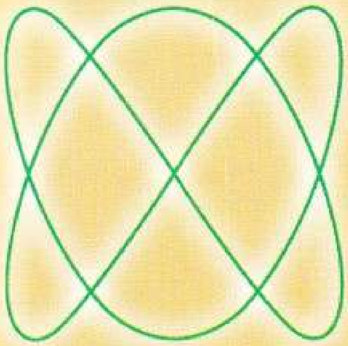
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ✻ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

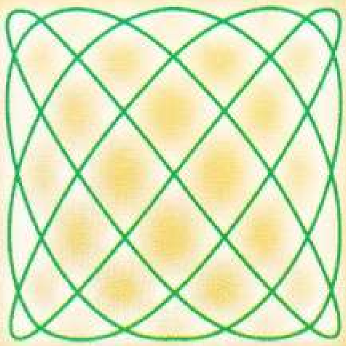
Toán học & Tuổi trẻ

2
2003

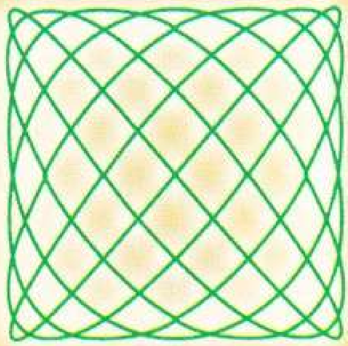
SỐ 308 - NĂM THỨ 40 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG



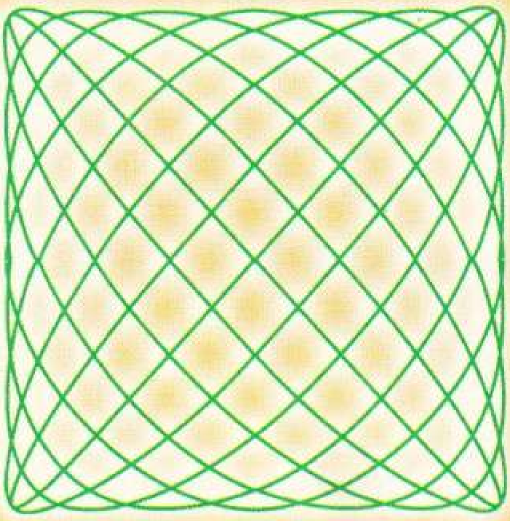
$n = 2.\ S_n = 7$



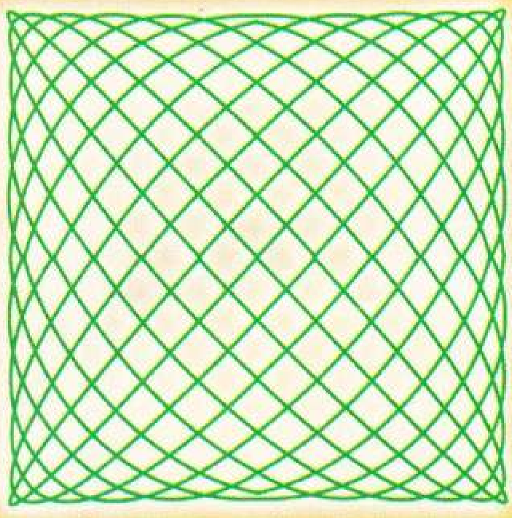
$n = 4.\ S_n = 31$



$n = 6.\ S_n = 71$



$n = 8.\ S_n = 127$



$n = 12.\ S_n = 287$

* Với n chẵn, lưới khép kín. Số mắt lưới $S_n = 2n^2 - 1$

ĐƯỜNG CONG HÌNH LƯỚI

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

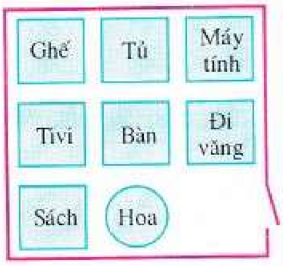
CHUYỂN CHỖ

Một phòng làm việc cá nhân có thể phân chia thành 9 chỗ bằng nhau, trong đó 8 chỗ đã sắp xếp đồ đạc như hình 1 : tủ, bàn, ghế tựa, giá sách, ti vi với giá đỡ, máy tính, đivăng, chậu hoa. Bạn muốn chuyển đổi vị trí đồ đạc theo kiểu khác trong điều kiện : cửa khép, mỗi đồ vật chiếm gần hết một chỗ nên không nhấc qua đồ vật khác được mà chỉ có thể xê dịch sang chỗ trống bên cạnh.

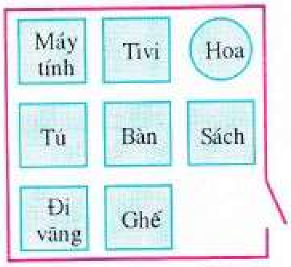
Dành cho bạn đọc

1) Bạn hãy trình bày cách chuyển đồ đạc từ hình 1 sang hình 2 (càng ít lần chuyển càng tốt).

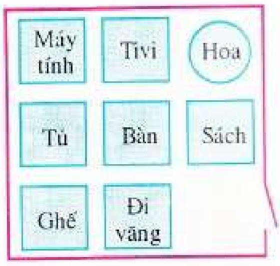
2) Có thể chuyển đồ đạc từ hình 1 sang hình 3 được không ?



Hình 1



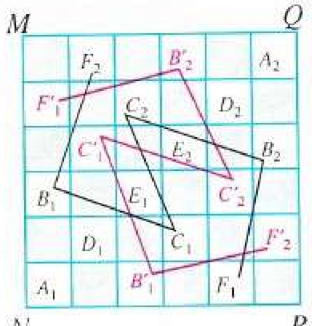
Hình 2



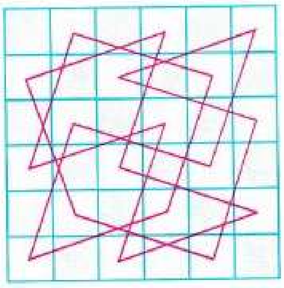
Hình 3

Giải đáp : QUÂN MÃ ĐI THEO Ô TRẮNG

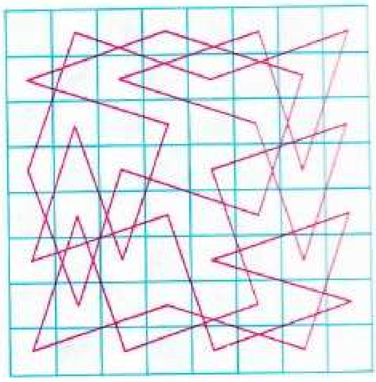
Trên bàn cờ 6 × 6 ô kí hiệu các vị trí ở ô trắng dựa theo cách thức đi của quân mã (h. 4) : các vị trí đối xứng qua MP kí hiệu bởi cùng một chữ, các chữ trong ΔMNP (ΔMQP) có cùng chỉ số $i = 1$ ($i = 2$), hai chữ ở vị trí có thể đến nhau qua 1 bước đi đều có (hoặc đều không có) dấu phẩy, chưa kể các vị trí trên NQ.



Hình 4



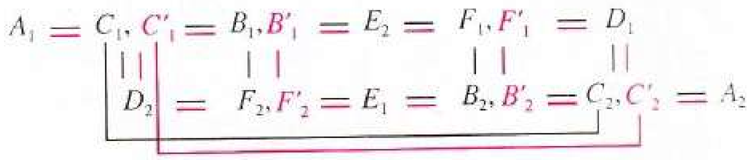
Hình 5



Hình 6

Từ cách đi của quân mã ta lập được sơ đồ 1, trong đó mỗi bước đi từ vị trí này đến vị trí khác được ghi bởi *một* dấu gạch nối. Từ sơ đồ 1 ta tìm được 8 cách đi của quân mã thỏa mãn yêu cầu bài toán : đường đi qua tất cả các vị trí, *mỗi vị trí chỉ có 1 lần vào và 1 lần ra.*

Trên hình 5 và hình 6 chỉ ra một cách đi của quân mã qua các ô trắng của bàn cờ 6 × 6 ô và 8 × 8 ô.



Sơ đồ 1

Xin gửi tặng phẩm cho các bạn đã chỉ ra cách đi đúng và có chú ý lập luận tuy chưa thật đầy đủ :

1) *Nguyễn Thanh Sơn,* 11A1, THPT Thanh Oai A, **Hà Tây.**

2) *Huỳnh Ngọc Hiền,* 11T1, THPT Lê Khiết, **Quảng Ngãi.**

3) *Nguyễn Văn Hiển,* 12T3, THPT Lê Hồng Phong, **Nam Định**

4) *Trần Quốc Nam,* 11A3, THPT Lê Hồng Phong, Tp. **Hồ Chí Minh**

5) *Vũ Thành Long,* 10C Toán, THPT Công nghiệp, Tx. **Hòa Bình**

6) *Đỗ Quang Trung B,* 5A, TH Phù Lỗ, Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**

PHI PHI

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

GIẢI MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

LÊ QUỐC HÁN
(GV khoa Toán ĐH Vinh)

Nhiều khi để giải một số phương trình (PT) vô tỉ, nếu sử dụng biến đổi tương đương hoặc biến đổi hệ quả sẽ dẫn đến các PT bậc cao khá phức tạp. Để khắc phục tình trạng đó, có thể dùng phương pháp đặt ẩn phụ để chuyển về PT dạng quen thuộc giải được như sau :

Bước 1. Đặt ẩn phụ, nêu điều kiện của ẩn phụ.

Bước 2. Chuyển PT đã cho về PT chứa ẩn phụ. Giải PT chứa ẩn phụ. Đối chiếu với điều kiện ẩn phụ đã nêu để tìm nghiệm thích hợp của PT này.

Bước 3. Tìm nghiệm PT ban đầu theo hệ thức khi đặt ẩn phụ.

Trong ba bước đó, bước 1 là bước quan trọng nhất, vì nó quyết định đến tính chính xác, ngắn gọn và độc đáo của lời giải. Bài này trình bày một số dạng PT vô tỉ, từ đó bạn đọc có thể tìm ra cách giải những PT vô tỉ khác.

1) Phương trình dạng

$$\sqrt{a+cx}+\sqrt{b-cx}+d\sqrt{(a+cx)(b-cx)}=n \quad (1)$$

trong đó a, b, c, d, n là các hằng số, $c>0, d\neq 0$.

Điều kiện : $a+cx\geq 0$ và $b-cx\geq 0$ (2)

Điều kiện này tương đương với

$$(a+cx)(b-cx)\geq 0 \text{ và } a+b\geq 0$$

Để giải PT dạng này, ta đặt ẩn phụ

$$t=\sqrt{a+cx}+\sqrt{b-cx},\ t\geq 0$$

Sử dụng hằng đẳng thức $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, ta có $2\sqrt{(a+cx)(b-cx)}=t^2-a-b$ (3)

PT đã cho trở thành PT dạng quen thuộc

$$2t+d(t^2-a-b)=2n \quad (4)$$

Đến đây ta giải PT (4) bậc 2 ẩn $t\geq 0$ rồi thay giá trị của t vào (3) để giải PT bậc 2 ẩn x.

So sánh nghiệm x tìm được với điều kiện ban đầu để rút ra kết luận.

Xét điều kiện đối với t. Từ (3) có $t^2\geq a+b$ và $t^2-a-b=2\sqrt{(a+cx)(b-cx)}\leq(a+cx)+(b-cx)=a+b\Rightarrow t^2\leq 2(a+b)$. Vậy điều kiện của ẩn phụ t để PT (3) ẩn x có nghiệm là

$$\sqrt{a+b}\leq t\leq\sqrt{2(a+b)} \quad (5)$$

Vì $a+b\geq 0$ nên (5) $\Leftrightarrow$ (2) là điều kiện để PT (1) có nghiệm.

Thí dụ 1. *Xét phương trình*

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-\sqrt{(x+1)(3-x)}=n \quad (6)$$

a) Giải PT với $n=2$.

b) Tìm các giá trị của n để PT có nghiệm.

Lời giải. Điều kiện : $\begin{cases}x+1\geq 0\\3-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq x\leq 3$

Đặt ẩn phụ $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x},\ t\geq 0$

Khi đó $t^2=4+2\sqrt{(x+1)(3-x)}$ hay $2\sqrt{(x+1)(3-x)}=t^2-4$ (7)

a) Với $n=2$ và ẩn phụ t, PT (6) trở thành $2t-(t^2-4)=4\Leftrightarrow t^2-2t=0\Leftrightarrow t_1=0$; $t_2=2$.

Dễ thấy $t_1=0$ không thỏa mãn (7). Thay $t_2=2$ vào (7) được $\sqrt{(x+1)(3-x)}=0\Rightarrow x_1=-1$, $x_2=3$ thỏa mãn điều kiện ban đầu.

b) Đặt ẩn phụ t như trên, PT (6) trở thành $2t-(t^2-4)=2n\Leftrightarrow t^2-2t+2n-4=0$. Nếu biệt thức $\Delta=5-2n\geq 0$ thì PT này có nghiệm $t_1=1+\sqrt{5-2n}$, $t_2=1-\sqrt{5-2n}$.

Điều kiện (5) ở đây là $2\leq t\leq 2\sqrt{2}$. Với t_2 không thỏa mãn. Với t_1 có $2\leq 1+\sqrt{5-2n}\leq 2\sqrt{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{2}-2\leq n\leq 2$ (8)

Điều kiện (8) bảo đảm $\Delta>0$ và PT (7) có nghiệm x. Vậy PT (6) có nghiệm $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}-2\leq n\leq 2$.

2) Phương trình dạng

$$\sqrt{x+a^2-b+2a\sqrt{x-b}}+\sqrt{x+a^2-b-2a\sqrt{x-b}}=cx+m \quad \textbf{(9)}$$

trong đó a, b, c, m là các hằng số, $a\neq 0$.

Điều kiện : $x-b\geq 0\Leftrightarrow x\geq b$.

Thông thường ở đề bài chỉ cho hiệu số $a^2-b=d$, ta phải thay d bằng a^2-b.

GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM... *(Tiếp bìa 4)*

Giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2002 được trao cho các thầy giáo và học sinh sau đây:

1. Nhà giáo Đàm Hiếu Chiến, sinh năm 1951, Hiệu phó trường THCS Trưng Vương, Hà Nội.

Làm công tác giảng dạy 30 năm, trong đó có 25 năm dạy chuyên Toán. Đã đào tạo được nhiều học sinh giỏi toán, nhiều em đạt thành tích cao trong các kỳ thi Olympic toán quốc gia và quốc tế. Tham gia bồi dưỡng chuyên môn cho giáo viên chuyên toán, viết nhiều bài cho tạp chí Toán học & Tuổi trẻ, có nhiều kinh nghiệm, sáng kiến đoạt giải Thành phố.

2. Nhà giáo Nguyễn Đức Tấn, sinh năm 1963, GV THCS tại TP Hồ Chí Minh.

Làm công tác giảng dạy chuyên toán 18 năm. Đã đào tạo được nhiều học sinh giỏi Toán, nhiều em đạt thành tích cao trong các kỳ thi Olympic toán quốc gia và quốc tế. Giải Nhất và Nhì giáo viên dạy giỏi tỉnh Quảng Ngãi các năm 1991, 1992. Viết nhiều sách tham khảo về toán cho học sinh (25 cuốn và 30 cuốn khác đồng tác giả), viết nhiều bài trên tạp chí Toán học & Tuổi trẻ.

3. Phạm Gia Vĩnh Anh, sinh năm 1984, học sinh Khối PT chuyên Toán-Tin, ĐHSP Hà Nội, hiện là sinh viên Khối cử nhân KHTN, ĐHKHTN-ĐHQG HN.

Giải nhất học sinh giỏi Khối PT chuyên Toán-Tin ĐHSP Hà Nội các lớp 10, 11, 12, Giải nhì HS giỏi toán quốc gia 2001, Giải ba HS giỏi quốc gia 2002, Huy chương vàng Olympic toán Quốc tế 2002.

4. Nguyễn Xuân Trường, sinh năm 1984, học sinh THPT chuyên Vĩnh Phúc, hiện là sinh viên Khối cử nhân tài năng KHTN, ĐHKHTN-ĐHQGHN.

Giải ba HS giỏi toán quốc gia 2002, Huy chương vàng Olympic toán Quốc tế 2002.

