$. Chọn $a=1;b=-1;c=4$ thỏa mãn (*).

Khi đó $(P): x-y+4z=0$. Suy ra $m=-1;n=4$. Suy ra: $m.n=-4$.

Câu 70: (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Trong không gian cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}$ và đường thẳng $d: \frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

A. $19x-17y-20z-77=0$. B. $19x-17y-20z+34=0$.

C. $31x-8y-5z+91=0$. D. $31x-8y-5z-98=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đường thẳng d có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=(3;1;2)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;0;-1)$ và có VTCP là $\vec{u}=(1;2;3)$.

Do $\Delta \subset (P)$ nên $M \in (P)$. Giả sử VTPT của (P) là $\vec{n} = (A;B;C), \left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right)$.

Phương trình (P) có dạng $A(x-3) + By + C(z+1) = 0$.

Do $\Delta \subset (P)$ nên $\vec{u}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow A + 2B + 3C = 0 \Leftrightarrow A = -2B - 3C$.

Gọi α là góc giữa d và (P). Ta có

$$sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{|3A + B + 2C|}{\sqrt{14}.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\left|3(-2B - 3C) + B + 2C\right|}{\sqrt{14}.\sqrt{(-2B - 3C)^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{|5B + 7C|}{\sqrt{14}.\sqrt{5B^2 12BC + 10C^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{\frac{(5B + 7C)^2}{5B^2 + 12BC + 10C^2}}.$$

TH1: Với $C = 0$ thì $sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{14}} = \frac{\sqrt{70}}{14}$.

TH2: Với $C \neq 0$ đặt $t = \frac{B}{C}$ ta có $sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{\frac{(5t + 7)^2}{5t^2 + 12t + 10}}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{(5t + 7)^2}{5t^2 + 12t + 10}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \frac{-50t^2 + 10t + 112}{\left(5t^2 + 12t + 10\right)^2}$.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -50t^2 + 10t + 112 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{8}{5} \Rightarrow f\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{75}{14} \\ t = -\frac{7}{5} \Rightarrow f\left(-\frac{7}{5}\right) = 0 \end{array}\right..$$

Và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(t) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{(5t + 7)^2}{5t^2 + 12t + 10} = 5$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{7}{5}$		$\frac{8}{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{75}{14}$	$\searrow$	5

Từ đó ta có $Maxf\left(t\right)=\frac{75}{14}$ khi $t=\frac{8}{5}\Rightarrow\frac{B}{C}=\frac{8}{5}$. Khi đó $sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}.\sqrt{f\left(\frac{8}{5}\right)}=\frac{\sqrt{75}}{14}$.

So sánh TH1 và Th2 ta có $sin\alpha$ lớn nhất là $sin\alpha=\frac{\sqrt{75}}{14}$ khi $\frac{B}{C}=\frac{8}{5}$.

Chọn $B=-8\Rightarrow C=-5\Rightarrow A=31$.

Phương trình $\left(P\right)$ là $31\left(x-3\right)-8y-5\left(z+1\right)=0\Leftrightarrow 31x-8y-5z-98=0$.

Câu 71: (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $\left(S\right):\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-3\right)^2=9$ và mặt phẳng $\left(P\right):2x-2y+z+3=0$. Gọi $M\left(a;b;c\right)$ là điểm trên mặt cầu $\left(S\right)$ sao cho khoảng cách từ M đến $\left(P\right)$ là lớn nhất. Khi đó

A. $a+b+c=5$. **B.** $a+b+c=6$. **C.** $a+b+c=7$. **D.** $a+b+c=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Mặt cầu $\left(S\right):\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-3\right)^2=9$ có tâm $I\left(1;2;3\right)$ và bán kính $R=3$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $I\left(1;2;3\right)$ và vuông góc $\left(P\right)$

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-2t\\z=3+t\end{cases}$.

Gọi A,B lần lượt là giao của d và $\left(S\right)$, khi đó tọa độ A,B ứng với t là nghiệm của phương trình $\left(1+2t-1\right)^2+\left(2-2t-2\right)^2+\left(3+t-3\right)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$

Với $t=1\Rightarrow A\left(3;0;4\right)\Rightarrow d\left(A;(P)\right)=\frac{13}{3}$.

Với $t=-1\Rightarrow B\left(-1;4;2\right)\Rightarrow d\left(B;(P)\right)=\frac{5}{3}$.

Với mọi điểm $M(a;b;c)$ trên (S) ta luôn có $d(B;(P)) \le d(M;(P)) \le d(A;(P))$.

Vậy khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất bằng $\dfrac{13}{3}$ khi $M(3;0;4)$

Do đó $a+b+c=7$.

Câu 72: (LÊ HỒNG PHONG) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$ và mặt cầu (S) tâm I có phương trình $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=18$. Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A,B. Tính diện tích tam giác IAB.

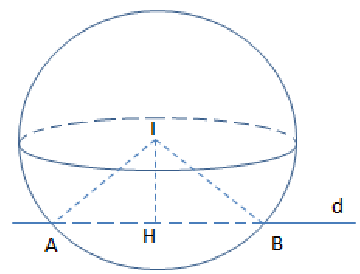
A. $\dfrac{8\sqrt{11}}{3}$. B. $\dfrac{16\sqrt{11}}{3}$. C. $\dfrac{\sqrt{11}}{6}$. D. $\dfrac{8\sqrt{11}}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đường thẳng d đi qua điểm $C(1;0;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;2;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$, bán kính $R=3\sqrt{2}$



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d.

Khi đó: $IH=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IC},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$, với $\overrightarrow{IC}=(0;-2;-2)$;

$\left[\overrightarrow{IC},\vec{u}\right]=(6;2;-2)$

Vậy $IH=\dfrac{\sqrt{6^2+2^2+2^2}}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{\sqrt{66}}{3}$

Suy ra $HB=\sqrt{18-\dfrac{22}{3}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

Vậy, $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IH\cdot AB=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{66}}{3}\cdot\dfrac{8\sqrt{6}}{3}=\dfrac{8\sqrt{11}}{3}$.

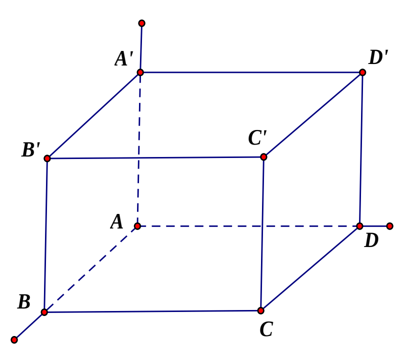
Câu 73: (HAI BÀ TRƯNG – HUẾ) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho các đỉnh của hình lập phương có tọa độ như sau:



$A(0;0;0)$ $B(2;0;0)$ $C(2;2;0)$ $D(0;2;0)$
$A'(0;0;2)$ $B'(2;0;2)$ $C'(2;2;2)$ $D'(0;2;2)$
$\overrightarrow{AB'}=(2;0;2)$, $\overrightarrow{AD'}=(0;2;2)$,
$\overrightarrow{BD}=(-2;2;0)$, $\overrightarrow{BC'}=(0;2;2)$

* Mặt phẳng $(AB'D')$ qua $A(0;0;0)$ và nhận véctơ $\vec{n}=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AD'}\right]=(-1;-1;1)$ làm véctơ pháp tuyến. Phương trình $(AB'D')$ là : $x+y-z=0$.

* Mặt phẳng $(BC'D)$ qua $B(2;0;0)$ và nhận véctơ $\vec{m}=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC'}\right]=(1;1;-1)$ làm véctơ pháp tuyến.
Phương trình $(BC'D)$ là : $x+y-z-2=0$.

Suy ra hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng chính là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BC'D)$:
$d\left(A,(BC'D)\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Cách khác: Thấy khoảng cách cần tìm $d\left((AB'D'),(BC'D)\right)=\frac{1}{3}AC'=\frac{1}{3}.2\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 74: (HAI BÀ TRƯNG – HUẾ) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-2),B(3;-1;-4),C(-2;2;0)$. Điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1. Khi đó có tọa độ điểm D thỏa mãn bài toán là:

A. $D(0;3;-1)$. **B.** $D(0;-3;-1)$. **C.** $D(0;1;-1)$. **D.** $D(0;2;-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.
Vì $D\in(Oyz)\Rightarrow D(0;b;c)$, do cao độ âm nên $c<0$.
Khoảng cách từ $D(0;b;c)$ đến mặt phẳng $(Oxy):z=0$ bằng 1
$\Leftrightarrow\frac{|c|}{1}=1\Rightarrow c=-1$ (do $c<0$).
Suy ra tọa độ $D(0;b;-1)$. Ta có:
$\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-4;2;2)$; $\overrightarrow{AD}=(-2;b;1)$
$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;6;-2)$
$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-4+6b-2=6b-6=6(b-1)$
$\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=|b-1|$
Mà $V_{ABCD}=2\Leftrightarrow|b-1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=3\\b=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D(0;3;-1)\\D(0;-1;-1)\end{array}\right.$. Chọn đáp án $D(0;3;-1)$.

Câu 75: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng

$(P): 2mx+\left(m^2+1\right)y+\left(m^2-1\right)z-10=0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A. Tìm tổng bán kính của hai mặt cầu đó.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $7\sqrt{2}$. **D.** $12\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo:

Gọi $I(a;b;c), r$ lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu . Do mặt cầu tiếp xúc với (P) nên ta có

$$r=d\left(I,(P)\right)=\frac{\left|2ma+\left(m^2+1\right)b+\left(m^2-1\right)c-10\right|}{\left(m^2+1\right)\sqrt{2}}=\frac{\left|(b-c)m^2+2ma+b-c-10\right|}{\left(m^2+1\right)\sqrt{2}}$$

$$\left|(b+c)m^2+2ma+b-c-10\right|=r\left(m^2+1\right)\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(b+c-r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c-r\sqrt{2}-10=0\quad(1)\\\left(b+c+r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c+r\sqrt{2}-10=0\quad(2)\end{array}\right.$$

TH1: $\left(b+c-r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c-r\sqrt{2}-10=0\quad(1)$

Do m thay đổi vẫn có mặt cầu cố định tiếp xúc với (P) nên yêu cầu bài toán trờ thành tìm điều kiện a,b,c sao cho (1) không phụ thuộc vào m. Do đó (1) luôn đúng với mọi $\Leftrightarrow\begin{cases}b+c-r\sqrt{2}=0\\a=0\\b-c-r\sqrt{2}-10=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b=r\sqrt{2}+5=0\\a=0\\c=-5\end{cases}$ Suy ra $I\left(0;5+r\sqrt{2};-5\right)=>(S): x^2+\left(y-5-r\sqrt{2}\right)^2+(z+5)^2=r^2$.

Lại có $A\in(S)$ nên suy ra : $4+\left(-11-5-r\sqrt{2}\right)^2=r^2\Leftrightarrow r^2-12\sqrt{2}r+40=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}r=2\sqrt{2}\\r=10\sqrt{2}\end{array}\right.$

TH2: $\left(b+c+r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c+r\sqrt{2}-10=0$ làm tương tự TH1 (trường hợp này không thỏa đề bài)

Tóm lại : Khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A và có tổng bán kính là : $12\sqrt{2}$ suy ra chọn D

Câu 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Kí hiệu d là đường thẳng đi qua D sao cho tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến d lớn nhất. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(5;7;3)$. **C.** $P(3;4;3)$. **D.** $Q(7;13;5)$.

Lời giải tham khảo:

Ta có phương trình mặt phẳng qua A,B,C là : $(ABC):\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1\Leftrightarrow 2x+3y+z-6=0$.

Dễ thấy $D\in(ABC)$ .Gọi A',B',C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B,C trên d.

Suy ra $d(A,d)+d(B,d)+d(C,d)=AA'+BB'+CC'\le AD+BD+CD$.Dấu bằng xảy ra khi $A'\equiv B'\equiv C'\equiv D$. Hay tổng khoảng cách từ các điểm $A,\ B,\ C$ đến d lớn nhất khi d là đường thẳng qua D và vuông góc với mặt phẳng $(ABC)=>d:\begin{cases}x=1+2t\\y=1+3t;N\in d\\z=1+t\end{cases}$ suy ra chọn B

Câu 77: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(5;5;0),\ B(1;2;3),\ C(3;5;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+5=0$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SABC$ biết đỉnh S thuộc mặt phẳng (P) và $SA=SB=SC$.

A. $V=\dfrac{145}{6}$. **B.** $V=145$. **C.** $V=\dfrac{45}{6}$. **D.** $V=\dfrac{127}{3}$.

Lời giải tham khảo:

Gọi $S(a;b;c)\in(P)=>a+b+c+5=0(1)$.

Ta có : $AS=\sqrt{(a-5)^2+(b-5)^2+c^2}$, $BS=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2}$, $CS=\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2+(c+1)^2}$

Do $SA=SB=SC\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2+(c+1)^2}\\\sqrt{(a-5)^2+(b-5)^2+c^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2+(c+1)^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+6b-8c-21=0\\4a+2c-15=0\end{cases}$

Ta có hệ : $\begin{cases}4a+6b-8c-21=0\\4a+2c-15=0\\a+b+c+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=-\dfrac{23}{2}\\c=-\dfrac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow S=\left(6;-\dfrac{13}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$. Lại có : $\overrightarrow{AB}(-4;-3;3),\overrightarrow{AC}(-2;0;-1)$

$=>\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(3;-10;-6);\overrightarrow{AS}=\left(1;-\dfrac{23}{2};-\dfrac{9}{2}\right)=>\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AS}\right|=145=>V_{S.ABC}=\dfrac{145}{6}$

Câu 78: Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng $6cm$ và $SA=SB=SC=4\sqrt{3}(cm)$.Gọi D là điểm đối xứng của B qua C .Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABD bằng ?

A. $5cm$ **B.** $3\sqrt{2}cm$ **C.** $\sqrt{26}cm$ **D.** $\sqrt{37}cm$

Lời giải tham khảo :

Cách 1 : Dựng CG vuông góc với (ABC), Qua E dựng mặt phẳng vuông góc với SB, mặt phẳng này cắt CG tại F . Suy ra F là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD .Đặt $SF=R$

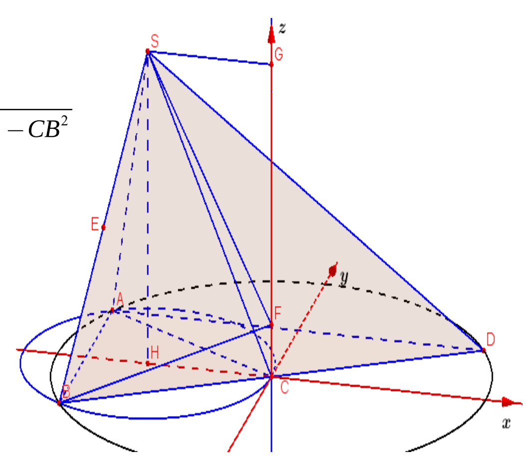
Xét hình chữ nhật : $FGSH=>FC=SH-FG=SH-\sqrt{R^2-CH^2}\ (1)$

Lại có : $FC=\sqrt{R^2-CB^2}\ (2)$.Từ (1) và (2) suy ra $SH-\sqrt{R^2-CH^2}=\sqrt{R^2-CB^2}$

$6-\sqrt{R^2-12}=\sqrt{R^2-36}\Rightarrow 5-\sqrt{R^2-12}=0=>R=\sqrt{37}(cm)$ Suy ra chọn D

Cách 2 :

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ .



Ta có : $C(0;0;0), A\left(-3\sqrt{3};-3;0\right), B\left(-3\sqrt{3};3;0\right), S\left(-2\sqrt{3};0;6\right)$

$F \in CG => F(0;0;t) \Rightarrow FA = FS \Leftrightarrow \sqrt{36+t^2} = \sqrt{12+(t-6)^2}$

$\Leftrightarrow t = 1 => SC = \sqrt{37}\,(cm)$ suy ra chọn D

BÀI TOÁN VẬN DỤNG (8 - 9 - 10)

Chủ đề 8. TOÁN THỰC TẾ

Câu 1: (SGD VĨNH PHÚC) Số sản phẩm của một hãng đầu DVD sản xuất được trong 1 ngày là giá trị của hàm số: $f\left(m,n\right)=m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}}$, trong đó m là số lượng nhân viên và n là số lượng lao động chính. Mỗi ngày hãng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm để đáp ứng nhu cầu khách hàng. Biết rằng mỗi ngày hãng đó phải trả lương cho một nhân viên là $6\ USD$ và cho một lao động chính là $24\ USD$. Tìm giá trị nhỏ nhất chi phí trong 1 ngày của hãng sản xuất này.

A. $1720\ USD$. B. $720\ USD$. C. $560\ USD$. D. $600\ USD$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có giả thiết: $m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}}\ge 40\Leftrightarrow m^2n\ge 64000$ với $m,n\in\mathbb{N}$.

Tổng số tiền phải chi trong một ngày là: $6m+24n=3m+3m+24n\ge 3\sqrt[3]{216m^2n}\ge 720$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $3m=24n\Leftrightarrow m=8n$

Do đó, $m^2n\ge 64000\Leftrightarrow 64n^3\ge 64000\Leftrightarrow n\ge 10$

Ta chọn $n=10\Rightarrow m=80$.

Vậy chi phí thấp nhất để trả cho 80 nhân viên và 10 lao động chính để sản xuất đạt yêu cầu là 720 USD

Câu 2: (SGD VĨNH PHÚC) Cho hình thang cân có độ dài đáy nhỏ và hai cạnh bên đều bằng 1 mét. Khi đó hình thang đã cho có diện tích lớn nhất bằng?

A. $3\sqrt{3}\ \left(m^2\right)$. B. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\ \left(m^2\right)$. C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\ \left(m^2\right)$. D. $1\ \left(m^2\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Kí hiệu x là độ dài đường cao suy ra $0<x\le 1$ Tính được đáy lớn bằng $1+2\sqrt{1-x^2}$.

Diện tích hình thang $S=\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)x$. Xét hàm số $f(x)=\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)x$ trên $\left(0;1\right]$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{-2x^2+1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Lập bảng biến thiên. Suy ra $\max\limits_{(0;1]}f(x)=f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

Câu 3: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho một cây nến hình lăng trụ lục gác đều có chiều cao và độ dài cạnh đáy lần lượt là 15cm và 5cm. Người ta xếp cây nến trên vào trong một hộp có dạng hình hộp chữ nhật sao cho cây nến nằm khít trong hộp. Thể tích của chiếc hộp đó bằng

A. 1500 ml. **B.** $600\sqrt{6} \text{ ml}$. **C.** 1800 ml. **D.** $750\sqrt{3} \text{ ml}$.

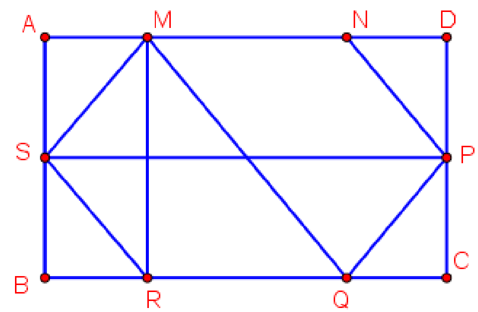
Hướng dẫn giải

Ta có $AB = 10 \text{ cm}, AD = 5\sqrt{3} \text{ cm}$

$S_{ABCD} = 50\sqrt{3}$

$V = S_{ABCD}.h = 750\sqrt{3}$

Chọn đáp án: D



Câu 4: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Người ta thay nước mới cho một bể bơi dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu $h_1 = 280\,cm$. Giả sử $h(t)\ cm$ là chiều cao của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, bết rằng tốc độ tăng của chiều cao nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$. Hỏi sau bao lâu thì nước bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi?

A. $7545,2\,s$. **B.** $7234,8\,s$. **C.** $7200,7\,s$. **D.** $7560,5\,s$.

Hướng dẫn giải

Sau m giây mức nước của bể là

$$h(\text{m}) = \int_0^m h'(t)\text{dt} = \int_0^m \frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}\text{dt} = \left.\frac{3\sqrt[3]{(t+3)^4}}{2000}\right|_0^m = \frac{3}{2000}\left[\sqrt[3]{(m+3)^4} - 3\sqrt[3]{3}\right]$$

Yêu cầu bài toán, ta có $\frac{3}{2000}\left[\sqrt[3]{(m+3)^4} - 3\sqrt[3]{3}\right] = \frac{3}{4}280$

$\Rightarrow \sqrt[3]{(m+3)^4} = 140000 + 3\sqrt[3]{3} \Rightarrow m = \sqrt[4]{\left(140000+3\sqrt[3]{3}\right)^3} - 3 = 7234,8$. **Chọn B**

Câu 5: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Khi đó vận tốc $v\ (m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên bằng:

A. $17\,m/s$. **B.** $36\,m/s$. **C.** $26\,m/s$ **D.** $29\,m/s$.

Hướng dẫn giải

Vận tốc của chất điểm là $v = s' = -3t^2 + 12t + 17 = -3(t-2)^2 + 29 \le 29$.

