TRẦN BÌNH

GIẢI TÍCH II&III

Phép tính vi phân và tích phân của hàm nhiều biến

DÙNG CHO SINH VIÊN KỸ THUẬT,
CAO ĐẲNG, ĐẠI HỌC, SAU ĐẠI HỌC

NHÀ XUẤT BẢN
KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRẦN BÌNH

GIẢI TÍCH II + III

PHÉP TÍNH VI PHÂN & TÍCH PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Dùng cho sinh viên kỹ thuật
(Cao đẳng, đại học, sau đại học)
(In lần thứ tư có sửa chữa và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2009

LỜI GIỚI THIỆU

Trong những năm gần đây yêu cầu về giảng dạy và học tập môn toán cao cấp trong các trường Đại học kỹ thuật (Cao đẳng, Đại học và sau Đại học) ngày càng cấp bách về số lượng và chất lượng. Các sinh viên kỹ thuật cần nhiều giáo trình toán cao cấp theo hướng hiện đại về lý thuyết cũng như bài tập. Các thầy giáo cũng cần nhiều bộ giáo trình như thế để tham khảo, chuẩn bị bài giảng và chọn cho mình một chiến lược giảng dạy thích hợp. Trong lúc đó số lượng các giáo trình về toán cao cấp dành cho các trường kỹ thuật chỉ đếm được trên đầu ngón tay. Nhiều bộ giáo trình về toán cao cấp đã được xuất bản hiện nay chưa đạt trình độ cao, sâu sắc, đáp ứng được yêu cầu học toán và dạy toán cho các kỹ sư trong thời đại khoa học kỹ thuật và thông tin phát triển bùng nổ như hiện nay.

Giáo trình này của tác giả ra đời đáp ứng nhiều nhu cầu hết sức cấp bách hiện nay về mặt giáo trình toán cao cấp cho sinh viên các trường Đại học kỹ thuật (Cao đẳng, Đại học và sau Đại học). Về toàn cục nội dung của giáo trình này bao gồm các vấn đề cơ bản và quan trọng nhất của toán học cao cấp cần thiết cho một kỹ sư: đó là những cơ sở quan trọng của phép tính vi phân của hàm một biến và hàm nhiều biến, các định lý và phương pháp cơ bản của phép tính tích phân của hàm một biến và hàm nhiều biến, cơ sở của giải tích vecteur, hình học vi phân, lý thuyết cơ bản về phương trình vi phân, chuỗi hàm, chuỗi Fourier và tích phân Fourier. Các thông tin đề cập đến các vấn đề trên của tác giả là cơ bản, đảm bảo tính chính xác về nội dung toán học. Các chứng minh đưa ra đều ngắn gọn, chặt chẽ.

Đặc biệt phần đề cập đến lý thuyết về hàm nhiều biến là một vấn đề rất tinh tế trong giải tích toán học, vì ở đây nhiều tình huống xảy ra phức tạp hơn nhiều ở trong Topo nhiều chiều so với Topo một chiều. Do nắm vững các kiến thức cơ bản của giải tích toán học dựa trên kinh nghiệm giảng dạy toán học cho các trường Đại học kỹ thuật trong và ngoài nước trong nhiều năm qua, tác giả trình bày toàn bộ giáo trình và nói riêng nội dung của phần này rất đầy đủ và hiện đại (ví dụ phần đề cập đến cực trị của hàm nhiều biến, tác giả đã sử dụng nhuần nhuyễn các định lý về dạng toàn phương để chứng minh các điều kiện đủ của cực trị)

Giáo trình được viết một cách sáng sủa và chặt chẽ theo một dây chuyền tư duy logique, đó là hai yếu tố rất khó khi đề cập đến một vấn đề toán học. Thông thường để vấn đề đặt ra đảm bảo tính chặt chẽ và chính xác của toán học thì người đọc sẽ rất khó hiểu, hoặc phải có một khả năng tư duy tốt, nói cách khác là một thói quen tư duy toán học. Ở đây tác giả kết hợp được hai điều nói trên: vẫn không mất chính xác mà vẫn đảm bảo tính dễ hiểu cho sinh viên (ví dụ phần xây dựng hệ tiên đề về số thực, phần tích phân phụ thuộc tham số, tích phân suy rộng...).

Giáo trình này đã đề cập đến một số vấn đề khá hiện đại của toán học mà trước đây trong các giáo trình về toán cao cấp ít đề cập tới như khái niệm không gian métrique, hội tụ đều, chuỗi Fourier tổng quát,... Ngoài ra tác giả còn đưa vào những bổ sung rất cần thiết cho người kỹ sư như các phần: toán tử Laplace giải phương trình vi phân, các bài toán cơ bản của vật lý toán học (truyền nhiệt, truyền sóng, ...), phần phụ lục các công thức cơ bản nhất của toán học. Việc mạnh dạn đưa vào giáo trình các vấn đề như thế là một việc làm rất cần thiết để nâng cao chất lượng đào tạo người kỹ sư, vì ngày nay người kỹ sư cần toán học ở mức độ sâu sắc và hiện đại trong quá trình học tập để tiếp cận với công nghệ và tin học hiện đại.

Hà nội, ngày 30 tháng 4 năm 1997

GS. TSKH Lê Hùng Sơn

LỜI NÓI ĐẦU

Trong những năm vừa qua, khoa toán trường Đại học Bách khoa Hà Nội đã nghiên cứu đề tài: " Xây dựng nội dung chương trình toán cao cấp cho các ngành kỹ thuật trên cơ sở trung học, học sinh đã học toán theo chương trình mới (12 năm)" và đã đề ra được một chương trình toán cao cấp theo yêu cầu đó.

Qua giảng dạy môn giải tích ở Đại học kỹ thuật trong và ngoài nước trong nhiều năm qua, và dựa theo chương trình toán đã đề ra, tôi viết giáo trình này, nhằm mục đích giúp các sinh viên kỹ thuật có tài liệu tham khảo, góp phần nâng cao chất lượng đào tạo, để trình độ toán của người kỹ sư của ta được hoà nhập vào khu vực và quốc tế

Trong phần đầu của giáo trình, vì sinh viên đã được học một số nội dung ở trung học, nên mục đích là hệ thống hoá và nâng lên một mức độ tương đối hiện đại (Phương pháp tiên đề về số thực) nhằm giúp sinh viên có một tư duy logique chặt chẽ trong việc học tập toán và các ngành khác.

Trong phần sau của giáo trình, dựa trên cơ sở phần đầu đã trình bày, giáo trình cung cấp những kiến thức cơ bản của giải tích từ thấp đến cao phù hợp với yêu cầu của người kỹ sư trong hiện tại và tương lai.

Giáo trình này có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho các sinh viên kỹ thuật ở cả ba đối tượng: cao đẳng, đại học, và sau đại học.

Giáo trình được chia thành hai tập:

Tập I: Phép tính vi phân và tích phân của hàm một biến (Giải tích I)

Tập II: Phép tính vi phân và tích phân của hàm nhiều biến. Phương trình vi phân và lý thuyết chuỗi (Giải tích II + III).

Các phần nâng cao và các bài tập khó đều đánh dấu *.

(tương ứng với ba học kỳ đầu của mỗi khoá học theo chương trình của bộ đã ban hành).

Tôi rất cảm ơn Hội đồng khoa học khoa Toán trường Đại học Bách khoa Hà Nội và các bạn đồng nghiệp trong khoa đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi viết giáo trình này, nhất là các đồng chí Trần Xuân Hiến, Đặng Khải, Lê Hùng Sơn, Dương Quốc Việt, Nguyễn Cảnh Lương đã đọc rất kỹ bản thảo và cho nhiều ý kiến quý báu.

Giáo trình này tuy xuất bản lần hai, vẫn không tránh khỏi thiếu sót mong bạn đọc cho nhiều ý kiến.

Tác giả

MỤC LỤC

Lời giới thiệu 3

Lời nói đầu 5

Chương 8 15

ÁP DỤNG PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀO HÌNH HỌC

A- ĐƯỜNG CONG PHẲNG 15

§1. Khảo sát sơ bộ 15

1.1. Phương trình của đường cong 16

1.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến 17

1.3. Vi phân cung 18

§2. Độ cong 18

2.1. Định nghĩa 19

2.2. Công thức tính độ cong 21

§3. Đường tròn mật tiếp – Bán kính cong và tâm cong 21

3.1. Định nghĩa 21

3.2. Công thức tính bán kính cong 22

3.3. Toạ độ của tâm cong 26

§4. Đường túc bế và đường thân khai 26

4.1. Định nghĩa 26

4.2. Tính chất 28

§5. Hình bao của một họ đường cong 31

5.1. Điểm bất thường của đường cong 31

5.2. Hình bao của họ đường cong 34

B- ĐƯỜNG TRONG KHÔNG GIAN 39

§1. Sơ lược về giải tích vecteur 39

1.1. Hàm vecteur đối vô hướng 39

1.2. Đạo hàm của hàm vecteur 40

§2. Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường 43

2.1. Phương trình 43
2.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến. Tam diện Frénet 45
§3. Độ cong và độ xoắn 49
3.1. Độ cong 49
3.2. Độ xoắn 52
C- MẶT, TIẾP DIỆN VÀ PHÁP TUYẾN VỚI MỘT MẶT 57
§1. Mặt cho theo phương trình không giải 58
§2. Mặt cho theo phương trình tham số 61
Bài tập 63
Hướng dẫn và trả lời bài tập 67

Chương 9. **TÍCH PHÂN BỘI**
A - TÍCH PHÂN KÉP
§1. Khái niệm tổng quát 73
1.1. Định nghĩa 73
1.2. Điều kiện khả tích 74
1.3. Ý nghĩa hình học và cơ học của tích phân kép 74
1.4. Tính chất của tích phân kép 76
§2. Cách tính tích phân kép 77
2.1. Tọa độ Descartes 77
2.2. Tọa độ độc cực 86
2.3. Quy tắc tổng quát đổi biến số của tích phân kép 90
§3. Áp dụng của tích phân kép 95
3.1. Áp dụng hình học 95
3.2. Áp dụng cơ học 101
B - TÍCH PHÂN BỘI BA
§1. Khái niệm tổng quát 103
1.1. Định nghĩa 103
1.2. Ý nghĩa hình học và cơ học của tích phân bội ba 104
§2. Cách tính tích phân bội ba 105
2.1. Tọa độ Descartes 105
2.2. Tọa độ cong – quy tắc tổng quát đổi biến số 110
§3. Áp dụng của tích phân bội ba 118

3.1. Áp dụng hình học 118
3.2. Áp dụng cơ học 120

C - TÍCH PHÂN BỘI SUY RỘNG

§1. Định nghĩa 122
1.1. Miền lấy tích phân là vô hạn (không bị chặn) 122
1.2. Hàm dưới dấu tích phân không bị chặn 124
§2. Cách tính 125
Bài tập 129
Trả lời bài tập 138

Chương 10. **TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ**

§1. Tích phân thường phụ thuộc tham số 149
1.1. Định nghĩa 149
1.2. Định lý 149
§2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số 153
2.1. Định nghĩa 153
2.2. Tiêu chuẩn 154
2.3. Định lý 155
§3. Hàm Euler 158
3.1. Hàm Gamma Γ 158
3.2. Hàm Bêta B 159
3.3. Liên hệ giữa Γ và B 160
3.4. Áp dụng 161
Bài tập 162
Trả lời bài tập 166

Chương 11. **TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ MẶT**

A- TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

§1. Tích phân đường loại một 169
1.1. Định nghĩa 169
1.2. Ý nghĩa cơ học 171
1.3. Cách tính 171
§2. Tích phân đường loại hai 173

2.1. Định nghĩa 173
2.2. Ý nghĩa cơ học 175
2.3. Cách tính 176
§3. Công thức Green, sự độc lập của tích phân đối với đường lấy tích phân 179
3.1. Công thức Green 179
3.2. Sự độc lập của tích phân đối với đường lấy tích phân 182
§4. Áp dụng của tích phân đường 188
4.1. Moment tĩnh, tọa độ trọng tâm, moment quán tính của đường cong 188
4.2. Công của một lực 188
4.3. Tính diện tích 189
4.4. Tính hàm u biết du = Pdx + Qdy 190
B - TÍCH PHÂN MẶT
§1. Tích phân mặt loại một 191
1.1. Định nghĩa 191
1.2. Ý nghĩa cơ học 192
1.3. Cách tính 192
1.4. Áp dụng 193
§2. Tích phân mặt loại hai 195
2.1. Mặt định hướng 195
2.2. Định nghĩa tích phân mặt loại hai 156
2.3. Ý nghĩa cơ học 197
2.4. Cách tính 198
§3. Công thức Stokes và công thức Ostrogadski 202
3.1. Công thức Stockes 202
3.2. Công thức Ostrogadski 207
§4. Các yếu tố của giải tích vecteur (lý thuyết về trường) 209
4.1. Trường vô hướng 209
4.2. Trường vecteur 216
4.3. Các toán tử vi phân 225
4.4. Trường ống và trường thế 226

Bài tập 227
Trả lời bài tập 238

Chương 12. **PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN**
§1. Khái niệm cơ bản 246
1.1. Các bài toán mở đầu 246
1.2. Định nghĩa phương trình vi phân 247
1.3. Bài toán Cauchy. Nghiệm riêng, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp một 249
1.4. Điểm và nghiệm bất thường 251
§2. Một số dạng đặc biệt của phương trình vi phân cấp một y' = f(x, y) 252
2.1. Phương trình biến số phân ly 252
2.2. Phương trình đẳng cấp 255
2.3. Phương trình tuyến tính 258
2.4. Phương trình Bernoulli 264
2.5. Phương trình vi phân toàn phần. Thừa số tích phân 266
2.6. Phương trình Lagrange và Clairaut 272
§3. Bài toán quỹ đạo góc α - quỹ đạo trực giao 276
3.1. Phương trình vi phân của một họ đường cong 276
3.2. Bài toán quỹ đạo góc 277
§4. Giải gần đúng phương trình vi phân cấp một 281
§5. Phương trình vi phân cấp cao 284
5.1. Khái niệm cơ bản 284
5.2. Phương trình cấp cao có thể hạ thấp cấp 285
a) Phương trình dạng $y^{(n)} = f(x)$ 285
b) Phương trình dạng $y' = f(x, y')$ 287
c) Phương trình dạng $y'' = f(y, y')$ 289
§6. Phương trình tuyến tính cấp cao 293
6.1. Định nghĩa 293
6.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai 295
6.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 305
§7. Phương trình tuyến tính cấp cao với hệ số hằng số 313

7.1. Phương trình cấp hai 313
7.2. Phương trình cấp n 327
7.3. Phương trình đưa được về phương trình với hệ số hằng số - Phương trình Euler 330
§8. Hệ phương trình vi phân 332
8.1. Định nghĩa - Bài toán Cauchy 332
8.2. Giải hệ phương trình vi phân 335
8.3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một 340
§9. Toán tử Laplace 356
9.1. Định nghĩa 356
9.2. Bảng gốc và ảnh 357
9.3. Các tính chất 359
9.4. Áp dụng giải phương trình vi phân 360
Bài tập 366
Trả lời bài tập 378

Chương 13. LÝ THUYẾT VỀ CHUỖI

A - CHUỖI SỐ

§1. Khái niệm cơ bản 389
1.1. Định nghĩa 389
1.2. Điều kiện hội tụ (điều kiện cần, điều kiện Cauchy) 391
1.3. Tính chất của chuỗi hội tụ 393
§2. Chuỗi dương 394
2.1. Định nghĩa và điều kiện hội tụ 395
2.2. Tiêu chuẩn so sánh 396
2.3. Tiêu chuẩn D'Alambert 398
2.4. Tiêu chuẩn Cauchy 400
2.5. Tiêu chuẩn Raabe 401
2.6. Tiêu chuẩn tích phân Cauchy 403
§3. Chuỗi có dấu bất kỳ 405
3.1. Định nghĩa 405
3.2. Điều kiện hội tụ

B - CHUỖI HÀM

§1. Chuỗi hàm tổng quát 412
1.1. Định nghĩa 412
1.2. Sự hội tụ đều 413
1.3. Tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều 419
1.4. Dãy hàm... 424
§2. Chuỗi lũy thừa 426
2.1. Định nghĩa 426
2.2. Miền hội tụ 427
2.3. Miền hội tụ đều 432
2.4. Tính chất 433
§3. Chuỗi Taylor và Maclaurin 436
3.1. Định nghĩa 436
3.2. Điều kiện f(x) khai triển được theo chuỗi Taylor 438
3.3. Các khai triển theo chuỗi Maclaurin của vài hàm sơ cấp 439
§4. Áp dụng của chuỗi 447
4.1. Tính giá trị của hàm số 448
4.2. Tính tích phân 452
4.3. Giải phương trình vi phân 453

C - CHUỖI VÀ TÍCH PHÂN FOURIER

§1. Chuỗi lượng giác 458
§2. Chuỗi Fourier 460
2.1. Các hệ số và chuỗi Fourier 461
2.2. Điều kiện để f(x) khai triển được theo chuỗi Fourier 465
2.3. Khai triển hàm f(x) tuần hoàn chu kỳ $2l$ theo chuỗi Fourier 468
2.4. Khai triển hàm f(x) trên đoạn $[0, l]$ theo chuỗi Fourier 471
§3. Chứng minh định lý Dirichlet 473
3.1. Bổ đề 473
3.2 Chứng minh định lý Dirichlet 475
3.3. Định lý Dirichlet 2 477
3.4. Tính khả vi và khả tích của chuỗi Fourier 478
§4. Chuỗi Fourier dưới dạng phức 479
§5. Chuỗi Fourier tổng quát 481

5.1. Không gian L_2 [a, b] 481
5.2. Chuỗi Fourier trong không gian định chuẩn 484
5.3. Sự hội tụ theo norme của chuỗi Fourier theo các dãy hàm đặc biệt trong L_2 [a, b] 488

§6. Tích phân Fourier 491
6.1. Hàm khả tích tuyệt đối 491
6.2. Tích phân Fourier 492
6.3. Tích phân Fourier của các hàm chẵn và lẻ 494
6.4. Tích phân Fourier dưới dạng phức. Biến đổi Fourier 496

§7. Áp dụng chuỗi Fourier vào vật lý 498
7.1. Bài toán dao động của dây 498
7.2. Bài toán truyền nhiệt trong thanh 508
7.3. Phương trình Laplace 515
7.4. Áp dụng của biến đổi Fourier 519

Bài tập 521
Trả lời bài tập 535

***Phụ chương*. CÁC CÔNG THỨC THÔNG DỤNG**

I. Công thức lượng giác 549
II. Bảng tích phân bất định 549
III. Bảng tích phân xác định 554
IV. Chuỗi (Chuỗi số, chuỗi lũy thừa, chuỗi Fourier) 558
V. Các hàm đặc biệt (Legendre, Hermite, Laguerre, Tchecbichef, hàm Bessel) 561
VI. Đường và mặt 564
VII. Hàm Gamma 566

Tài liệu tham khảo 576

Chương 8

ÁP DỤNG PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀO HÌNH HỌC

Trong hình học giải tích ta đã nghiên cứu các đường cong trong một hệ tọa độ nào đó. Ta thấy các đường cong có những tính chất hoàn toàn phụ thuộc vào hệ tọa độ đã chọn, chẳng hạn: độ dốc của tiếp tuyến, bề lồi, lõm. .. Tuy nhiên các đường cong còn có các tính chất chỉ phụ thuộc vào chính đường cong, gọi là các tính chất nội tại của chúng. Trong bài này sẽ nghiên cứu một số tính chất đó, vì phương tiện nghiên cứu là phép tính vi phân, nên môn học này gọi là hình học vi phân.

A- ĐƯỜNG CONG PHẲNG

§1. KHẢO SÁT SƠ BỘ

1.1. Phương trình của đường cong

Ta biết nếu cho đường cong C trong mặt phẳng thì phương trình của C hoặc có dạng

$y = f(x)$ hay $F(x,y) = 0$, $a \le x \le b$

gọi là phương trình Descartes của C

hoặc có dạng: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$

gọi là phương trình tham số của C

hoặc có dạng $r = f(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$

gọi là phương trình độc cực của C.

Cho đường cong C có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

Xét cung $\overset{\frown}{AM}$ của C, A ứng với tham số t_0, M ứng với tham số t.

Rõ ràng độ dài s của cung $\overset{\frown}{AM}$ phụ thuộc vào tham số t : $s = s(t)$.

Ngược lại t sẽ phụ thuộc s : $t = t(s)$

Do đó: $\begin{cases} x = x(t) = x[t(s)] \\ y = y(t) = y[t(s)] \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$

Đó cũng là phương trình tham số của đường cong, nhưng tham số là s. Như vậy, thay cho tham số bất kỳ t ta có thể dùng tham số đặc biệt s là độ dài cung $\overset{\frown}{AM}$ của đường cong, với A cố định, còn M là điểm chạy trên đường cong. Người ta gọi s là hoành độ cong và phương trình tham số s là phương trình tự hàm của đường cong.

Thí dụ: Ta biết phương trình tham số của đường tròn tâm O bán kính R là:

$$\begin{cases} x = R.\cos t \\ y = R.\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Với t là góc giữa trục Ox và bán kính OM (M (x,y)) mặt khác ta biết độ dài cung $\overset{\frown}{AM} = s$ ứng với góc ở tâm t là $s = Rt$ suy ra $t = \dfrac{s}{R}$. Thay lại phương trình tham số trên ta có phương trình tự hàm của đường tròn, đó là:

$$\begin{cases} x = R\cos\dfrac{s}{R} \\ y = R\sin\dfrac{s}{R} \end{cases} \qquad 0 \le s \le 2\pi R$$

1.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến:

Ta biết nếu đường cong cho theo phương trình $y = f(x)$ thì phương trình của tiếp tuyến và của pháp tuyến với đường cong tại điểm (x_0, y_0) là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ và } y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Nếu đường cong cho theo phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$ thì vì $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ nên phương trình của tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong tại (x_0, y_0) ứng với t_0 sẽ là:

$$y - y_0 = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x_0) \text{ và } y - y_0 = \frac{-x'(t_0)}{y'(t_0)}.(x - x_0)$$

hay:

$$\frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{x - x_0}{x'_0} \quad , \quad \frac{y - y_0}{x'_0} = -\frac{x - x_0}{y'_0}$$

Với $x'_0 = x'(t_0)$, $y'_0 = y'(t_0)$

Vì $\text{tg}\,\alpha = y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ nên các cosin chỉ hướng của tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ (x,y) của đường cong $y = f(x)$ sẽ là:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y'_x)^2}}\ ; \quad \sin\alpha = \frac{\text{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}} = \frac{y'_x}{\sqrt{1+(y'_x)^2}}$$

và của đường cong cho theo phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{sẽ là :} \quad \cos\alpha = \frac{x'_t}{\sqrt{x'^2_t + y'^2_t}} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{y'_t}{\sqrt{x'^2_t + y'^2_t}}$$

1.3. Vi phân cung:

Xét đường cong C có phương trình $y = f(x)$, giả sử hàm $y = f(x)$ khả vi trong lân cận của điểm x.

Xét $M(x,y) \in C, y = f(x)$

$M'(x + \Delta x), (y + \Delta y) \in C$ (Hình 87)

Đặt $\overset{\frown}{MM'} = \Delta s$

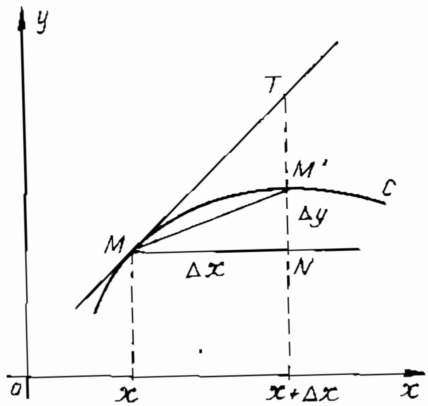
Ta có

$\overline{MM'} \le \overset{\frown}{MM'} = \Delta s \le \overline{MT} + \overline{TM'}$ (1)

Nhưng $\overline{MM'} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$,

$\overline{NT} = dy = y'.\Delta x$

$\overline{MT} = \sqrt{\Delta x^2 + dy^2} = \sqrt{1+y'^2_x}\ \Delta x$



Hình 87

$\overline{TM'} = dy - \Delta y = 0(\Delta x)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn Δx, thay vào (1) ta có:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.\Delta x \le \Delta s \le \sqrt{1+y'^2}\,\Delta x + 0(\Delta x)$$

Chia cho Δx (giả sử $\Delta x > 0$)

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \le \frac{\Delta s}{\Delta x} \le \sqrt{1+y'^2} + \frac{0(\Delta x)}{\Delta x}$$

Cho $\Delta x \to 0$ ta có:

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + y'^2}$$

hay $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ hay $ds^2 = dx^2 + dy^2$

Công thức này gọi là công thức vi phân cung của đường cong $y = f(x)$.

Nếu C cho theo phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

thì dễ dàng suy ra $ds = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\, dt$

Nếu C cho theo phương trình độc cực $r = f(\varphi)$

thì cũng dễ dàng có: $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$

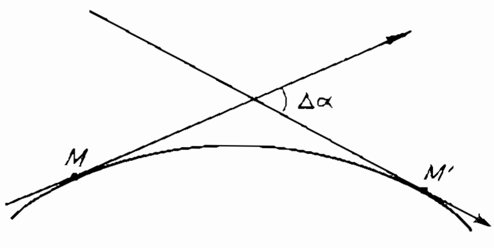
§2. ĐỘ CONG

2.1. Định nghĩa:

Xét một cung đường cong (Hình 88) giả sử tại mỗi điểm của nó chỉ có một tiếp tuyến. Ta thấy khi một điểm M chuyển rời trên đường cong thì tiếp tuyến tại M với đường cong sẽ quay một góc lớn hay nhỏ tùy theo "mức cong" của đường cong. Đặc biệt đối với đường thẳng thì góc quay đó luôn luôn bằng không vì tiếp tuyến với đường thẳng trùng với chính đường thẳng. Như vậy góc quay của tiếp tuyến đặc trưng cho "mức cong" của đường cong.

Bây giờ xét cung $\overset{\frown}{MM'}$ của đường cong, giả sử độ dài của $\overset{\frown}{MM'}$ là Δs và góc lệch của tiếp tuyến tại M, M' là $\Delta\alpha$ (tính theo đơn vị dài). Xét tỉ số $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ tỉ số này đặc trưng cho "mức cong" của đường cong trên một đơn vị dài của cung đường cong. Người ta gọi tỉ số đó là độ cong trung bình của đường cong trên cung $\overset{\frown}{MM'}$.

Kí hiệu: $K_m = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$



Hình 88

Thí dụ: Đối với đường tròn bán kính R thì $\Delta s = R|\Delta\alpha|$ do đó độ cong trung bình của nó:

$$K_M = \left|\frac{\Delta\alpha}{R\Delta\alpha}\right| = \frac{1}{R}$$

Nghĩa là độ cong trung bình của đường tròn luôn luôn không đổi và bằng nghịch đảo của bán kính.

Đối với một đường cong bất thì nói chung độ cong trung bình sẽ thay đổi trên các đoạn cung khác nhau. Ta thấy nếu Δs càng nhỏ thì độ cong trung bình càng đặc trưng được gần "mức cong" của đường cong tại một điểm. Một cách lý tưởng người ta xem giới hạn:

$$\lim_{\Delta s\to 0} K_M = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| \qquad (\Delta s \to 0 : M' \to M)$$

là đặc trưng cho "mức cong" của đường cong tại điểm M, và gọi giới hạn đó là độ cong của đường cong tại điểm M.

Kí hiệu: $$K = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

Theo định nghĩa đạo hàm thì $K = \left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$ (1)

nghĩa là: Độ cong tại điểm M của đường cong bằng trị số tuyệt đối của đạo hàm góc lệch của tiếp tuyến và trục Ox tại M đối với hoành độ cong s.

Thí dụ: Đối với đường tròn bán kính R thì:

$$K = \lim_{\Delta s\to 0} K_M = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

nghĩa là độ cong của đường tròn tại mọi điểm cũng luôn luôn không đổi và cũng bằng nghịch đảo của bán kính (như độ cong trung bình của nó).

Chú ý rằng khái niệm độ cong trung bình và độ cong tại một điểm mà ta vừa đưa ra hoàn toàn tương tự như khái niệm tốc độ trung bình và tốc độ tức thời trong cơ học.

2.2. Công thức tính độ cong:

1°. Đường cong cho theo phương trình y = f(x)

Công thức (1) có thể viết $K = \left|\dfrac{d\alpha}{dx}\cdot\dfrac{dx}{ds}\right|$ (1')

Theo ý nghĩa hình học của đạo hàm tg $\alpha = y'$

Suy ra $\alpha = \text{arctg}y'$ và $\dfrac{d\alpha}{dx} = \dfrac{y''}{1+y'^2}$

Theo công thức vi phân cung:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,.dx$$

Thay $\dfrac{d\alpha}{dx}$, $\dfrac{dx}{ds}$ vừa tìm được vào (1') ta có:

$$K = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (a)$$

2⁰. Đường cong cho theo phương trình tham số x = x(t), y = y(t)

Do các công thức liên hệ:

$$y'_x = \frac{y'}{x'}, \quad y''_{x^2} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^3} \text{ với } x' = x'(t),\ y' = y'(t)$$

và theo (a) ta có.

$$K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} \qquad (b)$$

3⁰. Đường cong cho theo phương trình độc cực r = f(φ)

Do các công thức liên hệ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = f(\varphi).\cos\varphi \\ y = f(\varphi).\sin\varphi \end{cases}$$

nên có thể coi đường cong là cho theo tham số φ, tính đạo hàm của x, y theo φ rồi thay vào công thức (b).

ta có:

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}} \qquad (c)$$

Thí dụ:

1) Tìm độ cong của parabole $y = ax^2$ tại gốc 0.

Ta tính $y' = 2ax$, $y'' = 2a$ tại gốc 0, $x = 0$ thì $y' = 0$, $y'' = 2a$, thay vào công thức (a) ta có:

$$K = \frac{|2a|}{\left(1 + 0^2\right)^{3/2}} = |2a|$$

2) Tìm độ cong của đường ellipse: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Tại một điểm bất kỳ và tại đỉnh $(a,0)$. Ta tính:

$x' = -a\sin t$, $x'' = -a\cos t$, $y' = b\cos t$, $y'' = -b\sin t$

Thay vào công thức (b) ta có:

$$K = \frac{\left|-a\sin t(-b\sin t) - (-a\cos t)(b\cos t)\right|}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}$$

Tại đỉnh $(a, 0)$ ta có.

$$K = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}$$

3) Tìm độ cong của đường cardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$,

Tại điểm $(0, 2a)$. Ta tính $r' = -a\sin\varphi$, $r'' = -a\cos\varphi$

Tại $\varphi = 0$ thì $r' = 0$, $r'' = -a$, thay vào công thức (c) ta có:

$$K = \frac{\left|4a^2 + 2a^2\right|}{\left(4a^2\right)^{3/2}} = \frac{3}{4a}$$

§3. ĐƯỜNG TRÒN MẬT TIẾP - BÁN KÍNH CONG VÀ TÂM CONG.

3.1. Định nghĩa:

Khi nghiên cứu một điểm trên một đường cong để được tiện lợi trong nhiều trường hợp người ta thay cung - đường cong tại lân cận điểm nghiên cứu bằng một cung của đường tròn có độ cong bằng độ cong của đường cong tại điểm đó. Đường tròn này gọi là đường tròn mật tiếp với đường cong. Một cách chính xác ta định nghĩa: Ta gọi đường tròn mật tiếp hay đường tròn chính khúc với đường cong tại điểm M của đường cong là đường tròn:

Tiếp xúc với đường cong tại M.

Bề lõm của nó trùng với bề lõm của đường cong tại M.

Độ cong của nó bằng độ cong của đường cong tại M (Hình 48). Tâm của đường tròn mật tiếp gọi là tâm cong (tâm chính khúc) và bán kính của đường tròn mật tiếp gọi là bán kính cong (khúc bán kính) của đường cong tại M.

3.2. Công thức tính bán kính cong:

Ta biết với đường tròn thì tại mọi điểm của nó độ cong $K = \frac{1}{R}$ suy ra bán kính của đường tròn bằng nghịch đảo của độ cong $R = \frac{1}{K}$. Do đó theo các công thức tính độ cong (a), (b), (c) ở §2.2 ta suy ra các công thức tính bán kính cong của đường cong tại một điểm trong các trường hợp đường cong cho theo phương trình $y = f(x)$, tham số và độc cực:

$$R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{|y''|} \quad , \quad R = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|} \quad , \quad R = \frac{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}}{\left|r^2 + 2r'^2 - rr''\right|}$$

Thí dụ: Theo các thí dụ ở §2.2 thì:

Bán kính cong của Parabole $y = ax^2$ tại gốc 0 là:

$$R = \frac{1}{K} = \left|\frac{1}{2a}\right|$$

Bán kính cong của đường ellipse tại một điểm bất kỳ là

$$R = \frac{1}{K} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}$$ và tại đỉnh $(a, 0)$ là $R = \dfrac{b^2}{a}$

Bán kính cong của đường cardioide tại điểm $(0, 2a)$ là:

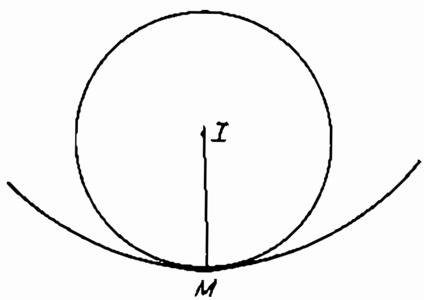
$$R = \frac{1}{K} = \frac{4a}{3}$$

3.3. Toạ độ của tâm cong:

Theo định nghĩa thì tâm cong của đường cong tại M phải nằm trên pháp tuyến với đường cong tại M về phía lõm của đường cong (Hình 89). Ta sẽ tìm các công thức xác định tọa độ của tâm cong:

Đầu tiên xét đường cong cho theo phương trình $y = f(x)$. Giả sử tâm cong của đường cong tại $M(x,y)$ là $I(x_0, y_0)$.

Theo định nghĩa $MI = R$ là bán kính cong tại M.



Hình 89

hay $$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 = \frac{\left(1 + y'^2\right)^3}{y''^2} \qquad (1)$$

Ta biết phương trình pháp tuyến tại M với đường cong là:

$$Y - y = \frac{-1}{y'}(X - x)$$

X, Y là toạ độ chạy trên đường pháp tuyến.

Vì I ở trên pháp tuyến nên

$$y_0 - y = \frac{-1}{y'}(x_0 - x)$$

hay $x_0 - x = -y'(y_0 - y)$ (2)

Giải hệ gồm (1) và (2) ta sẽ có toạ độ x_0, y_0 của tâm cong.

Cụ thể thay (2) vào (1) ta có:

$$y'^2(y_0 - y)^2 + (y_0 - y)^2 = \frac{\left(1 + y'^2\right)^3}{y''^2}$$

hay:

$$(1 + y'^2)(y_0 - y)^2 = \frac{\left(1 + y'^2\right)^3}{y''^2}$$

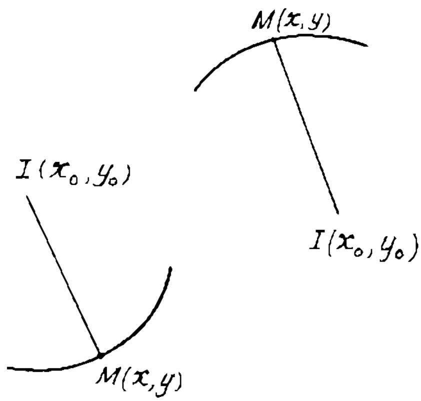
Suy ra: $$y_0 - y = \pm\frac{1 + y'^2}{y''} \qquad (3)$$

Để chọn dấu + hay - ta xét như sau: (Hình 90)

Nếu $y'' > 0$ thì đường cong là lõm lúc đó $y_0 - y > 0$

Suy ra: vế phải của (3) phải dương nhưng $\frac{1 + y'^2}{y''} > 0$ (do $y'' > 0$) nên ta phải chọn dấu +

Nếu $y'' < 0$ thì đường cong là lồi, lúc đó $y_0 - y < 0$, suy ra: vế phải của (3) phải âm, nhưng $\frac{1 + y'^2}{y''} < 0$ (do $y'' < 0$).



