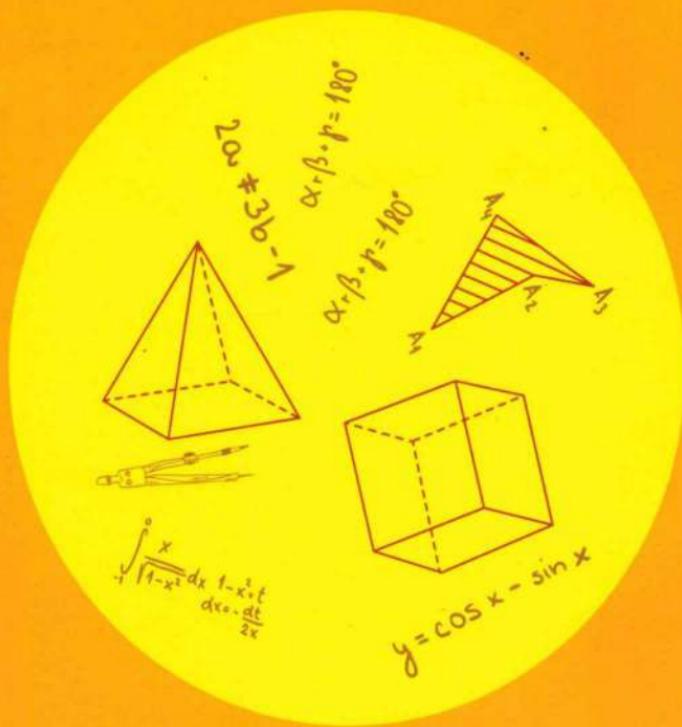




GT.0000027267

U CẨM THƯ

PHÁT TRIỂN TƯ DUY THÔNG QUA DẠY HỌC MÔN TOÁN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

GUYỄN
C LIỆU

CHU CẨM THƠ

**PHÁT TRIỂN TƯ DUY
THÔNG QUA DẠY HỌC MÔN TOÁN
Ở TRƯỜNG PHỐ THÔNG**

(In lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SU PHẠM

DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

VIẾT TẮT	NỘI DUNG ĐẦY ĐỦ
ARIZ	Tiếng Nga "Алгоритм решения изобретательских задач" Algôrit giải các bài toán sáng chế
BPT	Bất phương trình
CM	Chứng minh
DHSP	Đại học Sư phạm
GV	Giáo viên
KQH	Khái quát hoá
HPT	Hệ phương trình
HS	Học sinh
NXB	Nhà xuất bản
PPDH	Phương pháp dạy học
PPDHTC	Phương pháp dạy học tích cực
PPKTTD	Phương pháp kích thích tư duy
PT	Phương trình
SGK	Sách giáo khoa
SGV	Sách giáo viên
SV	Sinh viên
THCS	Trung học cơ sở
THPT	Trung học phổ thông
TRIZ	Tiếng Nga "Теория решения изобретательских задач" Lí thuyết giải các bài toán sáng chế



UNIVERSITY OF EDUCATION PUBLISHING HOUSE

PHÁT TRIỂN TƯ DUY THÔNG QUA DẠY HỌC MÔN TOÁN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

Chu Cẩm Thư

Sách được xuất bản theo chỉ đạo biên soạn của Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
phục vụ công tác đào tạo

Bản quyền xuất bản thuộc về Nhà xuất bản Đại học Sư phạm.
Mọi hình thức sao chép toàn bộ hay một phần hoặc các hình thức phát hành
mà không có sự cho phép trước bằng văn bản
của Nhà xuất bản Đại học Sư phạm đều là vi phạm pháp luật.

Chúng tôi luôn mong muốn nhận được những ý kiến đóng góp của quý vị độc giả
để sách ngày càng hoàn thiện hơn. Mọi góp ý về sách, liên hệ về bản thảo và dịch vụ bán quyền
xin vui lòng gửi về địa chỉ email: kehoach@axbdhsp.edu.vn

Mã số sách tiêu chuẩn quốc tế: ISBN 978-604-54-0423-2

MỤC LỤC

Trang

LỜI MỞ ĐẦU	5
Chương 1. NHỮNG VẤN ĐỀ CHUNG VỀ TƯ DUY VÀ TƯ DUY TOÁN HỌC	7
1.1. Tư duy	7
1.1.1. Quan niệm về tư duy	7
1.1.2. Quan hệ giữa nhận thức cảm tính và tư duy	15
1.1.3. Tính chất, phương tiện, sản phẩm của tư duy	17
1.2. Quá trình tư duy và các hoạt động trí tuệ phổ biến	18
1.2.1. Quá trình tư duy	18
1.2.2. Phân tích và tổng hợp	19
1.2.3. So sánh và tương tự	22
1.2.4. Khái quát hoá và đặc biệt hoá	24
1.2.5. Trừu tượng hoá	26
1.3. Các loại hình tư duy	26
1.4. Một số quan điểm về những thành phần của tư duy toán học và năng lực toán học	34
CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 1	40
Chương 2. NHỮNG LOẠI HÌNH TƯ DUY THƯỜNG GẶP TRONG DẠY HỌC MÔN TOÁN	42
2.1. Tư duy logic	42
2.1.1. Logic hình thức	42
2.1.2. Khái niệm	43
2.1.3. Phán đoán	48
2.1.4. Suy luận	50
2.2. Tư duy logic biện chứng	55
2.3. Tư duy thuật toán	66
2.3.1. Quan niệm về thuật toán	66
2.3.2. Tư duy thuật toán	67
2.4. Tư duy hàm	70
2.4.1. Quan niệm về tư duy hàm	70
2.4.2. Các hoạt động đặc trưng của tư duy hàm	71

2.5. Tư duy phê phán	74
2.5.1. Một số quan niệm về tư duy phê phán	74
2.5.2. Đặc trưng của tư duy phê phán	75
2.5.3. Dạy học tư duy phê phán	76
2.6. Tư duy sáng tạo	78
2.6.1. Một số quan niệm về sáng tạo	78
2.6.2. Tư duy sáng tạo và trí tưởng tượng	82
2.6.3. Dạy học phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh	83
2.6.4. Một số thủ thuật sáng tạo cơ bản	85
CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 2	100
Chương 3. PHÁT TRIỂN TƯ DUY CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC MÔN TOÁN	102
3.1. Một số định hướng phát triển tư duy cho học sinh	102
3.2. Một số phương pháp kích thích tư duy	103
3.2.1. Nhóm phương pháp sử dụng hiệu quả của hình ảnh, sơ đồ nhằm tăng cường khả năng tổ chức thông tin, năng lực biểu đạt tư duy	108
3.2.2. Nhóm phương pháp tăng cường cảm xúc, phát triển tâm lí tích cực tư duy	113
3.2.3. Nhóm phương pháp tăng cường năng lực hợp tác tư duy	116
3.2.4. Nhóm phương pháp sử dụng thủ thuật sáng tạo của khoa học kỹ thuật	120
3.3. Một số biện pháp phát triển tư duy cho học sinh thông qua dạy học môn Toán	123
3.3.1. Thường xuyên sử dụng những lời khuyên kích thích học sinh tư duy và tạo cơ hội cho học sinh chia sẻ, hợp tác trong quá trình tư duy	123
3.3.2. Tăng cường rèn luyện cho học sinh vận dụng, phối hợp nhiều hình thức biểu đạt tư duy: ngôn ngữ tự nhiên, ngôn ngữ toán học chính xác và sử dụng sơ đồ, biểu đồ	135
3.3.3. Tăng cường rèn luyện các hoạt động trí tuệ nhằm phát triển và bồi dưỡng năng lực tư duy cho học sinh, đặc biệt là tư duy sáng tạo	144
CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 3	149
BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ (INDEX)	151
DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO	154

LỜI MỞ ĐẦU

Trong chương trình giáo dục quốc dân, môn Toán giữ một vai trò quan trọng. Môn Toán được coi là môn học công cụ, cung cấp các tri thức để người học có thể học tập các môn học khác. Trong phạm vi môn học của mình, môn Toán trang bị các tri thức toán học, tri thức phương pháp được coi là cách thức học tập, nghiên cứu toán học, nghiên cứu sự vật hiện tượng, nghiên cứu thế giới quan. Thông qua học toán, người học được hình thành, rèn luyện và phát triển tư duy.

Thực tế, có nhiều người ít dùng trực tiếp kiến thức toán học vào thực tiễn cuộc sống, nhưng không ai phủ nhận rằng, những người học toán tốt thường có tư duy tốt. Vì vậy, người ta dùng các bài kiểm tra toán dưới nhiều hình thức khác nhau, dùng thành tích học tập môn Toán là một thước đo trong nhiều kì thi, kì tuyển dụng. Có những thực tế trên là do các nghiên cứu đã chỉ ra rằng, môn Toán có vai trò quan trọng trong phát triển tư duy người học. Trong khi, thế giới ngày càng coi trọng "tư duy"; học tập bằng tư duy đem lại những giá trị bền vững. Tư duy cũng có thể coi là giá trị, là phương tiện và là mục tiêu của giáo dục hiện đại.

Trên thế giới hiện có hai khuynh hướng giáo dục toán học:

Thứ nhất, coi toán học là công cụ để tiếp thu tri thức, nghiên cứu các khoa học khác. Theo khuynh hướng này, môn Toán chỉ dạy cho học sinh một số lượng kiến thức vừa đủ để học những kiến thức phổ thông, không coi trọng dạy nguồn gốc cũng như phương pháp nghiên cứu toán học.

Thứ hai, coi toán học mà đối tượng và phương pháp nghiên cứu của nó là điển hình để kích thích hứng thú, khơi dậy niềm say mê khám phá, qua đó truyền đạt phương pháp học tập, nghiên cứu, rèn luyện và phát triển tư duy người học. Do đó, trong dạy học môn Toán, người ta cố gắng thông qua dạy tri thức toán học để dạy cách phát hiện và giải quyết vấn đề, dạy cách suy nghĩ, rèn luyện nhân cách.

Ở Việt Nam, khuynh hướng thứ hai rất được coi trọng. Các nhà nghiên cứu và các nhà giáo dục đều cho rằng, cái còn lại sau những năm tháng vất vả

học toán không phải chỉ là những công thức, quy tắc,... mà còn là cách suy nghĩ, cách giải quyết vấn đề, khả năng toán học hoá các tình huống của cuộc sống. Vì vậy, một trong những nhiệm vụ quan trọng nhất của dạy học môn Toán trong trường phổ thông là rèn luyện và phát triển tư duy cho học sinh.

Giáo trình cung cấp những kiến thức cơ bản nhất về những khái niệm liên quan đến tư duy, tư duy toán học, một số phương pháp rèn luyện và phát triển tư duy cho học sinh.

Giáo trình là tài liệu chuyên khảo cho học viên sau đại học chuyên ngành Lí luận và Phương pháp dạy học môn Toán, giáo viên phổ thông và những ai quan tâm đến nhiệm vụ rèn luyện tư duy thông qua dạy học môn Toán.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn trân trọng đến GS.TS.NGUT. Bùi Văn Nghị, PGS.TS.NGND. Tôn Thân, TS. Lê Tuấn Anh, những người thầy đáng kính đã dành nhiều thời gian để thẩm định, góp ý, cho tác giả nhiều lời khuyên bổ ích để bản thảo được hoàn thiện. Tác giả cũng chân thành cảm ơn các đồng nghiệp trong Bộ môn Lí luận và Phương pháp dạy học Toán, Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội và các cộng sự đã cung cấp nhiều tư liệu, chia sẻ kinh nghiệm giảng dạy.

Mặc dù đã rất cố gắng và dành nhiều tâm sức để hoàn thành cuốn chuyên khảo này, nhưng có thể cuốn sách còn có những thiếu sót. Bằng tấm lòng cầu thị và mong muốn hoàn thiện, tác giả rất mong nhận được những góp ý của người đọc, các nhà nghiên cứu. Mọi ý kiến góp ý xin gửi về: TS. Chu Cẩm Thơ, Bộ môn Lí luận và Phương pháp dạy học Toán, Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, 136 Xuân Thuỷ, Cầu Giấy, Hà Nội.

TÁC GIẢ

Chương 1

NHỮNG VẤN ĐỀ CHUNG VỀ TƯ DUY VÀ TƯ DUY TOÁN HỌC

"Giáo dục chỉ là việc đánh thức trong con người tri thức còn ngái ngủ chứ không phải đem tri thức của mình đặt vào lòng kẻ khác,... Mỗi người đều "mang thai" những tri thức thiết yếu cho cuộc sống, trong giáo huấn cần có ông thầy để làm "bà đỡ" giúp trò "sinh ra những hài nhi tri thức",... Vì vậy, nghệ thuật dạy học là sự gợi lên những gì vốn đang tiềm ẩn trong trí tuệ và tâm hồn học sinh".

Socrates (469 – 399 TCN)

Chương này trình bày những kết quả nghiên cứu xung quanh những vấn đề cơ bản của tư duy trên cơ sở tâm lí học, thần kinh học. Từ việc nắm bắt được nội hàm của khái niệm tư duy, người đọc cần thu hoạch được cho bản thân những vấn đề cơ bản như: phương tiện, sản phẩm, tính chất, quá trình, các hoạt động trí tuệ chung, quan niệm về tư duy toán học.

1.1. TƯ DUY

1.1.1. Quan niệm về tư duy

Tư duy là gì? Đây là một vấn đề thu hút sự quan tâm của nhiều ngành khoa học và nhiều nhà nghiên cứu. *Triết học* nghiên cứu tư duy dưới góc độ lý luận nhận thức. *Logic học* nghiên cứu tư duy ở các quy tắc tư duy đúng. *Xã hội học* nghiên cứu tư duy ở sự phát triển của quá trình nhận thức trong các chế độ xã hội khác nhau. *Sinh lí học* nghiên cứu cơ chế hoạt động thần kinh cao cấp với tư cách là nền tảng vật chất của các quá trình tư duy ở con người. *Điều khiển học* nghiên cứu tư duy để có thể tạo ra "Trí tuệ nhân tạo". *Tâm lí học* nghiên cứu diễn biến của quá trình tư duy, mối quan hệ qua lại cụ thể của tư duy với các khía cạnh khác của nhận thức.

Khi làm một bài tập toán, HS phải đọc kỹ để tìm hiểu đề bài, phải đánh giá về dạng toán, các dữ kiện đã cho, các yêu cầu phải giải đáp, sau đó HS phải tìm phương pháp giải, các công thức, các định lí cần áp dụng,... nghĩa là HS cần phải tư duy trước khi làm bài. Quá trình tư duy trên đây, dù nhanh hay chậm,

dù nhiều hay ít, dù nồng cạn hay sâu sắc đều diễn ra trong bộ não hay thần kinh trung ương.

Khi bạn vô tình chạm tay vào cốc nước nóng, bạn sẽ rụt tay lại. Đây là phản xạ không điều kiện do hệ thần kinh chỉ đạo các cơ quan thực hiện. Để học thuộc một bài thơ, bạn phải đọc đi đọc lại nhiều lần và cố nhớ bài thơ khi không có bản ghi trước mắt. Bạn thực hiện một loạt các công việc theo quy trình bạn được học để tạo ra một sản phẩm,... Có nghĩa là hệ thần kinh của bạn không chỉ có một loại hình hoạt động là tư duy mà còn có nhiều hoạt động khác. Không chỉ có vậy, hoạt động tư duy không phải là thường xuyên và hệ thần kinh nào cũng có. Hoạt động điều khiển sự vận động của cơ thể là hoạt động nhiều nhất và là hoạt động chính của tất cả các hệ thần kinh.

Theo Phùng Văn Hoà (2008), trước hết cần khẳng định rằng tư duy là một hình thức hoạt động của hệ thần kinh. Khẳng định điều này để giới hạn việc nghiên cứu về tư duy. Tư duy không có trong các loài thực vật, không có ở ngọn núi, mỏm đá hay dòng sông, cũng không ở ngoài hệ thần kinh và có thể chỉ trong một số hệ thần kinh và chỉ ở trung ương thần kinh.

Hệ thần kinh hoạt động theo nguyên lý các tế bào thần kinh của nó tiếp nhận kích thích và phát ra một kích thích thần kinh. Các kích thích tác động lên các tế bào thần kinh để kích hoạt các tế bào này hoạt động gọi là các kích thích sơ cấp, còn các kích thích do các tế bào thần kinh phát ra gọi là kích thích thứ cấp. Các kích thích thứ cấp có thể kích thích các tế bào thần kinh khác hoạt động và như vậy nó cũng mang tính chất của kích thích sơ cấp. Điều này có nghĩa là với tế bào thần kinh này thì kích thích là thứ cấp, nhưng tế bào khác là sơ cấp. Các kích thích thần kinh có nhiều loại như mùi vị, âm thanh, ánh sáng, xung điện,... Các tế bào thần kinh có thể tiếp nhận những kích thích này mà không tiếp nhận những kích thích khác; tập hợp những kích thích có thể kích hoạt được tế bào thần kinh tạo nên phổ tiếp nhận kích thích của tế bào thần kinh. Phổ tiếp nhận kích thích có thể rộng hay hẹp. Phổ tiếp nhận rộng khiến tế bào thần kinh dễ bị kích hoạt bởi các kích thích đến từ nhiều nguồn khác nhau, còn phổ hẹp làm cho tế bào thần kinh chỉ được kích hoạt bởi một số kích thích nhất định.

Khi các tế bào thần kinh hoạt động cũng là lúc chúng thực hiện một chức năng nào đó trong hệ thần kinh. Để có thể thực hiện chức năng, trong các tế bào thần kinh phải có một cấu trúc chức năng tương ứng với chức năng mà tế bào thần kinh đảm nhận. Chức năng của các tế bào thần kinh có thể được hình thành

ngay từ khi ra đời hoặc chỉ được hình thành trong quá trình sinh trưởng. Các tế bào thần kinh chức năng được hình thành ngay từ khi ra đời là các tế bào thực hiện các chức năng mang tính bản năng, còn các tế bào hình thành chức năng trong quá trình sinh trưởng giúp cho sự hoạt động phù hợp hay thích nghi với môi trường sống là các tế bào thần kinh không bản năng, là các tế bào ghi nhớ mới. Để có thể giúp cho sự hoạt động phù hợp với môi trường sống, các tế bào này phải ghi nhớ được các tác động của môi trường lên cơ thể. Đây là sự ghi nhớ mới. Như vậy, sự hình thành chức năng của các tế bào thần kinh không bản năng đồng nghĩa với sự ghi nhớ của chúng về các yếu tố môi trường tác động lên cơ thể (quá trình này gọi là tái chuyển hoá). Khi các tế bào này hoạt động, chúng tái hiện lại các yếu tố đã làm cho chúng ghi nhớ, đồng thời có thể phát ra kích thích thần kinh thứ cấp để kích hoạt sự hoạt động của các tế bào khác (bao gồm các tế bào thần kinh ở các bộ phận khác trong cơ thể). Để các tế bào ghi nhớ mới thực hiện việc ghi nhớ, chúng phải nhận được kích thích sơ cấp từ các tế bào thần kinh cảm giác hoặc các tế bào thần kinh khác đang hoạt động. Thông thường, các kích thích từ các tế bào thần kinh cảm giác giúp cho sự ghi nhớ các yếu tố của môi trường tác động lên cơ thể, còn các kích thích đến từ các tế bào thần kinh đã ghi nhớ có tác dụng làm rõ nét hơn sự ghi nhớ bằng hình thức gia tăng số lượng các tế bào ghi nhớ về cùng một yếu tố – chúng là các nhóm tế bào cùng ghi nhớ, và tập hợp với các tế bào ghi nhớ riêng lẻ gọi là các phần tử ghi nhớ. Có nhiều vấn đề về sự ghi nhớ mới nhưng do chủ đề của bài là về tư duy nên chúng không được trình bày kĩ ở đây. Như vậy, sự ghi nhớ cũng là một hình thức hoạt động của hệ thần kinh. Có hai phương pháp chính để hệ thần kinh ghi nhớ được, phương pháp thứ nhất là cho đối tượng tác động lặp lại nhiều lần và bổ sung các phần còn thiếu của đối tượng bằng cách tìm trong sự ghi nhớ của hệ thần kinh các bộ phận thuộc các đối tượng khác, nhưng có các điểm tương tự với các bộ phận của đối tượng (phương pháp so sánh, chọn lựa); phương pháp thứ hai áp dụng khi không có cơ hội để đối tượng tác động nhiều lần. Để thực hiện phương pháp này, hệ thần kinh phải tìm trong trí nhớ, phải thực hiện nhiều các thao tác như phân tích, so sánh, đánh giá, tổng hợp, có nghĩa là hệ thần kinh phải tư duy. Những phân tích này cho chúng ta thấy sự khác nhau giữa hoạt động ghi nhớ và hoạt động tư duy. Ghi nhớ bằng phương pháp tác động lặp lại nhiều lần không đòi hỏi hệ thần kinh phải tư duy và áp dụng được cho nhiều dạng hệ thần kinh khác nhau, gọi là ghi nhớ không tư duy. Còn ghi nhớ đòi hỏi phải tư duy chỉ có một số hệ thần kinh thực hiện được,

goi là phương pháp ghi nhớ có tư duy. Tư duy trong ghi nhớ sẽ kết thúc khi sự ghi nhớ đã được thực hiện.

Có nhiều hệ tế bào khác trong cơ thể cũng tiếp nhận được kích thích thần kinh thứ cấp và thực hiện hoạt động, trong đó dễ nhận thấy nhất là các hệ tế bào vận động. Khi các tế bào thần kinh phát ra kích thích thần kinh để kích thích các hệ tế bào khác trong cơ thể hoạt động là chúng thực hiện chức năng điều khiển cơ thể, chúng cũng hoạt động, hay điều khiển cơ thể cũng là một hoạt động của hệ thần kinh. Trong hoạt động này cũng có thể có hoặc không có tư duy. Cánh tay co lại khi ngón tay vô tình chạm vào cốc nước nóng là phản xạ không điều kiện, nó không đòi hỏi phải tư duy và tư duy còn có thể có phản tác dụng trong trường hợp này (làm chậm sự phản xạ). Người thợ thực hiện một loạt các thao tác theo quy trình công nghệ đã được ghi nhớ trong quá trình sản xuất cũng không cần phải tư duy. Có những hoạt động điều khiển đơn giản cũng yêu cầu phải có tư duy; có những hoạt động điều khiển phức tạp không cần phải tư duy khi sự điều khiển đó đã trở nên thuần thục.

Sự xuất hiện của tư duy trong hai phân tích trên đây cho thấy tư duy chỉ xuất hiện khi giữa các phần tử ghi nhớ chưa tạo được liên kết ghi nhớ, hoặc đã có liên kết nhưng với mức độ phức tạp nào đó (liên kết phức hợp). Hệ thần kinh phải tìm trong các điểm ghi nhớ đã có trong nó các phần tử ghi nhớ có thể liên kết với nhau theo một trình tự, một logic nào đó. Điều này đã tự nó nói lên rằng, hệ thần kinh phải có năng lực tư duy mới có thể thực hiện được việc tư duy.

Tư duy không phải là sự ghi nhớ mặc dù nó có thể giúp cho sự hoàn thiện ghi nhớ. Tư duy không phải là hoạt động điều khiển cơ thể mà chỉ giúp cho sự định hướng điều khiển hay định hướng hành vi. Tư duy cũng không phải là giấc mơ mặc dù nó có thể xuất hiện trong một số giấc mơ và có những điểm giống với giấc mơ. Tư duy không có ở ngoài hệ thần kinh. Tư duy là một hình thức hoạt động của hệ thần kinh, thể hiện qua việc tạo ra các liên kết giữa các phần tử đã ghi nhớ, được chọn lọc và kích thích chúng hoạt động để thực hiện sự nhận thức về thế giới xung quanh, định hướng cho hành vi phù hợp với môi trường sống. Tư duy là sự hoạt động, là sự vận động của vật chất, do đó tư duy không phải là vật chất. Tư duy cũng không phải là ý thức, bởi ý thức là kết quả của quá trình vận động của vật chất.

Trên đây là những quan niệm về tư duy xét về mặt thần kinh học.

Tư duy của con người mang bản chất xã hội – lịch sử, có tính sáng tạo, có khả năng khái quát và sử dụng ngôn ngữ làm phương tiện. Tư duy con người được quy định bởi các nguyên nhân, các yêu cầu của quá trình phát triển lịch sử – xã hội, chứ không dừng lại ở mức độ tư duy bằng các thao tác chân tay hay bằng một chương trình đã được lập sẵn. Có thể nói một cách khái quát, các nhà tâm lí học Mác-xít, trên cơ sở của chủ nghĩa duy vật biện chứng đã khẳng định: *Tư duy là sản phẩm cao cấp của một dạng vật chất hữu cơ có tổ chức cao, đó là bộ não của con người*. Trong quá trình phản ánh hiện thực khách quan bằng những khái niệm, phán đoán,... tư duy bao giờ cũng có mối liên hệ nhất định với một hình thức hoạt động của vật chất, với sự hoạt động của não người. Trong khi xác định sự giống nhau giữa tâm lí người và động vật, các nhà tâm lí học cũng chỉ ra sự khác nhau căn bản giữa tư duy của con người và hoạt động tâm lí động vật. Một trong những khác nhau ấy là *tư duy con người sử dụng khái niệm để ghi lại những kết quả trung tượng hoá; tư duy được ra đời do lao động và trên cơ sở của sự phát triển xã hội*. Thông qua hoạt động thực tiễn, thế giới tự nhiên tác động vào các giác quan tạo ra cảm giác, tri giác và biểu tượng. Chúng là cơ sở ban đầu của tư duy. Tư duy khái quát những thu nhận của cảm giác bằng những khái niệm và những phạm trù khoa học, mang lại cho chúng ta những quan điểm rộng hơn, sâu hơn những cảm giác trực tiếp. Nhờ trung tượng hoá mà tư duy đã chỉ ra được những mối liên hệ, quan hệ của rất nhiều sự vật, hiện tượng, nêu ra được những khái niệm, những phạm trù, những quy luật phản ánh các mối liên hệ, quan hệ nội tại của các sự vật, hiện tượng đó. Chỉ có khái quát về lý luận mới cho phép tư duy của con người tìm ra bản chất của các sự vật, hiện tượng và các quy luật phát triển của chúng.

Tư duy là quá trình sáng tạo lại hiện thực dưới dạng tinh thần. Theo C. Mác thì cái tinh thần (ở đây, chúng ta cũng có thể hiểu đó chính là tư duy) chẳng qua là cái vật chất được chuyển vào trong đầu và được cải tạo lại ở trong đó⁽¹⁾. Tư duy còn là quá trình tiến tới cái mới, đề xuất những nhận thức mới, là quá trình không ngừng bổ sung và đổi mới. Quy luật của tư duy thực chất là quy luật của sự phát triển và tìm tòi cái mới. X.L. Ru-bin-stê-in cho rằng: "Trong quá trình tư duy, khách thể có được tất cả nội dung mới, cứ mỗi lần lật đi, lật lại, nó lại được

⁽¹⁾ V.V. Đa-vur-đov, *Các dạng khái quát hoá trong dạy học*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội. Hà Nội, 2000, tr. 234, 244

bộc lộ một khía cạnh mới, tất cả các tính chất mới của nó được làm rõ". Một số tác giả khác lại cho rằng, trong quá trình lập luận, tư duy đạt được những cứ liệu ngày càng mới, vượt ra ngoài phạm vi các điều kiện ban đầu và khi sử dụng các điều kiện này, tư duy đi đến những kết luận ngày càng mới, nhờ chủ động đưa các đối tượng ở vị trí ban đầu vào trong các mối liên hệ mới. Mỗi lần như vậy, tư duy tựa như lật ra một khía cạnh mới, phát hiện và rút ra hết được các thuộc tính và quan hệ mới của chúng.

Như chúng ta đã biết, nét đặc trưng chung nhất trong phương thức tồn tại của tâm lí người là tư duy với tư cách là một quá trình, một hoạt động. Tư duy với tư cách là một quá trình được xuất phát từ tư tưởng chủ đạo của M. Xê-trê-nôv. Trong các công trình nghiên cứu của mình, M. Xê-trê-nôv đã đưa ra luận điểm "cần phải lấy tư tưởng cho rằng hành động tâm lí là một quá trình, một sự vận động tâm lí có mờ đầu nào đó, có diễn biến và kết thúc"⁽¹⁾. Từ đây, chúng ta có thể hiểu tư duy được phân chia thành các khâu, các hoạt động. Mà trong các khâu này, mỗi một hành động tư duy sẽ làm biến đổi mối quan hệ của chủ thể với khách thể, kích thích sự diễn biến của tình huống có vấn đề, kích thích sự chuyển biến tiếp theo của quá trình tư duy. Quá trình tư duy chỉ diễn ra khi xuất hiện vấn đề, nhưng đòi hỏi chủ thể phải ý thức rõ ràng được vấn đề và tiếp nhận nó như một mâu thuẫn cần phải hành động để giải quyết. Theo X.L. Ru-bin-stê-in, tư duy thường bắt đầu từ một vấn đề hay một câu hỏi, từ sự ngạc nhiên, sự thắc mắc hay từ một mâu thuẫn nào đó lôi cuốn cá nhân vào hoạt động tư duy. Ông gọi chúng là những tình huống có vấn đề. Để một vấn đề trở thành tình huống có vấn đề của tư duy, đòi hỏi chủ thể phải có nhu cầu, mong muốn giải quyết vấn đề đó. Mặt khác, chủ thể cũng phải có tri thức cần thiết có liên quan thì việc giải quyết vấn đề mới có thể diễn ra, quá trình tư duy mới được diễn ra.

Phân tích dưới góc độ lí luận về tính hai mặt của quá trình tư duy thống nhất, tác giả Nguyễn Bá Dương⁽²⁾ đã đi đến nhận định: Quá trình tìm kiếm, phát minh cái mới trong khoa học cũng giống như quá trình tái tạo lại kinh nghiệm của lịch sử – xã hội loài người diễn ra dưới hình thức giải quyết các tình huống có vấn đề. Bản thân mỗi kinh nghiệm lịch sử – xã hội luôn có tính tổng hợp chứa đựng bên trong nó. Điều đó có nghĩa là, nó chính là sản phẩm có tính tổng hoà

⁽¹⁾ Nhiều tác giả, *Tâm lí học Liên Xô*, NXB Tiến bộ, Mát-xcơ-va, 1978, tr. 282, 275.

⁽²⁾ Nguyễn Bá Dương, *Quan niệm tâm lí học về dạy học nền vấn đề trong tâm lí học Xô – Việt*, Luận án Phó tiến sĩ, 1983.

của hoạt động sáng tạo của xã hội loài người. Từ đó cho thấy, mâu thuẫn cơ bản của sự phát triển trí tuệ loài người là ở chỗ "tư duy một mặt là một quá trình tìm kiếm và phát hiện ra cái mới, cái bản chất; mặt khác, nó còn là quá trình tái tạo lại những tri thức, những kinh nghiệm lịch sử – xã hội đã được loài người tích luỹ". A. Spi-éc-kin lại cho rằng: Tư duy của con người, phản ánh hiện thực, về bản chất là quá trình truyền đạt gồm hai tính chất: Một mặt, con người hướng về vật chất, phản ánh những nét đặc trưng và những mối liên hệ của vật ấy với vật khác, mặt khác con người hướng về xã hội để truyền đạt những kết quả của tư duy của mình⁽¹⁾. Từ cách tiếp cận mô hình xử lí thông tin, tác giả Đặng Phương Kiệt quan niệm: "Tư duy là một quá trình tâm trí phức tạp, tạo ra một biểu tượng mới bằng cách làm biến đổi thông tin có sẵn"⁽²⁾.

Với cách tiếp cận này, tác giả cho rằng, các quá trình tư duy của con người được diễn ra ở đoạn trên cùng của trình tự xử lí thông tin và những gì sẽ diễn ra khi đạt tới giai đoạn này của quá trình xử lí thông tin thì được gọi là tư duy. Dựa trên cơ sở những mối liên hệ, quan hệ vốn có của các sự vật, hiện tượng trong thế giới khách quan và lí thuyết phản ánh, tác giả Mai Hữu Khuê cho rằng "Tư duy là quá trình tâm lí phản ánh những mối liên hệ và quan hệ giữa các đối tượng hay các hiện tượng của hiện thực khách quan"⁽³⁾. Tác giả cho rằng, tư duy khác hẳn với tri giác ở chỗ tư duy không chỉ thực hiện được những bước như đã xảy ra ở tri giác, là tách các phần riêng lẻ của sự vật, mà còn cố gắng hiểu các phần đó có quan hệ với nhau như thế nào. Tư duy phản ánh bản chất của sự vật, và do đó là hình thức phản ánh hiện thực cao nhất. Với việc xem tư duy như là quá trình phân tích, tổng hợp,... với tư cách là quá trình nhận thức, tập thể tác giả: Trần Minh Đức, Nguyễn Quang Uẩn, Ngô Công Hoàn, Hoàng Mộc Lan, coi "Tư duy là một quá trình nhận thức, phản ánh những thuộc tính của bản chất, những mối liên hệ và quan hệ có tính quy luật của sự vật hiện tượng mà trước đó ta chưa biết"⁽⁴⁾.

Theo Phạm Minh Hạc: "Tư duy chỉ nảy sinh khi gặp những hoàn cảnh có vấn đề, có tính khách quan, có tính gián tiếp, biểu đạt bằng ngôn ngữ, có quan hệ mật thiết với nhận thức cảm tính, thường bắt đầu bằng cảm tính, là một

⁽¹⁾ A. Spi-éc-kin, *Sự hình thành tư duy triều tượng trong những giai đoạn phát triển đầu tiên của loài người*, NXB Sự thật, Hà Nội, 1960, tr. 28.

⁽²⁾ Đặng Phương Kiệt, *Cơ sở tâm lí học ứng dụng*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội, 2000, tr. 292.

⁽³⁾ Mai Hữu Khuê, *Những khía cạnh tâm lí của quản lí*, NXB Lao động, Hà Nội, 1985, tr. 153.

⁽⁴⁾ *Tâm lí học đại cương*, NXB Giáo dục, Hà Nội, 1996, tr. 107.

quá trình. Quá trình tư duy là một hành động trí tuệ được diễn ra bằng cách chủ thể tiến hành những thao tác trí tuệ nhất định". [22]

Tư duy nói chung, tư duy nói riêng trong dạy học môn Toán bao giờ cũng có đối tượng, đó là những đối tượng mang tính nhu cầu. Những nhu cầu có thể là cần phát hiện tri thức mới (khái niệm mới, quy luật mới, quan hệ mới, thông qua giải quyết mâu thuẫn, vượt qua một chướng ngại nhận thức, khắc phục những sai lầm,...). Từ đó, việc xây dựng các tình huống kích thích tư duy cần chứa đựng các mâu thuẫn, những chướng ngại và hướng HS tư duy làm bộc lộ chúng để tìm cách tư duy phát hiện kiến thức mới, nhận thức cái mới. Khi gặp khó khăn, chướng ngại, mâu thuẫn, HS cần phải biến đổi đối tượng, biến đổi hình thức che đậy nội dung của các đối tượng quan hệ. Vấn đề này liên quan đến cú pháp và ngữ nghĩa. Tư duy biến đổi hình thức của đối tượng, làm cho tri thức mới gần gũi "tương hợp" với tri thức đã có.

Ví dụ 1.1: Bài toán "Cho các số a, b, c thỏa mãn $a^{2011}(a + b + c) < 0$. Chứng minh $b^2 - 4ac > 0$ ". Trong tư duy, HS liên tưởng đến sử dụng kiến thức về tam thức bậc hai nhưng lại gặp chướng ngại: chưa có tam thức bậc hai trong bài toán. Từ đó kích thích HS tư duy biến đổi:

$$a^{2011}(a + b + c) < 0 \Leftrightarrow a(a + b + c) < 0, \text{ do } a^{2010} > 0.$$

Từ đó HS biết đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$, khi đó $af(1) = a(a + b + c) < 0$, suy ra $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt, suy ra $b^2 - 4ac > 0$.

Theo lí thuyết hoạt động, hoạt động tư duy nhằm chuyển hoá các điều kiện bên ngoài vào bên trong "nội tâm", thông qua hoạt động giao lưu tương tác giữa con người và con người. Đây là cơ sở khoa học cho biện pháp tổ chức hợp tác trong quá trình tư duy.

Theo quan điểm duy vật biện chứng, tư duy phải tuân thủ quy luật về mối liên hệ giữa cái chung và cái riêng, quy luật nhân quả,... Vì vậy, để tìm tri thức mới, cần kích thích tư duy HS biết khảo sát các trường hợp riêng để đi đến cái tổng quát; cần kích thích tư duy biết chuyển hoá liên tưởng từ đối tượng này sang đối tượng khác. Nếu HS biết kiến thức này liên quan đến kiến thức cội nguồn khác thì họ định hướng tốt cách huy động kiến thức để giải quyết vấn đề.

Trong toán học, nhận thức chủ yếu sử dụng mô hình hoá (kết quả của việc trừu tượng hoá nhờ sử dụng ngôn ngữ, kí hiệu toán học) để mô tả các lớp hiện tượng. Vì vậy, những vấn đề về phương pháp luận nhận thức liên quan định hướng hoạt động cho hoạt động kích thích tư duy.

Qua phân tích những quan niệm về tư duy nói trên, chúng ta có thể hiểu tư duy là "sản phẩm cao cấp của một vật chất hữu cơ đặc biệt, tức là bộ não, qua quá trình hoạt động của sự phản ánh hiện thực khách quan bằng biểu tượng, khái niệm, phán đoán,...". Tư duy bao giờ cũng liên hệ với một hình thức nhất định của sự vận động của vật chất với sự hoạt động của bộ não; là quá trình nhận thức, phản ánh những thuộc tính bản chất, những mối quan hệ có tính quy luật của sự vật và hiện tượng bằng những hình thức như cảm giác, tri giác, biểu tượng, khái niệm, phán đoán, suy luận.

1.1.2. Quan hệ giữa nhận thức cảm tính và tư duy

Ở mức độ nhận thức cảm tính, con người chỉ phản ánh các thuộc tính trực quan, cụ thể, bề ngoài, các mối quan hệ về mặt không gian, thời gian và trạng thái vận động của sự vật, hiện tượng, phản ánh trực tiếp bằng giác quan. Nảy sinh trên cơ sở cảm tính và vượt xa giới hạn nhận thức cảm tính, tư duy (nhận thức lí tính) phản ánh những thuộc tính bên trong, những điều mà con người chưa biết, cần phải tìm tòi và giải quyết.

Tư duy có quan hệ mật thiết với nhận thức cảm tính. Tư duy thường bắt đầu từ nhận thức cảm tính, trên cơ sở nhận thức cảm tính mà nảy sinh tình huống có vấn đề. Trong quá trình diễn biến của mình, tư duy nhất thiết phải sử dụng nguồn tài liệu phong phú do nhận thức cảm tính đem lại. Dù cho tư duy có khái quát và trừu tượng đến đâu thì trong nội dung của tư duy cũng vẫn chứa đựng những thành phẩm cảm tính. "Nội dung cảm tính bao giờ cũng có trong tư duy trừu tượng, tự hồ như làm thành chỗ dựa cho tư duy"⁽¹⁾. Ngược lại, tư duy và những kết quả của nó chỉ phối khả năng phản ánh của cảm giác, tri giác, làm cho khả năng cảm giác của con người tinh vi, nhạy bén hơn, làm cho tri giác của con người mang tính lựa chọn, tính ý nghĩa. Ph. Ăng-ghen nói: "Nhập vào mắt chúng ta chẳng những có cảm giác mà còn có hoạt động tư duy của ta nữa".

Tư duy chỉ nảy sinh khi có vấn đề, có nhiệm vụ nhận thức, nó là sự vận động từ chỗ chưa biết, biết không đầy đủ, đến chỗ biết và biết đầy đủ. Trong quá trình dạy học, GV đặt HS trước một nhiệm vụ nhận thức (câu hỏi, bài tập,...). HS phải đi tìm cách giải quyết nhiệm vụ ấy, đi tìm cái giống nhau và khác nhau, khái quát sự kiện và tự mình rút ra các kết luận. Đôi khi, trong quá trình giải quyết nhiệm vụ nhận thức do GV đặt ra, HS phải tự đặt nhiệm vụ

⁽¹⁾ X.L. Ru-bin-stê-in, *Tồn tại và ý thức*, Mátxcova, 1957.

nhận thức mới. Dạy học môn Toán rất coi trọng vai trò của bài toán, coi đó như một lực thúc đẩy HS thực hiện hoạt động tư duy. Những bài toán này có thể là bài toán chuẩn (có quy trình, thuật toán, tương tự bài toán đã biết,...), khi đó, HS chỉ cần có kinh nghiệm để có thể áp dụng một số quy tắc theo một thuật toán nhất định; bài toán không chuẩn lại đòi hỏi HS thực hiện nhiều hoạt động trí tuệ phức tạp, suy nghĩ không rập khuôn. Trong quá trình giải một bài toán nào đó cụ thể, không cần huy động đến mọi kiến thức mà HS thu thập được, không cần xét đến mọi liên hệ kiến thức có thể có, nhưng lại cần HS thực hiện các hoạt động trí tuệ để trả lời câu hỏi: cần huy động những kiến thức nào?, cần xem xét những mối liên hệ nào?,... Sự phát triển các năng lực tư duy đòi hỏi sự phát triển cả mặt nội dung (các kiến thức) lẫn mặt hành động của tư duy (các hoạt động trí tuệ). Điều đó cho thấy, nhiều HS chỉ chăm chú giải bài tập mà chưa nắm vững kiến thức hay những HS chỉ học thuộc lòng mà không chịu "động não" thì đều khó có được tư duy toán học hay học giỏi toán được.

Tư duy có quan hệ với nhân cách. Những đặc điểm nhân cách bộc lộ rất rõ nét trong toàn bộ hoạt động nhận thức nói chung, hoạt động tư duy nói riêng của con người; và mỗi thành phần của nhân cách có ảnh hưởng khác nhau đến hoạt động tư duy. *Thứ nhất*, những đặc trưng khuynh hướng của nhân cách bao hàm một hệ thống các nhu cầu và hứng thú có tác động lẫn nhau, trong đó hứng thú, chú ý đóng vai trò chủ đạo, dẫn tới trạng thái tương ứng của ý chí và cảm xúc, trạng thái này làm cho hoạt động trí tuệ trở nên tích cực. Trong dạy học môn Toán, cần quan tâm đến mối quan hệ này, nhất là việc gợi động cơ học tập, gợi động cơ tư duy. Nó giúp HS chú ý, tích cực hoạt động trí tuệ, từ đó tích cực tư duy. *Thứ hai*, nhân cách xác định và bao hàm một hệ thống những năng lực (thu nhận, chế biến, ghi nhớ các thông tin,...) bảo đảm một hoạt động thắng lợi, trong đó có hoạt động tư duy. *Thứ ba*, nhân cách bao gồm tính tình của con người; thành phần này ảnh hưởng đến quá trình tư duy dưới hình thức phản ứng trước công việc, nó dẫn tới sự thoả mãn, tự tin hay kém tự tin, không kiên định, nó sẽ gây ra trở ngại hoặc thuận lợi cho hoạt động trí tuệ tiếp tục được nảy sinh. *Thứ tư*, nhân cách được xây dựng trên các thành phần khác là hệ thống điều khiển. Trong hoạt động tư duy, hệ thống điều khiển thực hiện sự tự điều chỉnh: tăng cường hoặc giảm bớt hoạt động; tự kiểm tra và tự sửa chữa những sai sót trong hoạt động; lập kế hoạch cho hoạt động. Do đó, việc dạy học phát triển tư duy và việc giáo dục nhân cách có quan hệ hữu cơ, và điều cần được quan tâm trong quá trình dạy học.

1.1.3. Tính chất, phương tiện, sản phẩm của tư duy

Từ phân tích các thuộc tính của tư duy, ta thấy tư duy là quá trình tâm lí phản ánh hiện thực khách quan một cách gián tiếp, là sự phản ánh những thuộc tính chung và bản chất, tìm ra những mối liên hệ, quan hệ có tính quy luật của sự vật, hiện tượng mà ta chưa từng biết. Như vậy, tư duy mang tính chất khái quát (phản ánh những thuộc tính chung, những mối quan hệ có tính quy luật của hàng loạt sự vật, hiện tượng), tính gián tiếp (phản ánh bằng ngôn ngữ) và tính trừu tượng (thoát li nội dung có tính chất đặc thù của sự vật và hiện tượng).

Ngôn ngữ được xem là phương tiện của tư duy, nó cũng được coi là cái vỏ của tư duy. Các sản phẩm của tư duy như khái niệm, phán đoán, suy luận tương ứng được biểu đạt bằng những từ, ngữ, câu,... Ngày nay, người ta biết đến nhiều loại hình ngôn ngữ khác ngôn ngữ gắn liền với chữ viết như: ngôn ngữ kí hiệu, ngôn ngữ hình thể, sơ đồ – biểu đồ,... Những loại hình ngôn ngữ này góp phần làm phong phú hơn phương tiện biểu đạt của tư duy. Tư duy và ngôn ngữ liên hệ mật thiết với nhau, quyết định lẫn nhau: Tư duy chỉ tồn tại nhờ cái vỏ ngôn ngữ; Tư tưởng của con người tồn tại vì có từ, có tiếng nói. Theo lời C. Mác thì ngôn ngữ là hiện thực trực tiếp của ý thức, là vật chất tự nhiên của tư duy. Tư duy thuộc phạm trù nội dung, ngôn ngữ thuộc phạm trù hình thức.

Ngôn ngữ toán học khác với ngôn ngữ tự nhiên ở chỗ:

– Ngôn ngữ toán học chủ yếu là kí hiệu, chữ số, dấu thể hiện phép tính hay quan hệ, gọn gàng hơn ngôn ngữ tự nhiên (Do một dấu, một chữ số, chữ cái, dấu phép tính,... có thể biểu thị điều mà ngôn ngữ tự nhiên phải dùng đến một mẫu câu hay một cụm từ mới biểu thị được).

– Mỗi kí hiệu toán học hay mỗi kết hợp kí hiệu đều có một ý nghĩa duy nhất, làm cho ngôn ngữ toán học có khả năng diễn đạt chính xác hơn ngôn ngữ tự nhiên.

– Ngôn ngữ toán học có dùng đến ngôn ngữ “biến”, “công thức” làm cho nó rất thích hợp để khái quát, diễn đạt các quy luật chung.

Sản phẩm của tư duy là những khái niệm, phán đoán, suy luận được biểu đạt bằng từ, ngữ, câu, kí hiệu, công thức,... Tư duy con người sử dụng khái niệm để ghi lại những kết quả trừu tượng hoá. Nhờ trừu tượng hoá mà tư duy đã chỉ ra được những mối liên hệ, quan hệ của rất nhiều sự vật, hiện tượng, nêu ra được những khái niệm, những phạm trù, những quy luật phản ánh các mối liên hệ, quan hệ của rất nhiều sự vật, hiện tượng, nêu ra được những khái niệm, những phạm trù, những quy luật phản ánh các mối liên hệ, quan hệ nội tại của các sự vật, hiện tượng đó. Trên cơ sở những nhận thức ban đầu, bộ óc xuất hiện những phán đoán, suy luận.

Nguồn gốc và tiêu chuẩn chân lí của tư duy chính là thực tiễn. Cả nhận thức cảm tính và nhận thức lí tính đều nảy sinh từ thực tiễn và lấy thực tiễn làm tiêu chuẩn kiểm tra tính đúng đắn của nhận thức. Theo V.I. Lê-nin, con đường của nhận thức là: “từ trực quan sinh động đến tư duy trừu tượng, từ tư duy trừu tượng đến thực tiễn – đó là con đường biện chứng của sự nhận thức chân lí, của sự nhận thức hiện thực khách quan”.

1.2. QUÁ TRÌNH TƯ DUY VÀ CÁC HOẠT ĐỘNG TRÍ TUỆ PHỔ BIẾN

1.2.1. Quá trình tư duy

Tư duy là hoạt động trí tuệ, với một quá trình bao gồm bốn bước cơ bản sau:

(1) Xác định được vấn đề, biểu đạt nó thành nhiệm vụ tư duy, hay nói cách khác là tìm được câu hỏi cần giải đáp.

(2) Huy động tri thức, vốn kinh nghiệm, liên tưởng, hình thành giả thuyết về cách giải quyết vấn đề, cách trả lời câu hỏi.