Vậy vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất bằng 29 khi $t = 2$.

Chọn D.

Câu 6: (TRẦN HƯNG ĐẠO – NB) Bạn Hùng trúng tuyển vào đại học nhung vì không đủ nộp tiền học phí Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm $3.000.000$ đồng để nộp học với lãi suất 3% /năm. Sau khi tốt nghiệp đại học Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất $0,25\%$ / tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T mà Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến hàng đơn vị) là

A. 232518 đồng. **B.** 309604 đồng. **C.** 215456 đồng. **D.** 232289 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Tính tổng số tiền mà Hùng nợ sau 4 năm học:

Sau 1 năm số tiền Hùng nợ là: $3+3r=3(1+r)$

Sau 2 năm số tiền Hùng nợ là: $3(1+r)^2+3(1+r)$

Tương tự: Sau 4 năm số tiền Hùng nợ là:

$$3(1+r)^4+3(1+r)^3+3(1+r)^2+3(1+r)=12927407,43=A$$

+ Tính số tiền T mà Hùng phải trả trong 1 tháng:

Sau 1 tháng số tiền còn nợ là: $A+Ar-T=A(1+r)-T$.

Sau 2 tháng số tiền còn nợ là: $A(1+r)-T+\left(A(1+r)-T\right).r-T=A(1+r)^2-T(1+r)-T$

Tương tự sau 60 tháng số tiền còn nợ là: $A(1+r)^{60}-T(1+r)^{59}-T(1+r)^{58}-\ldots-T(1+r)-T$.

Hùng trả hết nợ khi và chỉ khi

$$A(1+r)^{60}-T(1+r)^{59}-T(1+r)^{58}-\ldots-T(1+r)-T=0$$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^{60}-T\left[(1+r)^{59}+(1+r)^{58}+\ldots+(1+r)+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^{60}-T\frac{(1+r)^{60}-1}{1+r-1}=0$$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^{60}-T\frac{(1+r)^{60}-1}{r}=0$$

$$\Leftrightarrow T=\frac{Ar(1+r)^{60}}{(1+r)^{60}-1}$$

$$\Leftrightarrow T\approx 232.289$$

Câu 7: (TRẦN HƯNG ĐẠO – NB) Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\dfrac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng là bao nhiêu?

A. $258\ 959$ *con*. **B.** $253\ 584$ *con*. **C.** $257\ 167$ *con*. **D.** $264\ 334$ *con*.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $N(t)=\int N'(t)\,\mathrm{d}t=\int\dfrac{4000}{1+0,5t}\mathrm{d}t=8000.\ln|1+0,5t|+C$

Mà số lượng vi trùng ban đầu bằng 250000 con nên $C=250000$.

Do đó: $N(t)=8000.\ln|1+0,5t|+250000$.

Vậy sau 10 ngày số lượng vi trùng bằng: $N(10)=8000.\ln 6+250000=264334$ con.

Câu 8: (TRẦN HƯNG ĐẠO – NB) Người ta cần đổ một ống thoát nước hình trụ với chiều cao $200cm$, độ dày của thành ống là $15cm$, đường kính của ống là $80cm$. Lượng bê tông cần phải đổ là

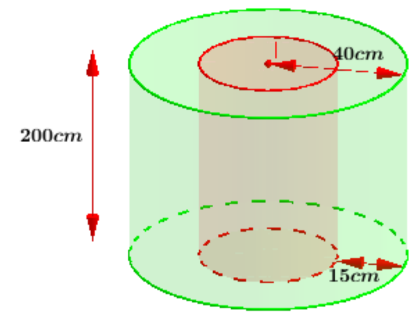
A. $0,195\pi m^3$. B. $0,18\pi m^3$. C. $0,14\pi m^3$. D. πm^3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối trụ bên ngoài và bên trong

Do đó lượng bê tông cần phải đổ là:



$V = V_1 - V_2 = \pi.40^2.200 - \pi.25^2.200 = 195000\pi cm^3 = 0,195\pi m^3$

Câu 9: (LẠNG GIANG SỐ 1) Một ngôi biệt thự nhỏ có 10 cây cột nhà hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao bằng $4,2m$. Trong đó có 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính bằng $40cm$, 6 cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính bằng $26cm$. Chủ nhà dùng loại *sơn giả đá* để sơn 10 cây cột đó. Nếu giá của một loại sơn giả đá là $380.000đ/m^2$ (kể cả phần thi công) thì người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn cột 10 cây cột nhà đó (đơn vị đồng)?

A. 15.845.000. B. 13.627.000. C. 16.459.000. D. 14.647.000.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Diện tích xung quanh 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính bằng $40cm$: $S_1 = 4.(2\pi.0,2.4,2)$.

Diện tích xung quanh 6 cây cột trước cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính bằng $26cm$:

$S_2 = 6(2\pi.0,13.4,2)$.

Số tiền để sơn mười cây cột nhà là $(S_1 + S_2).380.000 = \approx 15.845.000$.

Câu 10: (LẠNG GIANG SỐ 1) Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t) = \dfrac{1000}{(1+0,3t)^2}, t \geq 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t. Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên một ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi vào ngày thứ bao nhiêu thì nước trong hồ không còn an toàn nữa?

A. 9 B. 10. C. 11. D. 12.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int B'(t)\mathrm{d}t=\int\frac{1000}{(1+0,3t)^2}\mathrm{d}t=-\frac{1000}{0,3(1+0,3t)}+C$

Mà $B(0)=500\Leftrightarrow-\frac{10000}{3(1+0,3.0)}+C=500\Leftrightarrow C=\frac{11500}{3}$

Do đó: $B(t)=-\frac{10000}{3(1+0,3t)}+\frac{11500}{3}$

Nước trong hồ vẫn an toàn khi chỉ khi $B(t)<3000\Leftrightarrow-\frac{10000}{3(1+0,3t)}+\frac{11500}{3}<3000\Leftrightarrow t<10$

Vậy kể từ ngày thứ 10, nước hồ không còn an toàn.

Câu 11: (LẠNG GIANG SỐ 1) Một lon nước soda $80°F$ được đưa vào một máy làm lạnh chứa đá tại $32°F$. Nhiệt độ của soda ở phút thứ t được tính theo định luật Newton bởi công thức $T(t)=32+48.(0.9)^t$. Phải làm mát soda trong bao lâu để nhiệt độ là $50°F$?

A. $1,56$. **B.** $9,3$. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

• Gọi t_o là thời điểm nhiệt độ lon nước $80°F\Rightarrow T(t_o)=32+48.(0,9)^{t_o}=80$ (1)

Gọi t_1 là thời điểm nhiệt độ lon nước $50°F\Rightarrow T(t_1)=32+48.(0,9)^{t_o}=50$ (2)

• (1) $\Leftrightarrow(0,9)^{t_o}=1\Leftrightarrow t_o=0$

(2) $\Leftrightarrow(0,9)^{t_1}=\frac{3}{8}\Leftrightarrow t_1=\log_{0,9}\frac{3}{8}\approx9,3$

Câu 12: (LẠNG GIANG SỐ 1) Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá $2\,000\,000$ đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm $50\,000$ đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ty đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong 1 tháng là bao nhiêu?

A. $115\ 250\ 000$. B. $101\ 250\ 000$. C. $100\ 000\ 000$. D. $100\ 250\ 000$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi x (đồng/tháng) $(x>0)$ là giá cho thuê mới.

$\Rightarrow$ Số căn hộ bị bỏ trống là $\frac{x}{50\ 000}$ căn hộ

$\Rightarrow$ Số tiền công ty thuê được $T(x)=(2\ 000\ 000+x)\left(50-\frac{x}{50\ 000}\right)$

Khảo sát hàm số $T(x)$ trên $(0;+\infty)$

$\Rightarrow T'(x) = 10 - \dfrac{x}{25\ 000} \Rightarrow T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 250\ 000$.

x	0		250000		$+\infty$
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$		$\nearrow$	101250000	$\searrow$	

Bảng biến thiên

Vậy thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong 1 tháng là: $T = 101\ 250\ 000$.

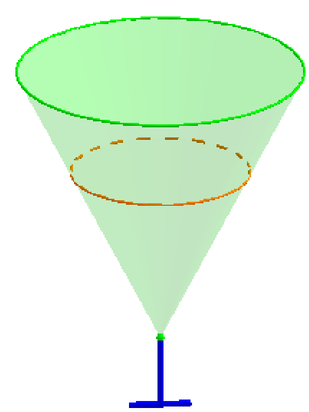
Câu 13: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Một cái ly có dạng hình nón được rót nước vào với chiều cao mực nước bằng $\dfrac{2}{3}$ chiều cao hình nón. Hỏi nếu bịch kính miệng ly rồi úp ngược ly xuống thì tỷ số chiều cao mực nước và chiều cao hình nón xấp xỉ bằng bao nhiêu?

A. $0,33$. **B.** $0,11$. **C.** $0,21$. **D.** $0,08$

Hướng dẫn giải

Chọn **B.**

Gọi chiều cao và bán kính đường tròn đáy của cái ly lần lượt là h và R.



Khi để cốc theo chiều xuôi thì lượng nước trong cốc là hình nón có chiều cao và bán kính đường tròn đáy lần lượt là $\dfrac{2h}{3}$ và $\dfrac{2R}{3}$.

Do đó thể tích lượng nước trong bình là $\dfrac{8V}{27} \Rightarrow$ Phần không chứa nước chiếm $\dfrac{19}{27}V$.

Khi úp ngược ly lại thì phần thể tích nước trong ly không đổi và lúc đó phần không chứa nước là hình nón và ta gọi h' và R' lần lượt là chiều cao và bán kính đường tròn đáy của phần hình nón không chứa nước đó.

Ta có $\dfrac{R'}{R} = \dfrac{h'}{h}$ và phần thể tích hình nón không chứa nước là $\dfrac{19}{27}V$

$\Rightarrow \dfrac{h'}{3}.\pi R'^2 = \dfrac{19}{27}.\dfrac{h}{3}.\pi R^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{h'}{h}\right)^3 = \dfrac{19}{27} \Rightarrow \dfrac{h'}{h} = \dfrac{\sqrt[3]{19}}{3}$.

Do đó tỷ lệ chiều cao của phần chứa nước và chiều cao của cái ly trong trường hợp úp ngược ly là $1-\dfrac{h'}{h}=\dfrac{3-\sqrt[3]{19}}{3}$.

Câu 14: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Giả sử vào cuối năm thì một đơn vị tiền tệ mất 10% giá trị so với đầu năm. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất sao cho sau n năm, đơn vị tiền tệ sẽ mất đi ít nhất 90% giá trị của nó?

A. 16 **B.** 18. **C.** 20. **D.** 22.

Hướng dẫn giải

Chọn **D.**

Gọi $x\left(x>0\right)$ là giá trị tiền tệ lúc ban đầu. Theo đề bài thì sau 1 năm, giá trị tiền tệ sẽ còn $0,9x$.

Cuối năm 1 còn $0,9x$

Cuối năm 2 còn $0,9.0,9x=0,9^2x$

....

Cuối năm n còn $0,9^nx$

Ycbt $\Leftrightarrow 0,9^nx=0,1x\Rightarrow n\approx 21,58$. Vì n nguyên dương nên $n=22$.

Câu 15: (NGÔ GIA TỰ - VP) Một ngôi biệt thự có 10 cây cột nhà hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao bằng $4,2\ m$. Trong đó, 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính bằng $40cm$, 6 cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính bằng $26cm$. Chủ nhà dùng loại sơn giả đá để sơn 10 cây cột đó. Nếu giá của một loại sơn giả đá là $380.000đ/m^2$ (kể cả phần thi công) thì người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn 10 cây cột nhà đó (đơn vị đồng)?

A. $15.844.000$. **B.** $13.627.000$. **C.** $16.459.000$. **D.** $14.647.000$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Diện tích xung quanh của một cái cột được tính bởi công thức: $S_{xq}=2\pi Rh$

Tổng diện tích xung quanh của 10 cái cột là: $4.\left(2\pi.0,2.4,2\right)+6.\left(2\pi.0,13.4,2\right)=13,272\pi$

Tổng số tiền cần chi là: $13,272\pi\times 380.000\approx 15.844.000$.

Câu 16: (NGÔ GIA TỰ - VP) Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường $s\left(mét\right)$ đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t $\left(giây\right)$, hàm số đó là $s=6t^2-t^3$. Thời điểm t $\left(giây\right)$ mà tại đó vận tốc v $\left(m/s\right)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

A. $t=4s$. **B.** $t=2s$. **C.** $t=6s$. **D.** $t=8s$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

• Hàm số vận tốc là $v=s'\left(t\right)=-3t^2+12t$, có GTLN là $v_{\max}=12$ tại $t=2$

Câu 17: (LÝ THÁI TỔ -HN) Một nhà máy sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đậy với dung tích $1000\,cm^3$. Bán kính của nắp đậy để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất bằng

A. $\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}\ cm$. **B.** $10.\sqrt[3]{\dfrac{5}{\pi}}\ cm$. **C.** $\dfrac{500}{\pi}\ cm$. **D.** $10.\sqrt{\dfrac{5}{\pi}}\ cm$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $h\ (cm)$ là chiều cao hình trụ và $R\ (cm)$ là bán kính nắp đậy.

Ta có: $V=\pi R^2h=1000$. Suy ra $h=\dfrac{1000}{\pi R^2}$.

Để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ nhỏ nhất.

Ta có: $S_{tp}=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R^2+2\pi R.\dfrac{1000}{\pi R^2}$

$=2\pi R^2+\dfrac{1000}{R}+\dfrac{1000}{R}\geq 3.\sqrt[3]{2\pi R^2.\dfrac{1000}{R}.\dfrac{1000}{R}}=3\sqrt[3]{2\pi.1000^2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2\pi R^2=\dfrac{1000}{R}\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$.

Câu 18: (LÝ THÁI TỔ -HN) Giả sử cứ sau một năm diện tích rừng của nước ta giảm x phần trăm diện tích hiện có. Hỏi sau 4 năm diện tích rừng của nước ta sẽ là bao nhiêu lần diện tích hiện nay?

A. $1-\dfrac{4x}{100}$. **B.** $1-\dfrac{x^4}{100}$. **C.** $\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^4$. **D.** $1-\left(\dfrac{x}{100}\right)^4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi S_0 là diện tích rừng hiện tại.

Sau n năm, diện tích rừng sẽ là $S=S_0\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^n$.

Do đó, sau 4 năm diện tích rừng sẽ là $\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^4$ lần diện tích rừng hiện tại.

Câu 19: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Một cốc nước hình trụ có chiều cao $9cm$, đường kính $6cm$. Mặt đáy phẳng và dày $1cm$, thành cốc dày $0,2cm$. Đổ vào cốc $120ml$ nước sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính $2cm$. Hỏi mặt nước trong cốc cách mép cốc bao nhiêu cm. (Làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

A. $3,67\,cm$. **B.** $2,67\,cm$. **C.** $3,28\,cm$. **D.** $2,28\,cm$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Thành cốc dày $0,2cm$ nên bán kính đáy trụ bằng $2,8cm$. Đáy cốc dày $1cm$ nên chiều cao hình trụ bằng $8cm$. Thể tích khối trụ là $V=\pi.(2,8)^2.8=197,04\ (cm^3)$.

Đổ $120ml$ vào cốc, thể tích còn lại là $197,04-120=77,04(cm^3)$.

Thả 5 viên bi vào cốc, thể tích 5 viên bi bằng $V_{bi}=5.\dfrac{4}{3}.\pi.1^3=20,94\ (cm^3)$.

Thể tích cốc còn lại $77,04-20,94=56,1\left(cm^3\right)$.

Ta có $56,1=h'.\pi.(2,8)^2 \Rightarrow h'=2,28\ cm$.

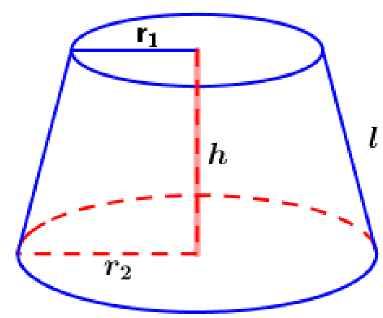
Cách khác: Dùng tỉ số thể tích

$$\frac{V_{Tr}}{V_{nuoc}+V_{bi}}=\frac{h_{coc}}{h_{nuoc+bi}} \Leftrightarrow \frac{8.(2,8)^2.\pi}{120+5.\frac{4}{3}.\pi}=\frac{8}{h_{nuoc+bi}} \Rightarrow h_{nuoc+bi}=5,72$$

Chiều cao còn lại của trụ là $8-5,72=2,28$.

Vậy mặt nước trong cốc cách mép cốc là $2,28cm$.

Câu 20: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Một chiếc xô hình nón cụt đựng hóa chất ở phòng thí nghiệm có chiều cao $20cm$, đường kính hai đáy lần lượt là $10cm$ và $20cm$. Cô giáo giao cho bạn An sơn mặt ngoài của xô (trừ đáy). Tính diện tích bạn An phải sơn (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).



A. $1942,97cm^2$.
B. $561,25cm^2$.
C. $971,48cm^2$.
D. $2107,44cm^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $S_{xq}=\pi\left(r_1+r_2\right)l$

Với $r_1=5$, $r_2=10$

$l=\sqrt{h^2+\left(r_2-r_1\right)^2}=\sqrt{20^2+\left(10-5\right)^2}=5\sqrt{17}$

Vậy $S_{xq}=\pi\left(5+10\right)5\sqrt{17}=75\sqrt{17}\pi \approx 971,48$

Câu 21: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Một ôtô đang chạy đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ôtô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a\ \ m/s^2$. Biết ôtô chuyển động thêm được $20m$ thì dừng hẳn. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây.

A. $(3;4)$.
B. $(4;5)$.
C. $(5;6)$.
D. $(6;7)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $x(t)$ là hàm biểu diễn quãng đường, $v(t)$ là hàm vận tốc.

Ta có: $v(t)-v(0)=\int_0^t(-a)\mathrm{d}t=-at \Rightarrow v(t)=-at+15$.

$$x(t)-x(0)=\int_0^t v(t)\mathrm{d}t=\int_0^t(-at+15)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}at^2+15t$$

$$x(t)=-\frac{1}{2}at^2+15t$$

Ta có: $\begin{cases} v(t)=0 \\ x(t)=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -at+15=0 \\ -\frac{1}{2}at^2+15t=20 \end{cases} \Rightarrow -\frac{15}{2}t+15t=20 \Rightarrow t=\frac{8}{3} \Rightarrow a=\frac{45}{8}$.

Câu 22: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Một nguồn âm đẳng hướng đặt tại điểm O có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M = \log\dfrac{k}{R^2}$ (Ben) với k là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm tại A và B lần lượt là $L_A = 3$ (Ben) và $L_B = 5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm AB (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

A. $3,59$ (Ben). B. $3,06$ (Ben). C. $3,69$ (Ben). D. 4 (Ben).

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $L_A < L_B \Rightarrow OA > OB$.

Gọi I là trung điểm AB . Ta có:

$$L_A = \log\frac{k}{OA^2} \Rightarrow \frac{k}{OA^2} = 10^{L_A} \Rightarrow OA = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_A}}$$

$$L_B = \log\frac{k}{OB^2} \Rightarrow \frac{k}{OB^2} = 10^{L_B} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_B}}$$

$$L_I = \log\frac{k}{OI^2} \Rightarrow \frac{k}{OI^2} = 10^{L_I} \Rightarrow OI = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_I}}$$

Ta có: $OI = \dfrac{1}{2}(OA - OB) \Rightarrow \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_I}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_A}} - \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_B}}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{10}^{L_I}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}^{L_A}} - \dfrac{1}{\sqrt{10}^{L_B}}\right)$

$$\Rightarrow L_I = -2\log\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}^{L_A}} - \frac{1}{\sqrt{10}^{L_B}}\right)\right] \Rightarrow L_I \approx 3,69 .$$

Câu 23: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 1 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm thì ông An được tăng lương 40%. Hỏi sau tròn 20 năm đi làm tổng tiền lương ông An nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)?