5. Nguyễn Thị Thu Hằng, sinh năm 1985, học sinh lớp 12 THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, Đắk Lăk.

Là học sinh ở vùng Tây Nguyên, đã vượt nhiều khó khăn, đạt giải ba HS giỏi toán toàn quốc 2002.

☛ Để giải PT (9) đặt ẩn phụ $t = \sqrt{x-b}$, $t \ge 0$ ta có $t^2 = x - b \Leftrightarrow x = t^2 + b$. Thay vào $x + a^2 - b \pm 2a\sqrt{x-b}$ được $t^2 + a^2 \pm 2at = (t \pm a)^2$. PT (9) trở thành $|t + a| + |t - a| = c(t^2 + b) + m$ (10)

Xét 2 trường hợp :

a) $t \ge a$ thì (10) trở thành $2t = ct^2 + bc + m$ $\Leftrightarrow ct^2 - 2t + bc + m = 0$ (11)

b) $0 \le t \le a$ thì (10) trở thành $2a = ct^2 + bc + m \Leftrightarrow ct^2 - 2a + bc + m = 0$ (12)

Giải các PT (11) (12) ta tìm được nghiệm t, lúc đó $x = t^2 + b$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Ví dụ 2. *Xét phương trình*

$$\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}} = \frac{x+m}{6} \quad (13)$$

a) Giải PT với $m = 23$

b) Tìm các giá trị của m để PT có nghiệm

Lời giải. Điều kiện $x - 9 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 9$.

Đặt ẩn phụ $t = \sqrt{x-9}$. Khi đó $x = t^2 + 9$

Phương trình đã cho trở thành :

$$6\left(\sqrt{(t+3)^2} + \sqrt{(t-3)^2}\right) = t^2 + 9 + m$$

$$\Leftrightarrow 6(|t + 3| + |t - 3|) = t^2 + 9 + m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 12t + 9 + m = 0 \text{ với } t \ge 3 \\ t^2 - 27 + m = 0 \quad \text{với } 0 \le t \le 3 \end{cases}$$

a) Với $m = 23$ có $\begin{cases} t^2 - 12t + 32 = 0 \text{ với } t \ge 3 \\ t^2 = 4 \quad \text{với } 0 \le t \le 3 \end{cases}$

Giải ra được $t_1 = 8$, $t_2 = 4$, $t_3 = 2 \Rightarrow$ PT có 3 nghiệm là $x_1 = 73$, $x_2 = 25$, $x_3 = 13$.

b) Với $t \ge 3$ thì $t^2 - 12t + 9 + m = 0 \Leftrightarrow (t - 6)^2 = 27 - m$. PT này có nghiệm khi $m \le 27$.

Với $0 \le t \le 3$ thì PT $t^2 = 27 - m$ có nghiệm khi $m \le 27$.

Vậy PT (13) có nghiệm khi $m \le 27$.

Mời các bạn sử dụng các phương pháp trên để giải các bài tập sau :

1) Giải các phương trình :

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$

b) $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

c) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$

d) $\sqrt{x-2} = 5x^2 - 10x + 1$

2) Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm :

a) $\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(1+x)(8-x)} = m$

b) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = m$

c) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + x + \sqrt{x-4} = m$

ĐƯỜNG CONG HÌNH LƯỚI

TRẦN ĐÌNH VIỆN
(Hà Nội)

1. Phương trình

Trong THTT số 305 ra 11/2002 chúng tôi đã giới thiệu với các bạn đường cong *Hình hoa nhiều cánh*. Từ đường cong có phương trình $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos 3t \end{cases}$ trong cuốn GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE của G.Flory & A. Warusfel mà tác giả gọi là courbe textile, chúng tôi mở rộng việc khảo sát sang trường hợp tổng quát $\begin{cases} x=\sin nt \\ y=\cos(n+1)t \end{cases}$ và xin giới thiệu cùng các bạn.

Trong mặt phẳng tọa độ Đềcác vuông góc Oxy đường cong có phương trình

$$\begin{cases} x = a\sin(nt) \\ y=b\cos(n+1)t \end{cases} \quad \text{(I)}$$

trong đó a, b là các hằng số dương tùy ý, n là số tự nhiên khác 0 có hình dạng một tấm lưới nên gọi là *đường cong hình lưới*.

Để đơn giản ta cho $a = b = 1$.

Xét ý nghĩa vật lí, ta xem (I) là phương trình (PT) của một chuyển động trong mặt phẳng, tổng hợp của hai chuyển động hình sin lệch pha có phương vuông góc với nhau : chuyển động ngang theo phương trục hoành có chu kì $\frac{2\pi}{n}$, chuyển động dọc theo phương trục tung có chu kì $\frac{2\pi}{n+1}$. Chuyển động tổng hợp có chu kì 2π.

2. Các trường hợp đặc biệt

a) Với $n = 1$, phương trình (I) có dạng :

$$\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos 2t \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Dễ dàng thấy rằng quỹ đạo (QĐ) của chuyển động có PT (II) là một phần của parabol

$$\begin{cases} y = 1-2x^2 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{(III)}$$

Xét chuyển động trong một chu kì, chẳng hạn $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{5\pi}{2}$, xuất phát từ điểm A (1 ; –1) ứng với thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$, điểm chuyển động dọc theo parabol (III) đến điểm B (-1; -1) ứng với $t = \frac{3\pi}{2}$ (được nửa chu kì) rồi theo đường cũ quay về A ứng với thời điểm cuối chu kì $t = \frac{5\pi}{2}$.

b) Với $n = 2$, phương trình (I) có dạng :

$$\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos 3t \end{cases} \quad \text{(IV)}$$

Xét chuyển động trong chu kì $[0 ; 2\pi]$, xuất phát từ điểm A (0 ; 1) ($t = 0$) điểm chuyển động trên QĐ đến điểm B (0 ; –1) ($t = \pi$), tiếp tục chuyển động trở về A ứng với thời điểm $t = 2\pi$ theo một chu trình khép kín (khác với trường hợp trên, điểm chuyển động từ B về A không quay về theo lối cũ). Quỹ đạo có 7 điểm tự cắt.

3. Trường hợp tổng quát

Trong phạm vi chương trình Toán THPT chúng ta có thể chứng minh được các đặc điểm sau đây của đường cong hình lưới :

a) *Với n lẻ*. QĐ là đường cong không khép kín theo nghĩa điểm chuyển động xuất phát từ A (1; -1) tại thời điểm đầu chu kì $\left(t=\frac{\pi}{2}\right)$ trên QĐ đến điểm B (-1 ; -1) ứng với thời điểm giữa chu kì $\left(t=\frac{3\pi}{2}\right)$ rồi quay về A ứng với thời điểm cuối chu kì $\left(t=\frac{5\pi}{2}\right)$ theo lối cũ.

- QĐ là đường cong nhận Oy làm trục đối xứng.
- Số điểm tự cắt (hoặc nút lưới) là

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{(Xem bìa 3)}$$

b) *Với n chẵn*. QĐ là đường cong khép kín, xuất phát từ A (0 ; 1) tại thời điểm đầu chu kì ($t = 0$) chuyển động trên QĐ đến B (0 ; –1) tại thời điểm giữa chu kì ($t = \pi$) rồi từ đó quay về điểm xuất phát A ($t = 2\pi$) không theo lối cũ.

- QĐ là đường cong nhận hai trục tọa độ Ox, Oy làm các trục đối xứng, suy ra O là tâm đối xứng.
- Số điểm tự cắt (hoặc nút lưới) là

$$S_n = 2n^2 - 1 \quad \text{(Xem bìa 1)}$$

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

TỔNG QUÁT HÓA MỘT BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

NGUYỄN MẠNH HÙNG
(GV Toán, Đại học Thủy Lợi, Hà Nội)

Các bài toán về bất đẳng thức (BĐT) trong tam giác thường gặp ở các kì thi học sinh giỏi và thi đại học. Cũng từ các BĐT này có thể giải các bài toán về nhận dạng tam giác nhờ chỉ ra dấu bằng trong BĐT. Trong bài báo này, xuất phát từ một BĐT quen thuộc về độ dài các cạnh và diện tích tam giác là $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$, ta sẽ chứng minh một BĐT tổng quát hơn.

Bài toán. *Cho tam giác ABC với AB = c, BC = a, CA = b. Gọi S là diện tích tam giác ABC và m, n, p là các số thực sao cho m+n, n+p, p+m, mn+np+pm đều là số dương Chứng minh rằng*

$$ma^2+nb^2+pc^2 \geq 4\sqrt{mn+np+pm}\,S \qquad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh : Sử dụng định lí hàm số côsin và công thức tính diện tích tam giác ta có :

$$(*) \Leftrightarrow ma^2+nb^2+p(a^2+b^2-2ab\cos C) \geq$$
$$\geq 2ab\sin C\sqrt{mn+np+pm}$$

$$\Leftrightarrow (m+p)\frac{a}{b}+(p+n)\frac{b}{a}$$
$$\geq 2\left(p\cos C+\sqrt{mn+np+pm}\sin C\right) \qquad (**)$$

Sử dụng BĐT Côsi và Bunhiacôpxki ta có

$(m+p)\frac{a}{b}+(p+n)\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{(m+p)(p+n)}$ và

$$\left(p\cos C+\sqrt{mn+np+pm}\sin C\right)^2 \leq$$
$$\leq (p^2+mn+np+pm)(\cos^2 C+\sin^2 C)=(m+p)(p+n)$$

Từ hai bất đẳng thức này ta suy ra bất đẳng thức (**) $\Leftrightarrow$ (*). Đẳng thức ở (*) xảy ra khi

$$\begin{cases}(m+n)\dfrac{a}{b}=(p+n)\dfrac{b}{a}\\ \dfrac{\cos C}{p}=\dfrac{\sin C}{\sqrt{mn+np+pm}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{p+n}}=\dfrac{b}{\sqrt{m+p}}\\ \dfrac{\cos^2 C}{p^2}=\dfrac{\sin^2 C}{mn+np+pm}=\dfrac{1}{(p+m)(p+n)}\end{cases}$$

Từ đó thay $\cos C$, b theo a, m, n, p vào đẳng thức $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ta có

$$c^2=a^2+a^2\frac{m+p}{n+p}-2a^2\frac{\sqrt{m+p}}{\sqrt{n+p}}\,\frac{p}{\sqrt{(p+m)(p+n)}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2=1+\frac{m+p}{n+p}-2\frac{p}{n+p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{n+p}} \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{n+p}}=\frac{c}{\sqrt{m+n}}.$$

Vậy đẳng thức ở (*) xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{n+p}}=\frac{b}{\sqrt{p+m}}=\frac{c}{\sqrt{m+n}}$$

Từ BĐT tổng quát này ta suy ra một số BĐT cụ thể mà các bạn có thể gặp trong một số sách tham khảo hoặc đề thi tuyển sinh đại học, cao đẳng :

1) Với $m=n=p$ có $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

2) Với $m=\dfrac{bc}{a^2}$, $n=\dfrac{ac}{b^2}$, $p=\dfrac{ab}{c^2}$ suy ra $ab+bc+ca \geq 4\sqrt{3}S$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

3) Với $m=a^2$, $n=b^2$, $p=c^2$ suy ra $a^4+b^4+c^4 \geq 16S^2$ (áp dụng BĐT 2 và BĐT Bunhiacôpxki). Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 KHỐI THPT CHUYÊN TOÁN TIN TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH NĂM 2002

VÒNG I

(Dành cho mọi thí sinh
Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu I. Chứng minh rằng luôn tồn tại số có dạng 20022002...2002, mà số đó chia hết cho 2003.

Câu II. Giải phương trình :

$$(x+9)(x+10)(x+11)-8x=0$$

Câu III. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương thỏa mãn : $abc = ab + bc + ca$ thì :

$$\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{2a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+2c}<\frac{3}{16}$$

Câu IV. Giải và biện luận phương trình :

$$\sqrt[3]{(x-m)^2}+(m-1)\sqrt[3]{x^2-m^2}=m\sqrt[3]{(x+m)^2},$$

trong đó m là tham số.

Câu V. Giả sử H là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Trên đoạn HB và HC lấy hai điểm M, N sao cho $\widehat{AMC}=\widehat{ANB}=90^o$. Chứng minh rằng : $AN = AM$.

VÒNG II

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán
Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu VI. Tìm chữ số tận cùng của tổng :

$$S=2^1+3^5+4^9+\ldots+502^{2001}$$

Câu VII. a) Với điều kiện nào của a và b, phương trình : $b\left(a-bx^2\right)^2=a-x$ có nghiệm. Tìm nghiệm của nó với điều kiện tương ứng.

b) Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \neq 0$, $x \neq 1$ và thỏa mãn điều kiện : $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$

Tìm $f(x)$.

Câu VIII. a) Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM=\frac{1}{3}BC$, $CN=\frac{1}{3}CA$, $AP=\frac{1}{3}AB$. Gọi A', B', C' là các giao điểm của BN và CP, CP và AM, AM và BN tương ứng. Tính tỉ số diện tích của các tam giác $A'B'C'$ và ABC.

b) Cho đa giác đều có 2001 cạnh. Hỏi có bao nhiêu đa giác đều phân biệt có đỉnh là các đỉnh của đa giác đều đã cho (Chỉ xét đối với các đa giác lồi đơn).

---

4) Với $m = 9$, $n = 5$, $p = -3$ có

$$9a^2+5b^2-3c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{b}{\sqrt{6}}=\frac{c}{\sqrt{14}}$

5) Với : $m = 3$, $n = -1$, $p = 15$ có

$$3a^2-b^2+15c^2 \geq 12\sqrt{3}S.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{\sqrt{7}}=\frac{b}{3}=c$

6) Với $m = n = 3$, $p = -1$ có $3a^2+3b^2-c^2 \geq 4\sqrt{3}S$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=\frac{c}{\sqrt{3}}$

7) $\frac{m}{n+p}a^2+\frac{n}{p+m}b^2+\frac{p}{m+n}c^2 \geq 2\sqrt{3}\,S$

với m, n, p dương.

Để chứng minh 7) sau khi áp dụng (*) ta phải sử dụng bất đẳng thức trung gian

$$\frac{mn}{(n+p)(p+m)}+\frac{np}{(p+m)(m+n)}+\frac{pm}{(n+p)(n+m)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow m^2n+mn^2+n^2p+np^2+mp^2+m^2p \geq 6mnp$$

rồi chia hai vế cho mnp.

Để kết thúc mong bạn đọc quan tâm và tổng quát hóa cho bất đẳng thức quen thuộc sau :

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC CỦA BỘ QUỐC PHÒNG KHỐI A - NĂM 2002

MÔN THI : TOÁN

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I: Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$

1. Khảo sát hàm số

2. Tìm trên đường thẳng $y = 4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số.

Câu II. 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{3x+2y}=-1 \\ \sqrt{x+1}+x-y=0 \end{cases}$$

2. Giải bất phương trình :

$$\ln\left|\frac{x+1}{2}\right|-\ln(x^2-x+1) > 0$$

Câu III. 1. Giải phương trình :

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = -\frac{1}{2}$$

2. Chứng minh rằng, tam giác ABC thỏa mãn điều kiện : $\cos A + \cos B - \cos C = -\dfrac{7}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}+4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}$ là tam giác đều.

Câu IV. 1. Trên mặt phẳng tọa độ cho $A(1, 0)$, $B(0, 2)$, $O(0, 0)$ và đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1$. Viết phương trình đường thẳng đi qua các giao điểm của đường tròn (C) và đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

2. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $AB = AC = a$, $SA = a$. Cạnh SA vuông góc với đáy. M là một điểm trên cạnh SB, N trên cạnh SC sao cho MN song song với BC và AN vuông góc với CM. Tìm tỉ số $\dfrac{MS}{MB}$.

Câu V. 1. Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x^3 - 2$ và $(y+2)^2 = x$.

2. Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau, biết rằng các số này chia hết cho 3.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Các bạn tự giải

I. 2) Gọi $M(a, 4)$ thuộc đường thẳng $y = 4$ là điểm cần tìm.

Tiếp tuyến với đồ thị hàm số kẻ từ M có PT :

$$y = k(x-a) + 4$$

Từ điều kiện tiếp xúc dẫn đến hệ phương trình sau có nghiệm $x \neq 1$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x-1}=k(x-a)+4 & (1) \\ \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) được PT :

$$(3-a)x^2 + 2(a-7)x + 3a + 7 = 0 \quad (3)$$

Để từ M kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến đồ thị thì PT (3) phải có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 1$, tức là

$$\begin{cases} 3-a \neq 0 \\ \delta = (a-7)^2-(3a+7)(3-a) > 0 \\ 3-a+2(a-7)+3a+7 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 3 \\ a^2-4a+7>0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 3 \\ a\neq 1 \end{cases}$$

Tập hợp các điểm cần tìm là đường thẳng $y = 4$ bỏ hai điểm $(1, 4)$; $(3, 4)$.

Bài luyện tập 1. *Cho hàm số*

$$y = x + 1 + \frac{1}{x-1} \ (C)$$

a) Tìm các điểm trên trục hoành mà từ đó kẻ được đúng một tiếp tuyến đến (C).

b) Tìm các điểm trên trục tung mà từ đó kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến (C) *c) Tìm các điểm trên mặt phẳng tọa độ mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) và hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.*

Câu II. 1) ĐK : $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ 3x+2y\ge 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+y}\ge 0 \\ v=\sqrt{3x+2y}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x-y=2v^2-5u^2$

Ta có hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} u-v=-1 \\ u+2v^2-5u^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} x+y=4 \\ 3x+2y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ (thỏa mãn đk)

II.2) ĐK : $x\ne -1$

Ta có BPT $\Leftrightarrow \ln\left|\dfrac{x+1}{2}\right| > \ln(x^2-x+1)$

$\Leftrightarrow |x+1| > 2(x^2-x+1)$ (1)

• Nếu $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ thì (1) $\Leftrightarrow x+1 > 2(x^2-x+1) \Leftrightarrow 2x^2-3x+1<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<x<1$ (thỏa mãn $x>-1$)

• Nếu $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$ thì (1) $\Leftrightarrow -x-1 > 2(x^2-x+1)$

$\Leftrightarrow 2x^2-x+3<0$ BPT vô nghiệm

Tóm lại bất phương trình đã cho có nghiệm : $\dfrac{1}{2}<x<1.$

Câu III. 1) • Nếu $x=2k\pi$ $(k\in Z)$ thì $\cos x + \cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x = 5 \ne -\dfrac{1}{2}$

Vậy $x=2k\pi$ không phải là họ nghiệm của phương trình đã cho.

• Nếu $x\ne 2k\pi \Rightarrow \sin\dfrac{x}{2}\ne 0$. Nhân hai vế của phương trình với $2\sin\dfrac{x}{2}\ne 0$ được $2\sin\dfrac{x}{2}(\cos x + \cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x) = -\sin\dfrac{x}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{3x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{5x}{2}-\sin\dfrac{3x}{2}+\sin\dfrac{7x}{2}-\sin\dfrac{5x}{2}+$

$+\sin\dfrac{9x}{2}-\sin\dfrac{7x}{2}+\sin\dfrac{11x}{2}-\sin\dfrac{9x}{2}=-\sin\dfrac{x}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{11x}{2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{11x}{2}=m\pi$ $(m\in Z)$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2m\pi}{11}.$

Do $x\ne 2k\pi$ nên PT có nghiệm : $x=\dfrac{2m\pi}{11}$ với $m\in Z$, m không chia hết cho 11.

Bài luyện tập 2. *Giải phương trình :*

$\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=-\dfrac{1}{2}$ *với n là số nguyên dương cho trước.*

III. 2)

$\cos A+\cos B-\cos C=-\dfrac{7}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}+4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\dfrac{A}{2}-1+2\cos^2\dfrac{B}{2}-1-\left(1-2\sin^2\dfrac{C}{2}\right)+\dfrac{7}{2}-2\sin\dfrac{C}{2}-4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\cos\dfrac{A}{2}-\cos\dfrac{B}{2}\right)^2+2\left(\sin\dfrac{C}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{B}{2} \\ \sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=B \\ C=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta ABC$ đều (đpcm).

Bài luyện tập 3. *Tính các góc của tam giác ABC nếu :*

$2\cos A\sin B\sin C+\sqrt{3}\,(\sin A+\cos B+\cos C)=\dfrac{17}{4}$

Bài luyện tập 4. *Chứng minh rằng, tam giác ABC thỏa mãn điều kiện sau là tam giác đều :* $p^2=ab\sin^2A+bc\sin^2B+ca\sin^2C$ *(trong đó a, b, c là các cạnh của tam giác ứng với các đỉnh A, B, C ; p là nửa chu vi của tam giác).*

Câu IV. 1) ΔAOB vuông tại $O \Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp ΔAOB có tâm là trung điểm $I_1\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ của đoạn AB và có bán kính $R_1=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ nên có phương trình :

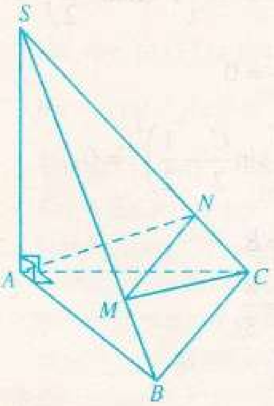
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}\ (D)$$

Từ phương trình của (C) :

$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1 \Rightarrow$ đường tròn (C) có tâm $I\left(1,\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=1$. Ta có : $R_1 - R < I_1I=\frac{\sqrt{2}}{2}< R_1+R \Rightarrow (C)$ và (D) cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N. Khi đó đường thẳng qua M, N là trục đẳng phương của (C) và (D). Vậy MN có PT

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2-\frac{5}{4}$$

hay $x-y-\frac{1}{4}=0$.



IV. 2) *Cách 1.* (PP véctơ : *Biểu diễn các vectơ qua 3 vectơ không đồng phẳng).*

• Đặt $\frac{MS}{MB}=\frac{NS}{NC}=x$

$\Rightarrow \frac{NS+NC}{NC}=x+1$

hay $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{x+1}\overrightarrow{CS}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{x+1}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AS})$

Vậy $\overrightarrow{AN}=\frac{x}{x+1}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{x+1}\overrightarrow{AS}$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{x+1}\overrightarrow{BS}=\frac{1}{x+1}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AS})$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{x+1}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AS})$

$=-\overrightarrow{AC}+\frac{x}{x+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{x+1}\overrightarrow{AS}$ (2)

Do $AN\perp CM \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CM}=0$ nên từ (1) (2) dẫn đến

$$-\frac{x}{x+1}a^2+\frac{1}{(x+1)^2}a^2=0$$

$\Rightarrow -x^2-x+1=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{MS}{MB}$.

Cách 2 : (Phương pháp tọa độ)

Chọn hệ tọa độ $Axyz$ với $A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(0, a, 0)$, $S(0, 0, a)$

Giả sử $M(x, 0, a-x)$ $(0\le x\le a)$. Do ΔSAC vuông cân tại A và $\frac{MS}{MB}=\frac{NS}{NC}\Rightarrow N(0, x, a-x)$.

Vậy $\begin{cases}\overrightarrow{AN}=(0,x,a-x)\\ \overrightarrow{CM}=(x,-a,a-x)\end{cases}$

Do $AN\perp CM$ hay $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CM}=0$ suy ra

$-ax+(a-x)^2=0 \Leftrightarrow x^2-3ax+a^2=0$

$\Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a \Rightarrow \frac{MS}{MB}=\frac{x}{a-x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Bài luyện tập 5. *Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a với $\widehat{BAD}=60^o$, biết $AB'\perp BD'$. Tính thể tích hình lăng trụ theo a.*

Câu V. 1) Hoành độ giao điểm của các đường cong là nghiệm của PT : $x^6=x \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$

Từ $(y+2)^2=x$ và $y\ge -2 \Rightarrow y=\sqrt{x}-2$

Gọi S là diện tích hình phẳng cần tìm thì

$$S=\int_0^1[\sqrt{x}-2-(x^3-2)]dx=\frac{5}{12}\text{(đvdt)}$$

V. 2) Gọi $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; và $\overline{a_1a_2a_3}$ là số cần tìm ; $a_1, a_2, a_3\in A$; a_1, a_2, a_3 đôi một khác nhau và $(a_1+a_2+a_3)\,\vdots\,3$ (do $\overline{a_1a_2a_3}\,\vdots\,3$).

Vì vậy số cách chọn các số $\overline{a_1a_2a_3}$ theo yêu cầu bài toán thực hiện qua hai bước :

Bước 1. Số các số có 3 chữ số lập từ bộ (a_1, a_2, a_3) là $3! = 6$ (số)

Bước 2. Chọn 3 phần tử phân biệt của tập A là a_1, a_2, a_3 sao cho $(a_1+a_2+a_3)\,\vdots\,3$

Bằng phương pháp liệt kê ta có 8 bộ (a_1, a_2, a_3) như vậy là : (1, 2, 3) ; (1, 2, 6) ; (1, 3, 5) ; (1, 5, 6) ; (2, 3, 4) ; (2, 4, 6) ; (4, 5, 6) ; (3, 4, 5).

Theo quy tắc nhân, số các số được lập theo yêu cầu bài toán là : $8\times 6=48$ (số)

Hướng dẫn giải :

TRẦN TUYẾT THANH

(GV HV Phòng không không quân Hà Tây)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN – BÀI SỐ 60

Problem. Given a configuration of rooks on a chessboard, we say that the rooks are non–attacking if no pair of rooks lies on a row. Assume that the chessboard has $n \times n$ squares. Prove that the number S of ways of placing n non–attacking rooks on the chessboard such that none of these rooks lie on a fixed diagonal of the chessboard is given by the formula

$$S = n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+\frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Solution. We first observe that there are $n!$ ways of placing n non–attacking rooks on the chessboard. Let L be the fixed diagonal. To compute S we have to deduct from $n!$ the number of ways of placing n non–attacking rooks with at least a rook on L. Given a rooks on L, there are $(n-1)!$ ways to add $n-1$ rooks to obtain n non–attacking rooks. Since there are n ways to put a rook on the fixed diagonal, we have to deduct $(n-1)!n = \frac{n!}{1!}$ from $n!$. But we have counted every configuration of n non–attacking rooks with two rooks on L twice. Hence we have to add to the result the number of ways of placing n non–attacking rooks with at least two rooks on L. Given two rooks on L, there are $(n-2)!$ ways to add $n-2$ rooks to obtain n non–attacking rooks. Since there are $\frac{n(n-1)}{2!}$ ways of placing two rooks on L, we add $\frac{(n-2)!n(n-1)}{2} = \frac{n!}{2!}$ to the difference $n!-\frac{n!}{1!}$.

Now we have to deduct the number of ways of placing n non–attacking rooks with three rooks on L and so on. At the end we will arrive at the formula

$$S = n!-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}+...+\frac{(-1)^n n!}{n!}$$

$$= n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+\frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Từ mới.

configuration = cách bố trí, cấu hình
rook = quân xe
chessboard = bàn cờ
attack = tấn công (động từ)
pair = đôi, cặp
row = hàng, dãy
formula = công thức
observe = quan sát, nhận xét (động từ)
compute = tính toán, ước tính (động từ)
deduct = trừ đi, khấu trừ (động từ)
at least = ít nhất (phó từ)
twice = hai lần (phó từ)
add = thêm vào, cộng (động từ)
result = kết quả, đáp số
difference = hiệu

NGÔ VIỆT TRUNG

PROBLEMS ... *(Tiếp trang 13)*

(Tiếp trang 13)

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/308. Let x, y, p be integers such that $p > 1$ and x^{2002}, y^{2003} are divisible by p. Prove that $1 + x + y$ is not divisible by p.

T9/308. Let $a_1, a_2, ...a_n$ and $b_1, b_2, ..., b_n$ be positive numbers. Prove that :

a) $\frac{a_1^r}{b_1^{r-1}}+\frac{a_2^r}{b_2^{r-1}}+...+\frac{a_n^r}{b_n^{r-1}} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^r}{(b_1+b_2+...+b_n)^{r-1}}$

be where r is a rational number, $r > 1$;

b) $\frac{a_1^s}{b_1}+\frac{a_2^s}{b_2}+...+\frac{a_n^s}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^s}{n^{s-2}(b_1+b_2+...+b_n)}$

where s is a rational number, $s \geq 2$.

T10/308. The sequence of numbers (v_n) is defined by : $v_0 = 1$ and $v_n = \frac{-1}{3+v_{n-1}}$ for all $n = 1, 2, 3, ...$ Prove that the sequence has a limit and find this limit.

T11/308. M is a point inside an acute triangle ABC with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Let D, E, F be respectively the orthogonal projections of M on the sides BC, CA, AB. Find the greatest value of the expression $P = aME.MF + b.MF.MD + cMD.ME$ and determine the position of M where this expression assumes its greatest value.

T12/308. Let S_A, S_B, S_C, S_D be respectively the areas of the faces BCD, CDA, DAB, ABC of a tetrahedron $ABCD$ and R be the radius of the circumscribed sphere of $ABCD$. Prove that

$$R \geq \frac{T}{S_A+S_B+S_C+S_D}$$

where $T^2 = AB^2S_AS_B + AC^2S_AS_C + AD^2S_AS_D + BC^2S_BS_C + BD^2S_BS_D + CD^2S_CS_D$

When does equality occur ?

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

CÁCH CHUYỂN ĐỔI NĂM ÂM LỊCH VÀ DƯƠNG LỊCH

NGUYỄN VIỆT HẢI

Dương lịch (DL) lấy cơ sở là *năm mặt trời* (một vòng quay của trái đất quanh mặt trời) bằng 365,24220... ngày. *Âm lịch* (AL) lấy cơ sở là *tháng mặt trăng* (một chu kì giao hội giữa mặt trăng và mặt trời, thể hiện qua việc trăng tròn rồi khuyết) bằng 29,530588... ngày (phân biệt với một chu kì quay của mặt trăng quanh trái đất, bằng 27,321661... ngày), do đó tháng AL có 29 ngày hoặc 30 ngày. Do năm AL thường thiếu từ 10 đến 12 ngày so với năm DL nên người ta chuyển sang xây dựng *âm – dương lịch* lấy cơ sở là tháng mặt trăng nhưng có thêm tháng nhuận để phù hợp với năm DL. Như vậy âm lịch hiện đang sử dụng không còn là AL thuần túy mà chính là âm – dương lịch.

Âm lịch với hệ đếm Can Chi rất thông dụng ở Trung Quốc, Nhật Bản, Triều Tiên, Mông Cổ và một số nước Đông Nam Á. Người ta dùng *10 Thiên Can* và *12 Địa Chi* để đếm và ghi năm, tháng, ngày. Can là thân cây, Thiên là trời, mang tính dương. Chi là cành cây, Địa là đất, mang tính âm. Trong bảng Can ghi 10 Thiên Can theo số thứ tự a và mỗi Can ứng với một chữ số tận cùng c của năm DL. Trong bảng Chi ghi 12 Địa Chi theo số thứ tự i và mỗi Chi ứng với một tháng AL t. Trong năm AL tháng Mười một, Mười hai theo thứ tự gọi là tháng Một, Chạp.

Bảng Can			Bảng Chi		
a	Can	c	i	Chi	t
1	Giáp	4	1	Tý	Một
2	Ất	5	2	Sửu	Chạp
3	Bính	6	3	Dần	Giêng
4	Đinh	7	4	Mão	Hai
5	Mậu	8	5	Thìn	Ba
6	Kỷ	9	6	Tỵ	Tư
7	Canh	0	7	Ngọ	Năm
8	Tân	1	8	Mùi	Sáu
9	Nhâm	2	9	Thân	Bảy
10	Quý	3	10	Dậu	Tám
			11	Tuất	Chín
			12	Hợi	Mười

Vì số lượng Can và Chi đều chẵn nên khi kết hợp gọi tên Can Chi thì Can lẻ (chẵn) kết hợp với Chi lẻ (chẵn) được tất cả 60 tên. Ta cho mỗi tên Can Chi, tức là mỗi cặp (a, i) (a, i cùng chẵn hay cùng lẻ) tương ứng với một mã số m ($m = 1, 2, ..., 60$).