(3) Xác minh giả thuyết trong thực tiễn. Nếu giả thuyết đúng thì qua bước (4), nếu giả thuyết sai thì phủ định nó và hình thành giả thuyết mới.

(4) Quyết định đánh giá kết quả, đưa ra sử dụng.

K.K. Platônnôp đã cụ thể hoá quá trình tư duy qua sơ đồ sau:



Hình 1.1. Quá trình tư duy

Quá trình tư duy được diễn ra bằng cách chủ thể tiến hành các thao tác trí tuệ (thao tác là hoạt động theo trình tự và yêu cầu kĩ thuật nhất định). Các thao tác trí tuệ cơ bản là: phân tích – tổng hợp; so sánh – tương tự; khái quát hoá – đặc biệt hoá; trừu tượng hoá – cụ thể hoá.

1.2.2. Phân tích và tổng hợp

Theo Hoàng Chung⁽¹⁾: “Phân tích là dùng trí óc chia cái toàn thể ra thành từng phần, hoặc tách ra từng thuộc tính hay khía cạnh riêng biệt nằm trong cái toàn thể đó,... Tổng hợp là dùng trí óc hợp lại các phần của cái toàn thể, hoặc kết hợp lại những thuộc tính hay khía cạnh khác nhau nằm trong cái toàn thể đó”.

Theo Từ điển Tiếng Việt⁽²⁾ thì: “Phân tích là phân chia thật sự hay tưởng tượng một đối tượng nhận thức ra thành các yếu tố, trái với tổng hợp; Tổng hợp là tổ hợp bằng tưởng tượng hay thật sự các yếu tố riêng rẽ nào đó làm thành một chỉnh thể, trái với phân tích”.

Triết học thì có quan điểm: Phân tích là phương pháp phân chia cái toàn thể ra thành từng bộ phận, từng mặt, từng yếu tố để nghiên cứu và hiểu được các bộ phận, mặt, yếu tố đó; Tổng hợp là phương pháp dựa vào sự phân tích và liên kết, thống nhất các bộ phận, mặt, yếu tố, để nhận thức được cái toàn diện.

Theo Nguyễn Bá Kim⁽³⁾: “Phân tích là tách (trong tư tưởng) một hệ thống thành những vật, tách một vật thành những bộ phận riêng lẻ; Tổng hợp là liên kết (trong tư tưởng) những bộ phận thành một vật, liên kết nhiều vật thành một hệ thống”.

Như vậy có thể hiểu *phân tích* là dùng trí óc chia cái toàn thể ra thành từng phần, là chia nhỏ, là tách một vật thành những bộ phận riêng lẻ hoặc tách từng thuộc tính, từng yếu tố hay khía cạnh riêng biệt nằm trong cái toàn thể để tìm mối liên hệ giữa các phần, các bộ phận, các yếu tố đó và hiểu được chúng; *tổng hợp* là dùng trí óc hợp lại các phần của cái toàn thể, là kết hợp lại, liên kết những bộ phận riêng lẻ hoặc kết hợp thống nhất các thuộc tính các yếu tố hay các khía cạnh khác nhau nằm trong cái toàn thể để nhận thức được cái toàn thể.

Phân tích và tổng hợp có mối quan hệ hữu cơ, hai mặt đối lập của một quá trình thống nhất. Trong phân tích đã có tổng hợp, phân tích một cái toàn thể

⁽¹⁾ Giáo trình Phương pháp dạy học môn Toán ở trường Trung học cơ sở, NXB Giáo dục, 1997.

⁽²⁾ Hoàng Phê, Từ điển Tiếng Việt, NXB Đà Nẵng, 2006.

⁽³⁾ Phương pháp dạy học môn Toán, NXB Đại học Sư phạm, 2006.

đồng thời là tổng hợp các phần của nó, vì phân tích một cái toàn thể ra thành từng phần cũng chỉ nhằm mục đích làm bộc lộ ra mối liên hệ giữa các phần của cái toàn thể; phân tích một cái toàn thể là con đường để nhận thức cái toàn thể sâu sắc hơn. Cái toàn thể ban đầu, định hướng cho phân tích, chỉ ra cần phân tích mặt nào, khía cạnh nào; kết quả của phân tích là cái toàn thể ban đầu được nhận thức sâu sắc hơn; không phân tích để hiểu được các bộ phận thì không thể hiểu được cái toàn bộ. Ngược lại, không tổng hợp để nghiên cứu cái toàn bộ thì không thể hiểu được các bộ phận trong cái toàn thể như thế nào.

Trong hoạt động giải toán, phân tích là nêu rõ giả thiết và kết luận để tìm mối liên hệ giữa chúng; có thể phân chia bài toán thành từng trường hợp riêng lẻ, tách ra thành từng yếu tố của bài toán, giải quyết từng trường hợp riêng lẻ được dễ dàng hơn và tìm mối liên hệ giữa các yếu tố đó. Rồi nghiên cứu tìm hiểu các trường hợp, các yếu tố của bài toán được sâu sắc; có thể phân tích chia bài toán thành nhiều bài toán bộ phận mà cách giải quyết chúng đơn giản hơn, rồi đưa bài toán về dạng quen thuộc đã biết cách giải.

Nói cách khác, phân tích (phép phân tích) là phương pháp suy luận đi từ cái chưa biết đến cái đã biết.

Phân tích đi lên (suy ngược lùi): muốn chứng minh A thì cần chứng minh B_1 , muốn chứng minh B_1 thì cần chứng minh B_2, \dots , cuối cùng muốn chứng minh B_{n-1} thì cần chứng minh B_n . Khi B_n là điều đã biết (tiên đề, định lí, định nghĩa,...) thì dừng lại. Theo tam đoạn luận có điều kiện vì B_n đúng nên A đúng (thực tế là cả một dãy đoạn luận có điều kiện). Ta có sơ đồ sau: $A \leftarrow B_1 \leftarrow B_2 \leftarrow B_3 \leftarrow B_4 \leftarrow B_5 \leftarrow \dots B_n = B$, B là một mệnh đề đúng.

Ví dụ 1.2: Chứng minh “ $16S^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$ ”, trong đó S, a, b, c tương ứng là diện tích và ba cạnh của một tam giác”.

$$B = "16S^2 \leq a^4 + b^4 + c^4"$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (p \text{ là nửa chu vi của tam giác}).$$

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}$$

$$B_1 = "(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq a^4 + b^4 + c^4"$$

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2; b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2; c^4 + a^4 \geq 2c^2a^2$$

$$\text{nên } a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$B_2 = "a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)"$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$$

$$B_3 = "abc(a+b+c) \geq (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)"$$

$$B_4 = "abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)"$$

Đặt $x = b+c-a > 0$, $y = c+a-b > 0$, $z = a+b-c > 0$

$$a = \frac{y+z}{2}, b = \frac{z+x}{2}, c = \frac{x+y}{2}$$

$$B_5 = "\frac{y+z}{2} \cdot \frac{z+x}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \geq xyz"$$

$$B_6 = "(y+z)(z+x)(x+y) \geq 8xyz".$$

Phép suy ngược tiến hay còn gọi là phép phân tích đi xuống, giả sử đã có A, từ A ta suy ra B_1 , từ B_1 ta suy ra B_2, \dots, B_n . Khi B_n là phán đoán sai thì dừng lại vì khi đó chắc chắn A sai theo bảng chân lí của phán đoán có điều kiện. Còn nếu B_n đúng thì chưa có thể kết luận gì được vì A có thể sai hoặc đúng. Chỉ khi nào bao đảm rằng chuỗi suy luận $B \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \dots \rightarrow B_n = A$ đúng thì mới khẳng định A là mệnh đề đúng.

Ta xem xét qua ví dụ sau:

Ví dụ 1.3: Chứng minh rằng " $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ "

$$B = "a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca"$$

$$B_1 = "2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca"$$

$$B_2 = "2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0"$$

$$B_3 = "(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0"$$

$$B_4 = "(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0".$$

Trong phạm vi toán học, tổng hợp (phép tổng hợp) là phương pháp suy luận đi từ cái đã biết đến cái chưa biết. Nếu gọi B là phán đoán cần chứng minh và các A_i hoặc là tiên đề, định lí, hoặc là giả thiết đã biết thì sơ đồ của phép tổng hợp như sau:

$$A = A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n = B$$

A là một định nghĩa, tiên đề hay một mệnh đề đúng nào đó.

B là mệnh đề cần chứng minh.

Thông thường phép này được dùng để trình bày lời giải sau một quá trình phân tích, cũng được gọi là phép suy xuôi.

Tổng hợp các trường hợp riêng lẻ, liên kết các yếu tố, mối quan hệ giữa chúng để rút ra kết luận hoặc tổng hợp các bước giải của các bài toán bộ phận vừa phân tích liên kết thành lời giải của bài toán. Hoạt động tổng hợp định hướng cho việc phân tích bài toán theo hướng nào; hoạt động phân tích để tìm đường lối giải bài toán; từ kết quả của hoạt động phân tích, thực hiện hoạt động tổng hợp để trình bày lời giải của bài toán. Trong quá trình giải toán, HS có thể thực hiện liên tiếp các hoạt động phân tích, tổng hợp để tìm lời giải và khai thác phát triển bài toán. Qua đó HS vừa được rèn luyện năng lực phân tích và tổng hợp, vừa được rèn luyện năng lực toán học.

1.2.3. So sánh và tương tự

So sánh⁽¹⁾ là “xem xét cái này với cái kia để thấy sự giống nhau, khác nhau hoặc sự hơn kém nhau”.

So sánh có hai mục đích: phát hiện những đặc điểm chung và những đặc điểm riêng khác nhau ở một số đối tượng, sự kiện. Mục đích thứ nhất thường dẫn đến tương tự và đi đôi với khái quát hoá.

Tương tự là thao tác tư duy dựa trên sự giống nhau về tính chất và quan hệ của những đối tượng toán học khác nhau.

Có thể mô tả kết luận dựa theo sự tương tự của hai đối tượng A, B như sau:

Đối tượng A có các tính chất a, b, c.

Đối tượng B có các tính chất a, b. Vậy B có thể có tính chất c.

Thường xét sự tương tự trong toán học trên các khía cạnh sau:

– Hai vấn đề (bài toán) là tương tự nếu đường lối, phương pháp giải quyết là giống nhau.

– Hai hình là tương tự nếu có nhiều tính chất giống nhau hay nếu vai trò của chúng giống nhau trong vấn đề nào đó, hay nếu giữa các phần tử tương ứng của chúng có quan hệ giống nhau.

– Nhiều khi trong quá trình mở rộng, những tập hợp đối tượng có những thuộc tính tương tự, từ đó ta suy đoán những tính chất từ tập hợp này sang tập hợp khác.

...

⁽¹⁾ Nguyễn Như Ý, 2000, Từ điển Tiếng Việt.

Ví dụ 1.4: Tam giác trong không gian hai chiều được xem tương tự như tứ diện trong không gian ba chiều vì tam giác là hình có diện tích hữu hạn được giới hạn bởi một số tối thiểu nhất những yếu tố cơ bản của mặt phẳng, còn tứ diện là hình có thể tích hữu hạn được giới hạn bởi một số tối thiểu nhất những yếu tố cơ bản nhất của không gian. Từ đó có thể suy ra những “kết quả”, “khái niệm” tương tự giữa tam giác và tứ giác như:

Tam giác	Tứ giác
Cạnh	Mặt
Diện tích tam giác (S), a, h là độ dài cạnh và đường cao tương ứng là: $S = \frac{1}{2}a.h$	Thể tích tứ diện (V), B, h là diện tích mặt đáy và đường cao tương ứng là: $V = \frac{1}{3}B.h$
Trọng tâm (giao của các đường nối đỉnh với trọng tâm của cạnh đối diện)	Trọng tâm (giao của các đường nối đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện)
...	...

Ví dụ 1.5: Các tính chất của tam giác vuông ABC, vuông tại A, đường cao AH có độ dài h , độ dài các cạnh $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$ trong hình học phẳng mở rộng sang các tính chất của tứ diện vuông SABC, góc tam diện vuông tại S, đường cao SH vuông góc với mặt phẳng (ABC), độ dài $SA = a$; $SB = b$; $SC = c$ trong hình học không gian được mô tả trong bảng sau:

Tam giác ABC vuông tại A	Tứ diện S.ABC vuông tại S
$a^2 = b^2 + c^2$	$S_{ABC}^2 = S_{sAB}^2 + S_{sAC}^2 + S_{sBC}^2$

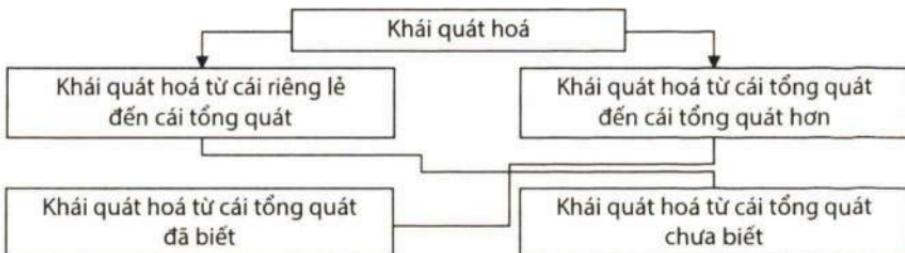
Tam giác ABC vuông tại A	Tứ diện S.ABC vuông tại S
$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$	$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$
$\cos^2 B + \cos^2 C = 1$	$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ (α, β, γ) lần lượt là góc hợp bởi các mặt (SAB), (SAC), (SBC) với mặt đáy (ABC)

Sự tương tự, do tính trực quan và dễ hiểu của nó, thường được áp dụng trong việc giảng dạy toán. Song, cũng giống như phương pháp quy nạp không hoàn chỉnh, tương tự có thể dẫn đến kết luận sai. Chẳng hạn, trong tam giác các đường cao đồng quy, nhưng trong tứ diện thì không có điều đó (chỉ đúng với trường hợp tứ diện trực tâm).

1.2.4. Khái quát hoá và đặc biệt hoá

Khái quát hoá là việc chuyển từ nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho đến việc nghiên cứu một tập hợp lớn hơn bao gồm tập hợp ban đầu bằng cách nêu bật một số đặc điểm chung của các phần tử của tập hợp xuất phát.

Theo Nguyễn Bá Kim, có thể mô phỏng các dạng khái quát hoá qua sơ đồ sau:



Hình 1.2. Sơ đồ mô phỏng các dạng khái quát hóa

Đặc biệt hoá là quá trình ngược lại của khái quát hoá, là việc chuyển từ nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho sang nghiên cứu một tập hợp nhỏ hơn chứa trong nó. Đặc biệt hoá cũng là thao tác tư duy chuyển từ khái niệm hay tính chất tổng quát về khái niệm hay tính chất xuất phát (mang tính cụ thể). Khái quát hoá và đặc biệt hoá thường được vận dụng trong tìm tòi và giải toán. Từ một tính chất nào đó, muốn khái quát hoá thành một dự đoán nào đó, trước hết ta thử đặc biệt hoá; nếu kết quả của đặc biệt hoá là đúng ta mới tìm cách chứng minh dự đoán từ khái quát hoá, nếu sai ta dừng lại.

Ví dụ 1.6: Từ định lí Pi-ta-go, ta có tính chất sau: "Nếu dựng những hình vuông trên các cạnh của tam giác vuông thì diện tích hình vuông dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích hai hình vuông dựng trên hai cạnh còn lại".

Thứ khái quát hoá: Nếu ta dựng những đa giác đồng dạng trên các cạnh của tam giác vuông thì diện tích đa giác dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích của hai đa giác còn lại (Chuyển từ các hình vuông, xem như những tứ giác đồng dạng, sang những đa giác đồng dạng).

Trước khi chứng minh dự đoán trên, ta thử vào trường hợp đặc biệt khi đa giác đồng dạng là các tam giác đồng dạng như: tam giác đều, tam giác vuông thấy đúng thì mới tiến hành chứng minh dự đoán. Chứng minh như sau (trong đó $s(m)$ là diện tích đa giác dựng trên cạnh có độ dài m):

$$\frac{s^2(b)}{s^2(a)} = \frac{b^2}{a^2}; \quad \frac{s^2(c)}{s^2(a)} = \frac{c^2}{a^2} \rightarrow \frac{s^2(b) + s^2(c)}{s^2(a)} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1, \Rightarrow s^2(a) = s^2(b) + s^2(c)$$

Ví dụ 1.7: Xây dựng khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên âm:

$$\text{Ta có: } 3^{-4} 3^4 = 3^{-4+4} = 3^0 = 1 \text{ suy ra } 3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$

Khái quát hoá: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ trong đó a là một số thực khác không, còn m là số tự nhiên. Suy ra khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên âm.

Ví dụ 1.8: Từ bài toán quen thuộc: "Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng minh với điểm O bất kì, ta có: $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.", ta khai quát hóa bài toán trên theo hai hướng như sau:

Hướng 1: Dựa vào sự phân tích cấu trúc lời giải của bài toán trên, ta phát biểu bài toán khái quát hoá.

Cho n điểm A_1, A_2, \dots, A_n và điểm I thoả mãn hệ thức

$$\overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{IA_2} + \dots + \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$$

Chứng minh: Với điểm O tuỳ ý, ta có: $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n})$.

Hướng 2: Dựa vào sự phân tích giả thiết: I là trung điểm AB , tức là:

$$IA : IB = 1 : 1 \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{1+1}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{1+1}\overrightarrow{OB}$$

Ví dụ 1.9: Từ hướng dẫn HS lớp 10 sử dụng bất đẳng thức về trung bình cộng và trung bình nhân để chứng minh bất đẳng thức: "Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$, hãy chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c$ ". Ta có thể hướng dẫn để HS tìm đến các bài toán khác như:

"Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $T = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c}$, biết $a, b, c > 0$ và $abc = 1$ ".

"Chứng minh rằng nếu $x + y + z = 0$ thì $8^x + 8^y + 8^z \geq 2^x + 2^y + 2^z$ ".

1.2.5. Trừu tượng hoá

Trùu tượng hoá là "Tách riêng trong tư duy một đặc tính, một quan hệ nào đó khỏi những đặc tính, quan hệ khác của sự vật để nhận thức một cách sâu sắc hơn". Về mặt toán học, trừu tượng hoá là thao tác tách ra từ một đối tượng toán học một tính chất (về quan hệ số lượng hoặc hình dạng hoặc logic của thế giới khách quan) để nghiên cứu riêng tính chất đó. Trùu tượng hoá thoát ra khỏi nội dung có tính chất chất liệu. Trùu tượng hoá gắn liền với cụ thể hoá. Nó cũng có liên hệ mật thiết với khái quát hoá. Nhờ trừu tượng hoá, ta có thể khái quát hoá rộng và sâu hơn. Trùu tượng hoá và khái quát hoá là nguồn gốc của sự hình thành các khái niệm toán học.

Ví dụ 1.10: Khi xây dựng khái niệm hình chóp đều, ta có thể phân tích trên ví dụ cụ thể là hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều. Ta tách riêng tính chất các cạnh bên của chúng đều bằng nhau, đường vuông góc từ đỉnh xuống mặt đáy trùng với tâm của đáy. Từ đó có thể khái quát hoá khái niệm hình chóp đều.

1.3. CÁC LOẠI HÌNH TƯ DUY

Các nhà nghiên cứu đã đặt cho tư duy rất nhiều loại hình tư duy như tư duy logic, tư duy trừu tượng, tư duy sáng tạo, tư duy kinh nghiệm, tư duy lí luận, tư duy khoa học, tư duy triết học.... Về bản chất sinh học, tư duy chỉ có một, đó là sự việc hình thành mới hoặc tái tạo lại các liên kết giữa các phần tử ghi nhớ. Sự phân chia ra các loại hình tư duy nhằm mục đích hiểu sâu và vận dụng tốt tư duy trong hoạt động của hệ thần kinh. Có thể phân loại tư duy theo các loại dưới đây:

Phân loại theo cách thể hiện

Phân loại theo cách thể hiện được chia ra thành tư duy bằng hình tượng và tư duy bằng ngôn ngữ. *Tư duy bằng hình tượng* gồm có tư duy hình ảnh, âm thanh.

Tư duy hình tượng còn được gọi bằng cái tên khác là tưởng tượng. Trong tư duy hình tượng, các phần tử xuất hiện trong quá trình tư duy là các hình ảnh, còn tư duy ngôn ngữ là các lời văn. Các họa sĩ tưởng tượng về bối cảnh, các hình ảnh, màu sắc cho một bức tranh sẽ vẽ; nhà văn tưởng tượng về các khung cảnh mà nhân vật hoạt động, suy nghĩ (hay tưởng tượng) về lời thoại của nhân vật; nhà hiền triết suy nghĩ về những điều mình sẽ nói. Tư duy hình tượng có tính phổ biến cao hơn tư duy ngôn ngữ. *Tư duy ngôn ngữ* chỉ có ở loài người, bởi chỉ có loài người mới có tiếng nói (và chữ viết).

Phân loại theo cách vận hành

- *Tư duy kinh nghiệm*. Kinh nghiệm bao hàm toàn bộ mọi sự hiểu biết, mọi cách ứng xử mà một cá nhân tiếp thu được trong cuộc đời. Kinh nghiệm có thể do cá nhân tự rút ra được trong quá trình hoạt động của mình hoặc do tiếp thu từ người khác. Mọi tri thức của nhân loại cũng là kinh nghiệm bởi chúng được rút ra từ quá trình phát triển của loài người với mức độ cô đọng, sâu sắc. Tư duy kinh nghiệm là sự vận dụng kinh nghiệm vào một quá trình nhận thức mới hay thực hiện một công việc mới, thực hiện một công việc cũ trong điều kiện hoặc hoàn cảnh mới. Tư duy kinh nghiệm xem xét, đánh giá các sự vật, sự việc mới theo những cách thức có sẵn, cố gắng đưa sự nhận thức những sự vật, sự việc đó về những cái đã biết và do đó thường gặp khó khăn khi tiếp xúc với những sự vật, sự việc, vấn đề có nhiều sự khác lạ. Tư duy kinh nghiệm dễ tạo nên các đường mòn tư duy và tạo thành các thói quen trong tư duy. Tư duy kinh nghiệm có thể làm thay đổi sự vật, sự việc, vấn đề về quy mô, hình dạng, địa điểm, thời gian nhưng không làm thay đổi tính chất của chúng; nói cách khác, nếu tư duy có thể làm thay đổi được cái gì đó thì sự thay đổi chỉ có về mặt lượng chứ không thay đổi về chất. Tư duy kinh nghiệm là sự giải quyết các vấn đề hiện tại theo những khuôn mẫu, cách thức đã biết với một vài biến đổi nào đó cho phù hợp với hoàn cảnh hiện tại. Tư duy kinh nghiệm vận hành trên cơ sở các liên kết thần kinh được tạo do tác động từ bên ngoài, do đó năng lực tư duy phụ thuộc vào lượng kinh nghiệm tích luỹ và phương pháp tác động tạo liên kết ghi nhớ. Khi lượng kinh nghiệm còn ít, các liên kết ghi nhớ chỉ được thực hiện trong từng vấn đề, sự vật, sự việc, đối tượng thì tư duy kinh nghiệm mang tính máy móc, giáo điều, lặp lại mọi cái đã được ghi nhớ. Thực tế trường hợp này có thể coi là chưa có tư duy mặc dù hệ thần kinh thực hiện hoạt động tái hiện lại những cái đã ghi nhớ. Sự tích luỹ nhiều kinh nghiệm giúp cho việc tìm ra cách giải quyết

các vấn đề hiện tại nhanh hơn và giải quyết được nhiều vấn đề hơn. Trong một số trường hợp, sự phản ứng nhanh của hệ thần kinh tích luỹ nhiều kinh nghiệm dễ bị nhầm với sự thông minh hay thông thái. Trường hợp này xảy ra khi tại địa điểm và thời gian đó không còn ai ngoài người giải quyết được vấn đề có đủ kinh nghiệm. Tư duy kinh nghiệm chỉ là sự chấp nhận và sử dụng các kinh nghiệm đã có.

- *Tư duy sáng tạo*. Tư duy sáng tạo cũng có yêu cầu về sự tích luỹ kinh nghiệm hay tích luỹ tri thức. Nhưng tư duy sáng tạo vận hành không hoàn toàn dựa trên các liên kết ghi nhớ được hình thành do các tác động từ bên ngoài mà có nhiều liên kết do hệ thần kinh tự tạo ra giữa các vấn đề, các sự vật, sự việc tác động riêng rẽ lên hệ thần kinh. Tư duy sáng tạo tìm ra cách giải quyết vấn đề không theo khuôn mẫu, cách thức định sẵn. Trong tư duy kinh nghiệm, để giải quyết được vấn đề đòi hỏi người giải quyết phải có đủ kinh nghiệm về vấn đề đó, còn trong tư duy sáng tạo chỉ yêu cầu người giải quyết có một số kinh nghiệm tối thiểu hoặc có kinh nghiệm giải quyết những vấn đề khác. Tư duy sáng tạo là sự vận dụng các kinh nghiệm giải quyết vấn đề này cho những vấn đề khác. Người chỉ có tư duy kinh nghiệm sẽ lúng túng khi gặp phải những vấn đề nằm ngoài kinh nghiệm, còn người có tư duy sáng tạo có thể giải quyết được những vấn đề ngoài kinh nghiệm mà họ có. Tư duy sáng tạo tạo nên các kinh nghiệm mới trên các kinh nghiệm cũ và do đó làm phong phú thêm kinh nghiệm, nó tạo nên sự thay đổi về chất cho các vấn đề, sự vật, sự việc mà nó giải quyết. Biểu hiện của tư duy sáng tạo là sự thông minh, dám thay đổi kinh nghiệm. Tư duy sáng tạo góp phần tạo nên kinh nghiệm.

- *Tư duy phân tích*. Phân tích là sự chia nhỏ sự vật, sự việc, vấn đề, sự kiện,..., gọi chung là các đối tượng, thành các thành phần để xem xét, đánh giá về các mặt cấu trúc, tổ chức, mối liên hệ giữa các thành phần, vai trò và ảnh hưởng của từng thành phần trong các đối tượng và trên cơ sở các phân tích, đánh giá đó xác định mối quan hệ và ảnh hưởng của đối tượng được phân tích tới các đối tượng khác. Tư duy phân tích là tư duy về một đối tượng, các thành phần tham gia vào đối tượng, các mối liên kết, quan hệ giữa các đối tượng, xác định các đặc điểm, tính chất, đặc trưng, vai trò của đối tượng trong mối quan hệ với các đối tượng khác (gọi chung là các yếu tố). Với việc xác định các yếu tố của một đối tượng, tư duy phân tích mang tính tư duy theo chiều sâu. Mức độ sâu sắc của tư duy được đánh giá qua số lượng các yếu tố mà tư duy phân tích tìm được.

- *Tư duy tổng hợp*. Ngược với sự chia nhỏ đối tượng, tư duy tổng hợp tập hợp các yếu tố cùng loại, các yếu tố có liên quan với nhau cho đối tượng. Sự phân tích cho thấy tất cả hay phần lớn các yếu tố của đối tượng, nhưng vai trò của từng yếu tố trong những hoàn cảnh, những thời điểm khác nhau có thể thay đổi, có yếu tố chủ yếu và không thể thiếu, có yếu tố hỗ trợ, có yếu tố cần cho hoàn cảnh này nhưng không cần cho hoàn cảnh khác. Tư duy tổng hợp giúp đánh giá được các tính chất đó của từng yếu tố thuộc đối tượng và xác định thành phần, đặc điểm, tính chất của đối tượng phù hợp với hoàn cảnh hiện tại. Tư duy tổng hợp được thực hiện khi xem xét một đối tượng xuất hiện nhiều lần tại những địa điểm và thời gian khác nhau, các đối tượng cùng dạng hoặc các đối tượng khác nhau. Vì vậy, tư duy tổng hợp cũng có thể được chia thành nhiều dạng và dẫn đến những kết quả khác nhau. Tư duy tổng hợp thực hiện trên một đối tượng xuất hiện nhiều lần tại nhiều địa điểm khác nhau nhằm đánh giá được các yếu tố xuất hiện thường xuyên nhất và có vai trò chính của đối tượng. Tư duy tổng hợp xem xét đánh giá sự giống và khác nhau giữa các đối tượng cùng dạng và qua đó xác định xem giữa chúng có mối liên hệ hay không và nếu có là những mối liên hệ như thế nào. Một đối tượng xuất hiện nhiều lần tại các địa điểm khác nhau nhiều khi cũng được xem xét như các đối tượng cùng dạng. Tư duy tổng hợp thực hiện trên các đối tượng khác nhau là: Tư duy tìm kiếm các mối quan hệ giữa các đối tượng đó hoặc tìm kiếm các yếu tố trong các đối tượng đó có thể hợp thành một đối tượng mới; tìm kiếm các mối quan hệ nhằm đánh giá sự ảnh hưởng, sự tương tác lẫn nhau giữa các đối tượng; tìm kiếm các yếu tố có thể và liên kết chúng lại với nhau trong những mối quan hệ nào đó tạo nên một nhận thức mới về thế giới hoặc một phương thức hành động mới; sự liên kết logic mang đến sự nhận thức đúng đắn về thế giới hoặc một phương thức hành động có kết quả đúng đắn; sự liên kết không logic sẽ đem đến sự vô nghĩa, sự nhận thức sai lầm hoặc phương thức hành động mang đến kết quả tiêu cực. Tư duy tổng hợp phát triển đến trình độ cao sẽ có khả năng tóm tắt, khái quát hoá.

- Tư duy kinh nghiệm và tư duy sáng tạo mang tính cá thể, chúng thể hiện cho năng lực cá nhân và mang tính bẩm sinh. Hai loại tư duy sau vừa chứa đựng yếu tố thuộc về cá nhân, vừa chứa đựng các yếu tố thuộc về môi trường sống (và chủ yếu là môi trường văn hóa giáo dục). Yếu tố thuộc về cá nhân mang tính sinh học giống như ba loại tư duy trên nhưng thể hiện chủ yếu trên phương diện liên kết các phần tử nhớ các yếu tố của các đối tượng với hệ thống giác quan. Khi các phần tử nhớ có liên hệ trực tiếp với các giác quan thì chúng dễ

được kích hoạt bởi kích thích đến từ các giác quan. Nếu chúng thuộc nhiều đối tượng khác nhau thì chúng sẽ được kích hoạt đồng thời. Sự hoạt động này dễ tạo ra các mối liên hệ giữa các đối tượng khác nhau và quá trình tư duy dựa trên các liên kết này sẽ trải qua nhiều đối tượng, xem xét trên nhiều đối tượng và tư duy tổng hợp hình thành. Nếu các yếu tố của đối tượng không có liên hệ trực tiếp với các giác quan và chúng chỉ được kích hoạt bởi các phần tử ghi nhớ mới khác thì khi có một yếu tố của đối tượng được kích hoạt, các yếu tố khác trong cùng đối tượng hoặc các yếu tố có quan hệ trong các đối tượng khác được kích hoạt. Đây là quá trình tư duy phân tích bởi nó được thực hiện chủ yếu trên một đối tượng. Ảnh hưởng của môi trường thể hiện qua phương thức tích luỹ kinh nghiệm, tích lũy tri thức trong hệ thần kinh; nếu phương thức tích luỹ tạo ra liên kết giữa các yếu tố của cùng đối tượng hoặc các yếu tố khác có liên quan thì dẫn đến khả năng tư duy phân tích, còn nếu phương thức tích luỹ tạo ra các liên kết giữa các đối tượng khác nhau thì dẫn đến khả năng tư duy tổng hợp.

Phân loại theo tính chất

– *Tư duy rộng hay hẹp*. Tư duy rộng hay hẹp (còn gọi là tư duy theo chiều rộng hay tư duy theo diện) được đánh giá qua số lượng các đối tượng, các vấn đề, các sự vật, sự việc khác nhau được đề cập trong một quá trình tư duy. Tính chất rộng hẹp của tư duy cho thấy mức độ xem xét đối tượng tư duy trong mối quan hệ với các đối tượng khác, trong các môi trường khác là nhiều hay ít. Đối tượng được xem xét kĩ càng hơn, đánh giá đúng đắn hơn về sự cân đối, hài hoà với các đối tượng khác, với môi trường khi tư duy tìm được càng nhiều các đối tượng có quan hệ tương hỗ với nó. Tư duy rộng cũng làm cho việc tiếp nhận những tri thức, kinh nghiệm mới, những sự thay đổi trong tư duy trở nên dễ dàng, tính sáng tạo dễ được thực hiện. Điều kiện để có tư duy rộng là hệ thần kinh phải được tiếp nhận tri thức về rất nhiều đối tượng khác nhau và phải tạo được những mối liên hệ giữa các đối tượng đó. Một đối tượng có thể phát huy hay hạn chế một số đặc điểm, tính chất, vai trò nào đó trong một số mối quan hệ với các đối tượng khác. Vì vậy, khi cần phát huy hay hạn chế một số yếu tố nào đó của đối tượng, có thể đặt đối tượng vào những mối quan hệ tương ứng. Nếu tư duy chỉ xác định được một số mối quan hệ nào đó (tư duy hẹp) thì đối tượng chỉ có thể phát huy hoặc bị hạn chế một số yếu tố tương ứng.

– *Tư duy sâu hay nông*. Loại tư duy này được đánh giá qua số lượng các yếu tố của một hay một nhóm đối tượng có liên quan trực tiếp được đề cập đến

trong quá trình tư duy. Tư duy càng sâu khi các yếu tố của đối tượng được đề cập đến càng nhiều và khi đó đối tượng sẽ trở nên rõ ràng hơn, đầy đủ hơn trong nhận thức và ý thức, đối tượng được hiểu rõ hơn và đúng hơn. Tính chất tư duy sâu hay nông được thực hiện trên một hoặc một nhóm đối tượng, vì vậy tính chất này cũng được gọi là tư duy theo chiều sâu và có các khái niệm tư duy nông cạn hay sâu sắc và vai trò của tư duy cũng được thể hiện trong từng trường hợp cụ thể. Tư duy theo chiều sâu chịu ảnh hưởng của phương pháp thiết lập các mối liên kết thần kinh. Nếu liên kết thực hiện chủ yếu giữa các yếu tố của đối tượng thì tư duy càng sâu khi có nhiều yếu tố được liên kết với nhau. Kích thích thần kinh được di chuyển từ các phần tử ghi nhớ này đến phần tử ghi nhớ khác trong não mà không cần có nhiều kích thích đến từ hệ thống cảm giác. Tư duy theo chiều sâu tạo nên sự tập trung trong tư duy.

- *Tư duy logic*. Tư duy logic là tư duy về mối quan hệ nhân quả mang tính tất yếu, tính quy luật. Vì vậy các yếu tố, đối tượng (gọi chung là các yếu tố) trong tư duy logic bắt buộc phải có quan hệ với nhau, trong đó có yếu tố là nguyên nhân, là tiền đề, yếu tố còn lại là kết quả, là kết luận.

- *Tư duy phi logic*. Tư duy phi logic là tư duy không dựa trên các mối quan hệ giữa các yếu tố của đối tượng hoặc giữa các đối tượng. Các yếu tố không thuộc đối tượng nhưng được gán cho đối tượng, các đối tượng không có quan hệ với nhau bị buộc cho những quan hệ nào đó và ngược lại, những yếu tố thuộc đối tượng lại bị tách khỏi đối tượng, một số mối quan hệ tất yếu giữa các đối tượng bị cắt bỏ. Tư duy phi logic có nguồn gốc từ sự logic của tư duy. Logic của tư duy là sự kết nối có những biểu hiện của logic. Logic của tư duy xuất hiện khi sự trùng lặp xuất hiện nhiều lần. Nếu sự trùng lặp mang tính quy luật thì tư duy theo sự trùng lặp này là tư duy logic. Nhưng nếu sự trùng lặp là kết quả của những quá trình riêng rẽ và không ảnh hưởng đến nhau thì tư duy sẽ là phi logic nếu tư duy gán cho các quá trình này những mối quan hệ. Đây là hậu quả của sự xuất hiện các liên kết thần kinh giữa các phần tử nhớ cùng được hình thành tại một thời điểm hoặc đang cùng được kích hoạt hoặc có những yếu tố để chúng dễ dàng liên kết với nhau. Tư duy phi logic xét trong một số giới hạn hay trường hợp cụ thể cũng biểu hiện đầy đủ tính chất của tư duy logic, do đó chúng tạo khó khăn khi phân biệt chúng với tư duy logic.

- *Tư duy đơn giản hay phức tạp*. Tính đơn giản hay phức tạp biểu hiện ở số lượng các yếu tố, các đối tượng, các mối quan hệ, các mối liên kết xuất hiện

trong một quá trình tư duy. Số lượng càng lớn thì quá trình tư duy càng phức tạp. Tính chất này biểu hiện cho khả năng tư duy của cá nhân và phụ thuộc vào hai yếu tố: phương thức hoạt động thần kinh và số lượng các yếu tố, các đối tượng, kinh nghiệm, tri thức mà bộ não ghi nhớ được. Với cùng một lượng tri thức được ghi nhớ, hệ thần kinh hoạt động trí tuệ sẽ có tư duy phức tạp hơn bởi nó có thể tạo ra nhiều liên kết thần kinh hơn so với hệ thần kinh có phương thức phản ứng thần kinh. Nhưng nếu lượng tri thức thấp thì tư duy trí tuệ cũng không thể có được tư duy tốt.

- *Tư duy lí luận*. Nếu tư duy logic xem xét các đối tượng trong mối quan hệ nhân quả, một chiều từ nguyên nhân tới kết quả thì tư duy lí luận xem xét mọi nguyên nhân dẫn đến cùng một kết quả và ngược lại, từ kết quả tìm đến các nguyên nhân, xem xét ảnh hưởng của sự kết hợp các nguyên nhân tới kết quả. Tư duy lí luận chỉ ra mọi yếu tố đã có và có thể có của đối tượng, chỉ ra các mối quan hệ đã có và có thể có giữa các đối tượng. Tư duy lí luận xem xét đối tượng trên mọi góc độ, mọi khía cạnh và theo chiều sâu của đối tượng. Tư duy logic có thể được thể hiện bằng hình ảnh hoặc bằng lời văn, còn tư duy lí luận chỉ được thể hiện bằng lời văn. Tư duy lí luận là sự phát triển cao nhất của các quá trình tư duy.

Phân loại theo nội dung

Phân loại theo nội dung là phân loại dựa trên các nội dung, phương pháp, phạm vi tư duy và các điều kiện về tư duy. Theo cách phân loại này, tư duy có rất nhiều loại và cũng không khó cho việc đặt tên. Dưới đây là một số loại:

- *Tư duy khoa học*. Tư duy khoa học là tư duy có mục đích đảm bảo sự chính xác, hợp với các quy luật tự nhiên và dựa trên các chứng cứ xác thực. Vì vậy, tư duy khoa học là tư duy logic biện chứng duy vật. Yêu cầu đối với tư duy khoa học là các kết luận của tư duy khoa học phải kiểm chứng được và được kiểm chứng. Khoa học nghiên cứu sâu về từng hiện tượng, sự vật và các mối quan hệ trực tiếp, vì vậy tính chất chủ yếu của tư duy khoa học là phân tích, hay đặc trưng của tư duy khoa học là tư duy phân tích.

- *Tư duy nghệ thuật*. Tư duy nghệ thuật là tư duy tìm kiếm mọi hình thức thể hiện của nội dung các sự vật, sự việc, các vấn đề, nói chung là nội dung của các đối tượng tư duy và tìm những cách thể hiện rõ nhất, đặc trưng nhất, đầy đủ nhất, ấn tượng nhất của các nội dung đó. Nếu nói chức năng của khoa học là tìm kiếm các yếu tố, các mối quan hệ của đối tượng thì có thể nói khoa học

đi tìm nội dung của các đối tượng đó, còn nghệ thuật lại tìm kiếm các hình thức thể hiện của các đối tượng đó. Sự tiến triển của lịch sử đã làm cho nghệ thuật chỉ tập trung vào chức năng tìm kiếm cách thể hiện ấn tượng nhất, nghĩa là thể hiện cái đẹp. Hai thủ pháp chính để nghệ thuật thể hiện cái đẹp là đặt cái đẹp lên vị trí cao nhất và đặt cái đẹp vào vị trí tương phản với cái xấu. Tư duy khoa học và tư duy nghệ thuật có mối quan hệ chặt chẽ. Nếu không tìm được nội dung thì nghệ thuật chẳng có gì để thể hiện; ngược lại nếu khoa học không biết cách để thể hiện những cái mà khoa học tìm ra thì chẳng ai có thể biết hoặc hiểu đó là cái gì và nó như thế nào.

- *Tư duy triết học*. Tư duy xem xét các yếu tố, các đối tượng trên mọi mối quan hệ, cả trực tiếp và gián tiếp. Đặc trưng của tư duy triết học là tư duy tổng hợp. Yêu cầu đặt ra cho quá trình tư duy triết học là phải đặt các đối tượng tư duy trong môi trường thực vận động của nó xem xét đồng thời nhiều đối tượng hoặc một đối tượng trong nhiều môi trường khác nhau để tìm ra cái chung nhất, mối quan hệ phổ biến nhất giữa các đối tượng hoặc cái đặc trưng nhất của đối tượng. Với đặc trưng của tư duy khoa học là phân tích và của tư duy triết học là tổng hợp, khoa học và triết học ngày nay có mối quan hệ khăng khít và bổ sung cho nhau trong quá trình nhận thức thế giới (quan niệm này trước đây chưa có).

- *Tư duy tín ngưỡng*. Tư duy tín ngưỡng là tư duy dựa trên niềm tin không dựa trên các cơ sở khoa học. Niềm tin xuất hiện trên cơ sở những giải thích hợp lí trong một phạm vi nào đó về các hiện tượng. Có các niềm tin dựa trên các giải thích của khoa học và có các niềm tin không cần các cơ sở khoa học mà chỉ cần tạo nên một chỗ dựa tinh thần. Loại niềm tin thứ hai này tạo nên tín ngưỡng. Tín chỗ dựa cho tư duy là nhu cầu của con người trước các nguy cơ đe doạ đến sự sinh tồn. Khi khoa học chưa đủ sức hoặc chưa thâm nhập sâu vào đời sống của từng cá nhân thì tất yếu tư duy phải tìm đến chỗ dựa tinh thần là tín ngưỡng. Tư duy tín ngưỡng chủ yếu nhằm đạt đến sự cân bằng trong đời sống tinh thần, giảm căng thẳng cho hoạt động thần kinh và không sử dụng được trong nghiên cứu khoa học.

Cần phân biệt giữa các loại tư duy theo phân loại này với các lĩnh vực mà chúng thực hiện. Tư duy theo phân loại này, ngoài sự liên quan đến nội dung, nó còn có ý nghĩa về phương pháp. Vì vậy có thể áp dụng loại hình tư duy này vào các lĩnh vực khác, ví dụ có thể áp dụng tư duy triết học trong nghiên cứu

khoa học và ngược lại. Không bắt buộc một loại tư duy nào đó chỉ thực hiện trong lĩnh vực đó. Có thể kết hợp nhiều loại hình tư duy để tìm được kết quả tốt nhất và nhanh nhất.

Trong tâm lí học, người ta phân chia thành ba loại hình tư duy:

– *Tư duy trực quan* (còn gọi là tư duy cụ thể): trong đó có thể phân chia thành tư duy trực quan hành động (tư duy bằng các thao tác chân tay đối với vật thật, hướng vào giải quyết một số tình huống cụ thể) và tư duy trực quan hình ảnh (tư duy hướng vào việc giải quyết vấn đề dựa trên các hình ảnh của sự vật, hiện tượng).

– *Tư duy trừu tượng* (còn gọi là tư duy ngôn ngữ – logic): là tư duy mà việc giải quyết vấn đề dựa trên các khái niệm, các mối quan hệ logic gắn bó chặt chẽ với ngôn ngữ, lấy ngôn ngữ làm phương tiện.

– *Tư duy trực giác*: là tư duy đặc trưng bởi trực tiếp nắm bắt được chân lí một cách bất ngờ, đột nhiên, chớp nhoáng, không dựa vào hoạt động logic của ý thức, gắn với tưởng tượng. Sản phẩm của tư duy trực giác mang tính chất dự báo, cẩn kiểm tra tính đúng đắn bằng thực nghiệm và logic, nó thường dẫn đến những nhận thức mới mẻ, sáng tạo.

Trong chương tiếp theo, tác giả sẽ trình bày những loại hình tư duy thường gặp trong dạy học môn Toán.

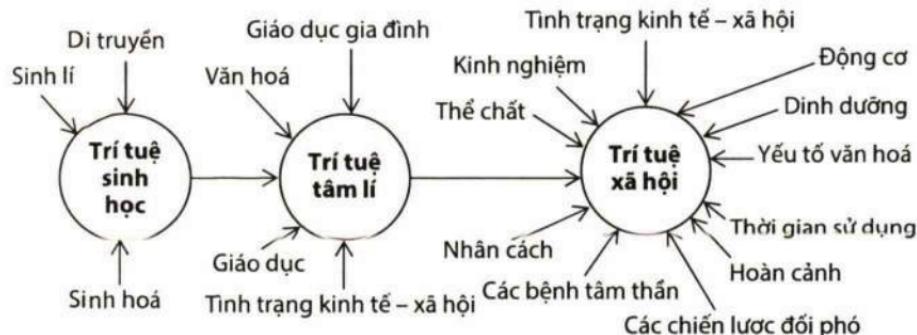
1.4. MỘT SỐ QUAN ĐIỂM VỀ NHỮNG THÀNH PHẦN CỦA TƯ DUY TOÁN HỌC VÀ NĂNG LỰC TOÁN HỌC

Theo Nic-ke-sơn (R.S. Nickerson) [15] thì: tư duy tốt là khi người ta vận dụng các cú liệu một cách khéo léo và công tâm; các ý kiến được tổ chức nhất quán và logic. Cũng theo ông, những lí do để chúng ta phải rèn luyện HS thành những người biết tư duy tốt là: *Thứ nhất*, HS phải được trang bị đủ kiến thức để thi đua giành các cơ hội trong học tập, việc làm, được thừa nhận và trọng đại trong thế giới ngày nay. Nói đúng hơn, là người học sẽ có điều kiện tốt hơn để thành công. Chính câu trả lời có tính thực dụng này đòi hỏi việc dạy tư duy phải được cải thiện tốt hơn. *Thứ hai*, tư duy tốt sẽ là điều kiện tiên quyết giúp HS trở thành những công dân tốt. Khả năng tư duy có phê phán của công dân giúp họ tạo nên những quyết định thông minh đối với những vấn đề của xã hội. Việc dân chủ bàn bạc để giải quyết mọi vấn đề xã hội yêu cầu mỗi thành viên có trách nhiệm và ý thức sâu sắc để tìm ra các giải pháp thích hợp. *Thứ ba*, nếu có

khá năng tư duy tốt, người ta sẽ luôn điều chỉnh để có trạng thái tâm lí tốt. Trạng thái tâm lí tốt giúp người ta có được thái độ tích cực đối với cuộc sống, nhiệt tình, thiện cảm với người khác. Khi có bất đồng, người biết suy nghĩ sẽ cảm thấy đau khổ hơn, từ đó có tinh thần khắc phục những xung đột bằng mọi giá. *Thứ tư*, chúng ta luôn mong muốn HS trở thành những người có đầu óc tư duy tốt vì lí do tồn tại. Chúng ta luôn phải đổi mới với quá nhiều những vấn đề phức tạp, thách thức khả năng trong cuộc sống. Trở ngại chủ yếu làm hạn chế sự tiến bộ lại chính là thái độ phi lí của con người. Con người đủ thông minh để tồn tại và cũng đủ thông minh để huỷ diệt, vì vậy cần có bộ óc tinh túc hơn.

Các nhà nghiên cứu cũng đã chỉ ra rằng, mục tiêu của giáo dục hiện đại là phải đào tạo được những bộ óc được rèn luyện tốt. Tư duy chính là khởi nguồn của hành động; hành động sẽ tạo ra thói quen; thói quen sẽ hình thành nhân cách; và nhân cách quyết định vận mệnh. Như vậy, tư duy chính là yếu tố quyết định vận mệnh của con người.