A. 726,74 triệu. B. 71674 triệu. C. 858,72 triệu. D. 768,37 triệu.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mức lương 3 năm đầu: 1 triệu	Tổng lương 3 năm đầu: 36. 1
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\dfrac{2}{5}\right)$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\dfrac{2}{5}\right)$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\dfrac{2}{5}\right)^2$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\dfrac{2}{5}\right)^2$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\dfrac{2}{5}\right)^3$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\dfrac{2}{5}\right)^3$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\dfrac{2}{5}\right)^4$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\dfrac{2}{5}\right)^4$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\dfrac{2}{5}\right)^5$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\dfrac{2}{5}\right)^5$
Mức lương 2 năm tiếp theo: $1.\left(1+\dfrac{2}{5}\right)^6$	Tổng lương 2 năm tiếp theo: $24\left(1+\dfrac{2}{5}\right)^6$

Tổng lương sau tròn 20 năm là

$$S=36\left[1+\left(1+\frac{2}{5}\right)+\left(1+\frac{2}{5}\right)^2+...+\left(1+\frac{2}{5}\right)^5\right]+24\left(1+\frac{2}{5}\right)^6$$

$$=36.\frac{1\left[1-\left(1+\frac{2}{5}\right)^6\right]}{1-\left(1+\frac{2}{5}\right)}+24\left(1+\frac{2}{5}\right)^6\approx 768,37$$

Câu 24: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Khoảng cách từ C đến B là 1 km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 4 km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 40 triệu đồng, còn trên đất liền là 20 triệu đồng. Tính tổng chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc trên(làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

A. $106,25$ triệu đồng. B. 120 triệu đồng.

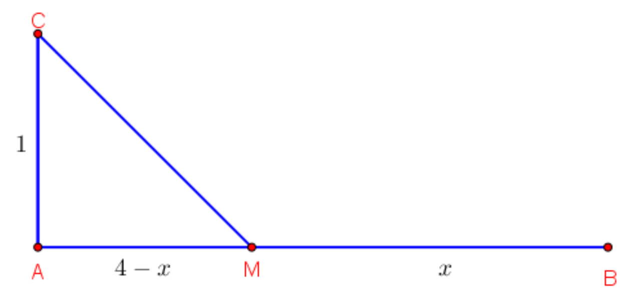
C. $164,92$ triệu đồng. D. $114,64$ triệu đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi M là điểm trên đoạn AB để lắp đặt đường dây điện ra biển nối với điểm C.

Đặt



$BM=x\Rightarrow AM=4-x\Rightarrow CM=\sqrt{1+(4-x)^2}=\sqrt{17-8x+x^2}, x\in[0;4]$

Khi đó tổng chi phí lắp đặt là : $y=x.20+40\sqrt{x^2-8x+17}$ đơn vị là triệu đồng.

$y'=20+40.\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+17}}=20.\frac{\sqrt{x^2-8x+17}+2(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+17}}$.

$y'=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-8x+17}=2(4-x)\Leftrightarrow x=\frac{12-\sqrt{3}}{2}$

Ta có $y\left(\frac{12-\sqrt{3}}{3}\right)=80+20\sqrt{3}\approx 114,64; y(0)=40\sqrt{17}\approx 164,92; y(4)=120$.

Vậy ta chọn đáp án D.

Câu 25: (SỞ GD HÀ NỘI) Ông Việt dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất $6,5\%$ một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x\in\mathbb{N}$) ông Việt gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ để mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng

A. 154 triệu đồng. B. 150 triệu đồng. C. 140 triệu đồng. D. 145 triệu đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Áp dụng công thức lãi kép : $P_n=x(1+r)^n$

Trong đó P_n là ***tổng giá trị đạt được (vốn và lãi)*** sau n kì.

x là vốn gốc, r là lãi suất mỗi kì.

Ta cũng tính được ***số tiền lãi*** thu được sau n kì là : $\boxed{P_n - x = x(1+r)^n - x = x\left[(1+r)^n - 1\right]}$ (*)

Áp dụng công thức (*) với $n = 3, r = 6,5\%$, số tiền lãi là 30 triệu đồng.

Ta được $30 = x\left[(1+6,5\%)^3 - 1\right] \Rightarrow x \approx 144,27$

Số tiền tối thiểu là 145 triệu đồng.

Câu 26: (SỞ GD HÀ NỘI) Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s), người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s²). Tính quãng đường S (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S = 95,70$ (m). B. $S = 87,50$ (m). C. $S = 94,00$ (m). D. $S = 96,25$ (m).

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh:

$$S_1 = \int_0^5 v_1(t)\mathrm{d}t = \int_0^5 7t\mathrm{d}t = 7\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^5 = 87,5 \text{ (m)}.$$

Vận tốc $v_2(t)$ (m/s) của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thoả mãn

$v_2(t) = \int(-70)\mathrm{d}t = -70t + C$, $v_2(5) = v_1(5) = 35 \Rightarrow C = 385$. Vậy $v_2(t) = -70\text{t} + 385$.

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với t thoả mãn $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5,5$ (s).

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn:

$$S_2 = \int_5^{5,5} v_1(t)\mathrm{d}t = \int_5^{5,5}(-70t + 385)\mathrm{d}t = 8,75 \text{ (m)}.$$

Quãng đường cần tính $S = S_1 + S_2 = 96,25$ (m).

Câu 27: (SỞ GD HÀ NỘI) Một công ty dự kiến chi 1 tỉ đồng để sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí để làm mặt xung quanh của thùng đó là 100.000 đ/m², chi phí để làm mặt đáy là 120.000 đ/m². Hãy tính số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất đượC. (giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể).

A. 57582 thùng. B. 58135 thùng. C. 18209 thùng. D. 12525 thùng.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi chiều cao hình trụ là h $(h > 0)$ (m).

Bán kính đáy hình trụ là x $(x > 0)$ (m).

Thể tích khối trụ là : $V = \pi x^2 h = \dfrac{5}{1000} \Rightarrow h = \dfrac{5}{1000\pi x^2}$ (m).

Diện tích mặt xung quanh là : $S_{xq} = 2\pi x h = \dfrac{1}{100x}$.

Diện tích hai đáy là : $S_d = 2\pi x^2$

Số tiền cần làm một thùng sơn là : $f(x) = \dfrac{1000}{x} + 240000\pi x^2$ $(x > 0)$

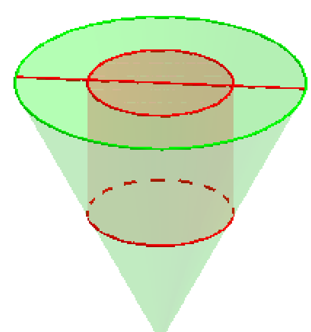
Ta có : $f'(x) = \dfrac{-1000}{x^2} + 480000\pi x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{480\pi}}$.

Bảng biến thiên :

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt[3]{480\pi}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	≈ 17201.05	$\nearrow$	

Vậy với số tiền 1 tỉ đồng thì công ty có thể sản xuất tối đa là : $\dfrac{10^9}{17201.05} \approx 58135$ thùng.

Câu 28: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GL) Một bình đựng nước dạng hình nón (không có nắp đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào bình đó một khối trụ và đo được thể tích nước trào ra ngoài là $\dfrac{16\pi}{9}(dm^3)$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của hình nón và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón (như hình vẽ dưới). Tính bán kính đáy R của bình nước.



A. $R = 3(dm)$. B. $R = 4(dm)$. C. $R = 2(dm)$. D. $R = 5(dm)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi h,h' lần lượt là chiều cao của khối nón và khối trụ.

R,r lần lượt là bán kính của khối nón và khối trụ.

Theo đề ta có: $h=3R,h'=2R$.

Xét tam giác SOA ta có: $\frac{r}{R}=\frac{IM}{OA}=\frac{SI}{SO}=\frac{h-h'}{h}=\frac{3R-2R}{3R}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow r=\frac{1}{3}R$. Ta lại có: $V_{\text{trô}}=\pi r^2h'=\pi\cdot\frac{R^2}{9}\cdot 2R=\frac{2\pi R^3}{9}=\frac{16\pi}{9}$

$\Rightarrow R^3=8\Leftrightarrow R=2\ dm.$

Câu 29: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GL) Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông Nam rút toàn bộ tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm n nguyên dương nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được hơn 40 triệu đồng. (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không thay đổi).

A. 5. B. 2. C. 4. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Số tiền thu được cả gốc lẫn lãi sau n năm là

$C=100(1+0,12)^n$

Số tiền lãi thu được sau n năm là

$L=100(1+0,12)^n-100$

$L>40\Leftrightarrow 100(1+0,12)^n-100>40\Leftrightarrow 1,12^n>\frac{7}{5}\Leftrightarrow n>\log_{1,12}\frac{7}{5}\approx 2,97.$

Câu 30: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GL) Một chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ (USD). Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 45 hành khách.

B. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 135 (USD).

C. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 60 hành khách.

D. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 160 (USD).

Hướng dẫn giải

Chọn D

Số tiền thu được khi có x khách là

$f(x)=x\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$

Ta có $f'(x)=\left(3-\frac{x}{40}\right)^2-2.\frac{1}{40}\left(3-\frac{x}{40}\right)x=\left(3-\frac{x}{40}\right)\left(3-\frac{x}{40}-\frac{x}{20}\right)=\left(3-\frac{x}{40}\right)\left(3-\frac{3x}{40}\right)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left(3-\frac{x}{40}\right)\left(3-\frac{3x}{40}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=120\\x=40\end{array}\right.$

$f(40)=160$

$f(60)=135$

Vậy $\max\limits_{x\in[0;60]} f(x) = f(40) = 160$.

Câu 31: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GL) Một viên đạn được bắn theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu $29,4\ m/s$. Gia tốc trọng trường là $9,8\ m/s^2$. Tính quãng đường S viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất.

A. $S = 88,2\,m.$ **B.** $S = 88,5\,m.$ **C.** $S = 88\,m.$ **D.** $S = 89\ m.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có công thức liên hệ giữa vận tốc, gia tốc và quảng đường đi được là $v^2 - v_0^2 = 2as$ nên quãng đường đi được từ lúc bắn lên đến khi dừng lại là : $v^2 - v_0^2 = s$.

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - 29,4^2}{-2.9.8} = 44,1$$

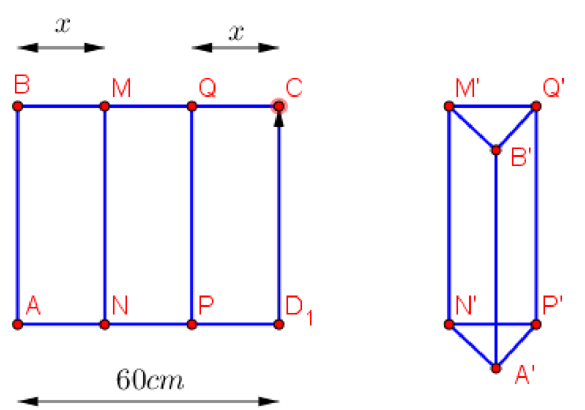
Quãng đường đi được từ lúc bắn đến khi chạm đất là $S = 44,1.2 = 88,2m$.

Câu 32: (BẮC YÊN THÀNH)Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60cm$, $AB = 40cm$. Ta gập tấm nhôm theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong cho đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Khi đó có thể tạo được khối lăng trụ với thể tích lớn nhất bằng

A. $4000\sqrt{3}\ \left(cm^3\right)$ **B.** $2000\sqrt{3}\ \left(cm^3\right)$ **C.** $400\sqrt{3}\ \left(cm^3\right)$ **D.** $4000\sqrt{2}\ \left(cm^3\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Đáy của lăng trụ là tam giác cân có cạnh bên bằng x , cạnh đáy bằng $60 - 2x$

Đường cao tam giác đó là

$$AH = \sqrt{x^2 - \left(\frac{60-2x}{2}\right)^2} = \sqrt{60x - 900},$$

với H là trung điểm NP

Diện tích đáy là

$$S = S_{ANP} = \frac{1}{2}AH.NP = \sqrt{60x-900}.(30-x) = \frac{1}{30}\sqrt{(60x-900)(900-30x)(900-30x)}$$

$$\Rightarrow S \le \frac{1}{30}\sqrt{\left(\frac{900}{3}\right)^3} = 100\sqrt{3}\left(cm^2\right)$$

Diện tích đáy lớn nhất là $100\sqrt{3}cm^2$ nên thể tích lớn nhất là $V = 40.100\sqrt{3} = 4000\sqrt{3}\left(cm^3\right)$.

Câu 33: (BẮC YÊN THÀNH) Ông A gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7% trên năm, biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. sau thời gian 10 năm nếu không rút lãi lần nào thì số tiền mà ông A nhận được tính cả gốc lẫn lãi là

A. $10^8.(1+0,07)^{10}$. **B.** $10^8.0,07^{10}$. **C.** $10^8.(1+0,7)^{10}$. **D.** $10^8.(1+0,007)^{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Theo công thức lãi kép $C=A\left(1+r\right)^N$ với giả thiết

$A=100.000.000=10^8; r=7\%=0,07$ và $N=10$.

Vậy số tiền nhận được ... $10^8.(1+0,07)^{10}$, nên chọn A.

Câu 34: (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH) Người ta muốn dùng vật liệu bằng kim loại để gò thành một thùng hình trụ tròn xoay có hai đáy với thể tích V cho trước (hai đáy cũng dùng chính vật liệu đó). Hãy xác định chiều cao h và bán kính R của hình trụ theo V để tốn ít vật liệu nhất.

A. $R=2h=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. B. $R=2h=2\sqrt{\frac{V}{2\pi}}$. C. $h=2R=2\sqrt{\frac{V}{2\pi}}$. D. $h=2R=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Để vật liệu tốn ít nhất thì diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất.

Ta có: $S_{tp}=2\pi R^2+2\pi Rh$.

Do $V=\pi R^2h$ nên $h=\dfrac{V}{\pi R^2}$. Suy ra

$$S_{tp}=2\pi R^2+2\pi R.\frac{V}{\pi R^2}=2\pi R^2+\frac{V}{R}+\frac{V}{R}\geq 3.\sqrt[3]{2\pi R^2.\frac{V}{R}.\frac{V}{R}}=3.\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $2\pi R^2=\dfrac{V}{R}\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Khi đó $h=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

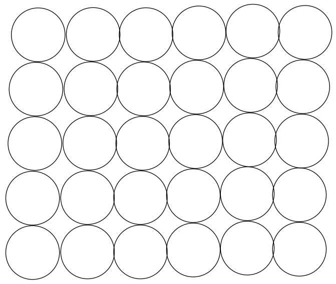
Câu 35: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Một viên phấn bảng có dạng một khối trụ với bán kính đáy bằng $0,5cm$, chiều dài $6cm$. Người ta làm một hình hộp chữ nhật bằng carton đựng các viên phấn đó với kích thước $6cm\times 5cm\times 6cm$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu hộp kích thước như trên để xếp 460 viên phấn?

A. 17. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 18.

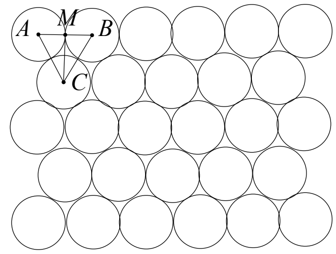
Hướng dẫn giải

Chọn C.

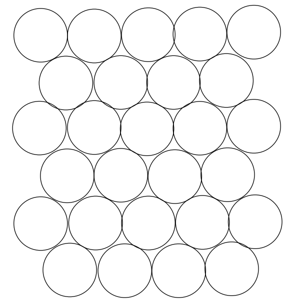
Có 3 cách xếp phấn theo hình vẽ dưới đây:



H 1



H 2



H 3

- ✓ Nếu xếp theo hình $H1$: vì đường kính viên phấn là $2.0,5 = 1cm$ nên mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: $6.5 = 30$.
- ✓ Nếu xếp theo hình $H2$: hàng 6 viên xen kẽ hàng 5 viên. Gọi số hàng xếp được là $n+1, n \in \mathbb{Z}_+$.

Ta có ΔABC đều cạnh bằng 1 $\Rightarrow CM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta phải có $2.0,5 + n.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \le 5 \Rightarrow n \le \dfrac{8}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ xếp tối đa được 5 hàng$\Rightarrow$mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: $3.6 + 2.5 = 28$.

- ✓ Nếu xếp theo hình $H3$:hàng 5 viên xen kẽ hàng 4 viên. Gọi số hàng xếp được là $m+1, m \in \mathbb{Z}_+$.

Ta phải có $2.0,5 + m.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \le 6 \Rightarrow m \le \dfrac{10}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ xếp tối đa được 6 hàng$\Rightarrow$ nên mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: $3.5 + 3.4 = 27$.

Vậy, xếp theo hình $H1$ thì xếp được nhiều phấn nhất, nên cần ít hộp nhất.

Ta có $460 : 30 \approx 15,3$ $\Rightarrow$cần ít nhất 16 hộp để xếp hết 460 viên phấn.

Câu 36: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Một chất điểm đang cuyển động với vận tốc $v_0 = 15m/s$ thì tăng vận tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t\left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. $68,25m$. **B.** $70,25m$. **C.** $69,75m$. **D.** $67,25m$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$v(t) = \int\left(t^2 + 4t\right)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}t^3 + 2t^2 + C$. Mà $v(0) = 15 \Rightarrow C = 15$ nên $v(t) = \dfrac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 15$

$S(t) = \int\limits_0^3\left(\dfrac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 15\right)\mathrm{d}t = \left(\dfrac{1}{12}t^4 + \dfrac{2}{3}t^3 + 15t\right)\Big|_0^3 = \dfrac{279}{4} = 69,75(m)$.

Câu 37: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Một nhà máy cần thiết kế một chiếc bể đựng nước hình trụ bằng tôn có nắp, có thể tích là $64\pi\left(m^3\right)$. Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nhiên liệu nhất.

A. $r = 3(m)$. **B.** $r = \sqrt[3]{16}(m)$. **C.** $r = \sqrt[3]{32}(m)$. **D.** $r = 4(m)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi hình trụ có chiều cao h, độ dài đường sinh l, bán kính đáy r.

Ta có: $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{64\pi}{\pi r^2} = \frac{64}{r^2} \Rightarrow l = \frac{64}{r^2}$

Để tốn ít nhiên liệu nhất thì diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Ta có: $S_{tp} = 2S_{day} + S_{xq} = 2\pi r^2 + 2\pi rl = 2\pi r^2 + \frac{128\pi}{r}$.

Xét hàm số $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{128}{r}$ với $r > 0$.

Ta có $f'(r) = 4\pi r - \frac{128\pi}{r^2}; f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{32}$.

Lập bảng biến thiên ta có $f(r)$ đạt GTNN khi $r = \sqrt[3]{32}$.

Câu 38: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Một người thả 1 lá bèo vào một cái ao, sau 12 giờ thì bèo sinh sôi phủ kín mặt ao. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt ao, biết rằng sau mỗi giờ thì lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi.

A. $12 - \log 5$ (giờ). **B.** $\frac{12}{5}$ (giờ). **C.** $12 - \log 2$ (giờ). **D.** $12 + \ln 5$ (giờ).

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta gọi u_i là số lá bèo ở giờ thứ i.

Ta có $u_0 = 1 = 10^0, u_1 = 10, u_2 = 10^2, ..., u_{12} = 10^{12}$.

Ta có số lá bèo để phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt hồ là $\frac{1}{5}.10^{12} \Rightarrow$ thời gian mà số lá bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt hồ là

$12 - \log 5$.

Câu 39: (SỞ BÌNH PHƯỚC) Một người nuôi cá thì nghiệm trong hồ. Người đó thấy rằng nếu mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 12. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 18.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cách 1: Thế đáp án:

Số cá trên mỗi đơn vị diện tích	12	14	10	18
Số cân nặng:	2880	2800	2800	2160

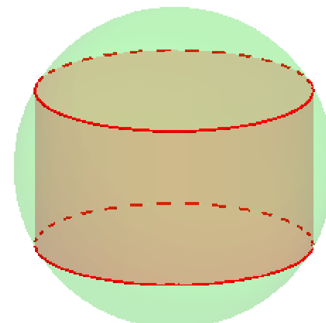
$(480-20n)n(gam)$				

Cách 2: Số cân nặng của n con cá là: $f(n)=(480-20n)n=-20n^2+480n=-20(n-12)^2+2880\le 2880$

Vậy giá trị lớn nhất của $f(n)$ là 2880 đạt được khi $n=12$.

- **Chú ý**: hàm f như một hàm số theo biến số thực, chứ không phải biến số nguyên dương

Câu 40: (SỞ BÌNH PHƯỚC) Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



A. $\frac{100}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **B.** $\frac{43}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **C.** $41\pi\left(dm^3\right)$ **D.** $132\pi\left(dm^3\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn $(C):(x-5)^2+y^2=25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C), trục Ox, hai đường thẳng $x=0,\ x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

Ta có $(x-5)^2+y^2=25\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{25-(x-5)^2}$

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y=\sqrt{25-(x-5)^2}=\sqrt{10x-x^2}$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1=\pi\int_0^2\left(10x-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(5x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{52\pi}{3}$$

Thể tích khối cầu là: $\mathrm{V}_2=\frac{4}{3}\pi.5^3=\frac{500\pi}{3}$

Thể tích cần tìm: $V=V_2-2V_1=\frac{500\pi}{3}-2.\frac{52\pi}{3}=132\pi\left(dm^3\right)$

Câu 41: (SỞ BÌNH PHƯỚC) Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ ?