Hình 90

nên ta vẫn phải chọn dấu +. Tóm lại, ta phải lấy:

$$y_0 - y = + \frac{1 + y'^2}{y''} \qquad (3')$$

Từ (3') suy ra: $y_0 = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}$

Mặt khác thay (3') vào (2) ta sẽ suy ra:

$$x_0 = x - \frac{\left(1 + y'^2\right)y'}{y''}$$

Vậy đối với đường cong $y = f(x)$ thì toạ độ của tâm cong x_0, y_0 ứng với điểm bất kỳ (x,y) của đường cong được xác định bởi:

$$x_0 = x - \frac{\left(1 + y'^2\right)y'}{y''} \qquad (a)$$

$$y_0 = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \qquad (b)$$

Đối với đường cong cho theo tham số

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

thì theo các công thức liên hệ:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y''_{x^2} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}$$

và các công thức (a), (b) ta suy ra các công thức xác định tọa độ của tâm cong x_0, y_0 ứng với một điểm bất kỳ (x,y) của đường cong là:

$$x_0 = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.y' \qquad (c)$$

$$y_0 = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.x' \qquad (d)$$

Biết tọa độ x_0, y_0 của tâm cong và bán kính cong R ta có phương trình của đường tròn mật tiếp là:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Thí dụ:

1) Tìm tọa độ tâm cong và viết phương trình của đường tròn mật tiếp với parabole $y = ax^2$ tại đỉnh (0,0) của nó. Ta tính $y' = 2ax$, $y'' = 2a$, tại đỉnh $x = 0$ thì $y' = 0$, $y'' = 2a$.

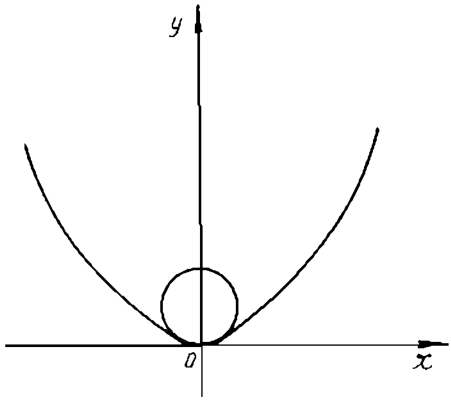
Thay vào các công thức (a), (b) ta có tọa độ của tâm cong là:

$$x_0 = 0,\ y_0 = \frac{1}{2a}$$

Ta biết bán kính cong của parabole tại đỉnh là

$$R = \frac{1}{|2a|}$$

Vậy phương trình của đường tròn mật tiếp với parabole tại đỉnh(hình 91) là:



Hình 91

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a^2}$$

2) Tìm tâm cong của ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ tại một điểm bất kỳ của nó và viết phương trình đường tròn mật tiếp tai đỉnh (a, 0) của nó (Hình 92), ta tính:

$$x' = -a\sin t, \qquad x'' = -a\cos t$$

$$y' = b\cos t, \qquad y'' = -b\sin t$$

Thay vào các công thức (c), (d) ta có toạ độ tâm cong của ellipse tại một điểm bất kỳ:

$$x_0 = a\cos t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}.b\cos t$$

$$y_0 = b\sin t + \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}.(-a\sin t)$$

hay rút gọn có.

$$x_c = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$$

$$y_c = \frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

Đỉnh $(a, 0)$ ứng với $t = 0$, lúc đó:

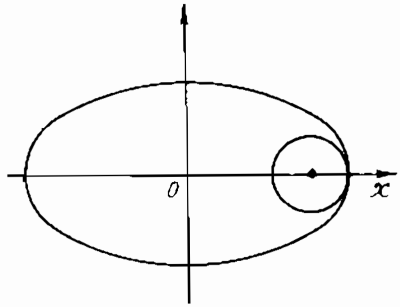
$$x_0 = \frac{a^2 - b^2}{a}, \qquad y_0 = 0$$

Ta lại biết bán kính cong của ellipse tại đỉnh $(a, 0)$ là

$R = b^2/a$.

Vậy phương trình của đường tròn mật tiếp tại đỉnh đó là

$$\left(x - \frac{a^2 - b^2}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$



Hình 92

§4. ĐƯỜNG TÚC BẾ VÀ ĐƯỜNG THÂN KHAI

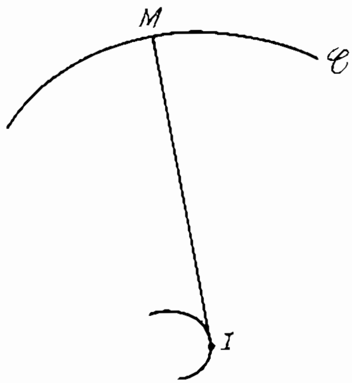
4.1. Định nghĩa:

Xét đường cong C, khi điểm M thay đổi trên C thì tâm cong I tương ứng với M sẽ thay đổi.

Quĩ tích L các tâm cong I của đường cong C gọi là đường túc bế của C, còn C thì gọi là đường thân khai của đường túc bế đó (Hình 93).

Để lập phương trình đường túc bế của C, đầu tiên xét C có phương trình $y = f(x)$.

Xét $(X, Y) \in L$ ứng với M $(x, y) \in C$ thì theo các công thức tọa độ của tâm cong ta có



Hình 93

$$X = x - \frac{1+y'^2}{y''}y'$$

$$Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

Ta thấy X, Y phụ thuộc x hoặc y (vì x, y phụ thuộc nhau: $y = f(x)$). Do đó và theo định nghĩa hệ (1) chính là phương trình tham số của đường túc bế L của C với tham số là x hoặc y.

Bây giờ xét C cho theo phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(X, Y) \in L$ ứng với điểm (x, y) bất kỳ của C. Ta được:

$$X = x - \frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}.y'$$

$$Y = y + \frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}.x' \qquad (2)$$

Ta thấy X, Y phụ thuộc t (vì x, y phụ thuộc t). Do đó và theo định nghĩa thì hệ phương trình (2) chính là phương trình tham số của đường túc bế L của C với tham số t.

Chú ý rằng nếu khử được tham số ở (1) hoặc (2) thì sẽ có phương trình liên hệ giữa X, Y của túc bế của C:

$$F(X, Y) = 0$$

Thí dụ:

1) Tìm túc bế của parabole $y^2 = 2px$

Ta tính y', y''. Đạo hàm 2 vế phương trình của parabole theo x ta có:

$2y.y' = 2p$, suy ra: $y' = \dfrac{p}{y}$, $y'' = \dfrac{-py'}{y^2} = \dfrac{-p^2}{y^3}$, mặt khác từ $y^2 = 2px$

Suy ra $x = \dfrac{y^2}{2p}$, thay x, y', y'' vừa tìm được vào hệ (1) ta có:

$$X = \frac{y^2}{2p} - \frac{1+\dfrac{p^2}{y^2}}{-\dfrac{p^2}{y^3}}.\frac{p}{y} = \frac{y^2}{2p} + \frac{y^2+p^2}{y^2}.\frac{y^3}{p^2}.\frac{p}{y} = \frac{3y^2}{2p} + p$$

$$Y = y + \frac{1+\dfrac{p^2}{y^2}}{-\dfrac{p^2}{y^3}} = y - \frac{y^2+p^2}{y^2}.\frac{y^3}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}$$

Do đó phương trình túc bế của parabole theo tham số y là:

$$X = \frac{3y^2}{2p} + p \qquad (a)$$

$$Y = -\frac{y^3}{p^2} \qquad (b)$$

Khử y bằng cách rút y^2 ở (a):

$$y^2 = \frac{2p}{3}(X - p) \qquad (c)$$

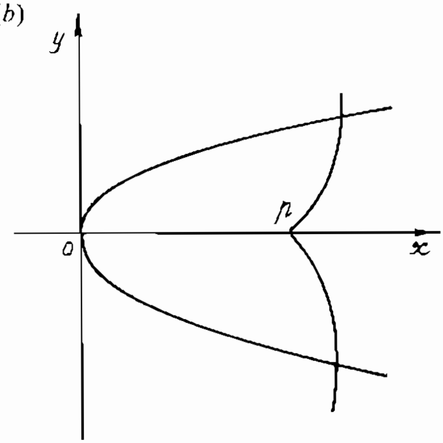
Bình phương (b) ta được:

$$Y^2 = \frac{y^6}{p^4} \qquad (d)$$

Thay y^2 ở (c) vào (d) ta được

$$Y^2 = \frac{8}{27p}(X - p)^3$$

Đó là đường parabole bán tam thừa cắt trục Ox tại $(p, 0)$ (Hình 94)



Hình 94

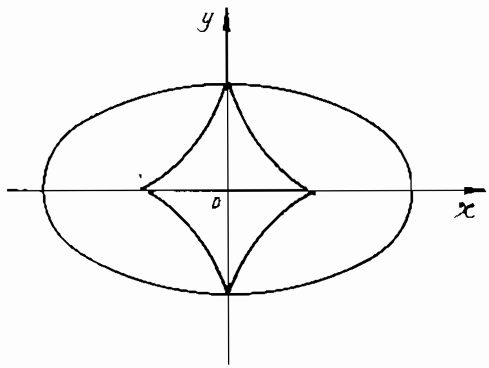
2) Tìm túc bế của ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$

Theo các công thức tính tọa độ của tâm cong của ellipse tại một điểm bất kỳ của nó ở thí dụ 2, §3.3 ta có ngay phương trình túc bế của ellipse theo tham số t là:

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$Y = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

Đó là đường astroide (Hình 95)



Hình 95

4.2. Tính chất:

Ta sẽ đưa ra vài tính chất quan trọng của túc bế và thân khai, từ đó có thể tìm được đường thân khai khi cho trước túc bế của nó.

1° - Tiếp tuyến của đường túc bế là pháp tuyến của đường thân khai của nó (tại các điểm tương ứng).

Chứng minh: - Xét túc bế có phương trình:

$$X = x - \frac{1+y'^2}{y''}y',\ Y = y + \frac{1+y'^2}{y''} \qquad \text{với } y'' > 0$$

Theo các công thức xác định cosin chỉ hướng của tiếp tuyến ở §1 và bán kính cong R ở §3 thì:

$$\frac{1+y'^2}{y''}.y' = \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}.\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = R\sin\alpha$$

$$\frac{1+y'^2}{y''} = \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}.\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = R\cos\alpha$$

Do đó: $X = x - R\sin\alpha$

$Y = y + R\cos\alpha$

Suy ra: $dX = dx - R\cos\alpha d\alpha - dR.\sin\alpha$

$dY = dy - R\sin\alpha d\alpha + dR\cos\alpha$

Nhưng: $R\cos\alpha d\alpha = \frac{ds}{d\alpha}.\frac{dx}{ds}.d\alpha = dx$

$R\sin\alpha d\alpha = \frac{ds}{d\alpha}.\frac{dy}{ds}.d\alpha = dy$

(do $y'' > 0$), nên $R > 0$: $R = ds/d\alpha$, còn:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1+y'^2}dx} = \frac{dx}{ds}$$

$$\sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y'dx}{\sqrt{1+y'^2}dx} = \frac{dy}{ds}$$

Vậy $dX = -dR.\sin\alpha$

$dY = dR.\cos\alpha$ (1)

Suy ra: $\frac{dY}{dX} = \frac{-d.R.\cos\alpha}{dR.\sin\alpha} = -\cot g\alpha = -\frac{1}{y'}$ hay $Y' = \frac{-1}{y'}$

Y' là hệ số góc của tiếp tuyến của túc bế, còn $-\frac{1}{y'}$ là hệ số góc pháp tuyến của thân khai. Vậy tiếp tuyến của túc bế là pháp tuyến của thân khai.

2° - Nếu trên cung $\overset{\frown}{AM}$ của đường cong, bán kính cong R biến thiên đơn điệu thì hiệu giữa bán kính cong R tại M và độ dài cung trên túc bế ứng với cung $\overset{\frown}{AM}$ là một đại lượng không đổi.

Chứng minh: Gọi vi phân cung trên túc bế là $d\sigma$ thì

$d\sigma^2 = dX^2 + dY^2$, theo các công thức (1), dễ dàng suy ra:

$$d\sigma^2 = \sin^2\alpha dR^2 + \cos^2\alpha dR^2 = dR^2$$

Hay $\quad d\sigma = \pm\, dR$

Suy ra: $\quad \dfrac{d\sigma}{ds} = \pm \dfrac{dR}{ds}$

Theo giả thiết trên cung $\overset{\frown}{AM}$, R biến thiên đơn điệu dR/ds chỉ luôn luôn dương hoặc âm

Do đó $\dfrac{d\sigma}{ds} = +\dfrac{dR}{ds}$

Hoặc: $\dfrac{d\sigma}{ds} = -\dfrac{dR}{ds}$

Suy ra $\dfrac{d\sigma}{dR} = 1$

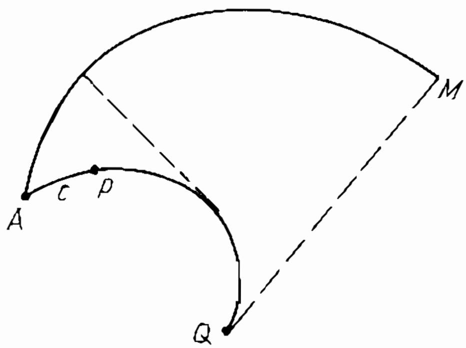
hoặc $\dfrac{d\sigma}{dR} = -1$

Nghĩa là tốc độ biến thiên của σ theo R luôn luôn bằng 1 hoặc -1.

Vậy $\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta R} = \pm 1$

suy ra: $|\Delta\sigma| = |\Delta R|$ hay

$\sigma(M) - \sigma(A) = R(M) - R(A)$.



Hình 96

Nhưng $\sigma(M) - \sigma(A)$ là độ dài cung túc bế ứng với cung $\overset{\frown}{AM}$ còn $R(A) = c$ không đổi. Vậy $\sigma = R - c$ hay $R - \sigma = c$.

Đó là điều phải chứng minh.

Từ hai tính chất này suy ra cách dựng cơ học đường thân khai nếu cho túc bế của nó như sau:

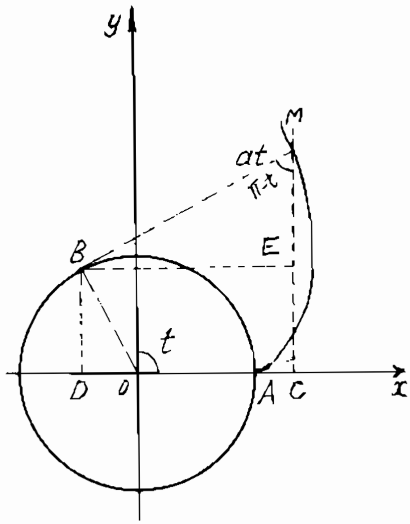
Đặt một sợi dây không dãn trên cung $\overset{\frown}{PQ}$ của đường túc bế buộc đầu Q còn đầu A hướng theo tiếp tuyến tại P với túc bế và cách xa P một đoạn AP=c

Nếu căng sợi dây (không trượt) theo cung $\overset{\frown}{PQ}$ của túc bế thì đầu A của sợi dây sẽ vẽ nên đường thân khai, ta thấy: cho một đường túc bế thì có thể dựng vô số đường thân khai tương ứng vì có thể lấy vô số giá trị của c (hình 96).

Thí dụ: Dựng đường thân khai của đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$, xét cung $\overset{\frown}{AB}$ trên đường tròn với $A(a,0)$ đặt một đoạn dây theo cung đó, buộc đầu B, căng đầu A (không trượt) khỏi cung thì A sẽ vẽ nên đường thân khai của đường tròn.

Ta có thể lập phương trình của thân khai này.

Gọi góc ở tâm của $\overset{\frown}{AB}$ là t và $M(x, y)$ là một điểm tùy ý trên thân khai vừa dựng thì theo hình: (Hình 97)



Hình 97

$x = \overline{DC} - \overline{DO} = BE - \overline{DO}$

$= at\sin(\pi - t) + a\cos t$

hay

$x = a(t\sin t + \cos t)$

Tương tự

$y = a(\sin t - t\cos t)$

Hệ này chính là phương trình tham số của đường thân khai của đường tròn trên

§5. HÌNH BAO CỦA MỘT HỌ ĐƯỜNG CONG

5.1. Điểm bất thường của đường cong

a) Định nghĩa: *Cho đường $C \subset R^2$ có phương trình:*

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

nếu (1) xác định y là hàm ẩn của x trong một khoảng (a, b) nào đó: y = y(x) thì như đã biết hệ số của tiếp tuyến của C tại M(x, y) ⊂ C là:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad \text{với } F'_y \neq 0$$

hoặc

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_x} \quad \text{với} \quad F'_x \neq 0$$

(nếu coi x là hàm ẩn của y: x = x(y)).

Như vậy khi ít nhất một trong các đạo hàm F'_x, F'_y khác không tại $M(x,y) \in C$: $F_x'^2 + F_y'^2 \neq 0$ thì đường cong có tiếp tuyến xác định tại M, M gọi là một điểm bình thường của C.

Nếu tại $M(x_0, y_0) \in C$: $F'_x(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) = 0$ thì $M(x_0, y_0)$ gọi là một điểm bất thường của C. Như vậy $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm bất thường của đường C nếu như toạ độ của nó thoả mãn hệ:

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Rõ ràng tại điểm bất thường của *C*, *C* có thể có tiếp tuyến hoặc không.

b) Phân loại: Giả thiết $M(x_0, y_0)$ là một điểm bất thường của đường *C*: $F(x, y) = 0$, và tồn tại các đạo hàm riêng cấp hai không đồng thời triệt tiêu:

$$A = F''_{x^2}(x_0, y_0), \quad B = F''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = F''_{y^2}(x_0, y_0)$$

Đặt $\Delta = AC - B^2$

1) Nếu $\Delta > 0$ thì *M* gọi là một điểm bất thường cô lập (H.98).

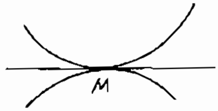
2) Nếu $\Delta < 0$ thì *M* gọi là một điểm kép hay một điểm nút (H.99)

3) Nếu $\Delta = 0$ thì *M* có thể là điểm bất thường cô lập hay điểm kép (H.100)

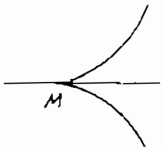
Nếu không rơi vào trường hợp này thì *M* gọi là một điểm lùi loại một (H.101) hay một điểm lùi loại hai (H.102)

Hình 98

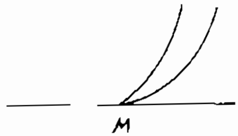
Hình 99



Hình 100



Hình 101



Hình 102

Trong không gian cho đường C có phương trình

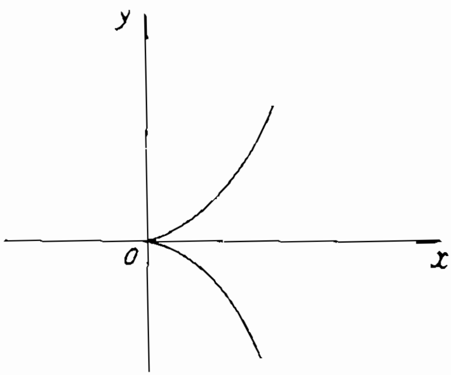
$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\quad \alpha \le t \le \beta.$$

Điểm $M(x, y, z) \in C$ gọi là điểm bất thường của C nếu tại M:

$$x'(t) = 0,\quad y'(t) = 0,\quad z'(t) = 0$$

Thí dụ:

1) Xét đường $y^2 - x^3 = 0$. Ta có $F'_x = -3x^2$, $F'_y = 2y$. Tại (0,0) $F'_x = F'_y = 0$. Vậy điểm (0, 0) là điểm bất thường của đường cong (điểm lùi) (H.103)



Hình 103

2. Xét đường cong C:

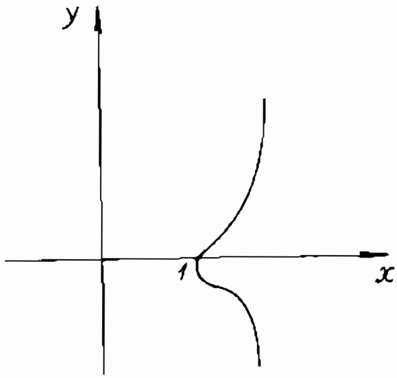
$y^2 - x^2(x-1) = 0$

Ta có

$F'_x = 2x - 3x^2, \quad F'_y = 2y$

$F'_x = 0, \quad F'_y = 0$

khi $x = 0$, $y = 0$. $(0, 0) \in C$. Vậy điểm $(0, 0)$ là điểm bất thường của C (H 104)(điểm bất thường cô lập).



Hình 104

5.2. Hình bao của họ đường cong

a) Họ đường cong: Trong mặt phẳng, xét phương trình $F(x, y, c) = 0$ (1). Trong đó c là một tham số nào đó. Nếu ứng với $c = c_0$, (1) xác định y là hàm ẩn của x: $y = y(x)$ (hoặc $x = x(y)$) thì $F(x, y, c_0) = 0$ là phương trình của một đường cong nào đó. Tập hợp các đường cong ứng với các giá trị khác nhau của c gọi là một họ đường cong phụ thuộc một tham số c và (1) gọi là phương trình của họ.

Tương tự, phương trình $F(x, y, c_1, c_2) = 0$ gọi là phương trình của họ đường cong phụ thuộc hai tham số c_1, c_2...

Thí dụ:

1) Phương trình $(x - c)^2 + y = R^2$ $(R > 0)$ là phương trình của họ đường tròn tâm $(c, 0)$ bán kính R, phụ thuộc tham số c.

2) Phương trình

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(5-c)^2} = 1$$

là phương trình của họ ellipses đồng tâm O có tổng các bán trục không đổi (=5) phụ thuộc tham số c.

3) Phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ (R = cosnt) là phương trình của họ đường tròn, tâm là một điểm bất kỳ và có bán kính R, phụ thuộc vào 2 tham số a, b. Nếu xét R cũng là tham số thì phương trình đó là phương trình của họ đường tròn tâm bất kỳ và bán kính bất kỳ phụ thuộc 3 tham số.

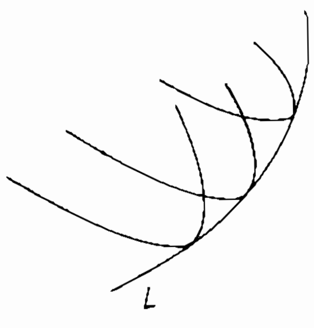
b) Hình bao của một họ đường cong

Định nghĩa: ***Cho một họ đường cong C phụ thuộc một tham số c có phương trình***

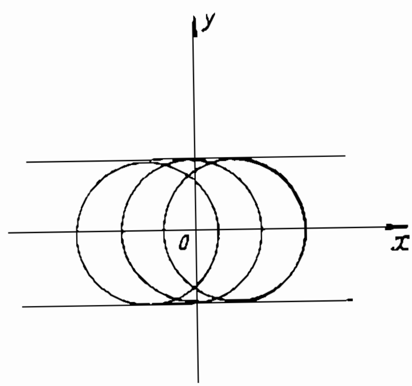
$$F(x, y, c) = 0 \qquad (1).$$

Nếu có một đường L tiếp xúc với mọi đường của họ C và ngược lại tại mọi điểm của L đều có một đường của họ C tiếp xúc với L thì L gọi là hình bao của họ C (H.105).

Thí dụ: Hình bao của họ đường tròn $(x - c)^2 + y^2 = R^2$ là 2 đường thẳng $y = \pm R$ (H.106).



Hình 105



Hình 106

Qui tắc tìm hình bao: nếu họ đường cong C: $F(x, y, c) = 0$ (1) có hình bao L, thì các điểm trên L có toạ độ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Thực vậy, nếu họ C có hình bao L, và $M(x, y) \in L$ thì x, y phụ thuộc c: $x = x(c)$, $y = y(c)$. Do đó có thể xem phương trình tham số của L là: $x = x(c)$, $y = y(c)$ với $c \in (\alpha, \beta)$ nào đó. Khi đó $F[x(c), y(c), c] = 0$, $\forall c \in (\alpha, \beta)$.

Đạo hàm theo c, ta có:

$$F'_x x'(c) + F'_y . y'(c) + F'_c = 0 \qquad (3)$$

Mặt khác xét $M(x, y) \in C$, thì các hệ số góc của tiếp tuyến tại M với C là

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad (F'_y \neq 0)$$

Theo định nghĩa, $M \in L$, hệ số góc của tiếp tuyến tại M với L là: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(c)}{x'(c)}$ cũng theo định nghĩa $-\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{y'(c)}{x'(c)}$ hay $F'_x x'(c) + F'_y . y'(c) = 0$, thay vào (3) ta có: $F'_c = 0$. Vậy toạ độ của các điểm trên hình bao thoả mãn hệ (2). Nếu họ C có các điểm bất thường thì các điểm bất thường cũng có toạ độ thoả mãn hệ (2), vì theo định nghĩa: các điểm bất thường có toạ độ thoả mãn hệ:

$F'_x = 0$, $F'_y = 0$, thay vào (3) ta cũng có hệ (2). Do đó quy tắc trên chỉ là điều kiện cần để tìm hình bao.

Thí dụ:

1) Tìm hình bao của họ đường cong:

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(5 - c)^2} = 1 \qquad (1)$$

Đạo hàm theo c ta có:

$$-\frac{2x^2}{c^3}+\frac{2y^2}{(5-c)^3}=0 \quad \text{hay} \quad \frac{x^2}{c^2}=\frac{cy^2}{(5-c)^3} \qquad (2)$$

Khử c từ (1) và (2): từ (2)

$$\frac{x^2}{c^2}=\frac{cy^2}{(5-c)^3}$$

Thay vào (1) và giải y theo c ta có: $y=\sqrt{\frac{(5-c)^3}{5}}$ và từ (2) ta có:

$$x=\sqrt{\frac{c^3}{5}}$$

Khử c ta có:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\frac{c}{5^{\frac{1}{3}}}+\frac{(5-c)}{5^{\frac{1}{3}}}=5^{\frac{2}{3}}.$$

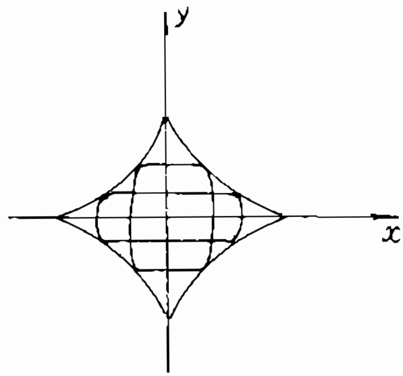
Đó là phương trình của đường astroide.

Mặt khác: $F'_x=\frac{2x}{c^2}=0$, $\quad F'_y=\frac{2y}{(5-c)^2}=0$ khi $x=0$, $y=0$. Điểm (0, 0) không thuộc họ (1). Vậy họ ellipses (1) không có điểm bất thường và đường astroide là hình bao của họ ellipses đã cho (H. 107).

2) Trong cơ học, ta biết phương trình chuyển động của viên đạn bắn lên với tốc độ ban đầu v_0 và góc bắn α (so với mặt đất) là:

$$x=v_0\cos\alpha.t$$

$$y=v_0\sin\alpha.t-\frac{gt^2}{2}$$

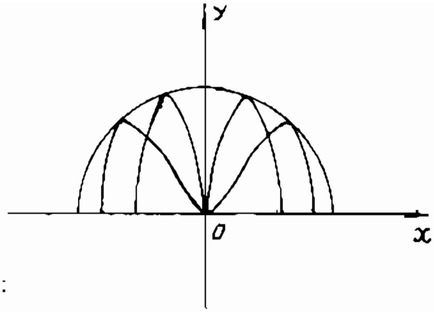


Hình 107

g là gia tốc trọng trường, khử t ta có phương trình quỹ đạo của viên đạn là:

$$y = x\,tg\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

Đặt $tg\,\alpha = c$, $\frac{g}{2v_0^2} = k =$ const thì:



$$y = cx - (1 + c^2)\,kx^2 \qquad (1)$$

Hình 108

Đó là họ paraboles phụ thuộc tham số c (H.108). Ta sẽ tìm hình bao của họ paraboles này.

Đạo hàm (1) theo c:

$$0 = x - 2ckx^2 = 0 \text{ hay } c = \frac{1}{2kx}$$

Thay vào (1) ta được:

$$y = \frac{1}{4k} - kx^2 = \frac{v_0}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \qquad (2)$$

Đây là phương trình của parabole đỉnh $(0, \frac{v_0^2}{2g})$ vì họ paraboles (1) không có điểm bất thường nên parabole (2) là hình bao của họ paraboles (1); (2) gọi là parabole an toàn.

3) Tìm hình bao của họ đường cong: $(y - a)^2 = (x - a)^3$.

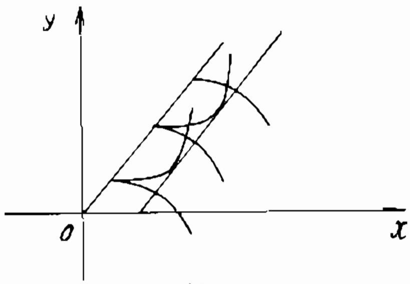
Ta có:

$$F'_a = -2(y - a) + 3(x - a)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y - a = \frac{3}{2}(x - a)^2$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}(x - a)^4 = (x - a)^3$$

$$\Rightarrow (x - a)^3[\frac{9}{4}(x - a) - 1] = 0.$$



Hình 109

Do đó:

$$x = \alpha \Rightarrow y = x$$

$$x = \frac{4}{9} + \alpha \rightarrow y = x - \frac{4}{27}$$

Ta được $\quad y = x - \frac{4}{27}$ là hình bao

$y = x$ là quĩ tích các điểm bất thường (H.109)

B- ĐƯỜNG TRONG KHÔNG GIAN

§1. SƠ LƯỢC VỀ GIẢI TÍCH VECTEUR

1.1. Hàm vecteur đối vô hướng

Ta đã định nghĩa hàm số $y = f(x)$ mà giá trị của đối số và hàm số là những con số thuần túy, người ta cũng gọi hàm số đó là hàm vô hướng với đối vô hướng.

Thực tiễn nhiều khi cần xét sự phụ thuộc giữa một đại lượng vô hướng và một đại lượng vecteur.

Thí dụ: Xét chuyển động của một điểm M kể từ một điểm gốc O nào đó, thì vị trí của M tại thời điểm t sẽ được hoàn toàn xác định bởi vecteur $\overrightarrow{OM}$. Như vậy $\overrightarrow{OM}$ phụ thuộc t, ta gọi $\overrightarrow{OM}$ là hàm vecteur của đối vô hướng t.

Tổng quát ta có:

Định nghĩa: Nếu ứng với mỗi giá trị của đại lượng vô hướng t, $\alpha \le t \le \beta$ ta có một vecteur xác định $\vec{V}$ thì $\vec{V}$ gọi là hàm vecteur đối vô hướng t.

Kí hiệu $\vec{V} = \vec{V}(t)$

Theo định nghĩa với các giá trị khác nhau của t ta có những vecteur $\vec{V}$ khác nhau, đó là các vecteur tự do, ta có thể đưa chúng về cùng gốc toạ độ O bằng cách đặt $\vec{V}(t) = \overrightarrow{OM}$, lúc đó $\vec{V}(t)$ gọi là hàm bán kính vecteur của điểm M và kí hiệu là:

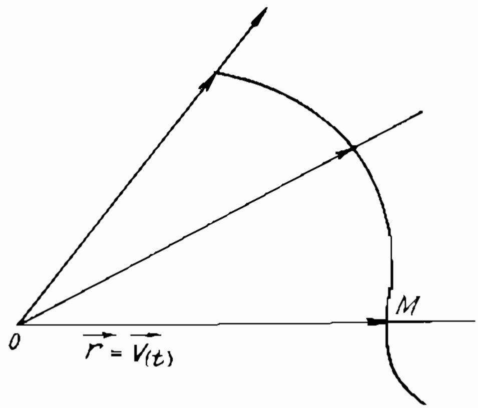
$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$. Như vậy việc nghiên cứu hàm vecteur bất kỳ đưa về được việc nghiên cứu hàm bán kính vecteur của điểm M, do đó để được tiện lợi từ đây về sau ta chỉ nghiên cứu hàm bán kính vecteur của điểm M, $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Nếu x, y, z là toạ độ của M thì

$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ (1)

và

$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ (2)

khi t thay đổi, M sẽ thay đổi và vẽ một đường cong nào đó (Hình 110) đường cong này gọi là tốc đồ của hàm vecteur $\vec{r} = \vec{r}(t)$.



Hình 110

Hệ (1) gọi là phương trình tham số với tham số t và đẳng thức (2) gọi là phương trình vecteur của đường cong đó.

Tương tự như hàm vô hướng, ta đưa ra định nghĩa giới hạn và liên tục của hàm vecteur như sau:

Ta gọi vecteur $\vec{a}$ là giới hạn của hàm vecteur $\vec{r} = \vec{r}(t)$ khi $t \to t_0$ nếu $|\vec{r} - \vec{a}|$ là một vô cùng bé khi $t \to t_0$

Ta gọi hàm $\vec{r} = \vec{r}(t)$ là liên tục tại $t = t_0$ nếu $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$

Nếu đặt $\Delta t = t - t_0$, $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$ thì $\vec{r}(t)$ là liên tục tại t_0 nếu $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r} = 0$

1.2. Đạo hàm của hàm vecteur

1⁰. Định nghĩa: Cho hàm vecteur, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, xét tại t, cho t số gia Δt thì $\vec{r}$ có vecteur gia $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$

Nếu $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ tồn tại thì giới hạn này gọi là đạo hàm của hàm vecteur $\vec{r}$ theo đối vô hướng t tại điểm t.

$$\vec{r}\,'(t) \text{ hay } \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

2°. Ý nghĩa hình học:

Gia sử tốc đồ của hàm $\vec{r} = \vec{r}\,(t) = \overrightarrow{OM}$ là đường cong C và

$\vec{r}\,(t + \Delta t) = \overrightarrow{ON}$ lúc đó:

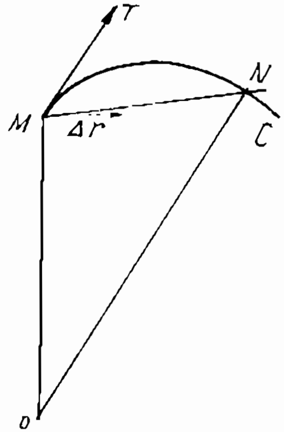
$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t + \Delta t) - \vec{r}\,(t) = \overrightarrow{MN}$

(Hình 111)

Suy ra: Vecteur $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ là hướng theo cát tuyến MN khi $\Delta t \to 0$ thì cát tuyến MN có vị trí giới hạn là đường thẳng MT gọi là tiếp tuyến tại M với đường cong C, nghĩa là vecteur đạo hàm $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ hướng theo tiếp tuyến MT.

Vậy về hình học:

Vecteur đạo hàm của hàm vecteur có phương trùng với phương của tiếp tuyến với tốc đồ của hàm vecteur tại điểm tương ứng.



Hình 111

3°. Ý nghĩa cơ học:

Theo hình 64: $\left|\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \left|\dfrac{MN}{\overset{\frown}{MN}} \cdot \dfrac{\overset{\frown}{MN}}{\Delta t}\right|$

Ta thấy $\dfrac{\overset{\frown}{MN}}{\Delta t}$ chính là tốc độ trung bình của điểm M trong thời gian Δt, khi

$\Delta t \to 0$ thì $\dfrac{\overset{\frown}{MN}}{\Delta t} \to V(t)$ là tốc độ của M tại thời điểm t, mặt khác khi $\Delta t \to 0$

thì $\dfrac{MN}{\overset{\frown}{MN}} \to 1$ (Khi t khá bé thì $\overset{\frown}{MN} \sim MN$).