Cần quan tâm ý kiến cho rằng năng lực là tổng hòa các mối quan hệ biện chứng của nhiều yếu tố, trong đó ba yếu tố đóng vai trò trọng tâm đó là: di truyền, gia đình, xã hội. Xin dẫn sơ đồ về ba tầng trí tuệ của Eyseck (2001) để minh họa:



Hình 1.3. Sơ đồ về ba tầng trí tuệ

Chúng ta đang sống trong thời đại mở ra nhiều cơ hội cho giáo dục, những người thầy luôn mong muốn HS của mình suy nghĩ thông minh và biết áp dụng những điều đã học. Lâu nay, người ta quan tâm nhiều đến việc dạy tư duy như thế nào, nhưng càng ngày, chúng ta càng nhận thức sâu sắc rằng mục đích này thật khó đạt và làm thế nào để đạt được lại còn khó khăn hơn.

Theo R.S. Nickerson, dạy người học tư duy là làm cho họ có khả năng tư duy hiệu quả hơn, có ý thức phê phán, logic, sáng tạo và sâu sắc hơn, hay nói cách khác là dạy cho người học có kiến thức đủ để tư duy tốt hơn [15].

Theo Viện sĩ B.V. Gen-hex-den-co viết về giáo dục toán học, thì những yêu cầu đối với tư duy toán học bao gồm: năng lực nhìn thấy sự không rõ ràng của quá trình suy luận, thấy được sự thiếu sót của những điều cần thiết trong chứng minh; sự cõi động; sự chính xác của các kí hiệu; phân chia rõ ràng tiến trình suy luận; thói quen lí lẽ đầy đủ và logic.

Theo A.Ia. Khin-sin, những nét đặc đáo của tư duy toán học là: suy luận theo sơ đồ logic chiếm ưu thế, khuynh hướng đi tìm con đường ngắn nhất dẫn đến mục đích; phân chia rành mạch các bước suy luận; sử dụng chính xác các kí hiệu; tính có căn cứ đầy đủ của lập luận (dẫn theo Trần Luận, 1996).

Theo V.A. Kơ-ru-tec-xki (tiến sĩ tâm lí học người Liên Xô cũ) trình bày trong luận án tiến sĩ của mình, cấu trúc năng lực toán học ở lứa tuổi HS như sau:

Thu nhận thông tin toán học: Năng lực tri giác hình thức hoá tài liệu toán học, năng lực nắm cấu trúc hình thức của bài toán.

Chế biến thông tin toán học:

1. Năng lực tư duy logic trong lĩnh vực các quan hệ số lượng và không gian, hệ thống kí hiệu số và dấu. Năng lực tư duy bằng các kí hiệu toán học.

2. Năng lực khái quát hoá nhanh và rộng các đối tượng, quan hệ toán học và các phép toán.

3. Năng lực rút gọn quá trình suy luận toán học và hệ thống các phép toán tương ứng. Năng lực tư duy bằng các cấu trúc rút gọn.

4. Tính linh hoạt của các quá trình tư duy trong hoạt động toán học.

5. Khuynh hướng vươn tới tính rõ ràng, đơn giản, tiết kiệm, hợp lý của lời giải.

6. Năng lực nhanh chóng và dễ dàng sửa lại phương hướng của quá trình tư duy; năng lực chuyển từ tiến trình tư duy thuận sang tiến trình tư duy đảo.

Lưu trữ thông tin toán học: trí nhớ toán học (Trí nhớ khái quát về: các quan hệ toán học, đặc điểm về loại, sơ đồ suy luận và chứng minh, phương pháp giải toán, nguyên tắc, đường lối giải toán).

Thành phần tổng hợp khái quát: Khuynh hướng toán học của trí tuệ.

Theo tác giả, các thành phần nêu ở trên quan hệ mật thiết với nhau, ảnh hưởng lẫn nhau và hợp thành một hệ thống duy nhất, một cấu trúc toàn vẹn

của năng lực toán học. V.A. Kơ-ru-tec-xki cũng cho rằng trong cấu trúc của năng lực toán học, các thành phần sau đây là không bắt buộc: tốc độ của quá trình tư duy, năng lực tính toán, trí nhớ về chữ số, số, công thức, năng lực tưởng tượng không gian, năng lực biểu diễn trực quan các quan hệ và phụ thuộc toán học trừu tượng. Kết quả nghiên cứu này cũng cho thấy một số sự kiện liên quan đến bản chất của năng lực toán học là:

+ Sự tạo thành thường rất sớm của năng khiếu toán học.

+ Khuynh hướng và hứng thú sâu sắc đối với việc học toán, khuynh hướng và hứng thú này cũng thường biểu hiện rất sớm.

+ Khả năng làm việc lớn trong lĩnh vực toán học.

+ Khuynh hướng toán học của trí tuệ.

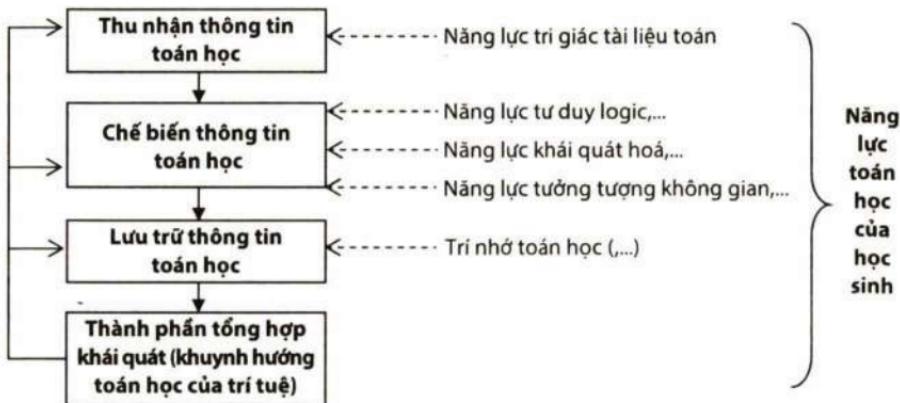
Tìm hiểu công trình của V.A. Kơ-ru-tec-xki, ta có thể coi đó là một công trình công phu, có ý nghĩa lớn cả về mặt lí luận và thực tiễn. Trong thời điểm hiện nay, khi mà nền khoa học công nghệ của thế giới đã có những biến chuyển vượt bậc, thì các kết quả được trình bày trên đây rất cần thiết phải được kiểm chứng lại. Chúng ta có thể tiếp thu nó ở những điểm phù hợp với hiện tại, từ đó có những ứng dụng thích hợp mà không nhằm mục đích nào khác là coi đó là cơ sở để có những tác động phù hợp nhằm phát triển năng khiếu toán học, nắm một cách nhanh và tốt các kiến thức, kĩ năng, kĩ xảo tương ứng với chương trình phổ thông.

Có thể xem xét năng lực toán học trên hai phương diện:

Một là: Theo ý nghĩa năng lực học tập (*tái tạo*) tức là năng lực đối với việc học toán, nắm một cách nhanh và tốt các kiến thức, kĩ năng, kĩ xảo tương ứng với chương trình phổ thông.

Hai là: Theo ý nghĩa năng lực sáng tạo (*khoa học*), tức là năng lực đối với hoạt động sáng tạo toán học, tạo ra những kết quả mới, khách quan có một giá trị lớn đối với loài người.

Như vậy, giữa hai mức độ hoạt động toán học đó không có một sự ngăn cách tuyệt đối. Theo J. Hadamard, giữa việc giải một bài toán của HS và sự phát minh, cái khác nhau có thể chỉ là mức độ và chất lượng, bởi vì cả hai việc đó đều có cùng một tính chất.



Hình 1.4. Sơ đồ thể hiện cấu trúc năng lực toán học của HS

Nói đến HS có năng lực toán học là nói đến HS có trí thông minh trong việc học toán. Năng khiếu là mầm mống của năng lực, của tài năng. Một HS có năng khiếu toán là một HS có khả năng trở thành một người có tài về toán học và cả những khoa học khác. Bản thân năng lực là một cái gì động, nó không những chỉ thể hiện và tồn tại trong hoạt động tương ứng, nó còn được tạo nên và phát triển trong hoạt động, vì thế nó cũng được hình thành và phát triển trong hoạt động toán học.

Theo Nguyễn Bá Kim [36]: môn Toán vừa có tính *triều tượng* *cao độ* và tính *thực tiễn phổ dụng*, vừa có tính *logic* và tính *thực nghiệm*; môn Toán có vai trò quan trọng trong phát triển năng lực trí tuệ HS:

- Thứ nhất là rèn luyện *tư duy logic và ngôn ngữ chính xác*, có thể thực hiện theo ba hướng có liên hệ chặt chẽ với nhau là làm cho HS nắm vững, hiểu đúng và sử dụng đúng những liên kết logic; phát triển khả năng định nghĩa và làm việc với những định nghĩa; phát triển khả năng hiểu chứng minh, trình bày lại chứng minh và độc lập tiến hành chứng minh.

- Thứ hai là phát triển khả năng suy đoán và tưởng tượng thông qua việc làm cho HS quen và có ý thức sử dụng những quy tắc suy đoán như xét tương tự, khái quát hoá, quy lật về quen,..., tập cho HS khả năng hình dung được những đối tượng, quan hệ không gian và làm việc với chúng dựa trên những dữ liệu bằng lời hay những hình phẳng, từ những biểu tượng của những đối tượng đã biết có thể hình thành, sáng tạo ra hình ảnh của những đối tượng chưa biết hoặc không có trong đời sống.

- Thứ ba là rèn luyện những *hoạt động trí tuệ cơ bản*. Môn Toán đòi hỏi HS phải thường xuyên thực hiện những hoạt động trí tuệ cơ bản như phân tích, tổng hợp, trừu tượng hoá, khái quát hoá,..., do đó có tác dụng rèn luyện những hoạt động trí tuệ này.

- Thứ tư là hình thành những *phẩm chất trí tuệ*. Việc rèn luyện những phẩm chất trí tuệ có ý nghĩa to lớn đối với việc học tập, công tác và hoạt động trong đời sống của HS. Qua dạy học môn Toán, có thể rèn luyện cho HS những phẩm chất trí tuệ quan trọng như: tính linh hoạt, tính độc lập, tính sáng tạo.

Theo Trần Kiều: "... học toán trong nhà trường phổ thông không phải chỉ tiếp nhận hàng loạt các công thức, định lí, phương pháp thuần túy mang tính lí thuyết,... cái đầu tiên và cái cuối cùng của quá trình học Toán phải đạt tới là hiểu nguồn gốc thực tiễn của toán học và nâng cao khả năng ứng dụng, hình thành thói quen vận dụng toán học vào cuộc sống." [35].

Những chỉ tiêu năng lực toán học cơ bản của UNESCO Paris 1973

Hiệp hội quốc tế về đánh giá kết quả học tập IEA (International association for the Evaluation of Education Achievement) đưa ra 10 chỉ tiêu năng lực toán học cơ bản năm 1973 như sau:

- (1) Năng lực phát biểu và tái hiện những định nghĩa, kí hiệu, các phép toán, các khái niệm.
- (2) Năng lực tính nhanh và cẩn thận, sử dụng đúng các kí hiệu.
- (3) Năng lực dịch chuyển các dữ kiện thành các kí hiệu.
- (4) Năng lực biểu diễn các dữ kiện, ẩn, các điều kiện ràng buộc giữa ẩn và các dữ kiện thành kí hiệu.
- (5) Năng lực theo dõi một hướng suy luận hay chứng minh.
- (6) Năng lực xây dựng một chứng minh.
- (7) Năng lực giải một bài toán đã toán học hoá.
- (8) Năng lực giải một bài toán có lời văn (chưa toán học hoá).
- (9) Năng lực phân tích bài toán và xác định các phép toán có thể áp dụng để giải.
- (10) Năng lực khái quát hoá toán học.

Theo Đào Thái Lai, Phạm Thanh Tâm (2012, Đề xuất các năng lực Toán phổ thông Việt Nam, Hội thảo Việt Nam – Đan Mạch về giáo dục hướng năng lực) thì: "Môn Toán được xác định là một trong những môn học quan trọng trong

giáo dục quốc dân, có nhiệm vụ cung cấp tri thức công cụ, đồng thời thông qua học tập các tri thức toán học, người học được rèn luyện và phát triển những năng lực chuyên biệt như: năng lực tư duy và lập luận; năng lực tưởng tượng không gian; năng lực hiểu và trình bày các nội dung toán học; năng lực sử dụng các kí hiệu và ngôn ngữ toán học; năng lực mô hình hoá toán học; năng lực sử dụng các công cụ, phương tiện học tập môn Toán,...”.

Như vậy, giáo dục toán học phổ thông cần hướng tới giúp người học đạt được những năng lực cần thiết như: năng lực thu nhận và xử lí thông tin toán học; năng lực tư duy và lập luận; năng lực hiểu và trình bày các nội dung toán học; năng lực vận dụng toán học; năng lực sáng tạo;... Cũng cần phân biệt giáo dục toán học phổ thông và giáo dục toán học chuyên biệt bao gồm những trẻ có năng khiếu và thiểu năng.

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 1

Câu 1: Trình bày, hệ thống những đặc điểm của tư duy, quá trình tư duy.

Câu 2: Trình bày ý nghĩa của phép suy xuôi, suy ngược. Lấy ví dụ minh họa.

Câu 3: Trình bày ý nghĩa của quan hệ giữa phân tích và tổng hợp. Minh họa qua việc hướng dẫn HS giải một bài toán cụ thể.

Câu 4: Nêu vai trò của khái quát hoá, quan hệ giữ khái quát hoá và đặc biệt hoá. Minh họa.

Câu 5: Cho bài toán: “Cho S.ABCD là hình chóp đều, hãy tìm mặt phẳng đi qua điểm cho trước và chia đôi thể tích của hình chóp”.

Hãy tìm các bài toán tương tự, đặc biệt, khái quát của bài toán trên và các lời giải tương ứng.

Câu 6: Nếu hai mặt phẳng trong không gian cắt ba mặt phẳng song song thì cho kết quả gì? Để chứng minh kết quả đó, có thể đưa ra bài toán (định lí) đơn giản hơn không?

Câu 7: Hãy xem tử diện như một hình tương tự của hình tam giác, mặt cầu tương tự như hình tròn, hãy liệt kê những khái niệm tương tự những khái niệm sau: hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, đường phân giác của góc,... Từ đó, thử đưa ra các kết quả toán học tương ứng giữa các hình. Tiếp tục

đặc biệt hoá các hình để có những kết quả mới (chẳng hạn, đường cao của tam giác cân đi qua trung điểm của đáy,...).

Câu 8: Từ bài toán: (1) Cho a, b là các số thực không âm, chứng minh rằng $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$; (2) Chứng minh rằng, trong tam giác ABC: $\tan A + \tan B + \tan C \geq \sqrt{3}$, bằng tương tự, khái quát hoá, đặc biệt hoá, hãy đưa ra các bài toán mới.

Câu 9: Đưa ra các ví dụ về sử dụng đặc biệt hoá, tương tự hoá trong dạy học bất đẳng thức Cô-si (Cauchy, hay còn gọi là bất đẳng thức AM – GM), Bu-nhi-a-cốp-xki.

Chương 2

NHỮNG LOẠI HÌNH TƯ DUY THƯỜNG GẶP TRONG DẠY HỌC MÔN TOÁN

“... *Dứa trẻ nên được để cho tự phát triển bản tính tốt bằng chính trải nghiệm về sức lực của nó, nghĩa là tự mình, không cần sự hướng dẫn của người lớn. Hãy để cho chính đời sống “giáo dục” nó.*”

Giêng Giắc Rút-xô (*J.J. Rousseau, 1712 – 1778*).

2.1. TƯ DUY LOGIC

2.1.1. Logic hình thức

Logic hay luận lí học, từ tiếng Hy Lạp cổ điển λόγος (logos), nghĩa nguyên thuỷ là từ ngữ, hoặc điều đã được nói (nhưng trong nhiều ngôn ngữ châu Âu đã trở thành có ý nghĩa là suy nghĩ hoặc lập luận hay lí trí).

Trong cuộc sống hằng ngày, mọi hoạt động của con người đều thông qua tư duy của họ. Khác với hành động của con vật mang tính bản năng, hành động của con người luôn mang tính tự giác. Con người, trước khi bắt tay vào hoạt động thực tiễn cải tạo thế giới, đều đã có sẵn “dự án” trong đầu. Sự khác biệt ấy là vì con người có tư duy và biết vận dụng sức mạnh của tư duy vào việc thực hiện các mục đích của mình. Trong quá trình hoạt động đó, con người dần dần phát hiện ra các thao tác của tư duy.

Trong đầu mỗi người, ai cũng đều có so sánh, phán đoán, suy luận, trên cơ sở các ý niệm, khái niệm về các hiện tượng, sự vật xung quanh. Nghĩa là tự nhiên ban cho con người bộ não hoạt động tư duy với các quy luật logic vốn có, khách quan ở tất cả mọi người.

Cùng với sự phát triển của thực tiễn và của nhận thức, con người càng ngày càng có sự hiểu biết đầy đủ hơn, sâu sắc hơn, chính xác hơn về bản thân tư duy đang nhận thức. Chính quá trình hiểu biết ấy là cơ sở tạo ra sự phát triển của logic học. Các quy luật của tư duy logic là phổ biến cho toàn nhân loại. Dĩ nhiên, sản phẩm tư duy của người này thì khác người kia, về cùng một phán đoán nhưng có người đúng và có người sai, cái đó lại phụ thuộc vào các điều kiện khác.

Logic hình thức nghiên cứu cơ cấu của các hình thức tư duy (khái niệm, phán đoán, suy luận). Nhiệm vụ chủ yếu là xây dựng các quy tắc, quy luật mà sự tuân thủ là điều kiện cần thiết để đạt được những kết quả chân thực trong quá trình thu nhận tri thức. Trong logic hình thức có những quy luật cơ bản: Luật đồng nhất; Luật không mâu thuẫn; Luật bài trung; Luật lí do đầy đủ.

Cuối thế kỉ XIX, bước ngoặt chủ yếu của sự phát triển logic hình thức là logic toán: đó là khoa học của phép chứng minh, nghiên cứu các mối liên quan hình thức giữa các mệnh đề một cách độc lập đối với mọi sự đoán nhận mà ta có thể đưa ra về chúng và đối với các giá trị chân lí mà ta có thể gán cho chúng.

Tư duy logic là loại hình tư duy thường gặp trong môn Toán, gắn liền với các hình thức tư duy mà logic hình thức nghiên cứu. Trong dạy học môn Toán, logic toán rất được coi trọng.

2.1.2. Khái niệm

2.1.2.1. Quan niệm về khái niệm

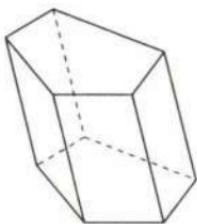
Khái niệm là hình thức cơ bản của tư duy trừu tượng. Mọi quá trình tư duy đều mang đặc trưng tư duy bằng khái niệm. Mỗi đối tượng có các dấu hiệu, đó là những đặc điểm, đặc trưng, tính chất hay thuộc tính và các quan hệ của đối tượng và so sánh nó với các đối tượng khác. Thuộc tính bao giờ cũng là những nội dung vốn có tồn tại khách quan, gắn liền với sự vật, hiện tượng, không lệ thuộc vào việc con người có nhận thức được nó hay không. Dấu hiệu vừa phản ánh những thuộc tính khách quan của sự vật, hiện tượng, vừa biểu hiện mức độ nhận thức của con người về sự vật, hiện tượng. Hay nói cách khác, dấu hiệu phản ánh những nội dung khách quan về sự vật, hiện tượng, thông qua hình thức chủ quan của tư duy con người. Dấu hiệu bao gồm dấu hiệu thuộc tính và dấu hiệu quan hệ. Những dấu hiệu quy định bản chất bên trong, quyết định sự tồn tại và biến đổi của sự vật, hiện tượng gọi là dấu hiệu cơ bản. Những dấu hiệu không biểu thị bản chất và không quy định sự tồn tại và biến đổi của sự vật, hiện tượng là dấu hiệu không cơ bản.

Khái niệm là một hình thức cơ bản của tư duy, trong đó phản ánh các dấu hiệu khác biệt cơ bản của sự vật riêng biệt hay lớp sự vật, hiện tượng nhất định.

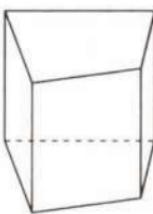
Trong khái niệm, một là, bản chất của các sự vật, hiện tượng được phản ánh; hai là, sự vật hay lớp sự vật, hiện tượng nổi bật trên cơ sở của các dấu hiệu khác biệt cơ bản.

Mỗi khái niệm bao giờ cũng có nội hàm và ngoại diên. Nội hàm và ngoại diên của khái niệm tạo thành kết cấu logic hình thức của khái niệm. Nội hàm khái niệm là tập hợp các dấu hiệu cơ bản khác biệt của đối tượng hay lớp đối tượng được phản ánh trong khái niệm. Ngoại diên khái niệm là đối tượng hay tập hợp các đối tượng được phản ánh trong khái niệm. Nội hàm càng được mở rộng thì ngoại diên càng thu hẹp và ngược lại.

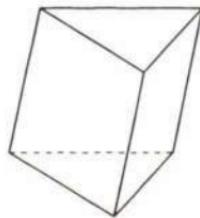
Ví dụ 2.1: "Lăng trụ" là khái niệm phản ánh lớp đối tượng các hình trong không gian như hình vẽ dưới đây:



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Hình 2.1: Hình lăng trụ

+) Hình 1, hình 2, hình 3 (theo thứ tự từ trái sang phải, hình 1 và hình 3 là hình lăng trụ xiên, hình 2 là hình lăng trụ đứng) là các đối tượng thuộc ngoại diên của khái niệm "lăng trụ".

+) Nội hàm của khái niệm "lăng trụ" là: Hai mặt đáy là hai đa giác bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song và các cạnh bên song song với nhau.

+) Nội hàm càng được mở rộng thì ngoại diên càng bị thu hẹp.

Thêm vào nội hàm của khái niệm "lăng trụ" đặc điểm "các cạnh bên vuông góc với đáy" (được khái niệm hình lăng trụ đứng) thì trong ba hình đó, chỉ có hình 2 là thuộc ngoại diên của khái niệm mới, còn hình 1 và hình 3 sẽ không thuộc ngoại diên của khái niệm mới nữa.

Dưới góc độ toán học còn có khái niệm về một quan hệ, được xem là một trường hợp riêng về một đối tượng. Tuy nhiên, dưới góc độ sự phạm, sự phân biệt giữa hai khái niệm về đối tượng với khái niệm về quan hệ lại là không cần thiết.

Ví dụ 2.2: Khi dạy học hình học vectơ, khi xem xét vấn đề góc giữa hai đường thẳng chuyển thành góc giữa hai vectơ chỉ phương tương ứng, chứng minh hai đường thẳng vuông góc, người ta chuyển sang chứng minh tích vô hướng của hai vectơ chỉ phương bằng 0, khi đó:

+) Quan hệ “vuông góc” là một tập con V của tập tích Đè-các E×E (E là tập hợp tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng): $V = \{(\Delta_1, \Delta_2) \mid (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0)\}$, \vec{v}_1, \vec{v}_2 theo thứ tự là vectơ chỉ phương của $\Delta_1, \Delta_2\}$.

+) Quan hệ “song song” là một tập con S của tập tích Đè-các E×E (E là tập hợp tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng): $S = \{(\Delta_1, \Delta_2) \mid \exists k \neq 0, (\vec{v}_1 = k\vec{v}_2)\}$, \vec{v}_1, \vec{v}_2 theo thứ tự là vectơ chỉ phương của $\Delta_1, \Delta_2\}$.

Trong dạy học môn Toán, có những khái niệm không định nghĩa gọi là những khái niệm nguyên thuỷ, chẳng hạn khái niệm về điểm, mặt phẳng,...

2.1.2.2. Định nghĩa khái niệm

Quá trình thành lập một khái niệm rất phức tạp gồm nhiều khâu, sử dụng nhiều phương pháp, thao tác khác nhau của tư duy. Trong quá trình này, so sánh, phân tích, tổng hợp, trừu tượng hoá và khái quát hoá giữ vai trò quan trọng. So sánh giúp thiết lập sự giống nhau và sự khác nhau giữa các đối tượng hiện thực. So sánh hàng loạt các đối tượng giúp tìm ra được các dấu hiệu cơ bản, chung vốn có trong một nhóm đối tượng xác định, do đó phân biệt được các nhóm đó. Phân tích giúp phân chia trong tư tưởng đối tượng nhận thức thành các bộ phận hợp thành nó, trên cơ sở đó đi sâu tìm hiểu chi tiết từng dấu hiệu của đối tượng. Tổng hợp giúp kết hợp trong tư tưởng các bộ phận hợp thành đối tượng hoàn chỉnh do phân tích tách ra. Phân tích – tổng hợp hỗ trợ lẫn nhau, thống nhất với nhau giúp con người vừa có khả năng tách các dấu hiệu cơ bản ra khỏi dấu hiệu không cơ bản, vừa biết sắp xếp các dấu hiệu đó theo một trình tự nhất định. Sự trừu tượng hoá giúp con người biết tập trung sự chú ý vào các dấu hiệu cơ bản nhất và bỏ qua các dấu hiệu khác của đối tượng. Đó thực chất là sự phản ánh có chọn lọc của tư duy trên cơ sở kết quả của phân tích và tổng hợp. Trên cơ sở các dấu hiệu đã được tách ra, con người có thể đưa các đối tượng có dấu hiệu chung thành nhóm nhờ khái quát hoá. Trừu tượng hoá tạo nên nội hàm của khái niệm, khái quát hoá lại xác định ngoại diện của khái niệm. Cuối cùng là thao tác đặt tên khái niệm, là việc dùng từ hoặc cụm từ tương ứng với một hay một nhóm đối tượng mà chúng có cùng dấu hiệu bản chất khác biệt. Xét trên quá trình thành lập, khái niệm là hình thức phản ánh gián tiếp, khái quát, trừu tượng, do đó đi sâu vào bản chất sự việc, hiện tượng.

Trong phạm vi dạy học môn Toán, định nghĩa khái niệm là một thao tác logic nhằm phân biệt lớp đối tượng xác định khái niệm này với các đối tượng khác, thường bằng cách vạch ra nội hàm của khái niệm đó. Mỗi khái niệm có nhiều cách định nghĩa, bởi có nhiều thuộc tính đặc trưng cho đối tượng được nói đến trong khái niệm đó. Chẳng hạn, với khái niệm hình chữ nhật, ta có thể định nghĩa nó bằng nhiều cách:

- +) Tứ giác có bốn góc vuông.
- +) Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau.
- +) Hình thang cân có một góc vuông.

...

Ta phân biệt các dạng định nghĩa khái niệm như sau⁽¹⁾:

(1) Định nghĩa thông qua loại và khác biệt về chủng

$\forall x \in M$	$A(x) \xleftarrow{\text{định nghĩa}} B(x)$
Miền đối tượng (Loại)	Từ mới (Khái niệm mới) —— Tân từ (Chủng)

Ví dụ 2.3:

Loại	Khái niệm mới	Chủng
Mọi đoạn thẳng AB	Vectơ AB	Đoạn thẳng có xác định điểm đầu và điểm cuối
Mọi hình chóp	Hình chóp đều	Đa giác x, $(P_1(x) \wedge P_2(x)) \vee (P_1(x) \wedge P_3(x))$ $P_1(x)$: đáy là đa giác đều. $P_2(x)$: chan đường cao hạ từ đỉnh xuống đáy trùng với tâm của đáy. $P_3(x)$: các cạnh bên bằng nhau.
$[\forall y = f(x)], f(x)$ xác định trên (a, b) , $x_0 \in (a, b)$	Đạo hàm của $y = f(x)$ tại $x = x_0$, $y'(x_0) = f'(x_0)$	$\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

⁽¹⁾ Theo Nguyễn Bá Kim (2006), *Phương pháp dạy học môn Toán*.

(2) *Định nghĩa kiến thiết*: Trong dạng này, người ta nêu lên cách tạo thành đối tượng được định nghĩa, có thể là thêm vào khái niệm trước đó những thuộc tính để thu hẹp ngoại diên, tạo ra khái niệm mới.

Ví dụ 2.4: Mặt cầu là tập hợp các điểm của không gian, cách đều một điểm cố định một khoảng cách không đổi; hình chữ nhật là hình bình hành có một góc vuông.

Việc hình thành một cách vững chắc cho HS một hệ thống khái niệm được coi là nhiệm vụ quan trọng nhất trong việc dạy học môn Toán. Bởi thực tế cho thấy, để giúp HS đạt được mục tiêu nắm được tri thức một cách bền vững thì không gì hơn là HS phải tự kiến tạo tri thức ấy. Do đó, nếu dạy học khái niệm được thực hiện hợp lý, thì không những giải quyết được việc trang bị tri thức, mà còn giúp HS rèn luyện tư duy, rèn luyện cách khám phá, cách sử dụng tri thức. Với vai trò nền tảng, khái niệm còn ví như mầm để cây tri thức có thể tự phát triển. Nghĩa là, với khái niệm, người ta có thể dùng phán đoán, dùng suy luận, dùng thực nghiệm để kiến tạo, phát minh nhiều tri thức mới. Việc dạy học khái niệm cần đạt yêu cầu là phải làm cho HS: nắm vững các đặc điểm đặc trưng cho một khái niệm; biết nhận dạng, thể hiện khái niệm; biết phát biểu rõ ràng, chính xác khái niệm; biết vận dụng khái niệm trong những tình huống cụ thể; biết phân loại khái niệm và nắm được mối quan hệ của một khái niệm với những khái niệm khác trong cùng một hệ thống.

2.1.2.3. Phân chia khái niệm và hệ thống hoá khái niệm

Phân chia khái niệm là đem phân chia ngoại diên của khái niệm ấy làm nhiều phần (nhiều tập hợp), đây là phương pháp vạch rõ các khái niệm chung của cùng một loại khái niệm. Theo Nguyễn Bá Kim (2006), có bốn yêu cầu khi phân chia khái niệm:

(1) Phân chia phải thích hợp: tức là ngoại diên của các khái niệm phân chia ra hợp lại phải bằng ngoại diên của khái niệm được phân chia.

(2) Phân chia không được chồng chéo nhau.

(3) Phân chia phải căn cứ vào cùng một thuộc tính.

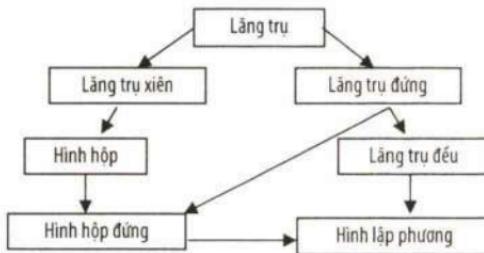
(4) Phân chia phải liên tục.

Ví dụ 2.5: Sự phân chia khái niệm hình lăng trụ được minh họa qua sơ đồ sau:



Hình 2.2. Sơ đồ Ven mô tả quan hệ giữa các hình: lăng trụ, lăng trụ đứng, hộp chữ nhật, lập phương

Ví dụ 2.6: Mô tả phân chia khái niệm hình lăng trụ



Hình 2.3. Sơ đồ cây mô tả phân chia khái niệm hình lăng trụ

Biết phân chia khái niệm là một trong những biểu hiện của việc nắm vững những khái niệm toán học. Phân chia khái niệm có tác dụng tốt trong việc hệ thống hoá khái niệm. Tập luyện cho HS phân chia khái niệm là tạo tiền đề cần thiết để biện luận trong những bài toán quỹ tích, dựng hình, để chứng minh phản chứng và giải nhiều bài toán khác dựa trên sự phân chia trường hợp. Để phân chia khái niệm, người ta phải tiến hành thường xuyên các hoạt động phân tích, so sánh,... Do đó, hoạt động phân chia khái niệm có ý nghĩa trong rèn luyện tư duy logic, rèn luyện các hoạt động trí tuệ diễn hình của môn Toán.

2.1.3. Phán đoán

2.1.3.1. Quan niệm về phán đoán

Phán đoán là hình thức cơ bản của tư duy đang nhận thức. Khi phán đoán, người ta khẳng định hoặc phủ định một cái gì đó liên quan đến đối tượng tư duy. Khẳng định hoặc phủ định đó có thể đúng hoặc sai, vì thế phán đoán là một năng lực của tư duy, liên kết các khái niệm để tạo ra giá trị chân lí:

chân thực hoặc giả dối. Phán đoán chân thực có nghĩa là tư duy phù hợp với thực tại; trái lại, phán đoán giả dối thì có nghĩa là tư duy không phù hợp thực tại, do xuyên tạc, bịa đặt, ảo tưởng,... gây ra⁽¹⁾.

Ngôn ngữ là hình thức biểu đạt của tư duy; từ và cụm từ biểu đạt khái niệm; câu và mệnh đề biểu đạt phán đoán. Vì phán đoán là hình thức tư duy có giá trị chân lí cho nên chỉ có loại câu trắc thuật là thích hợp dùng để biểu đạt phán đoán. Chẳng hạn: "Mọi tam giác, tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° ", "Trái Đất không đứng yên tuyệt đối" là những phán đoán; còn "Trong mô hình không phẳng, phải chăng tổng ba góc trong một tam giác bằng $180^{\circ}?$ ", hoặc "Hãy giải bài tập đi!" thì không phải phán đoán.

2.1.3.2. Cấu trúc của phán đoán

Tuỳ thuộc cấu trúc của phán đoán đơn giản hay phức tạp mà người ta phân ra hai kiểu loại phán đoán: phán đoán đơn và phán đoán phức.

Phán đoán đơn là phán đoán có cấu trúc logic: Chủ từ logic (S) – vị từ logic (P); có thể phân loại phán đoán theo chất, hoặc lượng, hoặc cả chất và lượng, hoặc theo nội hàm của vị từ logic, hoặc theo hình thái. Chẳng hạn phán đoán "Hình chữ nhật là một hình bình hành" là một phán đoán đơn khẳng định mang giá trị chân lí thực.

Phán đoán phức được tạo thành từ các phán đoán đơn liên kết với nhau bởi các liên từ logic. Về mặt ngôn ngữ, các liên từ logic được biểu đạt qua các từ nối, và nhờ đó nối các câu đơn thành câu phức hợp. Trong môn Toán có các phán đoán phức phổ biến như:

– *Phép hội*, từ nối thông thường là "và", "vừa là,...vừa là",...; kí hiệu của phép hội trong toán học được biểu diễn là " \wedge ". Chân lí của phép hội phụ thuộc vào chân lí của các mệnh đề đơn trong phán đoán. Phán đoán mới chỉ đúng khi tất cả các phán đoán đơn trong phép hội đều đúng. Chẳng hạn: "Tam giác có ba cạnh và tứ giác có bốn cạnh", "Hình vuông vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi" là những phán đoán phức đúng dùng phép hội; "Hình chữ nhật có bốn góc vuông và hai đường chéo vuông góc" là một phán đoán sai.

– *Phép tuyển*, từ nối thông thường là "hoặc", "hay"; kí hiệu của phép tuyển trong toán được biểu diễn là " \vee ". Phán đoán phức dạng này chỉ sai khi các

⁽¹⁾ Giáo trình *Logic học*, NXB Chính trị Quốc gia, Hà Nội, 2004.

phán đoán đơn cùng sai. Chẳng hạn: “Tam giác cân có hai góc ở đáy bằng nhau hoặc có đường cao đồng thời là đường trung tuyến” là phán đoán đúng dùng phép tuyển.

- *Phép kéo theo*, từ nối thông thường là “nếu,... thì”. Trong toán học, phép kéo theo được biểu diễn bằng kí hiệu “ \Rightarrow ” hoặc “ \rightarrow ”; cấu trúc của phán đoán này có dạng “ $A \Rightarrow B$ ”, trong đó A được gọi là phán đoán tiền đề, B là phán đoán kết luận. Phán đoán này chỉ sai khi phán đoán tiền đề đúng mà phán đoán kết luận lại sai. Những phán đoán sau đây minh họa cho phép kéo theo: “Nếu một số là số chẵn thì nó chia hết cho 6” (phán đoán sai); “Nếu một tam giác là tam giác cân thì có hai đường cao ứng với hai cạnh bên bằng nhau” (phán đoán đúng).

Các phép hội, phép tuyển, phép kéo theo được nghiên cứu trong logic toán. Về logic học, người ta còn quan tâm nghiên cứu các dạng cụ thể của phán đoán, dựa trên quan hệ “lượng” – “chất” của vị từ, của các phán đoán đơn rất phức tạp.

Về mặt sự phạm, rèn luyện phán đoán, sử dụng các phép toán logic toán là việc quan trọng trong dạy học môn Toán. Chỉ khi dùng đúng các phép logic thì từ liên kết những mệnh đề đúng chúng ta mới có những phán đoán đúng. Đây cũng là cơ sở để rèn luyện tư duy logic. Hơn nữa, phán đoán là một hình thức tư duy để xây dựng tri thức và khám phá thế giới. Trong đời sống của mình, con người liên tục phán đoán để tìm ra tri thức cũng như lời giải của những vấn đề gặp phải. Thông qua đó, họ thực hiện các hoạt động trí tuệ, các loại hình tư duy.

2.1.4. Suy luận

2.1.4.1. Quan niệm về suy luận

Suy luận hay suy lí là một hình thức cơ bản của tư duy đang nhận thức, nó xuất phát từ những phán đoán đã biết để rút ta những phán đoán mới. Phán đoán đã biết gọi là tiền đề, phán đoán mới rút ra gọi là kết luận của suy luận, cách thức rút ra kết luận từ tiền đề gọi là lập luận. Chẳng hạn:

Mọi hình bình hành đều là hình thang.

Tứ giác ABCD là hình bình hành.

Vậy, ABCD là hình thang.

Cấu trúc của suy luận: Suy luận bao gồm hai thành phần cơ bản: thứ nhất là các phán đoán xuất phát, gọi là tiền đề; thứ hai là phán đoán mới được rút ra gọi là kết luận. Như vậy, suy luận là quá trình tư duy đi từ tiền đề đến kết luận. Đó là quá trình rút ra kết luận, ta có thể gọi là luận kết.

Hình thức biểu diễn: Mỗi suy luận được biểu diễn dưới dạng một mệnh đề kéo theo mà tiền đề là một mệnh đề hoặc hội của nhiều mệnh đề: $A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow B$ (Các A_i là tiền đề ($i = 1, 2, \dots, n$), B là kết luận).

Điều kiện cần và đủ để suy luận đạt tới kết luận chân thực là phải xuất phát từ những tiền đề chân thực và quá trình suy luận phải đúng đắn, nghĩa là phải tuân theo các quy luật và quy tắc logic hình thức. Suy luận có nhiều loại, tuy thuộc vào tính chất của tiền đề, đặc điểm quá trình kết luận. Chẳng hạn, ta có suy luận diễn dịch (gồm trực tiếp hoặc gián tiếp) hoặc suy luận không diễn dịch (gồm quy nạp hoặc loại suy).

2.1.4.2. Suy diễn

Suy diễn hay còn gọi là suy luận diễn dịch là loại suy luận có hai thuộc tính cơ bản: thứ nhất, xuất phát từ những tiền đề khái quát; thứ hai, kết luận rút ra một cách tất yếu. Tuỳ thuộc tính chất của phán đoán tiền đề để phân loại suy diễn nhất quyết, hay có điều kiện hoặc lựa chọn. Có thể hiểu:

Suy luận diễn dịch là suy luận theo một quy tắc thoả mãn điều kiện: *Nếu tiền đề đúng thì kết luận đúng.* Kí hiệu: $\frac{A}{B}$

Trong toán học, thường gặp hai loại suy diễn sau đây:

Loại thứ nhất: $\frac{(\forall x \in X) P(x), a \in X}{P(a)}$, tức là: Nếu $P(x)$ đúng với mọi $x \in X$ và $a \in X$

thì $P(a)$ là mệnh đề đúng.

Ví dụ: Số tự nhiên có tổng các chữ số chia hết cho 3 thì sẽ chia hết cho 3.

Số 78 có tổng các chữ số (là 15) chia hết cho 3.

Vậy số 78 chia hết cho 3.

Loại thứ hai: $\frac{(\forall x \in X) P(x) \rightarrow Q(x), P(a)}{Q(a)}$, tức là: Nếu $P(x) \Rightarrow Q(x)$ đúng với mọi $x \in X$ và $P(a)$ đúng thì $Q(a)$ cũng là một mệnh đề đúng.

Ví dụ: Mọi hình thoi đều có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Tứ giác ABCD là một hình thoi.

Vậy tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau.

Suy diễn trực tiếp là loại suy diễn xuất phát từ một tiền đề, rút ra kết luận từ tiền đề đó, chẳng hạn: "Mọi hình thang đều có hai đáy nằm trên hai đường thẳng song song, vậy không có hình thang nào mà không có hai đáy song song.", hoặc "Một số hình bình hành là hình thang cân, vậy một số hình thang cân là hình bình hành.", hoặc "Mọi hàm số khả vi đều liên tục, $f(x)$ khả vi trên miền D, vậy nó liên tục trên miền D."....

Suy diễn gián tiếp thường rút ra kết luận không dựa vào trực tiếp từ tiền đề, chẳng hạn qua phủ định của nó. Trong toán học, chúng ta thường gặp chứng minh phản chứng.

2.1.4.3. Suy luận nghe có lí

Suy luận nghe có lí (còn gọi là suy luận quy nạp) là suy luận trong đó kết luận chỉ dựa trên cảm tính, phán đoán, không theo một quy tắc suy diễn nào cả. Kết luận rút ra chỉ có tính chất dự đoán, giả thuyết. Các dạng suy luận nghe có lí thường gặp là: *phép tương tự, phép khái quát hoá, tổng quát hoá, phép quy nạp không hoàn toàn*....

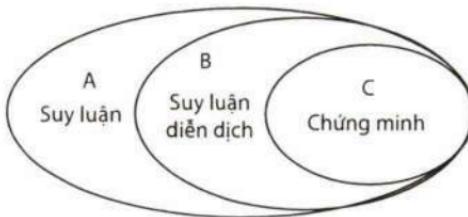
Ví dụ:

– Từ các tiền đề: $5 + 7 = 7 + 5$; $12 + 3 = 3 + 12$; $42 + 72 = 72 + 42$, ta rút ra kết luận: "Tổng của hai số tự nhiên không thay đổi khi ta thay đổi thứ tự của các số hạng trong tổng đó". Ở đây, từ các tiền đề đúng, kết luận rút ra cũng đúng (nhưng chưa được thừa nhận vì chưa được chứng minh).

– Từ các tiền đề: $12 : 3$; $42 : 3$ và $72 : 3$, ta rút ra kết luận: "tất cả các số có chữ số hàng đơn vị là 2 sẽ chia hết cho 3". Trong trường hợp này, từ các tiền đề đúng, kết luận rút ra lại sai.

2.1.4.4. Chứng minh

Chứng minh là phép suy luận diễn dịch, xuất phát từ những mệnh đề đúng làm tiền đề. Trong phép chứng minh, kết luận (được rút ra bằng phép suy diễn và xuất phát từ những tiền đề đúng) bao giờ cũng đúng.



Hình 2.4. Mối quan hệ giữa ba khái niệm

Ví dụ:

+ Phép quy nạp toán học là một phép chứng minh dựa trên tiên đề quy nạp.

+ Phép chứng minh dựa trên cơ sở ($X \Rightarrow Y$) $\equiv (\neg Y \Rightarrow \neg X)$ gọi là phép phản chứng.

Theo Nguyễn Bá Kim⁽¹⁾, chứng minh một mệnh đề T là tìm ra một dãy hứa hẹn A_1, A_2, \dots, A_n thoả mãn các điều kiện sau:

- Mỗi A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) hoặc là tiên đề, hoặc định nghĩa, hoặc là suy từ một số trong các A_1, \dots, A_{i-1} nhờ những kết luận logic.

- A_n chính là mệnh đề T.

Như vậy, chứng minh là quá trình xác nhận tính đúng đắn hoặc bác bỏ một phán đoán nào đó dựa vào các phán đoán đã biết. Ta hiểu suy luận như một bước của phép chứng minh.

Cấu trúc của một chứng minh: Một chứng minh bao gồm ba bộ phận:

+ Luận đề là mệnh đề cần chứng minh.

+ Luận cứ là những tiên đề, định nghĩa, định lí đã biết.

+ Luận chứng là những phép suy luận được sử dụng trong chứng minh.

Trong dạy học môn Toán, chứng minh có vai trò quan trọng trong việc phát triển tư duy cho HS. Bản chất của việc chứng minh không phải để đạt mục tiêu biết chứng minh hay chứng minh bằng được định lí, mà thông qua chứng minh, HS sẽ học và rèn luyện được cách phán đoán, cách suy luận. Nhiều hoạt động trí tuệ này sinh trong quá trình chứng minh như phân tích, tổng hợp, so sánh, tương tự,... Trên quan điểm hoạt động có thể phát triển năng lực chứng minh toán học dựa vào:

- Gợi động cơ chứng minh (Làm cho HS thấy rõ sự cần thiết phải chứng minh một mệnh đề toán học).

⁽¹⁾ Phương pháp dạy học môn Toán, 2006.

- Tập luyện cho HS những hoạt động thành phần trong chứng minh (Những hoạt động thành phần trong chứng minh bao gồm: những hoạt động trí tuệ chung (phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hoá, khái quát hoá,...), những quy tắc kết luận logic thường dùng (đặc biệt $\frac{A \rightarrow B, A}{B}$); ngoài ra cần có những ví dụ cụ thể bác bỏ những sai lầm khi sử dụng các quy tắc logic (chẳng hạn: $\frac{A \rightarrow B, B}{A}$ hoặc $\frac{A \rightarrow B, \bar{A}}{\bar{B}}$)).

- Hướng dẫn cho HS những tri thức phương pháp trong chứng minh (Những tri thức về các quy tắc kết luận logic (tập luyện những hoạt động ăn khớp); Hình thành những tri thức về phương pháp suy luận như suy ngược (suy ngược tiến, suy ngược lùi), suy xuôi, quy nạp toán học và chứng minh phản chứng).

– Phân bậc hoạt động chứng minh (thể hiện phân hoá mức độ phức tạp của chứng minh, đặc biệt quan tâm đến tính vừa sức đối với HS). Sự phân bậc theo một tiêu chí bao quát là căn cứ vào tính độc lập của hoạt động của HS thể hiện ở ba mức độ:

- + Hiểu chứng minh;
 - + Trình bày lại được chứng minh;
 - + Độc lập tiến hành chứng minh.

Ba mức độ này chỉ so sánh với nhau đối với cùng một bài toán. Thật vậy, hiểu chứng minh ở một bài toán khó rất có thể khó khăn hơn độc lập chứng minh ở một bài toán dễ.

Để đảm bảo việc dạy học đạt mục tiêu, cần quan tâm đến ba yêu cầu để đảm bảo chứng minh:

- (i) Luận đề không được đánh tráo;
 - (ii) Luận cứ phải đúng;
 - (iii) Luận chứng phải hợp logic.

Từ đó, trong dạy học chứng minh, GV phải ý thức phát hiện và sửa chữa sai lầm: luận đẽ bị đánh tráo; luận cứ không đúng; luận chứng không hợp logic.

Ví dụ 2.7: Sai lầm do luận đề bị đánh tráo:

Chứng minh rằng, nếu: $\begin{cases} a+b+c > 0 & (1) \\ ab+bc+ca > 0 & (2) \text{ thì } a > 0, b > 0, c > 0. \\ abc > 0 & (3) \end{cases}$

Chứng minh: Do vai trò của a, b, c bình đẳng nên ta chỉ cần chứng minh $a > 0$.

Giả sử $a < 0$ thì từ (3) $\Rightarrow bc < 0$.

Từ (2) $\Rightarrow a(b + c) > -bc > 0 \Rightarrow b + c < 0$.

Từ $a < 0$ và $b + c < 0$, suy ra $a + b + c < 0$ (mâu thuẫn).

Ví dụ 2.8: Sai lầm do luận cứ không đúng:

Chứng minh rằng $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Chứng minh: Theo bất đẳng thức Cô-si ta có: $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Ví dụ 2.9: Sai lầm do luận chứng không hợp logic

Một HS đã chứng minh biểu thức $M = x(2a - x)(2b - x)$ với a, b, x thoả mãn $0 < x < 2a < 2b$ không có giá trị lớn nhất như sau: "Ta có $2M = 2x(2a - x)(2b - x)$. Theo Cô-si, các số dương $2x, 2a - x, 2b - x$ có tổng không đổi ($2a + 2b$) nên tích của chúng lớn nhất khi chúng bằng nhau, tức là: $2x = 2a - x = 2b - x$. Nhưng điều này không xảy ra. Vậy M không có giá trị lớn nhất".