A. 1000. **B.** 850. **C.** 800. **D.** 900.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

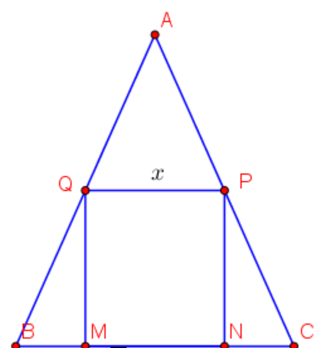
Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loại vi khuẩn này.

Từ giả thiết ta có: $300 = 100.e^{5r} \Leftrightarrow r = \dfrac{\ln 300 - \ln 100}{5} = \dfrac{\ln 3}{5}$

Tức tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là $r = \dfrac{\ln 3}{5}$ mỗi giờ.

Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.e^{10.\frac{\ln 3}{5}} = 900$ con.

Câu 42: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Một miếng bìa hình tam giác đều ABC, cạnh bằng 16. Học sinh Trang cắt một hình chữ nhật $MNPQ$ từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khóa (với M, N thuộc cạnh BC; P, Q lần lượt thuộc cạnh AC và AB) . Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất bằng bao nhiêu?



A. $16\sqrt{3}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** $32\sqrt{3}$. **D.** $34\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $MN = x, (0 < x < 16) \Rightarrow BM = \dfrac{16 - x}{2}$

$\Rightarrow \tan 60° = \dfrac{QM}{BM} \Rightarrow QM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(16 - x)$

Xét hàm số $S(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x(16 - x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(-x^2 + 16x) \Rightarrow \max S = 32\sqrt{3}$ khi $x = 8$.

Câu 43: (CHUYÊN ĐHSP HN) Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng $N(t)$, biết rằng $N'(t) = \dfrac{7000}{t+2}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Sau 10 ngày, đám vi trùng có khoảng bao nhiêu con?

A. 302542 con. **B.** 322542 con. **C.** 312542 con. **D.** 332542 con.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $N(t) = \int N'(t)\mathrm{d}t = \int \dfrac{7000}{t+2}\mathrm{d}t = 7000\ln|t+2| + C$

Do $N(0)=300000 \Rightarrow C=300000-7000\ln 2$

Khi đó $N(10)=7000\ln 12+300000-7000\ln 2=312542$. Chọn C

Câu 44: (CHUYÊN ĐHSP HN) Chuyện kể rằng: Ngày xưa, có ông vua hứa sẽ thưởng cho một vị quan món quà mà vị quan được chọn. Vị quan tâu: “Hạ thần chỉ xin Bệ Hạ thưởng cho một số hạt thóc thôi ạ! Cụ thể như sau: Bàn cờ vua có 64 ô thì với ô thứ nhất xin nhận 1 hạt, ô thứ 2 thì gấp đôi ô đầu, ô thứ 3 thì lại gấp đôi ô thứ 2, … ô sau nhận số hạt thóc gấp đôi phần thưởng dành cho ô liền trước”. Giá trị nhỏ nhất của n để tổng số hạt thóc mà vị quan từ n ô đầu tiên (từ ô thứ nhất đến ô thứ n) lớn hơn 1 triệu là

A. 18. B. 19. C. 20. D. 21.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Bài toán dùng tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân.

Ta có: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=1+1.2+1.2^2+\ldots+1.2^{n-1}=1.\dfrac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$

$S_n=2^n-1>10^6 \Leftrightarrow n>\log_2\left(10^6+1\right)\cong 19.93$. Vậy n nhỏ nhất thỏa yêu cầu bài là 20.

Câu 45: (CHUYÊN ĐHSP HN) Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó và tiền lãi của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu .

A. 45 tháng. B. 47 tháng. C. 44 tháng. D. 46 tháng .

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Áp dụng công thức lãi kép gửi 1 lần: $N=A\left(1+r\right)^n$, Với $A=100.10^6$ và $r=0,5\%$.

Theo đề bài ta tìm n bé nhất sao cho: $10^8\left(1+0,5\%\right)^n>125.10^6$

$\Leftrightarrow \left(1+0,5\%\right)^n>\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow n>\log_{\frac{201}{200}}\dfrac{5}{4}\approx 44,74$

Câu 46: (PHAN ĐÌNH PHÙNG – HN) Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) tại độ cao x (đo bằng mét) so với mực nước biển được tính theo công thức $P=P_0e^{xl}$, trong đó $P_0=760$ mmHg là áp suất không khí ở mức nước biển, l là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 mét thì áp suất không khí là $672,71$ mmHg. Hỏi áp suất ở đỉnh Fanxipan cao mét là bao nhiêu?

A. $22,24$ mmHg. B. $519,58$ mmHg.

C. $517,94$ mmHg. D. $530,23$ mmHg.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ở độ cao 1000 mét áp suất không khí là $672,71$ mmHg

Nên $672,71 = 760e^{1000l}$

$$\Leftrightarrow e^{1000l} = \frac{672,71}{760}$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}$$

Áp suất ở đỉnh Fanxipan $P = 760e^{3143l} = 760e^{3143.\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}} \approx 717,94$

Câu 47: (CHUYÊN ĐH VINH) Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là

A. $v = 5(m/p)$. **B.** $v = 7(m/p)$. **C.** $v = 9(m/p)$. **D.** $v = 3(m/p)$.

Hướng dẫn giải

Đáp án: C.

Gọi thời điểm khí cầu bắt đầu chuyển động là $t = 0$, thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là t_1.

Quãng đường khí cầu đi được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm khinh khí cầu bắt đầu tiếp đất là t_1 là

$$\int_0^{t_1}\left(10t - t^2\right)\mathrm{d}t = 5t_1^2 - \frac{t_1^3}{3} = 162$$

$$\Leftrightarrow t \approx -4,93 \vee t \approx 10,93 \vee t = 9$$

Do $v(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 10$ nên chọn $t = 9$.

Vậy khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là $v(9) = 10.9 - 9^2 = 9(m/p)$

Câu 48: (CHUYÊN ĐH VINH) Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần số lượng đã có và tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Sau bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

A. $7 \times \log_3 25$. **B.** $3^{\frac{25}{7}}$. **C.** $7 \times \frac{24}{3}$. **D.** $7 \times \log_3 24$.

Hướng dẫn giải

Đáp án: A.

Theo đề bài số lượng bèo ban đầu chiếm $0,04$ diện tích mặt hồ.

Sau 7 ngày số lượng bèo là $0,04\times 3^1$ diện tích mặt hồ.

Sau 14 ngày số lượng bèo là $0,04\times 3^2$ diện tích mặt hồ.

...

Sau $7\times n$ ngày số lượng bèo là $0,04\times 3^n$ diện tích mặt hồ.

Để bèo phủ kín mặt hồ thì $0,04\times 3^n=1\Leftrightarrow 3^n=25\Leftrightarrow n=\log_3 25$.

Vậy sau $7\times\log_3 25$ ngày thì bèo vừa phủ kín mặt hồ.

Câu 49: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU) Một ôtô đang chạy với vận tốc $19m/s$ thì người lái hãm phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-38t+19(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $4,75m$. **B.** $4,5m$. **C.** $4,25m$. **D.** $5m$.

Hướng dẫn giải

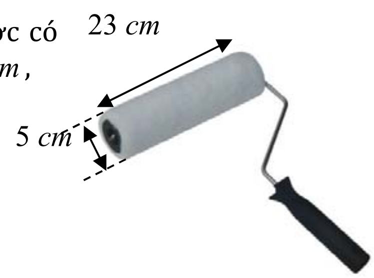
Chọn A.

Ta có thời gian ô tô bắt đầu hãm phanh đến khi dừng hẳn là : $-38t+19=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\ (s)$.

Trong khoảng thời gian này ô tô di chuyển một đoạn đường :

$$s=\int_0^{\frac{1}{2}}(-38t+19)\mathrm{d}x=\left(-19t^2+19t\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{19}{4}(m)=4,75(m).$$

Câu 50: (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU) Một cái tục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là $5cm$, chiều dài lăn là $23cm$ (hình bên). Sau khi lăn trọn 15 vòng thì trục lăn tạo nên sân phẳng một diện diện tích là



A. $1725\pi\ cm^2$. **B.** $3450\pi\ cm^2$.

C. $1725\pi\ cm^2$. **D.** $862,5\pi\ cm^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Diện tích xung quanh của mặt trụ là $S_{xq}=2\pi Rl=2\pi.5.23=230\pi cm^2$.

Sau khi lăn 15 vòng thì diện tích phần sơn được là: $S=230\pi.15=3450\pi cm^2$.

Câu 51: (NGÔ SĨ LIÊN) Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc $20\ m/s$ thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách $45m$ (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)?

A. $5\ m$. **B.** $4\ m$. **C.** $6\ m$. **D.** $3\ m$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xe đang chạy với vận tốc $v = 20\ m/s$ tương ứng với thời điểm $t = 0(s)$

Xe đừng lại tương ứng với thời điểm $t = 4(s)$.

Quảng đường xe đã đi là $S = \int_0^4 (-5t + 20)\,dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 20t\right)\Big|_0^4 = 40(m)$.

Vậy ô tô cách hàng rào một đoạn $45 - 40 = 5(m)$.

Câu 52: (NGÔ SĨ LIÊN) Biết thể tích khí CO_2 năm 1998 là $V(m^3)$. 10 năm tiếp theo, thể tích CO_2 tăng $a\%$, 10 năm tiếp theo nữa, thể tích CO_2 tăng $n\%$. Thể tích khí CO_2 năm 2016 là

A. $V_{2016} = V.\frac{(100+a)^{10}.(100+n)^8}{10^{36}}(m^3)$.

B. $V_{2016} = V.(1+a+n)^{18}(m^3)$.

C. $V_{2016} = V.\frac{((100+a)(100+n))^{10}}{10^{20}}(m^3)$.

D. $V_{2016} = V + V.(1+a+n)^{18}(m^3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

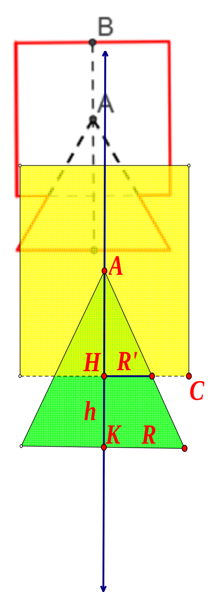
Ta có:

Sau 10 năm thể tích khí CO_2 là $V_{2008} = V\left(1 + \frac{a}{100}\right)^{10} = V\frac{(100+a)^{10}}{10^{20}}$

Do đó, 8 năm tiếp theo thể tích khí CO_2 là

$$V_{2016} = V_{2008}\left(1 + \frac{n}{100}\right)^8 = V\frac{(100+a)^{10}}{10^{20}}\left(1 + \frac{n}{100}\right)^8$$
$$= V\frac{(100+a)^{10}}{10^{20}}\frac{(100+n)^8}{10^{16}} = V\frac{(100+a)^{10}.(100+n)^8}{10^{36}}$$

Câu 53: (NGÔ SĨ LIÊN) Cho tam giác đều và hình vuông cùng có cạnh bằng 4 được xếp chồng lên nhau sao cho một đỉnh của tam giác đều trùng với tâm của hình vuông, trục của tam giác đều trùng với trục của hình vuông (như hình vẽ). Thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình đã cho khi quay quanh trục AB là



A. $\frac{136\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

B. $\frac{48\pi + 7\pi\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{128\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{144\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Khi xoay quanh trục AB thì :

- Phần hình vuông phía trên trở thành lăng trụ có bán kính R = 2 , chiều cao h = 4

$\to V_1 = \pi 2^2.4 = 16\pi$

Phần dưới trở thành hình nón cụt với

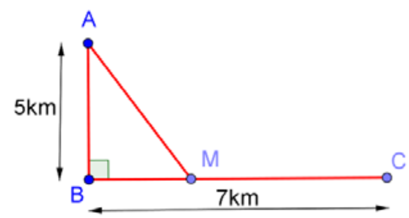
$h = HK = AK - AH = 2\sqrt{3} - 2 = 2\left(\sqrt{3}-1\right)$; $R = 2$

$\frac{R'}{R} = \frac{AH}{AK} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \to R' = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Áp dụng $V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + R'^2 + RR'\right) = ... = \left(\frac{24\sqrt{3}-8}{9}\right)\pi$

Vậy $V = V_1 + V_2 = \left(\frac{24\sqrt{3}+136}{9}\right)\pi$. Đáp án là câu D

Câu 54: (NGÔ SĨ LIÊN) Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ $5km$, trên bờ biển có một kho hàng ở vị trí C cách B một khoảng $7km$. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến M trên bờ biển với vận tốc $4km/h$ rồi đi bộ từ M đến C với vận tốc $6km/h$. Xác định độ dài đoạn BM để người đó đi từ A đến C nhanh nhất.



A. $3\sqrt{2}\,km.$ B. $\frac{7}{3}km.$ C. $2\sqrt{5}$ km. D. $\frac{7}{2}km.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $BM = x\ \ (km)$, $0 \le x \le 7$. Khi đó: $AM = \sqrt{25+x^2}$ và $MC = 7 - x$

Theo đề bài ta có: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \frac{7-x}{6}$

$f'(x) = \frac{3x - 2\sqrt{25+x^2}}{4\sqrt{25+x^2}}$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{25+x^2} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \pm 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$

Khi đó: $f(0) = \frac{29}{12}$, $f(7) = \frac{\sqrt{74}}{4}$ và $f\left(2\sqrt{5}\right) = \frac{14-\sqrt{5}}{12}$

Vậy $\min\limits_{x\in[0;7]} f(x) = f\left(2\sqrt{5}\right) = \frac{14-\sqrt{5}}{12}$.

Câu 55: (CHUYÊN THÁI BÌNH) Bạn A có một đoạn dây dài $20m$. Bạn chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều. Phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

A. $\dfrac{40}{9+4\sqrt{3}}m.$ B. $\dfrac{180}{9+4\sqrt{3}}m.$ C. $\dfrac{120}{9+4\sqrt{3}}m.$ D. $\dfrac{60}{9+4\sqrt{3}}m.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Bạn A chia sợi dây thành hai phần có độ dài $x(m)$ và $20-x(m)$, $0<x<20$ (như hình vẽ).

Phần đầu uốn thành tam giác đều có cạnh $\dfrac{x}{3}(m)$, diện tích $S_1=\left(\dfrac{x}{3}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{36}\left(m^2\right)$

Phần còn lại uốn thành hình vuông có cạnh $\dfrac{20-x}{4}(m)$, diện tích $S_2=\left(\dfrac{20-x}{4}\right)^2\left(m^2\right)$

Tổng diện tích hai hình nhỏ nhất khi $f(x)=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{36}+\left(\dfrac{20-x}{4}\right)^2$ nhỏ nhất trên khoảng $(0;20)$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x\sqrt{3}}{18}-\dfrac{20-x}{8}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{180}{4\sqrt{3}+9}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{180}{4\sqrt{3}+9}$		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta được $x=\dfrac{180}{4\sqrt{3}+9}$.

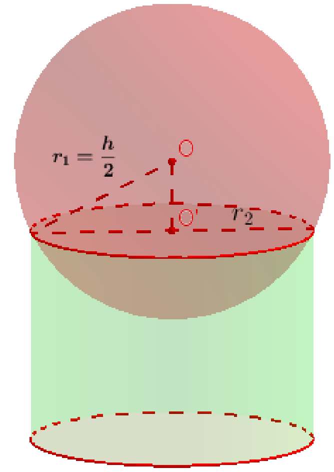
Câu 56: (CHUYÊN THÁI BÌNH) Một quả bóng bàn và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt quả bóng lên chiếc chén thấy phần ở ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\dfrac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, khi đó:

A. $9V_1=8V_2$. B. $3V_1=2V_2$. C. $16V_1=9V_2$. D. $27V_1=8V_2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi r_1 là bán kính quả bóng, r_2 là bán kính chiếc chén, h là chiều cao chiếc chén.



Theo giả thiết ta có $h = 2r_1 \Rightarrow r_1 = 2h$ và $OO' = \frac{r_1}{2} = \frac{h}{4}$.

Ta có $r_2^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}h^2$.

Thể tích của quả bóng là $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi h^3$

và thể tích của chén nước là $V_2 = B.h = \pi r_2^2 h = \frac{3}{16}\pi h^3$

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{9}$.

Câu 57: (CHUYÊN THÁI BÌNH) Xét một hộp bóng bàn có dạng hình hộp chữ nhật. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng bàn được xếp theo chiều dọc, các quả bóng bàn có kích thước như nhau. Phần không gian còn trống trong hộp chiếm:

A. $65,09\%$. **B.** $47,64\%$. **C.** $82,55\%$. **D.** $83,3\%$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi đường kính quả bóng bàn là d. Khi đó kích thước của hình hộp chữ nhật là $d, d, 3d$.

Vậy thể tích của hình hộp chữ nhật là $V_1 = d.d.3d = 3d^3$

Thể tích của ba quả bóng bàn: $V_2 = 3\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi\frac{d^3}{8} = \frac{\pi d^3}{2}$.

Thể tích phần không gian còn trống: $V_3 = V_1 - V_2$

Phần không gian còn trống trong hộp chiếm: $\frac{V_3}{V_1} = \frac{3d^3 - \frac{\pi d^3}{2}}{3d^3} = \frac{3 - \frac{\pi}{2}}{3} \simeq 47,64\%$.

Câu 58: (CHUYÊN THÁI BÌNH) Một bể nước có dung tích 1000 lít .Người ta mở vòi cho nước chảy vào bể, ban đầu bể cạn nước. Trong giờ đầu vận tốc nước chảy vào bể là 1 lít/1phút. Trong các giờ tiếp theo vận tốc nước chảy giờ sau gấp đôi giờ liền trước. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu thì bể đầy nước (kết quả gần đúng nhất).

A. $3,14$ giờ. **B.** $4,64$ giờ. **C.** $4,14$ giờ. **D.** $3,64$ giờ.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Trong giờ đầu tiên, vòi nước chảy được $60.1 = 60$ lít nước.

Giờ thứ 2 vòi chảy với vận tốc 2 lít/1phút nên vòi chảy được $60\cdot 2 = 120$ lít nước.

Giờ thứ 3 vòi chảy với vận tốc 4 lít/1phút nên vòi chảy được $60\cdot 4 = 240$ lít nước.

Giờ thứ 4 vòi chảy với vận tốc 8 lít/1phút nên vòi chảy được $60\cdot 8 = 480$ lít nước.

Trong 4 giờ đầu tiên,vòi chảy được: $60+120+240+480=900$ lít nước.
Vậy trong giờ thứ 5 vòi phải chảy lượng nước là $1000-900=100$ lít nước.
Số phút chảy trong giờ thứ 5 là $100:16=6,25$ phút

Đổi $6,25:60\approx 0,1$ giờ

Vậy thời gian chảy đầy bể là khoảng $4,1$ giờ.

Câu 59: (CHUYÊN THÁI BÌNH) Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t)=160-10t\,(m/s)$. Tìm quãng đường S mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm vật dừng lại.

A. $S=2560m$. **B.** $S=1280m$. **C.** $S=2480m$. **D.** $S=3840m$.

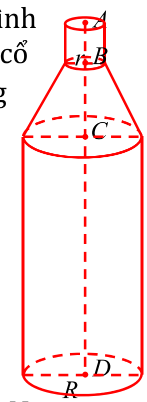
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có, vật dừng lại khi $v(t)=0\Leftrightarrow 160-10t=0\Leftrightarrow t=16(s)$.

Khi đó, quãng đường S mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm vật dừng lại là $S=\int\limits_0^{16}(160-10t)\,dt=1280(m)$.

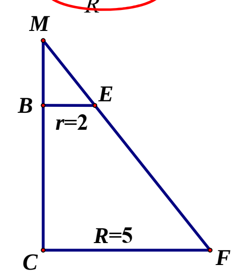
Câu 60: (SỞ GD BẮC NINH) Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình bên. Biết bán kính đáy bằng $R=5cm$, bán kính cổ $r=2cm$, $AB=3cm$, $BC=6cm$, $CD=16cm$. Thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó bằng:



A. $495\pi\left(cm^3\right)$. **B.** $462\pi\left(cm^3\right)$.

C. $490\pi\left(cm^3\right)$. **D.** $412\pi\left(cm^3\right)$.

Hướng dẫn giải



Thể tích khối trụ có đường cao CD: $V_1=\pi R^2.CD=400\pi\left(cm^3\right)$.

Thể tích khối trụ có đường cao AB: $V_2=\pi r^2.AB=12\pi\left(cm^3\right)$.

Ta có $\dfrac{MC}{MB}=\dfrac{CF}{BE}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow MB=4$

Thể tích phần giới hạn giữa BC: $V_3=\dfrac{\pi}{3}\left(R^2.MC-r^2.MB\right)=78\pi\left(cm^3\right)$.

Suy ra: $V=V_1+V_2+V_3=490\pi\left(cm^3\right)$.