Do đó:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = V(t)$$

Vậy về cơ học: Độ dài của vecteur đạo hàm của bán kính vecteur $\vec{r}$ của điểm M tại thời điểm t bằng tốc độ của điểm M tại thời điểm t

4^o. Qui tắc tính đạo hàm:

Từ định nghĩa, tương tự như hàm vô hướng, ta có thể chứng minh các qui tắc tính đạo hàm của hàm vecteur đối vô hướng t:

I. $(\vec{a})' = 0$ $\vec{a}$ là vecteur không đổi cả về phương và độ dài.

II. $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1 + \vec{r}'_2$

III. $(\alpha\,\vec{r})' = \alpha'\,\vec{r} + \alpha\,\vec{r}'$, $\alpha = \alpha(t)$

IV. $(\vec{r}_1.\vec{r}_2)' = \vec{r}'_1.\vec{r}_2 + \vec{r}_1.\vec{r}'_2$

V. $(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)' = \vec{r}'_1 \wedge \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \wedge \vec{r}'_2$

VI. $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)' = (\vec{r}'_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}'_2, \vec{r}_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}'_3)$

VII. Nếu $\vec{r} = \vec{r}(u)$ và $u = u(t)$ thì $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{du}.\dfrac{du}{dt}$

Chẳng hạn ta chứng minh: IV.

$$(\vec{r}_1\vec{r}_2)' = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\vec{r}_1(t+\Delta t)\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\vec{r}_1(t+\Delta t)\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t+\Delta t) + \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)}{\Delta t}\right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\vec{r}_2(t+\Delta t).\frac{\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)}{\Delta t} + \vec{r}_1(t).\frac{\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_2(t)}{\Delta t}\right]$$

$$= \vec{r}'_1(t)\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\vec{r}'_2(t)$$

5^o. Đạo hàm của hàm vecteur cho theo tọa độ

Cho vecteur $\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$

Theo II và III ở 4^o - ta có:

$$\vec{r}'(t) = x(t)\,\vec{i}' + x'(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}' + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k} + z(t)\,\vec{k}'$$

nhưng theo I: $\vec{i}' = \vec{j}' = \vec{k}' = 0$ vì là những vecteur không đổi.

Do đó: $\vec{r}'(t) = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}$

Như vậy các thành phần của vecteur đạo hàm bằng đạo hàm các thành phần của hàm vecteur. Ta lại biết, vecteur đạo hàm hướng theo tiếp tuyến với tốc đồ của hàm vecteur do đó có thể lấy x', y', z' làm hệ số chỉ phương của tiếp tuyến đó.

6^o. Đạo hàm của vecteur có độ dài không đổi.

Cho vecteur:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{với} \quad |\vec{r}(t)| = c \quad \text{(không đổi)}$$

Về hình học: Tốc đồ của $\vec{r}$ là 1 đường cong vẽ trên mặt cầu bán kính r, xét

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = \vec{r}^{\,2} = \left|\vec{r}\right|^2 = r^2$$

Đạo hàm 2 vế ta có:

$$\vec{r}\,'\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\vec{r}\,' = 0 \quad \text{hay } 2\,\vec{r}\cdot\vec{r}\,' = 0$$

Nghĩa là vecteur đạo hàm $\vec{r}\,'$ thẳng góc với hàm vecteur $\vec{r}$ điều này có thể suy từ ý nghĩa hình học.

Đặc biệt nếu $\vec{r}$ là vecteur đơn vị (có phương thay đổi) ta cũng có kết quả ấy.

7°. Đạo hàm của vecteur có phương không đổi.

Cho vecteur $\vec{r} = \left|\vec{r}(t)\right|\ \vec{r}_0$. $\vec{r}_0$ là vecteur không đổi thì $\vec{r}$ là vecteur có phương không đổi.

Đạo hàm ta có: $\vec{r}\,' = \left|\vec{r}\right|'.\ \vec{r}_0 + \left|\vec{r}\right|\ \vec{r}\,'_0$ nhưng $\vec{r}\,'_0 = 0$

Do đó: $\vec{r}\,' = \left|\vec{r}(t)\right|'\ \vec{r}_0$

Nghĩa là vecteur đạo hàm của hàm vecteur có phương không đổi cùng phương với phương của hàm vecteur đó.

8°. Đạo hàm cấp cao:

Cho $\qquad \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$

Ta biết $\qquad \vec{r}\,'(t) = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}$

Đạo hàm của $\vec{r}\,'(t)$ gọi là đạo hàm cấp hai của $\vec{r}(t)$

Kí hiệu $\qquad \vec{r}\,''(t) \quad$ hay $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)$

Theo trên thì $\vec{r}\,''(t) = x''(t)\,\vec{i} + y''(t)\,\vec{j} + z''(t)\,\vec{k}$,

Về cơ học $\vec{r}\,''(t)$ hướng theo vecteur gia tốc của điểm M tương tự, ta có thể định nghĩa đạo hàm cấp ba, v.v...

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN VÀ PHÁP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG

2.1. Phương trình:

Cho một đường cong C trong không gian, ta biết phương trình tham số của đường là:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad \alpha \le t \le \beta \qquad (1)$$

và phương trình vecteur của đường là:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Nếu đường cho là giao tuyến của hai mặt

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0$$

thì hệ này gọi là phương trình không giải của đường.

Tương tự như đường cong phẳng, ta có công thức vi phân cung của đường trong không gian là:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}.dt$$

Xét cung $\overset{\frown}{AM}$ trên đường cong C. A ứng với tham số $t = t_0$ M ứng với tham số t. Đặt $\overset{\frown}{AM} = s$, rõ ràng khi t thay đổi thì M thay đổi, nghĩa là s thay đổi.

Vậy s là hàm số của t : $s = s(t)$.

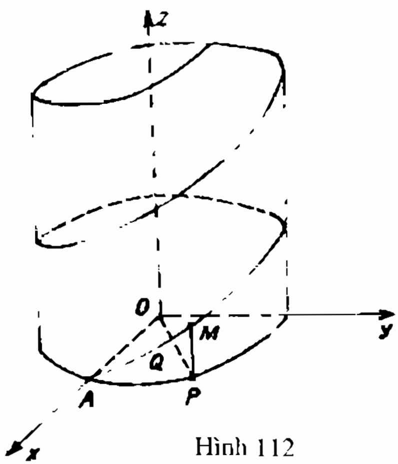
Ngược lại t sẽ là hàm số của s : $t = t(s)$, cho nên thay cho tham số t bất kỳ, ta có thể dùng tham số s là độ dài cung của đường tính từ một điểm gốc nào đó, gọi là hoành độ cong, lúc đó phương trình tham số của đường sẽ là:

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s) \quad \alpha \le s \le \beta.$$

Hệ này cũng gọi là phương trình tự hàm của đường cong.

Thí dụ:

Lập phương trình quĩ đạo của một điểm M vừa quay đều xung quanh trục Oz với tốc độ góc không đổi ω và tĩnh tiến dọc theo trục đó với tốc độ không đổi v_0 (Hình 112).



Hình 112

Ta thấy quĩ đạo của M là một đường nằm trên một mặt trụ trục oz và bán kính không đổi a nào đó.

Giả sử vị trí đầu tiên của M là điểm $A(a, 0, 0)$. Xét $M(x, y, z)$ tùy ý trên quĩ đạo, gọi P là hình chiếu của M trên mặt phẳng xoy và góc $(OX, \overrightarrow{OP}) = \varphi$ thì.

$$x = \overline{OP}\cos\varphi = a\cos\varphi$$

$$y = \overline{OP}\sin\varphi = a\sin\varphi$$

$$z = \overline{PM} = v_0 t$$

Theo giả thiết $\varphi = \omega t$, suy ra $t = \dfrac{\varphi}{\omega}$, lúc đó $z = \dfrac{v_0}{\omega}\varphi$ đặt $\dfrac{v_0}{\omega} = b$ thì $z = b\varphi$.

Vậy phương trình tham số (tham số φ) của quĩ đạo là.

$$x = a\cos\varphi \;,\quad y = a\sin\varphi \;,\quad z = b\varphi \;,\quad b = \frac{v_0}{\omega}$$

Quĩ đạo gọi là đường đinh ốc trụ tròn xoay

2.2. Tiếp tuyến và pháp tuyến. Tam diện Frénet.

Cho đường cong C có phương trình tự hàm : $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ hay phương trình vecteur :

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$$

Xét điểm $M(x, y, z)$ trên C (Hình 113)

Ta biết vecteur $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ tại M hướng theo tiếp tuyến với C tại M.

Mặt khác: $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\dfrac{\overline{MM_1}}{\overset{\frown}{MM_1}} = 1$

Do đó $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ là vecteur đơn vị

Kí hiệu $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ và gọi $\vec{\tau}$ là vecteur tiếp tuyến đơn vị với C tại M. Xét vecteur $\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}$, ta biết vecteur này thẳng góc với $\vec{\tau}$.

Kí hiệu vecteur đơn vị của nó là $\vec{\nu}$ thì:

$$\vec{\nu} = \frac{\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}}{\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|}$$

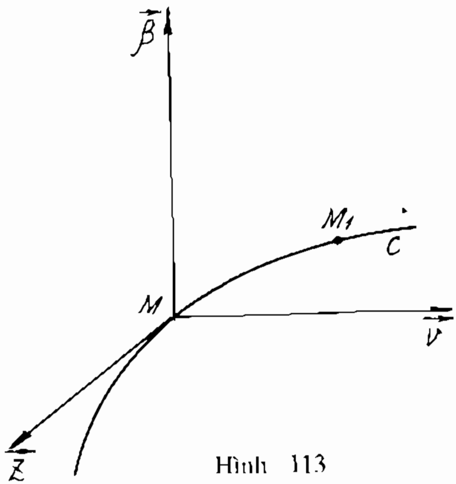
Người ta gọi $\vec{\nu}$ là vecteur pháp tuyến chính đơn vị và đường thẳng mang $\vec{\nu}$ là pháp tuyến chính với C tại M.

Bây giờ xét vecteur $\vec{\beta} = \vec{\tau} \wedge \vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ cũng là vecteur đơn vị thẳng góc với cả $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ người ta gọi $\vec{\beta}$ là vecteur trùng pháp tuyến đơn vị và đường thẳng mang $\vec{\beta}$ là trùng pháp tuyến với C tại M.

Mặt phẳng mang $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ gọi là mặt phẳng mật tiếp.

Mặt phẳng mang $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ gọi là mặt phẳng pháp và mặt phẳng mang $\vec{\beta}$, $\vec{\tau}$ gọi là mặt phẳng trực đạc với đường C tại M.

Các vecteur $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ và các mặt phẳng đó lập thành một tam diện gọi là tam diện Frénet của C tại M.



Hình 113

Trong thực tế đường cong C thường cho dưới dạng tham số t bất kì

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)\ ,\ \alpha \le t \le \beta$$

Do đó ta sẽ xác định $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ theo tham số t bất kì.

Ta có:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right)\frac{dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,.dt}$$

hay:

$$\vec{\tau} = \frac{x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|} \qquad (1)$$

Để tính $\vec{\beta}$ ta xét:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{ds}{dt}\wedge\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{ds}{dt}\wedge\left[\frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]$$

$$=\vec{\tau}.\frac{ds}{dt}\wedge\left[\frac{d^2s}{dt^2}.\vec{\tau}+\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]=\vec{\tau}.\frac{ds}{dt}\wedge\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=$$

(Tích có hướng đầu bằng không vì có 2 vecteur $\vec{\tau}$)

$$=\vec{\tau}.\frac{ds}{dt}\wedge\vec{\nu}\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\vec{\beta}\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

Suy ra:

$$\vec{\beta}=\frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}\wedge\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3}$$ nhưng $|\vec{\beta}|=1$

nên :

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\left(\frac{ds}{dt}\right)^3=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$$

do đó:

$$\vec{\beta}=\frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}\wedge\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\wedge\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}\qquad(2)$$

Tính được $\vec{\tau},\vec{\beta}$ theo t, theo các công thức (1), (2) ta sẽ tính được $\vec{\nu}$ theo t, theo công thức:

$$\vec{\nu}=\vec{\beta}\wedge\vec{\tau}\qquad(3)$$

Từ (1) ta có thể lấy vecteur chỉ phương $\vec{T}$ của tiếp tuyến là:

$$\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{dt}=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\qquad(1')$$

Do đó gọi X, Y, Z là tọa độ chạy trên tiếp tuyến thì phương trình của tiếp tuyến với đường cong tại điểm (x, y, z) là:

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}$$

và phương trình của mặt phẳng pháp với đường cong tại điểm đó là:

$$(X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0$$

Từ (2) ta có thể lấy vecteur chỉ phương $\vec{B}$ của trùng pháp tuyến là:

$$\vec{B} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \qquad (2')$$

Có $\vec{T}$, $\vec{B}$ theo (3) ta có thể lấy vecteur chỉ phương $\vec{N}$ của pháp tuyến chính là.

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} \qquad (3')$$

Và tương tự ta có thể viết phương trình của trùng pháp tuyến, mặt phẳng mật tiếp, pháp tuyến chính và mặt phẳng trực đạc với đường cong.

Chú ý: Từ cách chọn các vecteur $\vec{T}$, $\vec{B}$, $\vec{N}$ như trên ta thấy:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} \quad , \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \quad , \quad \vec{\nu} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

Do đó trong thực tiễn, để tính các vecteur $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ đối với đường cong cho theo tham số t bất kỳ, đầu tiên ta tính: $\vec{T}$, $\vec{B}$, $\vec{N}$

Thí dụ - Tìm các vecteur $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ và viết phương trình tiếp tuyến, mặt phẳng pháp, trùng pháp tuyến, mặt phẳng mật tiếp, pháp tuyến chính, mặt phẳng trực đạc với đường cong.

$$x = t \ , \ y = t^2 \ , \ z = t^3 \qquad \text{tại điểm ứng với } t = 1$$

Ta tính: $x' = 1$, $y' = 2t$, $z' = 3t^2$; $x'' = 0$, $y'' = 2$, $z'' = 6t$.

Tại $t = 1$ thì $x' = 1$, $y' = 2$, $z' = 3$; $x'' = 0$, $y'' = 2$, $z'' = 6$

Do đó theo (1) ta có: $\vec{T} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

Theo (2') ta có:

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

Theo (3') ta có

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -22\vec{i} - 16\vec{j} + 18\vec{k}$$

Suy ra:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{14}}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{19}}$$

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{-11\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}}{\sqrt{266}}$$

điểm ứng với $t = 1$ là $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. Do đó, tại đó phương trình của tiếp tuyến là:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

của mặt phẳng pháp là: $(x - 1) + (y - 1).2 + (z - 1).3 = 0$

hay: $x + 2y + 3z - 6 = 0$

của trùng pháp tuyến là:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

của mặt phẳng mật tiếp là: $(x - 1)3 + (y - 1)(-3) + (z - 1).1 = 0$

hay: $3x - 3y + z - 1 = 0$

của pháp tuyến chính là:

$$\frac{x-1}{-11} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{9}$$

của mặt phẳng trực đạc là:

$$(x - 1)(-11) + (y - 1)(-8) + (z - 1)9 = 0$$

hay : $11x + 8y - 9z - 10 = 0$

§ 3. ĐỘ CONG VÀ ĐỘ XOẮN

3.1. Độ cong:

Tương tự như đường cong phẳng, ta sẽ định nghĩa độ cong của đường trong không gian.

Cho đường cong C ta vẽ các vecteur tiếp tuyến đơn vị $\vec{\tau}, \vec{\tau}_1$ với C tại M, M_1 và $\widehat{MM_1} = \Delta s$. Từ một điểm O nào đó ta dựng các vecteur $\overrightarrow{ON} = \vec{\tau}$; $\overrightarrow{ON_1} = \vec{\tau}_1$ (Hình 1.14)

Gọi góc giữa $\vec{\tau}, \vec{\tau}_1$ là $\Delta\alpha$. Ta thấy khi M chạy trên đường cong C thì N sẽ chạy trên mặt cầu tâm O, bán kính $|\vec{\tau}| = 1$.

Ta gọi độ cong trung bình của C trên cung $\overset{\frown}{MM_1}$ là tỷ số $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ kí hiệu

$$K_M = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

và độ cong của C tại điểm M là giới hạn

$$\lim_{\Delta s \to 0} K_M = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

$(\Delta s \to 0 : M_1 \to M)$.

Kí hiệu:

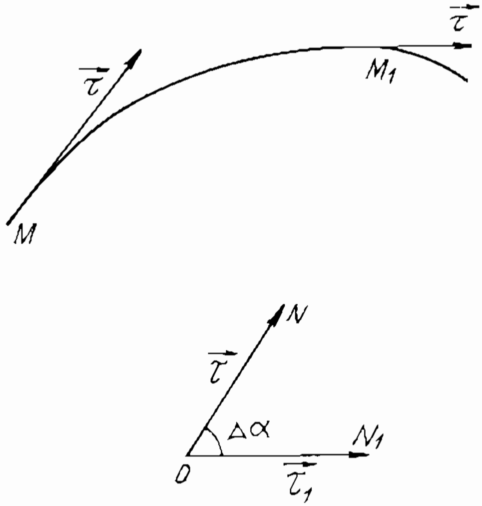
$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

Đặt

$$|\vec{\tau} - \vec{\tau}_1| = |\Delta\vec{\tau}|$$

Ta có

$$\Delta\alpha = \overset{\frown}{NN_1} \sim NN_1 = |\Delta\vec{\tau}|$$



Hình 114

(vì $NN_1 = 2\sin\dfrac{\Delta\alpha}{2} \sim \Delta\alpha$ khi $\Delta\alpha \to 0$)

Do đó:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\right|$$

Theo định nghĩa đạo hàm:

$$K = \left|\frac{\Delta\dot{\vec{\tau}}}{\Delta s}\right| \quad \text{hay } K = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \qquad (1)$$

Công thức (1) cho ta ngay công thức tính độ cong của đường cong theo phương trình tự hàm: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$.

Bây giờ để tính độ cong của đường cho theo tham số t bất kỳ, ta làm như sau:

Theo cách tính ở §2 ta có

$$\dot{\beta} = \frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3} \qquad (2)$$

Vì $|\dot{\beta}| = 1$ nên
$$1 = \frac{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3}$$

Vậy theo công thức (1) ta có:

$$K = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \frac{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3}$$

Với $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, $\quad \dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$

Thí dụ: Tính độ cong của đường $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ tại điểm ứng với $t = 1$

Tại $t = 1$ ta có $\quad x' = 1, \quad y' = 2, \quad z' = 3$

$\quad x'' = 0, \quad y'' = 2, \quad z'' = 6$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}; \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{76}$$

Vậy theo công thức (2) ta có:

$$K = \frac{\sqrt{76}}{(\sqrt{14})^3} = \frac{1}{14}\sqrt{\frac{38}{7}}$$

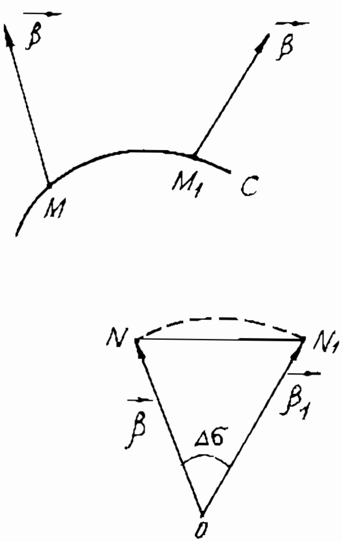
Chú ý: Nghịch đảo của độ cong của đường cong tại M cũng gọi là bán kính cong của đường cong tại M.

Kí hiệu $$R = \frac{1}{K}$$

3.2. Độ xoắn:

Cho đường cong C và xét các vecteur $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ tại M trên C. Ta biết mặt phẳng mật tiếp với đường cong tại M là mặt phẳng mang $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$. Đối với đường cong phẳng, tiếp tuyến $\vec{\tau}$ và pháp tuyến $\vec{\nu}$ luôn luôn nằm trong mặt phẳng chứa đường cong, nói cách khác mặt phẳng mật tiếp với đường cong luôn luôn chứa đường cong.

Đối với đường cong trong không gian thì khác, nói chung tại các điểm khác nhau của C, có những mặt phẳng mật tiếp khác nhau. Khi điểm M dời trên đường cong, mặt phẳng mật tiếp sẽ quay chung quanh tiếp tuyến $\vec{\tau}$ một góc lớn hay nhỏ tùy theo mức độ "gập ghềnh" của đường cong. Ta biết vecteur trùng pháp tuyến $\vec{\beta}$ thẳng góc với mặt phẳng mật tiếp, nên góc quay của mặt phẳng mật tiếp cũng là góc quay của vecteur $\vec{\beta}$. Như vậy góc quay của $\vec{\beta}$ chung quanh tiếp tuyến $\vec{\tau}$ biểu thị được mức độ "gập ghềnh" của đường cong.



Hình 115

Bây giờ xét các vectơ $\vec{\beta}$, $\vec{\beta}_1$ tại các điểm M, M_1 trên C. Từ một điểm O bất kỳ ta dựng các vecteur $\overrightarrow{ON} = \vec{\beta}$ $\overrightarrow{ON_1} = \vec{\beta}_1$. Ta thấy khi M dời trên C thì N sẽ dời trên mặt cầu tâm O, bán kính $|ON_1| = |\vec{\beta}_1| = 1$ đặt $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$.

$\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{ON_1} = \vec{\beta} - \vec{\beta}_1$, góc giữa $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{ON_1}$ cũng là góc giữa $\vec{\beta}$. $\vec{\beta}_1$ là $\Delta\sigma$ (Hình 115).

Ta thấy tỉ số $\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right|$ biểu thị góc quay của $\vec{\beta}$ trên một đơn vị dài của cung $\overset{\frown}{MM_1}$.

Người ta gọi tỉ số đó là độ xoắn trung bình của đường cong trên cung $\overset{\frown}{MM_1}$, còn giới hạn $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right|$ thì gọi là độ xoắn của đường cong tại M.

Kí hiệu $$T = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right|$$

Nhưng $$\Delta\sigma = \overset{\frown}{NN_1} \sim NN_1 = \left|\vec{\beta}-\vec{\beta}_1\right| = \left|\Delta\vec{\beta}\right|$$

$$(\text{Vì } NN_1 = 2\sin\frac{\Delta\sigma}{2} \sim \Delta\sigma \text{ khi } \Delta\sigma \to 0)$$

Do đó:

$$T = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\beta}}{\Delta s}\right|$$

Theo định nghĩa đạo hàm thì $T = \left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|$ (1)

Theo công thức (1) muốn tính độ xoắn T tại 1 điểm M, ta phải tính vecteur $\vec{\beta}$ tại M.

Có thể chứng minh:

$$T = R^2\left(\frac{d\vec{r}}{ds},\frac{d^2\vec{r}}{ds^2},\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right)$$

với đường cong cho theo phương trình tự hàm: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$

$$T = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2},\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}$$

với đường cong cho theo phương trình tham số t bất kỳ

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t).$$

* Thực vậy, ta biết $$\frac{d\vec{\beta}}{ds} \perp \vec{\beta}$$

mặt khác $$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{\tau} \wedge \vec{v}) = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \wedge \vec{v} + \vec{\tau} \wedge \frac{d\vec{v}}{ds}$$

nhưng $$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \parallel \vec{v} \quad \text{nên} \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} \wedge \vec{v} = 0$$

Do đó $$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{\tau} \wedge \frac{d\vec{v}}{ds} \quad \text{nghĩa là} \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} \perp \vec{\tau}$$

Như vậy $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ thẳng góc cả với $\vec{\tau}$, $\vec{\beta}$ nên $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ có phương của $\vec{v}$, nghĩa là:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \pm \left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right| .\vec{v}$$

Theo (1) ta có $$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \pm T\ \vec{v}$$

Để tiện lợi về sau ta chọn dấu - , lúc đó $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -T\ \vec{v}$

Nhân vô hướng 2 vế đẳng thức này với $\vec{v}$ và chuyển vế ta có:

$$T = -\vec{v}\ \frac{d\vec{\beta}}{ds} \qquad (2)$$

Ta biết :

$$\vec{v} = \frac{\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}}{\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds}\right|} \quad \text{và} \quad \frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \quad \text{suy ra} \quad \vec{v} = R\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \qquad (3)$$

Mặt khác theo trên:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{\tau} \wedge \frac{d\vec{v}}{ds} \quad \text{hay} \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d\vec{v}}{ds}$$

Theo (3) thì:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d}{ds}\left(R\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)$$

hay:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \left(\frac{dR}{ds} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} + R \cdot \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) = \frac{dR}{ds} \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right) + R \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) \quad (4)$$

Theo (3) và (4) thì (2) viết được:

$$T = -R\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left[\frac{dR}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right) + R\left(\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) \right]$$

$$= -R\frac{dR}{ds}\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right) - R^2\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right)$$

Tích hỗn hợp đầu bằng 0 vì có 2 vecteur trùng nhau, còn tích sau đổi dấu khi hoán vị 2 số hạng liền nhau

Do đó:

$$T = R^2 \left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right)$$

Với $$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right|}$$

Bây giờ ta chuyển công thức (a) về trường hợp đường cong cho theo tham số t bất kỳ : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

Ta có:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} s'$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} s'^2 + \frac{d\vec{r}}{ds} s''$$

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} s'^3 + 3\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} s's'' + \frac{d\vec{r}}{ds} s'''$$

Suy ra

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right) = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) s'^6$$

Do đó:

$$T = R^2 \left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right)}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^6} \cdot R^2$$

Ta biết :

$$R^2 = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt}\right)^2} \qquad \text{nên} \qquad T = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt}\right)^2} \qquad \text{(b)}$$

Nghịch đảo của độ xoắn của đường cong tại một điểm gọi là bán kính xoắn của nó tại điểm ấy.

Kí hiệu: $\rho = \frac{1}{T}$

Thí dụ:

1) Tính độ xoắn của đường $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ tại $t = 1$

Tại $t = 1$ thì $x' = 1 \quad y' = 2 \quad z' = 3$

$x'' = 0 \quad y'' = 2 \quad z'' = 6$

$x''' = 0 \quad y''' = 0 \quad z''' = 6$

Suy ra:

$$\left(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}'''\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12$$

Còn $\left|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\right|^2 = 76$ (xem thí dụ ở 3.1)

Do đó theo (b) :

$$T = \frac{12}{76} = \frac{3}{19}$$

2) Tính độ cong và độ xoắn của đường đinh ốc

$x = a\cos\varphi \qquad y = a\sin\varphi \qquad z = b\varphi$

Ta có:

$$\vec{r} = a\cos\varphi\,\vec{i} + a\sin\varphi\,\vec{j} + b\varphi\,\vec{k}$$

$$\vec{r}\,' = -a\sin\varphi\,\vec{i} + a\cos\varphi\,\vec{j} + b\,\vec{k}$$

$$\vec{r}\,'' = -a\cos\varphi\,\vec{i} - a\sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{r}\,''' = a\sin\varphi\,\vec{i} - a\cos\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{r}'\wedge\vec{r}''=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin\varphi & +a\cos\varphi & b\\ a\cos\varphi & -a\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=ab\sin\varphi\,\vec{i}-ab\cos\varphi\,\vec{j}+a^2\vec{k}$$

$$(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')=\begin{vmatrix}-a\sin\varphi & a\cos\varphi & b\\ -a\cos\varphi & -a\sin\varphi & 0\\ a\sin\varphi & -a\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=a^2b$$

Theo các công thức tính độ cong và độ xoắn ở trên ta có:

$$K=\frac{1}{R}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$T=\frac{1}{\rho}=\frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)}=\frac{b}{a^2+b^2}$$

Từ các kết quả này, ta suy ra một tính chất rất quan trọng của đường đinh ốc:

Tại mọi điểm của đường đinh ốc, độ cong và độ xoắn của nó là những đại lượng không đổi

Người ta cũng dùng tính chất này để định nghĩa đường đinh ốc.

Chú ý:

Từ các công thức tính $\vec{\tau}$, $\vec{v}$, $\vec{\beta}$, R, ρ ta suy ra các công thức liên hệ giữa chúng là:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{\vec{v}}{R}\qquad \frac{d\vec{v}}{ds}=\frac{-\vec{\tau}}{R}+\frac{\vec{\beta}}{\rho}\qquad \frac{d\vec{\beta}}{ds}=\frac{-\vec{v}}{\rho}$$

Các công thức này gọi là các công thức Frénet của đường cong tại 1 điểm của nó

C- MẶT, TIẾP DIỆN VÀ PHÁP TUYẾN VỚI MỘT MẶT

Tập hợp S các điểm $M(x, y, z) \in R^3$ thoả mãn phương trình $F(x, y, z) = 0$ (1) gọi là một mặt và (1) gọi là phương trình của nó. Nếu từ (1) ta giải được $z = f(x, y)$ hoặc $y = f(x, z)$ hoặc $x = f(y, z)$ thì các phương trình này gọi là giải được (hay là dạng hiển) của S và (1) cũng gọi là phương trình không giải của S. Một mặt S có thể cho theo các phương trình:

$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ (2), $(u, v) \in D \subset$ mặt phẳng u, v gọi là phương trình tham số của S. Rõ ràng từ (2) khử u, v ta có (1) và ngược lại. Mặt S gọi là một mặt liên tục nếu hàm F ở (1) liên tục trên S hoặc các hàm ở (2) liên tục trên D.

§1. MẶT CHO THEO PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG GIẢI

Trong R^3 cho mặt S có phương trình $F(x, y, z) = 0$ (1).

Định nghĩa 1: ***Một đường thẳng gọi là tiếp tuyến với mặt S tại $M(x, y, z) \in S$, nếu nó là tiếp tuyến với một đường cong bất kỳ trên S và qua M.***

Vì nói chung có vô số đường cong trên S qua $M \in S$, nên theo định nghĩa: Tại $M \in S$, có thể có vô số tiếp tuyến với S, các tiếp tuyến này liên hệ với nhau bởi:

Định lý: ***Nếu tại điểm $M(x, y, z) \in S$, tồn tại các đạo hàm riêng F'_x, F'_y, F'_z liên tục và $F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z \neq 0$ (ít nhất một trong chúng khác không) thì mọi tiếp tuyến tại M với S đều vuông góc với vecteur:***

$$\vec{N} = F'_x\vec{i} + F'_y\vec{j} + F'_z\vec{k}$$

Chứng minh: Xét một đường cong bất kỳ $C \subset S$ qua $M(x, y, z) \in S$, giả sử C có phương trình tham số: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Ta biết tiếp tuyến tại M với C có vecteur chỉ phương là: $\vec{T} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$ mặt khác vì
$C \subset S$ nên theo (1):

$$F[x(t), y(t), z(t)] \equiv 0 \qquad \forall t \in (\alpha, \beta).$$

Do đó và theo giả thiết:

$$F'_x x'(t) + F'_y y'(t) + F'_z z'(t) = 0$$

hay theo trên: $\vec{N}\vec{T} = 0$ nghĩa là $\vec{T} \perp \vec{N}$ vì $\vec{N}$ không phụ thuộc vào C qua M, nên mọi tiếp tuyến tại M với S đều thẳng góc với $\vec{N}$.

Theo định lý thì mọi tiếp tuyến tại M với S đều nằm trong một mặt phẳng vuông góc với vecteur $\overrightarrow{N}$.

Định nghĩa 2: ***Mặt phẳng chứa mọi tiếp tuyến với S tại M ⊂ S gọi là mặt phẳng tiếp xúc với S hay tiếp diện của S tại M. Đường thẳng qua M và vuông góc với tiếp diện của S tại M gọi là pháp tuyến với S tại M.***

Theo định nghĩa thì pháp tuyến với S tại M song song với $\overrightarrow{N}$ nghĩa là $\overrightarrow{N}$ là vecteur chỉ phương của pháp tuyến đó, $\overrightarrow{N}$ gọi là vecteur pháp của S tại M.

Từ định nghĩa ta có phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với S tại $M(x, y, z) \in S$ là:

$$(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z} \qquad (2)$$

trong đó X, Y, Z là toạ độ của một điểm bất kỳ trên tiếp diện và pháp tuyến. Đặc biệt, nếu mặt S cho theo phương trình: $z = f(x, y)$ thì $F = z - f(x, y)$ và các phương trình (1), (2) có dạng:

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y = Z - z$$

$$\frac{X - x}{f'_x} = \frac{Y - y}{f'_y} = \frac{Z - z}{-1}.$$

Thí dụ:

1) Viết phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với mặt ellipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tại $M(x, y, z)$ trên mặt. Ta có:

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

do đó

$$F'_x = \frac{2x}{a^2},\quad F'_y = \frac{2y}{b^2},\quad F'_z = \frac{2z}{c^2}$$

Theo (1) và (2) ta có các phương trình phải tìm là:

$$\frac{x}{a^2}(X - x) + \frac{y}{b^2}(Y - y) + \frac{z}{c^2}(Z - z) = 0$$

$$\frac{X - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y - y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{Z - z}{\frac{z}{c^2}}$$

phương trình đầu có thể viết:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1$$

$$\text{(vì } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ do } M \text{ trên mặt)}$$

2) Viết phương trình của tiếp diện P với mặt $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. Biết rằng nó song song với mặt phẳng Q: $x - y + 2z = 0$.

Theo thí dụ 1) thì phương trình của tiếp diện P tại $M(x, y, z)$ trên mặt là:

$$\frac{xX}{1} + \frac{yY}{\frac{1}{2}} + \frac{zZ}{1} = 1$$

theo giả thiết $P \,//\, Q$, nên:

$$\frac{x}{1} = \frac{2y}{-1} = \frac{z}{2}$$

Đặt các tỷ số bằng t thì $z = t$, $y = -\frac{t}{2}$, $z = 2t$. Thay vào phương trình của mặt:

$$t^2 + 2\left(-\frac{t}{2}\right)^2 + (2t)^2 = 1 \Rightarrow \frac{11t^2}{2} = 1 \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}$$

do đó:

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}, \quad y = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, \quad z = \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}$$

và ta được hai tiếp diện của mặt là: $x - y + 2z = \pm\sqrt{\frac{11}{2}}$

§2. MẶT CHO THEO PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ

Mặt $S \in R^3$ có thể cho theo phương trình tham số:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)\ (1)\ (u, v) \in D \in R^2$$

Xét $M(x, y, z) \subset S$ và cho v = const, thì hệ (1) là phương trình tham số (với tham số u) của một đường cong $C_1 \subset S$, tiếp tuyến tại $M(x, y, z) \in C_1$ có phương trình:

$$\frac{X - x}{x'_u} = \frac{Y - y}{y'_u} = \frac{Z - z}{z'_u} \qquad (2)$$

Tương tự: cho u = const thì phương trình của tiếp tuyến tại $M(x, y, z) \subset C_2 \subset S$ là:

$$\frac{X - x}{x'_v} = \frac{Y - y}{y'_v} = \frac{Z - z}{z'_v} \qquad (3)$$

Các tiếp tuyến (2) và (3) nằm trên tiep diện của S tại M. Do đó phương trình tiếp diện của S tại M là:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

và vecteur pháp $\overrightarrow{N}$ với S tại M có các tọa độ:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

với điều kiện là các đạo hàm riêng tồn tại liên tục và ít nhất một trong A, B, C khác không

Thí dụ: *Cho mặt $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = cv$ thì theo (4) phương trình của tiếp diện của S tại $M(x, y, z)$ bất kỳ trên mặt là:*

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & c \end{vmatrix} = 0$$

hay $\sin v.X - \cos vY + \dfrac{u}{c}Z = uv$

Chú ý: 1) Trong R^3 đường cong C có thể cho theo hệ phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 & (S_1) \\ G(x, y, z) = 0 & (S_2) \end{cases}$$

nghĩa là C là giao của 2 mặt S_1, S_2. Tiếp tuyến với C tại $M \in C$, chính là giao tuyến của các tiếp diện của S_1, S_2 tại $M \in S_1 \times S_2 = C$.

Do đó phương trình của tiếp tuyến với C tại $M(x, y, z) \in C$ là:

$$\begin{cases} (X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0 \\ (X - x)G'_x + (Y - y)G'_y + (Z - z)G'_z = 0 \end{cases}$$

Thí dụ:

Viết phương trình của tiếp tuyến với đường:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x^2 + y^2 = Rx$$

Ta có phương trình phải tìm là:

$$\begin{cases} xX + yY + zZ = R^2 \\ (2x - R)X + 2yY = Rx \end{cases}$$

Chú ý: Ta đã xét mặt S: $F(x, y, z) = 0$. Tại điểm $M(x, y, z) \in S$ ta đã giả thiết: F có các đạo hàm riêng liên tục và ít nhất một trong chúng khác không. Khi đó tiếp diện hay pháp tuyến của S tại M được hoàn toàn xác định, ta gọi M là điểm bình thường của S.

Ngược lại, nếu tại $M \in S$ các đạo hàm riêng của F đều triệt tiêu hoặc một trong chung không tồn tại thì ta gọi M là điểm bất thường của S.

Nếu $\forall M \in S$ đều là điểm bình thường thì S gọi là một mặt trơn. Mặt S gọi là trơn từng phần (mảnh) nếu nó là liên tục và được chia thành một số hữu hạn phần trơn bởi các đường trơn từng phần (đoạn **C7 (1.8) T1**).

BÀI TẬP

1. Tìm vi phân cung và các cosin chỉ hướng của tiếp tuyến tại một điểm bất kì của các đường:

1) $x^2 + y^2 = a^2$ 2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

3) $y^2 = 2Px$ 4) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

5) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

6) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

2. Tìm vi phân cung và cosin hoặc sin của góc V giữa bán kính cực và tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ của các đường.