Phân tích: A = "Các số dương a và b có tổng không đổi".

B = "Tích của ab lớn nhất".

C = "a và b bằng nhau".

Như vậy theo Cô-si thì $AC \rightarrow B$ chứ không có kết luận logic là: $\bar{A} \bar{C} \rightarrow \bar{B}$.

2.2. TƯ DUY LOGIC BIỆN CHỨNG

Logic biện chứng là học thuyết triết học về những quy luật chung nhất của sự sống và phát triển của tự nhiên, xã hội, tư duy giúp chúng ta nắm được nội dung của đối tượng. Đối tượng của tư duy biện chứng là những đối tượng vận động, biến đổi trong mối quan hệ liên hệ, phụ thuộc lẫn nhau. Logic biện chứng dựa trên các quy luật (phổ biến, mâu thuẫn,...), các nguyên lí và các cặp phạm trù để giải thích về thế giới. Tư duy logic biện chứng là loại hình tư duy gắn liền với logic biện chứng. Toán học cũng là đối tượng của logic biện chứng. Trong toán học cũng như trong dạy học môn Toán thường gặp các cặp phạm trù:

- Cụ thể và trừu tượng.
 - Khả năng và hiện thực.
 - Cái chung và cái riêng.
 - Ngẫu nhiên và tất nhiên.
 - Nội dung và hình thức.
 - Suy đoán và diễn dịch.
 - Phân tích và tổng hợp.
 - Vận động và đúng yên.
- ...

Ví dụ 2.10:⁽¹⁾ Về cấp phạm trù nội dung – hình thức. Khi dạy học nội dung khái niệm “Tứ diện trực tâm” thì GV có thể hướng dẫn cho HS trình bày theo các hình thức thể hiện như sau:

– *Hình thức 1:* “Tứ diện có các cạnh đối diện vuông góc với nhau được gọi là tứ diện trực tâm”.

– *Hình thức 2:* “Tứ diện ABCD có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$ được gọi là tứ diện trực tâm”.

– *Hình thức 3:* “Tứ diện ABCD là tứ diện trực tâm khi và chỉ khi chân đường cao của tứ diện hạ từ một đỉnh trùng với trực tâm của mặt đối diện”.

– *Hình thức 4:* “Tứ diện ABCD là tứ diện trực tâm khi và chỉ khi $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ ”.

Ta cũng có thể khai thác các hình thức thể hiện ở trên để xây dựng thành các bài toán mới. Cụ thể, từ hình thức thứ tư ta có thể phát biểu lại thành các bài toán:

Bài toán 1: Trong không gian cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $AC \perp BD$ là $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Bài toán 2: Trong không gian cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $AB \perp CD$ là $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

Bài toán 3: Trong không gian cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $AD \perp BC$ là $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

⁽¹⁾ Nguyễn Thu Thuỷ (2010), Luận văn Thạc sĩ Khoa học giáo dục, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

* Liên quan tới nội dung của các bài toán trên, ta có thể đưa các bài toán đó về không gian phẳng (2 chiều) thì được các kết quả tương tự:

Bài toán 4: Trong mặt phẳng cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $AC \perp BD$ là $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Bài toán 5: Trong mặt phẳng cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $AB \perp CD$ là $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

Bài toán 6: Trong mặt phẳng cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $AD \perp BC$ là $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

* Khi cho hai điểm bất kì của các bài toán 4, 5, 6 trùng nhau thì ta có ngay định lí Pi-ta-go. Cụ thể, khi cho hai điểm A và D trùng nhau ở bài toán 4 (tức là: $A \equiv D \Rightarrow AD = 0$) thì ta được bài toán:

Bài toán 7: Trong mặt phẳng cho ba điểm A, B, C. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $AC \perp BA$ là $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (hay nói cách khác: ΔABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$).

...

* Đến đây ta cũng có thể thể hiện hình thức của định lí Pi-ta-go (bài toán 7) dưới một cách khác:

Bài toán 8: Cho ΔABC vuông tại A. Dựng ra phía ngoài các hình vuông ABB_1A_1 , ACC_1A_2 , BCC_2B_2 . Chứng minh rằng: $S_{BCC_2B_2} = S_{ABB_1A_1} + S_{ACC_1A_2}$.

* Có thể mở rộng bài toán 8 bằng cách thay các hình vuông dựng trên các cạnh của tam giác vuông bởi các đa giác đều đồng dạng.

Ví dụ 2.11: Xuất phát từ định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng:

Tích vô hướng của hai vectơ \vec{a} và \vec{b} là một số, được xác định bởi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Vì góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} nằm trong giới hạn từ 0° đến 180° nên ta có $-1 \leq \cos(\vec{a}, \vec{b}) \leq 1$

$$\text{Suy ra } -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \quad (*)$$

Giả sử $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ với $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ cùng khác 0, ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Thay vào (*) ta được:

$$-\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$\Leftrightarrow |a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$\Leftrightarrow (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Mở rộng tích vô hướng của hai vectơ trong không gian, một cách tương tự ta cũng có:

Chọn hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ với $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ cùng khác 0 thì ta được:

$$\begin{aligned} -\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} &\leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \leq \\ &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$\Leftrightarrow (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

Đây chính là bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki mà ta đã biết.

Bằng việc thay các cặp số $(a_1; a_2; a_3)$ và $(b_1; b_2; b_3)$ bởi các số thực bất kì ta sẽ được vô số các bất đẳng thức khác nhau. Chẳng hạn:

* Cho $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, b_1 = b_2 = b_3 = 1$ thì ta có bài toán: "Chứng minh rằng $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, ta đều có $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ ".

* Cho ΔABC với độ dài ba cạnh là a, b, c ; nếu chọn $a_1 = \sqrt{a}, a_2 = \sqrt{b}, a_3 = \sqrt{c}, b_1 = \sqrt{\frac{1}{a}}, b_2 = \sqrt{\frac{1}{b}}, b_3 = \sqrt{\frac{1}{c}}$ thì ta được bài toán: "Cho ΔABC với độ dài ba cạnh là a, b, c . Chứng minh rằng: $9 \leq (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ hoặc $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{2p}$, với $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác".

* Cho ΔABC với độ dài ba cạnh là a, b, c ; nếu chọn $a_1 = \sqrt{a \sin A}, a_2 = \sqrt{b \sin B}, a_3 = \sqrt{c \sin C}, b_1 = \sqrt{\frac{a}{\sin A}}, b_2 = \sqrt{\frac{b}{\sin B}}, b_3 = \sqrt{\frac{c}{\sin C}}$ thì ta được bài toán: "Cho ΔABC với độ dài ba cạnh là a, b, c . Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)^2 \leq (a \sin A + b \sin B + c \sin C) \left(\frac{a}{\sin A} + \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\sin C} \right)$$

hoặc $a \sin A + b \sin B + c \sin C \geq \frac{2p^2}{3R}$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ".

Từ bất đẳng thức $9 \leq (A+B+C) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right), \forall A, B, C > 0$ và $A, B, C \in \mathbb{R}$ đã

có được ở trên thì ta cũng có thể biến hóa thành những bài tập với mức độ khó dễ khác nhau:

* Nếu chọn $A = a^2 + 2bc; B = b^2 + 2ac; C = c^2 + 2ab$ và điều kiện $a + b + c = 1$ thì $A + B + C = (a + b + c)^2 = 1$, ta có bài toán sau: "Chứng minh rằng nếu $a + b + c = 1$ và $a, b, c > 0$ thì $\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geq 9$ ".

* Nếu chọn $A = a^3 + 3bc(b+c) + 2abc; B = b^3 + 3ac(a+c) + 2abc; C = c^3 + 3ab(a+b) + 2abc$ và điều kiện $a + b + c = 1$ thì

$$A + B + C = (a + b + c)^3 = 1,$$

ta có bài toán sau: "Chứng minh rằng nếu $a + b + c = 1$ và $a, b, c > 0$ thì

$$\frac{1}{a^3 + 3bc(b+c) + 2abc} + \frac{1}{b^3 + 3ac(a+c) + 2abc} + \frac{1}{c^3 + 3ab(a+b) + 2abc} \geq 9.$$

Như vậy, đứng trước *nội dung* là bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki thì ta có thể xây dựng được nhiều bài toán khác nhau (*hình thức*), điều này giúp cho HS khai quát hoá được hệ thống kiến thức, phát huy được tính linh hoạt và sáng tạo trong việc học toán.

Ví dụ 2.12: Về *cập phạm trù bản chất – hiện tượng*. Khi một bài toán đã được giải quyết, ta rút ra cái “*bản chất*” của lời giải bài toán đó. Trên cơ sở đó giúp ta có thể trình bày hoặc sáng tác ra hàng loạt các bài toán mới, với những “*hiện tượng*” có đặc điểm giống hoặc gần giống với những hiện tượng của bài toán ban đầu.

Bài toán: Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Giải:

Với điều kiện của bài toán là $a, b, c > 0$ thoả mãn $ab + bc + ca = 1$, ta có thể đặt $a = \tan \frac{A}{2}$, $b = \tan \frac{B}{2}$, $c = \tan \frac{C}{2}$ với A, B, C là ba góc của ΔABC ; $\tan \frac{A}{2} > 0$,

$\tan \frac{B}{2} > 0$, $\tan \frac{C}{2} > 0$ thoả mãn điều kiện:

$$ab + bc + ca = 1 \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1 \quad (*)$$

Khi đó, bất đẳng thức (2) trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{\tan \frac{A}{2}}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{A}{2}}} + \frac{\tan \frac{B}{2}}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{B}{2}}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{C}{2}}} \leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{\tan \frac{A}{2}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}}}} + \frac{\tan \frac{B}{2}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}}}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}}}} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2}} \leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & \tan \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \quad (**). \end{aligned}$$

Xét (**):

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } & \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{\pi}{6} = \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right) + \left(\sin \frac{C}{2} + \sin \frac{\pi}{6} \right) \\
 & = 2 \sin \frac{A+B}{4} \cos \frac{A-B}{4} + 2 \sin \left(\frac{C}{4} + \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{C}{4} - \frac{\pi}{12} \right) \\
 & \leq 2 \sin \frac{A+B}{4} + 2 \sin \left(\frac{C}{4} + \frac{\pi}{12} \right) = 2 \left[\sin \frac{A+B}{4} + \sin \left(\frac{C}{4} + \frac{\pi}{12} \right) \right] \\
 & = 4 \sin \left(\frac{\frac{A+B}{4} + \frac{C}{4} + \frac{\pi}{12}}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{A+B}{4} - \frac{C}{4} - \frac{\pi}{12}}{2} \right) \\
 & = 4 \sin \left(\frac{\frac{A+B+C}{4} + \frac{\pi}{12}}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{A+B-C}{4} - \frac{\pi}{12}}{2} \right) \\
 & \leq 4 \sin \left(\frac{\frac{A+B+C}{4} + \frac{\pi}{12}}{2} \right) = 4 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}}{2} \right) = 4 \sin \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{\pi}{6} \leq 4 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq 3 \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \text{ (đpcm).}$$

Sau khi (2) được chứng minh bằng cách như trên, ta có thể đặt ra câu hỏi: “*Bản chất*” của cách giải trên là gì? Trên cơ sở những “*hiện tượng*” như thế nào?

- “*Bản chất*” của cách giải trên chính là việc ta đã “*lượng giác hóa*” bài toán để chuyển về dạng bất đẳng thức lượng giác quen thuộc.

- Những “*hiện tượng*” trong (2) chính là đẳng thức: $ab + bc + ca = 1$ và sự xuất hiện của những biểu thức $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$; $\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$; $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ có phần giống với các biểu thức biến đổi lượng giác. Cụ thể:

- Với cách đặt như trên thì đẳng thức $ab + bc + ca = 1$ trở thành biểu thức lượng giác: $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$ (*). Biểu thức này luôn đúng với A, B, C là ba góc của ΔABC . Thật vậy,

$$\text{Ta có: } \tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} \quad (\text{i})$$

$$\text{Mặt khác ta lại có: } \tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cot \frac{C}{2} = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} \quad (\text{ii})$$

Kết hợp (i) và (ii) ta được:

$$\begin{aligned} \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} &= \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} \Leftrightarrow \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) \tan \frac{C}{2} = 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \\ \Leftrightarrow \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} &= 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \\ \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} &= 1 \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

- Với cách đặt như trên thì các biểu thức $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$; $\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$; $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ trở thành

các giá trị lượng giác $\sin \frac{A}{2}$; $\sin \frac{B}{2}$; $\sin \frac{C}{2}$.

- Ta có thể trình bày bài toán trên với nhiều hình thức (*hiện tượng*) với mức độ khó khác nhau nhưng về nội dung (*bản chất*) của các bài toán đó là cùng một nội dung. Tức là hình thức biểu hiện đã làm che lấp mất nội dung của bài toán.

Chẳng hạn:

Bài toán 1: Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Bài toán 2: Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{a^2}}} + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{b^2}}} + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{c^2}}} \leq \frac{3}{2}.$$

Bài toán 3: Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta luôn có:

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Bài toán 4: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn, ta luôn có:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Bài toán 5: Cho tam giác ABC nhọn với độ dài ba cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leq \frac{3}{2}.$$

– Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là: Nếu gấp lại những “hiện tượng” tương tự như trên thì ta có thể “lượng giác hoá” một bài toán và khi đó ta có thể đưa nó về những bài toán lượng giác quen thuộc. Chẳng hạn:

Bài toán 6: Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn: $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{2z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\left(\text{Đưa về bất đẳng thức: } 2 \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right).$$

Bài toán 7: Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{9}{4}$$

$$(\text{Đưa về bất đẳng thức: } 2 \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}).$$

Bài toán 8: Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

$$(\text{Đặt } x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C \text{ rồi đưa về bất đẳng thức: } \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}).$$

Bài toán 9: Cho các số dương x, y, z thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \geq \sqrt{3}.$$

(Đặt $x = \cos A$, $y = \cos B$, $z = \cos C$ rồi đưa về bất đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} + \sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}} + \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}.)$$

Ý nghĩa phương pháp luận rút ra từ mối quan hệ biện chứng giữa “*khả năng – hiện thực*” là khi học tập và nghiên cứu một nội dung toán học, chúng ta cần phải nhìn nhận một cách khách quan để đưa ra những “*khả năng*” tương thích có thể xảy ra đối với nội dung toán học đó.

Từ một nội dung toán học cụ thể cần giải quyết (cái “*hiện thực*”), thì ta cần phải suy xét xem để đạt được cái “*hiện thực*” đó thì cần có những “*khả năng*” nào.

Ví dụ 2.13: Về cặp phạm trù khả năng – hiện thực

Để chứng minh hai đường thẳng song song trong không gian (“*hiện thực*”), ta có thể nghĩ đến những “*khả năng*” sau:

a. Sử dụng định nghĩa: “*Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung*”.

b. Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng: Giả sử hai đường thẳng đồng phẳng, cắt nhau và đi đến một kết luận vô lí.

c. Sử dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng: “*Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau*”.

d. Sử dụng hệ quả: “*Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó*”.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ b \subset (Q) \\ a \parallel b \\ (P) \cap (Q) = c \end{cases} \Rightarrow c \parallel a \parallel b$$

e. Sử dụng định lí: "Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau".

$$\begin{cases} a // c \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // b$$

f. Sử dụng định lí: "Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a".

$$\begin{cases} a // (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow b // a$$

g. Sử dụng hệ quả: "Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng".

h. Sử dụng hệ quả: "Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó".

$$\begin{cases} a // (P) \\ a // (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow b // a$$

k. Sử dụng định lí: "Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song".

$$\begin{cases} (P) // (Q) \\ (R) \cap (P) = a \\ (R) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a // b.$$

Tuy nhiên, khi giải một bài toán thì ta cần phải tự đặt câu hỏi bài toán có thể giải được bằng bao nhiêu hướng (cái "khả năng")? Với mỗi hướng, kết quả thu được sẽ là gì (cái "hiện thực")? Với hướng nào thì sẽ giải quyết được bài toán một cách nhanh chóng và ngắn gọn?... Chẳng hạn, ta xét bài toán sau:

Bài toán: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với các cạnh đáy AB và CD ($AB > CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a) Chứng minh rằng $MN // CD$.

b) Gọi P là giao điểm của SC và mặt phẳng (ADN). Kéo dài đường thẳng AN và đường thẳng DP cắt nhau tại I. Chúng minh rằng $SI // AB // CD$. Tứ giác SABI là hình gì?

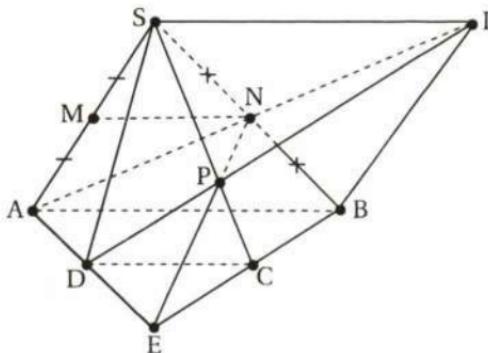
Giải:

a) Trong tam giác SAB, ta có:

MN là đường trung bình nên $MN // AB$ (1)

Vì ABCD là hình thang nên $AB // CD$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $MN // CD$ (đpcm).



Hình 2.5.

b) Gọi $E = AD \cap BC$. Ta có $EN \cap SC = P$, mà $EN \subset (ADN)$ nên $P = SC \cap (ADN)$.

Ta lại có: $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \\ (SAB) \cap (SCD) = SI \end{cases} \Rightarrow SI // AB // CD$ (đpcm).

Tứ giác SABI là hình bình hành.

Như vậy, để chứng minh $MN // CD$ “hiện thực” thì ta dùng “*khả năng e*” và chứng minh $SI // AB // CD$ “hiện thực” thì ta dùng “*khả năng d*” trong rất nhiều *khả năng* đã nêu ở ví dụ trên.

2.3. TƯ DUY THUẬT TOÁN

2.3.1. Quan niệm về thuật toán

Thuật toán (thuật giải) là một trong những khái niệm rất quan trọng của toán học và nhất là của tin học. Thuật toán là một bản quy định chính xác mà

mọi người đều hiểu như nhau về việc hoàn thành những thao tác nguyên tố theo một trật tự xác định nhằm giải quyết một loạt các bài toán bất kì thuộc một loại hay một kiểu nào đó. Nói cách khác, thuật toán là một quy tắc chính xác và đơn vị quy định một số hữu hạn những thao tác sơ cấp theo một trình tự xác định trên những đối tượng sao cho sau một số hữu hạn những thao tác đó ta thu được kết quả mong muốn ([36]). Theo Nguyễn Bá Kim: “Thuật toán là một quy tắc chính xác và đơn vị quy định một số hữu hạn những thao tác nguyên tố theo một trật tự xác định trên những đối tượng, sao cho sau một số hữu hạn những thao tác đó ta thu được kết quả như mong muốn.”. Người ta cũng hiểu thuật toán là quy luật diễn tả cách giải một bài toán trong toán học.

Để mô tả thuật toán, người ta có nhiều hình thức khác nhau, phù hợp với cơ cấu thực hiện thuật toán. Người ta thường biểu diễn thuật toán với các hình thức: ngôn ngữ tự nhiên và ngôn ngữ toán học, sơ đồ khối, ngôn ngữ phỏng trình, ngôn ngữ lập trình.

Ví dụ 2.14: Nhiều vấn đề (bài toán) toán học được giải quyết bằng thuật toán. Chẳng hạn:

- Giải phương trình bậc hai.
- Giải phương trình bậc nhất, hệ phương trình bậc nhất.
- Tìm ước chung lớn nhất của hai số.
- Thuật toán đơn hình cho bài toán quy hoạch tuyến tính.
- Tìm các số nguyên tố không lớn hơn một số n cho trước,...

Ta thấy thuật toán có những thao tác cụ thể, sẽ kết thúc sau một số hữu hạn các thao tác và cho ta kết quả cần tìm.

2.3.2. Tư duy thuật toán

Trong các hoạt động của con người nói chung, các hoạt động học tập nói riêng, đặc biệt là hoạt động dạy học toán học ta thường phải:

- Thực hiện những thao tác theo một trình tự xác định phù hợp với một thuật toán.
- Phân tích một quá trình thành những thao tác được thực hiện theo một trình tự xác định.
- Khái quát hoá một quá trình diễn ra trên một số đối tượng riêng lẻ thành một quá trình diễn ra trên cùng một lớp đối tượng.
- Mô tả chính xác quá trình tiến hành một hoạt động.

- Phát hiện thuật toán tối ưu để giải quyết một công việc.

Đó chính là các hoạt động của tư duy thuật toán. Hoạt động đầu tiên thể hiện khả năng thực hiện thuật toán, bốn hoạt động sau thể hiện năng lực xây dựng thuật toán.

Trên cơ sở của khái niệm thuật toán và thực tế dạy học, ta thấy có rất nhiều hoạt động thể hiện ít hay nhiều tư duy thuật toán trong các nội dung toán học. Do đó ta có thể thấy ngay vai trò của tư duy thuật toán trong dạy học. Thông thường, người ta sử dụng thuật toán để dạy khái niệm và các phép giải toán có thể mô tả thành quy tắc thuật toán. Có thể là những quy tắc này chưa thực sự là thuật toán theo các điều kiện cần. Theo Nguyễn Bá Kim (2006), ta gọi những quy tắc như vậy là các quy tắc tựa thuật giải, nó phân biệt với thuật toán ở các điểm sau:

- Mỗi chỉ dẫn trong quy tắc có thể chưa mô tả hành động một cách xác định.

- Kết quả thực hiện mỗi chỉ dẫn có thể không đơn trị.

- Quy tắc không đảm bảo chắc chắn rằng sau một số hữu hạn bước thì đem lại kết quả là lời giải của lớp bài toán.

- Mặc dù còn một số hạn chế như trên so với thuật toán, quy tắc tựa thuật toán cũng vẫn là những tri thức phương pháp có ích cho quá trình hoạt động và giải toán.

Trong quá trình dạy học thuật toán và quy trình tựa thuật toán cần lưu ý ba điều sau đây:

- Cho HS biết các hình thức thể hiện một thuật toán hay quy trình tựa thuật toán: có thể theo dàn ý từng bước; có thể dùng sơ đồ khối hay dạng ngôn ngữ phỏng trình.

- Cho HS nắm vững nội dung từng bước, trình tự thực hiện các bước, tập luyện thành thạo các thao tác trong từng bước.

- Cho HS tập dượt, thiết lập thuật toán, quy trình tựa thuật toán; tìm nhiều thuật toán hoặc quy trình có tính thuật toán để giải quyết một vấn đề hay một dạng toán. Từ đó có thể lựa chọn thuật toán hay quy trình thuật toán tốt nhất.

- Thông qua dạy học thuật toán và quy tắc tựa thuật toán, cần có ý thức góp phần phát triển tư duy thuật toán cho HS. Điều này là cần thiết vì:

(i) Tư duy thuật toán giúp HS hình dung được việc tự động hóa trong những lĩnh vực khác nhau của con người. Đó là cơ sở cho việc chuyển giao một số chức năng của con người cho máy móc thực hiện.

(ii) Tư duy thuật toán giúp HS làm quen với cách làm việc trong khi giải bài toán bằng máy vi tính. Thiết kế thuật toán là một khâu rất cơ bản của việc lập trình.

(iii) Tư duy thuật toán giúp HS học tốt những môn học ở trường phổ thông, rõ nét nhất là môn Toán.

(iv) Tư duy thuật toán cũng góp phần phát triển những năng lực trí tuệ chung và hình thành những phẩm chất của người lao động mới như: tính ngắn nắp, ki luật, tính phê phán và thói quen tự kiểm tra,...

Ví dụ 2.15: Trong quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa tìm giới hạn của $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ khi Δx giới hạn đến 0, ta không được mô tả một cách xác định việc làm thế nào để tìm giới hạn này. Tuy nhiên, quy tắc này là cụ thể hoá định nghĩa đạo hàm rất tốt cho việc dạy học khái niệm.

Để kiểm tra quy tắc nào đó có phải là một hàm số hay không thì việc kiểm tra các điều kiện P1, P2 (Trong đó: P1 là điều kiện: với mỗi phần tử $x \in D$ đều tồn tại một phần tử tương ứng $y \in R$; P2 là điều kiện: với mỗi phần tử $x \in D$ thì phần tử tương ứng y duy nhất) là không có phương pháp tiến hành cụ thể. Tuy nhiên, việc tách hai bước kiểm tra như trên giúp HS nắm được phương pháp tiến hành đồng thời hiểu tốt hơn cấu trúc định nghĩa hàm số. Đó là chưa kể đến mặt lợi ích về phương pháp giải quyết các bài tập nhận dạng đối tượng trong định nghĩa.

Ví dụ 2.16: Quy tắc tựa thuật toán “xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau (d_1), (d_2) trong không gian” như sau:

- *Bước 1:* Xác định hai mặt phẳng vuông góc

+ mp(1) chứa (d_1) và song song với (d_2).

+ mp(2) vuông góc với một đường thẳng của mp(1).

Vậy mp(1) vuông góc mp(2).

- *Bước 2:* Xác định giao điểm và giao tuyến

+ Giao điểm của mp(2) với đường thẳng (d_2)

+ Giao tuyến của mp(1) và mp(2)

+ Từ giao điểm, kẻ đường vuông góc với giao tuyến, ta được phương vuông góc chung.

- *Bước 3: Xác định hai đường thẳng song song*

+ Kẻ đường thẳng qua chân đường vuông góc ở bước 2, song song với (d_2) và cắt (d_1) tại một điểm gọi là đầu mút thứ nhất của đoạn vuông góc chung.

+ Từ đầu mút thứ nhất này, kẻ đường thẳng song song với phương vuông góc chung ta được đầu mút thứ hai của đoạn vuông góc chung.

2.4. TU DUY HÀM

2.4.1. Quan niệm về tư duy hàm

Tư duy hàm thể hiện ở sự nhận thức được tiến trình những tương ứng riêng và chung giữa các đối tượng toán học hay những tính chất của chúng (kể cả kỹ năng vận dụng chúng), thể hiện rõ nét tư tưởng lớn trong giáo trình toán học ở trường phổ thông, tư tưởng hàm. Hoạt động tư duy hàm là những hoạt động trí tuệ liên quan đến sự diễn đạt sự vật, hiện tượng cùng những quy luật của chúng trong trạng thái biến đổi sinh động của chúng chứ không phải ở trạng thái tĩnh tại, trong sự phụ thuộc lẫn nhau chứ không phải cô lập, tách rời nhau. Cũng có thể định nghĩa tư duy hàm dưới dạng mô tả bản chất: "*Tư duy hàm là các hoạt động trí tuệ liên quan đến sự tương ứng giữa các phần tử của một, hai, hay nhiều tập hợp, phản ánh các mối liên hệ phụ thuộc lẫn nhau giữa các phần tử của tập hợp đó trong sự vận động của chúng.*" (Nguyễn Thúc Trinh, 2003). Hoặc có một cách định nghĩa khác về tư duy hàm: "*Tư duy hàm là quá trình nhận thức liên quan đến sự tương ứng, những mối liên hệ phụ thuộc giữa các phần tử của một hay nhiều tập hợp trong sự vận động của chúng*". (Nguyễn Bá Kim, 2006).

Ví dụ 2.17: Diện tích một hình chữ nhật sẽ thay đổi như thế nào nếu:

- a) Một cạnh tăng lên gấp 2?
- b) Một cạnh tăng lên gấp 3?
- c) Một cạnh giảm đi một nửa?
- d) Một cạnh tăng lên gấp 3, còn cạnh kia tăng lên gấp 2?
- e) Một cạnh tăng lên gấp 6, còn cạnh kia giảm đi một nửa?
- f) Một cạnh giảm đi chỉ còn $\frac{1}{3}$, còn cạnh kia tăng lên 12 lần?

Trong ví dụ này, ở a), b), c) chỉ có một biến, còn ở d), e), f) có hai biến.

- Hoạt động tư duy hàm cũng có thể được phân bậc theo mức độ độc lập của hoạt động của HS, thường là ba mức độ sau:

+ GV thực hiện hoạt động, HS theo dõi và cùng suy nghĩ.

+ HS hoạt động theo yêu cầu và có thể với sự giúp đỡ của GV.

+ HS hoạt động độc lập, không chờ đợi GV yêu cầu hoặc giúp đỡ.

- Hoạt động tư duy hàm cũng có thể được phân bậc theo mức độ thành thạo của hoạt động. Chẳng hạn, có thể yêu cầu những hoạt động sau đây đạt tới trình độ kĩ xảo:

+ Thiết lập bảng giá trị của một hàm số khi hàm số được cho dưới dạng biểu thức.

+ Trình bày những giá trị đo đạc hoặc quan sát được dưới dạng bảng.

+ Vẽ đồ thị của hàm số khi biết bảng những cặp giá trị tương ứng thích hợp.

+ Đọc những giá trị tương ứng nhờ đồ thị của hàm số.

Sự phân bậc hoạt động tư duy hàm sẽ giúp GV điều khiển quá trình dạy học, cụ thể là xác định chính xác mức độ yêu cầu, tuần tự nâng cao yêu cầu, tạm thời hạ thấp yêu cầu khi cần thiết và dạy học phân hoá.

2.4.2. Các hoạt động đặc trưng của tư duy hàm

Tư duy hàm là một phương thức tư duy được biểu thị bởi việc tiến hành các hoạt động đặc trưng sau:

(1) *Hoạt động phát hiện và thiết lập sự tương ứng*

Hoạt động phát hiện: là khả năng nhận ra những mối liên hệ tương ứng tồn tại khách quan. Chẳng hạn như mối liên hệ tương ứng giữa độ dài cạnh của hình vuông với diện tích của nó.

Hoạt động thiết lập sự tương ứng: là khả năng tạo ra những sự tương ứng theo quy định chủ quan của mình nhằm tạo sự thuận lợi cho mục đích nào đó.

(2) *Hoạt động nghiên cứu sự tương ứng*

Hoạt động này nhằm phát hiện những tính chất của những mối liên hệ nào đó. Chẳng hạn, diện tích hình chữ nhật bằng tích độ dài hai cạnh của nó; trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất khi hai cạnh của nó bằng nhau (hay hình chữ nhật trở thành hình vuông).

Hoạt động này bao gồm nhiều phương diện khác nhau nhưng có thể cụ thể hoá thành ba tình huống sau:

Tinh huống 1. Xác định giá trị ra khi biết giá trị vào; xác định giá trị vào khi biết giá trị ra; nhận biết quy tắc tổng quát của một mối liên hệ (trong các trường hợp có thể) khi cho biết các cặp phần tử tương ứng của mối liên hệ đó (hay khi cho cặp giá trị vào và giá trị ra); nhận biết tính đơn trị của sự tương ứng.

Tinh huống 2. Đánh giá sự biến thiên mong muốn của giá trị ra khi thay đổi giá trị vào; thực hiện một sự biến thiên mong muốn đối với giá trị ra bằng cách thay đổi giá trị vào; dự đoán sự phụ thuộc.

Tinh huống 3. Phát triển và nghiên cứu những bất biến; những trường hợp đặc biệt và những trường hợp suy biến.

(3) *Hoạt động lợi dụng sự tương ứng*

Từ chỗ nghiên cứu, nắm được tính chất của một sự tương ứng có thể lợi dụng sự tương ứng đó vào một hoạt động nào đó. Chẳng hạn như lợi dụng việc khảo sát sự biến thiên của hàm số để tìm cực trị của hàm số, để giải và biện luận phương trình hay để chứng minh bất đẳng thức.

Ba loại hoạt động này gắn bó chặt chẽ với nhau, hoạt động trước là tiền đề cho hoạt động sau và hoạt động sau là mục đích, cơ sở hình thành hoạt động trước.

Vai trò và sự cần thiết phát triển tư duy hàm

Tư duy hàm được hiểu là sự nhận thức quá trình thay đổi, liên hệ, phụ thuộc lẫn nhau của các khái niệm và quan hệ toán học. Đó cũng chính là các tính chất đặc trưng, các biểu hiện cụ thể và sinh động của tư duy biện chứng. Ngược lại, tư duy biện chứng không phải lúc nào cũng là tư duy hàm, vì nó chỉ là quá trình xem xét vấn đề đặt ra trong mối quan hệ biện chứng, phụ thuộc lẫn nhau dựa trên những quy luật khách quan.

Tư duy hàm không tách rời tư duy logic, bởi lẽ đó là loại hình tư duy thay thế các hoạt động với sự vật có thực bằng sự vận dụng các khái niệm theo quy tắc, phương pháp của logic. Chính vì xuất phát từ bản chất, quy luật diễn đạt của khoa học toán học (dựa trên khoa học toán học và logic hình thức) nên nó trở thành công cụ hỗ trợ.

Tư duy hàm cũng không tách rời tư duy sáng tạo, vì trong tư duy hàm ta phải thiết lập các sự tương ứng, tự tạo ra những sự tương ứng dựa vào những cái đã có.

Tư duy hàm luôn gắn liền với tư duy thuật toán, vì tư duy thuật toán là năng lực có được thông qua quá trình làm việc trên một lớp đối tượng rào đó

theo một trình tự công việc xác định đã được xây dựng sẵn, hay bắn thân tự xây dựng được trong quá trình học tập, nghiên cứu và giải quyết các bài toán thuộc cùng một dạng, mà mỗi một thao tác tư duy hàm gồm 4 hoạt động: phát hiện → thiết lập → nghiên cứu → lợi dụng.

Ví dụ 2.18: Cho hai số nguyên x, y thoả mãn điều kiện: $P(x, y) = 0$. Hãy tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của biểu thức: $A = f(x, y)$.

Trí thức phương pháp tư duy hàm ẩn tàng sau bài này là:

1) Từ điều kiện: $\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, với $t \in \mathbb{Z}$.

2) Thay vào A , có $A = f(\varphi(t), \psi(t)) = g(t)$.

3) Lập bảng biến thiên của hàm số $g(t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

4) Căn cứ vào bảng biến thiên, chỉ hạn chế $t \in \mathbb{Z}$ sẽ tìm được $\max_{t \in \mathbb{Z}} g(t)$ và $\min_{t \in \mathbb{Z}} g(t)$.

Ở bước 1), 2) có sự tham gia của tư duy logic.

Ở bước 3), 4) có sự tham gia của tư duy thuật toán.

Tư duy hàm có vai trò quan trọng trong việc giáo dục toán học cho HS. Rèn luyện tư duy hàm là rèn luyện cho HS những khả năng, những hoạt động sau:

- Có khả năng xem xét, nhìn nhận các đối tượng toán học dưới con mắt động, nhìn trong sự vận động, biến đổi.

- Phát hiện được sự tương ứng hay những mối liên hệ giữa các đối tượng, sự kiện toán học trong sự vận động và biến đổi của chúng.

- Từ việc tìm hiểu rồi nghiên cứu được những tương ứng hay những mối liên hệ nào đó, ở mức độ cao hơn, có khả năng thể hiện (hay diễn đạt) được nội dung của các đối tượng, sự kiện toán học bằng ngôn ngữ hàm.

Trong quá trình dạy học, người GV có nhiều cơ hội bồi dưỡng tư duy hàm cho HS. GV biết cách khai thác sẽ giúp HS từng bước làm quen, tập dượt với tư duy hàm để khắc sâu những khái niệm, biểu tượng, công thức, tính chất của toán học, góp phần nâng cao chất lượng dạy học cho HS.

Đồng thời, khi HS học về hệ thống số, hàm số, phương trình và bất phương trình, các nội dung hình học, ... cũng góp phần phát triển tư duy hàm cho HS. Vì vậy, phát triển tư duy hàm cho HS vừa là mục đích dạy học, vừa là phương tiện dạy học để đạt được các mục đích dạy học đó.

Ví dụ 2.19: Giải phương trình: $2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2$. (1)

Ta thấy: $x^2 - x - (x-1) = (x-1)^2$

Nên phương trình (1) $\Leftrightarrow 2^{x-1} - 2^{x^2-x} = x^2 - x - (x-1)$

$$\Leftrightarrow 2^{x-1} + x - 1 = 2^{x^2-x} + x^2 - x \quad (2)$$

Đặt $\begin{cases} a = x - 1 \\ b = x^2 - x \end{cases}$

Khi đó phương trình (2) trở thành: $2^a + a = 2^b + b$.

Như vậy, ta đưa phương trình đã cho về dạng: $f(a) = f(b)$.

- Nghiên cứu những sự tương ứng nhằm phát hiện ra những tính chất của những mối liên hệ nào đó.

Sau khi đưa phương trình (1) về dạng $f(a) = f(b)$ ta xét hàm số: $f(t) = 2^t + t$, $\forall t \in \mathbb{R}$ để đánh giá sự biến thiên của nó.

Ta có: $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là đồng biến.

2.5. TƯ DUY PHÊ PHÁN

2.5.1. Một số quan niệm về tư duy phê phán

Theo X-cri-ven (Scriven, 1996), tư duy phê phán (critical thinking) là quá trình xây dựng khái niệm, vận dụng, phân tích, tổng hợp, và/hoặc đánh giá thông tin được thu thập hay sinh ra từ quan sát, kinh nghiệm, phản ánh, lập luận, hay giao tiếp, một cách tích cực, khéo léo, được thao luyện về mặt trí tuệ, như là một hướng dẫn cho niềm tin và hành động.". Còn theo An-giô-lô (Angelo, 1995, tr. 6), mô tả đặc trưng của tư duy phê phán như là "sự vận dụng có chủ ý các kỹ năng tư duy duy lí, ở bậc cao hơn, như: phân tích, tổng hợp, nhận biết vấn đề và giải quyết vấn đề, suy luận và đánh giá". Trong cuốn "Center for Critical Thinking" (1996b), "tư duy phê phán được hiểu là tư duy đang thẩm định chính mình theo cách như sau: (1) nhận ra những mặt mạnh và mặt yếu của nó, và do đó, (2) tổ chức lại tư duy trong hình thức đã được cải thiện".

Có lê định nghĩa của Bây-ơ (Beyer (1995, tr. 8)) là đơn giản nhất: "Tư duy phê phán, ... nghĩa là tạo ra các phán đoán có cơ sở". Về cơ bản, Bây-ơ xem tư duy phê phán là việc sử dụng các tiêu chí để phán đoán tính chất của điều gì, từ lúc thực hiện đến kết luận của một bài nghiên cứu. Thực chất, tư duy phê phán

là một phương cách được thao luyện của tư tưởng mà một người dùng để thẩm định tính hiệu lực của điều gì (các phát biểu, các tình tiết mới, các luận chứng, nghiên cứu,...).

Như vậy, có thể hiểu tư duy phê phán là quá trình vận dụng tích cực trí tuệ vào việc phân tích, tổng hợp, đánh giá sự việc, xu hướng, ý tưởng, giả thuyết từ sự quan sát, kinh nghiệm, chứng cứ, thông tin và lí lẽ nhằm mục đích xác định đúng – sai, tốt – xấu, hay – dở, hợp lí – không hợp lí, nên – không nên, và rút ra quyết định, cách ứng xử của mỗi cá nhân.

2.5.2. Đặc trưng của tư duy phê phán

Guay-dor (Wade (1995)) chỉ ra 8 đặc trưng của tư duy phê phán. Tư duy phê phán gồm: đặt các câu hỏi, xác định một vấn đề, khảo sát chứng cứ, phân tích các giả định và các định kiến, tránh lập luận cảm tính, tránh giản đơn hoá thái quá, suy xét các diễn giải khác và chấp nhận sự hàm hồ (Ambiguity, ở đây nên hiểu là trạng thái để mở của sự vật cho nhiều cách giải thích khác nhau về nó). Giải quyết sự hàm hồ được coi là một phần thiết yếu của tư duy phê phán, “sự hàm hồ và sự hoài nghi đều thực hiện một chức năng tư duy – phê phán và là một phần cần thiết, thậm chí là một phần sản sinh của quá trình” (Strohm & Baukus (1995), tr. 56).

Một đặc trưng khác của tư duy phê phán – được biết đến qua nhiều nguồn – là siêu nhận thức (metacognition). Siêu nhận thức là tư duy về tư duy của chính mình. Chính xác hơn, “siêu nhận thức là ý thức về tư duy của mình như là tư duy đang thực thi các nhiệm vụ riêng biệt, rồi dùng nhận thức này để kiểm soát những gì tư duy đang diễn ra.” (Jones & Ratcliff, 1993, tr. 10).

Trong cuốn sách “Tư duy Phê phán”, Beyer lí giải tì mỉ những gì ông xem là các khía cạnh thiết yếu của tư duy phê phán. Đó là:

- Các tâm thế disposition, một khái niệm của triết học, sinh lí học và tâm lí học dùng để chỉ một thói quen, một sự chuẩn bị, một trạng thái sẵn sàng, hay một xu hướng hành động theo một cách thức xác định. Những người tư duy phê phán đều hoài nghi, có óc cởi mở, đánh giá công minh, tôn trọng chứng cứ và lập luận, tôn trọng tính rõ ràng và chuẩn xác, xem xét các điểm nhìn khác nhau, và sẽ thay đổi các lập trường khi cơ sở hành động buộc họ phải làm như vậy.

- Các tiêu chí: Để tư duy một cách phê phán, cần phải áp dụng các tiêu chí. Cần có những điều kiện, và những điều kiện đó phải đáp ứng cho điều gì được

coi là có thể tin cậy. Cho dù người ta có thể luận chứng rằng mỗi lĩnh vực bộ môn có những tiêu chí khác nhau, thì vẫn có một số tiêu chí nào đó áp dụng cho tất cả các bộ môn. "... một khẳng định phải ... được dựa trên các sự kiện phù hợp và xác đáng; dựa trên các nguồn đáng tin cậy; chuẩn xác; không định kiến; tránh các ngụy luận logic; nhất quán về mặt logic và có cơ sở vững chắc." (tr. 12).

– Luận chứng: Là một phát biểu hay một mệnh đề bảo vệ chứng cứ. Tư duy phê phán bao hàm việc tìm hiểu, đánh giá và xây dựng các luận chứng.

– Lập luận: Năng lực rút ra một kết luận từ một hay nhiều tiền đề. Để làm điều đó đòi hỏi phải khảo sát các quan hệ logic của các phát biểu hay các dữ liệu.

– Điểm nhìn: Cách chúng ta nhìn thế giới, định hình sự kiện tạo của mình về ý nghĩa. Trong quá trình nhận thức, những người tư duy phê phán xem xét các hiện tượng từ nhiều điểm nhìn khác nhau.

– Các quy trình áp dụng các tiêu chí: Các kiểu hình tư duy khác đều sử dụng một quy trình chung. Tư duy phê phán sử dụng nhiều quy trình. Các quy trình này bao gồm việc đặt câu hỏi, tạo ra các phán đoán và nhận diện các giả thuyết.

2.5.3. Dạy học tư duy phê phán

HS là những người tiếp nhận thông tin thường có tính thụ động. Nhờ vào công nghệ, khối lượng lớn các thông tin có sẵn hiện nay là vô kể. Sự bùng nổ thông tin này có lẽ vẫn còn tiếp diễn trong tương lai. HS cần một hướng dẫn để chọn lọc toàn bộ thông tin và không phải tiếp nhận nó một cách thụ động. HS cần "phát triển và vận dụng có hiệu quả các kỹ năng tư duy phê phán vào các nghiên cứu học thuật của mình, vào các vấn đề phức tạp mà họ phải đối mặt, vào các lựa chọn có phê phán mà họ sẽ buộc phải thực hiện do có sự bùng nổ thông tin và những biến đổi công nghệ nhanh chóng khác" (Olivier & Utermohlen (1995), tr. 1).

Như đã trình bày, tư duy phê phán bao hàm việc tra vấn. Điều quan trọng là dạy cho HS làm thế nào để đặt những câu hỏi tốt, để tư duy một cách có phê phán, nhằm tiếp tục sự tiến bộ của chính các lĩnh vực mà chúng ta đang dạy. "Mọi lĩnh vực chỉ tồn tại trong chứng mực các câu hỏi được khơi mào và thực hiện một cách nghiêm túc (Center for Critical Thinking, 1996a).

Bay-o xem việc giảng dạy tư duy phê phán có tầm quan trọng đối với chính tình trạng của dân tộc. Ông luận chứng rằng để sống thành công trong một nền

dân chủ, mọi người phải có khả năng tư duy một cách có phê phán để đưa ra những quyết định có cơ sở về các công việc của bản thân và xã hội. Nếu HS học cách tư duy một cách có phê phán, thì họ có thể sử dụng tư duy tốt như là sách cẩm nang cho đời sống của mình.

Tư duy phê phán là một kỹ năng, trong đó người suy nghĩ chủ động hướng tới những vấn đề và tình huống phức tạp dựa trên những suy nghĩ, quan điểm và niềm tin của mình. Người này hoàn toàn có thể khiến chính những suy nghĩ, quan điểm và niềm tin của mình trở nên hợp lý và chính xác hơn bằng cách tự khám phá, đặt ra hàng loạt câu hỏi và tìm ra câu trả lời hay giải pháp cho chính những câu hỏi đó.

Nhìn chung, tư duy phê phán đòi hỏi cả kỹ năng lập luận lẫn kỹ năng giải quyết vấn đề (reasoning and problem solving). Trên thực tế, hai kỹ năng này bổ sung và cũng có thể thay thế cho nhau. Đi vào tìm hiểu một cách cụ thể, chúng ta sẽ thấy kỹ năng tư duy phê phán bao gồm những kỹ năng, chính xác hơn là những khả năng sau đây:

- Quan sát;
- Luôn luôn tò mò đặt câu hỏi và tìm những nguồn trả lời cần thiết cho mình;
- Luôn kiểm tra và tự thử thách những điều mình vốn tin, những quan điểm, suy nghĩ, những giả sử mà mình hay người khác đặt ra xem chúng có đúng sự thật không?;
- Nhận thức được và nêu ra được vấn đề;
- Đánh giá độ vững chắc của tư duy và lập luận;
- Dưa ra những quyết định sáng suốt và tìm ra được những giải pháp, những lời giải vững chắc;
- Hiểu về tư duy logic và logic nói chung.

Trong dạy học môn Toán ở phổ thông, việc rèn luyện và phát triển tư duy phê phán cho HS có vai trò quan trọng. Nó gắn liền với việc rèn luyện năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề, và liên quan mật thiết với tư duy sáng tạo. Thông qua việc đặt câu hỏi “tại sao?” (khi tìm hiểu về giả thiết của đề bài, khi đứng trước lời giải của bài toán,...), “lật ngược vấn đề”,..., người học sẽ được rèn luyện các đặc trưng của tư duy phê phán. Tư duy phê phán là nền tảng để phát triển tư duy độc lập, yếu tố không thể thiếu của sự thành đạt, khi con người thường xuyên đối diện với những vấn đề đa dạng phải giải quyết trong cuộc sống. Tư duy phê phán là bước đi thiết yếu dẫn đến tư duy sáng tạo. Phê phán

khách quan giúp ta có một cái nhìn tích cực tránh cái sai, cái xấu, cái lỗi thời và hướng đến cái mới tốt hơn, hoàn hảo hơn, có ích hơn trên con đường không ngừng sáng tạo. Tư duy phê phán cũng có quan hệ gần gũi với tư duy logic. Tư duy phê phán vận dụng cách nghĩ và lập luận logic với các kỹ năng như phân loại, so sánh, phân tích trình tự, nguyên nhân tác động, mô hình, theo phép diễn dịch, quy nạp, loại suy, tổng hợp, dự đoán, lập giả thuyết, đánh giá, ra quyết định, lập kế hoạch và giải quyết vấn đề. Tư duy phê phán là kiểu tư duy thường gặp của những người thành đạt và các nhà khoa học.

2.6. TU DUY SÁNG TẠO

2.6.1. Một số quan niệm về sáng tạo

Theo từ điển Tiếng Việt (Nguyễn Như Ý, 1999): “Sáng tạo là tìm ra cái mới, cách giải quyết cái mới, không bị gò bó, phụ thuộc vào những cái đã có (cái mới, cách giải quyết mới phải có ý nghĩa, có giá trị xã hội)”.

Theo Bách khoa toàn thư Xô-viết (1976) thì “sáng tạo là hoạt động của con người trên cơ sở các quy luật khách quan của thực tiễn, nhằm biến đổi thế giới tự nhiên, xã hội phù hợp với các mục đích và nhu cầu của con người. Sáng tạo là hoạt động được đặc trưng bởi tính không lặp lại, tính độc đáo và tính duy nhất.”.