Chọn C

Câu 61: (SỞ GD BẮC NINH) Một công ty sản xuất gỗ muốn thiết kế các thùng đựng hàng bên trong dạng hình lăng trụ tứ giác đều không nắp có thể tích là $62,5dm^2$. Để tiết kiệm vật liệu làm thùng, người ta cần thiết kế thùng sao cho có tổng S diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy là nhỏ nhất, S bằng

A. $106,25dm^2$. **B.** $75dm^2$. **C.** $50\sqrt{5}dm^2$. **D.** $125dm^2$.

Hướng dẫn giải

Gọi a là độ dài cạnh đáy của hình lăng trụ.

Theo bài ta có chiều cao của lăng trụ là $\frac{62,5}{a^2}$. Suy ra

$S=4.\frac{62.5}{a^2}.a+a^2=\frac{250}{a}+a^2=\frac{125}{a}+\frac{125}{a}+a^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{125}{a}.\frac{125}{a}.a^2}=75$. Dấu bằng xảy ra khi $a=\sqrt[3]{125}=5$. Vậy S là nhỏ nhất bằng 75.

Chọn đáp án **B**

Câu 62: (SỞ GD BẮC NINH) Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S=A.e^{N.r}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người, tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm giữ nguyên thì đầu năm 2025 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

A. $(1.424.300;1.424.400)$. **B.** $(1.424.000;1.424.100)$.

C. $(1.424.200;1.424.300)$. **D.** $(1.424.100;1.424.200)$.

Hướng dẫn giải

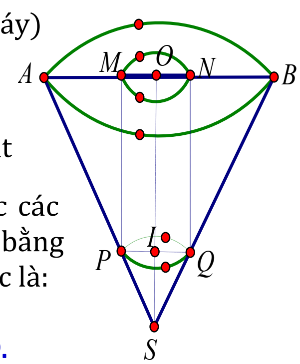
Gọi S_1 là dân số năm 2015, ta có $S_1=1.153.600, N=5, A=1.038.229$

Ta có: $S_1=A.e^{N.r}\Rightarrow e^{N.r}=\frac{S_1}{A}\Rightarrow r=\frac{\ln\frac{S_1}{A}}{5}$

Gọi S_2 là dân số đầu năm 2025, ta có $S_2=A.e^{15.r}=1.038.229.e^{15.\frac{\ln\frac{S}{A}}{5}}\approx 1.424.227,71$

Chọn đáp án C

Câu 63: (QUẢNG XƯƠNG I) Một bình đựng nước dạng hình nón (không đáy) đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}dm^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt trên của hình nón, các điểm trên đường tròn đáy còn lại đều thuộc các đường sinh của hình nón (như hình vẽ) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước là:



A. $S_{xq}=\frac{9\pi\sqrt{10}}{2}dm^2$. **B.** $S_{xq}=4\pi\sqrt{10}\,dm^2$. **C.** $S_{xq}=4\pi\,dm^2$. **D.** $S_{xq}=\frac{3\pi}{2}dm^2$.

Hướng dẫn giải

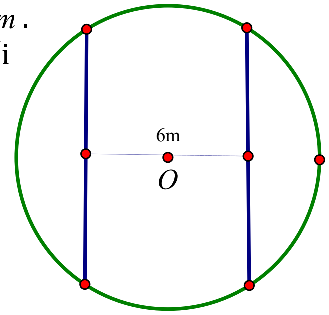
Chọn B

Xét hình nón : $h = SO = 3r$, $r = OB$, $l = SA$. Xét hình trụ : $h_1 = 2r = NQ$, $r_1 = ON = QI$

$\Delta SQI \sim \Delta SBO \Rightarrow \frac{QI}{BO} = \frac{SI}{SO} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{r}{3} \Rightarrow$ Thể tích khối trụ là :

$V_t = \pi r_1^2 h_1 = \frac{2\pi r^3}{9} = \frac{16\pi}{9} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow S_{xq} = \pi rl = 4\pi\sqrt{10}\ dm^2$

Câu 64: (QUẢNG XƯƠNG I) Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 8412322 đồng. B. 8142232 đồng.

C. 4821232 đồng. D. 4821322 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn , khi đó phương trình đường tròn tâm O là

$x^2 + y^2 = 36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y = \sqrt{36 - x^2} = f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -3;\ x = 3$

$$\Rightarrow S = 2\int_{-3}^{3} \sqrt{36 - x^2}\, dx$$

Đặt $x = 6\sin t \Rightarrow dx = 6\cos t dt$. Đổi cận : $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$; $x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36\cos^2 t dt = 36\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1)\, dt = 18(\sin 2t + 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S \approx 4821322$ đồng

Câu 65: (QUẢNG XƯƠNG I) Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học A nhưng vì do không đủ nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm vay $3.000.000$ đồng để nộp học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

A. 232518 đồng. B. 309604 đồng. C. 215456 đồng. D. 232289 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn đáp án D

Vậy sau 4 năm bạn Hùng nợ ngân hàng số tiền là:

$$s = 3000000\left[(1+3\%)^4 + (1+3\%)^3 + (1+3\%)^2 + (1+3\%)\right] = 12927407,43$$

Lúc này ta coi như bạn Hùng nợ ngân hàng khoản tiền ban đầu là 12.927.407,43 đồng,

số tiền này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong 5 năm.

Ta có công thức:

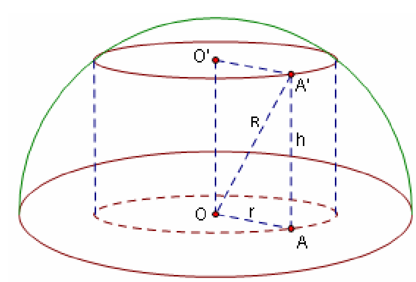
$$\Rightarrow \mathrm{T} = \frac{N(1+r)^n.r}{(1+r)^n - 1} = \frac{12927407,4(1+0,0025)^{60}.0,0025}{(1+0,0025)^{60} - 1} \approx 232289$$

Câu 66: (QUẢNG XƯƠNG I) Khi cắt mặt cầu $S(O,\, R)$ bởi mặt kính, ta được hai nửa mặt cầu và hình tròn lớn của mặt kính đó gọi là mặt đáy cı ỗi nửa mặt cầu. Một hình trụ gọi là nội tiếp nửa mặt cầu $S(O,\, R)$ nếu một đáy của hình trụ nằm trong đáy của nửa mặt cầu, còn đường tròn đáy kia là giao tuyến của hình trụ với nửa mặt cầu. Biết $R = 1$, tính bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu $S(O,\, R)$ để khối trụ có thể tích lớn nhất.

A. $r = \frac{\sqrt{3}}{2},\, h = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $r = \frac{\sqrt{6}}{2},\, h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $r = \frac{\sqrt{6}}{3},\, h = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $r = \frac{\sqrt{3}}{3},\, h = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn đáp án C .



Hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu, nên theo giả thiết đường tròn đáy trên có tâm O' có hình chiếu của O xuống mặt đáy (O'). Suy ra hình trụ và nửa mặt cầu cùng chung trục đối xứng và tâm của đáy dưới hình trụ trùng với tâm O của nửa mặt cầu.Ta có: $h^2 + r^2 = R^2$ $(0 < h \le R = 1) \Rightarrow r^2 = 1 - h^2$

Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi(1-\mathrm{h}^2)\mathrm{h} = f(\mathrm{h})$

$$\Rightarrow f'(\mathrm{h}) = \pi(1 - 3\mathrm{h}^2) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

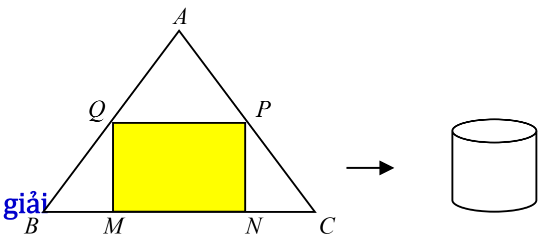
h	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
f'(h)		+	0	−	
f(h)	0	↗	$\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$	↘	0

Vậy: $\underset{(0;1]}{Max}\, V = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ (đvtt) khi $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ và $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 67: (LƯƠNG ĐẮC BẰNG) Bạn A muốn làm một chiếc thùng hình trụ không đáy từ nguyên liệu là mảnh tôn hình tam giác đều ABC có cạnh bằng 90 (cm). Bạn muốn cắt mảnh tôn hình chữ nhật $MNPQ$ từ mảnh tôn nguyên liệu (với M, N thuộc cạnh BC; P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB) để tạo thành hình trụ có chiều cao bằng MQ. Thể tích lớn nhất của chiếc thùng mà bạn A có thể làm được là:

A. $\dfrac{91125}{4\pi}\left(cm^3\right)$.　　B. $\dfrac{91125}{2\pi}\left(cm^3\right)$.

C. $\dfrac{108000\sqrt{3}}{\pi}\left(cm^3\right)$.　　D. $\dfrac{13500.\sqrt{3}}{\pi}\left(cm^3\right)$.



Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm BC. Suy ra I là trung điểm MN

Đặt MN=x ($0<x<90$); $\Rightarrow \dfrac{MQ}{AI}=\dfrac{BM}{BI} \Rightarrow MQ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(90-x)$

Gọi R là bán kính của trụ $\Rightarrow R=\dfrac{x}{2\pi}$ $\Rightarrow V_T=\pi(\dfrac{x}{2\pi})^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}(90-x)=\dfrac{\sqrt{3}}{8\pi}(-x^3+90x^2)$

Xét $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{8\pi}(-x^3+90x^2)$ với $0<x<90$. Khi đó: $\max\limits_{x\in(0;90)} f(x)=\dfrac{13500.\sqrt{3}}{\pi}$ khi x= 60.

Câu 68: (CHUYÊN VĨNH PHÚC) Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1% trên tháng. Gửi được hai năm 3 tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó được rút là

A. $101.\left[(1,01)^{27}-1\right]$ triệu đồng　　B. $101.\left[(1,01)^{26}-1\right]$ triệu đồng

C. $100.\left[(1,01)^{27}-1\right]$ triệu đồng　　D. $100.\left[(1,01)6-1\right]$ triệu đồng

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Phương pháp: Quy bài toán về tính tổng cấp số nhân, rồi áp dụng công thức tính tổng cấp số nhân:

Dãy $U_1;U_2;U_3;...;U_n$ được gọi là 1 CSN có công bội q nếu: $U_k=U_{k-1}q$

Tổng n số hạng đầu tiên: $s_n=u_1+u_2+...+u_n=u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$

+ Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân

Cách giải: + Gọi số tiền người đó gửi hàng tháng là $a=1$ triệu

+ Đầu tháng 1: người đó có a

Cuối tháng 1: người đó có $a.(1+0,01)=a.1,01$

+ Đầu tháng 2 người đó có : $a+a.1,01$

Cuối tháng 2 người đó có: $1,01\left(a+a.1,01\right)=a\left(1,01+1,01^2\right)$

+ Đầu tháng 3 người đó có: $a\left(1+1,01+1,01^2\right)$

Cuối tháng 3 người đó có: $a\left(1+1,01+1,01^2\right).1,01=a\left(1+1,01^2+1,01^3\right)$

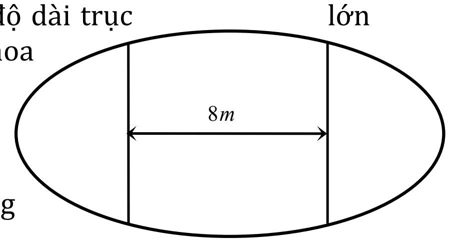
....

+ Đến cuối tháng thứ 27 người đó có: $a\left(1+1,01+1,01^2+...+1,01^{27}\right)$

Ta cần tính tổng: $a\left(1+1,01+1,01^2+...+1,01^{27}\right)$

Áp dụng công thức cấp số nhân trên với công bội là 1,01 ta được $\dfrac{1-1,01^{27}}{1-0,01}=100.\left(1,01^{27}-1\right)$ triệu đồng.

Câu 69: (MINH HỌA L2)Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 7.862.000 đồng. **B.** 7.653.000 đồng. **C.** 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giả sử elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$

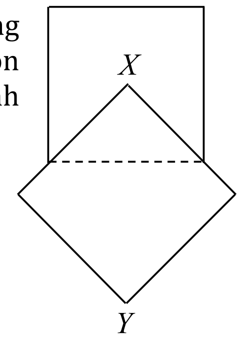
Vậy phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{ll} y=-\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_1) \\ y=\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_1)\end{array}\right.$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x=-4$; $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int\limits_{-4}^{4}\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,dx=\dfrac{5}{2}\int\limits_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\,dx$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=80\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó số tiền là $T=80\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

Câu 70: (MINH HỌA L2) Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY.



A. $V=\dfrac{125\left(1+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$. **B.** $V=\dfrac{125\left(5+2\sqrt{2}\right)\pi}{12}$.

C. $V=\dfrac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$. **D.** $V=\dfrac{125\left(2+\sqrt{2}\right)\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

- ***Cách 1 :***

Khối tròn xoay gồm 3 phần:

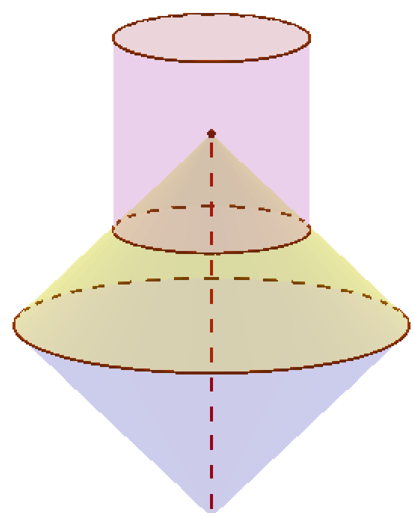
Phần 1: khối trụ có chiều cao bằng 5, bán kính đáy bằng $\dfrac{5}{2}$

có thể tích $V_1=\pi\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\times 5=\dfrac{125\pi}{4}$.

Phần 2: khối nón có chiều cao và bán kính đáy bằng $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ có thể tích

$$V_2=\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{125\pi\sqrt{2}}{12}$$

Phần 3: khối nón cụt có thể tích là

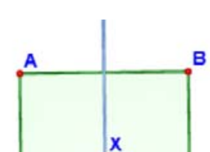


$$V_3=\frac{1}{3}\pi\times\frac{5\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}\times\left(\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{5}{2}\right)=\frac{125\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi}{24}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay là

$$V=V_1+V_2+V_3=\frac{125\pi}{4}+\frac{125\pi\sqrt{2}}{12}+\frac{125\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi}{24}=\frac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}.$$

- ***Cách 2 :***



Thể tích hình trụ được tạo thành từ hình vuông $ABCD$ là

$$V_T = \pi R^2 h = \frac{125\pi}{4}$$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ hình vuông $XEYF$ là

$$V_{2N} = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{125\pi\sqrt{2}}{6}$$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ tam giác XDC là

$$V_{N'} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{125\pi}{24}$$

Thể tích cần tìm $V = V_T + V_{2N} - V_{N'} = 125\pi\frac{5+4\sqrt{2}}{24}$.

Câu 71: Cần phải xây dựng một hố ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $V\left(m^3\right)$, hệ số k cho trước (k - tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy). Gọi $x, y, h > 0$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hố ga. Hãy xác định $x, y, h > 0$ xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất. x, y, h lần lượt là

A. $x = 2\sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = \sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

B. $x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = \sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = 2\sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

C. $x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = 2\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

D. $x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}; y = 6\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}; h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

Hướng dẫn giải

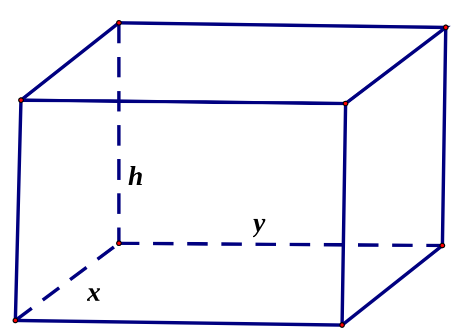
Đáp án C.

Gọi $x, y, h\left(x, y, h > 0\right)$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hố ga.

Ta có: $k = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h = kx$ và $V = xyh \Leftrightarrow y = \frac{V}{xh} = \frac{V}{kx^2}$.

Nên diện tích toàn phần của hố ga là:

$$S = xy + 2yh + 2xh = \frac{\left(2k+1\right)V}{kx} + 2kx^2$$



Áp dụng đạo hàm ta có S nhỏ nhất khi $x=\sqrt[3]{\dfrac{(2k+1)V}{4k^2}}$

Khi đó $y=2\sqrt[3]{\dfrac{2kV}{(2k+1)^2}}, h=\sqrt[3]{\dfrac{k(2k+1)V}{4}}$.

Câu 72: Khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm $x(m)$ so với độ dài tự nhiên là $0{,}15(m)$ của lò xo thì chiếc lò xo trì lại (chống lại) với một lực $f(x)=800x$. Hãy tìm công W sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ $0{,}15(m)$ đến $0{,}18(m)$.

A. $W=36.10^{-2}J$. **B.** $W=72.10^{-2}J$. **C.** $W=36J$. **D.** $W=72J$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A.

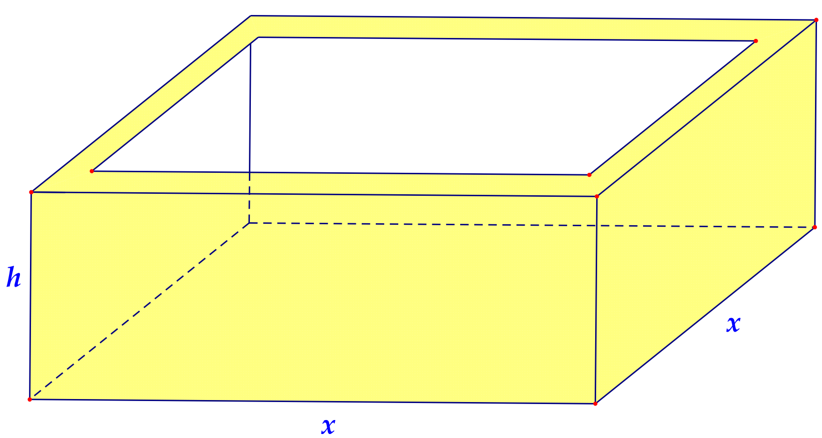
Công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 0,15m đến 0,18m là:

$$W=\int_0^{0,03} 800x.\mathrm{d}x=400x^2\Big|_0^{0,03}=36.10^{-2}J.$$

Chú ý: Nếu lực là một giá trị biến thiên (như nén lò xo) và được xác định bởi hàm $F(x)$ thì công sinh ra theo trục Ox từ a tới b là $A=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$.

Câu 73: Nhân ngày quốc tế phụ nữ 8-3 năm 2017 , ông A quyết định mua tặng vợ một món quà và đặt nó vào trong một chiếc hộp có thể tích là 32 (đvtt) có đáy hình vuông và không có nắp . Để món quà trở nên thật đặc biệt và xứng đáng với giá trị của nó ông quyết định mạ vàng cho chiếc hộp , biết rằng độ dạy lớp mạ tại mọi điểm trên hộp là như nhau . Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là $h;x$. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của $h;x$ phải là ?

A. $x=2;h=4$ **B.** $x=4;h=2$ **C.** $x=4;h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $x=1;h=2$



Hướng dẫn giải

Đáp án B.

Ta có $\begin{cases} S = 4xh + x^2 \\ V = x^2h \to h = \dfrac{V}{x^2} = \dfrac{32}{x^2} \end{cases} \Rightarrow S = 4x.\dfrac{32}{x^2} + x^2 = \dfrac{128}{x} + x^2$, để lượng vàng cần dùng là nhỏ nhất thì Diện tích S phải nhỏ nhất ta có

$S = \dfrac{128}{x} + x^2 = f(x) \to f'(x) = 2x - \dfrac{128}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 4$,

Câu 74: Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn dầu hình trụ bằng tôn có thể tích $16\pi\left(m^3\right)$. Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra ít tốn nguyên vật liệu nhất.

A. $0,8\,(m)$. **B.** $1,2\,(m)$. **C.** $2\,(m)$. **D.** $2,4\,(m)$.

Hướng dẫn giải

Đáp án C.