Cứ 60 năm từ Giáp Tý ($m = 1$) đến Quý Hợi ($m = 60$) gọi là *Lục thập hoa giáp*, lập thành một *hội*. Cứ 180 năm gọi là một *nguyên*, gồm 3 hội lần lượt là *thượng nguyên*, *trung nguyên*, *hạ nguyên*.

BẢNG LỤC THẬP HOA GIÁP

1 Giáp Tý	2 Ất Sửu	3 Bính Dần	4 Đinh Mão	5 Mậu Thìn	6 Kỷ Tỵ	7 Canh Ngọ	8 Tân Mùi	9 Nhâm Thân	10 Quý Dậu
11 Giáp Tuất	12 Ất Hợi	13 Bính Tý	14 Đinh Sửu	15 Mậu Dần	16 Kỷ Mão	17 Canh Thìn	18 Tân Tỵ	19 Nhâm Ngọ	20 Quý Mùi
21 Giáp Thân	22 Ất Dậu	23 Bính Tuất	24 Đinh Hợi	25 Mậu Tý	26 Kỷ Sửu	27 Canh Dần	28 Tân Mão	29 Nhâm Thìn	30 Quý Tỵ
31 Giáp Ngọ	32 Ất Mùi	33 Bính Thân	34 Đinh Dậu	35 Mậu Tuất	36 Kỷ Hợi	37 Canh Tý	38 Tân Sửu	39 Nhâm Dần	40 Quý Mão
41 Giáp Thìn	42 Ất Tỵ	43 Bính Ngọ	44 Đinh Mùi	45 Mậu Thân	46 Kỷ Dậu	47 Canh Tuất	48 Tân Hợi	49 Nhâm Tý	50 Quý Sửu
51 Giáp Dần	52 Ất Mão	53 Bính Thìn	54 Đinh Tỵ	55 Mậu Ngọ	56 Kỷ Mùi	57 Canh Thân	58 Tân Dậu	59 Nhâm Tuất	60 Quý Hợi

Mối liên hệ giữa tên Can Chi và mã số

1) Biết tên Can Chi tính mã số

Tính mã số theo hệ thức $m \equiv 6a - 5i \pmod{60}$ với $1 \le m \le 60$, nghĩa là

$m = 6a - 5i$ nếu $6a - 5i > 0$

$m = 6a - 5i + 60$ nếu $6a - 5i \le 0$

VD : Quý Mùi có $a = 10$, $i = 8$ nên $m = 6.10 - 5.8 = 20$.

Canh Tuất có $a = 7$, $i = 11$ nên $m = 6.7 - 5.11 + 60 = 47$

2) Biết mã số tính tên Can Chi

VD : $m = 38$. Chữ số hàng đơn vị của mã chính là số thứ tự của Can: $a = 8 \Rightarrow$ Can là Tân. *Tìm Chi* theo hệ thức $\mathbf{m = 12k + i}$ với k nguyên, $k \ge 0$ và $1 \le i \le 12$. Có $38 = 12.3 + 2 \Rightarrow i = 2 \Rightarrow$ Chi là Sửu. Vậy $m = 38$ là mã số của Tân Sửu.

Mối liên hệ giữa năm Can Chi và năm dương lịch

1) Đổi năm dương lịch thành năm Can Chi

Cách 1. Gọi số năm DL là n. Với $n > 3$ (*sau Công nguyên*) lấy $n-3$ chia cho 60 được dư là mã số m (nếu $m = 0$ thì lấy $m = 60$), nghĩa là $\mathbf{n = 60k + m + 3}$ với k nguyên, $k \ge 0$.

VD : $2003 = 60.33 + 20 + 3 \Rightarrow m = 20$ là Quý Mùi.

Chú ý rằng : năm 1 là Tân Dậu, năm 2 là Nhâm Tuất, năm 3 là Quý Hợi, còn năm – 1 là Canh Thân (không có năm 0). Với $n < 0$ (*trước Công nguyên*) thì tìm năm Can Chi theo hệ thức $\mathbf{n = 60k + m + 2}$ với k nguyên, $k < 0$.

Cách 2. Vì năm DL và Can đều đếm theo chu kì 10 nên mỗi Can tương ứng với một chữ số tận cùng c của năm DL.

VD : Năm 1995 có $c = 5$ ứng với Can là Ất (theo bảng Can)

Để *tìm Chi* (với $n > 3$) lấy $n - 3$ chia cho 12 được dư là i (nếu $i = 0$ thì lấy $i = 12$), tức là $\mathbf{n = 12k + i + 3}$ với k nguyên, $k \ge 0$. Từ $1995 = 12.165 + 12 + 3$ suy ra $i = 12$ ứng với Hợi (theo bảng Chi). Vậy 1995 là năm Ất Hợi. Với $n < 0$ thì *tìm Chi* theo hệ thức $\mathbf{n = 12k + i + 2}$ với k nguyên, $k < 0$.

2) Đổi năm Can Chi thành năm dương lịch

Năm Can Chi tính theo chu kì 60 nên khi chuyển sang năm DL ta cần biết năm đó thuộc thế kỉ nào và ở nửa đầu hay nửa cuối thế kỉ đó.

Cách 1. VD : Các năm Kỷ Mão có mã số $m = 16$ nên $n = 60k + 16 + 3 = 60k + 19$ với k nguyên, $k \ge 0$ (sau Công nguyên). Nếu năm Kỷ Mão thuộc TK 20 thì $1901 \le n \le 2000 \Rightarrow 32 \le k \le 33 \Rightarrow n$ là 1939 hoặc 1999.

Năm Canh Thân ứng với $n = 60k$ ($k \ge 0$).

Cách 2. VD : Các năm Kỷ Mão có chữ số tận cùng của năm DL là $c = 9$ (theo bảng Can). Các năm Mão sau CN ($i = 4$) nên có công thức $n = 12k + 4 + 3 = 12k + 7$. Năm Kỷ Mão thuộc TK 20 thì $1901 \le 12k + 7 \le 2000 \Rightarrow 158 < k < 167$. Do $12k + 7$ có tận cùng là $9 \Rightarrow k$ có tận cùng là 1 hoặc $6 \Rightarrow k$ bằng 161 hoặc $166 \Rightarrow n$ là 1939 hoặc 1999.

Ta nói rằng năm DL và năm AL tương ứng với nhau vì năm AL thường bắt đầu muộn hơn năm DL trên dưới một tháng và còn kéo dài thêm khoảng một tháng của năm DL sau.

Đối với tháng DL và tháng AL thì không có sự tương ứng nên ở đây chỉ xét cách tính tháng Can Chi trong năm AL.

Cách tính tháng Can Chi trong năm âm lịch

Tháng AL và Chi cùng tính theo chu kì 12 nên mỗi tháng AL tương ứng với một Chi (xem bảng Chi), trong đó tháng Giêng luôn luôn ứng với Dần, còn Can của tháng Giêng được tính theo từng năm AL như sau :

a_n	Can của năm	a_t	Tháng Giêng	m_t
1, 6	Giáp, Kỷ	3	Bính Dần	3
2, 7	Ất, Canh	5	Mậu Dần	15
3, 8	Bính, Tân	7	Canh Dần	27
4, 9	Đinh, Nhâm	9	Nhâm Dần	39
5, 10	Mậu, Quý	1	Giáp Dần	51

Nếu *Can của năm* có chỉ số $a_n \equiv p \pmod 5$ tức là $\mathbf{a_n = 5k + p}$ với $k = 0, 1$ và $1 \le p \le 5$ thì *Can của tháng Giêng năm đó* có chỉ số là $\mathbf{a_t = 2p + 1}$, khi $a_t = 11$ thay bằng 1, suy ra mã số của tháng Giêng đó là m_t nên tháng Hai, Ba, ..., Một, Chạp năm đó ứng với mã số $m_t + 1$, $m_t + 2$, $m_t + 10$, $m_t + 11$ theo bảng Lục thập hoa giáp. Riêng $m_t = 51$ thì tháng Một là Giáp Tý ($m_t + 10$ là 1), tháng Chạp là Ất Sửu ($m_t + 11$ là 2)

VD : năm Đinh Sửu có $a_n = 4$ thì $a_t = 2.4 + 1 = 9 \Rightarrow$ tháng Giêng là Nhâm Dần ($m_t = 39$), tháng Hai là Quý Mão ($m_t + 1 = 40$), ...

Tính ngày Can Chi theo ngày dương lịch

Trong dương lịch các tháng 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12 có 31 ngày, còn các tháng 4, 6, 9, 11 có 30

(Xem tiếp trang 21)

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

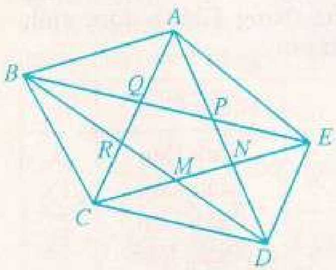
Bài T1/308. (Lớp 6) Có 3 cái chuông trong phòng thí nghiệm. Chuông thứ nhất cứ 8 phút reo một lần. Chuông thứ hai cứ 12 phút reo một lần. Chuông thứ ba cứ 16 phút reo một lần. Cả ba cái cùng reo vào lúc 7 giờ 30 phút sáng.

a) Hỏi ba chuông lại cùng reo lần tiếp theo vào lúc nào ?

b) Hỏi trong khoảng từ 7 giờ 30 phút đến 11 giờ 30 phút có bao nhiêu lần nghe thấy tiếng reo đồng thời của chỉ 2 trong 3 chuông.

VŨ THANH THÀNH
(Hà Nội)

Bài T2/308. (Lớp 7) a) Trong hình vẽ dưới biết $\widehat{BEC} = 30^o$, $\widehat{ACD} = 70^o$, $\widehat{CDE} = 110^o$ và $\widehat{BAC} = \widehat{CED} = 50^o$. Tính số đo góc ABE và giải thích cách làm.



b) Có tất cả bao nhiêu tam giác trên hình. Hãy liệt kê các tam giác đó.

HOÀNG NGUYỄN
(Hà Nội)

Bài T3/308. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$4(a - x)(x - b) + b - a = y^2$$

trong đó a, b là các số nguyên cho trước và $a > b$.

LÊ THỊ ANH THƯ
(GV THCS Hòa Xuân Tây, h. Tuy Hòa, Phú Yên)

Bài T4/308. Chứng minh rằng phương trình

$$(n+1)x^{n+2} - 3(n+2)x^{n+1} + a^{n+2} = 0$$

vô nghiệm, trong đó n là số nguyên dương chẵn và $a > 3$.

TRẦN DIỆU MINH
(GV THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)

Bài T5/308. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{3(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a+b}} > 6$$

PHẠM VĂN VƯỢNG
(SV Dược 7 Học viện Quân y, Hà Tây)

Bài T6/308. Cho tam giác ABC. Trên các tia đối của tia BA, CA lấy các điểm E, F (khác B, C) theo thứ tự. BF cắt CE tại điểm M.

Chứng minh rằng : $\dfrac{MB}{MF} + \dfrac{MC}{ME} \geq 2\sqrt{\dfrac{AB.AC}{AF.AE}}$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

BÙI DUY CHUÂN
(GV THCS Lai Vu, Kim Thành, Hải Dương)

Bài T7/308. Cho tứ giác lồi $ABCD$ với E là giao điểm của hai đường thẳng AB, CD và F là giao điểm của hai đường thẳng AD, BC. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại điểm O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi H, K là giao điểm các đường thẳng OF và MP, OE và NQ theo thứ tự. Chứng minh rằng $HK // EF$.

PHAN THẾ HẢI
(GV THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nghệ An)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/308. Gọi x, y, p là các số nguyên và $p > 1$ sao cho mỗi số x^{2002} và y^{2003} đều chia hết cho p. Chứng minh rằng $1 + x + y$ không chia hết cho p.

LÊ XUÂN TRƯỜNG
(GV THPT Trần Đại Nghĩa, Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T9/308. Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a_1^r}{b_1^{r-1}} + \dfrac{a_2^r}{b_2^{r-1}} + ... + \dfrac{a_n^r}{b_n^{r-1}} \geq \dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^r}{(b_1 + b_2 + ... + b_n)^{r-1}}$

trong đó r là số hữu tỉ, $r > 1$;

b) $\dfrac{a_1^s}{b_1} + \dfrac{a_2^s}{b_2} + ... + \dfrac{a_n^s}{b_n} \geq \dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^s}{n^{s-2}(b_1 + b_2 + ... + b_n)}$

trong đó s là số hữu tỉ, $s \geq 2$.

NGUYỄN TIẾN TIẾN
(SV K50B Toán, ĐHSP Hà Nội)

Bài T10/308. Xét dãy số (v_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định bởi : $v_0 = 1$ và $v_n = \dfrac{-1}{3 + v_{n-1}}$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

Chứng minh rằng dãy này có giới hạn và tìm giới hạn đó.

ĐÀO XUÂN VŨ
(SV K47 BK65 – ĐH Bách Khoa, Hà Nội)

Bài T11/308. Giả sử điểm M nằm trong tam giác nhọn ABC có độ dài các cạnh là $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a.ME.MF + b.MF.MD + c.MD.ME$$

và xác định vị trí của điểm M khi đó.

NGUYỄN HỒNG QUÂN
(GV THPT Hồng Ngự 2, Đồng Tháp)

Bài T12/308. Gọi S_A, S_B, S_C, S_D lần lượt là diện tích các mặt BCD, CDA, DAB, ABC của một tứ diện $ABCD$ và gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó. Chứng minh rằng

$$R \geq \frac{T}{S_A + S_B + S_C + S_D}$$

trong đó $T^2 = AB^2 S_A S_B + AC^2 S_A S_C +$

$+ AD^2 S_A S_D + BC^2 S_B S_C + BD^2 S_B S_D + CD^2 S_C S_D$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

LÊ VĂN AN
(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/308. Một ô tô bắt đầu chuyển động đều từ điểm A trên một đường thẳng. Đến thời điểm 8 giờ, nó cách A một khoảng $\overline{ac}$, đến 8 giờ 30 phút thì cách A một khoảng $\overline{ca}$, và đến 9 giờ thì cách A một khoảng $\overline{abc}$, biết a, b, c là các số nguyên từ 0 đến 9, đơn vị km. Hãy xác định vận tốc của ô tô và thời điểm xuất phát.

NGUYỄN THANH NHÀN
(GV THPT Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

Bài L2/308. Từ một cuộn dây đồng chất, tiết diện đều, làm bằng một hợp kim có điện trở suất lớn, người ta cắt ra hai đoạn dây dài l_1 = 1m và l_2 = 3m, rồi mắc chúng song song với nhau vào một nguồn điện có suất điện động không đổi và điện trở trong không đáng kể. Gọi 2 điểm nút là A và B. Người ta đánh dấu điểm M trên dây thứ nhất mà MB = 0,2m, và điểm N trên dây thứ hai mà AN = 0,2m rồi nối M với N bằng một đoạn dây thứ ba có chiều dài l_x chưa biết, cũng được cắt ra từ cuộn dây nói trên.

a) Tính tỉ số cường độ dòng điện trong 2 đoạn AM và NB.

b) Tìm chiều dài l_x để cho công suất tiêu thụ trên đoạn dây nối MN đạt giá trị cực đại.

LƯƠNG TẤT ĐẠT
(GV THPT Hà Nội - Amsterdam)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

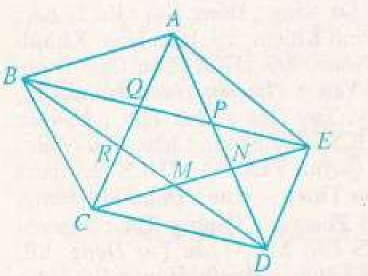
T1/308. (for 6th grade) :

There are three bells in the laboratory. The first bell rings every 4 minutes, the second every 12 minutes, the third every 16 minutes. The three bells ring simultaneously at 7h30 in the morning. (p. m.)

a) At what next time do the three bells ring simultaneously ?

b) From 7h30 to 11h30 p.m., how many times do only two bells ring simultaneously ?

T2/308. (for 7th grade)



a) In the figure let $\widehat{BEC} = 30^{\circ}$, $\widehat{ACD} = 70^{\circ}$, $\widehat{CDE} = 110^{\circ}$ and $\widehat{BAC} = \widehat{CED} = 50^{\circ}$. Calculate $\widehat{ABE}$ and justify the answer.

b) How many triangles are there in the figure? Write down these triangles.