Theo Viện sĩ Nguyễn Cảnh Toàn: “Người có óc sáng tạo là người có kinh nghiệm về phát hiện và giải quyết vấn đề đặt ra”.

Theo Đức Uy và các chuyên gia tâm lí học: “Sáng tạo là năng lực đáp ứng một cách thích đáng nhu cầu tồn tại theo lối mới, năng lực gây ra cái gì đó mới mẻ. Sự thích ứng như vậy, nếu có xu hướng nội tâm lí thì chủ yếu liên quan đến cảm giác, phát hiện sự nảy sinh những ý và nghĩa trong quá trình hình thành mục đích; nếu có xu hướng ngoại tâm lí thì mang hình thức của các cấu trúc mới, những quá trình hoặc sáng chế mới hoặc tiếp tục tồn tại. Cái mới có thể là chủ quan. Theo tính chất phân bố, các năng lực sáng tạo rất giống những biến số nhân cách thông thường. Theo lối kinh nghiệm, có thể hình dung một cách đơn giản, yếu tố mới của sáng tạo dưới dạng tam đoạn luận: sản phẩm, quá trình, nhân cách, trong đó nhân cách vừa là sản phẩm, vừa là quá trình; nghiên cứu sự sáng tạo cần gắn bó với vật lí học và khoa học tự nhiên; cần coi sáng tạo là một hình thức của tiến hoá, bao gồm cả sự sáng tạo bản thân, ở đấy sáng tạo là hình thức tiến hoá của ý thức.”.

Tư duy sáng tạo được hiểu là cách nghĩ mới về sự vật, hiện tượng, về mối liên hệ, suy nghĩ về cách giải quyết mới có ý nghĩa, giá trị.

Về mặt tâm lí học có thể xem những biểu hiện đặc trưng của hoạt động sáng tạo bao gồm:

- Thực hiện độc lập việc di chuyển các tri thức, kĩ năng, kĩ xảo sang tình huống mới gần hoặc xa, bên trong hay bên ngoài, hay giữa các hệ thống kiến thức.

- Nhìn thấy những nội dung mới trong tình huống bình thường.
- Nhìn thấy chức năng mới của đối tượng.
- Độc lập kết hợp các phương thức hoạt động đã biết, tạo thành cái mới.
- Nhìn thấy cấu trúc mới của đối tượng quen thuộc.
- Nhìn thấy mọi cách giải quyết vấn đề có thể có, tiến hành giải theo cách lựa chọn tối ưu.

- Xây dựng phương pháp mới về nguyên tắc, khác với những phương pháp quen thuộc.

* *Tính chất của tư duy sáng tạo*

- Tính mềm dẻo (flexibility): đặc trưng bởi khả năng dễ dàng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác.

- Tính nhuần nhuyễn (fluency) thể hiện ở việc sử dụng nhiều loại hình tư duy đa dạng trong phát hiện và giải quyết vấn đề.

- Tính độc đáo (originality): đặc trưng bởi khả năng tìm kiếm được kiến thức mới chưa ai biết, giải pháp tối ưu.

- Tính thăng hoa (elaboration): thể hiện ở sản phẩm tìm được mang tính phát triển, được ứng dụng rộng rãi.

* *Cơ sở của sự sáng tạo*

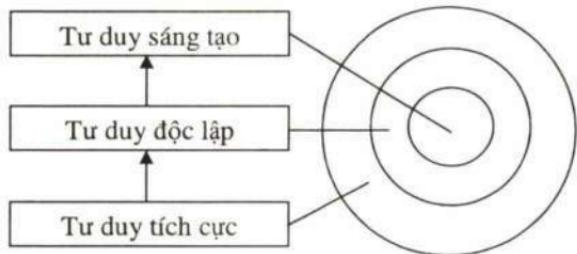
V.A. Ko-ru-tec-xki đã chỉ ra mối quan hệ giữa ba dạng tư duy, nói lên *điều kiện cần* của tư duy sáng tạo là tư duy độc lập và tư duy tích cực.

Ta có thể hình dung các mức độ tư duy trên ở HS như sau:

- Mức độ tư duy tích cực: HS chăm chú lắng nghe, cố gắng hiểu, tham gia nhiệt tình vào bài giảng.

- Mức độ tư duy độc lập: HS tự đọc, tự chứng minh các vấn đề được GV nêu ra, có thể là nghiên cứu gợi ý, thậm chí đưa ra đáp án.

– Mức độ tư duy sáng tạo: HS tự nêu ra, khám phá vấn đề. Bước đầu có thể theo được định hướng của GV.



Hình 2.6. Vòng tròn đồng tâm về quan hệ của tư duy sáng tạo, tư duy độc lập và tư duy tích cực (V.A. Ko-ru-tec-xki)

* *Quy luật của sự sáng tạo*

– “Quy luật quán tính của tư duy”: Khi con người đang quan tâm theo đuổi một ý nghĩ nào đó thì “luồng tư tưởng” có xu hướng tiếp diễn trong thời gian và không gian, đó chính là quy luật của sự sáng tạo.

– Muốn tư duy sáng tạo thì trước hết cần nắm được những quy luật khách quan của sự vật là đối tượng nghiên cứu.

– Tình cảm và xúc cảm là yếu tố quan trọng thúc đẩy con người sáng tạo.

– Các nhà khoa học nhấn mạnh cần có phương pháp sáng tạo, đó được coi là điều kiện đầu tiên, cơ bản nhất để sáng tạo.

– Phải có dụng cụ để làm việc.

– Biết làm việc một cách khoa học.

– Nhiệt tình hay lòng hăng say nghiên cứu.

– Cần có sự ủng hộ....

* *Những yếu tố hợp thành trong tư duy sáng tạo*

Phần này trình bày có tính liệt kê những phẩm chất, năng lực vốn có của bộ não.

– Tư duy là quá trình tâm lí không tách rời ngôn ngữ, hình thành bởi xã hội. Tư duy này sinh trên cơ sở hoạt động thực tiễn, từ nhận thức cảm tính và vượt ra ngoài phạm vi nhận thức cảm tính, bắt đầu khi nhận thức cảm tính bị bất lực.

– Sự tiếp thu của con người cũng có thể mang tính toàn bộ mà không phân nhỏ thành từng phần, cũng có thể mang tính phân tích. Trong một con người cụ thể, một trong hai cách trên có thể trội hơn. Cấu trúc đối tượng cho phép

người ta xây dựng mô hình đối tượng trong óc và việc xử lý thông tin trở nên thuận lợi hơn.

Những yếu tố hợp thành tư duy sáng tạo gồm:

- *Khả năng nhìn thấy sự khác lạ* phụ thuộc *tính nhạy bén* của tư duy.
- *Khả năng của trí nhớ* cho thông tin cần thiết vào thời điểm cần thiết được gọi là *tính sẵn sàng của trí nhớ*.

- *Phát ý tưởng*: khả năng kết hợp các thông tin thu được để tạo nên sự hiểu biết mới.

- *Khả năng liên tưởng*: giúp con người mở rộng phạm vi tìm kiếm, song nó được định hướng bởi vấn đề của tình huống.

- *Khả năng chuyển giao kinh nghiệm*: tách ra được cái đặc biệt của con người trong khi tìm kiếm các tình huống tương tự có trước.

- *Khả năng dễ dàng phát ý tưởng*.

- *Khả năng đánh giá ý tưởng*.

- *Tính linh hoạt của tư duy*.

- *Trí tưởng tượng*: là phẩm chất rất quan trọng trong tư duy sáng tạo. Người ta quy ước chia trí tưởng tượng thành ba loại: trí tưởng tượng logic đoán tương lai từ hiện tại nhờ các biến đổi logic; trí tưởng tượng phê phán tìm kiếm những cái chưa hoàn thiện, cần thay đổi cho tốt hơn; trí tưởng tượng sáng tạo đưa ra các ý tưởng mới mẻ về mặt nguyên tắc, chưa có hình mẫu trong thực tế nhưng dựa trên những yếu tố có thực.

- *Linh tính*: là kinh nghiệm không ý thức được.

- *Các nguồn kích thích sáng tạo*: chuỗi 5 mắt xích *muôn - xúc cảm - mong muôn* *tự nguyện - tư duy - hành động*.

Về mặt định tính, các yếu tố cấu thành quá trình suy nghĩ sáng tạo đều giống nhau ở mọi người, sự khác nhau có được là do sự tổ hợp khác nhau giữa các yếu tố. Tính độc đáo của tư duy sáng tạo là do sự tổ hợp của tính nhạy bén, tính linh hoạt, tính dễ dàng phát ý tưởng, khả năng liên tưởng xa, đó là sự cấu thành tài năng.

Trong khi nghiên cứu khả năng sáng tạo của con người, chúng ta cần chú ý đến *tinh ý tâm lí*. Nó thường đóng vai trò có hại. Nhiều bài toán giải được hay

không tuỳ thuộc vào việc có vượt được hay không thói quen tâm lí, tư duy, cách hiểu, cách tiếp cận, cách xử lí thông tin.

* *Những điều kiện nội tâm cho một sự sáng tạo xây dựng*

– Sự cởi mở đón nhận kinh nghiệm: Đây là điều ngược lại với sự phòng vệ tâm lí, khi phải bảo vệ sự phối hợp của bản ngã, một số kinh nghiệm nào đó bị ngăn cản, không được lọt vào tầm ý thức, ngoại trừ dưới hình thức méo mó; nó có nghĩa là sự uyển chuyển và dễ dàng qua lại giữa những quan điểm, niềm tin, nhận thức và giả thiết.

– Khả năng lượng giá từ bên trong: Điều kiện căn bản của sáng tạo là nguồn gốc hay vị trí của sự phán đoán lượng giá nằm trong nội tâm. Điều này có nghĩa là nền tảng của sự lượng giá nằm bên trong chính con người, trong phản ứng toàn thể con người đối với sản phẩm và cả sự tán thưởng nó.

– Khả năng thích ứng với những yếu tố và những quan điểm một cách linh hoạt, có khi phi lí, hồn nhiên: chính sự phi lí, hồn nhiên mà nảy sinh ra ánh sáng, cái nhìn sản phẩm một cách mới mẻ và có ý nghĩa.

* *Những điều kiện nuôi dưỡng sự sáng tạo xây dựng*

– Sự an toàn tâm lí: Điều này có thể tạo được từ ba diễn trình liên quan, đó là: chấp nhận cá nhân như một giá trị vô điều kiện; tạo nên một bầu không khí trong đó vắng mặt sự lượng giá từ bên ngoài; sự hiểu biết triệt để.

– Tự do tâm lí: Đó là sự cho phép được tự do, cũng có nghĩa là người đó chịu trách nhiệm; cá nhân được tự do để hăng say với một cuộc phiêu lưu mới; được tự do đàm nhận những hậu quả của những lỗi lầm của mình cũng như những thành đạt của mình; từ đó tạo ra điều kiện nội tại cho sự sáng tạo xây dựng.

2.6.2. Tư duy sáng tạo và trí tưởng tượng

Tưởng tượng là khả năng hình thành các hình ảnh, cảm giác, khái niệm trong tâm trí khi không nhận thức đối tượng đó thông qua thị giác, thính giác hoặc các giác quan khác. Tưởng tượng là công việc của tâm trí, giúp cung cấp ý nghĩa cho kinh nghiệm và tri thức, là cơ sở cho việc nhận thức thế giới, nó cũng đóng một vai trò quan trọng trong quá trình học tập. Tưởng tượng là khả năng mà qua đó chúng ta nhận thức thế giới. Những gì chúng ta sờ, nghe, thấy được, được tổng hợp bằng tưởng tượng để tạo ra một "bức tranh toàn cảnh". Tưởng tượng được coi là khả năng bẩm sinh.

Trí tưởng tượng cũng có thể được thể hiện qua những câu chuyện, chẳng hạn như truyện cổ tích hay hình ảnh tưởng tượng. Về việc sự tiến hóa khả năng tưởng tượng ở nhân loại, có một giả thuyết cho rằng: "Cơ sở của tiến hóa tưởng tượng là tưởng tượng cho phép ý thức có thể mô phỏng giải quyết vấn đề trong tâm trí".

Trẻ em rèn luyện trí tưởng tượng khi nghe kể chuyện hoặc trò chơi giả vờ. Trong trò chơi, trẻ em chơi với những gì chúng tạo ra bằng trí tưởng tượng, hoặc chơi trong một bối cảnh tưởng tượng mà chính chúng tạo ra hoặc đã tồn tại như thần thoại, truyền thuyết.

Các thống kê cho thấy hầu hết các phát minh nổi tiếng hoặc các sản phẩm giải trí được tạo ra từ cảm hứng của trí tưởng tượng của một người nào đó. Như vậy, trí tưởng tượng gắn liền với tư duy sáng tạo.

Trong các nghiên cứu của Howard Gardner (1998) đã cho thấy, trí tưởng tượng không gian là một loại hình trí thông minh, có quan hệ mật thiết với khả năng học hình học (xét trong phạm vi dạy học môn Toán) và năng lực sáng tạo.

2.6.3. Dạy học phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh

Sáng tạo là một trong những phẩm chất tư duy quan trọng nhất cần được rèn luyện cho HS (theo Hiệp hội Khoa học Kỹ thuật Hoa Kỳ thì kỹ năng quan trọng nhất trong 13 kỹ năng tư duy cần thiết của người lao động trong thế kỷ XXI là kỹ năng tư duy sáng tạo). Theo [18], có một số hướng bồi dưỡng tư duy sáng tạo cho HS như:

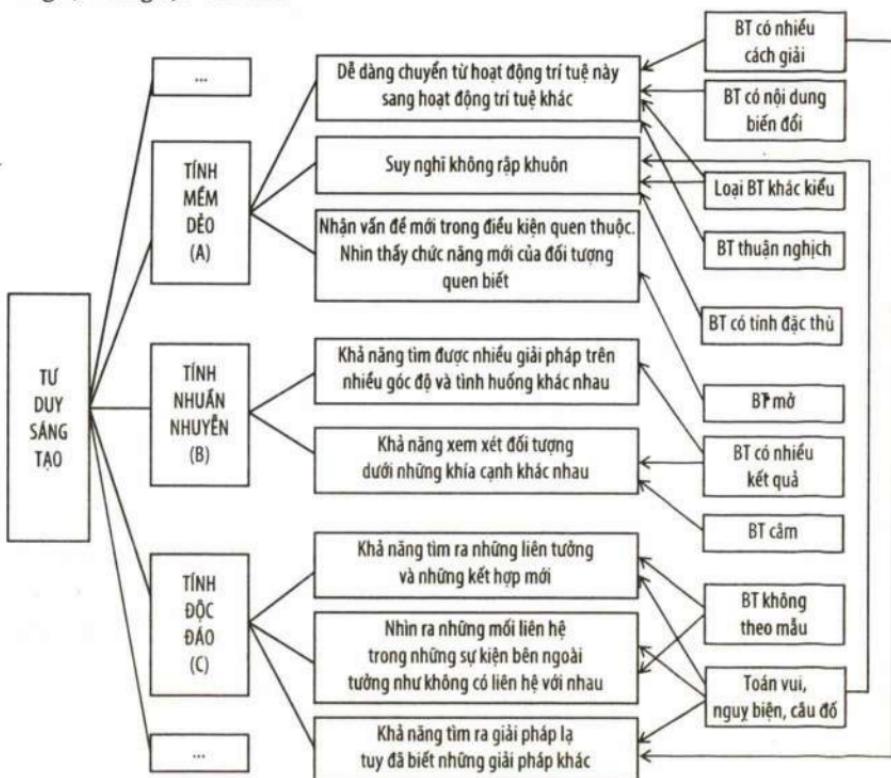
(1) Dạy học sáng tạo bằng cách bổ sung một hệ thống bài tập rèn luyện những phẩm chất của tư duy sáng tạo như độc lập, linh hoạt, nhuần nhuyễn,...

(2) Dạy học sáng tạo thông qua việc trang bị cho HS các phương tiện, các thủ pháp của hoạt động nhận thức (các kỹ năng học tập, các phương pháp nhận thức, các tri thức tổ chức hoạt động tư duy, các tri thức phương pháp).

(3) Dạy học giải quyết vấn đề.

Theo hướng thứ nhất (1), đã có nhiều kết quả nghiên cứu đáng chú ý như của PGS.TS. Tôn Thân, TS. Trần Luận,... Các nhà khoa học này đã đề xuất các biện pháp xây dựng hệ thống bài tập phong phú nhằm rèn luyện tính mềm dẻo, tính nhuần nhuyễn, tính độc đáo,... là những phẩm chất quan trọng trong cấu thành tư duy sáng tạo. Chẳng hạn, PGS.TS. Tôn Thân đã xây dựng hệ thống bài tập nhằm rèn luyện tính sáng tạo cho HS (xem hình 2.7). Trong sơ đồ đó,

bên phải là các kiểu bài toán nhằm rèn luyện những thuộc tính của các phẩm chất là cơ sở cho tính sáng tạo. Sử dụng sơ đồ này khi dạy học, GV coi đó là định hướng để lựa chọn kiểu bài tập phù hợp thì sẽ góp phần không nhỏ rèn luyện năng lực sáng tạo cho HS.

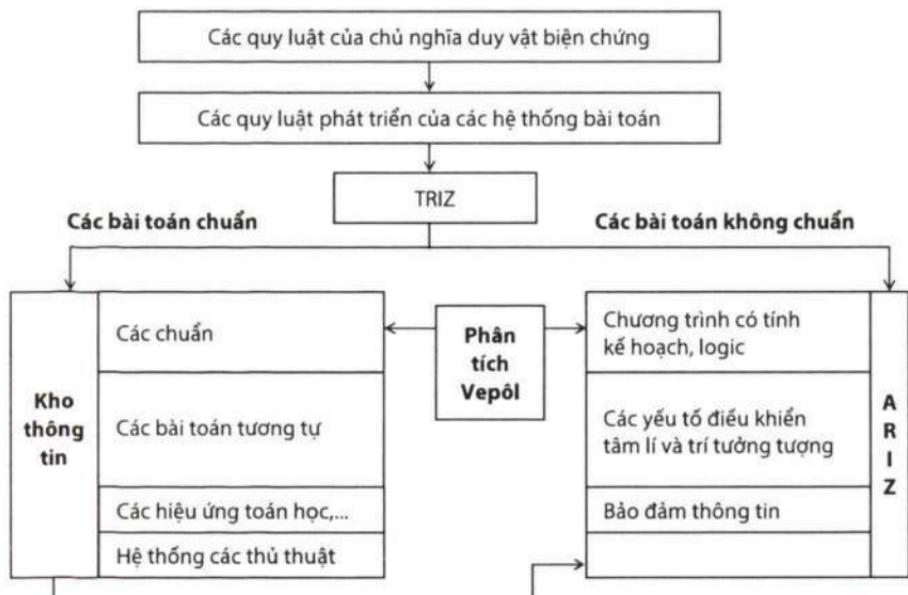


Hình 2.7. Sơ đồ hệ thống các bài toán rèn luyện tư duy sáng tạo cho HS của PGS.TS. Tôn Thân

Theo hướng (2) và (3) cũng đã có nhiều nhà khoa học quan tâm như: In.K Ba-ban-xki, D.V U-xo-va, Iu.K Xen-co, Ca-ba-no-va, I.X Ia-ki-man-xkai-a, GS.TSKH. Nguyễn Bá Kim,...

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu cách vận dụng các thủ thuật sáng tạo cơ bản để từ các bài toán gốc trong sách giáo khoa, chúng ta có thể có một chuỗi các bài tập mới, thú vị và làm tốt việc phân bậc hoạt động cũng như phát huy khả năng sáng tạo của HS. Công việc này kết hợp hướng (1) và hướng (2)

trong sự vận dụng hệ thống các thủ pháp đã được áp dụng thành công trong lĩnh vực khoa học kỹ thuật vào việc xây dựng hệ thống bài toán rèn luyện tư duy sáng tạo, thông qua đó trang bị cho HS một số thủ thuật sáng tạo nhất định. Số đó sau trình bày sự vận dụng sơ đồ TRIZ trong quá trình giải toán, đó là định hướng để GV xây dựng hệ thống bài tập và hướng dẫn HS giải toán nhờ ứng dụng các thủ thuật sáng tạo.



Hình 2.8. Sơ đồ ứng dụng TRIZ trong quá trình giải toán.

2.6.4. Một số thủ thuật sáng tạo cơ bản

Theo Phan Dũng, có 40 thủ thuật sáng tạo cơ bản, chúng thường được sử dụng trong sáng tạo khoa học kỹ thuật. Chúng có các ưu điểm sau:

- Có thể dạy và học, từ đó để luyện tập phát triển trí tưởng tượng.
- Nếu dùng các thủ thuật đúng nơi, đúng lúc, đúng cách thì suy nghĩ sẽ được định hướng, tiết kiệm thời gian giải bài toán.
- Có thể nhân sức mạnh của các thủ thuật bằng cách sử dụng tổ hợp các thủ thuật.
- Có thể mở rộng các thủ thuật sang các lĩnh vực khác nếu hiểu chúng một cách linh hoạt, khái quát cộng với trí tưởng tượng.

Toán học có đặc điểm là: Toán học nghiên cứu về các quan hệ số lượng, hình dạng và logic trong thế giới khách quan; Toán học có tính trừu tượng cao độ; Toán học có tính logic và tính thực nghiệm.

Những đặc điểm này cho thấy mối liên hệ biện chứng giữa Phương pháp luận sáng tạo khoa học kĩ thuật và môn Toán.

Sự giống nhau và khác nhau giữa bài toán kĩ thuật và bài toán giáo dục:

Giống: đều chứa tình huống có vấn đề đòi hỏi phải giải quyết một cách sáng tạo.

Khác: bài toán kĩ thuật quan tâm đến tiết kiệm chi phí sản xuất, thời gian, tính hiệu quả, kinh tế còn bài toán giáo dục quan tâm đến việc truyền thụ tri thức, phương pháp, phát triển tư duy và nhân cách.

Như vậy, phương pháp luận sáng tạo khoa học kĩ thuật có thể được áp dụng vào môn Toán ở cả hai khía cạnh: nghiên cứu và giảng dạy, đặc biệt là trong việc phát triển tư duy sáng tạo cho người học, đồng thời tăng cường các giải pháp dạy học sáng tạo.

Trên cơ sở phân tích đặc trưng của 40 thủ thuật sáng tạo, chúng tôi lựa chọn trình bày một số thủ thuật phù hợp với quá trình dạy học môn Toán.

2.6.4.1. Thủ thuật phân nhỏ

a. Nội dung

- Chia đối tượng thành các phần độc lập.
- Làm đối tượng trở nên tháo lắp được.
- Tăng mức độ phân nhỏ của đối tượng.

b. Nhận xét

- Từ đối tượng cần được hiểu theo nghĩa rộng, đó có thể là bất kì cái gì có thể phân nhỏ được.

- Thủ thuật này thường được sử dụng trong những trường hợp khó làm “trộn gói”, “một lần”.

- Tháo lắp làm đối tượng trở nên gọn gàng, theo đó trong trường hợp dạy học môn Toán đó là sự phân chia, cấu trúc nội dung dạy học để chúng có thể dễ dàng phát biểu thành các bài toán mới nhỏ - gọn - dễ dàng giải quyết hơn.

- Phân nhỏ có thể làm đối tượng có thêm những tính chất mới.
- Thủ thuật này có thể dùng kết hợp với các thủ thuật “tách khỏi – phẩm chất cục bộ”, “kết hợp”....

c. Ví dụ trong khoa học kỹ thuật

- Dây kim loại một sợi có khả năng phân nhỏ thành dây kim loại nhiều sợi.

- Để lên cao được cần có thang gồm nhiều bước nhỏ, có thể kết cấu cái thang thành nhiều phần tháo lắp, gấp lại được.

- Làm kính thiên văn ghép từ các kính nhỏ hơn để tăng độ lớn và dễ sản xuất...

d. Ví dụ trong dạy học môn Toán

- Thay vì nghiên cứu các hàm số phức tạp, người ta phân tích nó dưới dạng chuỗi (Fourier).

- Cấu tạo đề bài gồm nhiều câu hỏi nhỏ.

Ví dụ 2.20: Cho phương trình $(x - 1)(x + 2)(mx^2 - 2x + 1) = 0$. Thay vì câu hỏi giải và biện luận phương trình, ta có thể phân thành nhiều câu hỏi nhỏ như sau:

a. Giải phương trình khi $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm.

c. Tìm m để phương trình có ba nghiệm.

d. Tìm m để phương trình có số nghiệm nhiều nhất.

2.6.4.2. Thủ thuật tách khói – phẩm chất cục bộ

a. Nội dung

- Tách phần gây “phiền phức” hay ngược lại, tách phần duy nhất cần thiết ra khỏi đối tượng.

- Chuyển đổi tượng có cấu trúc đồng nhất thành không đồng nhất.

- Các phần khác nhau của đối tượng phải có chức năng khác nhau và phải ở trong những điều kiện thích hợp nhất đối với công việc.

- Kết hợp các đối tượng riêng lẻ để thành một hệ thống.

b. Nhận xét

- Đối tượng thông thường có nhiều phần, trong khi ta chỉ thực sự cần một trong những số đó.

- Do tách ra khỏi đối tượng mà phần tách ra hoặc giữ lại có thêm những tính chất, khả năng mới.

- Các đối tượng có thể phát triển theo khuynh hướng chuyên dụng hoá, đa dạng hoá so với nhau để phù hợp với môi trường, điều kiện làm việc.

– Các thủ thuật này phản ánh khuynh hướng của sự phát triển: từ đơn giản sang phức tạp, từ đơn điệu sang đa dạng.

– Tinh thần “cục bộ” có ý nghĩa lớn đối với việc nhận thức và xử lí thông tin: không phải tin tức nào cũng có giá trị như tin tức nào. Không thể có một cách tiếp cận, dùng chung cho mọi loại đối tượng.

c. Ví dụ trong khoa học kỹ thuật

– Trong các bộ phận của cái bàn, mặt bàn đóng vai trò quan trọng. Do yêu cầu của công việc, đời sống cần có những mặt bàn khác nhau về trang trí, nên trong trường hợp này khăn trải bàn chính là kết quả của việc “tách khỏi”.

– Việc thu thanh, tách lời, tách nhạc để hợp với từng trường hợp.

– Người ta đưa ra các kí hiệu khác nhau để phân biệt các đối tượng các nhau, như trên các tờ lịch, các vật dụng,...

– Để bảo quản, người ta thường làm lớp vỏ dày hơn, chất liệu đặc biệt hơn.

– Bút viết có nhiều ngòi.

d. Ví dụ trong dạy học môn Toán

Ví dụ 2.21: Cho hình tứ diện vuông OABC với góc tam diện O(ABC) vuông, các cạnh $OA = a$, $OB = b$, $OC = a + b$.

a. Chứng minh rằng tổng các góc phẳng ở đỉnh C bằng 90° .

b. Một mặt phẳng (P) đi qua O cắt CA, CB lần lượt ở A', B'. Xác định vị trí của (P) để chu vi của tam giác OA'B' nhỏ nhất.

Kết quả: Có thể giải bài toán bằng các cách sau:

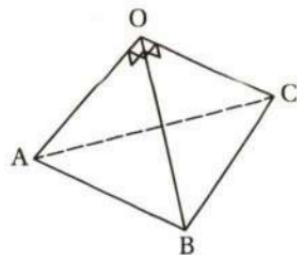
Cách 1:

a. Đặt $\widehat{OAC} = \alpha$, $\widehat{OCB} = \beta$, $\widehat{ACB} = \gamma$.

Ta dễ dàng chứng minh được:

$$\cos \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$$

(bằng cách áp dụng định lí cosin vào $\triangle ABC$ và các
giá trị lượng giác được tính từ $\triangle OCA$ và $\triangle OCB$)
 $\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.



Hình 2.9

Cách 2:

Trải các mặt OBC, OAC, OAB lên mp ABC, hình khai triển của tứ diện là lục giác BO₁CO₂AO₃B.

Trong đó: $\widehat{BO_1C} = \widehat{CO_2A} = \widehat{AO_3B} = 90^\circ$ và:
 $\widehat{O_2CO_1} = \widehat{O_2CA} + \widehat{ACB} + \widehat{BCO_1} = \alpha + \beta + \gamma$.

Dùng O'_3 đối xứng với O_3 qua trung trực của AB
 $\Rightarrow \widehat{O'_3BA} = \widehat{O_3BA} \Rightarrow \widehat{AO'_3B} = 90^\circ$, $O'_3B = a$, $O'_3A = b$.

Ta cũng chứng minh được: $A \in O_2O'_3$, $B \in O_1O'_3$.

$$\Rightarrow O'_3O_1 = O'_3O_2 = a + b = O_1C = O_2C$$

$\Rightarrow CO_1O'_3O_2$ là một hình bình hành

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ.$$

b. Sử dụng cách 2 ta có chu vi tam giác $\Delta OA'B'$ tạo thành đường gấp khúc $O_2A'B'O_1$.

Ta có: $OA' + A'B' + B'O = O_2A' + A'B' + B'O_1 \geq O_2O_1$.

Chu vi $OA'B'$ nhỏ nhất khi $A', B' \in O_1O_2 \Leftrightarrow (P)$ cắt (OAC), (OCB) theo các đường phân giác của góc \widehat{AOC} , \widehat{COB} .

2.6.4.3. Thủ thuật đối xứng - phản đối xứng

a. Nội dung

- Chuyển đổi tượng từ hình dạng đối xứng thành không đối xứng (giảm bậc đối xứng) và ngược lại.

b. Nhận xét

- Từ "hình dạng" phát biểu trong thủ thuật này cần được hiểu rộng, không chỉ thuần túy theo nghĩa hình học.

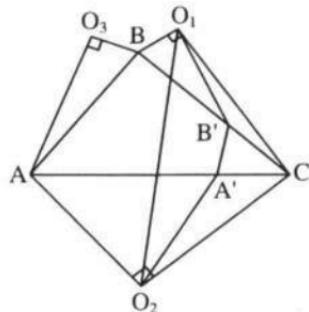
- Thủ thuật này khắc phục tính ù tám lì, có mục đích làm tăng tính tương hợp giữa các phân, các bộ phận của bài toán, giúp giải bài toán, mở rộng bài toán,...

c. Ví dụ trong khoa học kỹ thuật

- Sự tiến hoá của cái kéo: ban đầu có dạng đối xứng cao, sau đó hai lỗ xỏ các ngón ta có kích thước khác nhau, tiếp theo cả phần tay cầm nằm lệch hẳn một bên so với trục của cái kéo.

- Chỗ ngồi của lái xe ôtô không ở chính giữa mà ở bên phải hay bên trái tùy vào luật giao thông.

- Quần áo, tuỳ từng thời điểm người ta có những thiết kế, trang trí có tính đối xứng hay đối xứng,...



Hình 2.10

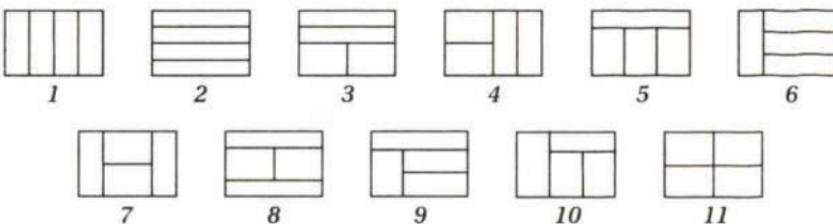
d. Ví dụ trong dạy học môn Toán

Mỗi nhóm chuẩn bị mỗi người một miếng bìa hình chữ nhật.

Ví dụ 2.22: Thực hiện chia miếng bìa hình chữ nhật thành bốn mảnh bìa hình chữ nhật có diện tích bằng nhau. Tìm tất cả các cách chia.

Kết quả:

Có 11 cách chia như sau:



Hình 2.11

Nhận xét các cách về tính đối xứng của nó ta có các kết quả sau:

- Hình chữ nhật kém bậc đối xứng so với hình vuông.
- Do tính chất của hình chữ nhật và bài toán ta thấy chỉ cần thực hiện việc cắt trên một cạnh rồi lấy đối xứng cho cạnh còn lại.

- 1 và 2 là hai hình thuộc một cặp đối xứng; 1 chia theo chiều dài, 2 chia theo chiều rộng.

- Tương tự ta thu được các cặp đối xứng 3 – 4; 5 – 6; 7 – 8; 9 – 10; 11 là hình tự đối xứng.

2.6.4.4. Thủ thuật chứa trong

a. Nội dung

- Một đối tượng được đặt bên trong đối tượng khác và bản thân nó lại chứa đối tượng thứ ba.

- Một đối tượng chuyển động xuyên suốt bên trong đối tượng khác.

b. Nhận xét

- “Chứa trong” cần hiểu theo nghĩa rộng không chỉ đơn thuần theo nghĩa không gian. Ví dụ khái niệm này nằm trong khái niệm khác, lí thuyết này nằm trong lí thuyết khác chung hơn, phương pháp này nằm trong phương pháp khác,...

- “Chứa trong” cũng chỉ ra hướng tận dụng những nguồn dự trữ có sẵn trong đối tượng.

- "Chứa trong" làm cho đối tượng có thêm những tính chất mới mà trước đây chưa có như: gọn hơn, tăng độ an toàn, bền vững, linh động hơn,...
- Thủ thuật này thường được dùng kết hợp với các thủ thuật phân nhỏ, tách khỏi, kết hợp.

c. Ví dụ trong khoa học kỹ thuật

- Loại thiếc hàn, được chế tạo dạng ống rỗng, bên trong chứa nhựa thông.
- Loại ăng-ten, dùng cho máy thu thanh, thu hình, khi cần có thể kéo dài hoặc thu ngắn nhờ những ống kim loại đặt bên trong nhau.
- Tủ đặt trong tường nhà.
- Loại cửa đóng mở chạy từ trong tường ra.
- Các đường hầm, vận chuyển vật liệu trong các đường ống,...

d. Ví dụ trong dạy học môn Toán

- Về cấu trúc chương trình, các kiến thức thường được đặt lồng trong nhau. Ví dụ nội dung hàm số chứa trong đó các hàm số cụ thể (đa thức, phân thức, mũ, lượng giác, logarit,...).

- Trong dạy học hình học, ta bắt gặp những hình tượng như đơn giản đến đẹp đẽ như hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông,...

Ví dụ 2.23: Xét một tính chất của hình thoi: "hai đường chéo vuông góc với nhau". Rõ ràng, một hình bình hành không phải hình thoi thì không có tính chất đó. Nhưng ở khía cạnh này hình thoi là một trường hợp riêng (khái niệm hình thoi chứa trong khái niệm hình bình hành) của hình bình hành. Hình bình hành tổng quát hơn hình thoi, phải chăng nó sẽ có những tính chất tổng quát mà "hai đường chéo vuông góc" chỉ là trường hợp đặc biệt mà thôi.

Suy nghĩ trên đây dẫn ta đến một vấn đề là: tìm những định lí mở rộng của tính chất "hai đường chéo vuông góc" của hình thoi – ta gọi tính chất này là tính chất A (theo Nguyễn Cảnh Toàn, 1999).

Ở góc độ thứ nhất, nhìn các đường chéo của hình thoi như các đường phân giác. Vấn đề đặt ra là: Hình bình hành tổng quát có các đường phân giác như thế nào? Từ đây sẽ tìm ra tính chất: Trong hình bình hành, giao điểm của bốn đường phân giác tạo nên bốn đỉnh của một hình chữ nhật. Nếu a, b ($a \geq b$) là hai cạnh của hình bình hành và ϕ là góc không tù của nó thì các cạnh của hình chữ nhật này là $(a - b)\cos\frac{\phi}{2}$ và $(a - b)\sin\frac{\phi}{2}$ (tính chất B).

Nhìn ở góc độ thứ hai: ta vẫn nhìn đường chéo hình thoi như đường chéo của hình bình hành và xem sự vuông góc như là một trường hợp đặc biệt của một góc bất kì nào đó. Vấn đề tổng quát này sinh ra: Trong hình bình hành, góc giữa hai đường chéo là bao nhiêu?

Nếu gọi góc nhọn tạo bởi hai đường chéo của hình bình hành là α và e, f là độ dài các đường chéo, khi đó ta có:

$$\cos \alpha = \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - b^2}{2\left(\frac{e}{2}\right)\left(\frac{f}{2}\right)} = \frac{e^2 + f^2 - 4b^2}{2ef}$$

$$\text{Nhưng } e^2 = a^2 + b^2 - 2abc \cos(180^\circ - \phi)$$

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2abc \cos \phi$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2) - 4a^2b^2 \cos^2 \phi}}$$

Từ đây ta có tính chất C: Hai đường chéo của một hình bình hành có hai cạnh là a, b ($a \geq b$) và góc không tù giữa hai cạnh kề là ϕ , thì hai đường chéo tạo với nhau một góc α và $\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2) - 4a^2b^2 \cos^2 \phi}}$. Rõ ràng A là trường hợp đặc biệt của C khi $a = b$.

Nhìn ở góc độ thứ ba: sự “vuông góc” của hai đường chéo như là sự thỏa mãn định lý Pi-ta-go trong một tam giác có một cạnh là cạnh hình thoi còn hai cạnh kia là hai nửa đường chéo. Trong trường hợp tổng quát của hình bình hành thì:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2abc \cos(180^\circ - \phi)$$

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2abc \cos \phi$$

$$\text{nên } e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Như thế ta có tính chất D: Trong một hình bình hành, tổng bình phương hai đường chéo bằng tổng bình phương bốn cạnh (*liệu đây có đúng cho trường hợp của một tứ giác bất kì hay không?*). Ta thấy rằng trường hợp này là trường hợp đặc biệt của tính chất D' sau đây: Trong một tứ giác, tổng bình phương bốn cạnh bằng tổng bình phương hai đường chéo cộng với bốn lần bình phương đường nối trung điểm hai đường chéo.

Với hình bình hành, hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vì thế, tính chất D chỉ là trường hợp riêng của D'.

Góc độ thứ tư: Nhìn sự vuông góc như sự triết tiêu hình chiếu vuông góc của đường chéo này (đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện) xuống đường chéo kia. Điều đó dẫn ta tới việc nghiên cứu xem các đường thẳng chiếu vuông góc hai đỉnh đối diện của một hình bình hành xuống đường chéo không đi qua hai đỉnh đó thì tạo nên một hình gì?

Từ đây ta có tính chất E: Trong một hình bình hành, các đường thẳng chiếu vuông góc hai cặp đỉnh đối diện xuống đường chéo không đi qua hai đỉnh đó tạo nên một hình bình hành có góc không tù giữa hai cạnh liên tiếp bằng góc không tù giữa hai đường chéo (của hình bình hành đã cho) và có hai chiều cao theo thứ tự bằng hình chiếu vuông góc của hai đường chéo này xuống đường chéo kia.

Tiếp tục ta có thể mở rộng tính chất này cho một tứ điểm bất kì.

2.6.4.5. Thủ thuật đảo ngược

a. Nội dung

- Thay vì hành động như yêu cầu bài toán, hành động ngược lại.
- Làm phản chuyển động của đối tượng thành đứng yên và ngược lại.
- Lật ngược đối tượng.

b. Nhận xét

- Hiện thực khách quan gồm các mặt đối lập. Trong một số hoàn cảnh nhất định, xét theo mối quan hệ, con người chỉ thích sử dụng một mặt vì nó đem lại ích lợi, không cho phép người ta thấy và sử dụng mặt đối lập còn lại.

- Việc xem xét khả năng lật ngược vấn đề, trên thực tế là sự xem xét “nửa kia” của hiện thực khách quan nhằm mục đích tăng tính bao quát, toàn diện, đầy đủ và khắc phục tính ì tâm lí.

- Làm ngược lại có thể cho đối tượng có thêm những tính chất, khả năng, chức năng mới.

c. Ví dụ trong khoa học kỹ thuật

- Loại băng chuyển chạy về một phía, người trên đó chạy về phía ngược lại, dùng để tập chạy trong nhà. So với người chạy bình thường, tại đó mặt đường đứng yên, người chạy, còn ở đây, người không chuyển động, mặt băng chuyển chạy.

- Nhiều công việc, chuyển từ thủ công sang cơ khí hoá, người ta làm ngược lại, như: nếu cưa gỗ bằng cưa tay thì gỗ đứng yên, cưa chạy; nếu cưa máy thì máy cưa đứng yên, gỗ chạy,...

- Trong đun nấu, thường thì truyền nhiệt từ ngoài vào, còn trong đun điện để đảm bảo an toàn và tiết kiệm thì bộ phận dẫn toả nhiệt lại được thiết kế bên trong ấm điện, nồi cơm điện.

- Ngày nay, việc mua hàng chuyển dần từ chỗ người mua hàng đến chỗ người bán hàng bằng việc người bán hàng mang hàng đến tận nhà cho người tiêu dùng.

d. Ví dụ trong dạy học môn Toán

- Trong dạy học, ta thường tìm cách phát biểu mệnh đề đảo để có những kết quả mới.

- Khi hướng dẫn HS giải bài toán, ta cũng thường sử dụng phương pháp phân tích ngược từ cuối.

- Loại bài tập mà ở đó cần các thao tác ngược nhau.

Ví dụ 2.24: Trong môn Toán ở Trung học cơ sở phổ biến dạng bài tập như:

a) Tính $7 + 6; -7 + (-6); -7 + 6; 7 + (-4)$.

b) Viết -7 dưới dạng tổng của hai số nguyên có trị tuyệt đối nhỏ hơn 10 .

- Trong dạy học các bài toán có tham số, ta thường khảo sát sự biến đổi của tham số dẫn đến sự thay đổi của kết quả bài toán, nhưng để tăng mức độ khó hoặc để rèn luyện tư duy mềm dẻo, linh hoạt, ta xây dựng các bài toán mà ở đó ta sẽ đi từ kết luận để tìm ra tham số.

Chẳng hạn, để giải bài toán: "Tìm m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 \geq 3 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 \leq \frac{m}{m-1} \end{cases}$$
 ta dùng phương pháp điều kiện cần và đủ:

Điều kiện cần:

Giả sử hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$. Tức là

$$\begin{cases} 5x_0^2 + 2x_0y_0 - y_0^2 \geq 3 \\ 2x_0^2 + 2x_0y_0 + y_0^2 \leq \frac{m}{m-1} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 5x_0^2 + 2x_0y_0 - y_0^2 \geq 3 \\ 2x_0^2 + 2x_0y_0 + y_0^2 \leq \frac{m}{m-1} \end{cases} \quad (2)$$

Nhân cả hai vế của (2) với -3 rồi cộng với (1) ta được:

$$\begin{aligned}-x_0^2 - 4x_0y_0 - 4y_0^2 &\geq 3 - \frac{3m}{m-1} \\ \Leftrightarrow -(x_0 + 2y_0)^2 &\geq -\frac{3}{m-1} \\ \Rightarrow -\frac{3}{m-1} &< 0 \text{ (do } (x_0 + 2y_0)^2 \geq 0 \text{) (do } m-1 \neq 0) \\ \Leftrightarrow m &> 1.\end{aligned}$$

Vậy điều kiện cần để hệ đã cho có nghiệm là $m > 1$.

Điều kiện đủ:

$$\text{Với } m > 1 \Rightarrow \frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} > 1, \forall m > 1.$$

$$\text{Lúc này xét hệ: } \begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 = 3 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Rõ ràng mọi nghiệm của hệ (*) đều là nghiệm của hệ đã cho.

$$\begin{aligned}\text{Hệ (*)} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 = 3 \\ -6x^2 - 6xy - 3y^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 = 3 \\ -(x+2y)^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{1}{5} \\ x = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy hệ (*) có nghiệm suy ra hệ đã cho có nghiệm.

Tóm lại: Với $m > 1$ thì hệ đã cho có nghiệm.

2.6.4.6. Thủ thuật quan hệ phản hồi

a. Nội dung

- Nếu đã có quan hệ phản hồi, hãy thay đổi nó.
- Thiết lập quan hệ phản hồi.

b. Nhận xét

- Khi thành lập quan hệ phản hồi cần chú ý tận dụng những nguồn dữ trữ có sẵn trong hệ để đưa ra cấu trúc tối ưu.

- Thủ thuật này phản ánh khuynh hướng phát triển nên rất có ích cho việc tiếp cận, dự báo, lựa chọn bài toán.

- Liên hệ với các thủ thuật kết hợp, chứa trong...

- Thủ thuật này cần được sử dụng cho chính người giải bài toán: thường xuyên rút kinh nghiệm dựa trên những tác động ngược lại, tự điều chỉnh để ngày càng tiến bộ, tránh mắc những sai lầm của chính mình và của người khác.

c. Ví dụ trong khoa học kỹ thuật

- Các loại rơ-le đóng ngắt tự động tuỳ theo nhiệt độ, cường độ dòng điện.

- Tên lửa tự tìm máy bay.

- Mối quan hệ giữa cung và cầu, tiền và hàng trong kinh tế,...

d. Ví dụ trong dạy học môn Toán

Ví dụ 2.25: Thiết lập bài toán mới trên cơ sở những bài toán trước đó.

Trong tam giác vuông ABC ta đã có các kết quả rất đẹp, như $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$;

hoặc $\cos^2 B + \cos^2 C = \sin^2 B + \sin^2 C = 1$ (h, b, c lần lượt là đường cao, độ dài các cạnh AC, AB). Từ đây ta có thể dẫn đến dự đoán các kết quả của một tứ diện có góc tam diện vuông như sau:

Tứ diện O.ABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. H là tâm hình chiếu của O lên (ABC). Chứng minh rằng:

a) Các góc của ΔABC nhọn.

b) $BC \perp (OAH)$.

c) H là trực tâm ΔABC .

d) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

e) α, β, γ là góc hợp bởi OA, OB, OC và mặt phẳng đáy. Chứng minh rằng $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$.

Hoặc ví dụ khác:

M là một điểm nằm trong góc xOy cho trước. Một đường thẳng Δ thay đổi qua M cắt Ox, Oy tại A và B. Tìm vị trí của Δ để tổng OA + OB đạt giá trị nhỏ nhất.

Chiều song song theo phương Oy, Ox cho ảnh của M trên Ox, Oy là X, Y suy ra X, Y cố định.

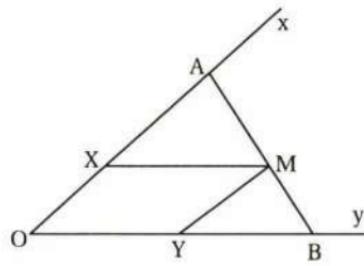
Áp dụng định lí Ta-let ta có:

$$\frac{OX}{OA} + \frac{OY}{OB} = \frac{MB}{AB} + \frac{MA}{AB} = 1.$$

Mặt khác:

$$OA + OB = OX \frac{OA}{OX} + OY \frac{OB}{OY}.$$

$$(OA + OB) = (OA + OB) \left(\frac{OX}{OA} + \frac{OY}{OB} \right)$$



Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki ta có:

$$\left(OX \frac{OA}{OX} + OY \frac{OB}{OY} \right) \left(\frac{OX}{OA} + \frac{OY}{OB} \right) \geq (\sqrt{OX} + \sqrt{OY})^2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{OX}}{OA} = \frac{\sqrt{OY}}{OB} \\ \frac{OX}{OA} + \frac{OY}{OB} = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được OA và OB từ đó suy ra vị trí của Δ .

Bài toán này đã áp dụng được kiến thức hình học và đại số, nhất là ta lại giải được bài toán cực trị một cách rất nhanh gọn, nhưng (hay nhất là) ta có thể áp dụng bài toán này để giải bài toán tương tự trong không gian, đó là:

Cho góc tam diện Oxyz, M là một điểm nằm trong góc tam diện, một mặt phẳng (P) thay đổi cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C. Tìm vị trí của (P) để: $OA + OB + OC$ là nhỏ nhất.

- Ví dụ về tìm mối liên hệ giữa các kiến thức.

Chẳng hạn ta xét bài toán sau: Trong mặt phẳng (Oxy) cho điểm $A(0;4)$ và hai đường tròn (I), (J) đi qua A , với $I(-2;0)$, $J(4;0)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A cắt hai đường tròn trên tại M và N sao cho $AM = AN$.

Ta có thể hướng dẫn HS thiết kế lời giải từ các kiến thức liên hệ với đường tròn và sự bằng nhau như: mối liên hệ giữa dây cung và khoảng cách từ tâm đến dây cung; phép đối xứng...