Gọi $x\left(m\right)$ là bán kính của hình trụ $\left(x > 0\right)$. Ta có: $V = \pi.x^2.h \Leftrightarrow h = \dfrac{16}{x^2}$

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S\left(x\right) = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + \dfrac{32\pi}{x}, \left(x > 0\right)$

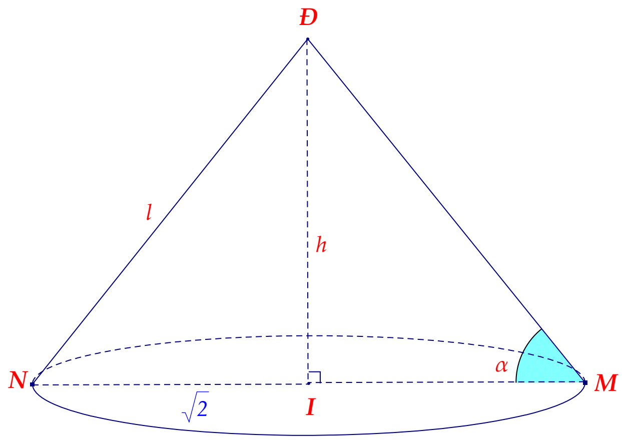
Khi đó: $S'\left(x\right) = 4\pi x - \dfrac{32\pi}{x^2}$, cho $S'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

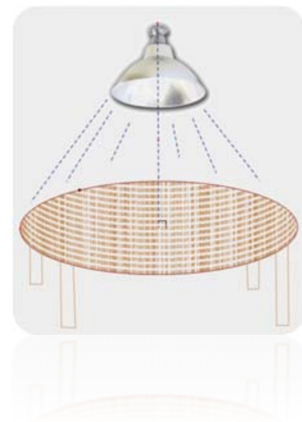
Lập bảng biến thiên, ta thấy diện tích đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 2\left(m\right)$ nghĩa là bán kính là $2m$.

Câu 75: Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C = c\dfrac{\sin\alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện) . Khoảng cách nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là

A. 1m B. 1,2m C. 1.5 m D. 2m

Hướng dẫn giải





Gọi h là độ cao của bóng điện so với mặt bàn (h > 0); Đ là bóng điện; I là hình chiếu của Đ lên mặt bàn. MN là đường kính của mặt bàn.(như hình vẽ)

Ta có $\sin\alpha = \dfrac{h}{l}$ và $h^2 = l^2 - 2$, suy ra cường độ sáng là: $C(l) = c\dfrac{\sqrt{l^2-2}}{l^3}$ $(l > \sqrt{2})$.

$$C'(l) = c.\frac{6-l^2}{l^4.\sqrt{l^2-2}} > 0\left(\forall l > \sqrt{2}\right)$$

$$C'(l) = 0 \Leftrightarrow l = \sqrt{6}\left(l > \sqrt{2}\right)$$

Lập bảng biến thiên ta thu được kết quả C lớn nhất khi $l = \sqrt{6}$, khi đó

Câu 76: Anh Phong có một cái ao với diện tích $50m^2$ để nuôi cá diêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ $20\text{con}/m^2$ và thu được $1,5$ tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi 8 con $/ m^2$ thì mỗi con cá thành phầm thu được tăng thêm $0,5kg$. Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh nên mua bao nhiêu cá giống để thả ? (giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

A. 488 con. **B.** 658 con. **C.** 342 con. **D.** 512 con.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Số cá anh Phong thả trong vụ vừa qua là $50.20 = 1000$ (con)

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần là $\dfrac{1500}{1000} = 1,5kg / con$

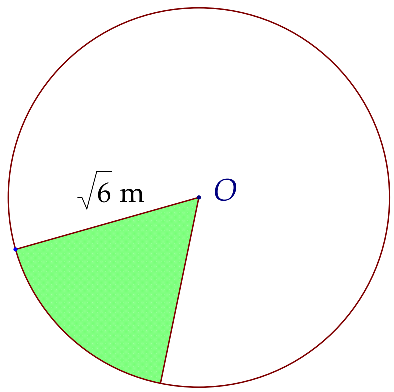
Gọi $x > 0$ là số cá anh cần thả ít đi cho vụ tới nên sẽ tăng $0,0625x$ kg/con

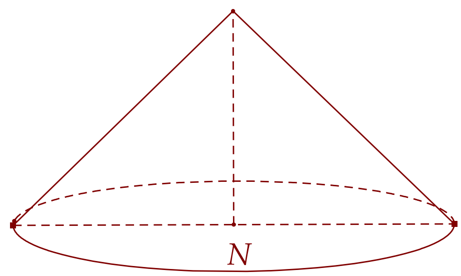
Ta có phương trình tổng khối lượng cá thu được $T = f\left(x\right) = \left(1000 - x\right)\left(1,5 + 0,0625x\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'\left(x\right) = -0,125x + 61 = 0 \Rightarrow x = 488 \\ f''\left(x\right) = -0,125 \end{cases} \Rightarrow \max f\left(x\right) = 16384 \Leftrightarrow x = 488$$

Vậy ở vụ sau anh chỉ cần thả $1000 - 488 = 512$ con cá giống.

Câu 77: Với một đĩa tròn bằng thép tráng có bán kính $R=\sqrt{6}m$ phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình tròn. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón có thể tích cực đại?





A. $\approx 66^\circ$ B. $\approx 294^\circ$ C. $\approx 12,56^\circ$ D. $\approx 2,8^\circ$

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Ta có thể nhận thấy đường sinh của hình nón là bán kính của đĩa tròn. Còn chu vi đáy của hình nón chính là chu vi của đĩa trừ đi độ dài cung tròn đã cắt. Như vậy ta tiến hành giải chi tiết như sau:

Gọi $x(m)$ là độ dài đáy của hình nón (phần còn lại sau khi cắt cung hình quạt của dĩa).

Khi đó $x=2\pi r\Rightarrow r=\dfrac{x}{2\pi}$

Chiều cao của hình nón tính theo định lí PITAGO là $h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\dfrac{x^2}{4\pi^2}}$

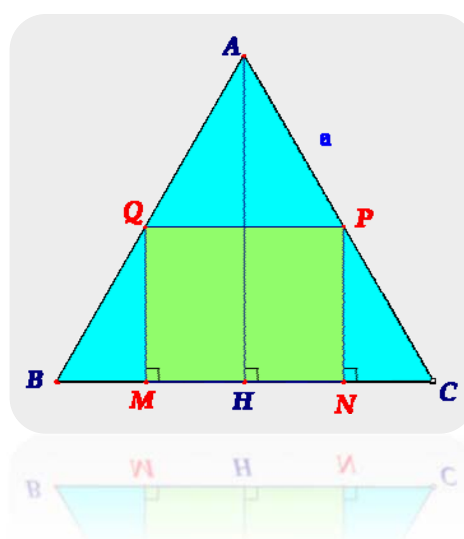
Thể tích khối nón sẽ là : $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{x^2}{4\pi^2}\sqrt{R^2-\dfrac{x^2}{4\pi^2}}$

Đến đây các em đạo hàm hàm $V(x)$ tìm được GTLN của $V(x)$ đạt được khi $x=\dfrac{2\pi}{3}R\sqrt{6}=4\pi$

Suy ra độ dài cung tròn bị cắt đi là : $2\pi R-4\pi$

$\Rightarrow \alpha=\dfrac{2\sqrt{6}\pi-4\pi}{2\sqrt{6}\pi}360^0\approx 66^0$

Câu 78: Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật MNPQ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định giá trị lớn nhất của hình chữ nhật đó?



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{8}a^2$ B. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

C. 0 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow BH = CH = \frac{a}{2}$.Đặt $BM = x$ $\left(\text{Điều kiện } 0 < x < \frac{a}{2}\right)$, ta có:

$$MN = 2MH = 2(BH - BM) = 2\left(\frac{a}{2} - x\right) = a - 2x$$

Tam giác MBQ vuông ở M, $\widehat{B} = 60^0$ và $BM = x \Rightarrow QM = x\sqrt{3}$

Hình chữ nhật MNPQ có diện tích:

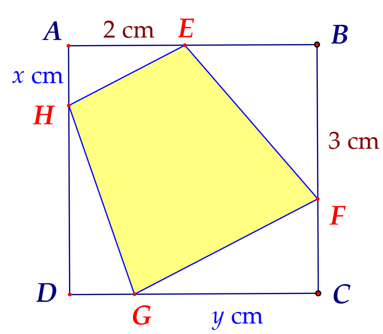
$S(x) = MN.QM = = (a - 2x)x\sqrt{3} = \sqrt{3}(ax - 2x^2)$

$$S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x);\ S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4} \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$$

x	0		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
S'		+	0	−	
S		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$	$\searrow$	

Vậy $\max\limits_{x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$ khi $x = \frac{a}{4}$

Câu 79: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang EFGH đạt giá trị nhỏ nhất.



A. 7 B. 5 C. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ D. $4\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH}$ lớn nhất.

Tính được $2S = 2x + 3y + (6-x)(6-y) = xy - 4x - 3y + 36$ (1)

Mặt khác ΔAEH đồng dạng ΔCGF nên $\dfrac{AE}{CG} = \dfrac{AH}{CF} \Rightarrow xy = 6$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2S = 42 - (4x + \dfrac{18}{x})$. Ta có 2S lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \dfrac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Biểu thức $4x + \dfrac{18}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4x = \dfrac{18}{x} \Rightarrow x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$.

Câu 80: Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích $96000cm^3$. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70000 VNĐ/m² và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100000 VNĐ/m². Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

A. 320000 VNĐ. **B.** 32000 VNĐ. **C.** 832000 VNĐ. **D.** 83200 VNĐ.

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Gọi $x, y\left(m\right)\left(x > 0, y > 0\right)$ là chiều dài và chiều rộng của đáy bể, khi đó theo đề ta suy ra $0,6xy = 0,096 \Leftrightarrow y = \dfrac{0,16}{x}$. Giá thành của bể cá được xác định theo hàm số sau:

$f\left(x\right) = 2.0,6\left(x + \dfrac{0,16}{x}\right).70000 + 100000x\dfrac{0,16}{x} \Leftrightarrow f\left(x\right) = 84000\left(x + \dfrac{0,16}{x}\right) + 16000$ (VNĐ)

$f'\left(x\right) = 84000\left(1 - \dfrac{0,16}{x^2}\right), f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0		$0,4$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(0,4)$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là $f\left(0,4\right) = 83200$ VNĐ

Câu 81: Một vật chuyển động với phương trình vận tốc là: $v\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin\left(\pi t\right)}{\pi}\left(m/s\right)$. Tính quãng đường vật đó di chuyển được trong khoảng thời gian 5 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. $S\approx 0,9m$. **B.** $S\approx 0,998m$. **C.** $S\approx 0,99m$. **D.** $S\approx 1m$.

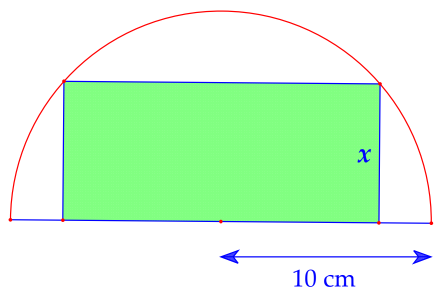
Hướng dẫn giải

Đáp án D

Ta có $S=\int_0^5\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin\left(\pi t\right)}{\pi}\right)dt\approx 0,99842m$.

Vì làm tròn kết quả đến hàng phần trăm nên $S\approx 1m$.

Câu 82: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $10cm$, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.



A. $80cm^2$ **B.** $100cm^2$ **C.** $160cm^2$ **D.** $200cm^2$

Gọi $x(cm)$ là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính đường tròn $\left(0<x<10\right)$.

Khi đó độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường tròn là: $2\sqrt{10^2-x^2}\ \left(cm\right)$.

Diện tích hình chữ nhật: $S=2x\sqrt{10^2-x^2}$

Ta có $S'=2\sqrt{10^2-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{10^2-x^2}}=2.10^2-4x^2$

$$S'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=\frac{10\sqrt{2}}{2} & \left(\text{thỏa}\right)\\ x=-\frac{10\sqrt{2}}{2} & \left(\text{không thỏa}\right)\end{array}\right.$$

$S''=-8x\Rightarrow S''\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right)=-40\sqrt{2}<0$. Suy ra $x=\frac{10\sqrt{2}}{2}$ là điểm cực đại của hàm $S\left(x\right)$.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là: $\text{S}=10\sqrt{2}.\sqrt{10^2-\frac{10^2}{2}}=100\ \left(cm^2\right)$

Câu 83: Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm Hải Vân (Đà Nẵng) được cho bởi công thức $f\left(v\right)=\dfrac{290,4\,v}{0,36v^2+13,2v+264}$ (xe/giây), trong đó $v\left(km/h\right)$ là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính lưu lượng xe là lớn nhất. Kết quả thu được gần với giá trị nào sau đây nhất ?

A. 9. **B.** $8,7$. **C.** $8,8$. **D.** $8,9$.

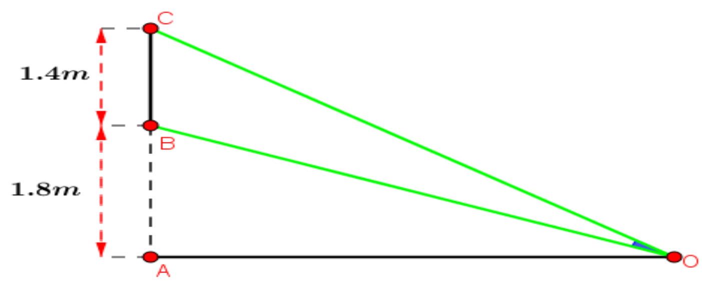
Hướng dẫn giải

Đáp án D

Ta có $f'\left(v\right)=\dfrac{290,4\left(-0,36v^2+264\right)}{\left(0,36v^2+13,2v+264\right)^2}$ với $v>0$. $f'\left(v\right)=0\Leftrightarrow v=\dfrac{\sqrt{264}}{0,6}$

Khi đó $\underset{v\in\left(0;+\infty\right)}{Max}f\left(v\right)=f\left(\dfrac{\sqrt{264}}{0,6}\right)\approx 8,9$ (xe/giây)

Câu 84: Một màn ảnh hình chữ nhật cao $1,4m$ và đặt ở độ cao $1,4m$ so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó ? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ nhọn.



A. $AO=2,4m$. **B.** $AO=2m$.

C. $AO=2,6m$. **D.** $AO=3m$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Đặt độ dài cạnh $AO=x\left(m\right),\left(x>0\right)$

Suy ra $BO=\sqrt{3,24+x^2},CO=\sqrt{10,24+x^2}$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\cos\widehat{BOC}=\frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2OB.OC}=\frac{\left(3,24+x^2\right)+\left(10,24+x^2\right)-1,96}{2\sqrt{\left(3,24+x^2\right)\left(10,24+x^2\right)}}$$

$$=\frac{5,76+x^2}{\sqrt{\left(3,24+x^2\right)\left(10,24+x^2\right)}}$$

Vì góc $\widehat{BOC}$ nên bài toán trở thành tìm x để $F\left(x\right)=\dfrac{5,76+x^2}{\sqrt{\left(3,24+x^2\right)\left(10,24+x^2\right)}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $\left(3,24+x^2\right)=t,\left(t>3,24\right)$. Suy ra $F\left(t\right)=\dfrac{t+\dfrac{63}{25}}{\sqrt{t\left(t+7\right)}}=\dfrac{25t+63}{25\sqrt{t\left(t+7\right)}}$

Ta đi tìm t để F(t) đạt giá trị nhỏ nhất.

$$F'\left(t\right)=\frac{25t+63}{25\sqrt{t\left(t+7\right)}}=\frac{1}{25}\left(\frac{25\sqrt{t\left(t+7\right)}-\left(25t+63\right)\left(\dfrac{2t+7}{2\sqrt{t\left(t+7\right)}}\right)}{t\left(t+7\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{25}\left(\frac{50\left(t^2+7t\right)-\left(25t+63\right)\left(2t+7\right)}{2t\left(t+7\right)\sqrt{t\left(t+7\right)}}\right)=\frac{1}{25}\left(\frac{49t-441}{2t\left(t+7\right)\sqrt{t\left(t+7\right)}}\right)$$

$F'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=9$

Bảng biến thiên

t	3,24		9		$+\infty$
$F'\left(t\right)$		-	0	+	
$F\left(t\right)$		$\searrow$	$F_{\min}$	$\nearrow$	

Thay vào đặt ta có: $\left(3,24+x^2\right)=9\Leftrightarrow x^2=\dfrac{144}{25}\Leftrightarrow x=2,4\,\mathrm{m}$

Vậy để nhìn rõ nhất thì $AO=2,4m$

Câu 85: Một công ty nhận làm những chiếc thùng phi kín hay đáy với thể tích theo yêu cầu là $2\pi\,m^3$ mỗi chiếc yêu cầu tiết kiệm vật liệu nhất. Hỏi thùng phải có bán kính đáy R và chiều cao h là bao nhiêu ?

A. $R=2m,h=\dfrac{1}{2}m$. **B.** $R=\dfrac{1}{2}m,h=8m$. **C.** $R=4m,h=\dfrac{1}{8}m$. **D.** $R=1m,h=2m$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Gọi R là bán kính đáy thùng (m), h: là chiều cao của thùng (m). ĐK: $R>0,h>0$

Thể tích của thùng là: $V=\pi R^2h=2\pi\Leftrightarrow R^2h=2\Leftrightarrow h=\dfrac{2}{R^2}$

Diện tích toàn phần của thùng là:

$$S_{tp} = 2\pi\mathrm{R}h + 2\pi\mathrm{R}^2 = 2\pi\mathrm{R}\left(h + R\right) = 2\pi\mathrm{R}\left(\frac{2}{R^2} + R\right) = 2\pi\left(\frac{2}{R} + R^2\right)$$

Đặt $f\left(t\right) = 2\pi\left(\frac{2}{t} + t^2\right)\left(t > 0\right)$ với $t = R$

$$f'\left(t\right) = 4\pi\left(t - \frac{1}{t^2}\right) = \frac{4\pi\left(t^3 - 1\right)}{t^2}, f'\left(1\right) = 0 \Leftrightarrow t^3 = 1 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'\left(t\right)$			-	0	+	
$f\left(t\right)$			$\searrow$	Min	$\nearrow$	

Vậy ta cần chế tạo thùng với kích thước $R = 1m, h = 2m$

Câu 86: Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là $10\$$ một cái mỗi năm. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là $20\$$ cộng thêm $9\$$ mỗi cái. Cửa hàng nên đặt hàng bao nhiêu lần trong mỗi năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất ?

A. Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 cái ti vi.

B. Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 100 cái ti vi.

C. Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 90 cái ti vi.

D. Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 90 cái ti vi.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Gọi x là số ti vi mà cửa hàng đặt mỗi lần ($x \in \left[1;2500\right]$, đơn vị cái)

Số lượng ti vi trung bình gửi trong kho là $\frac{x}{2}$ nên chi phí lưu kho tương ứng là $10.\frac{x}{2} = 5x$

Số lần đặt hàng mỗi năm là $\frac{2500}{x}$ và chi phí đặt hàng là: $\frac{2500}{x}\left(20 + 9x\right)$

Khi đó chi phí mà cửa hàng phải trả là: $C\left(x\right) = \frac{2500}{x}\left(20 + 9\mathrm{x}\right) + 5\mathrm{x} = 5\mathrm{x} + \frac{50000}{x} + 22500$

Lập bảng biến thiên ta được: $C_{\min} = C\left(100\right) = 23500$

Kết luận: đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 cái tivi.

Câu 87: Tính đến đầu năm 2011, dân số toàn tỉnh Bình Phước đạt gần $905\,300$, mức tăng dân số là $1,37\%$ mỗi năm. Tỉnh thực hiện tốt chủ trương 100% Trẻ em đúng độ tuổi đều vào lớp 1. Đến năm học $2024-2025$ ngành giáo dục của tỉnh cần chuẩn bị bao nhiêu phòng học cho học sinh lớp 1, mỗi phòng dành cho 35 học sinh? (Giả sử trong năm sinh của lứa học sinh vào lớp 1 đó toàn tỉnh có 2400 người chết, số trẻ tử vong trước 6 tuổi không đáng kể)

A. 459. **B.** 222. **C.** 458. **D.** 221.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Chỉ những em sinh năm 2018 mới đủ tuổi đi học (6 tuổi) vào lớp 1 năm học 2024-2025.

Áp dụng công thức $S_n = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ để tính dân số năm 2018.

Trong đó: $A = 905300; r = 1,37; n = 8$

Dân số năm 2018 là: $A = 905300.\left(1+\frac{1,37}{100}\right)^8 = 1009411$

Dân số năm 2017 là: $A = 905300.\left(1+\frac{1,37}{100}\right)^7 = 995769$

Số trẻ vào lớp 1 là: $1009411 - 995769 + 2400 = 16042$

Số phòng học cần chuẩn bị là : $16042 : 35 = 458,3428571$.

Câu 88: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái đạp phân, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10\,(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $0,2m$. **B.** $2m$. **C.** $10m$. **D.** $20m$.