T3/308. Find the integer-solutions of the equation

$$4(a - x)(x - b) + b - a = y^2$$

where a, b are given integers, $a > b$.

T4/308. Prove that the equation

$$(n+1)x^{n+2} - 3(n+2)x^{n+1} + a^{n+2} = 0$$

(where n is a given even positive integer and $a > 3$) has no solution.

T5/308. Prove that

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{3(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a+b}} > 6$$

T6/308. Let ABC be a triangle ; on the opposite rays of the rays BA, CA take respectively the points E, F (distinct from B, C). BF cuts CE at M.

Prove that $\dfrac{MB}{MF} + \dfrac{MC}{ME} \geq 2\sqrt{\dfrac{AB.AC}{AF.AE}}$

When does equality occur ?

T7/308. Let be given a convex quadrilateral $ABCD$. AB cuts CD at E, AD cuts BC at F. The diagonals AC, BD intersect at O. Let M, N, P, Q be respectively the midpoints of AB, BC, CD, DA. CF cuts MP at H, OE cuts NQ at K. Prove that HK is parallel to EF.

(Xem tiếp trang 9)

Bài T1/303. *Tìm tất cả các số nguyên dương N có ba chữ số sao cho cộng các chữ số của N với N và với số được viết bởi các chữ số của N theo thứ tự ngược lại, ta được một số chính phương.*

Lời giải. Đặt $N = \overline{abc}$ với $0 \le b \le 9$, $1 \le a, c \le 9$. Theo đề bài có $\overline{abc} + \overline{cba} + a + b + c = m^2$

$\Leftrightarrow 102(a+b+c) - 81b = m^2$ (1)

Từ đó phải có $m \vdots 3 \Rightarrow m^2 \vdots 9 \Rightarrow (a+b+c) \vdots 3$

Đặt $m = 3k$ và $a + b + c = 3h$ $(1 \le h \le 9)$ thay vào (1) được $34h - 9b = k^2$ (2)

Đặt $k = 9p + r$ thì $k^2 = 9t + s$, trong đó có sự tương ứng $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$
với $s = 0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1$.

Vì $k^2 = 9(3h - b) + 7h$ chia cho 9
có dư s bằng 1, 4, 7, 0
nên h chỉ có thể là 1, 4, 7, 9
tương ứng với s bằng 7, 1, 4, 0.

Xét 4 trường hợp :

1) $h = 1 \Rightarrow a + b + c = 3$ mà $a + c \ge 2 \Rightarrow b = 1$. Có $N = 111$ thỏa mãn đề bài.

2) $h = 4 \Rightarrow a + b + c = 12$ và $k^2 = 9t + 1 \Rightarrow k = 9p + r$ với r bằng 1, 8 (3). Từ (2) có $k^2 = 136 - 9b \Rightarrow 8 \le k \le 11$. Từ đó và (3), (2) suy ra hoặc $k = 8 \Rightarrow b = 8$, $a + c = 4$, hoặc $k = 10 \Rightarrow b = 4$, $a + c = 8$. Ta có các số N bằng 183, 381, 282, 147, 741, 246, 642, 345, 543, 444 thỏa mãn đề bài.

3) $h = 7 \Rightarrow a + b + c = 21$ và $k^2 = 9t + 4 \Rightarrow k = 9p + r$ với r bằng 2, 7 (4). Từ (2) có $k^2 = 238 - 9b \Rightarrow 13 \le k \le 15$ không có k thỏa mãn (4).

4) $h = 9 \Rightarrow a + b + c = 27 \Rightarrow a = b = c = 9$, $k = 15$. Có $N = 999$ thỏa mãn đề bài.

Tóm lại có tất cả 12 số N phải tìm là 111, 183, 381, 282, 147, 741, 246, 642, 345, 543, 444, 999 thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn không chú ý xét $k^2 = 9t + s$ nên lời giải dài dòng. Một số bạn biến đổi (1) thành $7k + 9(a+c) = k^2$ rồi lập luận tương tự trên. Trong đề bài ghi *số được viết... theo thứ tự ngược lại* ngụ ý nói $c \neq 0$.

2) Các bạn sau có lời giải đúng, đầy đủ :

Phú Thọ : *Ngô Vĩnh Thái*, 9A1, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, *Nguyễn Trung Kiên A*, 9A, *Nguyễn Mạnh Hùng*, 9A3, THCS Lâm Thao ; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Văn Quang*, 9C, THCS Vĩnh Tường, *Đỗ Tiến Đăng*, 8B, THCS Lập Thạch, *Nguyễn Kim Thuật*, 8A, *Đỗ Việt Kiên*, 9A, THCS Yên Lạc ; **Bắc Ninh :** *Tạ Khắc Công*, 7B, THCS Yên Phong ; **Hà Nội :** *Vũ Đức Tú*, 8A3, THPT DL Lương Thế Vinh, Thanh Xuân ; **Hải Dương :** *Hoàng Đình Phương*, 8/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Tuấn Nam*, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa ; **Nghệ An :** *Hoàng Thị Minh*, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; **Quảng Trị :** *Nguyễn Tự Hành*, 9/6, THCS Nguyễn Trãi, Tx. Đông Hà.

VIỆT HẢI

Bài T2/304. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1 \quad (1)$$

Lời giải. Điều kiện để căn có nghĩa là $2 \le x \le 4$.

PT (1) $\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 1 - \sqrt{x-2} - \sqrt{4-x} = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 - (\sqrt{x-2} - 1) - (\sqrt{4-x} - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-3) - \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} - \frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x+1-\Big(2x+1-\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}\Big) = 0$$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$

vì theo điều kiện $x \ge 2$ thì biểu thức trong ngoặc bên phải là dương

Phương trình đã cho chỉ có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Nhận xét. 1) Phương trình tuy đơn giản, nhưng nhiều bạn làm theo cách trên nhưng vẫn nhầm dấu, dài dòng, hoặc quên đặt điều kiện. Bạn *Ngô Vĩnh Thái*, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, **Phú Thọ** giải bài tổng quát sau với $a + 2 < b$:

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} = (b-a)x^2 - \left(\frac{b^2-a^2}{2} - \sqrt{\frac{b-a}{2}}\right)x - \left(\frac{a+b}{2} - 2\right)\sqrt{\frac{b-a}{2}}$$

2) Những bạn sau đây có lời giải chính xác và ngắn gọn : **Huế :** *Phan Lê Anh Minh*, 91 Nguyễn Tri Phương, Tp. Huế ; **Đà Nẵng :** *Lê Thị Diên Hằng*, 9/14 THCS Nguyễn Khuyến, Tp. Đà Nẵng ; **Đồng Nai :** *Võ Sỹ Bắc*, 9/4, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tp. Biên Hòa; **Khánh Hòa :** *Dương Hiển Nhân*, 8/9 THCS Phan Chu Trinh, Diên Khánh ; **Phú Yên :** *Nguyễn Hưng Hùng*, 9C, THCS Hòa Xuân Tây, Tuy Hòa ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Nghệ An :** *Bùi Thị Quỳnh Thơ*, 8A, THCS Hermann Gmeiner, Vinh ; **Thừa Thiên – Huế :** *Đoàn Thế Hưng*, 9, THCS Nguyễn Tri Phương ; **Quảng Trị :** *Nguyễn Kim Liên*, 8D, THCS Gio Mai, *Trần Thị Đông*, 9B, THCS Hải Lâm, Hải Lăng ; **Thanh Hóa :** *Đỗ Minh Lâm*, 9A3, THCS Quang Trung ; **Tây Ninh :** *Phạm Hàng Viễn*, 8A, THCS Lý Thường Kiệt, Hòa Thành ; **Bắc Giang :** *Phan Tuấn Anh*, 9A, THCS Đức Giang, Yên Dũng ; **Hải Dương :** *Nguyễn Duy Mạnh*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, *Nguyễn Tiến Dũng*, 9A1, THCS

Chu Văn An, Thanh Hà ; **Nam Định :** *Đinh Xuân Tuyên*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Bình Định :** *Phan Huyền Trang*, 4A6, TH số I, Phước Thành, Tuy Phước ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Anh Cường*, 9, Lê Quý Đôn.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/304. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^4 + y^4$, trong đó x, y là hai số thực thỏa mãn các điều kiện $x \ge a$ và $x + y \ge a + 1$ với số $a \ge 1$ cho trước.*

Lời giải. Ta giải bài toán với điều kiện tổng quát hơn : $x \ge a$ và $x + y \ge a + b$ với các số $a \ge b > 0$ đã cho.

Cách 1. Từ điều kiện trên có :

$$ax + by = (a-b)x + b(x+y) \ge (a-b)a + b(a+b) = a^2 + b^2 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki được :

$$(ax+by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $x^2 + y^2 \ge a^2 + b^2$ (3)

Từ điều kiện $x^2 \ge a^2$ và (3) lại lập luận như trên ta được $x^4 + y^4 \ge a^4 + b^4$ (4)

Khi $x = a$, $y = b$ thì đẳng thức xảy ra ở (3) và (4), do đó giá trị nhỏ nhất của $x^4 + y^4$ là $a^4 + b^4$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số dương ta có :

$$x^4 + 3a^4 \ge 4a^3x \quad (5)$$

$$y^4 + 3b^4 \ge 4b^3|y| \ge 4b^3y \quad (6)$$

Cộng theo từng vế (5) và (6) và từ điều kiện bài toán có :

$$x^4 + y^4 + 3a^4 + 3b^4 \ge 4(a^3 - b^3)x + 4b^3(x + y)$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + 3a^4 + 3b^4 \ge 4(a^3-b^3)a + 4b^3(a+b)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 \ge a^4 + b^4$$

Rồi dẫn đến kết luận như trên.

Nhận xét. 1) Một số bạn đã đưa ra bài toán tổng quát hơn và chứng minh bằng quy nạp rằng $x^{2^n} + y^{2^n} \ge a^{2^n} + b^{2^n}$ với n là số nguyên dương. Một số bạn khác không sử dụng các bất đẳng thức đã biết mà dùng khai triển nhị thức Niutơn nên biến đổi dài dòng.

2) Khá nhiều bạn kết luận sai lầm là $x^4 + y^4 \ge 2$ và đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$ (điều này chỉ xảy ra khi $a = 1$). Một số bạn không chú ý rằng y có thể âm.

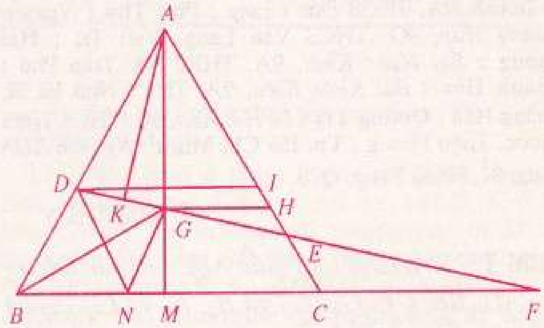
3) Các bạn có lời giải đúng, gọn là :

Phú Thọ : *Nguyễn Quang Huy*, 9G, THCS Văn Lang, Việt Trì, *Nguyễn Trung Kiên A*, *Đỗ Duy Hưng*, *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu ; **Vĩnh Phúc :** *Quách Phương Nam*, 9A, THCS Yên Lạc, *Trần Tấn Phong*, 7A, THCS Lập Thạch ; **Hà Tây :** *Phạm Thúy Yên*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Hà Nội :** *Vũ Nhật Minh*, *Nguyễn Trung Kiên*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Hòa Bình :** *Nghiêm Mạnh Hùng*, 9A, THCS Cao Thắng, Kim Bôi, **Bắc Ninh :** *Nguyễn Văn Phương*, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo, Tx. Bắc Ninh ; **Bắc Giang :** *Phan Tuấn Anh*, 9A, THCS Đức Giang, Yên Dũng ; **Hải Dương :** *Nguyễn Tiến Dũng*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, *Hoàng Đình Phương*, 8/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Hải Phòng :** *Phạm Ngọc Hà*, 9A, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo, *Vũ Ngọc Linh*, *Nguyễn Mạnh Chiến*, *Lương Phú Khánh*, *Bùi Ngọc Khôi*, *Bùi Thế Anh*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Thanh Hóa :** *Bùi Huy Dũng*, *Trịnh Thành Kiên*, *Phạm Toàn Thắng*, 9A1, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa, *Trần Tuấn Nam*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Nguyễn Tiến Thanh*, 9A, *Vũ Văn Hùng*, 9D, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn ; **Nghệ An :** *Nguyễn Thanh Tú*, 8C, *Lê Ngọc Thạch*, 8A, *Mai Huy Hùng*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.; **Thừa Thiên – Huế :** *Đoàn Thế Hưng*, *Lê Quang Thành*, 9/1, THCS Nguyễn Tri Phương Tp. Huế, *Lê Bảy*, 9/2, THCS An Bằng, Vinh An, Phú Vang ; **Đắk Lắk :** *Ngô Thùy Dương*, 9A1, THCS Trần Hưng Đạo, Tp. Buôn Ma Thuột ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 7/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, CamRanh ; **Tây Ninh:** *Phạm Hoàng Vũ*, 8A1, THCS Lý Thường Kiệt, Hòa Thành.

VIỆT HẢI

Bài T4/304. *Cho tam giác đều ABC. Hãy dựng một đường thẳng đi qua tâm của tam giác, cắt các cạnh AB, AC và tia BC theo thứ tự tại D, E và F sao cho DE = EF.*

Lời giải. *Phân tích.* Giả sử đã dựng được đường thẳng DF thỏa mãn qua G và $DE = EF$. Gọi M là trung điểm của BC, đặt $AB = a$. Kẻ $DI // BC$, $GH // BC$. Ta có $CF = DI = AD$ và $\frac{GH}{MC} = \frac{2}{3}$



Suy ra $\frac{GE}{EF} = \frac{GH}{CF} = \frac{2MC}{3CF} = \frac{a}{3CF} = \frac{a}{3AD}$ (1)

Theo tính chất đường phân giác có $\frac{DG}{GF} = \frac{BD}{BF}$

Từ đó $\frac{DG}{DF} = \frac{BD}{BD+BF} = \frac{BD}{BD+a+CF} = \frac{BD}{BD+a+AD} = \frac{BD}{2a}$.

Suy ra $\frac{DG}{EF}=\frac{BD}{a}$ (2)

Từ (1) và (2) có $\frac{DE}{EF}=\frac{GE}{EF}+\frac{GD}{EF}=\frac{a}{3AD}+\frac{BD}{a}$ $= 1$ nên $\frac{a}{3AD}+1-\frac{AD}{a}=1$. Do đó $AD=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Vậy $AD = AG$.

Cách dựng. Lấy A làm tâm vẽ đường tròn bán kính AG, cắt AB ở D. Đường thẳng DG cắt AB, AC và tia BC theo thứ tự tại D, E, F là đường cần dựng.

Chứng minh. Kẻ $AK \perp DG$, kẻ $DN // AC$. Ta có $\widehat{KAG}=15^\circ$, $\widehat{AGD}=75^\circ=\widehat{ADG}$. Mặt khác $BD = BN$, $\widehat{GBD}=\widehat{GBN}$, BG chung nên $\Delta GBD = \Delta GBN$. Suy ra $\widehat{GND}=\widehat{GDN}=180^\circ-60^\circ-75^\circ=45^\circ$. Do đó $\widehat{DGN}=90^\circ$. Ta có $\widehat{GNF}=180^\circ-\widehat{GND}-\widehat{DNB}=75^\circ$. Do đó $\Delta AKG \backsim \Delta FGN$. Suy ra $\frac{AG}{NF}=\frac{KG}{GN}$. Nên $\frac{AD}{NF}=\frac{KG}{DG}=\frac{1}{2}$ hay $NF = 2AD = 2NC$. Vậy $NC = CF$. Cùng với $CE//DN$ suy ra $DE = EF$.

Biện luận. Đường tròn tâm A bán kính AG cắt AB tại 1 điểm D duy nhất nên bài toán có một nghiệm hình.

Nhận xét. 1. Một số bạn dùng định lí Mênêlauýt làm bài toán này. Một số bạn chứng minh ngược lại với quá trình phân tích nhưng chưa chặt chẽ.