2.6.4.7. Thủ thuật kết hợp

a. Nội dung

- Kết hợp các đối tượng đồng nhất hoặc các đối tượng dùng trong cho các hoạt động kế cận.

b. Nhận xét

- "Kết hợp" ở đây không chỉ hiểu là gần nhau về mặt vị trí hay chức năng, mà nên hiểu là có quan hệ với nhau, bổ sung cho nhau. Do vậy có thể kết hợp các đối tượng ngược nhau.

- "Kết hợp" cần hiểu theo nghĩa rộng, không đơn thuần cộng thêm hay gắn thêm mà còn được hiểu là chuyển giao, đưa vào các ý tưởng, tính chất, chức năng mới,... từ những lĩnh vực hoặc những đối tượng khác.

- Thủ thuật kết hợp thường hay sử dụng với thủ thuật Phân nhỏ, Tách khỏi - Phẩm chất cục bộ,...

c. Ví dụ trong khoa học kỹ thuật

- Nhiều chìa khoá kết hợp thành chùm chìa khoá để tránh thất lạc.
- Bút kẻ khuông nhạc, bút có nhiều ngòi, nhiều màu,...
- Súng có nhiều nòng để thực hiện nhiều chức năng khác nhau..

d. Ví dụ trong dạy học môn Toán

Ví dụ 2.26: Kết hợp các câu hỏi nhỏ để được một bài toán lớn. Sử dụng kiến thức này để giải bài toán khác:

+) Có thể dùng đồ thị để giải bất phương trình sau: "Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} \geq m$ ".

Ta làm như sau:

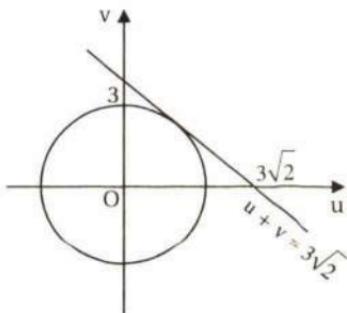
Đặt:

$$u = \sqrt{4-x} \Rightarrow u \geq 0$$

$$v = \sqrt{x+5} \Rightarrow v \geq 0$$

Bài toán trở thành:

Tìm m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} u+v \geq m \\ u^2 + v^2 = 9 \\ u, v \geq 0 \end{cases}$.



Hình 2.13

Từ hình vẽ, ta suy ra rằng: Hệ trên có nghiệm khi và chỉ khi nửa đường thẳng $u+v=m$ cắt đường tròn $u^2+v^2=9$ trong góc phần tư thứ nhất.

Do đường thẳng $u+v=m$ cắt Ou tại điểm có hoành độ m suy ra hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq m_0$, với m_0 thoả mãn đường thẳng $u+v=m_0$ tiếp xúc với đường tròn $u^2+v^2=9$ trong góc phần tư thứ nhất $\Rightarrow m_0=3\sqrt{2}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m \leq 3\sqrt{2}$.

+) Có thể dùng đồ thị để giải một hệ bất phương trình

Bài toán: "Tìm m để tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + (a+4)x + 4a \leq y & (1) \\ 3x + y - (2a+4) \leq 0 & (2) \end{cases}$

chứa đoạn $[-2; -1]$ của trục Ox".

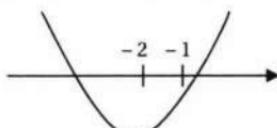
Ta giải bài toán như sau:

Tập nghiệm của hệ chứa $[-2; -1]$ của trục Ox khi và chỉ khi tập nghiệm của (1) và (2) đều phải chứa đoạn này.

Tập nghiệm của (1) là tập các điểm nằm trong parabol $y = f(x) = x^2 + (a+4)x + 4a$, kể cả biên.

Tập này chứa đoạn $[-2; -1]$ của trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) \leq 0 \\ f(-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2(a+4) + 4a \leq 0 \\ 1 - a - 4 + 4a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq 1$$



Hình 2.14

Tập nghiệm của (2) là nửa mặt phẳng. Tập này chứa đoạn $[-2; -1]$ của trục hoành khi và chỉ khi $(-2; 0)$ và $(-1; 0)$ thuộc nửa mặt phẳng này $\Leftrightarrow \begin{cases} -10 - 2a \leq 0 \\ -7 - 2a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq -\frac{7}{2}$.

Vậy với $-\frac{7}{2} \leq a \leq 1$ thì nghiệm của hệ đó cho thoả mãn điều kiện bài toán.

+) Có thể sử dụng kiến thức về tam thức bậc hai để chứng minh một bất đẳng thức về lượng giác trong tam giác.

Bài toán: "Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Ta giải bài toán như sau:

Đặt $T = 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 2 \sin^2 \frac{A}{2} + 1 = -2 \sin^2 \frac{A}{2} + 1 + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}$

Bây giờ ta xét điều kiện để phương trình bậc hai với $\sin \frac{A}{2}$:

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 + T = 0 \text{ có nghiệm.}$$

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của T là $\frac{3}{2}$, đạt được khi tam giác là tam giác đều.

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 2

Câu 1: Phân chia các khái niệm sau:

- a) Tứ diện vuông
- b) Hình chóp
- c) Hàm số liên tục
- d) Dãy số
- e) Điểm tới hạn

Câu 2: Sử dụng các phép suy xuôi, phép suy ngược tiến và phép suy ngược lùi để tìm các phương án chứng minh các mệnh đề dưới đây:

1) Với mọi $a, b, c > 0$ thì ta có: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

2) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \frac{27}{4} R^2$.

3) $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2} R$.

4) $m_a m_b m_c \leq \frac{27}{8} R^3$.

5) $\forall \Delta ABC$ thì: $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leq 2 \sqrt{\cos \frac{C}{2}}$.

(Trong các ý (2), (3), (4), (5): m_a , $\sin A$, $\cos A$, R lần lượt là trung tuyến, sin góc A , cosin góc A , bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC)

Câu 3: Hãy xây dựng thuật toán vẽ dạng sơ đồ mô tả thuật toán cho những dạng bài tập sau đây:

1) Giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$.

2) Giải phương trình lượng giác $a \sin x + b \cos x = c$.

3) Giải phương trình lượng giác $a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$.

4) Lập phương trình đường vuông góc chung giữa hai đường thẳng chéo nhau trong không gian.

Câu 4: Hãy xây dựng quy tắc tự thuật toán để giải những dạng toán dưới đây:

1) Xác định hình chiếu của một điểm A trên một mặt phẳng (P).

2) Xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau trong không gian.

3) Tìm điều kiện cần và đủ của tham số để một phương trình có nghiệm (có nghiệm duy nhất).

Câu 5: Phân tích khả năng phát triển tư duy hàm cho HS thông qua chủ đề phép biến hình.

Câu 6: Khai thác các tình huống, chủ đề sau để rèn luyện tính mềm dẻo, tính nhuần nhuyễn của tư duy cho HS:

1) Chứng minh công thức $S = p.r$ (Gợi ý: tìm các cách chứng minh khác nhau, tìm các công thức mới từ công thức này,...). (S , p , r lần lượt là diện tích, nửa chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác)

2) Dạy học về dãy số (Gợi ý: nêu các hình thức khác nhau dẫn đến khái niệm dãy số, các câu đố vui về dãy số, dãy kí tự, các dãy số đặc biệt).

3) Hãy tự tạo ra một tình huống, một chủ đề qua đó rèn luyện tư duy sáng tạo cho HS.

Chương 3

PHÁT TRIỂN TƯ DUY CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC MÔN TOÁN

“... *Tư duy tốt sẽ là điều kiện tiên quyết giúp học sinh trở thành những công dân tốt*”.

R.S. Nickerson.

Tư duy chính là khởi nguồn của hành động, hành động sẽ tạo ra thói quen, thói quen sẽ hình thành nhân cách. Như vậy, tư duy chính là yếu tố quyết định vận mệnh của con người. Những tri thức đạt được bằng tư duy sẽ bền vững và có giá trị tái tạo.

3.1. MỘT SỐ ĐỊNH HƯỚNG PHÁT TRIỂN TƯ DUY CHO HỌC SINH

Để phát triển tư duy cho HS, cần có những định hướng trong quá trình dạy học. Nhiệm vụ phát triển tư duy được lồng ghép trong khi thực hiện các nhiệm vụ trang bị tri thức, rèn luyện kỹ năng. Nhiệm vụ này cũng có thể coi vừa là phương tiện, vừa là mục đích của cả quá trình dạy học. Người GV cần hiểu rõ nhu cầu học tập của HS, từ đó có những điều chỉnh kịp thời. Hình dưới đây mô tả định hướng nhu cầu của HS trong quá trình học tập:



Hình 3.1. Mô hình nhu cầu của HS trong học tập

Dựa vào mô hình trên, có thể hình dung HS vừa cần được cung cấp tri thức, vừa được rèn luyện cách học, vừa cần được biết năng lực của mình để điều chỉnh kịp thời.

Về bản chất, việc HS học tốt cần được xuất phát từ việc thích học và được giúp đỡ kịp thời để phát triển. Công thức tạo động lực học cho HS được mô tả như sau:



Hình 3.2. Công thức tạo động lực học cho học sinh

Ngoài việc quan tâm đến những biểu hiện và biện pháp rèn luyện một số loại hình tư duy đặc thù của môn Toán thì những yếu tố mang tính quyết định để thực hiện nhiệm vụ phát triển tư duy cho HS là quan tâm đến: chương trình, nội dung, đặc biệt là phương pháp dạy học trong đó cụ thể là sử dụng các phương pháp kích thích tư duy (PPKTTD).

Trong dạy học môn Toán, để phát triển tư duy cho HS, cần quan tâm đến những định hướng sau:

- (1) Góp phần quan trọng vào việc phát triển năng lực trí tuệ, hình thành khả năng suy luận đặc trưng của toán học cần thiết cho cuộc sống.
- (2) Đảm bảo tính phù hợp với điều kiện cơ sở vật chất trường học, đặc điểm tâm – sinh lí của HS.
- (3) Kết hợp với dạy học phân hoá, dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề.
- (4) Gợi động cơ học tập, giúp việc học trở nên hấp dẫn, sử dụng PPKTTD như là giải pháp để việc học hiệu quả hơn.

3.2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KÍCH THÍCH TƯ DUY

Mục này điểm lại một số PPKTTD đã được sử dụng trong nhiều lĩnh vực (sáng chế, sản xuất, kinh doanh,...); từ đó, chỉ ra những liên hệ vận dụng những phương pháp này trong dạy học môn Toán bằng những minh họa cụ thể.

Trong thực tế, có nhiều nhà tâm lí, nhà sư phạm học đã quan tâm đến việc kích thích tư duy hay tích cực hoá hoạt động tư duy. Cùng với các công trình của các nhà khoa học này, khái niệm “PPKTTD”, “phương pháp tích cực” đã trở nên quen thuộc. Tuy nhiên, chưa có một định nghĩa chính thức về các khái niệm này. Điểm chung có thể nhận thấy trong các quan niệm về PPKTTD trong dạy học là để chỉ một hay một số phương pháp, thông qua việc tiến hành nó sẽ giúp con người trở nên linh hoạt và tích cực hơn với các đặc trưng:

a) Là phương pháp hướng vào phát huy tính tích cực hoạt động của người học, được tiến hành trên cơ sở kích thích nhu cầu, hứng thú nhận thức để họ tự giác, độc lập tiến hành các hoạt động tìm tòi, lĩnh hội tri thức, hình thành kỹ năng, kĩ xảo, áp dụng vào học tập, hoạt động, đời sống.

Trong dạy học, khi sử dụng PPKTTD, GV không đóng vai trò truyền thụ tri thức đơn thuần bằng thuyết trình, giảng giải mà tổ chức trang bị tri thức phương pháp, nhất là phương pháp tự học sáng tạo, thích ứng với năng lực của bản thân người học. Để làm được việc đó đòi hỏi lao động sư phạm của người GV rất công phu: cần tổ chức cho người học hoạt động, xử lý nhiều tình huống sư phạm phức tạp, từ đó tạo cho người học thói quen năng động trong học tập, tư duy sáng tạo, có óc phê phán, làm cho người học chủ động trong nắm chương trình, mục tiêu, nội dung và phương pháp học tập.

b) Là hệ phương pháp hướng vào phát triển năng lực tự học, tự nghiên cứu, tự tổ chức quá trình học tập, lao động của người học.

c) Khai thác tập thể người học như một môi trường và một phương tiện để dạy học. Người học tổ chức hoạt động trong tập thể với sự hợp tác chặt chẽ, thúc đẩy lẫn nhau. Người dạy sử dụng phương pháp để thiết kế bài dạy thành các tình huống dưới dạng bài tập nhận thức, tổ chức hoạt động dưới sự tích cực tư duy của cá nhân kết hợp sự hợp tác tập thể,..., có sự trợ giúp của khoa học và công nghệ.

Như vậy có thể viết: "*PPKTTD trong dạy học môn Toán được hiểu là phương pháp hướng tới việc kích thích nhu cầu, động cơ nhận thức của HS, thúc đẩy quá trình tư duy của HS trong quá trình lĩnh hội kiến thức, hình thành kỹ năng, kĩ xảo, tạo khả năng cho HS tự học và giải quyết vấn đề*".

a) Phương pháp dạy học tích cực (PPDHTC)

Theo Trần Bá Hoành (1996) trong bài Phương pháp tích cực – đăng trên tạp chí Nghiên cứu giáo dục số 3/1996 thì: Tính tích cực nhận thức là trạng thái hoạt động của HS đặc trưng ở khát vọng học tập, cố gắng trí tuệ và nghị lực cao trong quá trình nắm vững kiến thức. Ông cũng chỉ ra những đặc trưng của phương pháp tích cực bao gồm:

+)*Dạy học lấy HS làm trung tâm*, trong kiểu dạy này, người GV buộc phải coi trọng năng lực, trình độ, tính cách của mỗi học trò và có điều kiện để thực hiện cách dạy thích hợp với mỗi HS,... Theo hướng này đã ra đời các PPDH hợp tác (cooperative method) và hình thành quan điểm dạy học lấy HS làm

trung tâm. Theo PPDHTC, dạy học không chỉ đơn giản là cung cấp tri thức mà còn phải hướng dẫn hành động. Khả năng hành động là một yêu cầu đặt ra không phải chỉ đối với từng cá nhân mà cả ở cấp độ cộng đồng, địa phương và toàn xã hội. Chương trình giảng dạy phải giúp cho từng cá nhân người học biết hành động, tích cực tham gia các chương trình hành động của cộng đồng.

+)*Dạy học chú trọng việc rèn luyện phương pháp tự học*. Trong PPDHTC, việc rèn luyện phương pháp học tập cho HS không chỉ là một biện pháp nâng cao hiệu quả dạy học mà trở thành một mục tiêu dạy học, ngày nay được quan tâm và coi trọng. Trong một xã hội hiện đại đang phát triển nhanh với sự bùng nổ thông tin, khoa học và công nghệ phát triển như vũ bão thì việc dạy học không thể chỉ giới hạn ở dạy kiến thức mà phải chuyển mạnh sang dạy phương pháp học. Disterwerg đã viết: "Người thầy giáo tồi truyền đạt chân lí, người thầy giáo giỏi dạy cách tìm ra chân lí" [18]. Cốt lõi của phương pháp học tập là phương pháp tự học – cầu nối giữa học tập và nghiên cứu khoa học. Phương pháp tích cực đòi hỏi sự cố gắng trí tuệ và nghị lực cao. Năng lực và ý chí của HS trong một lớp không thể đồng nhất, vì vậy có sự phân hoá về cường độ và tiến độ hoàn thành các nhiệm vụ học tập, nhất là khi bài học được thiết kế thành một chuỗi những công tác độc lập dẫn tới hình thành một kiến thức mới. Tuy nhiên, trong học tập, không phải mọi tri thức, kỹ năng, thái độ đều có thể được hình thành bằng con đường giao tiếp tạo nên mối quan hệ hợp tác giữa các cá nhân trên con đường đi tới các mục tiêu học tập rèn luyện. Trong lối dạy học tích cực, giao tiếp thầy – trò là quan hệ hai chiều, nối lên quan hệ giao tiếp trò – trò. Thông qua hoạt động trong tập thể nhóm – lớp, các ý kiến, quan niệm của mỗi cá nhân được điều chỉnh và qua đó, người học nâng mình lên một trình độ mới.

+)*Dánh giá và tự đánh giá*: Trong phương pháp tích cực, theo hướng coi trọng vai trò chủ động của người học, coi việc rèn luyện phương pháp tự học để chuẩn bị cho HS năng lực tự học liên tục, suốt đời như một mục tiêu giáo dục thì GV phải hướng dẫn HS phát triển kỹ năng tự đánh giá để tự điều chỉnh cách học. Theo lí thuyết hệ thống, đối tượng đánh giá được đặt trong hệ thống, hệ thống con được đặt trong hệ thống lớn hơn. Việc xử lý các thông tin thu được có tính đến những mối quan hệ trong hệ thống để đưa ra những nhận định khách quan hơn và đề xuất những biện pháp. Với lí thuyết hoạt động, người ta tìm tòi những hình thức kiểm tra đánh giá thích hợp để thông qua hoạt động mỗi HS bộc lộ tiềm năng và trình độ thực chất về kiến thức kỹ năng thái độ theo yêu cầu của mục tiêu dạy học. Trong bài "Thực hiện dạy học tích cực như thế nào" đăng

trên Tạp chí Giáo dục – Số chuyên đề 6/2002, tác giả Trần Bá Hoành viết: “Phương pháp tích cực hướng tới việc hoạt động hoá, tích cực hoá hoạt động nhận thức của người học, nghĩa là tập trung vào phát huy tính tích cực của người học chứ không phải là tập trung vào phát huy tính tích cực của người dạy, dành rằng để dạy học theo phương pháp tích cực thì GV phải nỗ lực rất nhiều so với dạy học theo phương pháp thụ động. Muốn đổi mới cách học phải đổi mới cách dạy. Rõ ràng cách dạy chỉ đạo cách học, nhưng ngược lại, thói quen học tập của trò có ảnh hưởng tới cách dạy của thầy. Trong thực tiễn phải có sự hợp tác của thầy và trò, sự phối hợp hoạt động dạy với hoạt động học thì mới thành công. Muốn thực hiện dạy và học tích cực cần phát triển các phương pháp thực hành, các phương pháp trực quan theo kiểu tìm tòi từng phần hoặc nghiên cứu, phát hiện, nhất là khi dạy các môn khoa học thực nghiệm. Trong đổi mới phương pháp dạy học cần kế thừa, phát triển mặt tích cực trong hệ thống phương pháp dạy học đã quen thuộc, đồng thời phải học hỏi, vận dụng một số phương pháp dạy học phù hợp với hoàn cảnh, điều kiện dạy và học ở nước ta để từng bước tiến lên vững chắc”.

b) Về năng lực của người giáo viên

Theo A. V. Petrovski (dẫn theo Bùi Thị Mai Đông (2005), *Một số thành tố tâm lí trong năng lực dạy học của người GV tiểu học*, Luận án Tiến sĩ Tâm lí học, Viện Chiến lược và chương trình giáo dục, Hà Nội) phân chia năng lực sư phạm thành các nhóm:

- (1) Nhóm các năng lực dạy học.
- (2) Nhóm các năng lực thiết kế.
- (3) Nhóm các năng lực tri giác.
- (4) Nhóm các năng lực truyền đạt.
- (5) Nhóm các năng lực giao tiếp.
- (6) Nhóm các năng lực tổ chức.

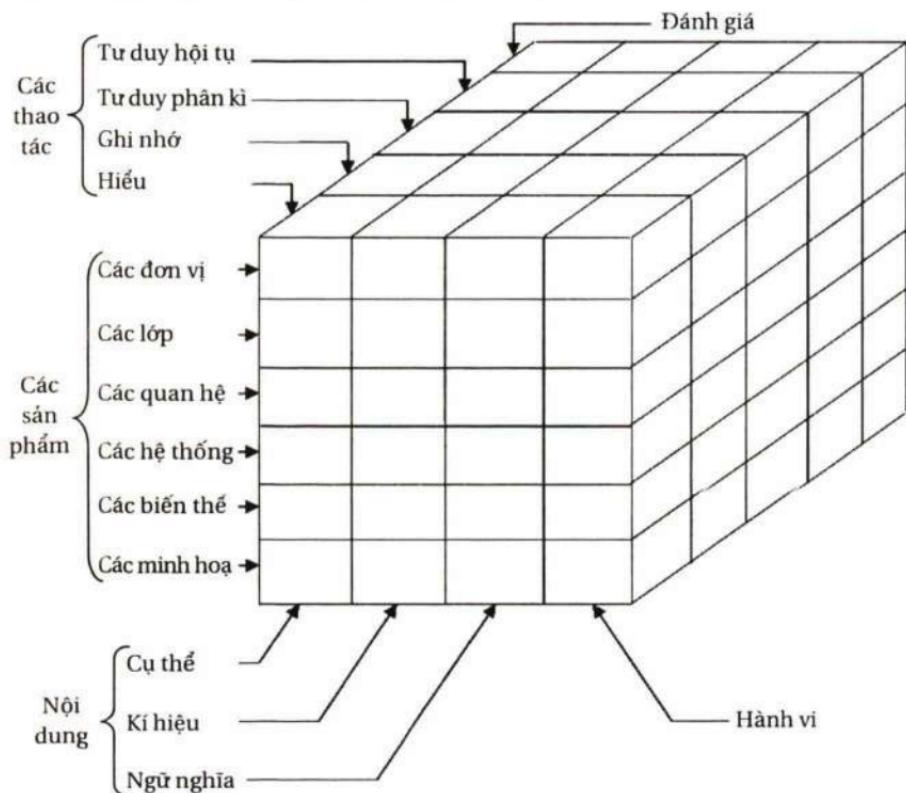
Ph.N. Gonoboline cho rằng những năng lực sư phạm điển hình của người GV trong hoạt động giảng dạy và giáo dục là:

- Năng lực hiểu HS.
- Năng lực truyền đạt tài liệu học tập.
- Năng lực thu hút HS.
- Năng lực tổ chức.

- Năng lực ứng xử súp phạm.
- Năng lực thuyết phục người khác.
- Năng lực thấy trước kết quả hoạt động của mình và những sai lầm khó khăn có thể xảy ra trong hoạt động ấy.
- Năng lực định hướng.
- Năng lực sáng tạo.
- Năng lực trí tuệ.

c) *Quan hệ giữa phương pháp dạy học và phương pháp kích thích tư duy*

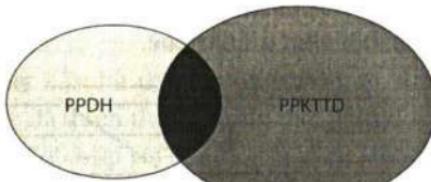
J. Guilford cũng đã nghiên cứu về các năng lực trí tuệ. Trong mô hình của ông, các tham số năng lực trí tuệ có sự quan hệ hữu cơ. Điều đó cho thấy, kích thích tư duy cũng sẽ đồng thời phát triển trí tuệ.



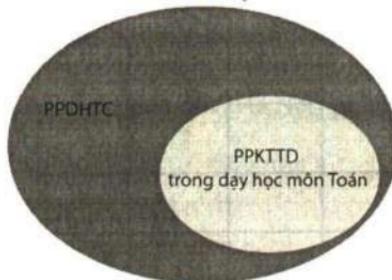
Hình 3.3. Mô hình tham số các năng lực trí tuệ của J. Guilford

Các nghiên cứu cũng cho thấy phương pháp dạy học có ảnh hưởng rất lớn đến việc phát triển tư duy của người học. Trước hết, với tư cách là cách thức tổ chức hoạt động, giao lưu của cả người dạy và người học, phương pháp dạy học quyết định sự hoạt động của người học, từ đó dạy người học cách học, cách tư duy, cách vận động trong đời sống. Ngoài ra, phương pháp dạy học cùng với tri thức, nhân cách, cách hoạt động của người dạy sẽ tạo điều kiện thuận lợi để những hoạt động trí tuệ, cũng như có thể tạo ra những kích thích tâm lí tích cực đến người học.

Có thể minh họa quan hệ giữa phương pháp dạy học và PPKTTD trong dạy học môn Toán thông qua sơ đồ sau:



Hình 3.4. Quan hệ giữa PPDH và PPKTTD nói chung



Hình 3.5. Quan hệ giữa PPDHTC và PPKTTD trong dạy học môn Toán

3.2.1. Nhóm phương pháp sử dụng hiệu quả của hình ảnh, sơ đồ, nhằm tăng cường khả năng tổ chức thông tin, năng lực biểu đạt tư duy

a) Về sử dụng sơ đồ trong biểu đạt tư duy

Thông thường, chúng ta tái lập suy nghĩ cũ dựa trên cơ sở những vấn đề tương tự đã gặp trong quá khứ. Khi đối diện với nhiều vấn đề, chúng ta tự hỏi: “Điều gì mà mình đã học trong cuộc sống, trường lớp hay công việc sẽ giải quyết được chuyện này?” [43]. Tiếp theo, chúng ta phân tích, lựa chọn cách tiếp cận

có triển vọng nhất dựa vào kinh nghiệm trong quá khứ, loại bỏ tất cả những khả năng khác, hành động theo hướng đã được xác định rõ ràng đó để giải quyết vấn đề. Chính do sự hiển nhiên hợp lý của từng bước dựa trên kinh nghiệm từ trước, chúng ta tự tin chắc chắn kết luận của mình là chính xác. Nhưng thực tế thì con người thường thất bại bởi những tư duy lặp lại theo lối mòn đó.

Trong thời kì Phục Hưng, sự bùng nổ sáng tạo gắn bó mật thiết với những ghi chép và truyền thụ khối lượng kiến thức đồ sộ bằng một ngôn ngữ khác, song song với chữ viết, đó là ngôn ngữ của tranh vẽ, đồ thị, biểu đồ với điển hình là Leonardo da Vinci, Galileo. Đường như, khi khả năng trình bày ngôn từ bị hạn chế ở mức tối thiểu, sáng tạo lại dựa con người phát triển khả năng nhìn và cảm nhận về không gian. Điều này cho phép họ thể hiện thông tin một cách linh hoạt theo nhiều chiều hướng khác nhau.

Ngôn ngữ hướng tâm trí chúng ta đến một cách tư duy nhất định. Để ví dụ, chúng ta hãy xem những khó khăn của các nhà vật lí học như Ernest Rutherford trong buổi đầu tiên của vật lí nguyên tử. Từ “nguyên tử” trong tiếng Hy Lạp có nghĩa là “không thể phân chia”. Quan điểm nguyên tử không phân chia được đã là cố định, khi các nhà Vật lí học bước ra khỏi vòng tròn tư duy ngôn từ và toán học sang vòng tròn tư duy hình tượng thì họ mới có thể chứng minh một cách sinh động nguyên tử là một đơn vị vật chất có thể chia nhỏ được.

Những cuốn sổ ghi chép của Einstein, Martha Graham, Leonardo da Vinci, Edison và Darwin đã gợi lên một trong những nguyên nhân cơ bản khiến họ đạt được những thành tựu to lớn. Đó là khả năng trình bày đối tượng của mình một cách trực quan bằng sơ đồ và bản đồ.[43]

Ví dụ tiếp theo, chúng ta hãy nhìn nhận vấn đề dưới dạng biểu đồ cũng như dưới dạng ngôn từ theo các bước: đầu tiên, viết cách trình bày vấn đề hoàn chỉnh nhất có thể; sau đó, bản đồ hoá nó bằng cách viết hoa vấn đề trung tâm của một tờ giấy và đóng khung nó; tự hỏi “Những đặc trưng và đặc điểm chính của vấn đề là gì?”; viết hoa tất cả những trả lời có tiềm năng bên trên các đường thẳng xuất phát từ vấn đề đó. Chúng ta có thể mở rộng suy nghĩ của mình bằng cách vạch ra những câu trả lời cho các câu hỏi. Nói cách khác, nếu X là câu trả lời cho câu hỏi đầu tiên – “Những đặc trưng và đặc điểm chính của vấn đề là gì?” – thì ta có thể tiếp tục đặt câu hỏi “Những đặc trưng và đặc điểm chính của X là gì?”. Bằng việc vẽ những vòng tròn xung quanh các câu hỏi có liên quan và nối chúng với nhau bằng một màu tương phản, bạn bắt đầu hình thành kết cấu của vấn đề trong nhận thức của mình. Sắp xếp những thông tin theo cách này

hướng bạn tìm những quan hệ và mối liên quan giữa các câu trả lời. Sau khi hoàn thành, hãy đặt những câu hỏi:

- Bản đồ có nâng cao hiểu biết của mình về vấn đề không?
- Minh có nhận ra bất cứ điều gì liên quan đến việc tiếp cận vấn đề không?
- Điều gì còn thiếu?
- Những khu vực nào còn mơ hồ?
- Minh đang nhìn thấy điều gì?
- Minh nên suy nghĩ về điều gì?

Trên thực tế, mọi người sau khi suy nghĩ về tất cả vấn đề, họ nhận ra rằng thật khó khăn khi muốn mô tả bất cứ điều gì xuất hiện trong đầu một cách sinh động nhất bằng ngôn từ. Suy nghĩ thuần tuý thì mạnh mẽ, linh hoạt và chủ động. Nó có động, vượt trước ngôn từ, khi nó được mở rộng dạng thức, có thể truyền đạt cho người khác thì nó đã mất đi tính chủ động, bay bổng và sáng tạo của mình.

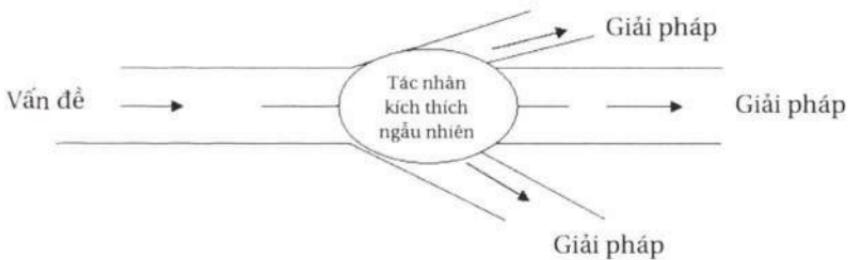
Một số chiến lược cho phép đưa ra một lượng lớn các ý tưởng độc đáo và các giải pháp sáng tạo cho vấn đề bằng cách gọi lên những mô hình tư duy khác nhau như:

- Kết hợp những sự vật theo các phương pháp mới lạ trong “tạo ra những kết hợp mới mẻ”.
- Sử dụng những tác nhân kích thích ngẫu nhiên trong “kết nối những ý tưởng rời rạc”.
- Suy nghĩ về những điều trái ngược trong “tìm kiếm trong những thế giới khác”.
- Chủ động tìm kiếm những khám phá ngẫu nhiên trong “tìm thấy cái bạn không định tìm kiếm”.

Hình 3.6 cho thấy mô hình tư duy thông thường, trong đó suy nghĩ chuyển từ một vấn đề tới một giải pháp theo đường thẳng. Đây chính là cách chúng ta được dạy về tư duy. Khi đối đầu với một vấn đề, chúng ta phân tích, lựa chọn cách tiếp cận có triển vọng nhất dựa trên những kinh nghiệm quá khứ trong cuộc sống, học tập và công việc, loại bỏ những hình thức tiếp cận khác và thực hiện theo phương hướng đã xác định rõ ràng tới một giải pháp như thường lệ.



Hình 3.6. Hình minh họa A



Hình 3.7. Hình minh họa B

Hình 3.7 cho thấy cách tư duy phá vỡ những hình mẫu tư duy thông thường như thế nào bằng việc giới thiệu những tác nhân kích thích ngẫu nhiên. Hoạt động này gợi lên những hình mẫu tư duy mới, dẫn đến sự hình thành những ý tưởng và khái niệm mới mà bạn không thể có được khi sử dụng cách thức tư duy thông thường [43]. Chẳng hạn, khi giải quyết bài toán tìm tham số để phương trình có nghiệm, nếu đi theo cách tư duy thông thường được mô phỏng ở hình 3.6 thì chúng ta chỉ tìm cách biến đổi tương đương nhằm tìm ra điều kiện của tham số, còn nếu chúng ta linh hoạt, với cách nhìn nhận khác về câu hỏi để nhận ra rằng, có thể xem xét nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của phương trình tương giao của hai đồ thị, hoặc dấu bằng của phương trình chính là điều kiện xảy ra dấu bằng của bất đẳng thức, của vị trí tới hạn về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức,... chắc chắn sẽ có nhiều giải pháp để giải quyết vấn đề hơn.

b) Biểu đồ hình xương cá

Theo [43], phương pháp này do GS. Kaoru Ishikawa của đại học Tokyo sáng chế (còn gọi là biểu đồ Ishikawa), là một phương pháp tổ chức và kiểm tra một cách trực quan tất cả những yếu tố có thể tác động đến tình huống đã có bằng việc tìm ra tất cả nguyên nhân gây ảnh hưởng.Ảnh hưởng là một kết quả mong muốn hoặc không mong muốn phát sinh từ một loạt nguyên nhân. Khi giảng dạy phương pháp này, người Nhật Bản thường coi khái niệm ảnh hưởng như là “một món cơm lí tưởng”.

Sử dụng biểu đồ hình xương cá:

- + Viết mục tiêu ở đầu cá, vẽ một đường thẳng kéo dài từ đầu sang trái (phải) tương tự xương sống cá.
- + Suy nghĩ những nhóm nguyên nhân chủ yếu, chúng trở thành xương sườn cá.

+) Những nguyên nhân thứ yếu được nhóm lại xung quanh nguyên nhân chủ yếu tạo nên xương cá.

+) Với mỗi nguyên nhân nhỏ, hãy hỏi “Chúng ta làm điều này như thế nào?”, sau đó ghi câu trả lời tại nhánh thích hợp của xương.

+) Khi tất cả các nguyên nhân được tìm ra và tập hợp lại vào những nhóm hợp lý, hãy suy nghĩ giải pháp và đặt những giải pháp đó vào vị trí thích hợp. Trong những buổi bàn luận ý kiến của nhóm, hãy viết vấn đề ở vị trí đầu cá trên một tờ giấy lớn dán trên tường và thực hiện tương tự các bước đã nêu.

Biểu đồ hình xương cá cho phép nhìn nhận được những liên hệ giữa nguyên nhân và ảnh hưởng, xem xét tất cả các bộ phận của vấn đề và nhận ra những phần cần nhiều số liệu và thông tin hơn. Nó cũng khởi động tiềm thức của mỗi người. Ishikawa đã diễn tả quá trình khi đồ thị hóa vấn đề và để tiềm thức nghiên ngẫm qua một đêm. Khi quay trở lại vấn đề đó, tiềm thức đã tưởng tượng ra những suy nghĩ và ý tưởng mới rất sáng tạo.

Trong dạy học môn Toán, ta có thể sử dụng biểu đồ này để phân tích các chiến lược giải quyết vấn đề, hệ thống hoá kiến thức, tổ chức hoạt động của nhóm,... (Xem ví dụ hình 3.18 trang 143)

c) Bản đồ tư duy

Bản đồ tư duy (Mind maps) được Tony Buzan, một nhà toán học, nhà tâm lý học người Anh xây dựng đã trở thành một công cụ hỗ trợ tư duy được hàng trăm triệu người trên thế giới sử dụng. Bản đồ tư duy là một hình thức ghi chép sử dụng màu sắc, hình ảnh để mở rộng và đào sâu các ý tưởng. Bản đồ tư duy có thể được coi là một kĩ thuật hình họa, với sự kết hợp giữa từ ngữ, hình ảnh, đường nét, màu sắc, tương thích với cấu trúc, hoạt động và chức năng của bộ não giúp con người khai phá tiềm năng vô tận của bộ não [5]. Chỉ với một tờ giấy trắng, bút màu hoặc một chiếc máy tính (nếu sử dụng phần mềm có sẵn, chẳng hạn với MindMapper 2008), chúng ta hoàn toàn có thể thiết lập được bản đồ tư duy với một hình ảnh trung tâm và các nhánh ý tưởng được toả ra. Tất cả các suy nghĩ, các giải pháp, các mục tiêu và cả những thắc mắc của chúng ta được phơi bày không phải chỉ là liệt kê mà chúng được liên kết với nhau và nhờ những hiệu ứng của màu sắc, hình ảnh đầy xúc cảm. Con người sẽ nâng cao khả năng tưởng tượng, kích thích trí não và sẽ tìm ra câu trả lời cho bản thân. Điều đó đã làm Bản đồ tư duy có những ưu điểm nhất định so với những dạng sơ đồ quen thuộc được sử dụng trong dạy học (sơ đồ Ven, sơ đồ khối, sơ đồ hình cây,...).

Người ta đã học cách ứng dụng thành công Bản đồ tư duy trong rất nhiều lĩnh vực khác nhau: lên kế hoạch, lập thời gian biểu, quản lí tiềm năng của cá nhân hoặc nhóm, tìm cách giải quyết vấn đề mới,... tất cả nhằm giải phóng sức sáng tạo, bắn lối và tiềm năng vô hạn của con người.



Hình 3.8. Minh họa về Bản đồ tư duy

Với hiệu quả của việc kết hợp màu sắc và cách tổ chức sơ đồ theo nhánh tựa như bộ não của Bản đồ tư duy, chúng ta có thể vận dụng biểu đồ này để vừa hệ thống hoá được kiến thức, vừa kích thích các giác quan, từ đó kích thích tư duy trong các hoạt động phát hiện và giải quyết vấn đề, tổ chức thông tin,... trong dạy học môn Toán.

3.2.2. Nhóm phương pháp tăng cường cảm xúc, phát triển tâm lí tích cực tư duy

Nhóm phương pháp này bao gồm các phương pháp như: đặt câu hỏi; nghe nhạc Baroc; thay đổi môi trường học tập, làm việc,... nhằm khơi dậy sự vui vẻ, tin cậy cho con người. Những phương pháp này đã được nhiều nhà sư phạm (chủ yếu ở Mĩ và một số nước Tây Âu) sử dụng thành công từ những năm cuối thế kỉ XX đến nay.

a) Phương pháp câu hỏi kiểm tra (Method of control questions)

Từ những năm 20 của thế kỉ XX, nhiều người đã đưa ra các loại danh sách câu hỏi nhằm mục đích giúp người giải một mặt dù sao đó vào hướng suy nghĩ quen thuộc mà quên đi những hướng có thể có khác; mặt khác, các câu hỏi kiểm tra còn cho những lời khuyên sử dụng các thủ thuật, các phương pháp, các gợi ý, các kinh nghiệm sáng tạo. Người giải bài toán, khi sử dụng phương pháp này, phải trả lời các câu hỏi có trong danh sách theo ngữ cảnh của bài toán [16].

Chẳng hạn, danh sách câu hỏi kiểm tra của A. Osborn đưa ra năm 1964 gồm hơn 20 câu.

Trong dạy học Toán, người ta quan tâm đến các câu hỏi kiểm tra của G. Polya (1945), bao gồm:

+) Hiểu cách đặt vấn đề của bài toán: Cái gì chưa biết? Cái gì đã biết? Có thể làm thoả mãn điều kiện của bài toán không? Điều kiện có đủ để xác định cái chưa biết không?

+) Lập kế hoạch giải: Trước đây bạn đã gặp bài toán này chưa? Dù ở dạng khác một chút/Bạn có biết bài toán “họ hàng” của bài toán này không? Bạn có biết định lí nào có ích trong trường hợp này không? Có cần đưa thêm yếu tố phụ nào không? Có cách phát biểu nào khác không? Hãy giữ lại một phần dữ kiện của bài toán, phần còn lại bỏ đi: cái chưa biết lúc đó ở mức độ xác định nào, nó thay đổi như thế nào? Bạn đã sử dụng hết các điều kiện chưa? Bạn đã thực sự chú ý tới các khái niệm cơ bản của bài toán chưa?....

+) Thực hiện kế hoạch giải (cần phải thực hiện đúng kế hoạch giải của bài toán): Khi thực hiện kế hoạch giải, bạn hãy kiểm tra từng bước đi của mình. Bạn có thấy rõ bước mà bạn vừa quyết định đúng hay không? Có thể chứng minh được điều đó không?....

+) Tổng kết (nghiên cứu lời giải nhận được): Có thể kiểm tra lại kết quả giải được không? Quá trình giải? Có thể nhận kết quả bằng cách khác được không? Có thể sử dụng kết quả, phương pháp của bài toán vào bài toán khác được không?....

b) Phương pháp đối tượng tiêu điểm (*Method offocal objects*)/16]

Phương pháp này được giáo sư trường Đại học tổng hợp Berlin F. Kunze đưa ra dưới dạng ban đầu với tên *phương pháp danh mục* vào năm 1926. Vào những năm 50 của thế kỉ trước, phương pháp này được nhà bác học Mĩ C. Whiting hoàn thiện thêm. Phương pháp phát ý tưởng nhờ việc chuyển giao những dấu hiệu, tính chất, chức năng,... (gọi chung là các dấu hiệu) của những đối tượng cần phải cải tiến (đối tượng tiêu điểm) gồm các bước sau:

- Bước 1: Chọn đối tượng tiêu điểm.

- Bước 2: Chọn từ 3 đến 4 đối tượng một cách tình cờ.

- Bước 3: Lập danh sách những dấu hiệu của những đối tượng chọn ở bước 2.

- Bước 4: Kết hợp những dấu hiệu nói trên với đối tượng tiêu điểm.

– Bước 5: Phát những ý tưởng dựa trên những kết hợp ở Bước 4 bằng sự liên tưởng tự do, không có bất kì sự hạn chế nào.

– Bước 6: Đánh giá những ý tưởng thu được và lựa chọn những ý tưởng có triển vọng khả thi. Phần này thường giao cho các chuyên viên thực hiện.

Phương pháp đối tượng tiêu điểm là phương pháp khá đơn giản, người ta có thể lĩnh hội sau vài ba lần luyện tập. Phương pháp này cho kết quả tốt khi cần phải tìm kiếm những biến thể của các phương pháp, kết cấu đã biết. Cũng có thể dùng phương pháp này để tập luyện phát triển trí tưởng tượng đối với mọi lứa tuổi.

Trong dạy học môn Toán, có thể vận dụng phương pháp này khi cần nghiên cứu những hình thức tổ chức dạy học mới, những khái niệm mới (theo con đường suy diễn), xem xét quan hệ giữa các đối tượng toán học,...

c) *Phương pháp tự xây dựng chiến lược học tập hiệu quả* hay còn gọi là “*phương pháp học tập siêu đẳng*”

Phương pháp này được nhiều học giả uy tín như: Adam Khoo, Tony Buzan, Michael Simpson,... đề cập tới trong giai đoạn cuối thế kỉ XX, đầu thế kỉ XXI (trong khuôn khổ giáo trình này, chúng tôi chỉ xin trình bày những gì liên quan đến học tập). Các tác giả này đều đưa ra một hệ thống các lời khuyên hay còn gọi là các chiến lược để thành công. Điểm giống nhau trong các nghiên cứu này là đều rất đề cao sự tự tin, sự hợp tác và chia sẻ. Nghiên cứu cho thấy, con người đã thành công và sẽ thành công nếu biết chọn động cơ hợp lí, tự tin và kiên định mục tiêu. Chúng ta có thể tham khảo “Chín bước học tập hiệu quả” của Adam Khoo (một doanh nhân, một nhà giáo dục thành đạt ở Singapore – người đã từng có thành tích học tập tối tệ và vươn lên nhờ phương pháp học tập tốt)[16]:

- (1) Xác định mục tiêu rõ ràng.
- (2) Lên kế hoạch cụ thể và sắp xếp thời gian.
- (3) Hành động kiên định.
- (4) Chọn phương pháp học để nắm bắt thông tin (chẳng hạn bằng Bản đồ tư duy).
- (5) Ghi chú bằng sơ đồ.
- (6) Chọn cách nhớ siêu đẳng (chẳng hạn nhớ bảng số, viết tắt, kí hiệu).
- (7) Ứng dụng ngay lí thuyết vào cuộc sống.
- (8) Tăng tốc trong kì thi.
- (9) Đi thi với chiến lược hợp lí.

Để thực hiện tốt chiến lược trên đây, tác giả luôn nhấn mạnh rằng cần phải tận dụng tốt thời gian, bộ não và khả năng làm chủ, luôn luôn lạc quan và tin tưởng vào bản thân. Và để tự tin, thì cách tốt nhất là học tập các tấm gương và nhắc nhở bản thân về các thành tích đã đạt được và mục tiêu tốt đẹp phía trước sẽ tạo động cơ phấn đấu.

Trong dạy học môn Toán, chúng ta có thể giới thiệu phương pháp này cho HS như là những lời khuyên cho việc tìm một phương pháp học tập hiệu quả.

3.2.3. Nhóm phương pháp tăng cường năng lực hợp tác tư duy

a) Phương pháp tập kích não – phương pháp não công (Brainstorming method)

Tập kích não là phương pháp kích thích tâm lí phổ biến nhất, được nhà kinh doanh người Mĩ Alex Osborn đề xuất vào năm 1939. Năm 1919, A. Osborn tham gia nhóm "Bruce, Baxton" thành lập tổ chức quảng cáo "Beton, Baxton, Durtxki và Osborn". Bốn quyển sách ông viết trong lĩnh vực sáng tạo đã được tái bản 26 lần (tính đến năm 1993). Ông khẳng định rằng, thành công của ông dựa vào việc phát minh ra phương pháp tạo cho mình khả năng nghĩ ra nhiều ý tưởng hơn [16].

Đã từ lâu, người ta nhận thấy phê bình và sự sợ phê bình là trở ngại đáng kể trong quá trình tư duy sáng tạo. Mọi ý tưởng mới có thể tỏ ra không đúng đắn nếu tác giả của nó sợ phê bình. Trong trường hợp đó, nhiều ý tưởng tiềm tàng tốt sẽ bị mất đi. Đó chính là xuất phát để Osborn đưa ra phương pháp tập kích não.

Khả năng áp dụng phương pháp này trong thực tiễn cần tuân theo các quy tắc sau đây:

- Vấn đề được giải quyết tuần tự bởi hai nhóm người gồm từ 6 – 10 người mỗi nhóm, mỗi nhóm chỉ đưa ra các tư tưởng khác nhau – đó là nhóm "những người phát sinh", nhóm này "tập kích" vấn đề trong một thời gian nhất định. Sau cuộc "tập kích" đó, nhóm còn lại thảo luận về những giá trị của các ý tưởng đã được đưa ra – đó là "những người kiểm nghiệm". Vì thế, nên đưa vào nhóm thứ nhất những người có thiên hướng tưởng tượng và đưa vào nhóm thứ hai những người có thiên hướng phân tích.

- Cần đưa ra mọi tư tưởng, kể cả viễn tưởng, rõ ràng sai và hài hước. Càng viễn tưởng, càng không thực tiễn thì càng ánh hưởng mạnh tới quá trình phát sinh chúng. Trí tuệ tập thể cần phải làm phát sinh chuỗi liên tục các ý tưởng.

– Trong quá trình phát sinh ý tưởng, cấm tuyệt đối sự phê bình (không chỉ phê bình bằng lời mà ngay cả bằng sự im lặng – thái độ nghi ngờ). Trong quá trình tập kích, giữa những người tham gia phải có mối quan hệ thiện chí, phải làm sao để ý tưởng của mỗi người được những người khác quan tâm, phát triển. Nên mời tham gia vào nhóm những người ở ngành nghề và trình độ khác nhau, không nên đưa vào nhóm những người có thể cản trở nhau dù ở bất kì mức độ nào.

– Xét nghiệm và lựa chọn tư tưởng cần được tiến hành cẩn thận. Khi đánh giá, cần xem xét kĩ các tư tưởng, kể cả những tư tưởng bị coi là không nghiêm túc, không thực tiễn hoặc vô lí.

– Quá trình giải quyết vấn đề do một nhóm trưởng nắm vững mọi điều kiện và quy tắc của phương pháp điều khiển. Nhóm trưởng điều khiển mà không ra lệnh, không phê phán, cần đưa ra những câu hỏi, những gợi ý, hoặc xác minh lại vấn đề, không để thảo luận gián đoạn, hoặc tiến hành thảo luận theo diễn tiến logic.

– Nếu quá trình không được giải quyết trong tiến trình “tập kích” thì cần lặp lại quá trình giải, tuy nhiên nên làm với nhóm khác.