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Ta có ô tô đi được thêm 2 giây nữa với vận tốc chậm dần đều $v(t) = -5t + 10\,(m/s)$

ứng dụng tích phân, ta có quãng đường cần tìm là:

$$S = \int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (-5t+10)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t\right)\Big|_0^2 = 10\,(m)$$

* Lúc dừng thì ta có: $v(t) = 0 \Rightarrow -5t + 10 = 0 \Rightarrow t = 2$

Từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn, ô tô đi được quãng đường: $S = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Với $\begin{cases} a = -5 \\ t = 2 \\ v_0 = 10 \end{cases} \Rightarrow S = 10.2 + \dfrac{1}{2}(-5).2^2 = 10(m)$

* Áp dụng công thức lý 10 ta có: $v_2^2 - v_1^2 = 2.a.s$

Ta còn có công thức liên hệ giữa vận tốc và gia tốc: $v = v_0 + a.t$

Dựa vào phương trình chuyển động thì $a = -5(m/s^2)$

Khi dừng hẳn thì ta có $v_2 = 0(m/s)$

Theo công thức ban đầu, ta được $s = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \dfrac{0 - 10^2}{2.(-5)} = 10(m)$.

Câu 89: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thể 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu ?

A. $2.250.000$. **B.** $2.350.000$. **C.** $2.450.000$. **D.** $2.550.000$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Gọi x là giá cho thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x – đồng; $x \geq 2000.000$ đồng).

Số căn hộ cho thuê được ứng với giá cho thuê:

$$50 - \frac{1}{50000}(x - 2000000) = -\frac{1}{50.000}x + 90, (1)$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

Ta có $F(x) = \left(-\dfrac{1}{50.000}x + 90\right)x = -\dfrac{1}{50.000}x^2 + 90\text{x}$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $F(x) = -\dfrac{1}{50.000}x^2 + 90\text{x}$ với điều kiện $x \geq 2000.000$

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$

Ta lập bảng biến thiên:

x	2000.000	2.250.000	$+\infty$

$F'(x)$	$+$	0	$-$
$F(x)$	$\nearrow$	F_{max}	$\searrow$

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

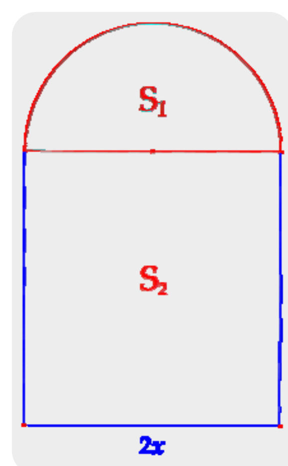
Vậy công ty phải cho thuê với giá $2.250.000$ đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Nhận xét: Làm sao ta có thể tìm được hệ số $\dfrac{1}{50000}$ trong biểu thức (1) ?

Ta có thể hiểu đơn giản như sau: Số căn hộ cho thuê mỗi tháng ứng với số tiền cho thuê; $50 - m(x - 2000.000)x = 2.000.000$ thì số căn hộ được thuê là 50. Nếu số tiền cho thuê tăng lên là $x = 2.100.000$ thì có 2 căn hộ để trống, nghĩa là có 48 người thuê. Ta có:

$$50 - m(2.100.000 - 2.000.000) = 48 \Leftrightarrow m = \frac{1}{50000}.$$

Câu 90: Cần phải làm cái cửa sổ mà, phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là $a(m)$ (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Hãy xác định các kích thước của nó để diện tích cửa sổ là lớn nhất?



A. chiều rộng bằng $\dfrac{2a}{4+\pi}$, chiều cao bằng $\dfrac{a}{4+\pi}$

B. chiều rộng bằng $\dfrac{a}{4+\pi}$, chiều cao bằng $\dfrac{2a}{4+\pi}$

C. chiều rộng bằng $a(4+\pi)$, chiều cao bằng $2a(4+\pi)$

D. chiều rộng bằng $a(4-\pi)$, chiều cao bằng $2a(4-\pi)$

Hướng dẫn giải

Đáp án A

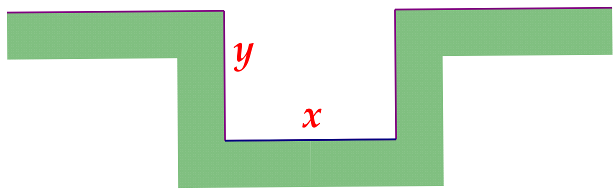
Gọi x là bán kính của hình bán nguyệt. Ta có chu vi của hình bán nguyệt là πx, tổng ba cạnh của hình chữ nhật là $a - \pi x$. Diện tích cửa sổ là:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi x^2}{2} + 2x\frac{a - \pi x - 2x}{2} = ax - (\frac{\pi}{2} + 2)x^2 = (\frac{\pi}{2} + 2)x(\frac{a}{\frac{\pi}{2} + 2} - x).$$

Dễ thấy S lớn nhất khi $x = \dfrac{a}{\dfrac{\pi}{2}+2} - x$ hay $x = \dfrac{a}{4+\pi}$.(Có thể dùng đạo hàm hoặc đỉnh Parabol)

Vậy để S_{max} thì các kích thước của nó là: chiều cao bằng $\dfrac{a}{4+\pi}$; chiều rộng bằng $\dfrac{2a}{4+\pi}$

Câu 91: Trong lĩnh vực thuỷ lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng "Thuỷ động học" (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là S, ℓ là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này, ℓ - đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thuỷ động học nếu với S xác định, ℓ là nhỏ nhất). Cần xác định các kích thước của mương dẫn nước như thế nào để có dạng thuỷ động học? (nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật)



A. $x = \sqrt{4S}, y = \sqrt{\dfrac{S}{4}}$

B. $x = \sqrt{4S}, y = \sqrt{\dfrac{S}{2}}$

C. $x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{\dfrac{S}{4}}$

D. $x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{\dfrac{S}{2}}$

Hướng dẫn giải

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều cao của mương. Theo bài ra ta có: S = xy; $\ell = 2y + x = \dfrac{2S}{x} + x$. Xét hàm số $\ell(x) = \dfrac{2S}{x} + x$. Ta có $\ell'(x) = \dfrac{-2S}{x^2} + 1 = \dfrac{x^2 - 2S}{x^2}$.

$\ell'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2S = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2S}$, khi đó $y = \dfrac{S}{x} = \sqrt{\dfrac{S}{2}}$.

Dễ thấy với x, y như trên thì mương có dạng thuỷ động học, vậy các kích thước của mương là $x = \sqrt{2S}$, $y = \sqrt{\dfrac{S}{2}}$ thì mương có dạng thuỷ động học.

Câu 92: Một thợ xây muốn sử dụng 1 tấm sắt có chiều dài là $4m$, chiều rộng $1m$ để uốn thành $2m$ khung đúc bê tông, 1 khung hình trụ có đáy là hình vuông và 1 khung hình trụ có đáy là hình tròn. Hỏi phải chia tấm sắt thành 2 phần (theo chiều dài) như thế nào để tổng thể tích 2 khung là nhỏ nhất ?

A. Khung có đáy là hình vuông, khung có đáy là hình tròn lần lượt có chiều dài là $\dfrac{4}{\pi+4}, \dfrac{2}{\pi+4}$.

B. Khung có đáy là hình vuông, khung có đáy là hình tròn lần lượt có chiều dài là $\dfrac{2}{\pi+4}, \dfrac{4\pi}{\pi+4}$.

C. Khung có đáy là hình vuông, khung có đáy là hình tròn lần lượt có chiều dài là $\frac{2}{\pi+4}, \frac{4\pi+14}{\pi+4}$.

D. Khung có đáy là hình vuông, khung có đáy là hình tròn lần lượt có chiều dài là $\frac{4\pi+14}{\pi+4}, \frac{2}{\pi+4}$.

Hướng dẫn giải

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khung hình trụ có đáy là hình vuông và khung hình trụ có đáy là hình tròn. Gọi a là chiều dài của cạnh hình vuông và r là bán kính của hình tròn.
Ta có: $V_1 + V_2 = a^2 + \pi r^2$ (đơn vị thể tích).

Mà $4a + 2\pi r = 4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}\left(2 - \pi r\right), 0 < r < \frac{2}{\pi}$. Suy ra $V\left(r\right) = V_1 + V_2 = \pi r^2 + \frac{1}{4}\left(2 - \pi r\right)^2$.

$V'\left(r\right) = 2\pi r - \frac{1}{4}\pi\left(2 - \pi r\right)$, $V'\left(r\right) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2}{\left(\pi + 4\right)}$. Lập bảng biến thiên suy ra $V_{\min} = \left(\frac{4}{\pi+4}\right)$.

Vậy, phải chia tấm sắt thành 2 phần: phần làm lăng trụ có đáy là hình vuông là $\frac{4\pi}{\left(\pi+4\right)}\left(m\right)$.

Câu 93: Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích $27cm^3$ với chiều cao là h và bán kính đáy là r để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất thì giá trị của r là:

A. $r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$.   **B.** $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.   **C.** $r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.   **D.** $r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$.

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Thể tích của cốc: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 27 \Rightarrow r^2 h = \frac{81}{\pi} \Rightarrow h = \frac{81}{\pi}.\frac{1}{r^2}$

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi và chỉ khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

$$S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi r\sqrt{r^2 + h^2} = 2\pi r\sqrt{r^2 + \frac{81^2}{\pi^2}\frac{1}{r^4}} = 2\pi\sqrt{r^4 + \frac{81^2}{\pi^2}\frac{1}{r^2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{r^4 + \frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2} + \frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}} \geq 2\pi\sqrt{3\sqrt[3]{r^4.\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}.\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}}}$$

$= 2\sqrt{3}\pi\sqrt[6]{\frac{81^4}{4\pi^4}}$ (theo BĐT Cauchy)

S_{xq} nhỏ nhất $\Leftrightarrow r^4 = \frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2} \Leftrightarrow r^6 = \frac{3^8}{2\pi^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.

Câu 94: Giả sử tỉ lệ lạm phát của Việt Nam trong 10 năm qua là 5%. Hỏi nếu năm 2007, giá xăng là 12000 VND/lít. Hỏi năm 2016 giá tiền xăng là bao nhiêu tiền một lít.

A. $11340,000$ VND/lít. **B.** 113400 VND/lít.

C. $18615,94$ VND/lít. **D.** $186160,94$ VND/lít.

Hướng dẫn giải

Đáp án C

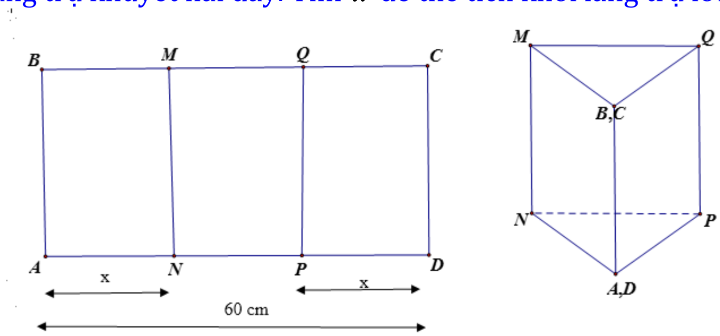
Giá xăng năm 2008 là $12000(1+0,05)$

Giá xăng năm 2009 là $12000(1+0,05)^2$

...

Giá xăng năm 2016 là $12000(1+0,05)^9 \approx 18615,94$ VND/lit.

Câu 95: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60cm$. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất ?



A. $x = 20$. **B.** $x = 15$. **C.** $x = 25$. **D.** $x = 30$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

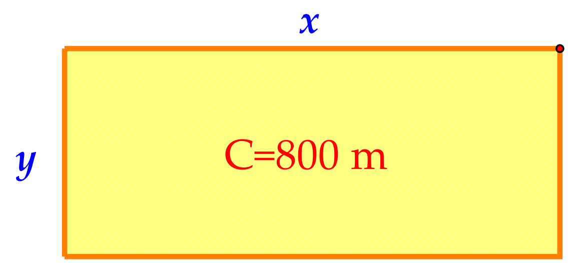
Ta có $PN = 60 - 2x$, gọi H là trung điểm của PN suy ra $AH = \sqrt{60x - 900}$

$S_{\Delta ANP} = \frac{1}{2}.(60-2x)\sqrt{60x-900} = (60-2x)\left(\sqrt{15x-225}\right) = f(x)$, do chiều cao của khối lăng trụ không đổi nên thể tích khối lăng trụ max khi $f(x)$ max.

$f'(x) = \frac{-45(x-20)}{\sqrt{15x-225}} = 0 \Leftrightarrow x = 20, f(20) = 100\sqrt{3}, f(15) = 0$

$\max f\left(x\right) = 100\sqrt{3}$ khi $x = 20$

Câu 96: Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng $800(m)$. Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?



A. $200m \times 200m$ **B.** $300m \times 100m$ **C.** $250m \times 150m$ **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng đất lần lượt là: $x(m)$ và $y(m)$ $(x, y > 0)$.

Diện tích miếng đất: $S = xy$

Theo đề bài thì: $2(x + y) = 800$ hay $y = 400 - x$. Do đó: $S = x(400 - x) = -x^2 + 400x$ với $x > 0$

Đạo hàm: $S'(x) = -2x + 400$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 200$.

Lập bảng biến thiên ta được: $S_{\max} = 40000$ khi $x = 200 \Rightarrow y = 200$.

Kết luận: Kích thước của miếng đất hình chữ nhật là 200×200 (là hình vuông).

Lưu ý: Có thể đánh giá bằng BĐT Cô-Sy.

Câu 97: Một trang chữ của một tạp chí cần diện tích là $384cm^2$. Lề trên, lề dưới là 3cm; lề phải, lề trái là 2cm. Khi đó chiều ngang và chiều dọc tối ưu của trang giấy lần lượt là:

A. $24cm,\ 25cm.$ **B.** $15cm,\ 40cm.$ **C.** $20cm,\ 30cm.$ **D.** $22,2cm,\ 27cm.$

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Gọi $a, b\left(cm\right)\left(a > 0, b > 0\right)$ là độ dài chìu dọc và chìu ngang của trang chữ suy ra kích thước trang giấy là $a + 6, b + 4$

Ta có: $a.b = 384 \Rightarrow b = \dfrac{384}{a}\left(1\right)$

Diện tích trang sách là: $S = \left(a + 6\right)\left(b + 4\right) \Leftrightarrow S = 4a + \dfrac{2304}{a} + 408$

Theo bất đẳng thức CAUCHY ta có: $\Leftrightarrow S \geq 2\sqrt{4a.\dfrac{2304}{a}} + 408 = 600$

Suy ra $MinS = 600 \Leftrightarrow 4a = \dfrac{2304}{a} \Leftrightarrow a = 24$, suy ra chiều dọc và chiều ngang tối ưu là: $30cm, 20cm$

Câu 98: Ông Bình muốn thiết kế mái cho một xưởng may có diện tích $20000\ m^2$ có hai đồ án như sau:

- Công ty A thiết kế dạng hình vuông với mái là hình chóp tứ giác đều có chiều cao bằng $70m$.
- Công ty B thiết kế dạng hình tròn với mái là nửa mặt cầu úp xuống.

Hỏi thiết kế của công ty A giúp tiết kiệm diện tích mái hơn bao nhiêu m^2?

A. $11857\ m^2$. **B.** $20000\ m^2$. **C.** $9000\ m^2$. **D.** $5000\ m^2$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Phương án A: Hình chóp tứ giác đều

Chiều dài của cạnh bên là $\sqrt{h^2+\left(50\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4900+5000}=30\sqrt{11}\left(h=70\right)$

Độ dài cạnh đáy là: $\sqrt{20000}$

chiều cao mặt bên.cạnh đáy $=2.30\sqrt{11}.100\sqrt{2}=6000\sqrt{22}\left(m^2\right)$

Phương án B: Mặt cầu:

Diện tích hình tròn lớn bằng

$$20000m^2\Rightarrow \pi R^2=20000\Rightarrow R=\sqrt{\frac{20000}{\pi}};S_{mat}=2\pi R^2=2\pi\frac{20000}{\pi}=40000m^2$$

Kết luận: Vậy phương án A giúp tiết kiện diện tích mái hơn

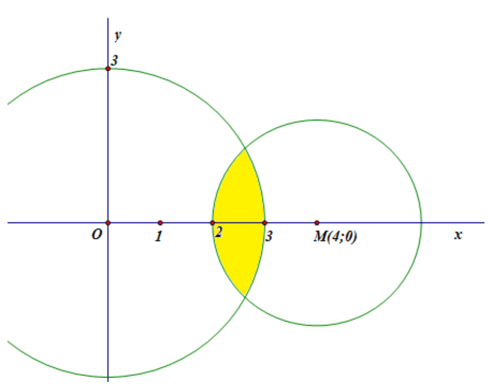
$40000m^2-6000\sqrt{22}m^2=11857\,m^2$

Câu 99: Trên cánh đồng cỏ có 2 con bò được cột vào 2 cây cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa 2 cọc là 4 mét còn 2 sợi dây cột 2 con bò dài 3 mét và 2 mét. Tính phần diện tích mặt cỏ lớn nhất mà 2 con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

A. $1,034\,\text{m}^2$ **B.** $1,574\,\text{m}^2$ **C.** $1,989\,\text{m}^2$ **D.** $2,824\,\text{m}^2$

Hướng dẫn giải

Diện tích mặt cỏ ăn chung sẽ lớn nhất khi 2 sợi dây được kéo căng và là phần giao của 2 đường tròn.



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ, gọi O,M là vị trí của cọc. Bài toán đưa về tìm diện tích phần được tô màu.

Ta có phương trình đường tròn tâm $\left(O\right): x^2+y^2=3^2$ và phương trình đường tròn tâm $\left(M\right):\left(x-4\right)^2+y^2=2^2$

Phương trình các đường cong của đường tròn nằm phía trên trục Ox là: $y=\sqrt{9-x^2}$ và $y=\sqrt{4-\left(x-4\right)^2}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4-\left(x-4\right)^2}=\sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow 4+8x-16=9 \Leftrightarrow x=\dfrac{21}{8}$

Diện tích phần được tô màu là: $S=2\left[\int_2^{\frac{21}{8}}\sqrt{4-\left(x-4\right)^2}dx+\int_{\frac{21}{8}}^3\sqrt{9-x^2}dx\right]\approx 1{,}989$. Ta có thể giải tích phân này bằng phép thế lượng giác, tuy nhiên để tiết kiệm thời gian nên bấm máy. Chọn **C**.

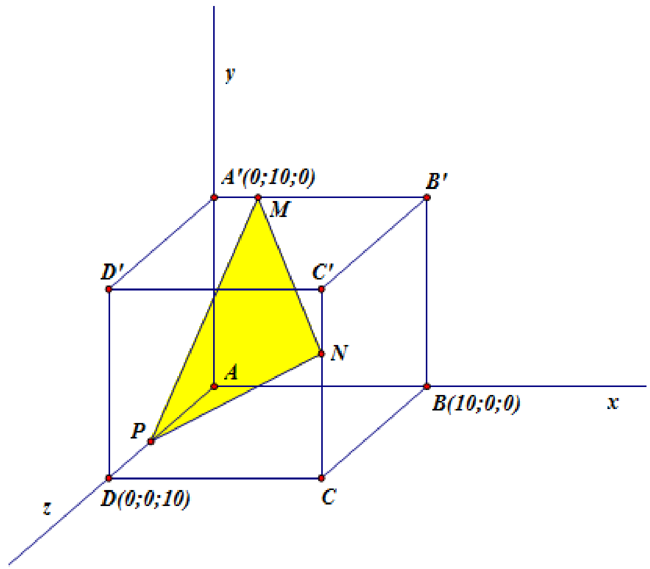
Câu 100: Bên trong một căn nhà bỏ hoang hình lập phương thể tích 1000 m³ có 3 chú nhện con rất hay cãi vã nên phải sống riêng. Mùa đông đến, vì đói rét nên chúng đành quyết định hợp tác với nhau giăng lưới để bắt mồi. Ba chú nhện tính toán sẽ giăng một mảnh lưới hình tam giác theo cách sau: Mỗi chú nhện sẽ đứng ở mép tường bất kì (có thể mép giữa 2 bức tường, giữa tường với trần, hoặc giữa tường với nền) rồi phóng những sợi tơ làm khung đến vị trí cũng 2 con nhện còn lại rồi sau đó mới phóng tơ dính đan phần lưới bên trong. Nhưng vì vốn đã có hiềm khích từ lâu, nên trước khi bắt đầu, chúng quy định để tránh xô xát, không có bất kì 2 con nhện nào cùng nằm trên một mặt tường, nền hoặc trần nhà. Tính chu vi nhỏ nhất của mảnh lưới được giăng (biết các sợi tơ khung căng và không nhùn).

A. $15\sqrt{6}$ mét **B.** $2\sqrt{30}$ mét **C.** $12\sqrt{10}$ mét **D.** $10\sqrt{2}$ mét

Hướng dẫn giải

Bài toán này ta sẽ giải quyết bằng cách ứng dụng phương pháp tọa độ trong không gian.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Không mất tính tổng quát, và dựa vào yêu cầu về vị trí 3 con nhện ta xác định là các điểm M,N,P nằm trên các cạnh $A'B',CC',AD$ như hình vẽ.



Yêu cầu bài toán là cần tìm tọa độ của 3 điểm M,N,P để chu vi tam giác MNP nhỏ nhất.