1) $r = a\varphi$ 2) $r = \dfrac{a}{\varphi}$

3) $r = \dfrac{a}{\cos^2 \dfrac{\varphi}{2}}$ 4) $r = a\cos^2 \dfrac{\varphi}{2}$

5) $r = a^{\varphi}$ 6) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

3. Tìm độ cong và bán kính cong tại một điểm tùy ý của các đường.

1) $y = ax^2$ 2) $y = x^3$

3) $y = \sin x$ 4) $y = a\operatorname{ch} x/a$

5) $y = a\ln\left(\cos \dfrac{x}{a}\right)$ 6) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$

7) $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$ 8) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

9) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ 10) $r = a(1 + \cos\varphi)$

11) $r = a\varphi$ 12) $r = ae^{b\varphi}$

4. 1) Tìm bán kính cong bé nhất của đường $y^2 = 2px$

2) Tìm độ cong lớn nhất của đường $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$

5. Tìm toạ độ của tâm cong của các đường:

1) $xy = 1$ tại $(1, 1)$ 2) $ay^2 = x^3$ tại (a, a)

6. Viết phương trình đường tròn mật tiếp với các đường

1) $y = x^2 - 6x + 10$ tại $(3, 1)$

2) $y = e^x$ tại $(0, 1)$

7. Lập phương trình túc bế của các đường:

1) $x = a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$

2) $x = a(t - \sin t)$ $y = a(1 - \cos t)$

3) $x = t^2$ $y = t^3$

4) $x = a.(\cos t + t\sin t)$ $y = a.(\sin t - t\cos t)$

5) $r = a(1 + \cos\varphi)$

6) $r = e^{\lambda\varphi}$

8. Chứng minh rằng nếu (x_0, y_0) là toạ độ của tâm cong của đường

$$x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b.$$

thì:

$$\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'} = \frac{x'^2_0+y'^2_0}{x'_0y''_0-x''_0y'_0}$$

9. Tìm và phân loại các điểm bất thường của các đường cong:

1) $y^2 = -x^2 + x^4$

2) $(y - x^2)^2 = x^5$

3) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (lá Descartes)

4) $y^2(a - x) = x^3$ (cissoide)

5) $x^2 + y^4 = x^6$

10. Tìm hình bao của các họ đường cong:

1) $y = (x - c)^3$

2) $y^3 = (x - c)^2$ (paraboles de Neil)

3) $(a+x)(y-c)^2 = x^2(a-x)$, $a = const$

4) $y^2 = 2px + p^2$

5) Họ đường thẳng lập với các trục toạ độ các tam giác có diện tích không đổi S.

11. Xác định các đường là tốc đồ của các hàm vecteur :

1) $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{c}$ 2) $\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t$

3) $\vec{r} = \vec{a}\cos t + \vec{b}\sin t$ 4) $\vec{r} = \vec{a}\operatorname{ch} t + \vec{b}\operatorname{sh} t$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là các vectơ không đổi $\vec{a} \perp \vec{b}$

12. Tính đạo hàm theo tham số t của thể tích V của hình hộp dựng trên ba vecteur :

$$\vec{a} = \vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}$$

$$\vec{b} = 2t\vec{i} - \vec{j} + t^3\vec{k}$$

$$\vec{c} = -t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + \vec{k}$$

13 Phương trình của một chuyển động là:

$$\vec{r} = \vec{i}\cos\alpha\cos\omega t + \vec{j}\sin\alpha\cos\omega t + \vec{k}\sin\omega t$$

α, ω là các hằng số, t là thời gian, xác định quĩ đạo của chuyển động, độ lớn và hướng của vận tốc và gia tốc của chuyển động.

14. Tìm các vecteur $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ của các đường:

1) $x = t\sin t$, $y = t\cos t$, $z = t.e^t$ tại gốc toạ độ

2) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$ tại 1 điểm tùy ý.

15. Viết phương trình của tiếp tuyến pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến tại một điểm tùy ý của đường:

$$x = \frac{t^4}{4}, \quad y = \frac{t^3}{3}, \quad z = \frac{t^2}{2}$$

Tìm các điểm của đường, tại đó tiếp tuyến với đường song song với mặt phẳng: $x + 3y + 2z - 10 = 0$.

***16**. Viết phương trình mặt phẳng mặt tiếp, mặt phẳng pháp, mặt phẳng trục đạc của đường

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ tại $M(1, 1, 2)$

2) $y^2 = x$, $x^2 = z$ tại điểm tùy ý

3) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ tại 1 điểm tùy ý.

17. Viết phương trình của tiếp tuyến và mặt phẳng pháp với các đường:

1) $x = R\cos^2 t$, $y = R\sin t\cos t$, $z = R\sin t$ tại $t = \dfrac{\pi}{4}$

2) $z = x^2 + y^2$, $x = y$ tại $(1, 1, 2)$

18. Tìm các vecteur $\vec{\tau}$, $\vec{v}$, $\vec{\beta}$ và viết phương trình của mặt phẳng mật tiếp, pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến với đường (xoắn ốc conique).

$x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = bt$ tại gốc toạ độ.

19. Tìm độ cong của các đường:

1) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \mathrm{ch}t$ tại $t = 0$

2) $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = bt$ tại gốc toạ độ.

3) $x = \ln\cos t$, $y = \ln\sin t$, $z = t\sqrt{2}$ tại t tùy ý

*4) $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ tại (x, y, z) tùy ý

20 Tìm độ xoắn của các đường tại 1 điểm tùy ý:

1) $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$

2) $x = a\,\mathrm{ch}t\cos t$, $y = a\,\mathrm{ch}t\sin t$, $z = at$

3) $y^2 = x$, $x^2 = z$

21. Tìm độ cong và độ xoắn của các đường tại 1 điểm tùy ý.

1) $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$

2) $x = a\,\mathrm{ch}t$, $y = a\,\mathrm{sh}t$, $z = at$

3) $2ay = x^2$, $6a^2z = x^3$

***22**. Chứng minh rằng:

1) Nếu độ cong tại mọi điểm của một đường bằng không thì đường đó là đường thẳng.

2) Nếu độ xoắn tại mọi điểm của 1 đường bằng không thì đường đó là 1 đường cong phẳng.

23. Chứng minh đường $x = 1 + 3t + 2t^2$, $y = 2 - 2t + 5t^2$, $z = 1 - t^2$ là một đường cong phẳng.

Tìm mặt phẳng chứa nó.

24. Viết phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với các mặt:

1) $z = x^2 + y^2$ tại $(1, -2, 5)$

2) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$ tại $(4, 3, 4)$

3) $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ tại $(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$

4) $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = b\cos\theta\sin\varphi$, $z = c\sin\theta$ tại $M_0(\varphi_0, \theta_0)$

5) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r\,\mathrm{cotg}\,\alpha$ tại $M_0(\varphi_0, r_0)$

25. 1) Tìm trên mặt $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ những điểm tại đó các tiếp diện là song song với các mặt phẳng toạ độ

2) Tìm góc giữa các mặt: $x^2 + y^2 = R^2$, $(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ tại $M(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0)$

3) Chứng minh rằng pháp tuyến tại một điểm bất kỳ trên mặt tròn xoay $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, $(f' \neq 0)$ cắt trục quay của nó.

4) Tìm các điểm trên mặt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ tại đó pháp tuyến của mặt hợp với các trục toạ độ các góc bằng nhau.

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI BÀI TẬP

1. 1) $ds = \frac{a}{y}dx$, $\cos\alpha = \frac{y}{a}$, $\sin\alpha = \frac{-x}{a}$

2) $ds = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4 - c^2x^2}{a^2 - x^2}}dx$; $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^4 - c^2x^2}}$

$\sin\alpha = -\frac{bx}{\sqrt{a^4 - c^2x^2}}$; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

3) $ds = \frac{1}{y}\sqrt{p^2 + y^2}\,dx$, $\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{p^2 + y^2}}$; $\sin\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y^2}}$

4) $ds = \sqrt[3]{\frac{a}{x}}\,dx$, $\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}$; $\sin\alpha = -\sqrt[3]{\frac{y}{a}}$

5) $dx = 2a\sin\frac{t}{2}\,dt$; $\cos\alpha = \sin\frac{t}{2}$; $\sin\alpha = \cos\frac{t}{2}$

6) $dx = 3a\sin t.\cos t.dt$, $\cos\alpha = -\cos t$, $\sin\alpha = \sin t$

2. 1) $ds = a\sqrt{1+\varphi^2}\,.d\varphi$. $\cos V = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$

2) $ds = \frac{a}{\varphi^2}\sqrt{1+\varphi^2}\,.d\varphi$, $\cos V = -\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$

3) $ds = \frac{a}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}d\varphi$, $\sin V = \cos\frac{\varphi}{2}$

4) $ds = a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$, $\sin V = \cos\frac{\varphi}{2}$

5) $ds = r\sqrt{1+(\ln a)^2}\,d\varphi$, $\sin V = \frac{1}{\sqrt{1+(\ln a)^2}}$

6) $ds = \frac{a^2}{r}\,d\varphi$, $\sin V = \cos 2\varphi$

3. 1) $K = \frac{1}{R} = \frac{2|a|}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$

2) $K = \frac{1}{R} = \frac{6|x|}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}$

3) $K = \frac{1}{R} = \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$

4) $K = \frac{1}{R} = \frac{1}{aCh^2\frac{x}{a}}$

5) $K = \frac{1}{R} = \frac{\left|\cos\frac{x}{a}\right|}{a}$

6) $R = \frac{1}{K} = \left|\frac{3}{2}a\sin 2t\right|$

7) $K = \frac{1}{R} = \frac{ab}{(a^2Sh^2t+b^2Ch^2t)^{3/2}}$

8) $K = \frac{1}{R} = \frac{1}{\left(4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\right)}$

9) $R = \dfrac{1}{K} = \dfrac{a^2}{3r}$

10) $R = \dfrac{1}{K} = \dfrac{4}{3}a\left|\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|$

11) $R = \dfrac{1}{K} = \dfrac{a(1+\varphi^2)^{3/2}}{2+\varphi^2}$

12) $R = \dfrac{1}{K} = r\sqrt{1+b^2}$

4. 1) $R_{\min} = p$

2) $K_{\max} = \dfrac{1}{a}$ $(a > 0)$

5. 1) (2, 2)

2) $\left(-\dfrac{11}{2}a, \dfrac{16}{3}a\right)$

6. 1) $(x-3)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

2) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$

7. 1) $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$

2) $X = \pi a + a(t - \sin t)$

$Y = -2a + a(1 - \cos t)$

3) $X = -(9t^2 + 2)\dfrac{t^2}{2}$

$Y = 4(3t^2 + 1)\dfrac{t}{3}$

4) $x^2 + y^2 = a^2$

5) cardioide

6) $r = \lambda e^{\lambda\varphi_1}$

$\varphi_1 = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$

9.

1) Điểm bất thường cô lập (0, 0)

2) Điểm lùi loại hai (0, 0)

3) Điểm nút kép (0, 0)

4) Điểm lùi loại một (0, 0)

5) Điểm bất thường cô lập (0, 0)

10. 1) Hình bao: $y = 0$ (quĩ tích các điểm uốn)

2) Không có hình bao ($y = 0$ quĩ tích các điểm góc)

3) Hình bao: $x = a$, ($x = 0$ quĩ tích các điểm kép)

4) Không có hình bao

5) Hình bao $xy = $ [illegible]/2

11. 1) Đường thẳng　　2) Parabole

3) Ellipse　　4) Hyperbole

12. $V' = 4t(t^2 + 1)$

13. $x = \cos\alpha\cos\omega t$, $y = \sin\alpha\cos\omega t$, $z = \sin\omega t$

(Đường tròn). $\vec{V} = -\omega\vec{i}\cos\alpha\sin\omega t - \omega\vec{j}\sin\alpha\sin\omega t + \omega\vec{k}\cos\omega t$

$$\left|\vec{V}\right| = |\omega|$$

$$\vec{W} = -\omega^2\vec{i}\cos\alpha\cos\omega t - \omega^2\vec{j}\sin\alpha\cos\omega t - \omega^2\vec{k}\sin\omega t$$

$$\left|\vec{W}\right| = \omega^2$$

14.

1) $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$, $\vec{\nu} = \dfrac{2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}}$, $\vec{\beta} = \dfrac{\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{3}}$

2) $\vec{\tau} = \dfrac{3\cos t\vec{i} - 3\sin t\vec{j} + 4\vec{k}}{5}$, $\vec{\nu} = \sin t\vec{i} + \cos t\vec{j}$

$$\vec{\beta} = \frac{4\cos t\vec{i} - 4\sin t\vec{j} - 3\vec{k}}{5}$$

15.

$$\frac{x - \frac{t^4}{4}}{t^2} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{t} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{1} \qquad \text{(tiếp tuyến)}$$

$$\frac{x - \frac{t^4}{4}}{t^3 + 2t} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{1 - t^4} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{-2t^3 - t} \qquad \text{(pháp tuyến chính)}$$

$$\frac{x - \frac{t^4}{4}}{1} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{-2t} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{t^2} \qquad \text{(trùng pháp tuyến)}$$

$M_1\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$; $M_2\left(4, -\frac{8}{3}, 2\right)$

16. 1) $2x - z = 0$: Mặt phẳng pháp.

$y - 1 = 0$: Mặt phẳng mật tiếp.

$x + 2z - 5 = 0$: Mặt phẳng trực đạc.

2) $6y_0^2(x - x_0) - 8y_0^3(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

$2y_0(x - x_0) + (y - y_0) + 4y_0^3.(z - z_0) = 0$

$(1 - 32y_0^6)(x - x_0) - 2y_0.(12y_0^4 + 1).(y - y_0) + 2y_0^2.(8y_0^2 + 3).(z - z_0) = 0$

3) $e^{-t_0}x - e^{t_0}y - \sqrt{2}z + 2t_0 = 0$

$e^{t_0}x - e^{-t_0}y + \sqrt{2}z + 2(t_0 + Sh2t_0) = 0$

$x + y - \sqrt{2}Sht_0 z + 2(t_0 Sht_0 - Cht_0) = 0$

17.

1) $\dfrac{x - \frac{R}{2}}{2} = \dfrac{y - \frac{R}{2}}{0} = \dfrac{z - \sqrt{2}\frac{R}{2}}{-\sqrt{2}}$, $x\sqrt{2} - z = 0$

2) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{4}$, $x + y + 4z - 10 = 0$

18.

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{i} + b\vec{k}}{\sqrt{1+b^2}} \;;\; \vec{\beta} = \frac{-b\vec{i} + \vec{k}}{\sqrt{1+b^2}} \;;\; \vec{V} = \vec{j}$$

$$bx - z = 0 \;,\; \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + bz = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

19 1) $\sqrt{2}$

2) $\dfrac{2}{1+b^2}$

3) $\dfrac{|\sin 2t|}{\sqrt{2}}$

4) $\dfrac{(a+b)^{1/2}}{(a+b+2z)^{3/2}}$

20. 1) $\dfrac{e^t}{3}$

2) $\dfrac{1}{ach^2 t}$

3) $\dfrac{-12y}{(64y^6 + 36y^4 + 1)}$

21. 1) $K = T = \dfrac{1}{3(t^2+1)^2}$ 2) $K = T = \dfrac{1}{2ach^2 t}$

3) $K = T = \dfrac{a}{(a+y)^2}$

23. $2x + 3y + 19z - 27 = 0$

24.

1) $2x - 4y - z - 5 = 0,\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$

2) $3x + 4y - 6z = 0,\ \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-6}$

3) $x\cos\alpha + y\cos\alpha - R = 0,\ \dfrac{x - R\cos\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y - R\sin\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{z-R}{0}$

4) $\dfrac{x}{a}\cos\theta_0\cos\varphi_0 + \dfrac{y}{b}\cos\theta_0\sin\varphi_0 + \dfrac{z}{c}\sin\theta_0 = 1$

$\dfrac{x\sec\theta_0\sec\varphi_0 - a}{bc} = \dfrac{y\sec\theta_0\operatorname{cosec}\varphi_0 - b}{ac} = \dfrac{z\operatorname{cosec}\theta_0 - c}{ab}$

5) $x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - z\,tg\alpha = 0$

$\dfrac{x - r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \dfrac{y - r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0} = \dfrac{z - r_0\cot g\alpha}{-tg\alpha}$

25.

1) $(1, \pm 1, 0)$, $\|\, Oxz$

2) $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$: $\|\, Oyz$; $\|\, Oxy$ không có

3) $\dfrac{\pi}{3}$

4) $\left(\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \pm\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \pm\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$

Chương 9

TÍCH PHÂN BỘI

Trong bài tích phân xác định ta đã nghiên cứu tích phân của hàm một biến $y = f(x)$ trong đoạn $[a, b]$ nào đó. Trong chương này ta sẽ nghiên cứu tích phân của hàm hai biến và ba biến trong một miền nào đó gọi là tích phân kép và tích phân bội ba, còn tích phân của hàm một biến đã nghiên cứu cũng gọi là tích phân đơn.

A. TÍCH PHÂN KÉP

§1. KHÁI NIỆM TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa

- Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định và bị chặn trong một miền compact D.

- Chia D ra n phần bất kỳ không dẫm lên nhau, gọi tên và diện tích cuả chúng lần lượt là:

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_i, \dots, \Delta S_n$$

- Chọn điểm bất kỳ $P_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

- Lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$$

- Ký hiệu d_i là đường kính của ΔS_i ($i = 1, 2,..., n$) (đường kính của một miền là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kỳ của miền)và $d = \max d_i$. Nếu tổng I_n có giới hạn là I khi $n \to \infty$ sao cho $d \to 0$ không phụ thuộc cách chia miền D và cách chọn các điểm P_i thì I gọi là tích phân kép của hàm số $z = f(x, y)$ trên miền D. Ký hiệu

$$I = \iint_D f(x, y)dS \;\; hay \;\; I = \iint_D f(P)dS$$

Tổng I_n gọi là tổng tích phân thứ n, $f(x, y)$, $f(x, y)dS$ gọi là hàm số và biểu thức dưới dấu tích phân.

Nếu $f(x, y)$ có tích phân trong miền D thì $f(x, y)$ gọi là khả tích trong miền đó.

1.2. Điều kiện khả tích

Tương tự như đối với tích phân đơn ta có: ***Điều kiện cần và đủ để hàm bị chặn f(P) khả tích trên miền compact D là:*** $\lim\limits_{d \to 0}(S - s) = 0$

(điều kiện Riemann), trong đó

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i \;\; ; \;\; S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i \;\; ;$$

$$m_i = \inf_{P \in \Delta S_i} (P) \;\; ; \;\; M = \sup_{P \in \Delta S_i} f(P)$$

S (s) gọi là tổng Darboux trên (dưới) của hàm f(P) trên miền D.

Từ điều kiện Riemann, tương tự như đối với tích phân đơn ta có thể chứng minh: ***Mọi hàm liên tục f(P) trên miền compact D đều khả tích trên miền đó.***

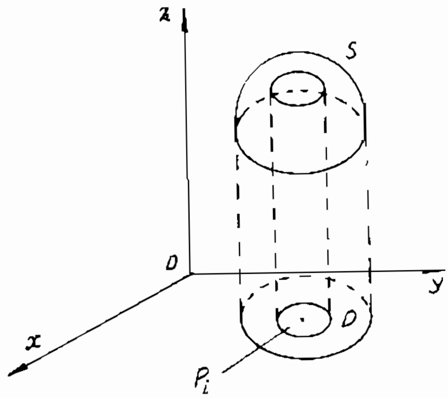
1.3. Ý nghĩa hình học và cơ học của tích phân kép

1) Ý nghĩa hình học

Về hình học, cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trong miền D, nghĩa là cho mặt S có phương trình $z= f(x, y)$, mặt này có hình chiếu trên mặt phẳng xoy

là miền D. Người ta gọi hình giới hạn bởi mặt S mặt trụ có đường chuẩn là biên của miền D, đường sinh song song với trục oz và mặt phẳng xoy là một hình trụ cong (H 116).

Giả sử $f(x, y) > 0$, ta thấy: $f(x_i, y_i).\Delta S_i$, chính là thể tích hình trụ đáy ΔS_i và chiều cao là $f(x_i, y_i)$ khi ΔS_i khá nhỏ thì có thể coi thể tích này gần đúng là thể tích hình trụ cong cùng đáy ΔS_i. Do đó $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ có thể coi gần đúng là thể tích hình trụ cong đáy là cả miền D. Một cách lý tưởng ta định nghĩa thể tích V của hình trụ cong đó là $V = \lim\limits_{d \to 0} I_n$, $d = \max d_i$, d_i là đường kính của miền ΔS_i.



Hình 116

Theo định nghĩa tích phân kép thì $V = \iint\limits_D f(x, y)dS$. Như vậy, về mặt hình học khi $f(x, y) > 0$ thì tích phân kép $\iint\limits_D f(x, y)dS$ là thể tích hình trụ cong, đáy dưới là miền D, đáy trên là mặt $z= (x, y)$ và đường sinh song song với trục oz.

2) Ý nghĩa cơ học

Giả sử $f(x, y) > 0$ và coi $f(x, y)$ là mật độ khối lượng (mặt) của bản mỏng D thì $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i$ có thể coi gần đúng là khối lượng của bản D, một cách lý tưởng ta định nghĩa khối lượng của bản D là $m = \lim\limits_{d \to 0} I_n$.

Theo định nghĩa tích phân kép thì $m= \iint\limits_D f(x, y)dS$. Như vậy về cơ học khi $f(x, y) > 0$ thì tích phân kép: $\iint\limits_D f(x, y)dS$ là khối lượng của bản mỏng D có mật độ khối lượng (mặt) là $f(x, y)$.

Chú ý: Nếu $f = 1$ trên D thì

$$\iint\limits_D f(P)dS = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} 1.\Delta S_i = S \text{ là diện tích miền } D.$$

1.4. Tính chất của tích phân kép

Tích phân kép cũng có các tính chất tương tự như đối với tích phân đơn:

1) Nếu *f(P)*, *g(P)* khả tích trên miền *D* thì *f(P)* $\pm$ *g(P)* cũng khả tích trên *D* và:

$$\iint\limits_D [f(P) \pm g(P)]dS = \iint\limits_D f(P)dS \pm \iint\limits_D g(P)dS$$

2) Nếu *f(P)* khả tích trên miền *D* thì *kf(P)*, *k* = const cũng khả tích trên miền *D* và

$$\iint\limits_D kf(P)dS = k\iint\limits_D f(P)dS$$

3) Nếu *D* được chia thành hai miền D_1, D_2: $D = D_1 \cup D_2$ bởi một đường, *f(P)* khả tích trên *D* thì *f(P)* khả tích trên D_1, D_2 và ngược lại, khi đó:

$$\iint\limits_D f(P)dS = \iint\limits_{D_1} f(P)dS + \iint\limits_{D_2} f(P)dS$$

4) Nếu *f*(P), *g*(P) khả tích trên miền *D* và $f(P) \le g(P)$ $\forall P \in D$ thì:

$$\iint\limits_D f(P)dS \le \iint\limits_D g(P)dS$$

5) Nếu *f(P)* khả tích trên miền *D* thì $|f(P)|$ cũng khả tích trên *D* và:

$$\left|\iint\limits_D f(P)dS\right| \le \iint\limits_D |f(P)|\,dS$$

6) Nếu *f(P)* khả tích trên miền *D* và $m = \inf\limits_{P\in D} f(P); M = \sup\limits_{P\in D} f(P);$ thì:

$mS \le \iint\limits_D f(P)dS \le MS$, với S là diện tích của miền *D*.

7) Nếu $f(P)$ liên tục trên miền D thì tồn tại điểm $\overline{P}_c \in D$ sao cho:

$\iint\limits_D f(P)dS = f(\overline{P}_c).S$, S là diện tích miền D. $f(\overline{P}_c) = \dfrac{1}{S}\iint\limits_D f(P)dS$ gọi là giá trị trung bình của $f(P)$ trên D.

Các tính chất trên được chứng minh tương tự như đối với các tính chất của tích phân đơn. Chẳng hạn xét 7). Từ 6) ta có:

$$m \le \frac{1}{S}\iint\limits_D f(P)dS \le M$$

Vì $f(P)$ liên tục trên D nên m, M là giá trị bé nhất và lớn nhất của $f(P)$ trên D. Đặt $\gamma = \dfrac{1}{S}\iint\limits_D f(P)dS$ thì theo định lý lấy giá trị trung gian của hàm liên tục, $\exists \overline{P}_c \in D$ sao cho

$$f(\overline{P}_c) = \gamma = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(P)dS\ .$$

§2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP

2.1. Tọa độ Descartes

a) Miền chữ nhật: ***Cho hàm f (x, y) xác định trên miền chữ nhật***

$$D:\ a \le x \le b,\ c \le y \le d.$$

Định lý: ***Nếu tồn tại các tích phân***

$$\iint\limits_D f(x,y)dS \quad (1) \quad \text{và} \quad I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy,\quad a \le x \le b\ \ (2)$$

thì tồn tại

$$\int\limits_a^b \Big(\int\limits_c^d f(x,y)dy\Big)dx \qquad\qquad (3)$$

và

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)\,dx \qquad (4)$$

ký hiệu

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

và tích phân này gọi là một tích phân lặp hay tích phân hai lớp.

Chứng minh: Chia miền D thành một số hữu hạn miền nhỏ bởi các đường thẳng song song với các trục toạ độ (hình 117)

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n+1} = b,$$

$$c = y_1 < y_2 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < y_{m+1} = d$$

Xét phần được chia (D_{ik}) có diện tích là $\Delta x_i \Delta y_k$ trong đó $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots, m)$.

Đặt

$$m_{ik} = \inf_{(D_{ik})} f(x,y), \quad M_{ik} = \sup_{(D_{ik})} f(x,y)$$

thì trên (D_{ik}) ta có: $m_{ik} \le f(x, y) \le M_{ik}$.

Trên $[x_i, x_{i+1}]$ chọn $x = \xi_i$ tùy ý thì:

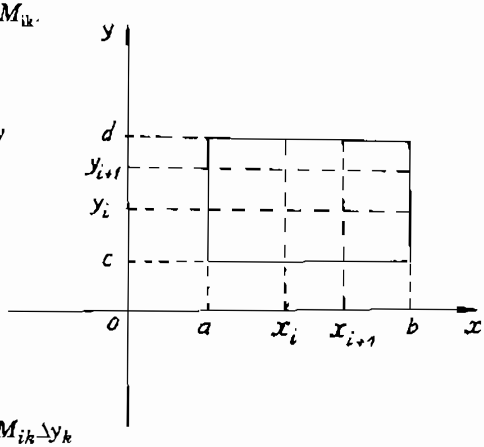
$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} m_{ik}\,dy \le \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)\,dy \le \int_{y_k}^{y_{k+1}} M_{ik}\,dy$$

hay

$$m_{ik}\Delta y_k \le \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)\,dy \le M_{ik}\Delta y_{k+1}$$

Từ giả thiết (2) suy ra:

$$\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\Delta y_k \le I(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)\,dy \le \sum_{k=1}^{m} M_{ik}\Delta y_k$$



Hình 117

và

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sum_{k=1}^{m} m_{ik} \Delta y_k \le \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i) \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sum_{k=1}^{m} M_{ik} \Delta y_k$$

Tổng ở giữa chính là tổng tích phân của hàm $I(x)$ trên đoạn $[a, b]$, các tổng ở hai bên là các tổng Darboux dưới s và trên S của hàm $f(x, y)$ trên D nghĩa là:

$$s \le \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i) \Delta x_i \le S$$

Theo giả thiết (1) thì:

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_k \to 0}} \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i) \Delta x_i = \iint_D f(x, y) dS$$

vậy:

$$\iint_D f(x, y) dS = \int_a^b I(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Hoán vị vai trò x, y cùng với (4) ta cũng có:

$$\iint_D f(x, y) dS = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \qquad (4')$$

với giả thiết $y = \text{const}$, $\int_a^b f(x, y) dx$ tồn tại. Vậy:

$$\iint_D f(x, y) dS = \int_a^b f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

nghĩa là có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân (theo x, y). Do (4) (4') ta cũng ký hiệu

$$\iint_D f(x, y) dS = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Thí dụ:

1) Tính

$$I = \iint_D (x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4)dxdy$$

D là hình chữ nhật $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, ở đây $a = 0$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 2$.

Do đó theo công thức (4)

$$I = \int_0^2 dx \int_0^2 (x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4)dy = \int_0^2 (x^2 y + \frac{y^3}{3} - 2xy - y^2 + 4y)\Big|_0^2 dx$$

$$= \int_0^2 (2x^2 + \frac{8}{3} - 4x - 4 + 8)dx = (\frac{2x^3}{3} - 2x + \frac{20}{3}x)\Big|_0^2 = 10\frac{2}{3}$$

2) Tính:

$$I = \iint_D \frac{xdxdy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

D là hình chữ nhật $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Ta có:

$$I = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{xdx}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Tính

$$\Phi(y) = \int_0^1 \frac{xdx}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2}}$$

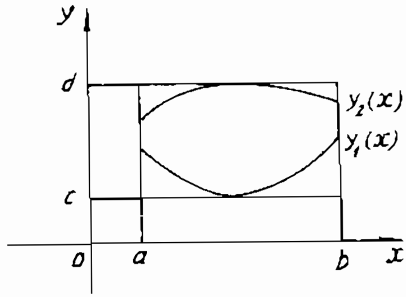
Do đó

$$I = \int_0^1 \Phi(y)dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2}}\right)dy = \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{y + \sqrt{y^2 + 2}}\right)\Bigg|_0^1 = \ln\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}$$

b) Miền cong: Xét miền D giới hạn bởi các đường liên tục:

$$y = y_1(x),\ y = y_2(x),\ y_1(x) \le y_2(x),\ a \le x \le b$$

và các đường thẳng $x = a$, $x = b$.



Hình 118

Định lý: *Nếu hàm $f(x, y)$ khả tích trên miền D như trên, khi $x = const$ tích phân đơn $\Phi(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$ tồn tại thì tồn tại tích phân lặp*

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

và $$\iint\limits_D f(x, y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

Chứng minh:

Xét hình chữ nhật R giới hạn bởi các đường thẳng

$$x = a,\ x = b,\ y = c = \min_{a\le x\le b} y_1(x)$$

$$y = d = \max_{a\le x\le b} y_2(x) \qquad \text{(H.118)}$$

và hàm

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{nếu } (x, y) \in D \\ 0 & \text{nếu } (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Rõ ràng hàm $F(x, y)$ thoả mãn các điều kiện của định lý ở a)

Thực vậy:

$$\iint\limits_D F(x, y)dS = \iint\limits_D f(x, y)dS$$

mặt khác

$$\iint_{R\setminus D} F(x, y)dS = 0$$

Do đó hàm $F(x,y)$ khả tích trên R và

$$\iint_R F(x, y)dS = \iint_D f(x, y)dS \qquad (1), \text{ tồn tại.}$$

Xét x = const và tích phân

$$\int_c^d F(x, y)dy = \int_c^{y_1(x)} F(x, y)dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y)dy + \int_{y_2(x)}^{d} F(x, y)dy$$

Tích phân thứ nhất và tích phân thứ ba ở vế phải tồn tại và bằng 0. còn tích phân thứ hai

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y)dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

do đó

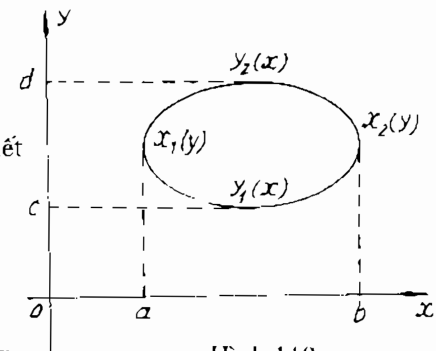
$$\int_c^d F(x, y)dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \qquad (2)$$

Theo giả thiết của định lý, tích phân ở vế phải tồn tại nên $\int_c^d F(x, y)dy$ tồn tại. Vậy theo định lý ở a) ta có:

$$\iint_D F(x, y)dS = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y)dy.$$

Theo (1) và (2) thì công thức này viết được:

$$\iint_D f(x, y)dS = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \qquad (3)$$



Hình 119

Nếu miền D giới hạn bởi các đường:

$x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $x_1(y) \leq x_2(y)$ $(c \leq y \leq d)$ và các đường thẳng $y = c$, $y = d$ (Hình 119) thì chứng minh tương tự như đối với (3) ta có:

$$\iint_D f(x,y)dS = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \tag{3'}$$

Chú ý:

1) Nếu các đường thẳng song song với các trục toạ độ cắt biên của miền D không quá 2 điểm (H.119) thì theo định lý trên ta có công thức:

$$\iint_D f(x,y)dS = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dx$$, nghĩa là ta có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân và ta cũng ký hiệu

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_D f(x,y)dxdy$$

2) Miền D trong định lý trên cũng gọi là miền đơn giản. Nếu D không phải là miền đơn giản, khi đó để tính $\iint_D f(x,y)dS$, ta phải chia miền D thành những miền đơn giản đã xét, và tích phân trên miền D sẽ bằng tổng các tích phân trên các miền đơn giản.

Thí dụ:

1) Tính

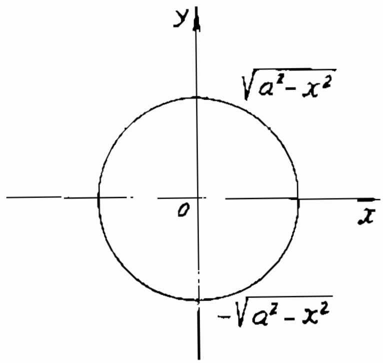
$$I = \iint_D y^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dxdy$$

D là hình tròn: $x^2 + y^2 \leq a^2$

Theo (H.120) và công thức (3) ta có

$$I = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} y^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dy$$

$$= \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} y^2 dy$$



Hình 120

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy\,.$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{4}{3}\int_0^a (a^2 - x^2)^2\,dx = \frac{32}{45}a^5.$$

2) Tính

$$\iint_D (12 - 3x - 4y)dxdy$$

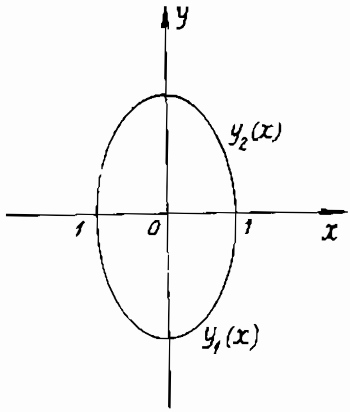
D là hình ellipse (H.121):

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} \le 1$$

Ta có $a = -1$, $b = 1$,

$y_1(x) = -2\sqrt{1 - x^2}$,

$y_2(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$ (giải y theo x từ phương trình ellipse).



Hình 121

Vậy

$$I = \int_1^1 dx \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} (12 - 3x - 4y)dy$$

Xét

$$\Phi(x) = \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} (12 - 3x - 4y)dy$$

ở đây $f(x, y) = 12 - 3x - 4y$ là hàm không chẵn, lẻ đối với y nên:

$$\Phi(x) = \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} [f(x,y) + f(x,-y)]dy \quad = \quad \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} [12 - 3x - 4y + (12 - 3x + 4y)]dy$$

$$= \quad 6(4-x)\int_0^{2\sqrt{1-x^2}} dy = 12(4-x)\sqrt{1-x^2}.$$

Do đó $I = \int_{-1}^{1} \Phi(x)dx$, ở đây $\Phi(x)$ cũng là hàm không chẵn, lẻ đối với x nên:

$$I = \int_0^1 [\Phi(x) + \Phi(-x)]dx = 12\int_0^1 [(4-x)\sqrt{1-x^2} + (4+x)\sqrt{1+x^2}\,]dx$$

$$= 96\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 96\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_0^1 = 96.\frac{\pi}{4} = 24\pi$$

3) Thay đổi thứ tự lấy tích phân

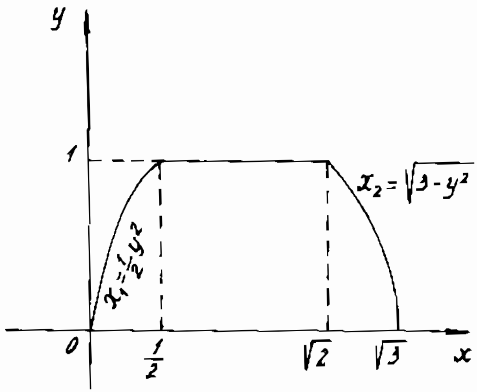
$$I = \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$$

Tích phân này có dạng của công thức (3') với $c = 0$,

$$d = 1,\ x_1(y) = \frac{1}{2}y^2,$$

$$x_2(y) = \sqrt{3-y^2}.$$

Ta có miền D như hình (H. 122)



Hình 122

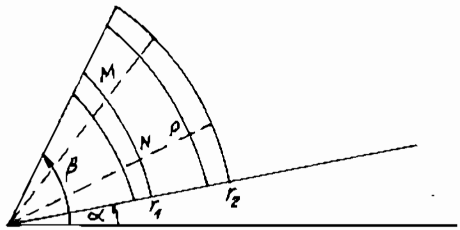
Thay đổi thứ tự lấy tích phân trên ta có:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx\int_0^1 f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy$$

2.2. Tọa độ độc cực

Xét $\quad \mathbf{I} = \iint\limits_{\mathbf{D}} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \varphi)\mathbf{dS} \qquad (1)$

trong đó D là miền trong toạ độ cực. Tương tự như toạ độ Decartes, đầu tiên xét D giới hạn bởi 2 tia $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ và các đường tròn $r = r_1$, $r = r_2$ với $\alpha \le \beta$, $r_1 \le r_2$ (H.123)



Hình 123

Chia D ra n phần bởi các tia φ = const, r = const. Xét một phần được chia: gồm giữa các đường φ_i = const, $\varphi_i + \Delta\varphi_i$ = const, r_i = const, $r_i + \Delta r_i$ = const. Coi gần đúng phần này như một hình chữ nhật cạnh là MN và NP thì diện tích của nó là: $\Delta S_i = MN.\,NP = r_i\,\Delta\varphi_i\,\Delta r_i$.