Sau khi ra đời, trong vòng 10 – 15 năm, phương pháp não công được ca ngợi, thậm chí được coi là phương pháp vạn năng để giải các bài toán sáng tạo. Nhưng thực tế sử dụng cho thấy, phương pháp này cũng như các PPKTTD khác có những hạn chế nhất định. Đó là không thể dùng nó vào những bài toán khó đòi hỏi chuyên môn sâu. Người ta đã tìm cách cải tiến, kết quả thu được khoảng 15 biến thể của phương pháp này như: não công ngược, não công cá nhân, não công hai người, não công hai kí, não công theo giai đoạn,... Hiện nay phương pháp này được sử dụng để giải bài toán không đòi hỏi độ chính xác cao hoặc quá sâu về chuyên môn, thuộc các vấn đề lập dự án, thiết kế, các bài toán kinh tế, tổ chức quảng cáo,...

Trong dạy học môn Toán, chúng ta có thể dùng phương pháp này để tổ chức học tập theo nhóm, vừa huy động trí tuệ tập thể, vừa kích thích tư duy cá nhân.

b) Phương pháp làm việc theo nhóm hợp tác – dạy học hợp tác

PPDH hợp tác bao hàm cả về phương pháp dạy của thầy và phương pháp học của trò. Nếu xét từ góc độ GV với hoạt động dạy học, người ta thường nói “dạy học hợp tác”, còn nếu xét từ góc độ người học sẽ là “học tập hợp tác”. Thông thường, trong các tài liệu lí luận dạy học phương Tây, do xuất phát từ

quan điểm dạy học lấy người học với hoạt động học là trung tâm thì khái niệm “học tập hợp tác” được dùng khá phổ biến. (Dẫn theo Nguyễn Thị Phương (2005), *Về phương pháp dạy học hợp tác*, Tạp chí khoa học Trường ĐHSP Hà Nội, số 3, tr 26 – 30).

Theo David W. Johnson và Roger T. Johnson và Holubec (1990) (dẫn theo Johnson D & Johnson R, (1991), *Learning together and Alone: Cooperative, Competitive and Individualistic learning*, 3rd, Edition Prentice Hall, Englewood Clift, New Jersey 07632): Học tập hợp tác là toàn bộ những hoạt động học tập mà HS thực hiện cùng nhau trong các nhóm, trong hoặc ngoài phạm vi lớp học. Có 5 đặc điểm quan trọng nhất mà mỗi giờ học hợp tác phải đảm bảo được là: sự phụ thuộc lẫn nhau một cách tích cực; ý thức trách nhiệm của mỗi cá nhân; sự tác động qua lại; các năng lực xã hội và đánh giá nhóm. Theo J. Cooper và các tác giả khác (1990): Học tập hợp tác là một chiến lược học tập có cấu trúc, có chỉ dẫn một cách có hệ thống, được thực hiện cùng nhau trong các nhóm nhỏ, nhằm đạt được nhiệm vụ chung.

Hai anh em David W. Johnson và Roger T. Johnson đã đưa ra quan điểm rằng khi nghiên cứu đưa ra một PPDH, người ta cần phải quan tâm đến cấu trúc mục tiêu, quá trình học tập và kết quả dạy học. Hai ông đã đứng trên quan điểm triết học với sự tồn tại khách quan của các quy luật sống còn trong xã hội loài người để đưa ra tính tất yếu của việc sử dụng PPDH hợp tác. Khi đó, PPDH hợp tác được coi như là cách thức để phát triển sự phụ thuộc lẫn nhau tích cực giữa các mối quan hệ người – người nhằm đạt được mục tiêu xã hội là loài người ngày càng phát triển theo chiều hướng tốt đẹp.

Cũng có nhiều ý kiến bàn luận về ý nghĩa, vai trò của học hợp tác: Theo D. Johnson và R. Johnson (1983): Nơi nào thực sự áp dụng học hợp tác, nơi đó HS học được nhiều hơn, nhà trường dường như tốt hơn, HS thân thiện với nhau hơn, tự trọng hơn và học các kĩ năng xã hội có hiệu quả hơn. Theo tài liệu John H. Johnansen (1993), *American education: An introduction to teaching*, WCB Brown & Bechmark: Trong mỗi lớp học, GV có thể xây dựng bài học sao cho HS làm việc một cách hợp tác trong các nhóm nhỏ, bảo đảm mọi thành viên nắm vững tài liệu được giao; gắn với một cuộc đua tranh thắng thua xem ai nhất; làm việc một cách độc lập với mục tiêu học tập riêng, với bước đi và nhịp độ riêng nhằm đạt các tiêu chí được đặt ra từ trước ở mức độ xuất sắc. Theo Francis Parker: “Các thúc đẩy mạnh mẽ việc học tập cũng như dạng hoạt động khác là

tinh thần giúp đỡ lẫn nhau". Dạy học hợp tác là một chiến lược dạy học nhằm nâng cao chất lượng cuộc sống, trong đó, các thành viên tham gia hoạt động và học tập cùng nhau trong những nhóm nhỏ và giữa các nhóm với nhau nhằm mục đích phát triển sự hiểu biết và rèn luyện phong cách sống cho HS⁽¹⁾.

Để đạt được thành tích trong học tập, các HS cần cùng nhau tìm kiếm và khai thác thông tin. Việc học tập hợp tác sẽ giúp HS làm được điều đó. Chúng ta vẫn thường nói: Học tập thành công, rèn luyện thành công. "Thành công" có thể coi là động cơ của tất cả mọi người. Trong học tập hợp tác, khả năng thành công và ý nghĩa của thành công lớn hơn rất nhiều, bởi vì HS thực sự coi thành công như một phần thưởng tinh thần bên trong hơn là phần thưởng bên ngoài cho thành tích đạt được. Người tham gia học tập hợp tác có khuynh hướng vươn lên theo động lực nội tại của mình, vì vậy mà sự xuất hiện xúc cảm, tình cảm tích cực sẽ mạnh hơn các hình thức học cá nhân và học tranh đua (dẫn theo J.D. Mayer – P. Salovey (1993), *The Intelligence of emotional intelligence*, America, có thể nói rằng: dạy học hợp tác là một phương pháp dạy học tích cực, có "tính xã hội cao" và phát huy được tối đa mục tiêu đặt ra đối với người học). Trong thực tiễn, đã có nhiều công trình nghiên cứu áp dụng phương pháp này trong dạy học môn Toán. Khi kết hợp phương pháp này với các PPKTTD khác chắc chắn sẽ đạt được hiệu quả cao hơn.

c) Phương pháp Synectics – phương pháp sử dụng các phép tương tự

Phương pháp này được giới thiệu bởi W. Gordon lần đầu năm 1952. Từ Synectics theo gốc Hy Lạp cổ có nghĩa là "kết hợp các yếu tố không đồng nhất" [16].

Synectics được triển khai dựa trên phương pháp não công, tận dụng hai khả năng: tạo ra không chỉ một phương pháp mà cả tập hợp các phương pháp – các phép tương tự, các nhóm này khác nhau ở chỗ chúng là những nhóm chuyên nghiệp, được huấn luyện đặc biệt và dần dần tích lũy kinh nghiệm cần thiết về phương pháp luận giải các bài toán sáng chế.

Theo W. Gordon, quá trình sáng tạo là quá trình nhận thức được và có thể hoàn thiện bằng cách rút kinh nghiệm và luyện tập thường xuyên. Ông cho rằng có hai loại cơ chế sáng tạo: không thể điều khiển như linh tính, trực giác, ngẫu hứng,... và điều khiển được như sử dụng các thủ thuật, các phép tương tự. Ông nhấn mạnh sự cần thiết dạy và học cơ chế điều khiển được, để nâng cao

⁽¹⁾ M.N. Edina, (1989), *Cooperation and Competition: Theory and research*.

hiệu quả sáng tạo, tạo điều kiện thuận lợi cho cơ chế không điều khiển được phát huy tác dụng. Phương pháp này có nhiều điểm tương đồng với “tương tự hoá” đã được sử dụng trong dạy học môn Toán. Chúng ta có thể vận dụng phương pháp này không những trong khai thác bài toán mà còn trong việc tổ chức hoạt động cho nhóm.

3.2.4. Nhóm phương pháp sử dụng thủ thuật sáng tạo của khoa học kĩ thuật

Lí thuyết giải các bài toán sáng chế, gọi tắt là TRIZ được công bố lần đầu năm 1956 tại Liên Xô cũ bởi Giáo sư G. Altshuller, sau này phát triển thành một trường phái trên toàn thế giới chuyên nghiên cứu về các thuật giải trong lĩnh vực sáng tạo. Ngày nay, hội nghị nghiên cứu về TRIZ được tổ chức hàng năm với quy mô quốc tế, là mối quan tâm lớn của các nhà nghiên cứu của tất cả các nước phát triển. Các kết quả mà TRIZ quốc tế thu được giúp cho thế giới có hàng ngàn phát minh, cải tiến mỗi năm, tạo ra bước chuyển lớn cho nền kinh tế và phương pháp lao động [16].

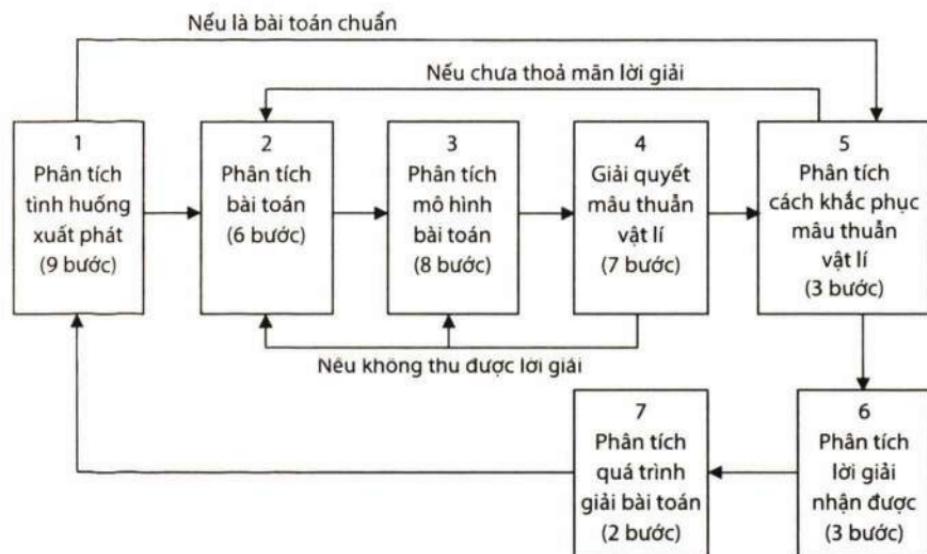
Ở Việt Nam, TRIZ được giới thiệu bởi GS. Phan Dũng, Giám đốc Trung tâm sáng tạo khoa học kĩ thuật, trực thuộc Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh và kĩ sư Dương Xuân Bảo thuộc Trung tâm hỗ trợ sáng tạo Khoa học và Công nghệ Quốc gia từ những năm cuối thế kỉ XX. Đến nay, có khoảng hơn 10.000 người theo học các lớp dạy về Phương pháp luận sáng tạo.

Cơ sở lí luận của TRIZ dựa trên các kết quả nghiên cứu về tư duy sáng tạo của tâm lí học, các nguyên lí, các quy luật của triết học duy vật biện chứng. Các quy luật của phép biện chứng duy vật được sử dụng đó là: *Quy luật chuyển những thay đổi về lượng thành những thay đổi về chất và ngược lại; Quy luật phủ định của phủ định; Quy luật thống nhất và đấu tranh của các mặt đối lập.*

Những quy luật trên trong kĩ thuật thể hiện thành những quy luật cụ thể được gọi là *Các quy luật phát triển của các hệ thống kĩ thuật*. Các quy luật này được dùng làm nền tảng lí luận của TRIZ, giúp xây dựng cơ chế định hướng trong tư duy sáng tạo. Những quy luật phát triển của các hệ kĩ thuật được phát hiện dựa trên việc phân tích khối lượng rất lớn thông tin về những sáng chế, phát minh (patent) đã được công nhận và theo dõi logic phát triển của những hệ thống này. TRIZ được xây dựng như là khoa học chính xác, có lĩnh vực nghiên cứu riêng, các phương pháp, ngôn ngữ và các công cụ riêng.

Khi dùng TRIZ để giải bài toán kĩ thuật cụ thể, dựa theo sự phân loại của lí thuyết này, bài toán có thể được coi là bài toán chuẩn hay không chuẩn. Nếu bài toán thuộc loại chuẩn, ta có thể sử dụng ngay kho thông tin của TRIZ để tìm lời giải. Kho thông tin gồm có: *các chuẩn; các bài toán tương tự; các chỉ dẫn sử dụng; hệ thống các thủ thuật, các biến đổi cơ bản khắc phục các mâu thuẫn*. Nếu bài toán không chuẩn, người giải phải sử dụng “Algôrit giải các bài toán sáng chế” (viết tắt theo tiếng Nga là ARIZ – từ Algôrit được hiểu theo nghĩa rộng chỉ có tính định hướng [16]). ARIZ là chương trình có định hướng, được kế hoạch hoá nhằm tổ chức hợp lí và có hiệu quả quá trình tư duy sáng tạo của người giải. Nó kết hợp và phát huy những mặt mạnh của bốn yếu tố: logic, tâm lí, kiến thức và trí tưởng tượng. Kho thông tin của TRIZ hỗ trợ đắc lực cho việc sử dụng ARIZ.

TRIZ có phương pháp phân tích và cách diễn đạt những biến đổi hệ thống kĩ thuật của mình như: *Phân tích chất trường* hay *Phân tích Vêpôl*. Phân tích Vêpôl là cầu nối giữa ARIZ và các chuẩn [16].



Hình 3.9. Sơ đồ khối ARIZ-85

Người ta đã xây dựng một hệ thống 40 thủ thuật nhằm giúp con người dễ dàng sáng tạo hơn, với các ưu điểm như:

- Có thể dạy và học, từ đó để luyện tập phát triển trí tưởng tượng.
- Nếu dùng các thủ thuật đúng nơi, đúng lúc, đúng cách thì suy nghĩ sẽ được định hướng, tiết kiệm thời gian giải bài toán.
 - Có thể nhân súc mạnh của các thủ thuật bằng cách sử dụng tổ hợp các thủ thuật.
 - Có thể mở rộng các thủ thuật sang các lĩnh vực khác nếu hiểu chúng một cách linh hoạt, khái quát cộng với trí tưởng tượng.

Bài toán giáo dục và Bài toán kỹ thuật đều có đặc điểm chung là chứa các vấn đề. Trong dạy học môn Toán, chúng ta có thể vận dụng phương pháp này nhằm rèn luyện các thủ thuật sáng tạo như: thủ thuật phân nhỏ, thủ thuật tách khỏi – phẩm chất cục bộ, thủ thuật kết hợp, thủ thuật đổi xứng – phản đối xứng..., xây dựng hệ thống bài toán rèn tính linh hoạt, sáng tạo cho HS.

Một hệ thống bài toán có thể vận hành theo phương pháp này cần đảm bảo được các yêu cầu sau:

- Hệ thống bài toán phải bao gồm kiến thức cơ sở (được hiểu là các khái niệm, công thức, định lí, các bài toán mẫu), các hướng phát triển liên kết với các bài toán khác.
 - Bất kì bài toán nào cũng được xây dựng, phân chia trên cơ sở một tư tưởng về mối liên hệ nhất định. Ví dụ: có thể xây dựng hệ bài tập về phương trình bậc hai theo tư tưởng: bài tập về giải phương trình ứng dụng trực tiếp công thức nghiệm, nhẩm nghiệm, có tham số ở hệ số thứ hai, thứ ba, có tham số ở hệ số thứ nhất,...
 - Điều kiện cần để cho một hệ bài toán có tính giáo dục, có khả năng áp dụng về mặt nguyên tắc, phải có sự tương hợp giữa các phần của hệ, thường thi theo các thông số sau: phân bậc các bài toán có thuật giải, phân bậc về số ẩn, phân bậc về mức độ tích hợp các kiến thức, các bài toán trong hệ phải có mối liên hệ: thường thì bài này sẽ là cơ sở, gợi ý cho bài sau,...

- Các bài toán của hệ ban đầu ở mức độ vi mô (nhằm ứng dụng duy nhất kiến thức cơ sở) sau đó chuyển dần sang vĩ mô (tích hợp với các kiến thức khác).

- Dần dần, để nâng cao hiệu quả tự học, hệ bài toán hướng tới tính điều khiển được, nghĩa là người sử dụng dễ dàng nắm bắt được cách sử dụng cũng như mục đích của hệ bài toán trong quá trình học.

3.3. MỘT SỐ BIỆN PHÁP PHÁT TRIỂN TƯ DUY CHO HỌC SINH

THÔNG QUA DẠY HỌC MÔN TOÁN

3.3.1. Thuờng xuyên sử dụng những lời khuyên kích thích học sinh tư duy và tạo cơ hội cho học sinh chia sẻ, hợp tác trong quá trình tư duy

Mục tiêu của biện pháp này là tạo ra môi trường thích hợp cho hoạt động học tập, sáng tạo dựa trên những tác động của nhóm phương pháp tăng cường thái độ cảm xúc, giúp HS tự tin và tích cực hơn.

Với biện pháp này, chúng tôi mong muốn người dạy vận dụng được kĩ thuật, khơi dậy khả năng hợp tác, thi đua, giúp nhau cùng phát triển ở HS. Muốn làm được điều đó, GV cần vận dụng tổng hợp các biện pháp kích tư duy, hướng tới tạo ra những phương pháp mới cả về hình thức tổ chức dạy học và đánh giá, kiểm tra.

Hình thức tổ chức được quan tâm ở đây là hình thức tổ chức học theo nhóm và dự án. Việc chia nhóm hiện nay thường được sử dụng một cách hình thức, chưa thực sự rèn luyện cho người học khả năng hợp tác (điều mà chúng ta còn thiếu và yếu). Mục tiêu hướng tới của biện pháp là thông qua kiểu dạy học dự án, kiểu chia nhóm hợp lí, áp dụng các PPKTTD trong quá trình hoạt động, sẽ phát huy những ưu điểm phương pháp hoạt động nhóm,... Trong phạm vi nghiên cứu, chúng tôi đề cao năng lực thích nghi trong nhóm và rèn luyện ý thức trách nhiệm của người học. Vì thế, ngoài việc tạo cơ hội để HS tích cực, chủ động trong học tập nhóm, thì cần đặt ra tiêu chí để tăng cường ý thức với tập thể, với nhóm của mỗi thành viên.

Cơ sở của biện pháp là vận dụng tổng hợp các PPKTTD trong đó chủ yếu dựa trên *nhóm các phương pháp tăng cường cảm xúc, phát triển tinh thần tích cực tư duy và các lý thuyết dạy học tích cực* để đề ra các cách thức dạy học tích cực, tạo ra không khí học tập thân thiện, phát huy tối đa hiệu quả hoạt động của các giác quan nhờ tác động của các hiệu ứng màu sắc, âm thanh và cách tổ chức hoạt động học tập.

Trong quá trình thực hiện, cần chú ý tới các hình thức:

+)*Thuờng xuyên sử dụng những lời khuyên kích thích HS tư duy*

Thực tế đã chứng minh được rằng điều quan trọng nhất của việc dạy học là phải dạy cho người học "cách tự học", đồng thời phải khơi dậy nỗi niềm tin ở bản thân, sự ham học hỏi, từ đó người học có sự nỗ lực không ngừng

trong cuộc sống. Thông qua việc thường xuyên sử dụng những lời khuyên kích thích HS tư duy, GV có thể thúc đẩy sự tự tin, xác định động cơ và phương pháp học tập đúng đắn. Đây là sự tổng kết kinh nghiệm của chúng tôi qua thực tế học tập, nghiên cứu và có sự tham khảo của công trình nghiên cứu của các học giả khác. Chín lời khuyên thường được sử dụng bao gồm:

Lời khuyên 1: Hãy tự tin vào bản thân.

Lời khuyên 2: Xác định mục tiêu rõ ràng. Mục tiêu là động lực thúc đẩy ta đến thành công.

Lời khuyên 3: Bộ não của bạn thật siêu việt, hãy tận dụng nó.

Lời khuyên 4: Đọc bằng từ khoá sẽ làm bạn thông minh hơn.

Lời khuyên 5: Bạn cần biết mình còn thiếu điều gì để thành công, hãy ghi ra giấy những ưu nhược điểm của bạn, cách phát huy và cách hạn chế chúng.

Lời khuyên 6: Bạn chỉ thiếu một phương pháp học hiệu quả, hãy dành thời gian để tìm ra nó.

Lời khuyên 7: Bạn có thể ghi nhớ tốt hơn khi dùng một công cụ nào đó hỗ trợ – chẳng hạn Bản đồ tư duy.

Lời khuyên 8: Hãy mạnh dạn thực hành. Thực hành là mảnh đất tốt để gieo mầm ý tưởng.

Lời khuyên 9: Hãy luôn kiên định! Cuộc sống của bạn do bạn quyết định, cần khẩn trương, tăng tốc tiến tới thành công.

Trong quá trình dạy học, tuỳ từng tình huống mà GV nên sử dụng lời khuyên nào cho hợp lí. Chẳng hạn, GV luôn kiên trì theo dõi để biết được những ưu, nhược điểm của HS, sử dụng lời khuyên 1 để họ tự tin hơn, đồng thời dùng lời khuyên 5 để kích thích họ phát huy được những ưu điểm, hạn chế những nhược điểm. Lời khuyên 2 và lời khuyên 3 được sử dụng nhằm kích thích HS vận động não bộ, xác định động cơ học tập đúng đắn. Trong mỗi bài học, khi hướng dẫn tri thức phương pháp, GV nên sử dụng lời khuyên 4, lời khuyên 6, lời khuyên 7 để kích thích HS tư duy, sử dụng các công cụ giúp ghi nhớ hiệu quả; dùng lời khuyên 8 để nhắc nhở HS năng động, chịu khó tìm tòi; dùng lời khuyên 9 để kích thích HS kiên trì, tích cực. đương nhiên, mỗi GV cần là tấm gương khi vận dụng những lời khuyên trên trong thực tiễn lao động, học tập, đồng thời chia sẻ với HS những kinh nghiệm, những điển hình khác để kích thích HS tích cực, tự tin, kiên trì mục tiêu dẫn tới thành công.

+)*Tạo không khí học tập thân thiện, tích cực*

Không khí học tập thân thiện sẽ tạo điều kiện cho người học tư duy. Người học sẽ chẳng nghĩ gì hoặc không nghĩ được gì nếu môi trường học tập làm cho họ bị ức chế.

Để tạo không khí học tập thân thiện tích cực, GV nên tạo ra nhiều nhất cơ hội để HS được tự do bày tỏ suy nghĩ, khả năng, đồng thời GV cũng cần quan tâm đến trang trí khung cảnh lớp học động và nhiều thông tin hơn.

Tạo bảng tin: GV có thể tận dụng các bức tường trống trong lớp học để HS treo các bảng tin nhằm trao đổi những thông tin, kết quả học tập của các nhóm, các cá nhân. Các bảng có thể được làm bằng phooc-mi-ca hoặc bằng giấy trắng... rất dễ kiểm và thay thế. Chẳng hạn, có thể treo hai bảng phooc-mi-ca vào hai bên của bảng chính của lớp làm bảng thông tin và bảng phụ cho bài giảng khi cần thiết. Phía cuối lớp có thể treo báo tường, bảng ghi những ý kiến, kinh nghiệm, các bảng trình bày kết quả hoạt động của nhóm.

Tăng cường âm thanh thân thiện: Theo kinh nghiệm của nhiều người, nếu tư duy trong một môi trường có âm thanh của nhạc không lời thì sẽ có hiệu quả hơn trong môi trường yên tĩnh. Chúng ta có thể sử dụng những loa không dây công suất thấp để phát nhạc dùng trong dạy học. Với loa này, chúng ta có thể kết hợp với micro cá nhân để tăng cường âm lượng của GV trong khi hướng dẫn HS làm việc có nghe nhạc không lời. Những loa này có giá hợp lý và GV cũng có thể tự kiểm trong điều kiện hiện nay.

+)*Tổ chức cho HS học tập theo nhóm hợp tác*

Việc tổ chức cho HS hợp tác với nhau trong học tập cũng là một biện pháp kích thích tư duy. Việc học hợp tác sẽ khơi dậy tư duy, chia sẻ suy nghĩ của mọi thành viên trong nhóm hợp tác; tạo ra một môi trường học tập thân thiện.

Việc chia nhóm thường được thực hiện theo một số tiêu chí sau đây:

- Chia nhóm theo năng lực: căn cứ vào học lực của HS mà lớp tự chia nhóm.
- Chia nhóm theo sở thích: trong các hoạt động ngoại khoá hoặc trò chơi trên lớp.
- Chia nhóm theo vị trí địa lý: căn cứ vào địa bàn nơi ở của HS hoặc vị trí chỗ ngồi của HS trong lớp.
- Chia nhóm ngẫu nhiên theo gợi ý của PPKTTD. Chẳng hạn, mỗi HS lên lịch làm việc theo giờ với ba công việc nào đó. Sau đó GV yêu cầu các HS có chung

một công việc trong một giờ nào đó sẽ họp với nhau thành một nhóm cùng bàn bạc, giải quyết công việc đó; hoặc mỗi HS có một số thứ tự, xét đồng dư theo modun nào đó để làm thành một nhóm (tuỳ thuộc số lượng nhóm),...

Trong quá trình hoạt động, có thể kết hợp dạy học dự án để duy trì sự hoạt động của nhóm trong một thời gian, với một công việc dài hơi, nhằm tăng cường tính trách nhiệm của mỗi cá nhân. Đồng thời, cần kết hợp các phương pháp kích thích như: khen thưởng, lập diễn đàn (website, forum, email, blog,... để bàn bạc).

Trong các tình huống dạy học hợp tác, GV nên chọn nhiều hình thức tạo nhóm, đồng thời tăng cường giám sát hoạt động cá nhân. Chúng ta có thể kết hợp các hoạt động như thi đua, đánh giá chéo, tiếp sức, lấy thành tích cá nhân làm cơ sở đánh giá hoạt động của nhóm để thực hiện nhiệm vụ này.

Thi đua: Mỗi hoạt động của nhóm sẽ được thưởng.

Đánh giá chéo: Nhóm này sẽ đánh giá kết quả của nhóm kia và cung tính điểm thi đua.

Tiếp sức: Mỗi thành viên của nhóm phải chuẩn bị tinh thần để trình bày tiếp hoạt động của nhóm mình theo yêu cầu của GV. Như vậy, HS phải tập trung và trách nhiệm hơn với nhóm.

Một tình huống kích thích tư duy trong dạy học hợp tác cần thỏa mãn những yêu cầu tối thiểu sau:

- Có nhiều cách giải quyết một vấn đề,
- Tôn trọng tư duy phê phán,
- Chú trọng khảo sát nhiều trường hợp riêng tạo cơ hội cho việc khai quát hoá.

Mỗi ví dụ được nêu dưới đây như là một đoạn giáo án dạy học có tác dụng kích thích tư duy cho HS thông qua hoạt động học hợp tác.

Ví dụ 3.1: Phép dịch chuyển (tịnh tiến) đồ thị.

Khái niệm tịnh tiến đồ thị (hoặc tịnh tiến hệ trực toạ độ) là một khái niệm khó đối với HS, nên cần phải tổ chức các hoạt động nhận thức cho HS.

Hoạt động 1: Tiếp cận khái niệm

- Vẽ đường thẳng (d_1) có phương trình $y = x - 1$ đi qua điểm A có hoành độ bằng 0 và điểm B có hoành độ bằng 2.

- Vẽ đường thẳng (d_2) có phương trình $y = x + 2$ đi qua điểm C có hoành độ bằng 0 và điểm D có hoành độ bằng 2.

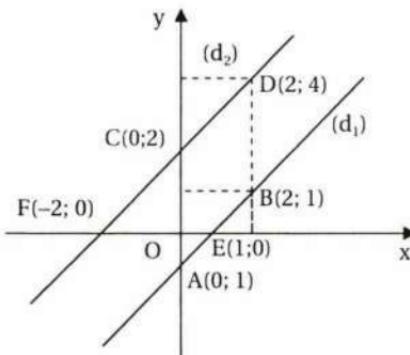
- So sánh các vectơ \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BD} .

- Ta nói đường thẳng (d_2) do đường thẳng (d_1) tịnh tiến (dịch chuyển, hay được suy ra) theo vectơ \overrightarrow{AC} ; hoặc có thể nói: đường thẳng (d_2) do đường thẳng (d_1) tịnh tiến lên (song song với trục tung) 3 đơn vị.

- Ngược lại ta có thể nói đường thẳng (d_1) do đường thẳng (d_2) tịnh tiến theo vectơ nào? Tịnh tiến xuống mấy đơn vị?

- Nếu gọi E, F lần lượt là các giao điểm của (d_1) , (d_2) với trục hoành, ta có thể nói đường thẳng (d_2) được tịnh tiến từ đường thẳng (d_1) theo vectơ \overrightarrow{EF} được hay không?

- Ta có thể nói đường thẳng (d_2) do đường thẳng (d_1) tịnh tiến sang trái mấy đơn vị? Đường thẳng (d_1) do đường thẳng (d_2) tịnh tiến sang phải mấy đơn vị?



Hình 3.10. Hình minh họa ví dụ 3.1

Hoạt động 2 (Hợp tác nhóm, kích thích tư duy, nắm vững bản chất khái niệm, khái quát hoá):

Phiếu 1:

+ Vẽ các đường thẳng sau bằng cách lấy hai điểm bất kì của chúng:

$$(d_1): y = -x - 2 \quad (d_2): y = -x + 2$$

$$(d_3): y = -(x + 1) - 2 \quad (d_4): y = -(x - 1) - 2$$

+ Hãy phát hiện mỗi đường thẳng (d_2) , (d_3) , (d_4) ở trên được suy ra từ đường thẳng (d_1) bằng phép tịnh tiến nào? (phát hiện càng nhiều cách càng tốt)

Nội dung phiếu 1 phát cho mỗi nhóm tương tự nhau, chỉ thay phương trình đường thẳng bằng những phương trình khác nhau.

Phiếu 2:

- + Vẽ đồ thị của hàm số: $y = -2x + 3$ (d).
- + Từ đó ta có được đồ thị của hàm số nào nếu:
 - Tịnh tiến đồ thị sang bên phải 2 đơn vị?
 - Tịnh tiến đồ thị lên 3 đơn vị?

Các nhóm khác tương tự.

Phiếu 3:

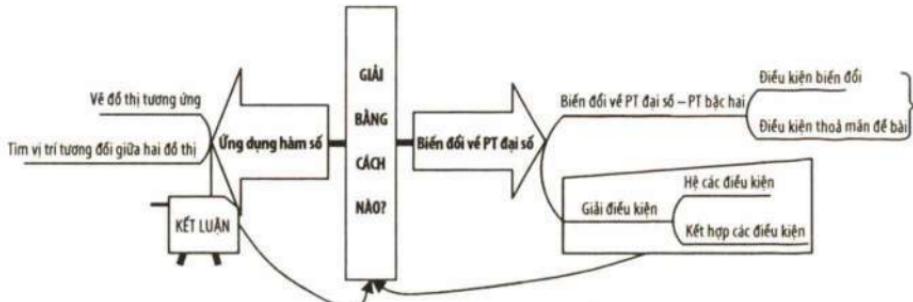
- + Vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^2 - 2x + 3$.
- + Phải tịnh tiến đồ thị này như thế nào để từ đó ta có được đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$?

Các nhóm khác tương tự.

Hoạt động 3 (Hoạt động theo lớp): Cho hàm số $y = 3x^2 - 7x + 1$.

- Vẽ đồ thị hàm số.
- Hãy biện luận số nghiệm của phương trình $3x^2 - 7x + 1 = m$ theo m.

Gợi ý: dùng Bản đồ tư duy để tìm lời giải cho ý (b).



Hình 3.11. Bản đồ tư duy để tìm lời giải ví dụ 3.1

Ví dụ 3.2. Tinh huống giải bài tập: Ứng dụng phép tịnh tiến

Hình thức: Hoạt động theo toàn lớp và nhóm, sử dụng kỹ thuật phân nhỏ biểu đồ hình xương cá để phân tích, tổng hợp phương pháp giải.

Nội dung:

Hoạt động 1 (theo toàn lớp): Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- Hãy vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.
- Từ đồ thị (C), hãy tìm phép biến đổi để có được đồ thị (C_1) của hàm số $y = x^2 - 4x - 1$.

c. Từ đồ thị (C), hãy tìm phép biến đổi để có được đồ thị (C_2) của hàm số $y = x^2 - 6x + 2$.

GV yêu cầu HS vẽ đồ thị (C). Các bước vẽ đồ thị hàm số bậc hai:

Bước 1: Tìm tập xác định.

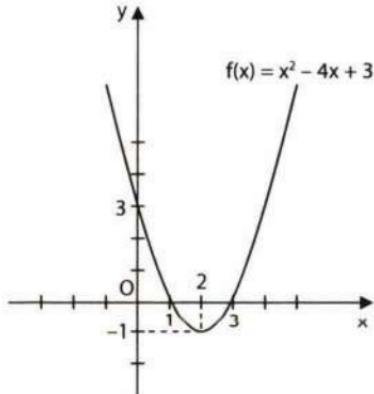
Bước 2: Khảo sát sự biến thiên, lập bảng biến thiên (xác định hệ số $a = 1$; $b = -8$; $c = 3$). Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Bước 3: Lập bảng giá trị và biểu diễn chúng trên mặt phẳng tọa độ, vẽ đồ thị hàm số

x	0	1	2	3
y	3	0	-1	0

Đồ thị hàm số:



Hình 3.12. Đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Hướng dẫn hoạt động theo nhóm ý (b) và (c):

- Từ đồ thị (C) muốn suy ra đồ thị (C_1) và (C_2) ta phải làm thế nào? Ta đã có phép biến đổi đồ thị nào và làm thế nào để lợi dụng nó?
- Phải biến đổi hàm số về dạng $g(x) = f(x) + p$ hoặc $f(x+q)$
- Vẽ biểu đồ hình xuong cá để hệ thống lời giải cho HS.

Ví dụ 3.3. Phương trình tương đương.

Hoạt động 1: Giới thiệu khái niệm (sách giáo khoa).

Hoạt động 2: Củng cố khái niệm:

Thi đua theo nhóm (tiếp sức).

Kiểm tra xem mỗi khẳng định sau đúng hay sai, vì sao?

a. $\sqrt{2x-1} = \frac{1}{4} - \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (Đúng).

b. $|x+1| = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (Sai, vì thiếu trường hợp $x = -2$).

c. $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 3x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$ (Sai, vì $x = 0$ không là nghiệm của PT (1)).

Câu hỏi gợi ý: Để kiểm tra hai phương trình có tương đương với nhau hay không ta làm thế nào? (Kiểm tra tập nghiệm của chúng có bằng nhau hay không, nói cách khác, kiểm tra xem tất cả nghiệm của phương trình này có phải là nghiệm của phương trình kia hay không và ngược lại).

Ví dụ 3.4: Quy tắc giải bất phương trình bậc hai.

Hoạt động 1: Tiếp cận xây dựng quy tắc

Hình thức: Hoạt động toàn lớp, GV gợi mở, vấn đáp hướng dẫn HS xây dựng quy tắc.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

a. Xét dấu $f(x)$.

b. Giải bất phương trình $f(x) > 0$.

Gợi ý – bảng tóm tắt xét dấu của tam thức bậc hai:

Δ	Dấu của $af(x)$
$\Delta < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}, af(x) > 0$
$\Delta = 0$	$\forall x \neq \frac{-b}{2a}, af(x) > 0$
$\Delta > 0$ (hoặc tính được hai nghiệm) $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$	$\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty), af(x) > 0,$ $\forall x \in (x_1; x_2), af(x) < 0$

Lời giải:

a. $a = 1 > 0$, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$; $x_2 = 3$. Từ đó kết luận:

$f(x) < 0$ khi $x \in (2; 3)$;

$f(x) = 0$ khi $x = 2$ hoặc $x = 3$;

$f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

b. Từ (a) ta có nghiệm của BPT là $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

GV: Từ ví dụ trên, chúng ta có thể đưa ra một cách giải BPT $ax^2 + bx + c > 0$ hay không?

HS: Có thể, bằng cách xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Hoạt động 2: Luyện tập để đi đến quy tắc

Hình thức: Hoạt động theo nhóm, mỗi nhóm hoạt động trên phiếu bài tập trong 7 phút và kiểm tra chéo lẫn nhau.

Phiếu 1: Giải các BPT: a. $-x^2 + 4x + 1 > 0$.

b. $3x^2 - 2x - 2 < 0$.

Phiếu 2: Giải các BPT: a. $-x^2 + 3x + 2 < 0$.

b. $2x^2 - x - 1 > 0$.

Phiếu 3: Giải các BPT: a. $-2x^2 - x + 2 > 0$.

b. $x^2 + x - 2 < 0$.

Phiếu 4: Giải các BPT: a. $x^2 - 3x + 1 > 0$.

b. $-3x^2 + x + 2 < 0$.

Hoạt động 3: Quy tắc

Hình thức: các nhóm thi đua, tiếp sức, lên bảng hoàn thiện

Giải các BPT dạng tổng quát

Nhóm 1: $ax^2 + bx + c > 0$

Nhóm 2: $ax^2 + bx + c < 0$

Nhóm 3: $ax^2 + bx + c \leq 0$

Nhóm 4: $ax^2 + bx + c \geq 0$

Quy trình chung:

Bước 1: Xét dấu của tam thức bậc 2 tương ứng.

Bước 2: Dựa vào dấu của bất phương trình và dấu của tam thức, đưa ra kết luận phù hợp (dùng Bản đồ tư duy để hệ thống).

Cùng cố: Mỗi HS về nhà làm mỗi dạng 02 ví dụ.

Ví dụ 3.5: Luyện tập giải bất phương trình bậc 2.

Hoạt động 1: Tìm phương pháp giải ứng với từng loại bài tập

Hình thức: Cả lớp

Phương pháp: Vấn đáp – gợi mở giải quyết vấn đề, dùng kĩ thuật đặt câu hỏi.

GV: Chúng ta đã biết để giải một BPT bậc 2 cần dựa trên dấu của tam thức bậc 2 tương ứng. Nay giờ, hãy tìm cách giải cho mỗi bài toán sau:

1. Giải BPT: $-5x^2 + 4x + 12 < 0$.

2. Giải BPT: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} > 0$.

3. Giải hệ BPT: $\begin{cases} 2x - 1 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 < 0 \end{cases}$.

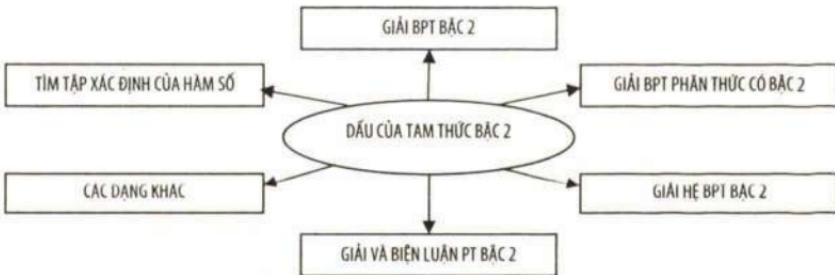
4. Tìm m để PT sau có nghiệm: $(m - 1)x^2 - mx - 2 = 0$.

5. Tìm tập xác định của hàm số: $y = \sqrt{\frac{2x^2 - x - 4}{x + 2}}$.

Các nhóm giải cụ thể bài toán trên, chấm chéo lân nhau.

Hoạt động 2: Hệ thống hoá kiến thức – các biến dạng của giải bất phương trình bậc hai.

Dùng bản đồ tư duy để hệ thống



Hình 3.13. Các dạng bài toán quy về giải BPT bậc 2

Hoạt động 3: Phát hiện sai lầm (GV cho các nhóm tự phát hiện, sửa chữa sai lầm trong bài làm của nhóm khác và trong ví dụ của GV).

Ví dụ 3.6: Khái niệm hàm số (Đại số 10).

Hoạt động 1: Nhắc lại khái niệm hàm số.

Hình thức: hoạt động theo cả lớp.

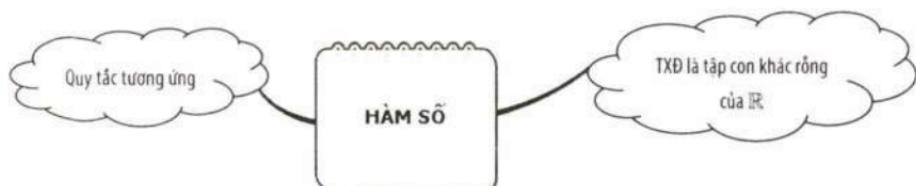
Nội dung: GV nhắc lại khái niệm hàm số đã học ở lớp dưới:

Định nghĩa: "Cho một tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$. Hàm số xác định trên D là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số x thuộc D với một và chỉ một số, kí hiệu là $f(x)$; số $f(x)$ đó gọi là giá trị của hàm số f tại x .

Tập D gọi là tập xác định (hay miền xác định), x gọi là biến số hay đối số của hàm số f ".

Định nghĩa hàm số cho bằng biểu thức

GV cùng HS dùng Bản đồ tư duy mô phỏng thuộc tính của khái niệm



Hình 3.14. Mô phỏng của khái niệm hàm số

Hoạt động 2: Cùng cố nhận dạng khái niệm

Hình thức: Hoạt động theo nhóm.

Nội dung: Hoàn thành phiếu bài tập

1. Xác định quy tắc thỏa mãn khái niệm hàm số

a. Quy tắc cho tương ứng giữa từng ngày và chỉ số VN-Index.

b. Quy tắc cho bởi bảng sau:

Tên người	Lan	Ngọc	Thắng	Minh
Lương tháng (triệu đồng)	3,15	4,20	5,12	2,40

c. $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

d. $m(t) = -3t^2 + at$

2. Với mỗi hàm số đã cho, hãy xác định tập xác định, tập giá trị:

a. $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

$$b. y = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \\ -x + 3, & x > 2 \end{cases}$$

$$c. y = \sqrt{1-x^2}$$

Ví dụ 3.7. Tinh huống luyện tập các bài toán về tiếp tuyến.

Khái niệm tiếp tuyến (dùng phần mềm GeospacW để minh họa).

Hình thức: dạy học hợp tác theo nhóm, sử dụng kỹ thuật phân tích phẩm chất cục bộ và đặt câu hỏi.

Hoạt động 1: Dạy học toàn lớp

- Nhắc lại ý nghĩa hình học của đạo hàm, phần này sẽ được viết bằng phấn màu để nhấn mạnh trên gốc bảng.

- Để viết được phương trình tiếp tuyến của một đồ thị ta cần biết điều gì? (Biết toạ độ tiếp điểm).

Tìm phương pháp giải cho bài toán sau:

Cho hàm số: $y = x^3 - 3x + 5$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trong những trường hợp sau:

- a. Tiếp tuyến tại điểm $M(-1;7)$.
- b. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -x + 4$.
- c. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 6$.
- d. Tiếp tuyến đi qua điểm $A(0;5)$.

Gợi ý:

a. Tiếp điểm là điểm M .

(b) và (c): Chưa có tiếp điểm, nhưng ta đã biết hệ số góc của tiếp tuyến, như vậy, dựa vào ý nghĩa hình học của đạo hàm ta có thể tính được toạ độ tiếp điểm.

d. Chưa có tiếp điểm, chưa có hệ số góc của tiếp tuyến nên cần tìm tiếp điểm. Có thể dựa vào phương trình tổng quát của đường thẳng, giả sử đã có tiếp điểm là $M_0(x_0; y_0)$ rồi viết phương trình tiếp tuyến tại M_0 , cho tiếp tuyến đó đi qua A , từ đó tìm được M_0 .

Hoạt động 2: Các nhóm thực hiện giải bài toán và chấm chéo lăn nhau.

Hoạt động 3: Thi đua tìm phương hướng giải cho bài toán sau:

Cho hàm số $y = -x^4 + 3x^2 - 1$. Tìm m để đồ thị hàm số luôn có ít nhất hai tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = mx$.

Gọi ý: $y'(x) = m$ phải có ít nhất hai nghiệm, có thể khảo sát hàm $g(x) = y'(x)$.

Tổ chức cho HS làm tại lớp hoặc về nhà các bài toán sau:

1. Cho đồ thị (C): $y(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$. Viết phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm của (C) với trục Ox.

2. Cho hàm số: $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$. Tìm m để các tiếp tuyến với đồ thị tại A(1; 0) và B(-1; 0) vuông góc với nhau.

3. Có bao nhiêu tiếp tuyến đi qua A(1; -4) đến đồ thị của hàm số $y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$?

4. Cho (C): $y = -x^3 + 3x + 2$. Tìm trên trực hoành các điểm kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C).

5. Cho đồ thị hàm số (C): $y = \frac{2x-1}{x-1}$ và điểm M(2; 3), I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

a. Tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A và B, chứng minh M là trung điểm của AB.

b. Khi M thay đổi nhưng vẫn thuộc đồ thị (C), chứng minh rằng diện tích tam giác ABI là không đổi.

3.3.2. Tăng cường rèn luyện cho học sinh vận dụng, phối hợp nhiều hình thức biểu đạt tư duy: ngôn ngữ tự nhiên, ngôn ngữ toán học chính xác và sử dụng sơ đồ, biểu đồ

Mục tiêu của biện pháp này là vận dụng, phối hợp nhiều hình thức biểu đạt tư duy để kích thích tư duy của HS, từ đó nâng cao năng lực biểu đạt tư duy, năng lực tổ chức thông tin (bao gồm kỹ năng ghi bài, kỹ năng hệ thống hoá kiến thức,... từ đó giúp tăng cường niềm vui trong học tập, khả năng giải quyết vấn đề) cho HS. Những biện pháp kích thích tư duy được sử dụng ở đây sử dụng ưu thế của ngôn ngữ kí hiệu và tập hợp, phương diện ngữ nghĩa, cú pháp của toán học, các dạng sơ đồ, hình ảnh như Biểu đồ hình xương cá, Bản đồ tư duy,...

Tư duy không thể tách rời ngôn ngữ, được hoàn thiện trong sự trao đổi bằng ngôn ngữ. Trong quá trình dạy học, việc rèn luyện tư duy logic và ngôn ngữ chính xác cần quán triệt:

- Làm cho HS nắm vững, hiểu đúng, sử dụng đúng những liên kết logic, những lượng tử tồn tại và toàn thể.
- Phát triển khả năng định nghĩa và làm việc với những định nghĩa.
- Phát triển khả năng chứng minh, trình bày lại chứng minh và độc lập tiến hành chứng minh [36, tr 53 – 54].

Rèn luyện tư duy ngôn ngữ chính xác:

Toán học hiện đại được xây dựng trên nền tảng của lí thuyết tập hợp và logic toán. Lí thuyết tập hợp và logic toán giúp cho việc trình bày các tri thức toán học ở nhà trường phổ thông được chính xác, rõ ràng và nhất quán. Ngôn ngữ toán học là kết quả của việc hoàn thiện ngôn ngữ tự nhiên theo các khuynh hướng khác nhau:

- Loại bỏ sự cồng kềnh.
- Tính đơn trị.
- Mở rộng khả năng biểu thị.

Vì thế trong dạy học môn Toán, để kích thích tư duy linh hoạt và nhuần nhuyễn cho HS, chúng ta nên tận dụng ưu thế logic và chính xác của ngôn ngữ toán học để hạn chế những rườm rà mà ngôn ngữ thông dụng thường có. Thông qua các tình huống dạy học khái niệm, chứng minh và giải toán cần dùng ngôn ngữ mang tính “hệ thống” và kí hiệu để tăng cường năng lực biểu đạt của HS.

Sơ đồ sau cho thấy quan hệ giữa một số thủ pháp giúp rèn luyện ngôn ngữ và giải quyết các vấn đề toán học:



Hình 3.15. Các thủ pháp vận dụng trong các khám phá và vấn đề toán học [15].

Ví dụ 3.8. Dạy học tăng cường phương diện cú pháp và phương diện ngôn ngữ trong giải phương trình mũ – lôgarit.

Trong dạy học môn Toán, vấn đề ngôn ngữ toán học có ý nghĩa hết sức quan trọng. Bởi toán học hiểu theo nghĩa nào đó là một thứ ngôn ngữ để mô tả tinh huống cụ thể này sinh trong khoa học hoặc trong hoạt động thực tiễn của loài người. Dạy học toán chính là dạy một ngôn ngữ – một ngôn ngữ đặc biệt, có tác dụng to lớn trong việc diễn tả các sự kiện, các phương pháp trong các lĩnh vực khác nhau của khoa học và hoạt động thực tiễn. Ngôn ngữ toán học được tiếp cận theo hai phương diện ngữ nghĩa và cú pháp. Vì vậy, GV cần làm cho HS hiểu rõ kiến thức toán trên cả hai phương diện ngữ nghĩa và cú pháp của ngôn ngữ toán học.