Đặt $M\left(x;10;0\right),P\left(0;0;z\right),N\left(10;y;10\right)$. Chu vi tam giác MNP là:

$$MN+NP+PQ=\sqrt{\left(x-10\right)^2+\left(y-10\right)^2+10^2}+\sqrt{10^2+y^2+\left(z-10\right)^2}+\sqrt{x^2+10^2+z^2}$$
$$=\sqrt{\left(10-x\right)^2+\left(y-10\right)^2+10^2}+\sqrt{y^2+\left(z-10\right)^2+10^2}+\sqrt{z^2+\left(-x\right)^2+10^2}$$

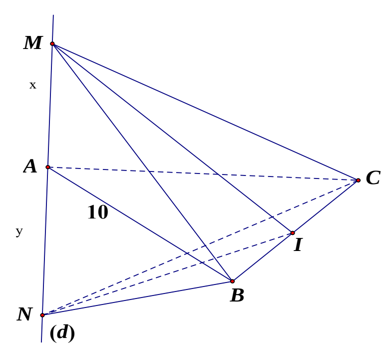
Áp dụng bất đẳng thức vecto :

$$\Rightarrow MN+NP+PM\ge\sqrt{\left(10-x+y\right)^2+\left(y+z-20\right)^2+20^2}+\sqrt{z^2+\left(-x\right)^2+10^2}$$
$$\ge\sqrt{\left(10-x+y+z\right)^2+\left(y-10+z-10-x\right)^2+\left(10+10+10\right)^2}$$
$$=\sqrt{2\left(y+z-x-5\right)^2+450+\left(10+10+10\right)^2}\ge15\sqrt{6}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}y+z-x=5\\ \dfrac{10-x}{y}=\dfrac{y-10}{z-10}=\dfrac{10}{10}\\ \dfrac{10-x+y}{z}=\dfrac{y+z-20}{-x}=\dfrac{20}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=z\\ 2y-x=5\\ x+y=10\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=5$

Vậy giá trị cần tìm là $15\sqrt{6}$. Chọn **A.**

Câu 101: Một ngôi nhà có nền dạng tam giác đều ABC cạnh dài $10\left(m\right)$ được đặt song song và cách mặt đất $h\left(m\right)$. Nhà có 3 trụ tại $A,\ B,\ C$ vuông góc với $\left(ABC\right)$. Trên trụ A người ta lấy hai điểm $M,\ N$ sao cho $AM=x,AN=y$ và góc giữa $\left(MBC\right)$ và $\left(NBC\right)$ bằng 90° để là mái và phần chứa đồ bên dưới. Xác định chiều cao thấp nhất của ngôi nhà.



A. $5\sqrt{3}$. B. $10\sqrt{3}$.

C. 10. D. 12.

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Để nhà có chiều cao thấp nhất ta phải chọn N nằm trên mặt đất. Chiều cao của nhà là $NM = x + y$.

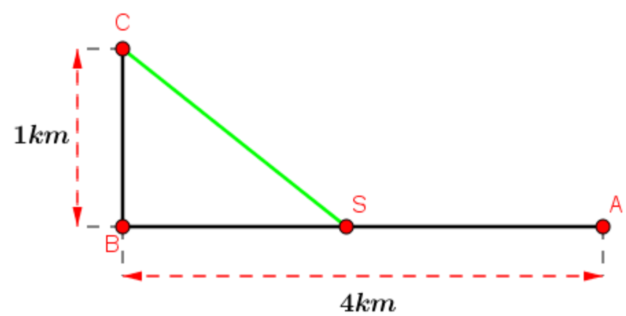
Gọi I là trung điểm của BC. Ta có ΔABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$, vì $MN \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp BC$, từ đó suy ra $\Rightarrow BC \perp (MNI) \Rightarrow \begin{cases} MI \perp BC \\ NI \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{MIN} = 90^0$

ΔIMN vuông tại I nhận AI là đường cao nên $\Rightarrow AM.AN = AI^2 \Rightarrow xy = \left(\frac{10\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 75$

Theo bất đẳng thức Côsi: $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2.\sqrt{75} = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = 5\sqrt{3}$

Do đó chiều cao thấp nhất của nhà là $10\sqrt{3}$.

Câu 102: **(NHO QUAN A)** Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C. khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1 km. Khoảng cách từ B đến A là 4. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất.



A. $\frac{15}{4}$ km B. $\frac{13}{4}$ km C. $\frac{10}{4}$ D. $\frac{19}{4}$

Hướng dẫn giải

Trước tiên, ta xây dựng hàm số $f(x)$ là hàm số tính tổng chi phí sử dụng.

Đặt $BS = x$ thì ta được: $SA = 4 - x$, $CS = \sqrt{x^2 + 1}$. Theo đề bài, mỗi km dây điện đặt dưới nước mất 5000USD, còn đặt dưới đất mất 3000USD, như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định như sau:

$f(x) = 3000.(4 - x) + 5000.\sqrt{x^2 + 1}$ với $x \in [0;4]$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được số tiền ít nhất cần sử dụng và từ đó xác định được vị trí điểm S.

$f'(x) = -3000 + 5000.\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -3000+5000.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0 \Leftrightarrow -3000\sqrt{x^2+1}+5000x=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1}=5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}16x^2=9\\ x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\frac{3}{4}\\ x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}.$$

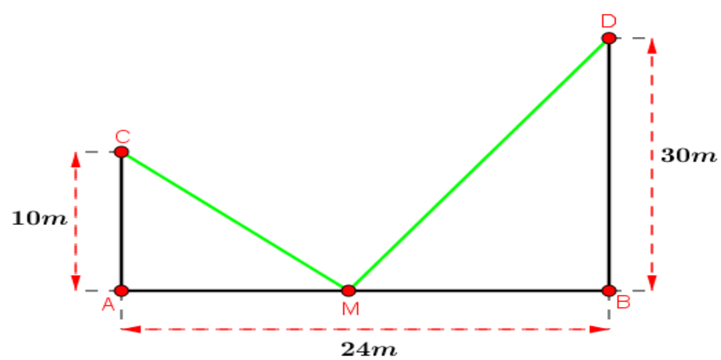
Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$.

Ta có: $f(0)=17000,\ f\left(\frac{3}{4}\right)=16000,\ f(4)=20615,52813.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 16000 và tại $x=\frac{3}{4}$. Khi đó chi phí là thấp nhất và điểm S nằm cách A một đoạn $SA=4-x=4-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$.

Vậy đáp án là **B**.

Câu 103: (THTT SỐ 673) Có hai chiếc cọc cao $10\,m$ và $30\,m$ lần lượt đặt tại hai vị trí A, B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng $24\,m$. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc (như hình vẽ). Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?



A. $AM=6\,m,\ BM=18\,m.$

B. $AM=7\,m,\ BM=17\,m.$

C. $AM=4\,m,\ BM=20\,m.$

D. $AM=12\,m,\ BM=12\,m.$

Hướng dẫn giải

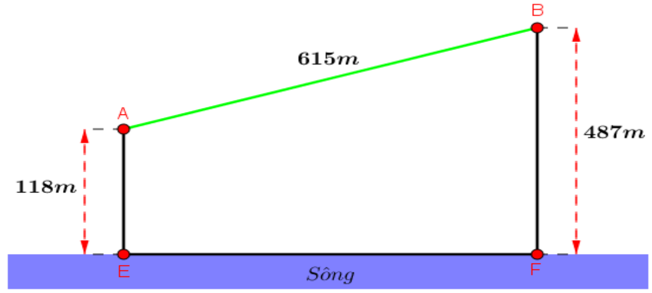
Đặt $AM=x(0<x<24)\Rightarrow BM=24-x$. Ta có $CM=\sqrt{CA^2+AM^2}=\sqrt{x^2+100}$

$MD=\sqrt{MB^2+BD^2}=\sqrt{(24-x)^2+900}$. Suy ra tổng độ dài hai sợi dây là :

$$CM+MD=\sqrt{(24-x)^2+900}+\sqrt{x^2+100}=f(x),(0<x<24)$$

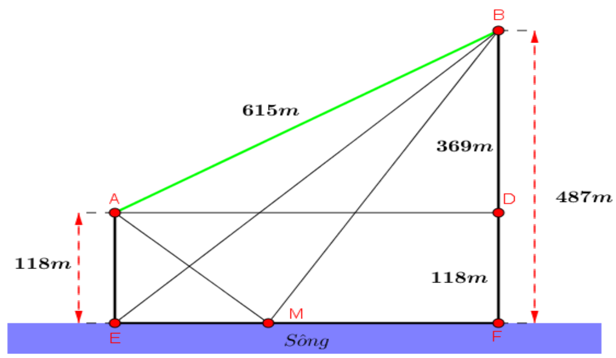
Khảo sát hàm ta được: $x=6\,(m)\Rightarrow BM=18\,(m)$. Chọn A.

Câu 104: (HÀ NỘI – AMSTERDAM) Cho hai vị trí A, B cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là:



A. 569,5 m **B.** 671,4 m

Hướng dẫn giải



Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B.

dễ dàng tính được $BD = 369,\ EF = 492$. Ta đặt $EM = x$, khi đó ta được:

$$MF = 492 - x,\ AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, BM = \sqrt{\left(492 - x\right)^2 + 487^2}.$$

Như vậy ta có hàm số $f\left(x\right)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB:

$$f\left(x\right) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{\left(492 - x\right)^2 + 487^2} \text{ với } x \in \left[0;492\right]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f\left(x\right)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'\left(x\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{\left(492 - x\right)^2 + 487^2}}.$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+118^2}}-\frac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2+487^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+118^2}}=\frac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2+487^2}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(492-x)^2+487^2}=(492-x)\sqrt{x^2+118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left[(492-x)^2+487^2\right]=(492-x)^2\left(x^2+118^2\right) \\ 0\le x\le 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2=(58056-118x)^2 \\ 0\le x\le 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{58056}{605} \quad hay \quad x=-\frac{58056}{369} \\ 0\le x\le 492 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{58056}{605}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;492]$. So sánh các giá trị của $f(0)$, $f\left(\frac{58056}{605}\right)$, $f(492)$

ta có giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right)\approx 779,8m$

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ 779,8m. Vậy đáp án là **C**.

Câu 105: Anh Thái gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 0,6%/tháng. Sau mỗi tháng, chú Tư đến ngân hàng rút mỗi tháng 3 triệu đồng để chi tiêu cho đến khi hết tiền thì thôi. Sau một số tròn tháng thì chú Tư rút hết tiền cả gốc lẫn lãi. Biết trong suốt thời gian đó, ngoài số tiền rút mỗi tháng chú Tư không rút thêm một đồng nào kể cả gốc lẫn lãi và lãi suất không đổi. Vậy tháng cuối cùng chú Tư sẽ rút được số tiền là bao nhiêu (làm tròn đến đồng)?

A. 1840270 đồng.

B. 3000000 đồng.

C. 1840269 đồng.

D. 1840268 đồng.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Áp dụng công thức tính số tiền còn lại sau n tháng

$$\boxed{S_n=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-X\frac{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1}{\frac{r}{100}}} \quad (9)$$

Với $A=50$ triệu đồng, $r=0,6$ và $X=3$ triệu đồng ta được

$S_n=50.1,006^n-3.\frac{1,006^n-1}{0,006}$.

Để rút hết số tiền thì ta tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $S_n < 0 \Leftrightarrow 50.1,006^n - 3.\dfrac{1,006^n - 1}{0,006} \Leftrightarrow 500 - 450.1,006^n < 0 \Leftrightarrow n > \log_{1,006}\dfrac{500}{450} \Rightarrow n = 18$

Khi đó số tiền tháng cuối cùng mà Anh Thái rút là

$S_{17}.1,006 = \left[50.1,006^{17} - 3.\dfrac{1,006^{17} - 1}{0,006}\right].1,006 \approx 1,840269833$ triệu đồng ≈ 1840270 đồng

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhập lên màn hình máy tính $50.1,006^X - 3.\dfrac{1,006^X - 1}{0,006}$, tính giá trị chạy từ 10 đến 20 với step bằng 1 ta được bằng giá trị tương ứng và số tiền còn lại nhơ hơn 3 ứng với $X = 17$.

Từ đó tính được số tiền rút ra ở tháng cuối cùng là $S_{17}.1,006 = \left[50.1,006^{17} - 3.\dfrac{1,006^{17} - 1}{0,006}\right].1,006 \approx 1,840269833$ triệu đồng ≈ 1840270 đồng

Câu 106: Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x) = \dfrac{100}{1+49e^{-0.015x}}, x \geq 0$. Hãy tính số quảng cáo được phát tối thiểu để số người mua đạt hơn 75%.

A. 333. **B.** 343. **C.** 330. **D.** 323.

Hướng dẫn giải

Khi có 100 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(100) = \frac{100}{1+49e^{-1.5}} \approx 9.3799\%$$

Khi có 200 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(200) = \frac{100}{1+49e^{-3}} \approx 29.0734\%$$

Khi có 500 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(500) = \frac{100}{1+49e^{-7.5}} \approx 97.3614\%$$

Đáp án: **A.**

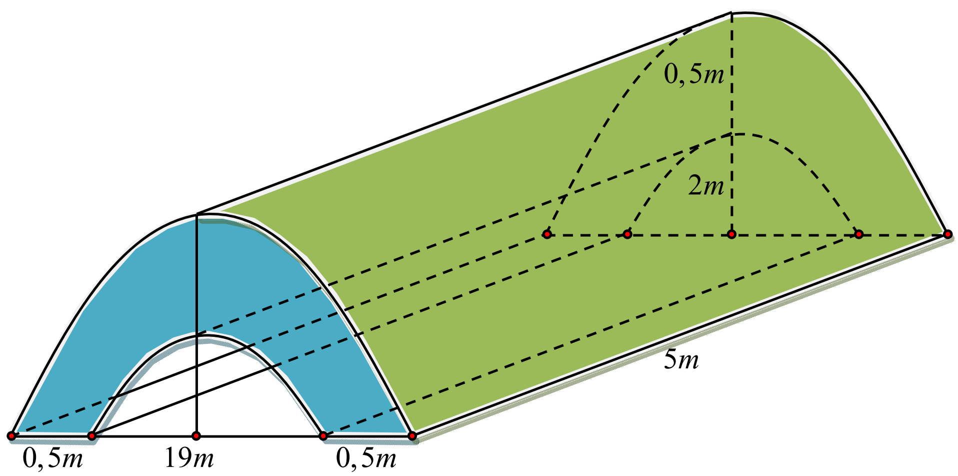
Câu 107: (CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3) Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).

A. $19m^3$. **B.** $21m^3$. **C.** $18m^3$. **D.** $40m^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Ta có

Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

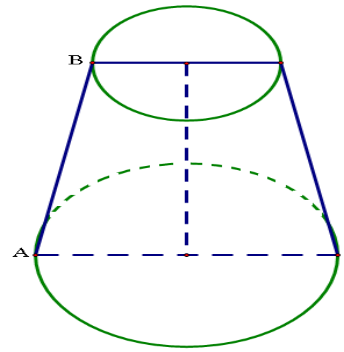
Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] = 40m^3$

Câu 108: (NGUYỄN TRÃI – HD) Có một cái cốc làm bằng giấy, được úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của chiếc cốc là $20cm$, bán kính đáy cốc là $4cm$, bán kính miệng cốc là $5cm$. Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh than cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B. Quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình gần đúng nhất với kết quả nào dưới đây?

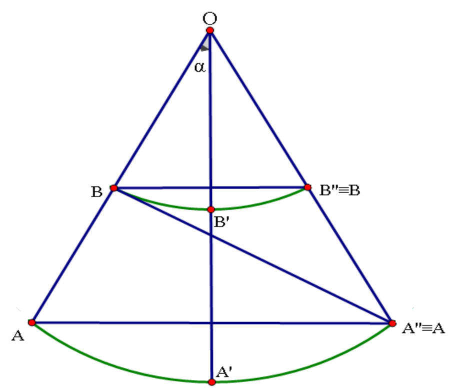


A. $59,98\,cm$ **B.** $59,93\,cm$ **C.** $58,67\,cm$ **D.** $58,80\,cm$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt b,a,h lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ. Ta "trải" hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $BB'' = 4\pi b$ và cung lớn $AA'' = 4\pi a$.



Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài đoạn thẳng BA". Áp dụng định lí hàm số cosin ta được:

$l = \sqrt{BO^2 + OA''^2 - 2BO.OA''.\cos 2\alpha}$ (1).

$B''A'' = AB = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}$. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4\pi a}{4\pi b} = \dfrac{l(\overset{\frown}{BB''})}{l(\overset{\frown}{AA''})} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OB + AB}{OB} = 1 + \dfrac{AB}{\dfrac{2\pi b}{\alpha}} = 1 + \dfrac{AB.\alpha}{2\pi b}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi(a-b)}{AB} = \dfrac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}$ (a). $\dfrac{AB}{OB} = \dfrac{a}{b} - 1 = \dfrac{a-b}{b} \Rightarrow OB = \dfrac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b}$ (b).

$OA'' = OB + BA = \dfrac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b} + \sqrt{(a-b)^2 + h^2}$ (c).

Thay (a), (b), (c) vào (1) ta tìm được l.

$l \approx 58,79609cm \approx 58,80$

Ghi chú. *Để tồn tại lời giải trên thì đoạn BA" phải không cắt cung $\overset{\frown}{BB''}$ tại điểm nào khác B, tức là BA" nằm dưới tiếp tuyến của $\overset{\frown}{BB''}$ tại **B.** Điều này tương đương với $2\alpha < \cos^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$. Tuy nhiên, trong lời giải của thí sinh không yêu cầu phải trình bày điều kiện này (và đề bài cũng đã cho thỏa mãn yêu cầu đó).*

Câu 109: (NGÔ QUYỀN – HP) Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

A. 42.000 đồng. **B.** 40.000 đồng. **C.** 43.000 đồng. **D.** 39.000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiếc. Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000-100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12+x$ (nghìn đồng). Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là: $f(x)=(3000-100x)(12+x)$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $f(x)=(3000-100x)(12+x)$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $f(x)=-100x^2+1800x+36000=-100(x-9)^2+44100\le 44100$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=9$.

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

Câu 110: (CHUYÊN VINH – L2) Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức hợp tác và phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng khi nhiệt độ trái đất tăng thêm $2°C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%, còn khi nhiệt độ trái đất tăng thêm $5°C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng nếu nhiệt độ trái đất tăng thêm $t°C$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t)=k.a^t$ (trong đó a,k là các hằng số dương).

Nhiệt độ trái đất tăng thêm bao nhiêu độ C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 20%?

A. $9,3°C$. **B.** $7,6°C$. **C.** $6,7°C$. **D.** $8,4°C$.

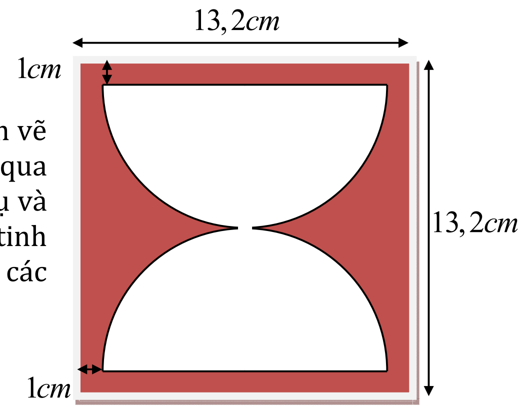
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} k.a^2=3\% \\ k.a^5=10\% \end{cases}$ (1). Cần tìm t thỏa mãn $k.a^t=20\%$.

Từ $(1) \Rightarrow k = \dfrac{3\%}{a^2}$ và $a = \sqrt[3]{\dfrac{10}{3}}$. Khi đó $k.a^t = 20\% \Rightarrow \dfrac{3\%}{a^2}.a^t = 20\% \Rightarrow a^{t-2} = \dfrac{20}{3} \Rightarrow t \approx 6,7$.

Câu 111: (CHUYÊN VINH – L2) Một xưởng sản xuất muốn tạo ra những chiếc đồng hồ cát thủy tinh có dạng hình trụ, phần chứa cát là hai nửa hình cầu bằng nhau. Hình vẽ bên với kích thước đã cho là bản thiết kế thiết diện qua trục của chiếc đồng hồ này (phần giới hạn bởi hình trụ và phần hai nữa hình cầu chứa cát). Khi đó, lượng thủy tinh làm chiếc đồng hồ cát gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau



A. $1070,8\ cm^3$. **B.** $602,2\ cm^3$.

C. $711,6\ cm^3$. **D.** $6021,3\ cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có thể tích của khối trụ là $V_1 = \pi.13,2.6,6^2 \approx 1086,4$.

Đường kính hình cầu là $13,2 - 2.1,0 = 11,2$ cm, suy ra thể tích của hai nửa khối cầu là $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi.5,6^3 \approx 735,619$

Vậy lượng thủy tinh làm chiếc đồng hồ gần nhất với giá trị $1070,8\ \text{cm}^3$.