Vậy ta có tổng tích phân của $F(r, \varphi)$ trên D là:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} F(r_i, \varphi_i) r_i \Delta\varphi_i \Delta r_i$$

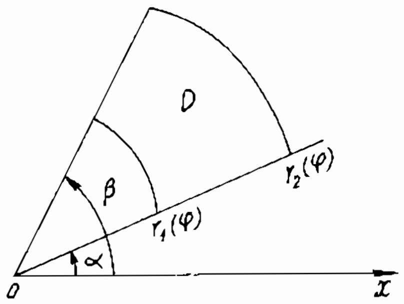
Rõ ràng I_n cũng có thể coi là tổng tích phân của hàm $F(r, \varphi).\,r$ trên miền chữ nhật $\alpha \le \varphi \le \beta$, $r_1 \le r \le r_2$. Do đó và theo cách tính tích phân kép trong toạ độ Descartes với D là hình chữ nhật thì:

$$I = \iint\limits_{D} F(r, \varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} F(r, \varphi) r dr \qquad (2)$$

Bây giờ xét D giới hạn bởi $\varphi = \alpha$ = const, $\varphi = \beta$ = const ($\varphi \le \beta$) và $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ ($r_1(\varphi) \le r_2(\varphi)$) (H.124).

Tương tự như trong toạ độ Descartes, ta có

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi)\, r\, dr \qquad (3)$$



Hình 124

Nếu D giới hạn bởi

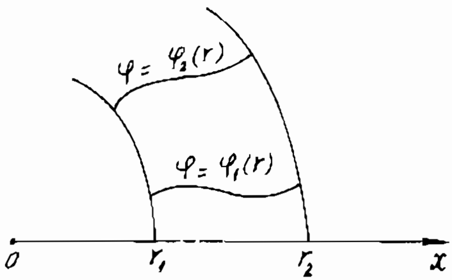
$r = r_1 = \text{const}$,

$r = r_2 = \text{const}$,

$r_1 < r_2$, $\varphi = \varphi_1(r)$,

$\varphi = \varphi_2(r)$ $(\varphi_1(r) \leq \varphi_2(r))$ (H.125) thì:

$$I = \int_{r_1}^{r_2} r\, dr \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} F(r,\varphi)\, d\varphi \qquad (4)$$



Hình 125

Xét D là miền giới hạn bởi đường khép kín C mà các tia $\varphi = \text{const}$ và các đường tròn $r = \text{const}$ cắt C không quá hai điểm, khi đó D cũng gọi là miền đơn giản trong toạ độ dộc cực (H.126). Giả sử các tia $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ và các đường tròn $r = R_1$, $r = R_2$ $(R_1 < R_2)$ tiếp xúc với C tại A, B, C, D và các cung ACB, ADB, CAD, CBD lần lượt có phương trình là: $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, $\varphi = \varphi_1(r)$, $\varphi = \varphi_2(r)$.

Theo các công thức (3), (4) ta có:

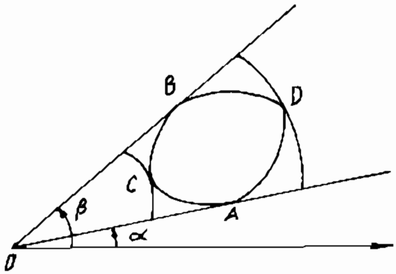
$$I = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi)\, r\, dr = \int_{R_1}^{R_2} r\, dr \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} F(r,\varphi)\, d\varphi$$

nghĩa là có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân.

Đặc biệt: Nếu gốc cực $O \in D$ và D giới hạn bởi đường khép C: $r = r(\varphi)$ ta có:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} F(r,\varphi) r dr .$$

Bây giờ xét $I = \iint_D f(x,y)dS$ trong tọa độ Descartes để tính tích phân này, ta có thể chuyển sang toạ độ độc cực. Ta có $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (5).



Hình 126

Khi đó $f(x, y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = F(r, \varphi)$ và theo (2) trong tọa độ độc cực $dS = rdrd\varphi$. Vậy

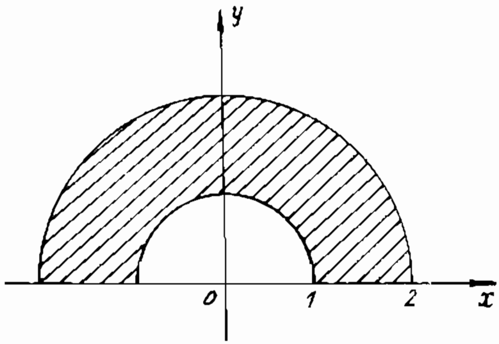
$$\mathbf{I} = \iint_{\mathbf{D}} \mathbf{f(x,y)dS} = \iint_{\mathbf{D'}} \mathbf{f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi} = \iint_{\mathbf{D'}} \mathbf{F(r,\varphi) r dr d\varphi} \qquad (6)$$

trong đó D' là miền trong toạ độ độc cực tương ứng với miền D trong toạ độ Descartes qua phép biến đổi (5). Các công thức (3), (4) sẽ cho cách tính tích phân (6) trong toạ độ độc cực.

Thí dụ:

1) Tính $I = \iint_D (x+y)dS$

trong đó D là hình giới hạn bởi các đường $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$ với $y \geq 0$ (H.127). Đổi sang toạ độ độc cực theo các công thức liên hệ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ thì các đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ có các phương trình: $r=1$ và $r=2$ (do $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 1$ suy ra $r = 1$, tương tự cho $r = 2$). Do đó:



Hình 127

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_1^2 (r\cos\varphi + r\sin\varphi) r\,dr = \int_0^{\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \int_1^2 r^2 dr$$

$$= (\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\pi} \left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{14}{3}$$

2) Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dS$, D là nửa trên của mặt tròn:

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{R^2}{4}.\ (hình\ 128)$$

Đổi sang toạ độ độc cực ta có:

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

còn đường tròn trên, trong tọa độ độc cực có phương trình: $r = R\cos\varphi$, do đó miền D trong tọa độ độc cực được xác định bởi $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le R\cos\varphi$.

vậy:

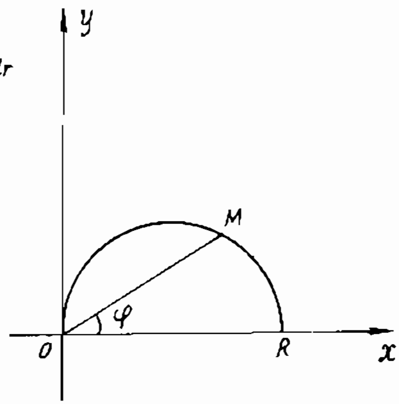
$$I = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - r^2}\, dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\,dr$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} d(R^2 - r^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R\cos\varphi} d\varphi$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(R^2 - R^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - R^3] d\varphi$$

$$= \frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi) d\varphi$$



Hình 128

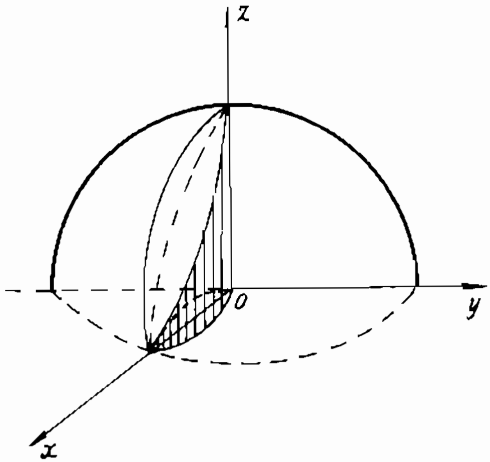
$$= \frac{R^3}{3}\left[\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi\right] = \frac{R^3}{3}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right]$$

($\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{2.1}{3.1}$, xem tích phân xác định, phần tích phân từng phần)

Về hình học I là $\frac{1}{4}$ thể tích V giới hạn bởi mặt trụ $(x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = R^2$ mà mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (H.129). Suy ra $V = \frac{4}{3}R^3(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$. Nếu lấy một nửa thể tích hình cầu: $\frac{2}{3}\pi R^3$ trừ đi V ta có:

$$\frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}R^3(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}) = \frac{8}{9}R^3$$

đó là một số hữu tỷ của R.



Hình 129

2.3. Quy tắc tổng quát đổi biến số của tích phân kép

Tương tự như đối với tích phân đơn ta có:

Định lý: ***Giả sử hàm z = f(x, y) liên tục trên miền compact D để tính tích phân:***

$$I = \iint_D f(x, y)dS \text{ ta đặt } x = x(u, v),\ y = y(u, v) \qquad (1)$$

Nếu:

1) Các hàm (1) có đạo hàm riêng liên tục trong miền compact D' của mặt phẳng Ouv.

2) Các hàm (1) xác định một song ánh từ miền compact D' vào miền compact D của mặt phẳng Oxy.

3) Định thức:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ trong } D'$$

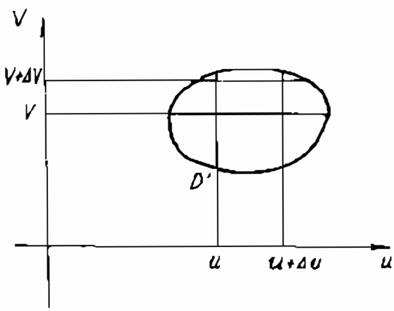
gọi là định thức Jacobi hay Jacobien, ký hiệu $J = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ *thì ta có công thức:*

$$I = \iint\limits_{D} f(x, y)dS = \iint\limits_{D'} f[x(u, v), y(u, v)]\,|\,J\,|\,dvdu \qquad (2)$$

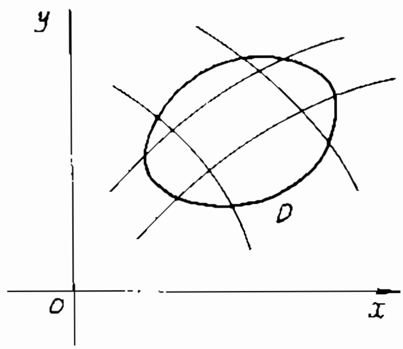
gọi là công thức đổi biến số trong tích phân kép.

*** Chứng minh:**

Cho $v = k$ = const, ($u = h$ = const) thì $x = x(u,k)$, $y = y(u\ k)$ ($x = x(h, v)$, $y = y(h,v)$), là phương trình tham số của một đường cong L, (L') nào đó trong mặt phẳng Oxy, nghĩa là ánh xạ (1) biến các đường thẳng song song với các trục tọa độ Ou, Ov trong mặt phẳng Ouv thành các đường cong trong mặt phẳng Oxy (H.130, H.131).



Hình 130



Hình 131

Do đó nếu chia D' bởi các đường thẳng u = const, v = const thì D' sẽ được chia thành các hình chữ nhật và qua ánh xạ *(1)* miền D sẽ được chia thành những tứ giác cong.

Xét trong miền D', một hình chữ nhật được chia có diện tích $\Delta S'$, giới hạn bởi các đường thẳng u = const, $u + \Delta u$ = const, v = const, $v + \Delta v$ = const.

Tương ứng với tứ giác cong được chia của miền D có diện tích ΔS. Rõ ràng $\Delta S' = \Delta u.\Delta v$ và nói chung $\Delta S'$, ΔS khác nhau. Giả sử:

$$\Delta S = |J|\Delta S' = |J|\Delta u.\Delta v,\ J \neq 0 \tag{3}$$

Để tính J ta cần tính diện tích ΔS của tứ giác cong. Giả sử toạ độ của các đỉnh của tứ giác cong là:

$$\begin{aligned}
&M_1(x_1, y_1),\ x_1 = x(u, v),\ y_1 = y(u, v)\\
&M_2(x_2, y_2),\ x_2 = x(u + \Delta u, v),\ y_2 = y(u + \Delta u, v)\\
&M_3(x_3, y_3),\ x_3 = x(u + \Delta u, v + \Delta v),\ y_3 = y(u + \Delta u, v + \Delta v)\\
&M_4(x_4, y_4),\ x_4 = x(u, v + \Delta v),\ y_4 = y(u, v + \Delta v)
\end{aligned} \tag{4}$$

Theo giả thiết 1) ta bỏ qua các vô cùng bé bậc cao so với Δu, Δv và (4) viết được:

$$\begin{aligned}
&x_1 = x(u, v),\ y_1 = y(u, v)\\
&x_2 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\ y_2 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\\
&x_3 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ \ y_3 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\\
&x_4 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ y_4 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v
\end{aligned} \tag{4'}$$

vì $|x_2 - x_1| = |x_4 - x_3| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\right|;\ |y_3 - y_1| = |y_3 - y_4| = \left|\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right|$ nên có thể coi tứ giác cong M_1, M_2, M_3, M_4 gần như một hình bình hành và diện tích ΔS của tứ giác cong đó theo hình học giải tích là:

$$\Delta S = \left|\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right|\Delta u\Delta v$$

Theo (3) thì

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

là định thức hàm Jacobi đã phát biểu trong định lý.

Bây giờ ta sẽ chứng minh công thức (2).

Theo định nghĩa nếu chia D thành n miền có dạng tứ giác cong đã xét ở trên thì:

$$I = \iint_D f(x, y)dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

Giả sử $(u_i, v_i) \in D'$ tương ứng với $(x_i, y_i) \in D$ thì $f(x_i, y_i) = f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]$ và theo (3) ta có:

$$I = \lim_{\max d_i \to 0} \sum f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\,|J(u_i, v_i)|\,\Delta S_i'$$

Đây chính là tổng tích phân của hàm $f[x(u, v), y(u, v)]\,|J(u, v)|$ trên miền D'. Vậy:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)]\,|J|\,dudv \qquad \left(J = \frac{1}{\Delta},\ \Delta = \frac{D(4, v)}{D(x, y)}\right)$$

Thí dụ: Tính $I = \iint_D (y - x)dxdy$, D giới hạn bởi:

$$y = x + 1,\ y = x - 3,\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3},\quad y = -\frac{1}{3}x + 5$$

Đặt $u = y - x$, $v = y + \frac{1}{3}x$ (1), thì các đường thẳng trên biến thành các đường thẳng $u = 1$, $u = -3$, $v = \frac{7}{3}$, $v = 5$ trong mặt phẳng Ouv. Từ (1) ta có:

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v\ ,\ y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v \text{ và}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{3}{4},\quad |J| = \frac{3}{4}$$

Vậy

$$I = \iint_D (y-x)dxdy = \iint_{D'} \left[(\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v) - (-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v) \right] \frac{3}{4} dudv$$

$$= \iint_{D'} \frac{3}{4} ududv = \frac{3}{4} \int_{\frac{7}{3}}^{5} dv \int_{-3}^{1} udu = -8$$

Trường hợp đặc biệt:

1) u, v là các toạ độ cực $u = r$, $v = \varphi$. Ta có

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;\ J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

và $$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$$

2) $u = r$, $v = \varphi$ nhưng $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, r, φ gọi là các tọa độ độc cực suy rộng khi đó $|J| = abr$ và

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi) abr dr d\varphi\ .$$

Thí dụ: Tính $I = \iint_D (x^2+y^2)dxdy$, D là hình ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$.

Chuyển sang toạ độ độc cực suy rộng $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ thì Jacobien $|J| = abr$ và do tính đối xứng ta có:

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (a^2r^2\cos^2\varphi + b^2r^2\sin^2\varphi) abr dr$$

$$= 4\left(a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi + b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi\right)\int_0^1 abr^3dr$$

$$= 4(a^2+b^2)\frac{\pi}{4}ab\frac{1}{4} = \frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2).$$

§3. ÁP DỤNG CỦA TÍCH PHÂN KÉP

3.1. Áp dụng hình học

1) Tính thể tích và diện tích phẳng

Theo ý nghĩa hình học của tích phân kép thì khi $z = f(x, y) \geq 0$ thể tích của hình trụ cong đáy dưới là miền D, đáy trên là mặt $z = f(x, y)$ và đường sinh song song với trục Oz là:

$$V = \iint_D f(x, y)dS$$

Nếu $f(x, y) < 0$ thì theo tính chất của tích phân kép $\iint_D f(x,y)dS = -V$ $(V > 0)$ do đó để tính thể tích hình học ta có:

$$V = \left|\iint_D f(x, y)dS\right|$$

Đặt biệt khi $z = f(x, y) = 1$ thì $\iint_D 1.dS$ là thể tích hình trụ đáy là miền D và chiều cao bằng 1, số đo thể tích này cũng bằng số đo diện tích miền D. Vậy diện tích của hình phẳng D được tính theo công thức: $S = \iint_D dS$.

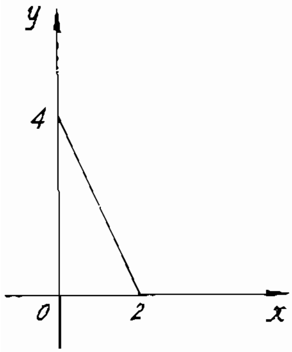
Thí dụ:

1) Tính thể tích V hình giới hạn bởi các mặt:

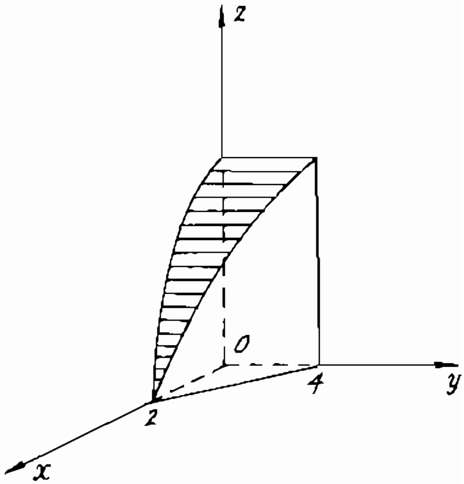
$$x = y = z = 0,\ z = 4 - x^2,\ 2x + y = 4\ (x \geq 0).$$

ở đây miền D là tam giác giới hạn bởi các đường:

$$x - y = 0,\ 2x + y = 4\ (H\ 132,\ 133)$$



Hình 132



Hình 133

vậy $V = \iint\limits_D (4 - x^2)dS = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} (4 - x^2)dy = \int\limits_0^2 (4 - x^2)(4 - 2x)dx$

$$= \int\limits_0^2 (2x^3 - 4x^2 - 8x + 16)dx = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} - 4x^2 + 16x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{40}{3}$$

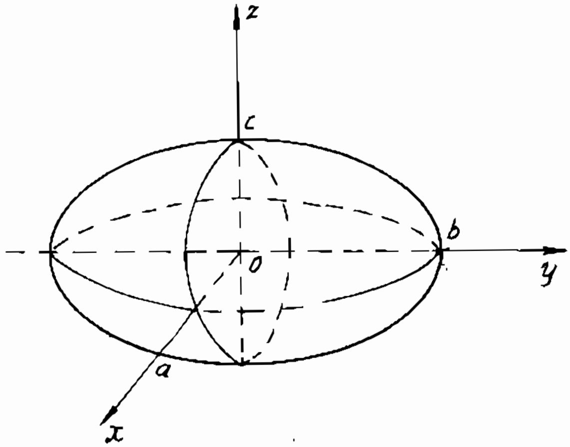
2) Tính thể tích V giới hạn bởi elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{(H.134)}.$$

Ta có:

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \text{ vì lý do đối xứng ta có:}$$

$$V = 2c\iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$$



Hình 134

D là hình ellipse: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Chuyển sang tọa độ cực suy rộng: $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$

ta có $$|J| = abr$$

và:

$$V = 2c\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,abrdr$$

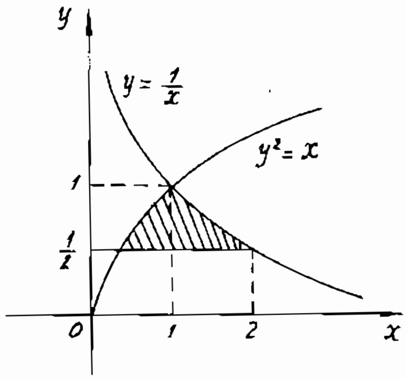
$$= 4\pi abc\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(\sqrt{1-r^2})^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

3) Tính diện tích S giới hạn bởi các đường:

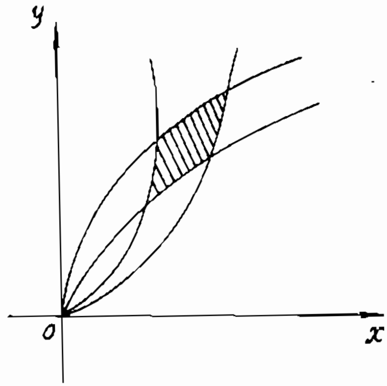
$$y^2 = x,\ y = \frac{1}{x},\quad y = \frac{1}{2}\ \text{(H.135)}$$

Theo (H.135) ta có:

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y^2}^{\frac{1}{y}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{y} - y^2\right)dy = \left(\ln y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \ln 2 - \frac{7}{24}$$



Hình 135



Hình 136

4) Tính diện tích S giới hạn bởi các đường

$$y^2 = px,\ y^2 = qx,\ x^2 = ay,\ x^2 = by \text{ (H.136)}$$

$0 < p < q,\ 0 < a < b$. Đổi biến số $\dfrac{y^2}{x} = u,\ \dfrac{x^2}{y} = v$ thì $p \le u \le q,\ a \leqslant v \leqslant b$,

$x = \sqrt[3]{uv^2}$, $y = \sqrt[3]{u^2v}$ và Jacobien $J = -\dfrac{1}{3}$

Do đó:

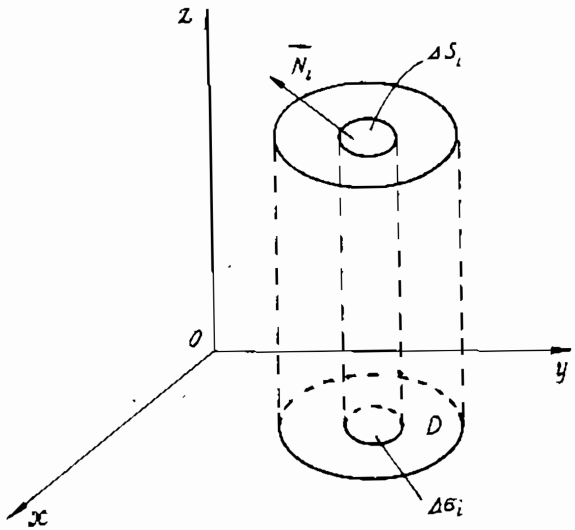
$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_p^q du \int\limits_a^b \frac{1}{3} dv = \frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

5) Tính diện tích giới hạn bởi đường astroide $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ ($0 \le t \le 2\pi$). Đổi biến số $x = r\cos^3 t,\ y = r\sin^3 t$, thì $0 \le r \le a,\ 0 \le t \le 2\pi$. Ta có Jacobien: $J = 3r\sin^2 t.\cos^2 t$. Do đó và vì tính đối xứng ta có:

$$S = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int\limits_0^a 3r\sin^2 t\cos^2 t dr = 12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t) dt \int\limits_0^a r dr = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

2) Diện tích mặt cong

Định nghĩa: ***Cho miền D là một miền compact trong R^2, $z = f(x, y)$ là một hàm có đạo hàm liên tục trên D, khi đó đồ thị của f là một mặt trơn S có phương trình $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ (H. 137).***



Hình 137

Xét một cách chia D thành n phần bất kỳ không dẫm lên nhau, gọi tên và diện tích của phần được chia thứ i là: $\Delta\sigma_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Xét điểm tuỳ ý $P_i(x_i, y_i) \in \Delta\sigma_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. T_i là tiếp diện tại $M_i(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) \in S$ và ΔS_i là phần của tiếp diện giới hạn bởi giao tuyến của tiếp diện với mặt trụ có đường chuẩn là biên của $\Delta\sigma_i$ và đường sinh song song với Oz, gọi diện tích của ΔS_i cũng là ΔS_i.

Giới hạn $$S = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \qquad (1)$$

với $d = \max d_i$, d_i là đường kính của $\Delta\sigma_i$ gọi là diện tích của mặt S (cũng gọi là S).

Cách tính: Theo lý thuyết hình chiếu thì: $\Delta\sigma_i = \Delta S_i \cos(\vec{N}_i, z)$, $\vec{N}_i$ là pháp tuyến của mặt S tại M_i.

Như đã biết

$$\vec{N}_i = \{f'_x(x_i, y_i), f'_y(x_i, y_i), -1)\}$$

Do đó

$$\Delta\sigma_i = \Delta S_i \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}}$$

hay

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}\Delta\sigma_i$$

Vậy (1) viết được:

$$S = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}\Delta\sigma_i$$

Theo định nghĩa tích phân kép thì tổng

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(x_i, y_i) + f'^2_y(x_i, y_i)}\Delta\sigma_i$$

chính là tổng tích phân của hàm

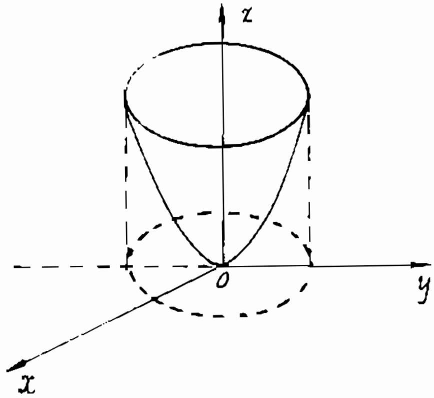
$$\sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}$$

trên miền D. Theo giả thiết hàm này là liên tục trên D, nó khả tích trên D. Vậy

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}dxdy$$

Đó là công thức tính diện tích của mặt S.

Thí dụ: Tính diện tích mặt paraboloide tròn xoay $2z = x^2 + y^2$ gồm giữa các mặt phẳng $z = 0$ và $z = 2$. Ta thấy hình chiếu của phần mặt đó trên mặt phẳng Oxy là hình tròn:



Hình 138

$x^2 + y^2 \leq 4$ (H 138)

(thay $z = 2$ trong $2z=x^2+y^2$)
ở đây $f'_x = x$, $f'_y = y$

Do đó diện tích S của phần mặt là:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$$

Đổi sang tọa độ độc cực ta có:

$$S = \iint_D \sqrt{1+r^2}\, r d\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1+r^2}\, r dr$$

$$= 2\pi \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1+r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$$

3.2. Áp dụng cơ học

1) Moment tĩnh, tọa độ trọng tâm của hình phẳng

Xét một hình phẳng D trong một mặt phẳng xOy có mật độ khối lượng (mặt) là $\gamma = \gamma(x, y)$.

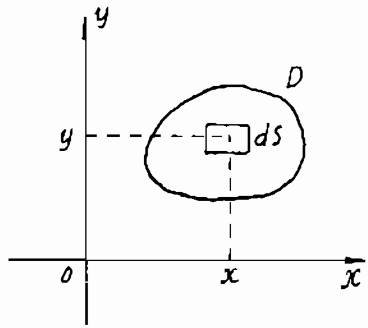
Xét một yếu tố vi phân dS của D chứa điểm $M(x, y)$ (H.139) và coi khối lượng của dS là $\gamma(x, y)dS$ thì theo cơ học moment tĩnh của dS đối với các trục Ox, Oy là: $y.\ \gamma(x, y).dS$. $x.\ \gamma(x, y).dS$ và moment tĩnh M_x, M_y của hình phẳng D đối với Ox, Oy là:

$$M_x = \iint_D y.\gamma(x, y)dS, \quad M_y = \iint_D x.\gamma(x, y)dS$$

Ta cũng biết khối lượng m của D là: $m = \iint\limits_D \gamma(x, y)dS$ và do đó theo định nghĩa tọa độ trọng tâm (x_0, y_0) của D là:

$$x_0 = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x.\gamma(x, y)dS}{\iint\limits_D \gamma(x, y)dS},$$

$$y_0 = \frac{\iint\limits_D y.\gamma(x, y)dS}{\iint\limits_D \gamma(x, y)dS}$$



Hình 139

2) Moment quán tính của hình phẳng

Dựa vào định nghĩa cơ học và lý luận tương tự như 1) ta có moment quán tính I_x, I_y của hình phẳng D đối với các trục Ox, Oy là:

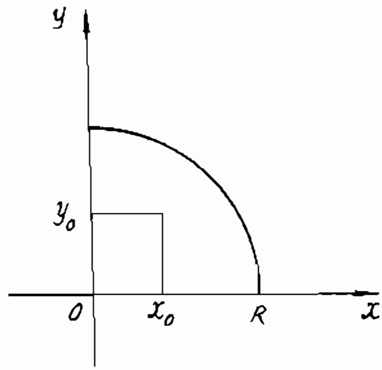
$$I_x = \iint\limits_D y^2.\gamma(x, y)dS,$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2.\gamma(x, y)dS$$

và moment quán tính I_0 của D đối với gốc O là:

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\gamma(x, y)dS$$

Thí dụ: Tìm M_x, M_y, x_0, y_0, I_x, I_y, I_0 của một phần tư hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$ $(x, y \ge 0)$ đồng chất $\gamma = 1$, vì lý do đó đối xứng nên:



Hình 140

$$M_x = M_y, x_0 = y_0 \quad \text{(H.140)}$$

Ta có:

$$M_x = \iint_D ydS = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} ydy = \int_0^R \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)dx \; \frac{1}{2}(R^2x - \frac{x^3}{3})\Bigg|_0^R = \frac{1}{3}R^3$$

Theo nhận xét trên ta cũng có: $M_y = \frac{1}{3}R^3$ còn $m = \iint_D dS = \frac{\pi R^2}{4}$,

do đó $$x_0 = y_0 = \frac{\frac{1}{3}R^3}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Bây giờ tính:

$$I_x = \iint_D y^2 dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^2 \sin^2\varphi r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{4}.\frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{16}$$

Theo nhận xét trên ta cũng có $I_y = \frac{\pi R^4}{16}$, cuối cùng:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^2 r dr = \frac{\pi}{2}.\frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{8}$$

B. TÍCH PHÂN BỘI BA

§1. KHÁI NIỆM TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa

- Cho hàm số u = f(x, y, z) xác định và bị chặn trong miền compact V.

- Chia V ra làm n phần bất kỳ không dẫm lên nhau, gọi tên và thể tích của chúng lần lượt là: $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_i, \ldots, \Delta V_n$

- Chọn $M_i(x_i, y_i, z_i) \subset \Delta V_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$

- Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$

- Gọi d_i là đường kính của miền được chia thứ i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và $d = \max d_i$, nếu $I_n \to I$ khi $n \to \infty$ sao cho $d \to 0$, không phụ thuộc cách chia miền V và cách chọn các điểm M_i thì I gọi là tích phân bội ba của hàm $f(x, y, z)$ trong miền V, kí hiệu:

$$I = \iiint_V f(x, y, z)dV \quad hay \quad I = \iiint_V f(M)dV$$

Nếu $f(x, y, z)$ có tích phân trong miền V thì ta nói nó khả tích trong miền đó. Người ta chứng minh rằng: Mọi hàm số liên tục trong miền compact V đều khả tích trong miền đó. Tích phân bội ba cũng có các tính chất tương tự như tích phân kép.

1.2. Ý nghĩa hình học và cơ học của tích phân bội ba

- Về hình học, tích phân bội ba nói chung không có ý nghĩa cụ thể, đặc biệt nếu $f(x, y, z) \equiv 1$ thì:

$$I = \iiint_V dV = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = V$$

là thể tích của miền V.

- Về cơ học, nếu coi $f(x, y, z)$ ($f(x, y, z) > 0$) là mật độ khối lượng (thể tích) của miền V thì khi ΔV_i khá nhỏ có thể coi khối lượng gần đúng của nó là $f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$, $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$ và khối lượng gần đúng của cả miền V là:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

Một cách lý tưởng ta định nghĩa khối lượng m của miền V là. $m = \lim_{d\to 0} I_n$.

Theo định nghĩa tích phân bội ba thì: $m = \iiint_V f(x,y,z)dV$.

Vậy về cơ học tích phân bội ba $\iiint_V f(x,y,z)dV$ là khối lượng của miền V nếu coi $f(x, y, z)$ là mật độ khối lượng của miền ($f(x, y, z) > 0$).

§2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA

2.1. Tọa độ Descartes: Cho hàm $f(x, y, z)$ khả tích trong miền compact V và cần tính tích phân:

$$I = \iiint_V f(x,y,z)dV \qquad (1)$$

- Nếu V là hình hộp $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $e \le z \le g$ thì tương tự như tích phân kép ta có công thức tính tích phân bội ba (1):

$$I = \int_a^b \Big(\int_c^d \Big(\int_e^g f(x,y,z)dz\Big)dy\Big)dx = \int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^g f(x,y,z)dz \qquad (2)$$

Công thức (2) có thể viết dưới dạng:

$$I = \iint_{D_1} dxdy\int_e^g f(x,y,z)dz = \int_a^b dx\iint_{D_2} f(x,y,z)dydz \qquad (2')$$

trong đó D_1 (D_2) là hình chữ nhật $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. ($c \le y \le d$, $e \le z \le g$), nó cũng là hình chiếu của miền V trên mặt phẳng Oxy (Oyz).

Bây giờ giả sử V là miền giới hạn bởi ;

- Các mặt phẳng $x = a$, $x = b$, ($a < b$).

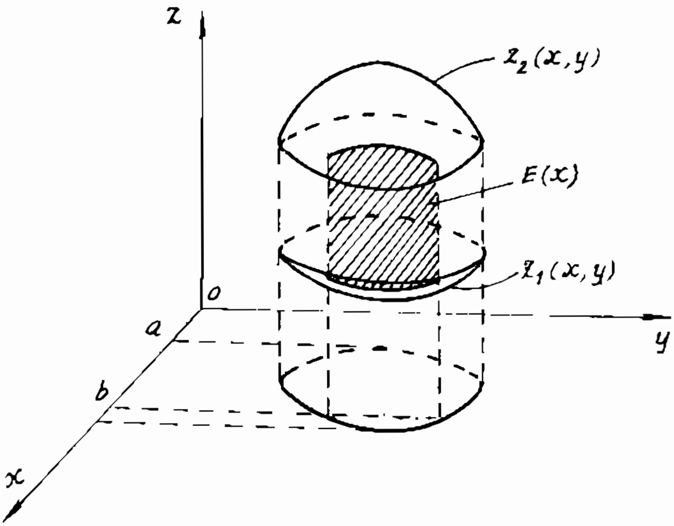
- Các mặt trụ $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ trong đó $y_1(x)$, $y_2(x)$ là các hàm liên tục và $y_1(x) \le y_2(x)$ trên $[a, b]$.