Trong toán học, người ta phân biệt cái kí hiệu và cái được kí hiệu, cái biểu diễn và cái được biểu diễn. Nếu xem xét phương diện những cái kí hiệu, những cái biểu diễn, đi vào cấu trúc hình thức và những quy tắc hình thức để xác định và biến đổi chúng thì đó là phương diện cú pháp. Nếu xem xét phương diện những cái được kí hiệu, những cái được biểu diễn, tức là đi vào nội dung, vào nghĩa của những cái kí hiệu, những cái biểu diễn thì đó là phương diện ngữ nghĩa.

Walsch (1967) đã nêu lên hai mặt ngữ nghĩa và cú pháp của một số đối tượng thường gặp trong toán học:

– Phương diện ngữ nghĩa (semantic) của toán học là mặt xem xét nội dung của mệnh đề toán học và nghĩa của những cách đặt vấn đề toán học.

– Phương diện cú pháp (syntactic) của toán học là mặt xem xét cấu trúc hình thức và sự biến đổi hình thức những biểu thức toán học, sự làm việc theo những quy tắc xác định và nói riêng là sự làm việc theo thuật giải.

Chẳng hạn: Xét về phương diện ngữ nghĩa của phương trình là xét về mặt nội dung của những mệnh đề toán học (Chú trọng về phương diện này giúp HS hiểu sâu sắc về phương trình, khắc phục cách làm máy móc, hình thức). Xét về phương diện cú pháp là xét về cấu trúc hình thức và sự biến đổi hình thức những biểu thức toán học, sự làm việc theo những quy tắc xác định (Chú trọng về phương diện này sẽ rèn luyện cho HS kỹ năng làm việc theo quy trình và phong cách làm việc quy củ).

Trong dạy học giải phương trình mũ – lôgarit ta có thể rèn luyện hai phương diện này theo những đề xuất sau [59]:

- Hiểu thấu và nắm vững kiến thức.
- Phát triển tư duy dựa trên sự vận hành kiến thức thường xuyên.
- Tích luỹ kinh nghiệm để phát triển tư duy.
- Huy động kiến thức và kinh nghiệm.
- Tổ chức vận dụng kiến thức và kinh nghiệm vào việc phát triển tư duy.

Có thể minh họa bằng ví dụ sau: Giải phương trình: $2^x = 2 - \log_3 x$.

Ví dụ trên nhằm giới thiệu cho HS phương pháp sử dụng tính đồng biến hay nghịch biến của hàm số để giải phương trình mũ và phương trình lôgarit. Do đó GV cần gợi cho HS nhầm ra một nghiệm, sau đó đi chứng minh rằng nghiệm đó là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ở đây, dễ thấy $x=1$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

+ HS tìm điều kiện xác định của phương trình là: $x > 0$ (suy nghĩ này thuộc về phương diện ngữ nghĩa).

+ Khoanh vùng kiến thức: Giải phương trình liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit.

+ Nhận biết: HS nhận biết được trong phương trình xuất hiện cả hàm số mũ và hàm số lôgarit. Do đó có thể sử dụng tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit hay không? (Suy nghĩ này cũng thuộc về phương diện ngữ nghĩa).

+ Hồi tưởng: HS nhớ lại những kiến thức liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit.

+ Cách li: HS tách ra hai hàm số $y = 2^x$ và $y = 2 - \log_3 x$ để đưa ra nhận xét: Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $y = 2^x$ đồng biến, hàm số $y = 2 - \log_3 x$ nghịch biến.

Do đó đi đến việc xét hai trường hợp (việc xét hai trường hợp này thuộc về tư duy ngữ nghĩa do phải xét đến hàm số mũ và hàm số lôgarit):

Nếu $x > 1$ thì $\log_3 x > 0$ và $2^x > 2$. Suy ra $2 - \log_3 x < 2 < 2^x$ (suy nghĩ này thuộc về phương diện cú pháp).

Nếu $0 < x < 1$ thì $\log_3 x < 0$ và $2^x < 2$. Suy ra $2 - \log_3 x > 2 > 2^x$.

+ Liên kết: Với những điều trên, HS có thể đi đến kết luận: PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

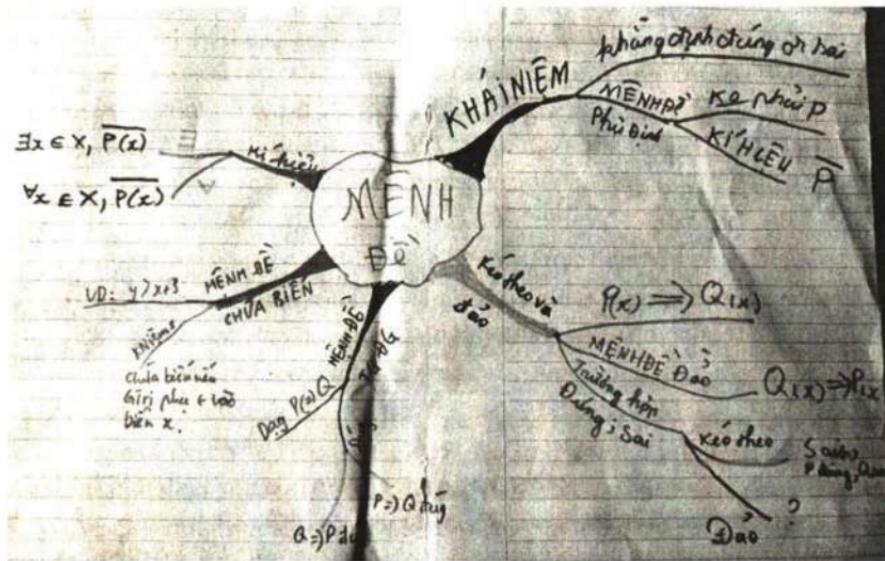
Với cách dạy tường minh như vậy, HS có cơ hội tiếp cận ngọn nguồn tri thức, từ đó sẽ mạnh dạn hơn trong vấn đề biểu đạt, tránh rập khuôn, máy móc và thường viết những gì mà mình không tư duy như hiện nay.

Sử dụng một số sơ đồ nhằm tăng cường khả năng tổ chức thông tin:

Cấu trúc đặc biệt của Bản đồ tư duy cho phép tổ chức phân bậc cấu trúc tri thức toán học. Chúng có thể giúp ta có cái nhìn tổng quan rõ ràng và súc tích khi liên kết các đối tượng toán học quanh một tiêu đề. Hơn nữa điều này lại được hỗ trợ bởi màu sắc và hình ảnh.

Ví dụ 3.9: Dạy học các khái niệm trong bài “Mệnh đề” – Đại số 10, Nâng cao.

Trong tình huống này, GV sử dụng Bản đồ tư duy để trình bày bài giảng của mình, từ đó giúp HS có cách ghi bài hợp lí song song với việc nghe giảng. Chúng tôi gọi cách học này là “Học không ghi bài”.



Hình 3.16. Bản đồ tư duy cho khái niệm “Mệnh đề”.

Việc "Học không ghi bài" chỉ được tiến hành có hiệu quả nếu người dạy bám sát việc học, lưu tâm đến những cử chỉ, thái độ và đặc biệt là những phản ứng của người học trước và mỗi hoạt động. GV hướng dẫn người học cách ghi lại những vấn đề cần nhớ bằng hình ảnh, kí hiệu phù hợp với bản thân, và cách tổng hợp trong bản đồ tư duy. Để thực hiện được điều này, tốt nhất là GV sử dụng ngay

Bản đồ tư duy để trình bày bài giảng của mình. Chúng tôi đã tiến hành thực nghiệm và thấy rằng điều đó hoàn toàn khả thi. Chẳng hạn, GV sẽ chia bảng thành ba phần, một phần để nháp và giảng về những vấn đề này sinh trong mỗi hoạt động, hai phần còn lại để vẽ bản đồ tư duy (tất nhiên bản đồ này không được vẽ ngay từ đầu, mà sẽ được hình thành ngay sau mỗi hoạt động), việc giảng bài như là việc mô tả lại bản đồ đã được xây dựng như thế nào. Với bản đồ vừa tạo được, HS có một bảng hệ thống hoá kiến thức không theo lối tuần tự, từ đó giúp HS vận dụng dễ dàng tri thức vào công việc. Hơn nữa, hiệu ứng của màu sắc giúp HS có cảm giác sinh động hơn, các nơron thần kinh sẽ được kích thích, từ đó họ sẽ tích cực hơn.

Ví dụ 3.10: Bài: “Phương trình đường thẳng”, Chương 3, Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng, Hình học 10.

Sử dụng hình ảnh trung tâm là một đường thẳng, có thể kí hiệu đó là đường thẳng. Vì đây là hình học giải tích, và vấn đề đang quan tâm tới là phương trình đường thẳng, nên Bản đồ tư duy có thể bổ sung mặt phẳng toạ độ Đè-Oxy ở hình ảnh trung tâm. Nhu vậy, hình ảnh trung tâm sẽ là một đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ Oxy, có thể vẽ thêm vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến \vec{n} , điểm $M_o(x_o, y_o)$ thuộc đường thẳng.

Tiếp theo là các nhánh chính liên kết với hình ảnh trung tâm. Ta nên chọn những kiến thức trọng tâm, chẳng hạn, vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến không cần nhắc lại trong Bản đồ tư duy, phương trình tham số và phương trình tổng quát được đưa chung vào phương trình. Như vậy có bốn nhánh chính ứng với bốn từ khoá là:

- Phương trình.
- Vị trí tương đối.
- Góc.
- Khoảng cách.

Ta lần lượt tổ chức thông tin trong các nhánh chính.

- Với nhánh có từ khoá là phương trình, ta chia làm hai nhánh nhỏ là phương trình tham số và phương trình tổng quát, và từ khoá viết trên hai nhánh là tham số và tổng quát. Ứng với mỗi từ khoá ta sẽ viết dạng phương trình đường thẳng. Trong mỗi dạng phương trình lại tiếp tục chia nhỏ các trường hợp đặc biệt $u_1 \neq 0; a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$.

Như vậy HS có thể thấy được một phương trình đường thẳng có thể biểu diễn dưới hai dạng là tham số và tổng quát. Có thể sử dụng hình vẽ minh họa cho trường hợp phương trình tham số luôn gắn liền với vectơ chỉ phương của đường thẳng, phương trình tổng quát luôn gắn liền với vectơ pháp tuyến, điều đó giúp HS dễ dàng thấy được có thể chuyển từ dạng phương trình này sang phương trình khác bằng cách chuyển từ vectơ pháp tuyến sang vectơ chỉ phương hoặc ngược lại.

– Với nhánh có từ khoá là góc giữa hai đường thẳng, ta có thể sử dụng hình vẽ minh họa việc tính góc giữa hai đường thẳng về việc tính góc giữa hai vecto \vec{n}_1 và \vec{n}_2 .

– Với nhánh từ khoá là khoảng cách, ta chỉ cần đưa ra công thức khoảng cách giữa hai đường thẳng.

– Để tìm vị trí tương đối của hai đường thẳng, ta chọn cặp từ khoá thể hiện bản chất của vấn đề, việc tìm vị trí tương đối đưa về việc giải hệ phương trình, đó là các cặp từ khoá: Cắt – một nghiệm; Song song – vô nghiệm; Trùng nhau – vô số nghiệm.

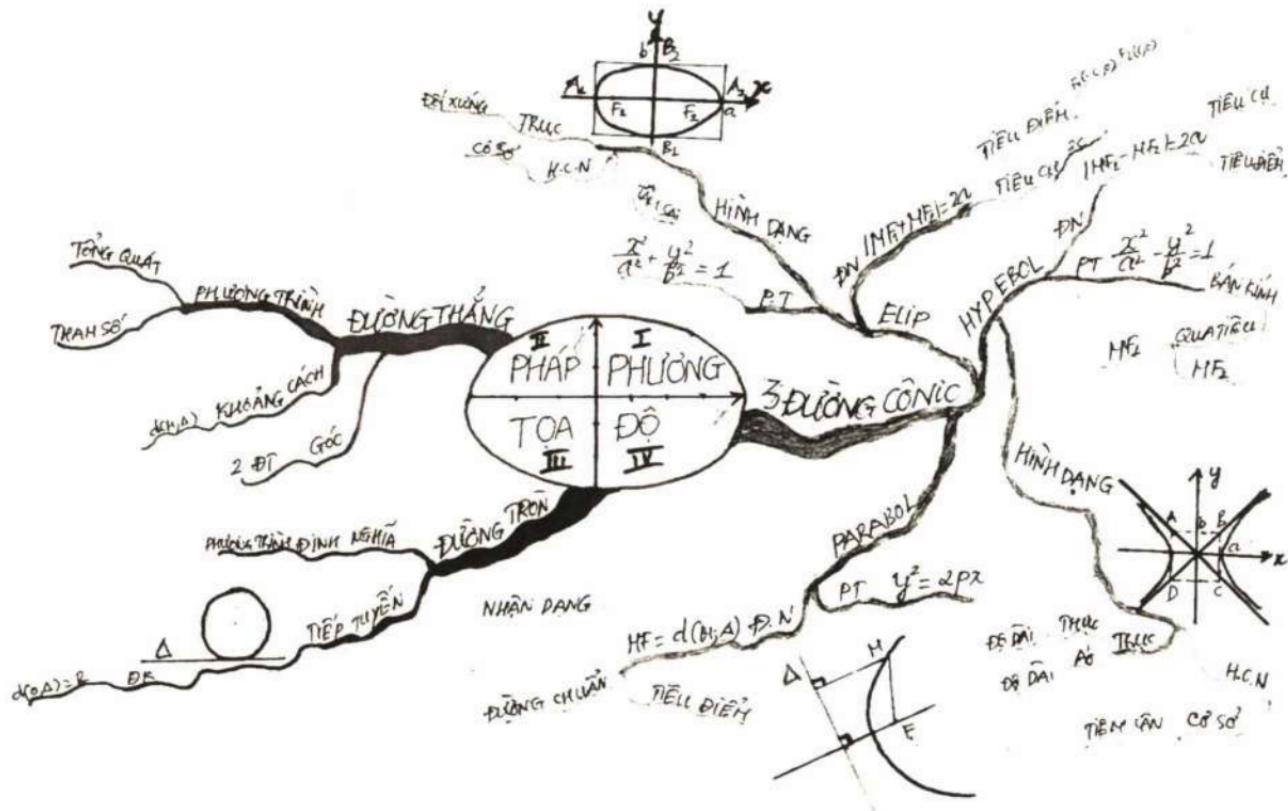
Như vậy, ta lập được một bản tóm tắt giúp ghi nhớ tốt.

Ví dụ 3.11: Ôn tập chương III. Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng, Hình học 10, Nâng cao.

Nội dung ôn tập chương đòi hỏi chúng ta hệ thống hoá kiến thức. Vì vậy, ta nên định hướng cho HS về Bản đồ tư duy bằng cách đặt câu hỏi:

- Chủ đề của chương gắn với hình ảnh nào?
- Các nhánh chính là gì?
- Nội dung của từng nhánh chính?...

Gợi ý: Chọn hình ảnh trung tâm đặc trưng cho chủ đề chương Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng chính là hệ trục toạ độ Oxy. Nếu cần thể hiện rõ, ta thêm từ khoá *phương pháp toạ độ*, được viết ở bốn góc phần tư từ thứ nhất đến thứ tư. Ba từ khoá được chọn ứng với ba nhánh chính là: *ba đường cônic, đường thẳng, đường tròn*. Tăng cường sử dụng hình vẽ minh họa ba đường cônic là Ellip, Hypebol, Parabol trong Bản đồ tư duy. Về màu sắc, nên chọn những màu nổi bật cho chủ đề và nhánh chính, nội dung nào cho là quan trọng nên thêm các hình ảnh, kí hiệu.



Hình 3.17. Bản đồ tư duy cho bài Ôn tập chương phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

Ví dụ 3.12: Thảo luận về phương pháp giải phương trình vô ti.

GV có thể viết từ khoá, hoặc một hình ảnh tượng trưng nào đó cho PT vô ti. Yêu cầu HS suy nghĩ và đưa ra các phương pháp giải.

Thực tế cho thấy, có nhiều HS biết cách giải khá nhiều PT, nhưng không hệ thống được dạng bài và phương pháp chung, kiến thức không được tổng hợp, không có cái nhìn tổng quan và do đó hay quên kiến thức.

Với việc đưa ra chủ đề như thế này, GV sẽ giúp HS phân loại dạng bài tập cũng như phương pháp giải, từ đó HS có cái nhìn tổng thể hơn khi tiến hành giải PT vô ti.

Giải PT vô ti nói riêng cũng như giải PT nói chung, đều có thể quy về các phương hướng cơ bản:

- Biến đổi PT thành các PT tương đương.
- Đặt ẩn phụ đưa về một PT mới.
- Dưa về HPT.
- Dùng bất đẳng thức.
- Dùng hàm số (tính liên tục, tập giá trị, tập xác định, sự biến thiên,...).
- Dùng hình học.
- Dùng lượng giác hoá.

Như vậy, ta thấy các phương pháp nêu trên là có vai trò như nhau trong giải PT vô ti (tuỳ vào từng PT mà ta sử dụng phương pháp nào cho hợp lí). Ta có thể sử dụng Biểu đồ hình xương cá để minh họa cho việc hệ thống các phương pháp giải PT vô ti (ưu điểm của Biểu đồ hình xương cá là quan hệ giữa các đối tượng so với “mục tiêu” là khá “tương đồng”, tính hướng đích rõ ràng):

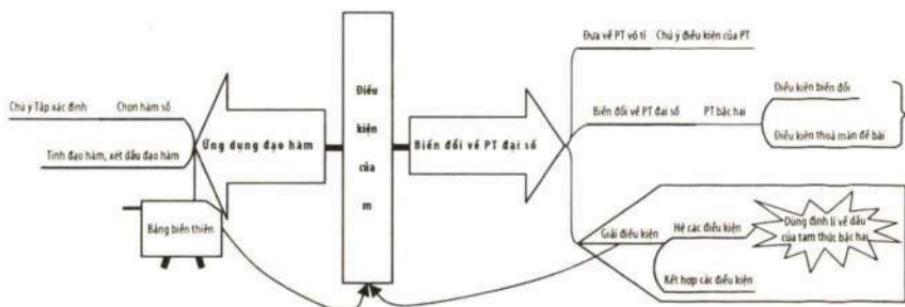


Hình 3.18. Biểu đồ hình xương cá cho các phương pháp giải phương trình vô ti

GV có thể chuẩn bị một số bài tập tương ứng với mỗi phương pháp giải trên để làm ví dụ minh họa cho HS.

Ví dụ 3.13: Dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề.

Sau khi học xong phần ứng dụng của đạo hàm (lớp 12), chúng tôi đưa ra bài toán sau: *Tìm m để phương trình $x + \sqrt{2x^2 + 1} = m$ có nghiệm.* Để trả lời câu hỏi của bài toán, phương án tốt nhất là GV và HS cùng tìm lời giải theo gợi ý của G.Pólya. Tuy nhiên lời nói sẽ khó định lại để giúp HS trong tư duy, thay vào đó, chúng tôi đã sử dụng phần mềm (nếu có máy tính và máy chiếu thì có thể sử dụng các phần mềm có sẵn) và Bản đồ tư duy để thiết lập mạng lưới, ở đó thể hiện phương pháp và cách làm cụ thể giúp người học chủ động tìm ra cách giải quyết vấn đề. Bản đồ (thực hiện với MindMapper 2008) chúng tôi thu được như sau:



Hình 3.19. Minh họa việc tìm lời giải bài toán

Sau khi đã có sơ đồ hệ thống các phương pháp giải, GV nên đặt những câu hỏi kích thích HS tư duy để triển khai các nhánh của bản đồ. Chẳng hạn với nhánh ứng dụng đạo hàm có thể gợi ý HS những câu hỏi sau: Nên chọn hàm số $y = f(x)$ như thế nào? ($y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$); hãy khảo sát hàm số,...

3.3.3. Tăng cường rèn luyện các hoạt động trí tuệ nhằm phát triển và bồi dưỡng năng lực tư duy cho HS, đặc biệt là tư duy sáng tạo

Thông qua biện pháp này, GV rèn luyện trực tiếp các hoạt động trí tuệ một cách tường minh cho HS để họ có thói quen phân tích, so sánh, dự đoán, tìm kiếm, thiết lập sự tương tự, xem xét sự đặc biệt, khái quát của đối tượng.... Từ đó, giúp họ tích cực hơn trong giải toán nói riêng và bồi dưỡng năng lực tư duy, đặc biệt là rèn luyện tư duy sáng tạo.

Kết hợp với các PPKTTD, như nhóm phương pháp sử dụng thủ thuật sáng tạo của khoa học kĩ thuật, người dạy có thể tạo ra những tình huống giúp người học có cơ hội rèn luyện các hoạt động trí tuệ trên, đồng thời bồi dưỡng năng lực tư duy sáng tạo cho HS.

Rèn luyện các hoạt động phân tích, so sánh, dự đoán, tương tự hoá, đặc biệt hoá, khái quát hoá,...

Trong biện pháp này chúng ta cần dùng nhiều hơn các thuật ngữ “tương tự”, “đặc biệt”, “khái quát”. Cần phải quán triệt biện pháp này trong tất cả các tình huống dạy học, GV làm mẫu và HS được yêu cầu làm theo một cách tương tự. GV nên kết hợp sử dụng các phương pháp như đặt câu hỏi, sử dụng Bản đồ tư duy để gợi ý khi phân tích, so sánh, kích thích và nối dài tư duy cho HS.

Ví dụ 3.14: Dạy học giải toán với bài toán tương tự hoá, đặc biệt hoá và khái quát hoá.

Thông thường GV quan niệm rằng dạy bài tập cho HS bình thường thì không có cơ hội để thực hiện tương tự hoá, đặc biệt hoá, khái quát hoá. Nhưng GV phải thoát li quan niệm đó, và nên bắt đầu tập thói quen tư duy này cho HS thông qua các ví dụ đơn giản.

Bài toán mở đầu: “Trên mặt phẳng toạ độ, cho điểm $P(-3; 2)$, tìm hai điểm A, B trên trục Ox cách nhau 4 đơn vị sao cho $PA + PB$ nhỏ nhất”.

Giải bài toán bằng nhiều cách.

Cách 1: (Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng)

Do vai trò của A, B như nhau, ta giả sử A ở bên phải B trên trục hoành.

Gọi toạ độ điểm $A(x; 0)$ thì toạ độ điểm $B(x - 4; 0)$.

Ta có:

$$PA = \sqrt{(x+3)^2 + 4}; PB = \sqrt{(x-1)^2 + 4}$$

$$\Rightarrow M = PA + PB = \sqrt{(x+3)^2 + 4} + \sqrt{(x-1)^2 + 4}$$

Bài toán trở thành tìm x để M đạt giá trị nhỏ nhất.

Đến đây ta có hai cách tìm giá trị nhỏ nhất của M.

Cách 1a: (Khảo sát hàm số).

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt{(x+3)^2 + 4} + \sqrt{(x-1)^2 + 4}.$$

Dùng đạo hàm để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$\downarrow 4\sqrt{2}$	$\uparrow +\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min f(x) = 4\sqrt{2}$ khi $x = -1$.

Suy ra A(-1; 0) và B(-5; 0).

Vậy có 2 cặp điểm (A; B) thoả mãn là: ((-1; 0); (-5; 0)), ((-5; 0); (-1; 0)).

Cách 1b: (Bất đẳng thức hình học).

$$M = \sqrt{(x+3)^2 + 4} + \sqrt{(x-1)^2 + 4}$$

Chọn A(x; 0); P(-3; 2); P'(1; -2).

$$\Rightarrow M = AP + AP' \geq PP'$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A$ nằm giữa P và P'.

Ta thấy: A nằm trên Ox, P, P' nằm khác phía Ox.

Nên A nằm giữa P, P' khi $A = Ox \cap PP'$.

Dễ thấy A(-1; 0). Kết luận tương tự cách 1.

Cách 2: (Hình học và bất đẳng thức Cô-si).

Ta thấy P, A, B không thẳng hàng, nên xét tam giác PAB, với p là nửa chu vi.

Đặt AB = a, PA = b, PB = c. Ta có

$$S_{PAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(P, AB) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4.$$

Lại có:

$$S_{PAB} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\sqrt{p(p-a)} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{(b+c)^2 - a^2}$$

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-b)+(p-c)}{2} = \frac{2p-(b+c)}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow S_{PAB} \leq \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(b+c)^2 - a^2} \Rightarrow (b+c)^2 \geq \left(\frac{4S_{PAB}}{a} \right)^2 + a^2$$

$$\Rightarrow (b+c) \geq \sqrt{\left(\frac{4S_{PAB}}{a}\right)^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow b+c \geq 4\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow p-b=p-c\Leftrightarrow b=c=2\sqrt{2}$.

Vậy $\min(PA+PB)=4\sqrt{2}$ khi tam giác PAB cân tại P với $PA=PB=2\sqrt{2}$.

Để tìm được $A(-1; 0)$. Kết luận tương tự cách 1.

Khai thác bài toán:

Ta sẽ sử dụng các thủ thuật sáng tạo để khai thác bài toán: thuật chia nhỏ, tách riêng ra, làm ngược lại.

$$Hướng 1: Khai thác giả thiết: \begin{cases} P(-3; 2) \\ A, B \in Ox \\ AB = 4 \end{cases}$$

Tác động vào các yếu tố cố định (Điểm P và độ dài đoạn AB): Thay đổi điểm $P(x_0; y_0)$ và độ dài đoạn $AB = a$ ta sẽ có lớp bài toán tương tự.

Tác động vào các yếu tố chuyển động (A, B chạy trên Ox):

+) A, B chạy trên một đường thẳng (d); P không thuộc (d).

Ví dụ: Trên mặt phẳng toạ độ, cho điểm $P(-3; 2)$, tìm điểm A, B trên đường thẳng (d): $y = x + 3$ cách nhau 4 đơn vị độ dài sao cho $PA + PB$ nhỏ nhất.

Ta có thể làm được ví dụ trên bằng cả ba cách như đã trình bày ở bài toán mở đầu.

Ta thấy P thuộc (d) nên $\min(PA + PB) = AB$ khi P nằm giữa A và B trên đường thẳng (d). Như vậy bài toán có vô số nghiệm.

+) A, B chạy trên hai đường thẳng song song (thuật kết hợp).

Ví dụ: Trên mặt phẳng toạ độ, cho điểm $P(-3; 2)$. Tìm điểm A trên (d_1): $y = x + 1$, B trên (d_2): $y = x + 3$ cách nhau 4 đơn vị độ dài (tức $AB = 4$) sao cho $PA + PB$ nhỏ nhất.

Với ví dụ này ta có thể dùng cách 1 để làm.

Nhận xét: Ở ví dụ trên, $d(d_1, d_2) \leq AB$ và P không nằm giữa d_1 và d_2 . Vậy trong các trường hợp khác thì sao?

Chú ý:

• Khi A, B chạy trên hai đường thẳng song song thì điều kiện cần là $d(d_1, d_2) \leq AB$.

• Vị trí tương đối giữa P và d_1, d_2 không quan trọng, cách làm hoàn toàn tương tự.

– *A, B chạy trên hai đường thẳng cắt nhau.*

– *Ta sử dụng thuật kết hợp để tìm ra và giải bài toán cho nhiều điểm.*

Bài toán: Trong mặt phẳng toạ độ, cho điểm $P(-3; 2)$. Tìm ba điểm A, B, C trên Ox (sắp đúng thứ tự) và $AB = 4$, $BC = 3$ sao cho $PA + PB + PC$ nhỏ nhất.

Hướng giải:

Do hạn chế A, B, C sắp đúng thứ tự trên Ox nên khi có một điểm A thì tồn tại duy nhất các điểm B, C thoả mãn đề bài:

$$M = PA + PB + PC.$$

M đạt giá trị nhỏ nhất một trong các trường hợp sau: khi $PA + PB$ nhỏ nhất, hoặc $PB + PC$ nhỏ nhất, hoặc $PA + PC$ nhỏ nhất.

Thứ trong 3 trường hợp trên ta sẽ tìm ra giá trị nhỏ nhất của M.

Nhận xét: Bài toán này thực chất là kết hợp của ba bài toán tương tự bài toán ban đầu.

Dùng thuật *làm ngược lại* để thay đổi các yếu tố chuyển động và cố định: cho A, B cố định còn P chuyển động.

* *P chạy trên đường thẳng song song với AB.*

Ví dụ: Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(2; 3)$. Tìm điểm P chạy trên đường thẳng (d): $y = x + 3$ sao cho $PA + PB$ nhỏ nhất.

Trong ví dụ này ta có thể giải bằng các cách sau:

Cách 1: Dùng phương pháp toạ độ trong mặt phẳng.

Cách 2: Ta thấy S_{PAB} không đổi nên có thể làm theo cách 3 trong bài toán mở đầu.

** *P chạy trên đường thẳng cắt AB.*

Ví dụ: Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(2; 3)$. Tìm điểm P chạy trên đường thẳng (d): $y = 2x + 1$ sao cho $PA + PB$ nhỏ nhất.

Trong trường hợp này ta không thể làm theo cách 3 được do diện tích của tam giác PAB (khi P là giao điểm của AB và (d) thì PAB không là tam giác) thay đổi. Ta làm ví dụ này theo phương pháp toạ độ.

Hướng 2: Khai thác kết luận.

Ta có thể thay đổi câu hỏi thành: Tìm A, B để chu vi tam giác PAB nhỏ nhất.

Với câu hỏi này HS dễ dàng tìm ra cách giải 2.

Ta sử dụng *thuật tách riêng ra* để tìm thấy bài toán hình học liên quan:

- Bản chất của đoạn thẳng là: vị trí đặt và độ dài của nó.
- Đoạn thẳng AB trong bài toán nếu ta bỏ qua vị trí đặt và chỉ quan tâm tới độ dài của nó thì ta có bài toán hình học sau:

Bài toán 1: Tìm độ dài các cạnh của tam giác PAB có $AB = 4\text{cm}$ và $S_{PAB} = 4\text{cm}^2$ sao cho P_{PAB} nhỏ nhất (Xảy ra khi tam giác PAB còn ở P).

Bài toán 2: Tìm tam giác có chu vi nhỏ nhất khi diện tích không đổi (Xảy ra khi tam giác đều).

Nhận xét: Bài toán 2 đơn giản hơn bài toán 1, nhưng cách làm hoàn toàn tương tự.

Ta sử dụng *thuật làm ngược lại* để có các bài toán sau:

Bài toán 1: Tìm độ dài các cạnh của tam giác PAB có $AB = 4\text{cm}$ và $PA + PB = 5\text{cm}$ sao cho S_{PAB} lớn nhất (xảy ra khi tam giác PAB còn ở P).

Bài toán 2: Tìm tam giác có diện tích lớn nhất khi chu vi không đổi (xảy ra khi tam giác đều).

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 3

Câu 1: Nêu ý nghĩa hoạt động biểu đạt tư duy của HS trong học tập môn Toán. HS thường gặp khó khăn gì về biểu đạt tư duy?

Câu 2: Thiết kế mẫu phiếu điều tra/quan sát/phỏng vấn giúp nhận biết năng lực biểu đạt tư duy, thái độ học tập của HS trong giờ học Toán.

Câu 3: Hướng dẫn HS vẽ Bản đồ tư duy tổng kết một số nội dung sau: hàm số (Đại số 10), các dạng bài toán về hàm số (Giải tích 12), logarit (Giải tích 12), đạo hàm và ý nghĩa của đạo hàm (Giải tích 11), các dạng phương trình mũ – logarit (Giải tích 12), số phức (Giải tích 12), tam thức bậc hai (Đại số 10), vector (Hình học 10), các bài toán về đường thẳng (Hình học giải tích 10 – 12), các bài toán về mặt phẳng (Hình học 12),...

Câu 4: Vận dụng biện pháp 3, xây dựng một chủ đề học tập ôn tập kiến thức cho HS.

Câu 5: Vận dụng biện pháp 2, thiết kế một số tình huống dạy học chủ đề. Ứng dụng của đạo hàm (giải tích 12), Phương pháp toạ độ trong không gian (Hình học 12).

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ (INDEX)

Thuật ngữ	Trang
ARIZ	121
Cấu trúc của phân đoán	49
Day học giải quyết vấn đề	83
Day học hợp tác	117, 118, 119, 126, 134
Dặc biệt hoá	24, 145
Định lí	53, 88
Định nghĩa khái niệm	45, 151
Độc đáo (tính độc đáo)	78
Độc lập (tính độc lập)	79
Hệ thống hoá khái niệm	47
Hợp tác nhóm	127
Khái niệm	43, 45, 47
Khái quát hoá	24
Linh hoạt (tính linh hoạt)	81, 110
Logic biện chứng	32, 55
Logic hình thức	42
Lợi dụng sự tương ứng	72
Mệnh đề đảo	94
Năng lực biểu đạt tư duy	108
Năng lực toán học	22, 36
Năng lực tư duy	10, 16, 27, 144
Não công (phương pháp não công)	116
Nghiên cứu sự tương ứng	71
Ngôn ngữ toán học	17, 137

Thuật ngữ	Trang
Nhận thức cảm tính	13, 80
Nhuần nhuyễn (tính nhuần nhuyễn)	79, 83
Phân chia khái niệm	47
Phán đoán	11, 48
Phán đoán đơn	49
Phán đoán phúc	49
Phân tích	19, 85, 121
Phân tích đi lên (suy ngược lùi)	20, 54, 100
Phân tích đi xuống (suy ngược tiến)	21, 54, 100
Phép hội	49
Phép kéo theo	50
Phép tuyển	49
Phương pháp câu hỏi kiểm tra	113
Phương pháp dạy học	103
Phương pháp dạy học tích cực	104, 119
Phương pháp đối tượng tiêu điểm	114, 115
Phương pháp học tập siêu đẳng	115
Phương pháp kích thích tư duy	103
Phương tiện của tư duy	17
Quá trình tư duy	7, 18, 121
Quy nạp	24, 51, 78
Quy tắc tựa thuật toán	68, 100
Sản phẩm của tư duy	17, 34
Sáng tạo	78, 83, 121, 144
Biểu đồ/Sơ đồ hình xương cá (Isakawa)	111, 143
Sơ đồ/bản đồ tư duy (mind maps)	112, 128
So sánh	9, 22

Thuật ngữ	Trang
Suy diễn	51, 115
Suy diễn gián tiếp	52
Suy diễn trực tiếp	52
Suy luận	15, 50, 103
Thiết lập sự tương ứng	71
Thuật toán (thuật giải)	16, 66
Tổng hợp	19, 78, 143
TRIZ	85
Tư duy hàm	70
Tư duy logic	31, 78
Tư duy phê phán	74
Tư duy sáng tạo	26, 78, 120
Tư duy thuật toán	67, 73
Tư duy toán học	7, 16, 36
Tương tự	22, 119
Tương tự hoá	120, 145

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO CHÍNH

Tiếng Việt

- [1] Michaelc W. Alssid & William Kenny (2008), *Các vấn đề tư tưởng căn bản*, NXB Từ điển bách khoa, Hà Nội.
- [2] Thomas Armstrong (2007), *Bảy loại hình thông minh*, NXB Lao động, Hà Nội.
- [3] G.I. Batusep (1975), *Tổ chức một cách khoa học quá trình dạy học* (sách dịch), NXB Minkh.
- [4] Edward de Bono (2003), *Sáu chiếc mũ tư duy, phương pháp tư duy năng động và hiệu quả* (sách dịch), NXB Mũi Cà Mau.
- [5] Tony Buzan (2007), *Bản đồ tư duy*, NXB Lao động – Xã hội, Hà Nội.
- [6] Nguyễn Hữu Châu (2005), *Những vấn đề cơ bản về chương trình và quá trình dạy học*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [7] Nguyễn Hữu Châu (CB), Vũ Quốc Chung, Vũ Thị Sơn (2005), *Phương pháp, phương tiện, kĩ thuật và hình thức tổ chức dạy học trong nhà trường*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
- [8] Nguyễn Mạnh Chung (2001), *Nâng cao hiệu quả dạy học khái niệm toán học bằng các biện pháp sư phạm theo hướng tích cực hoá hoạt động nhận thức của học sinh (qua dạy học các khái niệm "hàm số" và "giới hạn" cho học sinh trung học phổ thông)*, Luận án Tiến sĩ giáo dục học, Viện Khoa học giáo dục, Hà Nội.
- [9] Jacques Claret (2000), Dự án Việt – Bỉ (2001), *Tổ chức tư duy* (sách dịch), Đại học Yale.
- [10] Hồ Ngọc Đại (2000), *Tâm lí học dạy học*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [11] Jean–Marc Denommé et Madelleine Roy (2003), *Pour une pédagogie interactive – Tiến tới một phương pháp sư phạm tương tác* – (người dịch: Nguyễn Quang Thuấn – Tống Văn Quán), NXB Thanh niên.

- [12] Bobbi Deporter, Mike Hernaki (2007), *Phương pháp học tập siêu tốc*, NXB Tri thức, Hà Nội.
- [13] John Dewey (2008), *Dân chủ và giáo dục*, NXB Tri thức, Hà Nội.
- [14] Robert M. Diamond (1997), *Thiết kế, đánh giá chương trình và khoa học* (sách dịch dự án Việt – Bỉ), NXB Jossey Bass, Sanfrancisco.
- [15] Dự án Việt – Bỉ (2000), *Dạy các kỹ năng tư duy* (Sách dịch tổng hợp), Hà Nội.
- [16] Phan Dũng (2010), *Sáng tạo và đổi mới* (bộ 7 quyển), NXB Trẻ.
- [17] Norris, S.P & Ennis, R.H (1995), Dự án Việt – Bỉ (2001), *Đánh giá tư duy phê phán*, Pacific Grove, CA: Midwest Publications.
- [18] Fraser, B.J (1999), Dự án Việt – Bỉ (2000), *Sử dụng đánh giá môi trường học tập để cải thiện lớp học và không khí nhà trường. Không khí trường học: xác định, cải thiện và duy trì môi trường học tập lành mạnh*, London: Falmer Press.
- [19] Friedman, S.I; Scholnik, E.K; Cocking, R.R(1990), Dự án Việt – Bỉ, (2001), *Những thiết kế cho tư duy. Vai trò của kế hoạch trong phát triển nhận thức* (Sách dịch), NXB Đại học Cambridge.
- [20] Howard Gardner (1997), *Cơ cấu trí khôn*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [21] Phạm Minh Hạc (1991), *Góp phần đổi mới tư duy giáo dục*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [22] Phạm Minh Hạc (1992), *Tâm lý học*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [23] Nguyễn Kế Hào, Nguyễn Hữu Dũng (1995), *Hoạt động dạy học và năng lực su phạm*, Bộ Giáo dục và Đào tạo.
- [24] Trần Bá Hoành (2007), *Đổi mới phương pháp dạy học, chương trình và sách giáo khoa*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
- [25] Đặng Vũ Hoạt (2000), *Bài giảng chuyên đề về tích cực hoá*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
- [26] Đặng Vũ Hoạt (CB), Hà Thị Đức (2003). *Lí luận dạy học đại học*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội
- [27] Nguyễn Thái Hoè (1997), *Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập Toán*, NXB Giáo dục, Hà Nội

- [28] Phạm Kim Hùng (2006), *Sáng tạo bất đắc thúc*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [29] Đặng Thành Hưng (2005), *Tương tác hoạt động thầy – trò trên lớp học*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [30] Đặng Thành Hưng (2006), "Một cách hiểu về triết học giáo dục", Tạp chí Khoa học Giáo dục, Viện Chiến lược và chương trình giáo dục, (số 9), tr 15 – 17.
- [31] Đặng Thành Hưng (2002), *Day học hiện đại: lí luận, biện pháp, kĩ thuật*, NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội.
- [32] Bùi Thị Hường (2008), *Phương pháp kích thích năng lực tư duy của học sinh THPT trong dạy học giải toán*, Đề tài Nghiên cứu khoa học cấp Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [33] I.F Kharlamôp (Đỗ Thị Trang, Nguyễn Ngọc Quang dịch) (1979), *Phát huy tính tích cực học tập của học sinh như thế nào*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [34] Adam Khoo (2008), *Tôi tài giỏi, bạn cũng thế!*, NXB Phụ nữ, Hà Nội.
- [35] Trần Kiều (1995), "Một số kiến nghị về đổi mới phương pháp dạy học ở nước ta", Tạp chí Thông tin Khoa học giáo dục, (số 51), tr 26 – 31.
- [36] Nguyễn Bá Kim (2006), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
- [37] Nguyễn Bá Kim (1998), *Học tập trong hoạt động và bằng hoạt động*, NXB Giáo dục.
- [38] Nguyễn Bá Kim, Vương Dương Minh, Tôn Thân (1998), *Khuyến khích một số hoạt động trí tuệ của học sinh qua môn Toán ở trường THCS*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [39] Nguyễn Ngọc Lanh (1999), *Day – học tích cực trong đào tạo y học*, NXB Y học, Hà Nội.
- [40] Nguyễn Văn Lê (1998), *Cơ sở khoa học của sự sáng tạo*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [41] Trần Luận (1996), *Vận dụng tư tưởng sư phạm của G. Pôlya xây dựng nội dung và phương pháp dạy học trên cơ sở các hệ thống bài tập theo chủ đề nhằm phát huy năng lực sáng tạo của học sinh chuyên toán cấp II*, Luận án Phó Tiến sĩ, Viện Khoa học giáo dục Việt Nam, Hà Nội.

- [42] Robert J. Marzano, Debra J. Pickering, Jane E. Pollock (2005), *Các phương pháp dạy học hiệu quả*, Bản dịch của Hồng Lạc, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [43] Michael Michalko (2007), *Đột phá sức sáng tạo*, NXB Tri thức, Hà Nội.
- [44] Kurt W. Mortensen (2006), Sức mạnh thuyết phục, NXB Lao động, Hà Nội.
- [45] Phan Trọng Ngọ, Dương Diệu Hoa, Nguyễn Lan Anh (2001), *Tâm lí học trí tuệ*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [46] G. Pólya (Hà Sĩ Hồ dịch) (1997), *Giải bài toán như thế nào*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [47] G. Pólya (Hoàng Chung, Lê Đình Phi, Nguyễn Hữu Chương, Hà Sĩ Hồ dịch) (1997), *Toán học và những suy luận có lí*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [48] G. Pólya (Nguyễn Sĩ Tuyển, Phan Tất Đắc, Nguyễn Giản, Hồ Thuần dịch) (1997), *Sáng tạo toán học*, NXB Giáo dục.
- [49] Ngô Đình Qua (2000), *Một số biện pháp phát huy tính tự lực trong học tập của học sinh THPT*, Luận án Tiến sĩ giáo dục học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.
- [50] Nguyễn Văn Quang (2005), *Hình thành một số biểu hiện đặc trưng của tư duy sáng tạo cho học sinh thông qua dạy và học chủ đề đa giác*, Luận án Tiến sĩ giáo dục học, Viện Chiến lược và chương trình giáo dục, Hà Nội.
- [51] E.S. Quellmals (2000), *Phát triển các kỹ năng lập luận*, Đại học Stanford.
- [51] Causinet – Roger (2000), *Một số phương pháp làm việc tự do cho các nhóm*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [53] J.J. Rousseau (2008), *Émile hay là về giáo dục*, NXB Tri thức, Hà Nội.
- [54] R.R. Singh (1994), *Nền giáo dục cho thế kỉ XXI – những triển vọng của châu Á Thái Bình Dương*, Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.
- [55] R. Sternberg (2000), *Dạy trí thông minh: việc ứng dụng tâm lí học nhận thức để nâng cao các kỹ năng trí tuệ* (Sách dịch), Dự án Việt – Bỉ Đại học Yale.
- [56] Peter Sutherland (2001), *Việc học tập của người lớn*, Dự án VHO/HRH – 001, NXB Y học, Hà Nội.

- [57] Đào Tam, Lê Hiển Dương (2008), *Tiếp cận các phương pháp dạy học không truyền thống trong dạy học toán ở trường đại học và trường phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
- [58] Đào Tam, Nguyễn Ánh Dương (2008), "Một số tri thức thuộc phạm trù triết học duy vật biện chứng trong hoạt động kiến tạo kiến thức toán học ở trường trung học phổ thông", Tạp chí Giáo dục (số 193).
- [59] Nguyễn Duy Thuận (2007), *Phát triển tư duy toán học trong học sinh*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
- [60] Nguyễn Văn Thuận (2004), *Góp phần phát triển năng lực tư duy logic và sử dụng chính xác ngôn ngữ toán học cho học sinh đầu cấp trung học phổ thông trong dạy học đại số*, Luận án Tiến sĩ Giáo dục học, Trường Đại học Vinh.
- [61] Chu Cẩm Thơ (2010), *Vận dụng Phương pháp kích thích tư duy cho học sinh trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, Luận án Tiến sĩ Giáo dục học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.
- [62] Trường Đại học Thuỷ Lợi (2008), *Kĩ năng tư duy phê phán*, NXB Khoa học và Công nghệ, Hà Nội.
- [63] Nguyễn Cảnh Toàn (1997), *Fương pháp luận duy vật biện chứng với việc học, dạy, nghiên cứu Toán học*, Tập 1, 2, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [64] Nguyễn Cảnh Toàn (chủ biên), Nguyễn Kì, Lê Khánh Bằng, Vũ Văn Tảo (2004), *Dạy và dạy cách học*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
- [65] Trần Thúc Trình (2003), *Đề cương môn học: Rèn luyện tư duy trong dạy học Toán*, Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.
- [66] Thái Duy Tuyên (1999), *Những vấn đề cơ bản giáo dục học hiện đại*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [67] Thái Duy Tuyên (2003), "Bồi dưỡng năng lực tự học cho học sinh", Tạp chí Giáo dục, (số 74), tr 13 – 20.
- [68] Trần Đức Vân, Đinh Nho Hào (dịch) (1989), *Toán học là đòn bẩy của phát minh*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

Tiếng nước ngoài

- [69] Joan E. Goodell (2006), *Using critical incident reflections: a self student as a mathematics teacher education*, Journal of mathematics teacher education, Springer.
- [70] G. Ivemey (1981), *The psychological bases of oral education*, In Mulholand, A Oral Education Today and Tomorrow. Washington, DC:A.G. Bell Association.
- [71] J.D. Mayer – P.Salovey (1993), *The Intelligence of emotional intelligence*, America.
- [72] M. Maxwell (1990), *Simultaneous communication: the state of the art and proposals for change*, Sign Language Studies 69, pp 333–390.
- [73] Pearpoint. J, Forest. M & Snow J (1992), *The Inclusion Papers*, Strategies to make inclusion work, Inclusion Press.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Địa chỉ: 136 Xuân Thuỷ, Cầu Giấy, Hà Nội

Điện thoại: 04.37547735 | Fax: 04.37547911

Email: hanhchinh@nxbdhsp.edu.vn | Website: www.nxbdhsp.edu.vn

Chủ trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: TS. NGUYỄN BÁ CUỐNG

Chủ trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập: GS.TS. ĐỖ VIỆT HÙNG

Hội đồng thẩm định:
GS.TS. BÙI VĂN NGHĨ
PGS.TS. TÔN THẦN
TS. LÊ TUẤN ANH

Biên tập nội dung:
PHẠM HỒNG BẮC

Kỹ thuật vi tính:
NGUYỄN NGUYỆT NGA

Trình bày bìa:
NGUYỄN TRỌNG ANH

PHÁT TRIỂN TƯ DUY THÔNG QUA DẠY HỌC MÔN TOÁN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

ISBN 978-604-54-0423-2

In 500 cuốn, khổ 17 x 24cm tại Công ty cổ phần In & Truyền thông Hợp Phát

Địa chỉ: Căn hộ 807 nhà N2D khu đô thị Trung Hoà - Nhân Chính,

phường Nhân Chính, quận Thanh Xuân, Thành phố Hà Nội

Số xác nhận đăng ký xuất bản: 245-2016/CXBIPH/58-10/ĐHSP

Quyết định xuất bản số: 651/QĐ-NXBĐHSP ngày 24/6/2016

In xong và nộp lưu chiểu Quý III năm 2016.