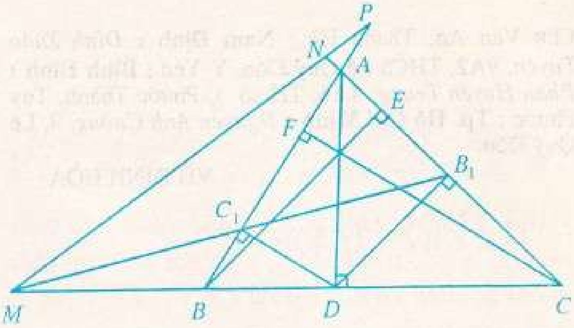
2. Giải tốt bài này có các bạn : **Bắc Giang :** *Phan TuấnAnh*, 9A, THCS Đức Giang ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Quang Huy*, 9G, THCS Văn Lang, Việt Trì ; **Hải Phòng :** *Bùi Ngọc Khôi*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Thanh Hóa :** *Bùi Khắc Kiên*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa ; **Quảng Trị :** *Lê Hải Ánh*, 8C, THCS Triệu Phước, Triệu Phong ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Kiến Long*, 9^1, Hồng Bàng, Q. 5.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/304. *Cho tam giác ABC với các đường cao AD, BE, CF. Gọi C_1 và B_1, A_2 và C_2, A_3 và B_3 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của D lên AB và AC, của E lên BC và BA, của F lên CB và CA. Gọi giao điểm của BC và B_1C_1, AC và A_2C_2, AB và A_3B_3 là M, N, P theo thứ tự. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Trung Kiên A*, 9A, THCS Giấy phong Châu, **Phú Thọ**)

Áp dụng định lí Mênêlauýt cho ΔABC với cát tuyến MB_1 ta có :



$$\frac{MB}{MC}.\frac{B_1C}{B_1A}.\frac{C_1A}{C_1B}=1 \quad (1)$$

Xét ΔADB vuông có : $\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{C_1A.AB}{C_1B.AB}=\frac{AD^2}{BD^2}$;

tương tự xét ΔADC vuông có : $\frac{B_1C}{B_1A}=\frac{CD^2}{AD^2}$.

Từ (1) suy ra $\frac{MB}{MC}=\frac{BD^2}{CD^2}$. Lặp lại quá trình trên ta cũng có : $\frac{NC}{NA}=\frac{CE^2}{AE^2}$; $\frac{PA}{PB}=\frac{AF^2}{BF^2}$.

Vậy : $\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB}=\left(\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{AE}.\frac{AF}{BF}\right)^2$ (2)

Sử dụng định lí Xêva cho ΔABC với bộ ba đường thẳng đồng quy AD, BE, CF thì có $\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{AE}.\frac{AF}{BF}=1$ (3). Từ (2), (3) có $\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB}=1$, theo định lí Mênêlauýt đảo cho ΔABC suy ra M, N, P thẳng hàng (đpcm).

Chứng minh trên đúng trong cả 2 trường hợp ΔABC nhọn và tù, còn nếu ΔABC vuông thì kết quả là hiển nhiên.

Nhận xét. 1) Chú ý rằng bài toán chỉ đúng với ΔABC không cân vì khi đó mới tồn tại các giao điểm như đề bài yêu cầu.

2) Các bạn sau cũng có lời giải tốt :

Bắc Giang : *Phan Tuấn Anh*, 9A, THCS Đức Giang, Yên Dũng ; **Hà Nội :** *Vũ Nhật Minh, Trần Việt Tuấn, Nguyễn Hoàng Việt*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Phú Thọ :** *Trần Thế Hùng*, 9A1, THCS Hạ Hòa ; **Vĩnh Phúc :** *Trần Tấn Phong*, 7A, THCS Lập Thạch, *Vũ Văn Quang*, 9C, *Lê Thị Hồng Nhung*, 8A4, THCS Vĩnh Tường ; **Hải Phòng :** *Bùi Ngọc Khôi*, 9A, THPT NK Trần Phú, *Đào Thị Huệ*, 9A4, THCS Thủy Đường, Thủy Nguyên ; **Hòa Bình :** *Nguyễn Thùy Dương*, 9A1, THCS Hữu Nghị ; **Hải Dương :** *Nguyễn Duy Mạnh*, 9B, THCS Lê Quý Đôn ; **HưngYên :** *Nguyễn Thùy Linh*, 9A2, THCS Chu MạnhTrinh ; **Thái Bình :** *Vũ Hồng*

Nhật, 9B, THCS Tán Thuật, Kiến Xương ; **Nam Định :** *Đinh Xuân Tuyên*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Ninh Bình :** *Nguyễn XuânTường*, 9A, THCS Trương Hán Siêu ; **Thanh Hóa :** *Vũ Văn Hùng*, 9D, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, *Bùi Khắc Kiên*, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoa, *Trịnh Thành Kiên*, 9A1, THCS Trần Mai Ninh ; **Nghệ An :** *Hồ Ngọc Kiên, Nguyễn Việt Hùng*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Thị Hoài An*, 8G, THCS Đặng Thai Mai, *Bùi Thị Quỳnh Thơ*, 8A, THCS Hermann Gmeiner, Tp. Vinh, *Nguyễn Lê Phước*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Quảng Trị :** *Dương Bảo Nhân*, 9, THCS Đại Hòa,*Nguyễn Tự Hành*, 9^6, THCS Nguyễn Trãi, Tx. Đông Hà ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Khoa*, 9^6, *Lê Thị Diệu Hằng*, 9/4, THCS Nguyễn Khuyến ; **Bình Định :** *Trần Đình Kha*, 8A1, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn ; **Phú Yên :** *Phan Thành Việt*, THCS Lương Thế Vinh, Tx. Tuy Hòa ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 7/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Ranh ; **Đồng Nai :** *Hà Lê Thư Trúc*, 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tp. Biên Hòa.

HỒ QUANG VINH

Bài T6/304. *Cho bảng hình vuông gồm 13×13 ô vuông. Người ta tô màu đỏ ở S ô vuông của bảng sao cho không có 4 ô đỏ nào nằm ở 4 góc của một hình chữ nhật. Hỏi giá trị lớn nhất của S có thể là bao nhiêu ?*

Lời giải. (của bạn *Lê Tôn Chánh*, 11T, Lê Quý Đôn, Tp. Quy Nhơn, **Bình Định**).

Gọi x_i là số ô được tô đỏ ở dòng thứ i. Ta có $S = \sum_{i=1}^{13} x_i$. Ở hàng thứ i số các cặp ô đỏ là $C_{x_i}^2 = \frac{x_i(x_i-1)}{2}$

Vậy tổng số các cặp ô đỏ là $A = \sum_{i=1}^{13} \frac{x_i(x_i-1)}{2}$

Chiếu các cặp ô đỏ xuống một hàng ngang nào đó. Do giả thiết thì không có cặp ô đỏ nào có hình chiếu trùng nhau. Vậy

$$C_{13}^2 = 78 \geq A = \sum_{i=1}^{13} \frac{x_i(x_i-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{13} x_i^2 - \sum_{i=1}^{13} x_i \leq 156$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$\left(\sum_{i=1}^{13} x_i\right)^2 \leq 13\left(\sum_{i=1}^{13} x_i^2\right)$ ta suy ra $\frac{S^2}{13} - S \leq \sum_{i=1}^{13} x_i^2 - \sum_{i=1}^{13} x_i \leq 156 \Leftrightarrow S^2 - 13S - 2028 \leq 0$

$\Rightarrow S \leq 52$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = ... = x_{13} = 4$: Mỗi dòng có 4 ô tô đỏ. Ta có thể dễ dàng thực hiện được cách tô màu như vậy. Vậy $S_{\max} = 52$.

Nhận xét. Nhiều bạn đã mở rộng bài toán cho trường hợp bảng gồm $m \times m$ ô vuông. Cách giải hoàn toàn tương tự. Các bạn có lời giải tốt : *Nguyễn Trọng Hòa*, 10, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 12T, THPT Sa Đec, **Đồng Tháp** ; *Trần Anh Tuấn*, 12A, ĐHKHTN, *Lê Duy Cường*, THPT Yên Phong, **Bắc Ninh** ; *Nguyễn Văn Báo*, 10Đ, THPT Đô Lương, *Đinh Viết Sang*, 12A, THPT Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Nguyễn Đình Hiếu*, 11CT, THPT Lê Hồng Phong, **Tp. HCM** , *Hoàng Ngọc Minh*, 12CT, THPT Hùng Vương, **Phú Thọ** ; *Huỳnh Lâm Linh*, 12T, THPT chuyên **Phú Yên**, *Nguyễn Hoàng Thanh*, 12A1, ĐHSP **Hà Nội**, *Vương Tuấn Anh*, 12T1, THPT Nguyễn Huệ, **Hà Tây**. Một số bạn sau khi chứng minh được $S \leq 52$ đã không chỉ ra cách tô màu với 52 ô đỏ thỏa mãn điều kiện đầu bài mà vội kết luận $S_{\max} = 52$.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/304. *Dãy số* (u_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ *được xác định bởi* $u_n = \frac{\sqrt{n}\,.\,\sqrt[n]{7n+10}}{(n+1).3^n}$ *với mọi* $n = 1, 2, 3, ...$ *Chứng minh rằng* $u_1 + u_2 + ... + u_n < 4$ *với mỗi giá trị của n.*

Lời giải. (của các bạn : *Nguyễn Kim Liên*, 8D, THCS Gio Mai, *Dương Bảo Nhân*, 9, THCS Đại Hòa, **Quảng Trị** và một số bạn khác).

Với mỗi số tự nhiên $k \geq 3$, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho k số, $k-1$ số 1 và một số $7k+10$ ta có $\sqrt[k]{7k+10} < \frac{k-1+7k+10}{k} = \frac{8k+9}{k} < \frac{9(k+1)}{k}$

Do đó $u_k < \frac{\sqrt{k}}{(k+1).3^k}.\frac{9(k+1)}{k}$

$$= \frac{9}{\sqrt{k}.3^k} < \frac{8}{3^k} = 4\left(\frac{1}{3^{k-1}} - \frac{1}{3^k}\right)$$

Bởi vậy

$$\sum_{k=3}^{n} u_k < 4\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{3^{k-1}} - \frac{1}{3^k}\right) = 4\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^n}\right) < \frac{4}{9}.$$

Chú ý $u_1 = \frac{17}{6}$, $u_2 = \frac{\sqrt{48}}{27} < \frac{7}{27}$.

Như vậy $\sum_{k=1}^{n} u_k < \frac{17}{6} + \frac{7}{27} + \frac{4}{9} < 4$ (đpcm).

Nhận xét. Có nhiều cách để đánh giá $\sum_{k=1}^{n} u_k$. Tòa soạn nhận được lời giải của hơn 120 bạn, hầu hết các bạn giải đúng. Các bạn THCS sau có lời giải tốt : **Hòa Bình :** *Nguyễn Thùy Dương*, 9A1, THCS Hữu Nghị;

Nghiêm Mạnh Hùng, 9A, THCS Cao Thắng ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Trung Kiên, Đỗ Duy Hưng*, 9A, THCS Giấy Phong Châu ; **Hải Phòng :** *Lương Phú Khánh*, 9A, THPT Trần Phú ; **Vĩnh Phúc :** *Lê Thị Hồng Nhung*, $8A_4$, THCS Vĩnh Tường.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/304. *Tìm mọi hàm số $f : R \to R$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(x-f(y)\right) = f\left(x+y^{2002}\right)+f\left(f(y)+y^{2002}\right)+1 \quad (1)$$

với mọi x, y thuộc R.

Lời giải. Với $y = 0$ thì từ (1) ta có

$$f(x - f(0)) = f(x) + f(f(0)) + 1,\ \forall x \in R \quad (2)$$

Nếu $f(0) = 0$ thì từ (2) suy ra $f(x) = f(x) + 1 \Rightarrow$ không tồn tại $f(x)$ như thế. Do vậy $f(0) = c \neq 0$.

Với $x = f(y)$ thì từ (1) ta thu được

$$f\left(f(y)+y^{2002}\right)=\frac{c-1}{2},\ \forall y \in R$$

Do vậy, từ (1) ta thu được

$$f(x - f(y)) = f(x + y^{2002}) + b \text{ với } b = \frac{c+1}{2} \quad (3)$$

Trong (3) thay x bởi $x + f(y)$, ta được

$$f(x) = f(x + f(y) + y^{2002}) + b\ \ \forall x, y \in R \ (4)$$

Đặt $f(y) + y^{2002} = g(y)$ thì $g(0) = c \neq 0$ và (4) có dạng $f(x) = f(x + g(y)) + b$ (5)

Xét $h(y) = g(y + g(0)) - g(y)$. Khi đó

$$h(y) = f(y + g(0)) + [y + g(0)]^{2002} - f(y) - y^{2002}$$
$$= f(y) - b + [y + g(0)]^{2002} - f(y) - y^{2002}$$
$$= (y + c)^{2002} - y^{2002} - b$$

Vậy $h(y)$ là một đa thức bậc 2001 có miền giá trị $(-\infty, +\infty)$

Mặt khác từ (5) ta cũng có

$$f(x + h(y)) = f(x + h(y) + g(y)) + b$$
$$= f(x + g(y + g(0))) + b = f(x),\ \forall x, y \in R$$

do vậy $f(x + t) = f(x)$, $\forall x, t \in R$ và suy ra $f(x) = a$, $\forall x$. Thế vào phương trình ta thu được $a = -1$.

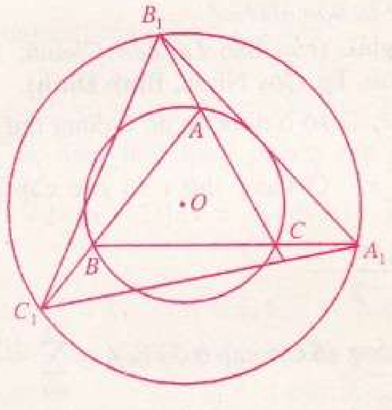
Kết luận : $f(x) \equiv -1\ \forall x \in R$.

Nhận xét. Đa số các bạn có lời giải như trên. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Cao Trung Hiếu*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**, *Nguyễn Đức Trung*, 11T, chuyên Hàn Thuyên, **Bắc Ninh** ; *Lê Hùng Việt Bảo*, 11A, chuyên ĐHKHTN **Hà Nội** ; *Hoàng Vũ Tài*, 11A2, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Đinh Thái Sơn*, 12A1, *Hoàng Ngọc Minh*, 12A1, *Lê Việt Hà*, 11A1, *Trần Trọng Nam*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ** ; *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 12T, THPT Sa Đec, **Đồng Tháp** ; *Nguyễn Quang Khánh*, 11T, THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng** ; *Trần Võ Huy*, 12T, *Nguyễn Lâm Hưng*, 12T, ĐHKHTN **Tp. Hồ Chí Minh** ; *Lương Thanh Toại*, 10A1, *Lê Đặng Việt Phương*, 11A1, *Dương Đạt Nguyễn*, 10A1, *Nguyễn Hoài Trung*, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Hồ Sỹ Sàng*, 11T, *Hoàng Tiến Trung*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị** ; *Phạm Văn Trung*, 12T, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Ngô Nhất Sơn*, 10T, *Vũ Hữu Phương*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình** ; *Nguyễn Hoàng Thanh*, 12A1, ĐHSP **Hà Nội** ; *Phan Tuấn Thành*, 11T chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương** ; *Phan Thành Nam*, 12T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/304. *Cho hai đường tròn đồng tâm (O, r) và (O, R) với $r < R$. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, r) và tam giác $A_1B_1C_1$ nội tiếp đường tròn (O, R) sao cho các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các tia BC, CA, AB. Chứng minh rằng* $\dfrac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)} \geq \left(\dfrac{R}{r}\right)^2$, *trong đó S(XYZ) kí hiệu diện tích của tam giác XYZ.*

Lời giải. (của bạn *Phạm Văn Thắng*, 12T, PTNK **Tp. Hồ Chí Minh**)



$$\text{Ta có : } \begin{cases} A_1B.A_1C = \mathcal{P}_{A_1/(O,r)} = R^2 - r^2 \\ B_1C.B_1A = \mathcal{P}_{B_1/(O,r)} = R^2 - r^2 \\ C_1A.C_1B = \mathcal{P}_{C_1/(O,r)} = R^2 - r^2 \end{cases} \quad (1)$$

Mặt khác, trong tam giác ABC, ta có :

$$\sin A.\sin B.\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \Rightarrow BC.CA.AB \leq 3\sqrt{3}r^3 \ (2)$$

$$\text{Vậy : } \frac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)} =$$
$$= \frac{S(ABC)+S(AB_1C_1)+S(BC_1A_1)+S(CA_1B_1)}{S(ABC)}$$
$$= 1 + \frac{S(AB_1C_1)}{S(ABC)} + \frac{S(BC_1A_1)}{S(ABC)} + \frac{S(CA_1B_1)}{S(ABC)}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}AB_1.AC_1\sin\widehat{B_1AC_1}}{\frac{1}{2}AB.AC\sin\widehat{BAC}} + \frac{\frac{1}{2}BC_1.BA_1\sin\widehat{C_1BA_1}}{\frac{1}{2}BC.BA\sin\widehat{CBA}} + \frac{\frac{1}{2}CA_1.CB_1\sin\widehat{A_1CB_1}}{\frac{1}{2}CA.CB\sin\widehat{ACB}}$$

$$= 1 + \frac{AB_1.AC_1}{AB.AC} + \frac{BC_1.BA_1}{BC.BA} + \frac{CA_1.CB_1}{CA.CB}$$

$$\geq 1 + 3\sqrt[3]{\frac{AB_1.AC_1}{AB.AC}.\frac{BC_1.BA_1}{BC.BA}.\frac{CA_1.CB_1}{CA.CB}}$$

(bất đẳng thức Côsi cho ba số)

$$= 1 + 3\sqrt[3]{\frac{A_1B.A_1C.B_1C.B_1A.C_1A.C_1B}{(BC.CA.AB)^2}}$$

$$\geq 1 + 3\frac{R^2-r^2}{3r^2} = 1 + \frac{R^2-r^2}{r^2} = \frac{R^2}{r^2} \text{ (theo (2))}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó. Khá nhiều bạn tham gia giải.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt.