- Các mặt $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ trong đó $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ là các hàm liên tục trong miền

$D = \{(x, y): a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, $z_1 \le z_2$. Rõ ràng D là hình chiếu của miền V trên mặt phẳng Oxy. Miền V như trên cũng gọi là miền đơn giản trong không gian (H 141)

Tương tự như tích phân kép ta có công thức:

$$I = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz \quad (3)$$



Hình 141

Công thức (3) có thể viết dưới dạng:

$$I = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz = \int_a^b dx \iint_{E(x)} f(x, y, z)\,dydz \quad (3')$$

trong đó D là hình chiếu của miền V trên mặt phẳng xOy, $E(x)$ là thiết diện của miền V và mặt phẳng $X = x$ (H.141) ($a \le x \le b$). Do các công thức (2) (2'), (3) (3') ta cũng ký hiệu:

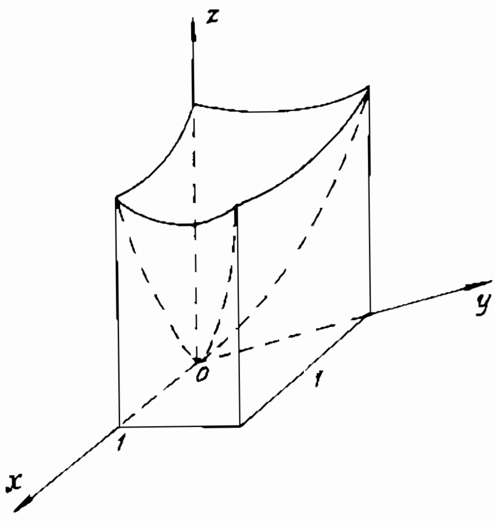
$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$$

Thí dụ:

1) Tính $I = \iiint\limits_V xyzdxdydz$

V là miền giới hạn bởi các mặt:;

$$x = y = z = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ z = x^2 + y^2 \quad \text{(H.142)}$$



Hình 142

Theo công thức (3) ta có:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} xyzdz = \int_0^1 dx \int_0^1 xy\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{x^2+y^2} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{2} xy(x^2 + y^2)^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 (x^5 y + 2x^3 y^3 + xy^5) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^5 (\frac{y^2}{2}) \Big|_0^1 + 2x^3 (\frac{y^4}{4}) \Big|_0^1 + x(\frac{y^6}{6}) \Big|_0^1 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x}{6} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^6}{12} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{12} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{7}{48}$$

2) Tính $I = \iiint\limits_V z dx dy dz$

V là nửa trên của hình ellipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$

Hình chiếu của V trên mặt phẳng Oxy là ellipse:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$, vậy: $-a \le x \le a$

$-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $\quad 0 \le z \le c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

Theo công thức (3) và tính toán ta có:

$$I = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} z dz = \frac{\pi abc^2}{4}$$

Ta có thể dùng công thức (3') để tính I (đổi vai trò của x, z).

$$I = \int_0^c z.dz \iint\limits_{E(z)} dx dy$$

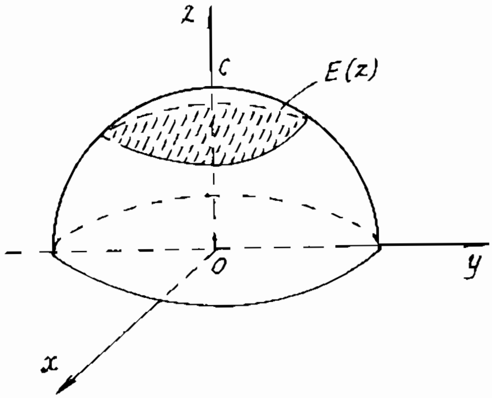
$E(z)$ là thiết diện của V và mặt phẳng $Z = z$, $\quad 0 \le z \le c$, (H.143), nghĩa là hình ellispe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 - \frac{z^2}{c^2}$ hay

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

Mặt khác $\iint\limits_{E(z)} dxdy = S(z)$ là diện tích của hình ellipse đó:

$$S(z) = \pi ab\,(1-\frac{z^2}{c^2})\,.$$

Vậy
$$I = \pi ab\int_0^c z(1-\frac{z^2}{c^2})dz = \frac{\pi abc^2}{4}\,.$$



Hình 143

3) Tính
$$I = \iiint\limits_V x dxdydz$$

V giới hạn bởi: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

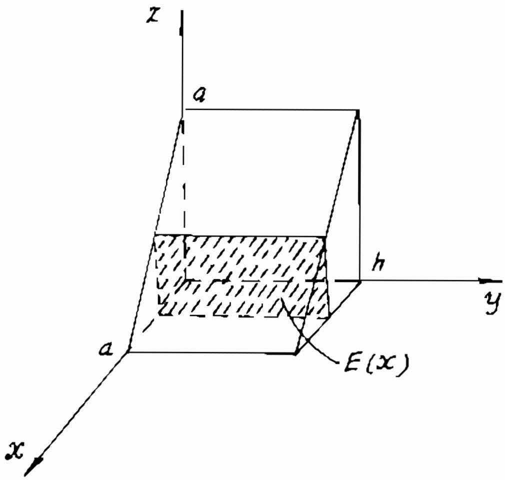
$$y = h,\ x + z = a \text{ (H 144)}$$

Dùng (3') ta có:

$$I = \int_0^a x.dx \iint\limits_{E(x)} dxdy$$

$E(x)$ là hình chữ nhật cạnh h và $a - x$.

Vậy
$$I = \int_0^a xh(a-x)dx = \frac{a^3h}{6}$$



Hình 144

2.2. Tọa độ cong – Quy tắc tổng quát đổi biến số

Tương tự như đối với tích phân kép ta có thể chứng minh

Định lý: (Quy tắc tổng quát đổi biến số trong tích phân bội ba).

Cho hàm $f(x, y, z)$ liên tục trong miền compact V, để tính tích phân : $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

Ta đặt $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ (1). Nếu

1) Các hàm (1) có các đạo hàm riêng liên tục trong miền compact V' của không gian Ouvw.

2) Các hàm (1) xác định một song ánh từ miền compact V' vào miền compact V của không gian Oxyz.

3) Định thức hàm Jacobi:

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

trong V' thì ta có công thức đổi biến số:

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{V'} f[x(u,v,w), y,(u,v,w), z(u,v,w)]\,|J|\,dudvdw \quad (2)$$

trong đó V là ảnh của V' qua ánh xạ (1) $\left(J = \frac{1}{\Delta},\ \Delta = \frac{D(4,v,w)}{D(x,y,z)}\right)$

Thí dụ:

$$I = \iiint_V dV$$

trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= \pm h_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= \pm h_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= \pm h_3 \end{aligned}$$

với

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Đặt

$$\begin{aligned} u &= a_1x + b_1y + c_1z \\ v &= a_2x + b_2y + c_2z \\ w &= a_3x + b_3y + c_3z \end{aligned} \quad \text{thì} \quad \begin{aligned} -h_1 &\le u \le h_1 \\ -h_2 &\le v \le h_2 \\ -h_3 &\le w \le h_3 \end{aligned}$$

Ta có:

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}}$$

mà

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta \neq 0$$

Vậy $|J| = \dfrac{1}{|\Delta|}$ và theo công thức (2):

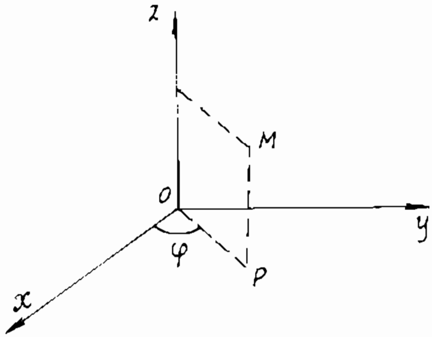
$$I = \frac{1}{|\Delta|} \int_{-h_1}^{h_1} du \int_{-h_2}^{h_2} dv \int_{-h_3}^{h_3} dw = \frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$$

Chú ý rằng I chính là thể tích hình hộp giới hạn bởi các mặt phẳng đã cho.

Bây giờ ta sẽ xét vài trường hợp đặc biệt rất quan trọng trong lý thuyết và thực tế của hệ tọa độ *(u, v, w)* đã xét ở trên, đó là các hệ toa độ trụ và cầu. Hệ tọa độ *(u, v, w)* cũng gọi là hệ tọa độ cong tổng quát.

a) Tọa độ trụ

1) Định nghĩa: ***Cho điểm M(x, y, z) ∈ R^3 hình chiếu của M trên mặt phẳng Oxy là điểm P(x, y) (H.145)***



Hình 145

Đặt

$\varphi = (Ox, \overrightarrow{OP}),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$

$r = |\overrightarrow{OP}|,\ 0 \le r < +\infty$

$z = \overline{PM},\ -\infty < z < +\infty$

(r, φ, z) gọi là tọa độ trụ của điểm M(r, φ, z). Theo định nghĩa thì (r, φ) là tọa độ cực của điểm P và z là cao độ của M trong tọa độ Descartes. Theo (H.145) ta có công thức liên hệ giữa toạ độ Descartes và tọa độ trụ của điểm M:

$$x = r\cos\varphi;\; y = r\sin\varphi;\; Z = z \qquad (3)$$

Các công thức này xác định một song ánh giữa hai hệ tọa độ Descartes và tọa độ trụ trừ các điểm trên Oz, có z xác định, $r = 0$, φ tuỳ ý.

Theo các công thức (3) thì các mặt phẳng r = const, φ = const, z = const, trong hệ $Or\varphi z$ lần lượt ứng với mặt trụ $x^2 + y^2 = r^2$, nửa mặt phẳng $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$ (qua trục Oz), mặt phẳng $Z = z$ (mặt phẳng vuông góc với trục Oz) trong hệ $Oxyz$.

2) Tích phân bội ba trong tọa độ trụ

Ta sẽ chuyển tích phân bội ba $I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$ sang tọa độ trụ như sau:

Theo công thức đổi biến số tổng quát (2) với $u = r$, $v = \varphi$, $w = z$ ta có:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

và công thức chuyển tích phân bội ba từ tọa độ Descartes sang tọa độ trụ là:

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,drd\varphi dz \qquad (4)$$

Trong đó V' là miền trong tọa độ trụ ứng với miền V trong toạ độ Descartes qua ánh xạ (3).

Chú ý:

1) Theo định nghĩa ta có thể chuyển tích phân $I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dV$ sang tọa độ trụ như sau:

Ta có $\quad f(x, y, z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, $dV = dxdydz$.

Ta biết: Chuyển sang tọa độ cực $dS = rdrd\varphi$. Vậy chuyển sang tọa độ trụ $dV = rdrd\varphi dz$ và $I = \iiint_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz$.

2) Tính tích phân bội ba trong tọa độ trụ cũng dưa về tính ba lần tích phân đơn.

Thí dụ:

1) Tính $I = \iiint_V x^2 + y^2 .dV$

V là miền giới hạn bởi paraboloide tròn xoay $z = x^2 + y^2$ và mặt phẳng $z = h$ $(h > 0)$ chuyển sang tọa độ trụ: $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$ miền D (hình chiếu của V trên mặt phẳng xOy) là hình tròn $x^2 + y^2 = h$, mặt khác phương trình của mặt paraboloide trong tọa độ trụ là:

$$z = x^2 + y^2 = r^2.$$

Vậy $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le \sqrt{h}$, $r^2 \le z \le h$.

Theo (4):

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{h}} dr \int_{r^2}^{h} r^2 r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{h}} r^3 dr \int_{r^2}^{h} dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} r^3(h - r^2)dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} (hr^3 - r^5)dr = 2\pi\left(\frac{r^4}{4}h - \frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{h}} = \pi\frac{h^3}{6}$$

2) Tính $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}.z.dV$

V là miền giới hạn bởi các mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = R$ Ta thấy V là hình nón, đỉnh tại O chiều cao R (H.1.16). Miền D là hình chiếu của V trên mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$ (thay $z = R$ trong phương trình $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = R$). Đổi sang tọa độ trụ, ta có:

$$\sqrt{x^2+y^2}\,z = rz,$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2} = r$$

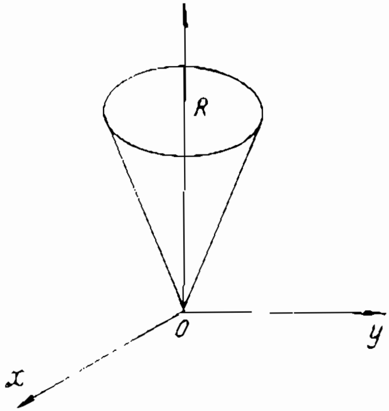
và V': $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le R$, $r \le z \le R$, do đó theo (4):

$$I = \iiint_{V'} rzrdrd\varphi dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr \int_r^R zdz$$

$$= 2\pi \int_0^R r^2 \left.\frac{z^2}{2}\right|_r^R dr$$

$$= \pi \int_0^R (R^2r^2 - r^4)dr = \frac{2\pi R^5}{15}$$



Hình 146

b) Tọa độ cầu

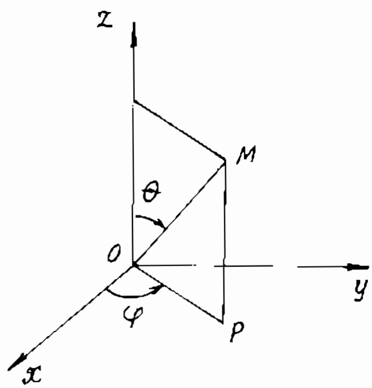
1) Định nghĩa: ***Cho điểm $M \in R^3$. Giả sử hình chiếu của M trên mặt phẳng xOy là điểm P (H. 147)***

Đặt

$$\varphi = (Ox, \overrightarrow{OP}),\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\theta = (Oz, \overrightarrow{OM}),\quad 0 \le \theta \le \pi$$

$$\rho = |\overrightarrow{OM}|,\quad 0 \le \rho < +\infty$$



Hình 147

Bộ ba số (ρ, φ, θ) gọi là tọa độ cầu của điểm M, ký hiệu M(ρ, φ, θ). Từ (H 147) ta có công thức liên hệ giữa tọa độ Descartes và tọa độ cầu của điểm M:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta$$

$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta \qquad (5)$$

$$z = \rho\cos\theta$$

Các công thức (5) xác định một song ánh giữa hệ tọa độ Descartes và hệ tọa độ cầu, trừ các điểm của Oz (ρ xác định, $\theta = 0$, φ tùy ý, đặc biệt điểm O: ($\rho = 0$, θ, φ tùy ý). Các mặt phẳng ρ = const, φ = const, θ = const, trong không gian $O\rho\varphi\theta$ lần lượt ứng với: mặt cầu tâm O bán kính ρ, nửa mặt phẳng qua trục Oz, mặt nón tròn xoay đỉnh tại O và trục là trục Oz trong không gian $Oxyz$.

2) Tích phân bội ba trong tọa độ cầu

Theo công thức đổi biến số tổng quát (2), với: $u = \rho$, $v = \theta$, $w = \varphi$ thì

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta$$

và ta có công thức tính tích phân bội ba trong tọa độ cầu là:

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi d\theta \quad (6)$$

Nếu dùng phép biến đổi biến số:

$$x = a\rho\cos\varphi\sin\theta,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$y = b\rho\sin\varphi\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi \qquad (7)$$

$$z = c\rho\cos\theta,\ 0 \le \rho \le +\infty$$

(ρ, φ, θ) gọi là tọa độ cầu suy rộng, khi đó tính toán ta có:

$$|J| = abc\,\rho^2\sin\theta \qquad (8)$$

Thí dụ:

1) Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$

V là $\dfrac{1}{8}$ thứ nhất của hình cầu (trong góc phần tám thứ nhất) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Đổi sang tọa độ cầu ta có:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta} = \rho$$

Vậy $I = \iiint\limits_{V'} \rho^2 \rho \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$. Ta thấy khi $M(\rho, \ \varphi, \theta)$ về toàn bộ miền V thì:

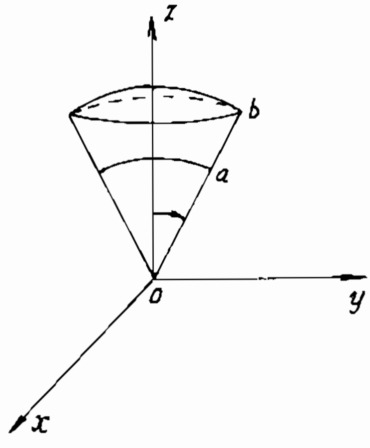
$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \ \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \ 0 \ \le \rho \ \le R.$$

Vậy:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2}(-\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{8}$$

2) Tính

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) dxdydz$$



Hình 148

V là miền giới hạn bởi các mặt:

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

$x^2 + y^2 = z^2$ ($z \ge 0, a < b$) (H.148)

Chuyển sang tọa độ cầu ta có:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\theta$$

$$0 \ \le \ \varphi \ \le 2\pi, 0 \ \le \theta \ \le \ \frac{\pi}{4}, \ a \ \le \rho \ \le b$$

Vậy: $$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int_a^b \rho^2 \sin^2\theta \rho^2 d\rho =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_a^b = \frac{(8-5\sqrt{2})}{30}(b^5 - a^5)\pi$$

3) Tính: $$I = \iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz, \quad V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$$

Chuyển sang tọa độ cầu suy rộng, theo công thức (7) ta có:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \rho^2 \text{ và } \rho^2 = 1$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le \theta \le \pi, \ 0 \le \rho \le 1$$

Theo (6) và (8) ta có:

$$I = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 \rho^2 \rho^2 d\rho = \frac{2\pi abc}{5} (\cos\theta)\Big|_\pi^0 = \frac{4}{5}\pi abc$$

§3. ÁP DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI BA

3.1. Áp dụng hình học

Ta biết thể tích V của miền V được tính theo công thức $V = \iiint\limits_V dV$. Như vậy ta có thể dùng tích phân bội ba để tính thể tích theo công thức này

Thí dụ: Tính thể tích V giới hạn bởi các mặt:

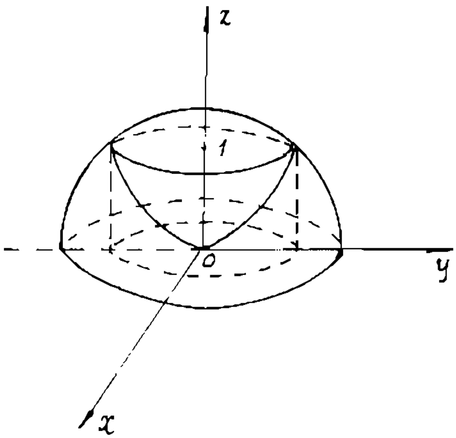
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ x^2 + y^2 = 3z, \ z \ge 0$$

Đó là mặt cầu tâm O bán kính bằng 2 và mặt paraboloide tròn xoay đỉnh tại O (H.1.19). Ta sẽ chuyển sang tọa độ trụ để tính. Theo các công thức liên hệ:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ thì các mặt trên, trong tọa độ trụ có phương trình là:

$$r^2 + z^2 = 4 \text{ hay } z = \sqrt{4 - r^2} \text{ (vì } z \geq 0)$$

$$r^2 = 3z \text{ hay } z = \frac{r^2}{3} \text{ (vì } z \geq 0)$$



Hình 149

Biên của miền D là hình chiếu của giao tuyến của hai mặt trên, Từ 4 $z^2 = 3z$ suy ra $z = 1$, nên biên của D là đường tròn: $x^2 + y^2 = 3$.

Do đó:

$$V = \iiint\limits_V r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r\,dr \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} dz =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4 - r^2}\,r - \frac{r^3}{3}\right)dr = -\pi\frac{2}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}} - 2\pi\frac{r^4}{12}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{17\pi}{6}$$

3.2. Áp dụng cơ học

1) Moment tĩnh và tọa độ trọng tâm của vật thể

Tương tự như đã tính đối với hình phẳng, ta có các công thức moment tĩnh của vật thể V: M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx như sau:

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)dV;\; M_{yz} = \iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)dV;\; M_{zx} = \iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)dV$$

Trong đó $\gamma(x, y, z)$ là mật độ khối lượng của vật thể V còn tọa độ trọng tâm x_0, y_0, z_0 của vật thể V thì được xác định bởi các công thức:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m},\quad y_0 = \frac{M_{zx}}{m},\quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$$

trong đó $m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)dV$ là khối lượng của vật thể V. Sau cùng các moment tĩnh của vật thể: M_x, M_y, M_z đối với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz cho bởi các công thức:

$$M_x = \iiint\limits_V \sqrt{y^2 + z^2}.\gamma(x, y, z)dV$$

$$M_y = \iiint\limits_V \sqrt{z^2 + x^2}.\gamma(x, y, z)dV$$

$$M_z = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}.\gamma(x, y, z)dV$$

2) Moment quán tính của vật thể

Tương tự, ta có các moment quán tính I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} của vật thể V đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx là:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\gamma(x, y, z)dV;\; I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\gamma(x, y, z)dV;\; I_{zx} = \iiint\limits_V y^2\gamma(x, y, z)dV$$

Các moment quán tính I_x, I_y, I_z của vật thể V đối với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz là:

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dV$$

$$I_y = \iiint\limits_V (z^2 + x^2)\gamma(x, y, z)dV$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)dV$$

và moment quán tính I_0 của vật thể V đối với gốc O là:

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dV$$

Thí dụ:

1) Tìm M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} và tọa độ trọng tâm của bán kính cầu: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $z \ge 0$ (H 150) đồng chất với $\gamma = 1$, vì bán cầu đồng chất, nên do tính đối xứng, trọng tâm phải ở trên Oz, nghĩa là $x_0 = y_0 = 0$ suy ra M_{yz}, $M_{zx} = 0$. Vậy ta chỉ còn tính M_{xy}

Ta có: $M_{xy} = \iiint\limits_V zdV$

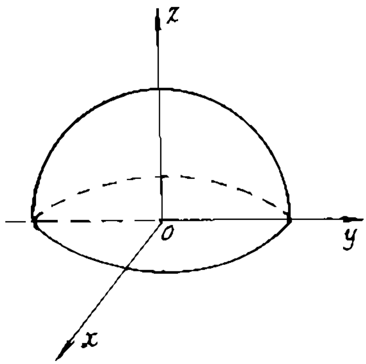
Đổi sang tọa độ cầu ta có:

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^R \rho\cos\theta\rho^2 d\rho =$$

$$= 2\pi \frac{1}{2}\frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Còn $m = \iiint\limits_V \gamma dV = \dfrac{2}{3}\pi R^3$.

Do đó $Z_0 = \dfrac{M_{xy}}{m} = \dfrac{\pi R^4}{4}\dfrac{3}{2\pi R^3} = \dfrac{3}{8}R$



Hình 150

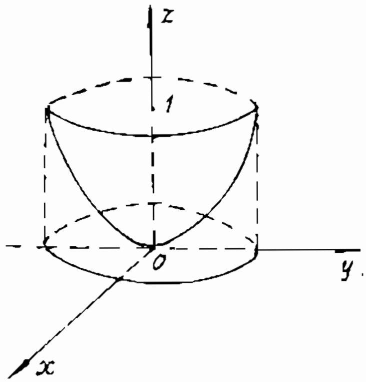
2) Tìm I_z của vật giới hạn bởi các mặt:

$x^2 + y^2 = z$, $z = 1$ với $\gamma = 1$ (H.151)

Ta có: $I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dV$

Đổi sang tọa độ trụ ta có:

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^1 r^3 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3 - r^5) dr = 2\pi\left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$



Hình 151

C. TÍCH PHÂN BỘI SUY RỘNG

Trong phần này ta chỉ hạn chế nghiên cứu tích phân kép suy rộng, các kết quả có thể mở rộng cho trường hợp tích phân bội ba suy rộng.

§1. ĐỊNH NGHĨA

1.1. Miền lấy tích phân là vô hạn (không bị chặn)

Giả sử D là một miền vô hạn và f(x, y) là hàm khả tích trong mọi phần bị chặn (hữu hạn) G của D. Giả sử theo một quy tắc tuỳ ý miền G nở dần và choán toàn bộ miền D ký hiệu G → D. Khi đó giới hạn:

$$\lim_{G \to D} \iint_G f(x, y)dxdy$$

gọi là tích phân kép suy rộng của hàm f(x, y) trên miền vô hạn D.

Ký hiệu:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{G \to D} \iint_G f(x,y)dxdy \qquad (1)$$

Nếu giới hạn (1) tồn tại (hữu hạn) thì tích phân suy rộng gọi là hội tụ. Ngược lại nếu giới hạn đó không tồn tại hoặc bằng vô cùng thì tích phân suy rộng gọi là phân kỳ. Xét đường cong C giới hạn miền $G \subset D$, C gọi là dần ra vô cùng nếu khoảng cách ngắn nhất R từ một điểm bất kỳ trên C đến gốc tọa độ dần ra vô cùng, khi đó mỗi điểm thuộc D sẽ thuộc G với R đủ lớn, nghĩa là G nở dần và choán toàn bộ miền D khi $R \to +\infty$

Định lý 1: ***Nếu $f(x,y) \geq 0$ thì điều kiện cần và đủ để tích phân suy rộng (1) hội tụ là giới hạn (1) tồn tại với một dãy đường dần ra vô cùng: $C_1, C_2, \ldots, C_n$. giới hạn các miền tương ứng: $G_1, G_2, \ldots G_n \ldots$***

Thực vậy, điều kiện cần là hiển nhiên, ngược lại xét đường cong bất kỳ C dần ra vô cùng, giới hạn miền $G \subset D$, rõ ràng với n đủ lớn ta có:

$$\iint_G f(x,y)dxdy \leq \iint_{G_n} f(x,y)dxdy \qquad (2)$$

Theo giả thiết $\lim\limits_{R_n \to +\infty} \iint\limits_{G_n} f(x,y)dxdy$ tồn tại

R_n là khoảng cách ngắn nhất từ một điểm bất kỳ trên C_n đến gốc tọa độ, do đó $\iint\limits_{G_n} f(x,y)dxdy$ là bị chặn, mặt khác nó là một đại lượng đơn điệu tăng khi R tăng vì $f(x,y) \geq 0$

Vậy $\lim\limits_{R_n \to +\infty} \iint\limits_{G} f(x,y)dxdy$ tồn tại

Xét tích phân suy rộng (1) tương tự như đối với tích phân đơn suy rộng, ta có:

Định lý 2: ***Nếu $\iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy$ hội tụ thì tích phân suy rộng (1) hội tụ, khi đó tích phân đó cũng gọi là hội tụ tuyệt đối. Trường hợp***

$\iint\limits_D |f(x, y)|dxdy$ *phân kỳ, mà tích phân (1) hội tụ thì tích phân đó gọi là bán hội tụ hay hội tụ có điều kiện.*

1.2. Hàm dưới dấu tích phân không bị chặn

Cho hàm $f(x, y)$ trên miền compact D, giả sử $f(x, y)$ không bị chặn tại lân cận điểm $P(x_0, y_0) \in D$ và khả tích trong miền $D \setminus G_\varepsilon = D_\varepsilon$ với mọi miền $G_\varepsilon \subset D$, chứa P và đường kính ε. Giới hạn:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{D_\varepsilon} f(x, y)dxdy \quad (\varepsilon \to 0: G_\varepsilon \text{ thu lại điểm } P)$$

gọi là tích phân suy rộng của hàm $f(x, y)$ trên D. Ký hiệu

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{D_\varepsilon} f(x, y)dxdy \qquad (1)$$

Nếu giới hạn (1) tồn tại (hữu hạn)thì tích phân suy rộng gọi là hội tụ, ngược lại nếu giới hạn đó không tồn tại hoặc bằng ∞ thì tích phân suy rộng gọi là phân kỳ.

Định lý:

Nếu $f(x, y) \geq 0$ thì tích phân suy rộng (1) là hội tụ khi và chỉ khi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{D_\varepsilon} f(x, y)dxdy \text{ tồn tại với } D_\varepsilon = D \setminus C_\varepsilon$$

C_ε là hình tròn bán kính $\frac{\varepsilon}{2}$ (H.152)

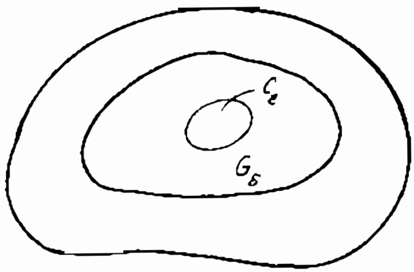
Thực vậy, điều kiện cần là hiển nhiên, ngược lại với mọi miền G_δ chứa P, $G_\delta \subset D$ tồn tại một hình tròn C_ε bán kính $\frac{\varepsilon}{2}$, $C_\varepsilon \subset G_\delta$ (chẳng hạn $\frac{\varepsilon}{2}$ là khoảng cách bé nhất từ một điểm bất kỳ trên biên của G_δ đến P).

Khi đó:

$$\iint\limits_{D_\delta} f(x, y)dxdy \leq \iint\limits_{D_\varepsilon} f(x, y)dxdy$$

$$D_\delta = D\setminus G_\delta,\ D_\varepsilon = D \setminus C_\varepsilon \text{ vì } f(x) \geq 0$$

Theo giả thiết $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy$ tồn tại, do đó suy ra sự tồn tại của vế trái khi $\delta \to 0$, vậy tích phân suy rộng hội tụ. Tương tự ta cũng có định lý và định nghĩa về sự hội tụ tuyệt đối của tích phân suy rộng với hàm dưới dấu tích phân không bị chặn như trường hợp tích phân suy rộng với miền vô hạn.



Hình 152

Chú ý: Nếu trong miền D, $f(x, y)$ không bị chặn tại lân cận một số hữu hạn điểm $P_1, P_2, \ldots, P_n$ thì ta định nghĩa tích phân suy rộng của f trên D là:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0 \\ \ldots \\ \varepsilon_n \to 0}} \iint\limits_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy,\ D_\varepsilon = D\setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_{\varepsilon_i}$$

$P_i \in G_{\varepsilon_i} \subset D$, ε_i là đường kính của G_{ε_i} $(i = 1, 2, \ldots n)$

§2 CÁCH TÍNH

Ta biết cách tính tích phân kép thông thường dẫn đến việc tính liên tiếp hai lần tích phân đơn. Đối với tích phân kép suy rộng hội tụ, ta cũng có thể tính nó bằng việc tính liên tiếp hai lần tích phân đơn, mà ít nhất một tích phân là suy rộng và ta cũng có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân (định lý Fubini). Chẳng hạn miền D là góc phần tư thứ nhất thì:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(x,y)dx$$

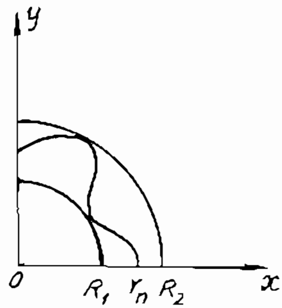
Thí dụ:

1) Tính $I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$

D là góc phần tư thứ nhất. Đầu tiên xét D là $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính R: D_R trong góc phần tư thứ nhất và $I_R = \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy$, chuyển sang tọa độ độc cực ta có:

$$I_R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^R e^{-r^2} rdr = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}(1 - e^{-R^2})$$

Bây giờ xét miền D_n giới hạn bởi đường Γ_n và các trục Ox, Oy, gọi R_1, R_2 là khoảng cách bé nhất và lớn nhất giữa biên Γ_n và gốc tọa độ trong góc phần tư thứ nhất (H.153)



Hình 153

Vì $e^{-x^2-y^2} > 0$, $\forall x, y \in R^2$ nên

$$I_{R_1} \le I_n = \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy \le I_{R_2}$$

Hay theo trên:

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R_1^2}) \le I_n = \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy \le \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R_2^2})$$

Khi $R_1, R_2 \to +\infty$ thì D_n dần tới góc phần tư thứ nhất và:

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy = \frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

Mặt khác miền D là hình vuông: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$ thì:

$$I = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a dx\int_0^a e^{-x^2-y^2}dy = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-x^2}dx\int_0^a e^{-y^2}dy = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

Theo định lý 1 ở §1 và theo (1) thì $\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

Do đó ta có giá trị của tích phân Euler-Poisson:

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2) Xét sự hội tụ của tích phân Cayley:

$$I = \iint_D \sin(x^2 + y^2)dxdy \qquad (1)$$

D là góc phần tư thứ nhất.

Xét D_n giới hạn bởi các trục Ox, Oy, $x = n$, $y = n$ (H 154)

$$I_n = \iint_{D_n} \sin(x^2 + y^2)dxdy$$

$$= \iint_{D_n} (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin x^2)dxdy = 2\int_0^n \sin x^2 dx\int_0^n \cos y^2 dy$$

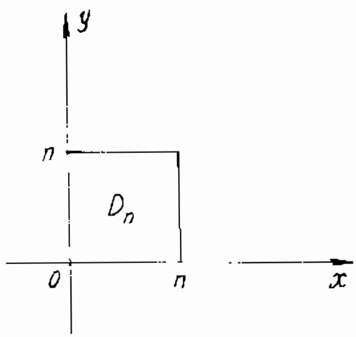
Ta biết:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \sin x^2 dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \cos y^2 dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$



Hình 154

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \frac{\pi}{4}$

Mặt khác, xét D_n là $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính n trong góc phần tư thứ nhất, chuyển sang tọa độ độc cực ta có:

$$I_n = \iint\limits_{D_n} \sin(x^2 + y^2)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^n \sin r^2 r dr = \frac{\pi}{4}(1 - \cos n^2)$$

Khi $n \to +\infty$, I_n không có giới hạn. Vậy với hai họ đường đã chọn, I_n có giới hạn hoặc không có giới hạn nghĩa là tích phân Cayley (1) phân kỳ.

Chú ý rằng, hàm dưới dấu tích phân ở đây là không giữ nguyên một dấu trong D.

3) Xét sự hội tụ của tích phân $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}}$

V là hình cầu: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

ở đây, hàm dưới dấu tích phân không bị chặn tại $(0, 0, 0) \in V$.

Theo định nghĩa và định lý ở §1, 2, ta có:

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{V_\varepsilon} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}} \quad ; \quad V_\varepsilon: \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

Chuyển sang tọa độ cầu, ta có:

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_\varepsilon^1 \rho^{-\alpha} \rho^2 d\rho = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi 2 \left(\frac{1 - \varepsilon^{3-\alpha}}{3 - \alpha} \right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3 - \alpha} & \text{nếu} \quad \alpha < 3 \\ \infty & \text{nếu} \quad \alpha > 3 \end{cases}$$

$\alpha = 3$, nguyên hàm của ρ^{2-3} là $\ln\rho \to \infty$ khi $\rho \to 0$. Vậy tích phân hội tụ khi $\alpha < 3$; phân kỳ khi $\alpha \geq 3$.

BÀI TẬP

1. Viết công thức tính tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, với:

1) D là tam giác có các đỉnh (0, 0), (1, 0), (1, 1)

2) D là hình thang có các đỉnh (0, 0), (2, 0), (1, 1), (0, 1)

3) D là hình vành tròn $x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 4$

4) D giới hạn bởi các đường $y^2 - x^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$ $((0, 0) \in D)$

2. Thay đổi thứ tự lấy các tích phân

1) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$

2) $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$

3) $\int\limits_{\frac{a}{2}}^a dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$

4) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$

5) $\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$

6) $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$

3. Tính các tích phân:

1) $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, D: $3 \leq x \leq 4$, $1 \leq y \leq 2$

2) $I = \iint\limits_D \frac{x^2 dxdy}{1+y^2}$, D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

3) $I = \iint\limits_D (x^2 + y)dxdy$,

D giới hạn bởi $y^2 = x$, $y = x^2$

4) $I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$,

D giới hạn bởi $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$

5) $I = \iint\limits_D \sqrt{4x^2 - y^2}\, dxdy$,

D là tam giác giới hạn bởi: $y = 0$, $x = 1$, $y = x$

*6) $I = \iint\limits_D x^{p-1} y^{q-1} dxdy$, $p, q \ge 1$, D: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$

7) $I = \iint\limits_D e^{\frac{x}{y}} dxdy$,

D giới hạn bởi $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$

8) $I = \iint\limits_D xydxdy$,

D: $(x-2)^2 + y^2 \le 1$, $y \ge 0$

*9) $I = \iint\limits_D ydxdy$, D giới hạn bởi : $\begin{cases} x = R(t - \sin t) & 0 \le t \le 2\pi \\ y = R(1 - \cos t) & y \ge 0 \end{cases}$

*10) $I = \iint\limits_D xydxdy$, D giới hạn bởi : $\begin{cases} x = a\cos^3 t & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ y = a\sin^3 t & \\ x \ge 0, y \ge 0 & \end{cases}$

*11) $I = \iint\limits_D |\cos(x+y)|\, dxdy$, D: $0 \le x, y \le \pi$

*12) $I = \iint\limits_D \sqrt{|y - x^2|}dxdy$, D: $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$

*13) $I = \iint\limits_D sign(x^2 - y^2 + 2)dxdy$, D: $x^2 + y^2 \le 4$

*14) $I = \iint\limits_D E(x + y)dxdy$, D: $0 \le x, y \le 2$

$E(x)$: phần nguyên của x.