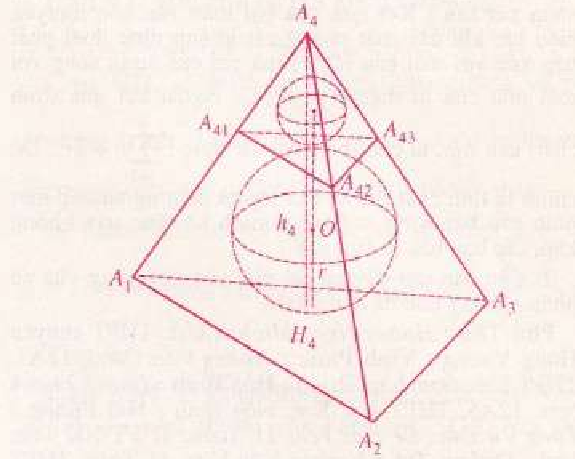
Hà Nội : *Phùng Ngọc Hoàng*, 11C1, THPT Nguyễn Tất Thành, *Nguyễn Chí Hiệp* và *Nguyễn Hoàng Thanh*, 12T, PTCTT–ĐHSP Hà Nội, *Vương Tuấn Anh*, 12T1, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Ngọc Đức*, 10A, THPT chuyên Hùng Vương ; **Hòa Bình :** *Bùi Lê Vũ*, THPT Hoàng Văn Thụ ; **Quảng Trị :** *Nguyễn Lan Hương*, 10T, *Hồ Sĩ Sàng*, 11T, THPT Lê Quý Đôn ; **Đà Nẵng :** *Huỳnh Anh Vũ*, *Nguyễn Hoài Trung*, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Đồng Nai :** *Tạ Quang Hiển*, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

3) Bạn *Nguyễn Chí Hiệp*, còn đề xuất bất đẳng thức sau $\frac{P(A_1B_1C_1)}{P(ABC)} \geq \frac{R}{r}$ trong đó $P(.)$ kí hiệu chu vi tam giác.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/304. *Cho một hình cầu tâm O bán kính r. Một tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ ngoại tiếp hình cầu. Các mặt phẳng tiếp xúc với hình cầu và song song với các mặt của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ cắt tứ diện này thành 4 tứ diện nhỏ. Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 và h_1, h_2, h_3, h_4 theo thứ tự là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện nhỏ đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4 và đường cao hạ từ đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4 của các tứ diện nhỏ. Chứng minh rằng tổng $\frac{r_1}{h_1}+\frac{r_2}{h_2}+\frac{r_3}{h_3}+\frac{r_4}{h_4}$ là một số không đổi khi $A_1A_2A_3A_4$ thay đổi nhưng vẫn luôn ngoại tiếp hình cầu.*

Lời giải. Giả sử tiếp diện song song với mặt phẳng chứa mặt $A_jA_kA_l$ của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ (ngoại tiếp mặt cầu (O, r)) của mặt cầu (O, r) cắt các cạnh A_iA_j, A_iA_k và A_iA_l theo thứ tự ở các điểm A_{ij}, A_{ik}, A_{il}, $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Kí hiệu l_i là độ dài đường cao A_iH_i ($i = 1, 2, 3, 4$) hạ từ đỉnh A_i của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$.



Phép vị tự tâm A_i, tỉ số $k_i = \frac{h_i}{l_i}$ biến tứ diện $A_iA_jA_kA_l$ thành tứ diện $A_iA_{ij}A_{ik}A_{il}$ (hình vẽ trên tương ứng với $i = 4$ và $j = 1, k = 2, l = 3$) ; do đó cũng biến mặt cầu (O, r) nội tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ thành mặt cầu (O'_i, r_i) nội tiếp tứ diện nhỏ đỉnh A_i và tỉ số hai bán kính bằng tỉ số đồng dạng $k_i = \frac{r_i}{r} = \frac{h_i}{l_i}$.

Từ đó suy ra : $\frac{r_i}{h_i} = \frac{r}{l_i}$ (1)

Vậy ta được : $T = \sum_{i=1}^{4}\frac{r_i}{h_i} = \sum_{i=1}^{4}\frac{r}{l_i}$ (2)

Mặt khác, ta lại có : $\frac{r}{l_i} = \frac{v(OA_jA_kA_l)}{V(A_1A_2A_3A_4)}$ (3)

Vì $\sum_{i=1}^{4} v(OA_jA_kA_l) = V(A_1A_2A_3A_4)$ (trong đó $\sum_{i=1}^{4} v(OA_jA_kA_k)$ là tổng thể tích các hình chóp đỉnh O, đáy là các mặt của tứ diện

$A_1A_2A_3A_4$) nên từ (1), (2) và (3) ta được $T = \sum_{i=1}^{4} \frac{r_i}{h_i} = 1$.

Giá trị $T = 1$ đúng với mọi tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ ngoại tiếp hình cầu (O, r) đã cho.

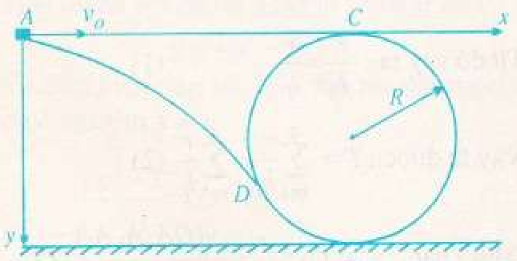
Nhận xét. 1) Bài toán trên đây thuộc loại dễ, chỉ đòi hỏi áp dụng tính chất của hai hình đồng dạng (mà cụ thể là hai tứ diện đồng dạng phối cảnh, cũng tức là vị tự) và sử dụng phương pháp thể tích. Một số bạn còn có nhận xét sau : Kết quả của bài toán vẫn còn nguyên hiệu lực khi các mặt phẳng cắt không nhất thiết phải tiếp xúc với mặt cầu (O, r) mà chỉ cần song song với một mặt của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Ngoài kết quả (tính chất) cần tìm, ta còn thu được hệ thức : $\sum_{i=1}^{4} r_i = 2r$. Đó chính là tính chất thú vị của lớp tứ diện ngoại tiếp một hình cầu bán kính r. Chứng minh hệ thức này không khó, các bạn hãy tự làm nhé !

2) Các bạn sau đây có lời giải vừa gọn gàng vừa có nhận xét hay như đã nêu ở trên.

Phú Thọ : *Hoàng Ngọc Minh*, 12A1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Vĩnh Phúc :** *Hoàng Văn Công*, 12A1, THPT Liễu Sơn, Lập Thạch ; **Hòa Bình :** *Quách Thanh Sơn*, 12A5, THPT Lạc Sơn, Hòa Bình ; **Hải Phòng :** *Tăng Vũ Đức, Lê Hải Yến*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú ; **Quảng Trị :** *Nguyễn Văn Việt*, 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn, Quảng Trị ; **Thừa Thiên – Huế :** *Ngô Phước Nguyên Ngọc*, 11T, trường Quốc học Huế ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Lâm Hưng*, 12T, PTNK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/304. *Trong mặt phẳng thẳng đứng có một đường trượt cấu tạo từ 2 phần : đường parabol với phương trình $y = \frac{5}{49}x^2$, nối tiếp là đường tròn có bán kính $R = 3,6m$.*



Một vật nhỏ nằm ở đỉnh A của đường trượt và được truyền vận tốc đầu $\vec{v_o}$ theo phương ngang (hình vẽ).

Tìm điều kiện của v_o để vật đi hết vòng tròn của đường trượt. Bỏ qua ma sát. Lấy $g = 10m/s^2$.

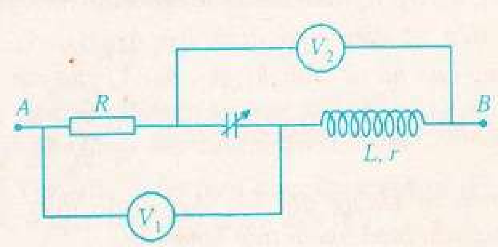
Lời giải. Nếu không có đường trượt, vật nhỏ được ném ngang từ A với vận tốc ban đầu $\vec{v_o}$ sẽ chuyển động theo đường parabol có phương trình $y_1 = \frac{g}{2v_o^2}x^2$. Muốn vật trượt hết phần trượt AD (có PT : $y = \frac{5}{49}x^2$) để sau đó có thể trượt hết vòng tròn, thì vật phải luôn bám AD, nghĩa là, với mọi hoành độ x của vật, tung độ y của vật trên AD phải thỏa mãn điều kiện $y \le y_1$ hay $\frac{5}{49}x^2 \le \frac{g}{2v_o^2} \Rightarrow v_o \le 7$m/s. Để vật trượt hết máng tròn thì vật phải tới được điểm C mà không rời máng, nghĩa là tại C phản lực $N \ge 0$. Áp dụng định luật II Niutơn tại C ta có : $N + mg = \frac{mv_C^2}{R} \Rightarrow N = m\left(\frac{v_C^2}{R} - g\right)$. Vì điểm C có cùng độ cao như A nên $v_C = v_A = v_o$, và $N = m\left(\frac{v_o^2}{R} - g\right)$. Vì $N \ge 0 \Rightarrow v_o \ge \sqrt{gR} = 6$m/s. Suy ra điều kiện $6 \le v_o \le 7$ (m/s)

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và lập luận chặt chẽ :

Hòa Bình : *Nguyễn Tuấn Anh*, 12 Lí, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Yên Bái :** *Phan Thị Kim Hoa*, 12A1, THPT Nguyễn Tất Thành ; **Phú Thọ :** *Hà Đức Thọ*, 11B1 CL, THPT chuyên Hùng Vương ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Anh Việt*, 11A3, *Nguyễn Phú Thành*, 11A1, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Thanh Hóa :** *Trần Ngọc Hùng*, 11A10, THPT Lê Lợi, Thọ Xuân ; **Bắc Giang :** *Giáp Ngọc Trung*, 12B, *Lê Nho Thủy*, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Thanh Lân*, 11T2, *Thới Ngọc Tuấn Quốc*, 11 Lí, THPT Lê Khuyết ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Đức Toàn*, 11 Lí, THPT NK Hàn Thuyên ; **Nghệ An :** *Phan Xuân Ồn*, K30A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; *Đinh Trọng Đạt*, 11A, THPT Nam Đàn I, Nam Đàn ; **Tiền Giang :** *Trần Thị Mỹ Phương*, 10 Lí, THPT chuyên Tiền Giang ; **Hà Tây :** *Đào Xuân Dũng*, 11 Lí 1, THPT Nguyễn Huệ.

MAI ANH

Bài L2/304. *Cho mạch điện có sơ đồ như hình vẽ. Các vôn kế có điện trở rất lớn. Biết*



$u_{AB} = 120\sin 100\pi t$ (V) ; $R = 30\Omega$; $r = 10\Omega$; $L = \frac{1}{10\pi}H$. Cần điều chỉnh cho điện dung của tụ điện có giá trị là bao nhiêu để :

a) Số chỉ của vôn kế V_1 đạt cực đại.

b) Số chỉ của vôn kế V_2 đạt cực trị. Đó là cực đại hay cực tiểu ?

Lời giải. a) *Số* chỉ vôn kế V_1 :

$$U_1 = U\sqrt{\frac{R^2+Z_C^2}{(R+r)^2+(Z_L-Z_C)^2}} =$$

$= U\sqrt{y(Z_C)}$. U_1 đạt cực đại khi $\frac{dy}{dZ_C} = 0 \Rightarrow$

$$Z_{C_1} = \frac{(2Rr+r^2+Z_L^2)+\sqrt{(2Rr+r^2+Z_L^2)+4R^2Z_L^2}}{Z_L}$$

$$\Rightarrow Z_{C_1} = 90(\Omega) \Rightarrow C_1 = \frac{10^{-3}}{9\pi}(F) \approx 35{,}4\mu F.$$

b) Số chỉ vôn kế V_2 :

$$U_2 = U\sqrt{\frac{r^2+(Z_L-Z_C)^2}{(R+r)^2+(Z_L-Z_C)^2}} =$$

$$= U\sqrt{\frac{1}{1+\frac{R^2+2Rr}{r^2+(Z_L-Z_C)^2}}}$$

Ta thấy U_2 đạt cực tiểu khi

$$Z_L = Z_{C_2} = 10(\Omega) \Rightarrow C_2 = \frac{10^{-3}}{\pi} \approx 318\mu F.$$

Nhận xét. Các em có lập luận đầy đủ và cho kết quả đúng : **Yên Bái :** *Ngọc Anh*, 12A2, *Phan Thị Kim Hoa*, 12A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành ; **Bình Định :** *Nguyễn Đức Hoàng Phương* và *Đinh Thành Vinh*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Hưng Yên :** *Nguyễn Vũ Bình*, 11 Lí, THPT NK Hưng Yên ; **Thanh Hóa :** *Lê Mạnh Trung*, 12I, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa ; **Hòa Bình :** *Nguyễn Tuấn Anh*, 12 Lí, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Bạc Liêu :** *Lê Thanh Hoàn*, 12T1, THPT chuyên Bạc Liêu ; **Bắc Giang :** *Giáp Ngọc Trung*, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Vĩnh Long :** *Trần Thị Phương Uyên*, 12A2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Đức Nhân*, 11B1, THPT Hùng Vương ; **Nghệ An :** *Thái Bá Sơn*, K30A3, *Hoàng Khắc Nhân*, K29A6, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; **Quảng Bình :** *Lê Đức Huế*, 12 Lí, THPT chuyên Quảng Bình ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Văn Trình*, 12 Hóa, *Trần Kiều Hưng*, 12 Toán, THPT chuyên Hàn Thuyên ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Anh Việt*, 11A3, *Lương Đức Dũng*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

BẠN CÓ BIẾT ?

SỐ NGUYÊN TỐ LỚN NHẤT MỚI BIẾT

Đó là số $2^{13466917} - 1$.

Số này đã được khám phá ra trong khuôn khổ dự án GIMPS nhằm sắp đặt một chương trình tính toán hoạt động thường xuyên trên máy tính của những người tình nguyện tham gia. Số nguyên tố M_p thứ 13 này gọi là số nguyên tố Mersenne (tức là $M_p = 2^p - 1$), gồm có 4053946 chữ số. Muốn viết số này, phải viết liên tục không ngừng, mỗi giây hai chữ số, trong hơn ba tuần lễ. Dự án trên hứa thưởng 100000 USD cho ai tìm được một số nguyên tố có hơn 10 triệu chữ số.