*15) $I = \iint\limits_D x^K y^n dxdy$

K, $n \in$ N, ít nhất là một là lẻ D: $x^2 + y^2 \le a^2$

4. Tính các tích phân sau bằng cách chuyển sang tọa độ độc cực:

1) $I = \iint\limits_D ydxdy$,

D: nửa trên của hình tròn bán kính $\frac{a}{2}$, tâm $(\frac{a}{2}, 0)$

2) $I = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$, D: $x^2 + y^2 \le a^2$, $y \ge 0$

3) $I = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$,

D giới hạn bởi: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \ge 0$

4) $I = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, D: $\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$

5) $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$, D: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$

*6) $I = \iint\limits_D dxdy$, D giới hạn bởi $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$

7) $I = \iint\limits_D dxdy$, D giới hạn bởi $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$,

$(x, y > 0)$

5. Xác định dấu các tích phân:

1) $I = \iint\limits_D \ln(x^2 + y^2)dxdy$, D: $|x| + |y| \le 1$

2) $I = \iint\limits_D \arcsin(x + y)dxdy$, D: $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 1 - x$

6. Tìm giá trị trung bình của:

1) $f(x, y) = \sin^2 x.\sin^2 y$ trong $0 \le x, y \le \pi$

2) $f(x, y) = x^2 + y^2$ trong $(x - a)^2 + (y - b)^2 \le R^2$

7. Tìm diện tích của các hình giới hạn bởi:

1) $y^2 = 4ax$, $x + y = 3a$

2) $(y - x)^2 + x^2 = 1$ (ellipse)

3) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$

4) $r = a(1 + \cos\varphi)$, $r = a\cos\varphi$. $(a > 0)$

*5) $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$

*6) $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$ $(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta)$

*7) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$

*8) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$

8. Tính thể tích của các hình giới hạn bởi:

1) $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

2) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$

3) $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $\dfrac{3}{2}x + y = a$, $y = 0$, $z = 0$

4) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$

5) $2az \ge x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$

*6) $z = ae^{-(x^2+y^2)}$, $x^2 + y^2 = R^2$

7) $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, tính tỷ số của các thể tích.

8) $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$ $(x, y > 0)$

*9) $z^2 = xy$, $x^2 + y^2 = a^2$

10) $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $z = 0$ $(x > 0, y > 0)$

11) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $(z > 0)$

12) $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = 2x$, $z = 0$

9. Tính diện tích:

1) Phần mặt $x^2 + y^2 = R^2$ $(z \ge 0)$ gồm giữa hai mặt phẳng: $z = mx$, $z = nx$ $(m > n > 0)$

2) Phần mặt $x^2 - y^2 = z^2$, giới hạn bởi mặt phẳng $y + z = a$ trong góc phần tám thứ nhất.

3) Phần mặt $x^2 + y^2 = 2ax$ gồm giữa mặt phẳng $z = 0$ và mặt $x^2 + y^2 = z^2$.

4) Phần mặt $x^2 - y^2 = z^2$ ở trong mặt $x^2 + y^2 = 2ax$.

*5) Phần mặt $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm ở phía ngoài các hình trụ $x^2 + y^2 = \pm ax$.

6) Phần mặt $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ở trong mặt trụ: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(b \le a)$.

7) Phần mặt $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ở trong hình trụ:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

*8) Phần mặt giới hạn bởi $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$

*9) Phần mặt cầu bán kính R giới hạn bởi hai kinh tuyến và hai vĩ tuyến kề nhau.

10.

1) Tìm tọa độ trọng tâm của hình đồng chất ($\gamma = 1$) giới hạn bởi:

a) $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$.

b) $r = a(1 + \cos\varphi)$

2) Tìm moment quán tính của hình đồng chất ($\gamma = 1$) giới hạn bởi:

a) $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$ đối với Ox.

*b) $y^2 = ax$, $x = a$ đối với $y = -a$

c) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $y = 0$ đối với trục Ox,

$0 \leq t \leq 2\pi$.

11. Tính các tích phân bội ba:

1) $I = \iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(x + y + z + 1)^3}$

V giới hạn bởi $x = y = z = 0$, $x + y + z = 1$

2) $I = \iiint\limits_V (x + y + z)^2 dxdydz$

V là giao của: $2az \geq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$

3) $I = \iiint\limits_V zdxdydz$

V giới hạn bởi $z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ và $z = h$

4) $I = \iiint\limits_V dxdydz$

V giới hạn bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = z^2$ và chứa $(0, 0, R)$

5) $I = \iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz$

V giới hạn bởi $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$, $z = 0$, $z = a$

6) $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,dxdydz$

V là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

7) $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$

V là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le x$.

*8) $I = \iiint\limits_V xyz\,dxdydz$

V giới hạn bởi $z = x^2 + y^2$, $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, $xy = a^2$,

$xy = b^2$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$

***12.**

1) Tìm giá trị trung bình của $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

trong miền $x^2 + y^2 + z^2 \le x + y + z$

2) Tính $F'(t)$ nếu $F(t) = \iiint\limits_V f(x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz$.

V: $x^2 + y^2 + z^2 \le t^2$, f là hàm liên tục.

3) Chứng minh rằng nếu hàm f liên tục trong miền compact V và $\iiint\limits_\Omega f(x, y, z)\,dxdydz = 0$ với miền bất kỳ $\Omega \subset V$ thì $f(x, y, z) = 0$, $\forall (x, y, z) \in V$

13. Tính thể tích hình giới hạn bởi các mặt:

1) $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = \pm h$.

2) $x^2 + y^2 = 2ax,\ x^2 + y^2 = 2az,\ z = 0$

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 2,\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \quad (z \geq 0)$

4) $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x,\ y = x^2$

5) $az = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$

6) $z = 6 - x^2 \quad y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$

*7) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$

*8) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$

14.

1) Tìm tọa độ trọng tâm của hình đồng chất ($\gamma = 1$) giới hạn bởi:

a) $y^2 + 2z^2 = 4x,\ x = 2$

b) $z = x^2 + y^2,\ x + y = a,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

d) $x^2 + y^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = a^2\ (x \geq 0)$

2) Tìm moment quán tính của hình đồng chất ($\gamma = 1$) giới hạn bởi các mặt sau, đối với các mặt phẳng tọa độ:

a) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2},\ z = c$

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{a}$

*3) Hình cầu đồng chất $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ khối lượng M hút chất điểm $P(0, 0, a)$ khối lượng m bởi một lực bằng bao nhiêu?

***15.** Tính các tích phân suy rộng:

1) $\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-y)} dy$

2) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$ D giới hạn bởi $x \ge 1$, $y \ge x^2$

3) $\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^2}$ $(a > 0)$

4) $\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}$

***16.** Xét sự hội tụ của các tích phân

1) $\iint\limits_D \ln\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$, D: $x^2 + y^2 \le 1$

2) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x - y^2)^{\alpha}}$, D: $x^2 + y^2 \ge 1$

3) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt[3]{(x - y)^2}}$, D: $|x| \le 1$, $|y| \le 1$

4) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha}}$ V: $x^2 + y^2 + z^2 \ge 1$

5) $\iint\limits_D \ln\sin(x - y)\, dxdy$.

D: giới hạn bởi $y = 0$, $x = \pi$, $y = \pi$.

TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

1.

1) $$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$$

2) $$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$$

3) $$\int_{-2}^{-1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

$$+\int_{-1}^{1} dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

4) $$\int_{-3}^{-2} dx\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy+\int_{-2}^{2} dx\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy+\int_2^3 dx\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$$

2.

1) $$\int_0^{48} dy\int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dx$$

2) $$\int_0^{\frac{a}{2}} dy\int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int_{\frac{a}{2}}^{a} dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$$

3) $$\int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy\int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x,y)dx+\int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a} dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x,y)dx$$

4) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{1} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy$

5) $\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$

3.

1) $\ln\dfrac{25}{24}$

2) $\dfrac{\pi}{12}$

3) $\dfrac{33}{140}$

4) $\dfrac{9}{4}$

5) $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

6) $\dfrac{1}{q}B(p,q+1)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$ (hàm Euler)

7) $\dfrac{1}{2}$

8) $\dfrac{4}{3}$

9) $\dfrac{5}{2}\pi R^3$; $\left(I=\int\limits_0^{2\pi a} dx \int\limits_0^{y(x)} y dy=\int\limits_0^{2\pi} R(1-\cos t)dt \int\limits_0^{R(1-\cos t)} y dy\right)$

10) $\dfrac{a^4}{80}$

11) 2π

$$\left(I = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi - x} \cos(x+y)dy - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_0^{\pi - x} \cos(x+y)dy\right)\right)$$

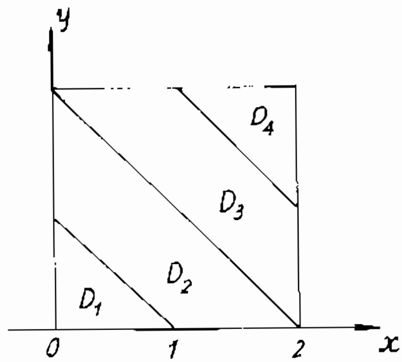
12) $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5}{3}$; $\left(I = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y}\, dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2} \sqrt{y - x^2}\, dy\right)$

13) $8 \ln \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \dfrac{4\pi}{3}$;

$$\left(I = 4\left(\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x^2+2}} dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy - \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\right)\right)$$

14) 6; $\left(f = E(x+y) = K - 1 \quad (K = 1,2,3,4) \right.$ nếu $\left. (x, y) \in D_K\right)$ (H 155)

15) 0; $\int_a^a x^K dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^n dy$



Hình 155

4.

1) $\dfrac{a^3}{12}$

2) $\dfrac{\pi a^3}{3}$

3) $\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{16(\sqrt{2} - 20)}{9}\right)\dfrac{a^3}{2}$

4) $-6\pi^2$

5) $\dfrac{2}{3}\pi ab$

6) $ab\left[\left(\dfrac{a^2}{h^2} - \dfrac{b^2}{K^2}\right) arctg \dfrac{ak}{bh} + \dfrac{ab}{hK}\right]$;

$$I = 4\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{aK}{bh}} d\varphi \int_0^{\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi + \frac{b^2}{K^2}\sin^2\varphi\right)} abr\,dr$$

7) ln2, đặt $xy = u$, $y = Vx$, $J = \dfrac{1}{2V}$

5.

1) ≤ 0

2) ≥ 0

6.

1) $f(x, y) = \dfrac{1}{4}$

2) $f(x, y) = a^2 + b^2 - \dfrac{R^2}{2}$

7.

1) $\dfrac{61}{3}a^2$

2) π; $-1 \leq x \leq 1$

3) $3\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\right)$

4) $\dfrac{5}{4}\pi a^2$

5) 10π, (đặt $x - 2y = u$, $3x + 4y = v$)

6) $\dfrac{1}{3}(\beta - \alpha)\ln\dfrac{b}{a}$

7) $\dfrac{5}{8}\pi a^2$

8) $\frac{3}{4}\pi a^2$

8.

1) $\frac{\pi r^4}{4a}$

2) $\frac{48\sqrt{6}}{5}$

3) $\frac{a^3}{18}$

4) $\frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2}-1)$

5) $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)$

6) $\pi a(1-e^{-R^2})$

7) $\frac{3\sqrt{3}-2}{2}$

8) $\frac{\sqrt{2}}{2}(2\sqrt{2}-1)$ (đặt $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$)

9) $\frac{4a^3\Gamma^2(\frac{3}{4})}{3\sqrt{\pi}}$ $\left(V = 4\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dxdy = \frac{3}{4}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\varphi d\varphi\right)$

10) $\frac{\pi}{8}$

11) $\frac{\pi}{3}abc(2-\sqrt{2})$

12) $\frac{3}{4}$; (đặt $x^2 = uy$, $y^2 = Vx$)

9.

1) $2(m - n)R^2$

2) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$, (tích phân theo mặt phẳng yOz)

3) $8a^2$

4) $3\pi a^2$

5) $8a^2$, $(0 \le x \le a,\ \sqrt{ax - x^2} \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}\ )$

6) $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$

7) $\frac{\pi a^2}{2}$

8) $16a^2$

9) $R^2(\varphi_2 - \varphi_1)(\sin\psi_2 - \sin\psi_1)$

φ_1, φ_2: kinh độ, ψ_1, ψ_2: vĩ độ

$(M \in S$: $x = R\cos\varphi\cos\psi$, $y = R\sin\varphi\sin\psi$, $z = R\sin\psi$

$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \psi_1 \le \psi \le \psi_2$

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv$$

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2;\quad G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2;\quad F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v')$$

10.

1)

a) $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$

b) $\left(\frac{5}{6}a, 0\right)$

2)

a) $I_x = 4$

b) $\frac{8}{5}a^4$; $I = \int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} (y+a)^2\,dy$

c) $\frac{35}{12}\pi a^4$, (lấy t và y là biến tích phân)

11.

1) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$

2) $\frac{\pi a^5}{5}(18\sqrt{3} - \frac{97}{6})$

3) $\frac{\pi h^2 R^2}{4}$

4) πR^3

5) $\frac{8}{9}a^2$

6) $\frac{8}{15}\pi R^5$

7) $\frac{\pi}{10}$

8) $\frac{3}{64}(b^8 - a^8)[(\beta^2 - \alpha^2)(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}) + 4\ln\frac{\beta}{\alpha}]$

$(xy = u,\ y = vx,\ z = z)$

12.

1) $\frac{6}{5}$; $(f(M) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}\iiint\limits_V f(x^2 + y^2 + z^2)\,dV$

$$V.\ (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2 \le \frac{3}{4}$$

2) $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$; $\left(F(t) = 4\pi\int_0^1 \rho^2 f(\rho^2)d\rho\right)$

3) $f(\overline{M}) = \dfrac{1}{\dfrac{4\pi\varepsilon^2}{3}}\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = 0$

$$(V\colon x^2+y^2+z^2 \le \varepsilon^2,\ \varepsilon \to 0, \quad \bar{M} \to M)$$

13.

1) $\dfrac{32}{6}a^2h$

2) $\dfrac{3}{4}\pi a^3$; $\left(V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} rdr \int_0^{\frac{r^2}{2a}} dz\right)$

3) $\dfrac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)abc$

4) $\dfrac{3}{35}$

5) $\dfrac{\pi a^3}{6}$

6) $\dfrac{32\pi}{3}$

7) $\dfrac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$; $\left(V = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sqrt{-\cos 2\varphi}} \rho^2 d\rho : \text{đặt } \frac{\pi}{2}-\varphi = t\right)$

8) $\dfrac{4\pi abc}{35}$; $\left(V = 72abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin^5\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho\right)$

14.

1)

a) $\left(\frac{4}{3},0,0\right)$

b) $\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a,\frac{7}{30}a^2\right)$

c) $\left(\frac{3}{8}a,\frac{3}{8}b,\frac{3}{8}c\right)$

d) $\left(0,0,\frac{3}{8}a\right)$

2)

a) $I_{xy}=\frac{abc^3}{60};I_{yz}=\frac{a^3bc}{60};I_{zx}=\frac{ab^3c}{60}$

b) $I_{xy}=\frac{\pi}{5}abc^3;I_{yz}=\frac{\pi}{20}a^3bc;I_{zx}=\frac{\pi}{20}ab^3c$

c) $I_{xy}=\frac{2abc^3}{225}(15\pi-16);$

$$I_{yz}=\frac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92);I_{zx}=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272)$$

d) $\overrightarrow{F}(0,0,Z),Z=\begin{cases}-\dfrac{KmM}{a|a|} & \text{nếu } |a|\geq R\\ -\dfrac{KmMa}{R^5} & \text{nếu } |a|<R\end{cases}$

Theo định luật Newton: chất điểm có khối lượng m bị hút bởi một vật có khối lượng M bởi một lực $\overrightarrow{F}(X,Y,Z)$

$$X=Km\frac{\partial u}{\partial x};\quad Y=Km\frac{\partial u}{\partial y};\quad Z=Km\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$U(x,y,z)=\iiint\limits_V \mu(\xi,\eta,\varsigma)\frac{d\xi d\eta d\varsigma}{r}$$

μ là mật độ khối lượng của vật.

$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\varsigma-z)^2}$, V là thể tích của vật

U gọi là thế vị Newton (thế của trường lực hút)

15.

1) 1

2) $\frac{\pi}{4}$

3) $\frac{\pi}{4a^2}$

4) $\frac{\pi}{8}$

16.

1) Hội tụ

Xét $I_\varepsilon=\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)dxdy \quad (D;x^2+y^2\le\varepsilon^2)$

$$=2\pi\left(\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon-\frac{1}{4}\right),\ \lim_{\varepsilon\to0}I_\varepsilon=-\frac{\pi}{2}$$

2) Hội tụ khi $\alpha>1$

3) Hội tụ

$$\left(I=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^1 dx\int_0^{x-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}+\lim_{\delta\to0}\int_0^1 dx\int_{x+\delta}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}\right)$$

4) Hội tụ khi $\alpha > \dfrac{2}{3}$

5) Hội tụ, $I = -\dfrac{\pi^2}{2}\ln 2$

$$I = \iint_D \ln\sin(x-y)dxdy, \text{ đặt } x = \frac{u+t}{2}, \quad y = \frac{u-t}{2}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} du \int_0^{\pi} \ln\sin t dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin t dt = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$$

(phần tích phân suy rộng, tập I).

Chương 10

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

§1. TÍCH PHÂN THƯỜNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

1.1. Định nghĩa: *Cho tích phân* $I(x) = \int_a^b K(x,t)dt$ *(1) với* $K(x, t)$ *là một hàm bị chặn và khả tích theo t trên [a, b], tích phân (1) là một hàm số của x trong đoạn [c, d] nào đó, ta gọi tích phân đó: I(x) là tích phân phụ thuộc tham số x, ta xét sự liên tục khả vi và khả tích của I(x). Ta có:*

1.2. Định lý:

1) Nếu $K(x, t)$ *là một hàm liên tục trong hình chữ nhật D:* $a \le t \le b$, $c \le x \le d$ *thì:*

(1) I(x) là một hàm liên tục trong [c, d].

(2) I(x) là một hàm khả tích trên $[\alpha, \beta] \subset [c, d]$ *và*

$$\int_\alpha^\beta I(x)dx = \int_a^b dt \int_\alpha^\beta K(x,t)dx .$$

2) Với giả thiết ở 1) và nếu $\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}$ *tồn tại và liên tục trong D thì*

$$(3) \qquad I'(x) = \int_a^b \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} dt$$

Kết luận (2) gọi là qui tắc tích phân dưới dấu tích phân. (3) gọi là quy tắc lấy đạo hàm dưới dấu tích phân của Léibniz.

***Chứng minh:**

(1) Xét $I(x + \Delta x) - I(x) = \int\limits_a^b [K(x+\Delta x, t) - K(x,t)]dt$

Theo giả thiết 1). $K(x, t)$ là liên tục đối với x trên $[c, d]$ theo định lý Cantor (hàm liên tục trên một đoạn) thì $K(x, t)$ là liên tục đều đối với x trên $[c, d]$ nghĩa là:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, |\Delta x| < \delta \Rightarrow |K(x + \Delta x, t) - K(x, t)| < \varepsilon$$

Do đó:

$$|\Delta I(x)| = |I(x + \Delta x) - I(x)| < \int\limits_a^b \varepsilon dt = \varepsilon(b - a)$$

Điều này chứng tỏ $I(x)$ là hàm liên tục trên $[c, d]$

(2) Ta có:

$$\int\limits_\alpha^\beta I(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta dx \int\limits_a^b K(x,t)dt = \int\limits_a^b dt \int\limits_\alpha^\beta K(x,t)dx$$

(3) $$\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \int\limits_a^b \frac{K(x+\Delta x, t) - K(x,t)dt}{\Delta x}$$

Khi $\Delta x \to 0$ thì $\dfrac{K(x+\Delta x,t) - K(x,t)}{\Delta x} \to \dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}$ là một hàm liên tục trọng D theo giả thiết 2).

Do đó:

$$\left|\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} - \int\limits_a^b \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}dt\right| = \left|\int\limits_a^b \left[\frac{K(x+\Delta x,t) - K(x,t)}{\Delta x} - \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right]dt\right| \quad \text{(a)}$$

Theo công thức Lagrange:

$$\frac{K(x+\Delta x, t) - K(x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial K(c,t)}{\partial x}, c \in (x, x + \Delta x)$$

Cũng theo giả thiết 2) suy ra $\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}$ là liên tục đều trên [c, d]. Do đó vế phải của (a) viết được:

$$\left|\int_a^b\left(\frac{\partial K(c,t)}{\partial x}-\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\right)dt\right| < \int_a^b \varepsilon dt = \varepsilon(b-a)$$

và vế trái của (a) < ε(b - a), điều này chứng tỏ khi $\Delta x \to 0$:

$$I'(x) = \int_a^b \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}dt$$

Chú ý:

Nếu hàm $K(x, t)$ là liên tục trong hình chữ nhật $a \le t \le b$, $c \le x \le d$, $\forall d > c$ (c = const) thì ta cũng nói: $K(x, t)$ là liên tục trong hình chữ nhật $x \ge c$, $a \le t \le b$.

Thí dụ: Ta sẽ áp dụng định lý trên để tính một số tích phân

1) Tính $\quad I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $a \ne 0$, khi $n = 1$:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{1}{a} \tag{1}$$

Coi I_1 là tích phân phụ thuộc tham số a: $I_1 = I(a)$, rõ ràng $\frac{1}{x^2+a^2}$ và đạo hàm của nó liên tục trong miền $|a| \ge a_0 > 0$, $0 \le x \le 1$, theo (3):

$$\int_0^1 \frac{-2a dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{a^2}arctg\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^2}\left(-\frac{1}{a^2}\right)$$

(Đạo hàm 2 vế của (1) theo a)

Do đó:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}arctg\frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2(a^2+1)}$$

Tiếp tục, ta sẽ tính được $I_3, I_4, \ldots, I_n$

2) Tính $$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)dx \quad (a, b > 0) \tag{1}$$

Rõ ràng hàm dưới dấu tích phân và đạo hàm theo a của nó liên tục trong miền $a \ge a_0 > 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Vậy theo quy tắc Leibniz:

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin^2 x dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$$

Đặt $t = \mathrm{cotg} x$ ta được:

$$I'(a) = 2a \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + b^2t^2)(1 + t^2)} = \frac{\pi}{a + b}$$

Do đó: $$I(a) = \pi \ln(a + b) + c \tag{2}$$

Theo (1): $I(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln b^2 dx = \pi \ln b$. Do đó trong (2) đặt $a = b$ ta có:

$$I(b) = \pi \ln 2b + c = \pi \ln b, \text{ hay } \pi(\ln 2 + \ln b) + c = \pi \ln b,$$

vậy $c = -\pi \ln 2$, và $I(a) = \pi \ln \frac{a + b}{2}$

3) Tính

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a, b > 0)$$

vì $$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$$

nên $$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy$$

Theo (2) của định lý:

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{(b+1)}{(a+1)}$$

Chú ý: Người ta cũng xét trường hợp các cận của tích phân cũng phụ thuộc tham số

$$I(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)dt \qquad (1)$$

Giả sử $K(x, t)$ là một hàm liên tục trong D: $a \le t \le b$, $c \le x \le d$; $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các hàm khả vi trên $[c, d]$, $a \le \alpha(x) \le b$, $a \le \beta(x) \le b$ và $\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trong D thì (1) là khả vi trên $[c, d]$ và:

$$I'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} dt + \beta'(x)K[x,\beta(x)] - \alpha'(x)K[x,\alpha(x)]$$

Thực vậy, áp dụng quy tắc Leibniz ở trên, quy tắc đạo hàm của hàm hợp và quy tắc đạo hàm của tích phân theo cận trên (dưới) ta sẽ có công thức này.

§2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

2.1. Định nghĩa: ***Cho tích phân suy rộng:*** $I(x) = \int_a^b K(x,t)dt$ ***(1)***

với $b = +\infty$ ***hoặc*** $K(x, t)$ ***không liên tục theo t tại b. Nếu (1) hội tụ tại*** $x \in X \subset R$ ***thì nó là một hàm của x:*** $I = I(x)$, $I(x)$ ***gọi là tích phân suy rộng phụ thuộc tham số. Ta cũng có định lý về sự liên tục, khả vi, khả tích như đối với tích phân thường phụ thuộc tham số, nhưng phải có những điều kiện hạn chế hơn, cụ thể ta phải xét sự hội tụ đều của tích phân này.***

Sự hội tụ đều:

Tích phân $$I(x) = \int_a^{+\infty} K(x,t)dt \quad (1)$$

gọi là hội tụ tại $x \in X$ nếu:

$$\lim_{b \to +\infty} I(x,b) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b K(x,t)dt = I(x)$$

Nghĩa là $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall b > N \Rightarrow |I(x, b) - I(x)| < \varepsilon$. Nói chung N phụ thuộc ε và x, $N = N(x, \varepsilon)$. Nếu $\forall x \in X$, N chỉ phụ thuộc ε: $N = N(\varepsilon)$ thì (1) gọi là hội tụ đều trong miền X. ***Vậy tích phân (1) hội tụ đều trong X nếu:***

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0, \forall b > N(\varepsilon), \forall x \in X \Rightarrow \left|\int_b^{+\infty} K(x,t)dt\right| < \varepsilon$$

Tương tự, tích phân $I(x) = \int_a^b K(x,t)dt$ ***với K(x, t) không liên tục tại b là hội tụ đều trong X nếu:***

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, |\alpha| < \delta(\varepsilon), \forall x \in X \Rightarrow \left|\int_{b-\alpha}^{b} K(x,t)dt\right| < \varepsilon$$

Để xét sự hội tụ đều của tích phân (1) ta có:

2.2. Tiêu chuẩn: ***Nếu tồn tại hàm φ(t) sao cho:***

1) $|K(x, t)| \le \varphi(t), \forall x \in X$ ***và t trong khoảng lấy tích phân.***

2) $\int \varphi(t)dt$ ***tồn tại (tích phân trên [a, b] hoặc [a, +∞)) thì*** $\int K(x,t)dt$ ***hội tụ tuyệt đối và đều trong X.***

Thực vậy, chẳng hạn xét trường hợp $I(x) = \int_a^{+\infty} K(x,t)dt$ thì

$$\left|\int_b^{+\infty} K(x,t)dt\right| \le \int_b^{+\infty} \varphi(t)dt < \varepsilon \quad \text{theo giả thiết.}$$

2.3. Định lý:

1) Nếu $K(x, t)$ liên tục trong $D: a \le t < +\infty;\ c \le x \le d$ và $I(x) = \int_a^{+\infty} K(x,t)dt$ hội tụ đều $\forall x \in [c, d]$ thì $I(x)$ liên tục trong $[c, d]$.

2) Với những giả thiết của 1) và $[\alpha, \beta] \subset [c, d]$ thì:

$$\int_\alpha^\beta I(x)dx = \int_a^{+\infty} dt \int_\alpha^\beta K(x,t)dx .$$

3) Nếu $\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}$ tồn tại và liên tục trong D

$\int_a^{+\infty} K(x,t)dt$ hội tụ $\forall x \in [c, d]$ và $\int_a^{+\infty} \dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x} dt$ hội tụ đều trên $[c, d]$ thì:

$$I'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} dt, \quad \forall x \subset [c, d].$$

Đối với trường hợp tích phân suy rộng:

$$I(x) = \int_a^b K(x,t)dt \quad \text{với } K(x, t) \text{ không liên tục tại } b.$$

Ta cũng có định lý tương tự với định lý trên (cần thay từ : $\forall t \ge a$ bằng $\forall t$: $a \le t \le b'$ với $b' < b$), định lý được chứng minh tương tự như định lý ở §1.

Thí dụ:

1) Tính $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} dx$ (tích phân Dirichlet, ta đã xét ở phần tích phân suy rộng, Tập 1)

Xét:

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \quad (\alpha \ge 0,\ k > 0)$$

Ta coi tích phân này như tích phân phụ thuộc tham số α:

$J = J(\alpha)$, có thể chứng minh $J(\alpha)$ thoả mãn các điều kiện của định lý.

Ta có: $J'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \cos\alpha x dx = \dfrac{k}{\alpha^2 + k^2}$ (đã tính ở Tập I)

($J'(\alpha)$ hội tụ đều với mọi α, vì $|e^{-kx}\cos\alpha x| \le e^{-kx}$ mà $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} dx$ là hội tụ).

Vậy $\dfrac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \dfrac{k}{\alpha^2 + k^2}$.

Tích phân theo α ta có: $J(\alpha) = arctg\dfrac{\alpha}{k} + c$. Cho $\alpha = 0$, ta có $0 = 0 + c$, hay $c = 0$. Vậy $J(\alpha) = arctg\dfrac{\alpha}{k}$ với $k > 0$. Khi α = const thì J là hàm của k, liên tục khi $k = 0$, theo phần (1) của định lý.

$$\text{Đặt} \quad J_0 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} dx \ (\alpha > 0), \text{ thì } J_0 = \lim_{k \to +0} J(\alpha)$$

hay:
$$J_0 = \lim_{k \to +0} arctg\frac{\alpha}{k} = arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Đặc biệt $\alpha = 1$ thì $J_0 = I$

Vậy
$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Chú ý: Từ trên suy ra: $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin ax}{x} dx = \dfrac{\pi}{2} \text{signa} \ (a \ne 0)$

2) Tính

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \quad (a, b > 0)$$

Ta có: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \dfrac{1}{x}$ ($x > 0$) hội tụ đều $\forall x$: $x \ge x_0 > 0$.

Lấy tích phân đẳng thức này theo x từ a đến b ta có:

$$\int_0^{+\infty} dt \int_a^b e^{-xt} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\frac{b}{a}$$

Vậy $\quad I = \ln\frac{b}{a}$

3) Tính

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t^2} dt \ \ (a,\ b > 0).$$

Xét $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$ (thí dụ 1). Tích phân này hội tụ đều $\forall x$: $x \ge x_0 > 0$. Do đó

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} \int_a^b \sin xt dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}(b - a) = I$$

4) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (tích phân Euler – Poisson)

Đặt $x = ut$, $u > 0$, ta có $I = u\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2} dt$

Nhân hai vế với e^{-u^2} và lấy tích phân từ 0 đến $+\infty$:

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u du \int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2} dt = = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-u^2(1+t^2)} u du = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Do đó $\qquad I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

5) Tương tự, người ta cũng tính được các tích phân Laplace:

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ab} \ \ (a,\ b > 0)$$

$$L_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab} \ \ (a,\ b > 0)$$

Các tích phân Fresnel:

$$F = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

§3. HÀM EULER

3.1. Hàm Gamma Γ

Hàm Γ hay tích phân Euler loại 2 là tích phân, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ ***(1)***

Như đã biết, tích phân này hội tụ $\forall x > 0$ (phần tích phân xác định suy rộng) .

Hàm Γ là một tích phân suy rộng phụ thuộc tham số x, nó là một hàm liên tục và có đạo hàm mọi cấp khi $x > 0$. Từ định nghĩa suy ra:

$$\Gamma(1) = 1 \qquad (2)$$

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad (3)$$

$$\Gamma(n+1) = n!\ (n \in N) \qquad (4)$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \qquad (5)$$

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} \qquad (6)$$

Thực vậy

(2): $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 1$

(3): $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$, tích phân từng phần: $u = t^x$, $e^{-t}dt = dV$, ta có:

$$\Gamma(x+1) = -e^{-t}t^x\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x)$$

(4): trường hợp đặc biệt của (3) $\Gamma(2) = 2\Gamma(1) = 2.1$

$$\Gamma(3) = 3.\ \Gamma(2) = 3.\ 2.1 = 3!, \ldots\ \Gamma(n+1) = n!$$

(5): xét (1), đặt $t = u^2$ thì:

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} u^{2x-1}e^{-u^2}du$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

(tích phân Poisson $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

(6): Theo (3)

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$

theo (5) và rút gọn ta có (6).

Chú ý: Người ta đã kéo dài $\Gamma(x)$ ra các giá trị âm của x:

$$\Gamma(-n-\frac{1}{2}) = (-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}n!}{(2n+1)!}\sqrt{\pi}$$

Chẳng hạn $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$, $\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$

3.2. Hàm Bêta B

Hàm Bêta B hay tích phân Euler loại 1, là tích phân suy rộng phụ thuộc các tham số p, q:

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \tag{7}$$

Tích phân này hội tụ $\forall p, q > 0$ (phần tích phân xác định suy rộng).

Đổi biến $t = 1 - u$ trong (7) ta có:

$$B(p,q) = B(q,p) \tag{8}$$

Hàm B liên tục và có đạo hàm mọi cấp theo p, q (trong miền $p, q > 0$).

3.3. Liên hệ giữa Γ và B

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{9}$$

*Thực vậy, xét $p,\ q \in N$

Tích phân từng phần (7), đặt $u = (1-t)^{q-1}$, $dV = t^{p-1}dt$, ta có:

$$B(p,q) = \left.\frac{t^p(1-t)^{q-1}}{p}\right|_0^1 + \frac{q-1}{p}\int_0^1 t^p(1-t)^{q-2}dt = \frac{q-1}{p}B(p+1, q-1)$$

Từ công thức này suy ra:

$$B(p,q) = \frac{(q-1)(q-2)\ldots(q-(q-1))}{p(p+1)\ldots(p+q-2)}B(p+q-1,1)$$

$$= \frac{(q-1)!}{p(p+1)\ldots(p+q-2)}\int_0^1 t^{p+q-2}dt$$

$$= \frac{(q-1)!}{p(p+1)\ldots(p+q-2)(p+q-1)} = \frac{(q-1)!(p-1)!}{(p+q-1)!}$$

Do đó và theo (4) ta có

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Người ta cũng chứng minh được công thức (9) vẫn đúng trong trường hợp $p,\ q$ không nguyên (> 0)

Đặt $\beta = \dfrac{t}{1-t}$, ta có:

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{p-1}}{(1+\beta)^{p+q}}d\beta \tag{10}$$

Đặc biệt

$q = 1-p$, $0 < p < 1$, người ta đã tính được:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{p-1}}{(1+\beta)} d\beta = \frac{\pi}{\sin \pi p} \qquad (11)$$

([3], [13]) (xem chứng minh ở cuối tập BTGS GT II, III của tác giả)

3.4. Áp dụng

1) Tính $\quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad n \geq 0$

Đặt $\sin x = \sqrt{t}$, ta có:

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}B(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

Đặc biệt, $n \in N$, ta được kết quả đã biết

2) Tính $\quad I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)}$

Đặt $x^4 = \beta$, ta có $\quad I = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\beta^{-\frac{3}{4}}}{1+\beta} d\beta$

Theo (11) ta có $\quad I = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

3) Tính

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad \text{(tích phân elliptique)}$$

Đặt $x^4 = t$, theo (5), (7), (9) ta có:

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4}B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

Theo (11): $\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4}) = \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}$

Do đó $\quad I = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left[\Gamma(\frac{1}{4})\right]^2$

Theo bảng (VII phụ chương)

$$\Gamma(\frac{1}{4} + 1) = 0,9064$$

Do đó

$$\Gamma(\frac{1}{4}) = 4\Gamma(\frac{1}{4} + 1) = 3,6256$$

và

$$I = 1,3110$$

BÀI TẬP

1. Tính $\Gamma(\alpha)$ nếu:

1) $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha)dx$

(f'_u, f'_v liên tục, $u = x + \alpha$, $v = x - \alpha$)

2) $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy \quad (\alpha > 0)$

***2.** Cho $f(z)$ liên tục $\forall z \in R$ và $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(z)|}{1+z^2}dz$ hội tụ, chứng minh

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x.f(z).dz}{x^2+(y-z)^2}$$ thoả mãn phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ (Phương trình Laplace 2 chiều)

***3.** Cho phương trình (phương trình Bessel)

$$x^2J''_n(x)+xJ'_n(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0$$

Chứng minh:

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt-x\sin t)dt$$ (hàm Bessel)

là một nghiệm của phương trình đó.

4. Chứng minh rằng hàm:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz$$

thoả mãn phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(a>0)$$

(phương trình dao động của dây) và các điều kiện ban đầu

$$u(x,\,0)=f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x)$$

với giả thiết $f(x)$ khả vi hai lần (có $f''(x)$) và $F(x)$ khả vi.

5.

1) Áp dụng công thức

$$\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\qquad(n>0)$$

tính $$\int_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx$$

2) Áp dụng công thức

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p} \quad (p > 0)$$

tính $$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt}dt$$

Tính các tích phân (từ bài 6 đến bài 14).