Trước đó Nayan Hajratwala chỉ là một người ham thích toán, đã khám phá ra số nguyên tố có hơn một triệu chữ số, nhờ có một phần mềm đặc biệt cài vào máy tính của mình. Phải mất ba tuần lễ tính toán mới chứng minh được rằng $2^{6972593} - 1$ đúng là một số nguyên tố. Hajratwala được nhận số tiền 50000 USD mà Tổ chức Biên giới Điện tử hứa thưởng cho người nào tìm được một số nguyên tố có số chữ số vượt quá con số một triệu.

NGUYỄN VĂN THIÊM
(theo *Sciences et Avenir* và *Le Nouvel Observateur*)

CÁCH CHUYỂN ĐỔI... *(Tiếp trang 11)*

... ngày, tháng 2 năm không nhuận có 28 ngày, còn tháng 2 năm nhuận có 29 ngày. Ngày Can Chi tính theo chu kì 60 nên *những ngày trong mỗi năm DL dưới đây có tên Can Chi trùng nhau:*

1/3, 30/4, 29/6, 28/8, 27/10, 26/12 năm sau, 24/2 năm sau.

Nếu ta biết tên Can Chi của ngày 1/3 DL thì tìm được tên Can Chi các ngày tiếp theo (theo thứ tự mã số) ở bảng Lục thập hoa giáp. VD : Ngày 1/3/2002 là Mậu Thìn (m=5), thì 2/3/2002 là Kỷ Tỵ (m = 6), còn 1/3/2003 là Quý Dậu (m = 10), thì 2/3/2003 là Giáp Tuất (m = 11). Để tính năm nhuận DL, chú ý rằng từ năm 1901 đến 2099, những năm có số năm chia hết cho 4 là năm nhuận, nhưng những năm tận cùng 00 thì nếu chia hết (không chia hết) cho 400 là năm không nhuận (có nhuận). VD năm 2000 không nhuận, còn các năm 1900, 2100 là năm nhuận.

Giải đáp :

SỐ NÀO NHỈ ?

Toàn đang viết bài báo trên máy tính. Chẳng hiểu phần mềm bị lỗi thế nào mà các con số tự nhiên biến mất. Bạn có thể giúp Toàn điền vào như sau :

• Năm 1075, thời Lý Nhân Tông mở khoa thi Nho học tam trường đầu tiên ở nước ta. Lê Văn Thịnh đỗ thủ khoa kì thi đó.

• Năm 1246, Nguyễn Quan Quang (quê Tam Sơn, Tiên Sơn, Bắc Ninh) đỗ Trạng nguyên, là trạng nguyên đầu tiên của Việt Nam.

• Năm 1247, Nguyễn Hiền (Dương Á, Nam Thắng, Nam Trực, Nam Định) đỗ Trạng nguyên khi mới 13 tuổi, là trạng nguyên nhỏ tuổi nhất nước ta.

• Năm 1736, Trịnh Tuệ (Sóc Biên, Vĩnh Lộc, Thanh Hóa) đỗ Trạng nguyên, là trạng nguyên cuối cùng của khoa cử VN. Có tất cả 125 khoa thi với 127 đình nguyên, trong đó có 47 trạng nguyên. Xét về quê quán thì các tỉnh có số trạng nguyên như sau :

Bắc Ninh	: 12 vị ;	Hải Dương	: 8 vị
Hà Nội	: 4 vị ;	Hà Tây	: 4 vị
Hải Phòng	: 3 vị ;	Hưng Yên	: 3 vị
Nam Định	: 3 vị ;	Bắc Giang	: 2 vị
Thái Bình	: 2 vị ;	Hà Tĩnh	: 2 vị
Phú Thọ	: 1 vị ;	Nghệ An	: 1 vị
Thanh Hóa	: 1 vị ;	Quảng Bình	: 1 vị

Xin trao thưởng cho các bạn : Vũ Ngân Hà, 7A, THCS BC Ngô Gia Tự, **Hà Nội** ; *Nguyễn Tuấn Anh*, 12C, THPT Mường Khương, **Lao Cai** ; *Tạ Hoài Nam:* 11B6, THPT Nhị Chiểu, Phú Thứ, Kinh Môn, **Hải Dương** ; *Trần Đăng Quân*, P704E, làng Sinh viên Hacincô, **Hà Nội**, *Vũ Quang Huy*, 10T1, THPT Hà Nội – Amsterdam, **Hà Nội**.

VKT

VIẾT CÁC CON SỐ

Ngày xưa, các chữ số từ *một* đến *chín* được viết bởi nhiều cách khác nhau trên thế giới. Bạn hãy liệt kê các cách viết chúng của người Trung Quốc, Ai Cập, Maia, Hy Lạp, La Mã, Ả Rập và cách viết trong hệ cơ số 2 hiện nay. Còn số 0 bạn có biết nó được ra đời ở đâu không ?

BÍNH NAM HÀ

Kết quả :

ĐÃ CHÍNH XÁC CHƯA ?

Có lẽ do quá nôn nóng mà bạn *Long* đã phạm sai lầm khi đánh giá các BĐT (3), (4), (5).

Cụ thể là từ BĐT $ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$ không chắc suy ra được $ab(a^2+b^2-c^2) \le \dfrac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2}$ khi $a^2+b^2-c^2<0$ lúc đó ΔABC có góc C tù. Sau đây là một lời giải đúng.

BĐT cần chứng minh tương đương với :

$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \le 2(a^4+b^4+c^4) + 2abc(a+b+c)$

$\Leftrightarrow (ab-ac)^2+(bc-ba)^2+(ca-cb)^2 \le$

$\le \left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2$

$\Leftrightarrow (a-b)^2[(a+b)^2-c^2]+(b-c)^2[(b+c)^2-a^2]+(c-a)^2[(c+a)^2-b^2] \ge 0$

BĐT này đúng nên BĐT ở bài ra được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. Tất các các lời giải gửi về TS đều nhận xét rằng Long chưa nắm vững tính chất của bất đẳng thức. Các bạn đã đưa ra rất nhiều cách giải đúng cho bài toán này ; trong đó có nhiều bạn THCS tham gia giải tốt. Xin trao tặng phẩm kì này cho các bạn : **Nam Định :** *Nguyễn Thị Hương Giang*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Hà Nội :** *Nguyễn Phương Thảo*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Xuân Thủy, Cầu Giấy ; **Nghệ An :** *Nguyễn Thị Huyền*, 9C, THCS TT Quỳ Hợp, Quỳ Hợp ; **Thanh Hóa :** *Lê Thị Phương Anh*, 10T, THPT Lam Sơn ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Đình Minh*, 12/21, THPT Phan Chu Trinh, Q. Hải Châu.

NGỌC HIỀN

MỘT CÁCH GIẢI HAY ?

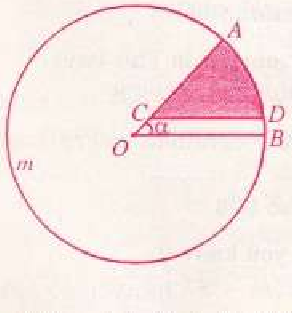
Bạn *A* nói với bạn *B* : *Tớ vừa nghĩ ra một cách giải PT* $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$ (1)

Thế này nhé : Ta có điều kiện bài toán là $-1 \le x \le 3$.

Giải đáp bài :

TÍNH GÓC

(Theo bạn *Đỗ Hoàng Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**)

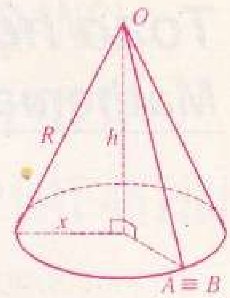


Gọi $R = OA = OB$ là bán kính tấm bìa ; $\widehat{AOB} = \alpha$ (α đo bằng radian, $0 < \alpha < 2\pi$). Độ dài $\overset{\frown}{AmB}$ còn lại sau khi cắt là $R(2\pi - \alpha)$ (1). Sau khi dán ta được một hình nón có đáy là hình tròn bán kính x, chiều cao h, độ dài đường sinh là R. Từ (1) suy ra $2\pi x = R(2\pi - \alpha)$ (2). Gọi V là thể tích của hình nón thì

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{R^2 - x^2} =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{x^2}{2}.\frac{x^2}{2}(R^2 - x^2)} \le \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}R^3.$$

(Áp dụng BĐT Côsi cho ba số dương $\frac{x^2}{2}, \frac{x^2}{2}, R^2 - x^2$).



Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3}R$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \left(\frac{6 - 2\sqrt{6}}{3}\right)\pi \text{ (rad)}$$

(theo (2)).

Vậy sản phẩm có thể tích lớn nhất khi góc ở tâm bằng

$$\left(\frac{6 - 2\sqrt{6}}{3}\right)\pi \text{ (rad)} \approx 66^0 3'36''.$$

Nhận xét : Ngoài bạn *Huy* có các bạn sau có lời giải gọn không cần sử dụng đến công cụ đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất của thể tích vật đựng hàng :

Hà Nội : *Ngô Trí Nam*, 11A3, khối PTCT–T, ĐHSP Hà Nội I ; **Nghệ An :** *Lê Quốc Đô*, 12AT, khối PTCT–T, ĐH Vinh ; **Hà Tây :** *Trần Đình Việt*, 12A11, THPT Ứng Hòa B ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Dương Quỳnh Phương*, 10 Lý, PTNK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh.

HỒNG QUANG

MÃ SỐ BÍ MẬT

Một chiến sĩ tình báo phải nhớ một mã số bí mật, khi truyền tin mới ghi ra. Con số đó gồm 20 chữ số mà nếu thêm chữ số 1 vào đầu bên trái và chữ số 9 vào đuôi của số đó, thì số mới bằng 99 lần số ban đầu. Bạn có thể đoán được con số bí mật đó không ?

PHAN THANH QUANG
(Tp. Hồ Chí Minh)

Đến đây có thể áp dụng BĐT Bunhiacôpxki. cho 2 bộ số $(x, 1)$; $(\sqrt{x+1}, \sqrt{3-x})$ được

$$x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \le 2\sqrt{x^2+1} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra việc giải PT (1) được quy về việc giải PT (khi dấu bằng ở BĐT Bunhiacôpxki xảy ra) $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$. Vậy PT (1) có ba nghiệm là $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, $x_3 = 1 + \sqrt{2}$

Bạn *B* nghĩ một lúc rồi trả lời : *Rằng hay thì thật là hay, nghe ra...*

Các bạn có thể viết tiếp lời bạn B không ?

NGUYỄN PHÚC
(Hà Nội)

Đón đọc THTT số 309 (3/2003)

- Giải phương trình nghiệm nguyên nhờ sử dụng tính chất của số nguyên tố.
- Đề thi tuyển sinh toán lớp 10 PTNK trường Lê Hồng Phong Tp. Hồ Chí Minh 2002.
- Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh toán lớp 10 khối PTCTT ĐH Vinh năm 2002
- Đề thi tuyển sinh Đại học của Bộ Quốc phòng 2002 khối D.
- Giới thiệu các bài thi trắc nghiệm tự luận THPT.

Các bạn sẽ có lời giải đáp các bài đố vui về năm Mùi 2003.

THTT

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 40
Số 308 (2-2003)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỨ

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NXB Giáo dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo dục :
VŨ DƯƠNG THỤY

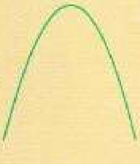
Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI. *Biên tập :* VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH.
Trị sự : VŨ ANH THƯ. *Trình bày :* NGUYỄN THỊ OANH, NGUYỄN THANH LONG, NGUYỄN TIẾN DŨNG
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Hồ Chí Minh ĐT : 08.8309049

TÌM MUA TOÁN HỌC TUỔI TRẺ Ở ĐÂU ?

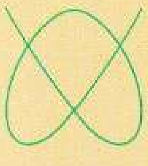
Hà Nội : 81 Trần Hưng Đạo, 187 B Giảng Võ, 25 Hàn Thuyên, 23 Tràng Tiền, 232 Tây Sơn ...
Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh, ... ***Tp. Hồ Chí Minh :*** 231 Nguyễn Văn Cừ và 240 Trần Bình Trọng, Q. 5,... Các hiệu sách lớn trong cả nước. Bạn có thể đặt mua cả năm hoặc từng quý ở các Bưu điện địa phương. Các đại lí sách báo muốn phát hành tạp chí THTT xin liên hệ với :

Trung tâm Phát hành sách tham khảo, NXB Giáo dục,
187B Giảng Võ, Hà Nội, ĐT : 04.5141253

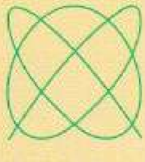
ĐƯỜNG CONG HÌNH LƯỚI



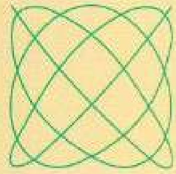
n = 1



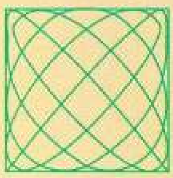
n = 3



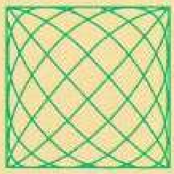
n = 5



n=7. 21 mắt lưới



n=9. 36 mắt lưới



n=11. 55 mắt lưới

Với n lẻ, lưới không kín, số mắt lưới = n.(n-1)/2

GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM 2002 VÀ HỘI THẢO CHƯƠNG TRÌNH TOÁN ĐẠI HỌC

HÀ HUY KHOÁI
(Viện Toán học Việt Nam)

Nhân dịp Xuân Quý Mùi ngày 12/1/2003 Hội Toán học Việt Nam đã tổ chức Cuộc gặp mặt truyền thống các thế hệ toán học tại Khu du lịch Thác Đa, Hà Tây đồng thời tổ chức *Hội thảo khoa học Chương trình giảng dạy toán học ở Đại học và trên Đại học* và trao *Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2002*. Dự hội thảo có các GS, TS của Viện Toán học VN và nhiều trường đại học trong cả nước.

(Xem tiếp trang 2)

THÔNG BÁO

CÁC THẦY CÔ GIÁO VÀ CÁC BẠN HỌC SINH TRUNG HỌC CƠ SỞ THÂN MẾN !

Từ năm 1992 trên tạp chí **Toán học và Tuổi trẻ** đã thường xuyên có các trang viết và đề toán dành riêng cho thầy cô và học sinh Trung học cơ sở và các bạn yêu toán. Ngoài ra các bạn **Trung học cơ sở** còn có thể đọc các bài về *Lịch sử toán, Toán học và Đời sống, Nhìn ra thế giới, Giải trí toán học, Câu lạc bộ, Các đề thi vào lớp 10 chuyên các địa phương, Tiếng Anh qua các bài toán, Toán học muôn màu...* THTT sẽ từng bước cải tiến nội dung và hình thức để đáp ứng các yêu cầu của bạn đọc nêu trong đợt thăm dò ý kiến vừa qua.

Trước mắt từ năm 2003 sẽ có thêm 2 đề toán mỗi kì *dành cho các bạn lớp 6, lớp 7* trong mục *Đề ra kì này* phù hợp với nội dung mới của sách giáo khoa. Tác giả của các đề toán trên THTT là các giáo sư, tiến sĩ, các nhà giáo, nhà nghiên cứu của các trường Đại học, Viện Toán học, viện Nghiên cứu Giáo dục, Viện Công nghệ Thông tin, NXB Giáo dục, các trường học trong cả nước. Hướng tới kỉ niệm 40 năm thành lập và phát triển, THTT sẽ cố gắng thỏa mãn nhiều hơn những mong muốn của bạn đọc trong đó có các bạn **Trung học cơ sở**. Tạp chí THTT *chỉ ra mỗi tháng một số vào ngày 15*, không có số dành riêng cho THCS. Bạn chú ý đặt mua sớm Toán học và Tuổi trẻ để có liên tục các số. Cảm ơn các bạn.

THTT

ISSN : 0866-8035	Chế bản tại Tòa soạn	
Chỉ số : 12884	In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ	**Giá : 3000đ**
Mã số : 8BT10M3	In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2003	**Ba nghìn đồng**