6.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}, \ (|a| < 1)$$

7.

$$\int_0^1 \frac{arctgx}{x}\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

8.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}}dx, \ (|\alpha| < 1)$$

9.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\sin mx dx, \ (a, b > 0)$$

10.

$$\int_0^{+\infty} \frac{arctgax}{x(1 + x^2)}dx, \ (a > 0)$$

11.

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos\alpha x dx \quad (a > 0)$$

12.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}dx \quad (\alpha, \beta > 0)$$

13.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx \ (a > b > 0)$$

14.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x} dx \quad (a > 0)$$

Biểu diễn qua các hàm Γ và B rồi tính các tích phân sau: (bài 15 đến bài 20).

15.

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \ (a > 0)$$

16.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$$

17.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}} \ (n > 1)$$

18.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$$

19.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx \ (0 < p < 1)$$

20.

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$$ (tích phân elliptique loại 1)

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}\, d\varphi$$ (tích phân n elliptique loại 2)

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

1.

1) $I(\alpha) = f(\alpha, -\alpha) + 2\int_0^{\alpha} f'_{\alpha} dx$

2) $I'(x) = -\int_{\alpha}^{+\infty} y^2 e^{-\alpha y^2} dy - e^{-\alpha^3}$

5.

1) $-\dfrac{1}{n^2}$

2) $\dfrac{2}{p^3}$, đạo hàm hai lần $\int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \dfrac{1}{p}$

6.

$\pi \arcsin a$, $I'(a) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{1 - a^2\cos^2 x} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$

$\Rightarrow J(a) = \pi \arcsin a + c$, $I(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ $(a < 1)$

7.

$$\frac{\pi}{2}\ln(1 + \sqrt{2})$$

dùng công thức: $\frac{arctgx}{x}=\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$, $x \neq 0$.

8. $\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$

9. $arctg\frac{b}{m}-arctg\frac{a}{m}$.

10. $\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$, $a>0$

11.

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\alpha^2}{4a}},\quad I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin\alpha x dx$$

$$=\frac{-\alpha}{2a}I(\alpha)\Rightarrow I(\alpha)=ce^{-\frac{\alpha^2}{4a}},\quad I(0)=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=c$$

$$\Rightarrow\ I(\alpha)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}$$

12.

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}\quad(\alpha>0,\ \beta>0),\quad I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}dx=-\frac{1}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow\qquad I(\alpha)=-\frac{1}{2}\ln\alpha+c,\quad I(\beta)=0\Rightarrow c=\frac{1}{2}\ln\beta$$

13. $\frac{\pi}{2}$

$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a+b)x}{x}dx+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a-b)x}{x}dx$, dùng tích phân Dirichlet.

14. $\frac{\pi}{4}$, $\sin^3\alpha x=\frac{3}{4}\sin\alpha x-\frac{1}{4}\sin 3\alpha x$

15.

$\frac{\pi a^4}{16}$, đặt $x=a\sqrt{t}$ $(t>0)\Rightarrow I=\frac{a^2}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt$

$$= B(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{a^4\Gamma^2(\frac{3}{2})}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi a^4}{16}$$

16.

$$B(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

17.

$\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$, đặt $x = t^{\frac{1}{n}}$ $(t > 0)$ ta dùng (10)

18.

$\dfrac{3\pi}{512}$, đặt $\sin x = \sqrt{t}$ $(t > 0)$

$$I = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(6)} = \frac{3\pi}{512}$$

19.

$-\dfrac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$ $\qquad 0 < p < 1,$

$$I(p) = \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{d}{dp}B(p, 1-p)$$

20.

$$K = \frac{1}{2\sqrt{2}}B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

$$K = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + B(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})\right]$$

Chương 11

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ MẶT

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Ta đã định nghĩa tích phân xác định là tích phân lấy trên một đoạn thẳng nào đó và cũng đã suy rộng: định nghĩa tích phân kép là tích phân lấy trên một miền nào đó. Bây giờ ta suy rộng theo một hướng khác: định nghĩa tích phân lấy theo một đường bất kỳ gọi là tích phân đường

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

1.1. Định nghĩa

Cho hàm f(x, y) xác định trên đường C nối hai điểm A, B:

$$C = \overset{\frown}{AB} \ (\in R^2) \quad (H.156).$$

Chia C ra làm n phần bất kỳ (không dẫm lên nhau) bởi các điểm

$$A = A_1, A_2, \dots A_i, \dots A_n = B$$

Gọi tên và độ dài của phần được chia thứ i là: $\overset{\frown}{A_i A_{i+1}} = \Delta s_i$ ***(i = 1, 2,...,n) lấy điểm tuỳ ý*** $M_i(x_i, y_i) \in \overset{\frown}{A_i A_{i+1}}$ ***(i = 1, 2,...,n) và lập tổng*** $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$. ***Nếu*** $I_n \to I$ ***khi*** $n \to \infty$ ***sao cho*** $\max \Delta s_i \to 0$ ***(không phụ thuộc vào cách chia đường C và cách chọn các điểm M_i) thì I gọi***

là tích phân đường loại một của hàm f(x, y) lấy theo đường C hay trên đường C.

Ký hiệu:

$$I = \int_C f(x,y)ds = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds$$

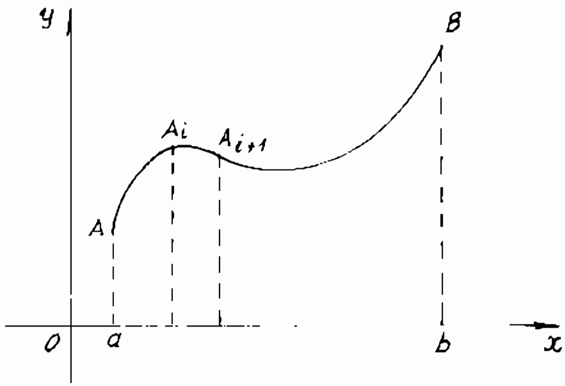
Nếu C là đường khép kín ($A \equiv B$) thì ký hiệu $\oint_C f(x,y)ds$.

Nếu C là đường trong không gian thì ta cũng định nghĩa tương tự:

$$I = \int_C f(x,y,z)ds$$

Đặc biệt nếu $f = 1$ thì

$$I = \int_C 1.ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = s \text{ là độ dài của đường } C.$$



Hình 156

Tích phân đường loại một cũng có tính chất giống như các tính chất của tích phân đơn, trừ tính chất đổi cận thì đối với tích phân đường đổi chiều đường lấy tích phân, tích phân vẫn không thay đổi.

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)ds$$

vì $\qquad \widehat{A_i A_{i+1}} = \widehat{A_{i+1} A_i} = \Delta s_i > 0$

1.2. Ý nghĩa cơ học

Xét $f(x, y) > 0$ và coi $f(x, y)$ là mật độ khối lượng (dài) của đường cong C và định nghĩa khối lượng m của đường cong là:

$$m = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

thì theo định nghĩa tích phân đường loại một ta có: $m = \int_C f(x, y)ds$

1.3. Cách tính

Giả sử cần tính $\qquad I = \int_C f(x, y)ds \qquad (1)$

Ta xét:

1) Đường C cho theo phương trình $y = y(x)$, $a \le x \le b$. Theo định nghĩa

$$I = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

Gọi hình chiếu của Δs_i trên trục Ox là Δx_i thì: $\Delta s_i \approx \sqrt{1 + y'^2(x_i)}\Delta x_i$ (Chương 8, phần A, §1.3, Tập I với Δx_i khá bé).

Do đó: $\qquad I = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f[(x_i, y(x_i)]\sqrt{1 + y'^2(x_i)}\Delta x_i$

Đây chính là tổng tích phân (đơn) của hàm $f[(x, y(x)]\sqrt{1 + y'^2(x)}$ trên đoạn $[a, b]$. Vậy

$$I = \int_C f(x, y)ds = \int_a^b f[(x, y(x)]\sqrt{1 + y'^2(x)}dx \qquad (2)$$

2) Cho đường C theo phương trình tham số: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $\quad (\alpha \le t \le \beta)$ lý luận tương tự như 1), ta có công thức tính:

$$I = \int_C f(x, y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[(x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt \qquad (3)$$

3). Đường $C \subset R^3$, cho theo phương trình tham số:

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($\alpha \le t \le \beta$). Cũng lý luận tương tự như 1), ta có công thức tính:

$$I = \int_C f(x, y, z)\,ds = \int_\alpha^\beta f[(x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt \quad (4)$$

Từ các công thức (2), (3) ta suy ra

Định lý: (Tồn tại của tích phân đường loại một).

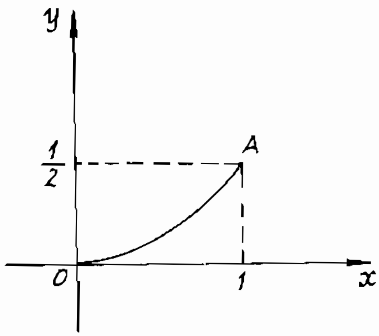
Nếu hàm $f(x, y)$ là liên tục trên đường trơn từng phần C (chương 7, §1.8) thì tích phân đường loại một của hàm đó trên C là tồn tại.

Thực vậy, xét C là trơn: $y'(x)$ hay $x'(t)$, $y'(t)$ liên tục chúng khả tích Rieman trên $[a, b]$ và trên $[\alpha, \beta]$, nghĩa là các tích phân ở vế phải của (2), (3) tồn tại. Do đó tích phân (1) tồn tại.

Thí dụ:

1) Tính $\quad I = \int_C \frac{4y}{x}\,ds$

với C là cung parabole $y = \frac{x^2}{2}$ nối từ điểm (0, 0) đến $A(1, \frac{1}{2})$(H. 157), ở đây $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 1$, $ds = \sqrt{1 + x^2}\,dx$.



Hình 157

Theo (2) ta có:

$$I = \int_C \frac{4y}{x}\,ds = \int_0^1 \frac{2x^2}{x}\sqrt{1 + x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2)$$

$$= \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

2) Tính $I = \int_C xyds$ với C là $\frac{1}{4}$ đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ $(x,\ y \geq 0)$.

Phương trình tham số của đường tròn $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$ds = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = Rdt$$

Theo (3) ta có:

$$I = \int_C xyds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin t\cos t dt = R^3 \frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{2}$$

3) Tính

$$I = \int_C (x^2 + y^2 + z^2)ds\ ,$$

C là phần đường đinh ốc $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Theo công thức (4) ta có:

$$I = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2 + b^2t^2)dt = \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 t + \frac{b^2t^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 + \frac{4}{3}\pi^2 b^2\right)$$

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

2.1. Định nghĩa: ***Cho hàm vecteur $\vec{F}$ của đối vô hướng $M(x, y)$: $\vec{F} = \vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$ xác định trên đường C nối hai điểm A, B:***

C = $\overset{\frown}{AB}$. $\vec{\tau} = \vec{\tau}(M) = \cos\alpha(M)\vec{i} + \sin\alpha(M)\vec{j}$ là vecteur tiếp tuyến với C tại M (α là góc giữa $\vec{\tau}$ và trục Ox). Tích phân đường loại một của hàm f(x, y) = $\vec{F}.\vec{\tau} = P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\sin\alpha(M)$ trên đường C:

$$I = \int_C \vec{F}.\vec{\tau}\, ds = \int_C [P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\sin\alpha(M)]ds$$

cũng được gọi là tích phân đường loại hai của hàm $\vec{F}(M)$ hay của các hàm P(M), Q(M) lấy trên đường C từ điểm A đến B.

Theo định nghĩa tích phân đường loại một thì:

$$I = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} I_n = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(M_i)\cos\alpha(M_i) + Q(M_i)\sin\alpha(M_i)]\Delta s_i$$

Coi như Δs_i như thẳng và gọi hình chiếu của nó trên các trục *Ox*, *Oy* lần lượt là Δx_i, Δy_i, ($i = 1, 2, \ldots, n$) thì theo định lý hình chiếu:

$$\cos\alpha(M_i)\Delta s_i = \Delta x_i,\quad \sin\alpha(M_i)\Delta s_i = \Delta y_i\quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

và $I_n = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i$. I_n cũng gọi là tổng tích phân (đường loại hai) thứ *n* của hàm $\vec{F}(M)$, hay của các hàm *P*(*M*), *Q*(*M*) trên đường *C* = $\overset{\frown}{AB}$ và tích phân đường loại hai của các hàm đó trên đường *C* từ điểm *A* đến điểm *B* ký hiệu là:

$$I = \int_C \; = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(M)dx + Q(M)dy = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Tích phân đường loại hai cũng gọi là tích phân đường theo tọa độ. Nếu đường *C* khép kín cũng ký hiệu: $\oint_C$

Tương tự, trong không gian, ta cũng định nghĩa tích phân đường loại hai của hàm vecteur $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$, *M*(*x*, *y*, *z*) $\in R^3$ hay của ba hàm *P*(*M*), *Q*(*M*), *R*(*M*) trên đường $C \subset R^3$ là :

$$I = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

với $\alpha = \alpha(x, y, z)$, $\beta = \beta(x, y, z)$, $\gamma = \gamma(x, y, z)$ là góc giữa tiếp tuyến $\vec{\tau}$ của C tại $M(x, y, z)$ với ba trục toạ độ Ox, Oy, Oz.

Tích phân đường loại hai có các tính chất giống như các tính chất của tích phân đơn (kể cả tính chất đổi chiều đường lấy tích phân: $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}}$ vì khi đổi chiều đường lấy tích phân thì Δx_i, Δy_i đổi dấu).

2.2. Ý nghĩa cơ học: Coi $P(x, y)$, $Q(x, y)$ là hình chiếu trên các trục Ox, Oy của lực $\vec{F}$ tác dụng vào chất điểm M chuyển động trên đường cong C từ điểm A đến điểm B (H.158).

Ta có :

$\vec{F} = \vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$.

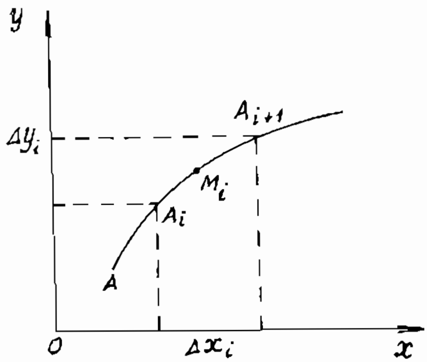
Coi cung $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ như dây cung $\overline{A_iA_{i+1}}$ thì:

$\overrightarrow{\Delta s_i} = \Delta x_i\vec{i} + \Delta y_i\vec{j}$ và coi trên cung đó:

$\vec{F} = \vec{F}(M_i) = P(M_i)\vec{i} + Q(M_i)\vec{j}$

$= P(x_i, y_i)\vec{i} + Q(x_i, y_i)\vec{j}$;

$M(x_i, y_i) \in A_iA_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.



Hình 158

thì công gần đúng của lực trên cung đó là:

$$\vec{F}(M_i)\overrightarrow{\Delta s_i} = P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

và công gần đúng trên cả đường C là:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

Người ta định nghĩa công T của lực trên đường C là:

$$T = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} T_n$$

Theo định nghĩa tích phân đường loại hai ta có:

$$T = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (1)$$

Như vậy về cơ hoc tích phân đường loại hai là công của lực trên đường cong C nếu coi lực là:

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

2.3. Cách tính

Dựa vào định nghĩa tích phân đường loại hai và tích phân đơn và lý luận tương tự như đối với tích phân đường loại một ta có:

1) Nếu đường C cho bởi phương trình $y = y(x)$ với $a \le x \le b$ thì công thức tính tích phân đường loại hai là:

$$I = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'\}dx \quad (1)$$

2) Nếu đường C cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \textit{với} \quad \alpha \le t \le \beta$$

thì

$$I = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt \ (2)$$

3) $C \subset R^3 : x = x(t), y = y(t); z = z(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$

Ta có công thức tính:

$$I = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}dt$$

(3)

Từ các công thức (1), (2) với lý luận tương tự như đối với tích phân đường loại một, ta có:

Định lý: (Tồn tại của tích phân đường loại hai)

Nếu các hàm P(x, y), Q(x, y) liên tục trên đường trơn từng phần C thì tích phân đường loại hai của các hàm đó trên C là tồn tại.

Thí dụ:

1) Tính $I = \int\limits_C xydx + (y - x)dy$

với C là đường nối điểm (0, 0) đến điểm (1, 1) và có phương trình:

a) $y = x$; b) $y = x^2$; c) $y^2 = x$; d) $y = 0$ và $x = 1$ $(0 \le x \le 1)$ (H.159)

Trong các trường hợp ta có:

$0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Theo (1):

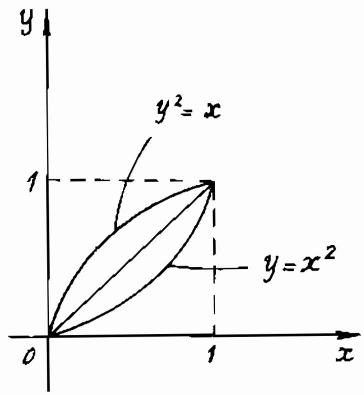
a) Thay $y = x$, $dy = dx$ vào tích phân ta có:

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

b) Thay $y = x^2$, $dy = 2xdx$ ta có:

$$I = \int_0^1 [x^3 + (x^2 - x)2x]dx =$$

$$= \left.\left(\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{12}$$



Hình 159

c) Thay $x = y^2$, $dx = 2ydy$ ta có:

$$I = \int_0^1 [y^3 2y + (y - y^2)]dy = \left.\left(2\frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right)\right|_0^1 = \frac{17}{30}$$

d) Ở đây $I = \int\limits_C = \int\limits_{C_1} + \int\limits_{C2}$ trên C_1: $y = 0$; trên C_2: $x = 1$ do đó

$$\int\limits_{C_1} = 0, \quad \int\limits_{C2} = \int\limits_0^1 (y-1)dy = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $\qquad I = -\dfrac{1}{2}$

2) Tính $I = \int\limits_C 2xydx + x^2dy$

(C là đường như thí dụ 1)

Theo công thức (1) ta có:

a) $I = \int\limits_0^1 (2x^2 + x^2)dx = \left.\dfrac{3x^3}{3}\right|_0^1 = 1$

b) $I = \int\limits_0^1 (2x^3 + 2x^3)dx = \left.\dfrac{4x^4}{4}\right|_0^1 = 1$

c) $I = 1$ (Tính tương tự)

d) $I = 1$ (Tính tương tự)

3) Tính $I = \oint\limits_C xdx + (x+y)dy$

C là đường tròn $x = R\cos t$, $y = R\sin t$; $0 \le t \le 2\pi$ (theo ngược chiều kim đồng hồ).

Theo công thức (2) ta có:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} [R\cos t(-R\sin t) + (R\cos t + R\sin t)R\cos t]dt$$

$$= R^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 tdt = R^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{R^2}{2}\left.(t + \frac{\sin 2t}{2})\right|_0^{2\pi} = R^2\pi$$

4) Tính $I = \int_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy + z^2dz$

C là phần đường đinh ốc $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

Theo công thức (3) ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)(-a\sin t) + 2a\cos t.a\sin t.a\cos t + b^3t^2]dt$$

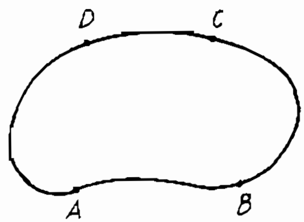
$$= \frac{1}{24}(b^3\pi^3 - 8a^3)$$

§3. CÔNG THỨC GREEN, SỰ ĐỘC LẬP CỦA TÍCH PHÂN ĐỐI VỚI ĐƯỜNG LẤY TÍCH PHÂN

3.1. Công thức Green: Cho miền D giới hạn bởi đường cong C khép kín. Đối với dường khép kín thì trị số của tích phân đường không phụ thuộc vào điểm bắt đầu. Thực vậy theo hình (H 160):

$$\oint_C = \oint_{ABCD} = \int_{ABC} + \int_{CDA} = \int_{CDA} + \int_{ABC} = \int_{CDABC}$$

Bây giờ ta đưa ra một công thức liên hệ giữa tích phân đường và tích phân kép gọi là công thức Green cho bởi định lý sau đây:



Hình 160

Định lý: ***Nếu các hàm số $P(x, y)$, $Q(x, y)$ cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền compact D giới hạn bởi***

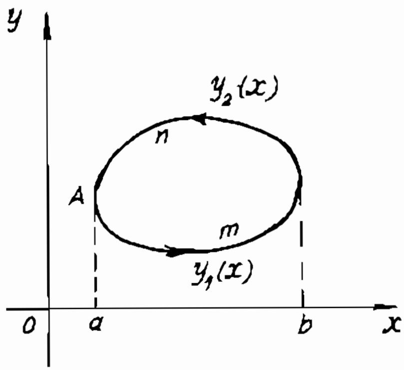
đường khép kín, trơn từng phần C thì:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

trong đó tích phân đường lấy theo chiều dương của C (Chương 7, §1.8).

Chứng minh:

a) Trường hợp D là miền đơn liên và các đường thẳng song song với Ox, Oy không cắt C quá hai điểm, nghĩa là D là miền đơn giản (H.161)



Hình 161

Giả sử đường C giới hạn miền D gồm hai phần AmB và AnB có phương trình $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ với $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y_2(x)$ (h.63). Xét:

$$I_1 = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy$$

$$= \int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b P[x, y_2(x)]dx - \int_a^b P[x, y_1(x)]dx$$

Theo công thức tính tích phân đường loại hai thì:

$$I_1 = \int_{AnB} P(x,y)dx - \int_{AmB} P(x,y)dx$$

$$= -\int_{BnA} P(x,y)dx - \int_{AmB} P(x,y)dx$$

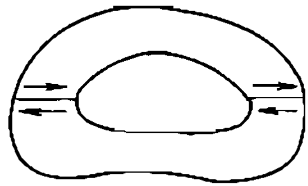
$$= -\oint_C P(x,y)dx \qquad (1)$$

Tương tự ta có:

$$I_2 = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_C Q(x, y)dy \qquad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) ta có công thức Green.

b) Trường hợp D đa liên và có biên giới phức tạp, Ta sẽ chia D thành các miền đơn liên đơn giản, chẳng hạn D giới hạn bởi hai đường C_1, C_2 (H.162). Ta sẽ vẽ thêm hai đường phụ để chia D thành hai miền đơn liên đơn giản, áp dụng trường hợp a), ta phải lấy tích phân hai lần trên những đường phụ ấy, nhưng ngược chiều nhau, nên tích phân trên những đường ấy bằng không.



Hình 162

Kết quả là:

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} = \iint_D \text{, và công thức Green vẫn đúng.}$$

Bây giờ ta xét một áp dụng trực tiếp của công thức Green là tính tích phân đường bằng cách chuyển sang tính tích phân kép.

Thí dụ: Tính $I = \oint_C (1 - x^2)ydx + (1 + y^2)xdy$ với C là đường tròn :

$x^2 + y^2 = R^2$ theo chiều dương.

Theo công thức Green, ở đây $P = (1 - x^2)y$, $Q = (1 + y^2)x$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + y^2 \text{ do đó:}$$

$$I = \oint_C (1 - x^2)ydx + (1 + y^2)xdy = \iint_D (1 + y^2 - 1 + x^2)dxdy$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 r dr = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

Nếu tính trực tiếp tích phân đường này thì phức tạp hơn nhiều.

3.2. Sự độc lập của tích phân đối với đường lấy tích phân

Xét tích phân $\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ với C là đường nối hai điểm A, B

Rõ ràng tích phân này phụ thuộc vào điểm đầu và cuối A, B của đường cong C.

Ở thí dụ 1) § 2 ta thấy I còn phụ thuộc vào đường lấy tích phân, nhưng ở thí dụ 2) thì I lại không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Vậy trong trường hợp tổng quát, với điều kiện nào thì I độc lập đối với đường lấy tích phân và chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường.

Về cơ học, ta biết I là công của lực $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ trên đường C. Nếu I không phụ thuộc đường lấy tích phân tức là công không phụ thuộc vào đường đi.

a) Định lý: ***Nếu các hàm P(x, y), Q(x, y) và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền đơn liên D, thì bốn mệnh đề sau đây là tương đương.***

1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\forall (x, y) \in D$.

2) $\oint_L Pdx + Qdy = 0 \quad \forall L \subset D$ ***(L: khép kín)***

3) $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ ***không phụ thuộc đường nối các điểm .***

$A, B \in D$.

4) Pdx + Qdy là một vi phân toàn phần của một hàm u(x, y) nào đó trong miền D (du = Pdx + Qdy).

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh định lý theo sơ đồ: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1)

1) ⇒ 2). Xét một đường khép kín bất kỳ $L \subset D$, L là biên của miền $D_1 \subset D$. Áp dụng công thức Green cho D_1.

Ta có : $\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$, theo 1) thì :

$$\iint\limits_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

do đó $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường khép kín $L \subset D$

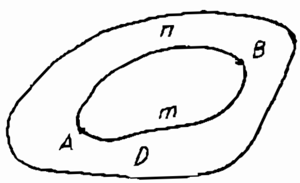
2) ⇒ 3). Xét đường khép kín $L \subset D$, L gồm hai phần AmB và AnB (H 163)

Theo 2):

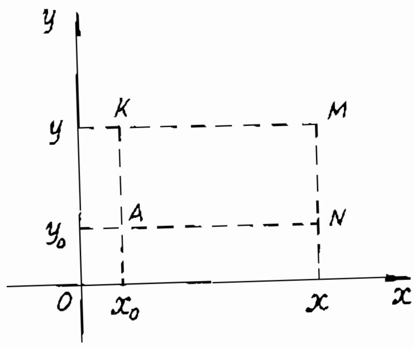
$\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$ hay $\int\limits_{AmB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BnA} Pdx + Qdy = 0$

Do đó: $\int\limits_{AmB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AnB} Pdx + Qdy$

nghĩa là tích phân $\oint\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc đường nối các điểm A, B.



Hình 163



Hình 164

3) $\Rightarrow$ 4). Xét $A(x_0, y_0) = \text{const} \in D$. $M(x, y) \in D$.

Theo 3) tích phân $\oint\limits_{\widehat{AM}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc đường nối A, M, nghĩa là $\oint\limits_{\widehat{AM}} Pdx + Qdy = u(x, y)$ trong D. Ta chọn đường nối A, M là các đoạn AN, NM (H.164).

Ta có: Trên AN: $y = y_0$, $dy = 0$.

Trên NM: $x = \text{const}$, $dx = 0$.

do đó:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C \qquad (1)$$

Nếu chọn đường nối AM là các đoạn AK và KM thì lý luận tương tự ta có:

$$u(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + C \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$$

Vậy

$$du = \frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \qquad (3)$$

Công thức (3) chứng tỏ $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ xác định bởi (1) hoặc (2).

4) $\Rightarrow$ 1), Theo (4) $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Theo giả thiết $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục trong D nên:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \forall (x, y) \in D.$$

Chú ý:

1) Nếu D là miền đa liên thì định lý trên không còn đúng nữa.

Chẳng hạn xét

$$I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

C là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$, giới hạn miền D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq R^2$ trừ gốc O. Ở đây

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2},\quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$(x^2 + y^2 \neq 0)$.

Nhưng tính trực tiếp, ta có phương trình tham số của C là: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{R\cos t.R\cos t - R\sin t(-R\sin t)}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

Kết quả này do hình tròn $x^2 + y^2 \leq R^2$, bỏ đi điểm O là một miền đa liên.

b) Tính tích phân đường bằng nguyên hàm

Theo định lý nếu $du = Pdx + Qdy$ ($(x,y) \in D$ đơn liên) thì ta tìm được hàm $u(x, y)$ xác định bởi các công thức (1) hoặc (2).

Bây giờ xét $I = \oint_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$, $A(x_0, y_0)$, $B(x,y) \in D$

Trong đó C là một đường bất kỳ nối A, B giả sử phương trình của C là

$x = x(t)$, $y = y(t)$; $t_0 \le t \le t_1$; $C \subset D$ và $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$ vì $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$ nên theo cách tính tích phân đường ta có:

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\partial u[x(t), y(t)]}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial u[x(t), y(t)]}{\partial y}y'(t)\right\}dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\{u[(x(t), y(t)]\}dt = u[x(t), y(x)]\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$= u[x(t_1), y(t_1)] - u[x(t_0), y(t_0)] = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0)$$

Do đó người ta cũng gọi u là một nguyên hàm của $Pdx + Qdy$ và cũng ký hiệu:

$$\boldsymbol{I = \oint\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy =}$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \boldsymbol{du = u(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0)} \qquad (1)$$

Thí dụ:

Tính $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy$

Ta có : $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12x^3y^2 - 6y$, vậy biểu thức dưới dấu tích phân là một vi phân toàn phần

Theo công thức (1), ta có một nguyên hàm của biểu thức đó với $x_0 = y_0 = 0$

$$u(x, y) = \int_0^x 5dx + \int_0^y (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy + C = 5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y + C .$$

Theo công thức (1) ta có:

$$I = u(x, y)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = (5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = -1$$

c) Tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân trong không gian R^3

Đối với tích phân đường trong không gian

$$I = \int_{C=\widehat{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \qquad (1)$$

Ta có thể chứng minh một định lý tương tự như định lý đã xét ở a). Đặc biệt ta có thể phát biểu: Nếu các hàm P, Q, R và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền đơn liên V thì điều kiện cần và đủ để tích phân (1) không phụ thuộc đường lấy tích phân $C = \widehat{AB} \subset V$ hay $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y, z)$ trong V là:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad (2)$$

hay viết dưới dạng hình thức:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\vec{k} = 0$$

Trong trường hợp này ta cũng có công thức để tìm u tương tự như công thức (1) ở a)

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz + C \qquad (3)$$

với $A(x_0, y_0, z_0) = \text{const} \in V$, $M(x, y, z) \in V$

Thí dụ: Chứng tỏ rằng biểu thức:

$$z\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x^2+z^2}\right)dx + \frac{z}{x^2y}dy + \left(\frac{1}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\right)dz$$

là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y, z)$ nào đó trong miền bất kỳ V không cắt các mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$ và tìm hàm $u(x, y, z)$, ta có.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{z}{x^2y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{xy^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{x^2y} + \frac{z^2 - x^2}{(x^2+z^2)^2}$$

Vậy biểu thức trên là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y, z) \in V$. Theo công thức (3) ta có với $z_0 = 0$, $x_0, y_0 \neq 0$

$$u(x, y, z) = \int_0^z \left(\frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy} \right) dz + C = arctg\,\frac{z}{x} - \frac{z}{xy} + C$$

§4. ÁP DỤNG CỦA TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

4.1. Moment tĩnh, tọa độ trọng tâm, moment quán tính của đường cong

Trong bài tích phân xác định, ta đã tính các moment tĩnh M_x, M_y, các moment quán tính I_x, I_y, I_0 đối với các trục Ox, Oy và điểm gốc, tọa độ trọng tâm x_0, y_0 của đường cong đồng chất (có mật độ khối lượng (dài) $\gamma = 1$). Trong trường hợp tổng quát, đường cong C không đồng chất có mật độ khối lượng (dài) $\gamma = \gamma(x, y)$ thì áp dụng tích phân đường loại một và làm tương tự ta có:

$$M_x = \int_C y\gamma(x,y)ds; \quad M_y = \int_C x\gamma(x,y)ds$$

$$x_0 = \frac{\int_C x\gamma(x,y)ds}{\int_C \gamma(x,y)ds}; \quad y_0 = \frac{\int_C y\gamma(x,y)ds}{\int_C \gamma(x,y)ds}$$

$$I_x = \int_C y^2\gamma(x,y)ds; \quad I_y = \int_C x^2\gamma(x,y)ds; \quad I_0 = \int_C (x^2+y^2)\gamma(x,y)ds$$

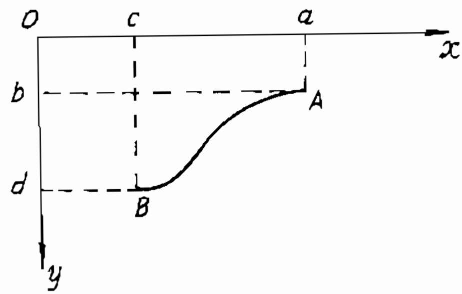
4.2. Công của một lực

Ta biết về cơ học tích phân đường $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là công T của lực:

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} \text{ trên đường cong } C: \; T = \int_C Pdx + Qdy.$$

Nếu $\int\limits_C$ không phụ thuộc đường C nối hai điểm A, B $\left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ thì công không phụ thuộc đường đi.

Thí dụ: Tìm công của trọng lực khi đi từ điểm $A(a, b)$ đến điểm $B(c, d)$. Gọi m là khối lượng của động tử, thì ta biết trọng lực $\bar{F}$ có độ lớn là mg và hướng xuống dưới. Do đó nếu lấy hệ tọa độ như hình vẽ thì $\vec{F} = mg\,\vec{j}$ *(hình 165)*.



Hình 165

Ở đây $P = 0$, $Q = mg$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ nên công T không phụ thuộc đường đi và:

$$T = \int\limits_{(A)}^{(B)} mgdy = mgy\Big|_{(a,b)}^{(c,d)} = mg(d - b)$$

4.3. Tính diện tích

Ta đã áp dụng tích phân đơn, kép để tính diện tích. Từ công thức Green:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_C Pdx + Qdy$$

Lấy $P = -y$, $Q = x$ thì $\iint\limits_D 2dS = \oint\limits_C xdy - ydx$ nhưng $\iint\limits_D dS = S$ là diện tích miền D. Do đó ta có công thức tính diện tích $S = \frac{1}{2}\oint\limits_C xdy - ydx$.

Tương tự lấy $Q = x$, $P = 0$ thì $S = \oint\limits_C xdy$

$Q = 0$, $P = -y$ thì $S = -\oint\limits_C ydx$

Thí dụ:

Tính diện tích của ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Áp dụng công thức đầu ta có:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t.b\cos t + b\sin t.a\sin t)dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt = \pi ab$$

4.4. Tìm hàm u biết du = Pdx + Qdy

Nếu $Pdx + Qdy$ là một vi phân toàn phần của u thì $du = Pdx + Qdy$, và:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C$$

hay

$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C$, $(x_0, y_0) \in D$: miền đơn liên liên tục của P, Q và $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$

Thí dụ:

Tìm u, biết $du = (2x - y + 1)dx + (2y - x + 1)dy$

Ở đây $P = 2x - y + 1$, $Q = 2y - x + 1$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$

Vậy:

$$u = \int_0^x (2x - 0 + 1)dx + \int_0^y (2y - x + 1)dy + C \quad (\text{lấy } x_0 = y_0 = 0)$$

hay $\qquad u = x^2 + x + y^2 - xy + y + C.$

B. TÍCH PHÂN MẶT

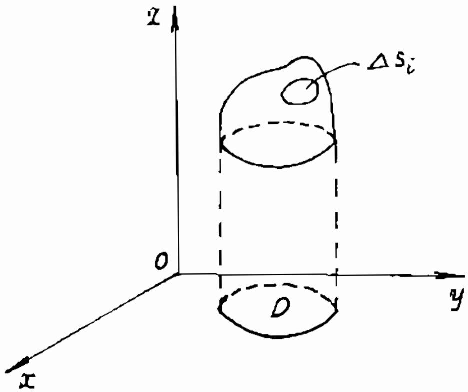
Ta đã mở rộng định nghĩa tích phân kép là tích phân của hàm hai biến $f(x, y)$ lấy trong một miền D nào đó để định nghĩa tích phân bội ba là tích phân của hàm ba biến $f(x, y, z)$ lấy trong một miền V nào đó, bây giờ ta mở rộng định nghĩa tích phân kép theo một hướng khác, định nghĩa tích phân của hàm ba biến $f(x, y, z)$ lấy trên một mặt S nào đó gọi là tích phân mặt.

§1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI MỘT

1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(M)$ với $M(x, y, z)$ xác định trên một mặt S nào đó (H.166).

- Chia mặt S ra làm n phần bất kỳ không dẫm lên nhau gọi tên và diện tích của chúng lần lượt là: ΔS_1, ΔS_2,..., ΔS_i,...,ΔS_n



Hình 166

- Lấy một điểm tuỳ ý

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \subset \Delta S_i \ (i = 1, 2, ..., n) \text{ và lập tổng: } I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

- Đặt $d = \max d_i$, d_i là đường kính của ΔS_i ($i = 1, 2, ..., n$). Nếu $I_n \to I$ xác định khi $n \to \infty$ sao cho $d \to 0$ thì I gọi là tích phân mặt loại một của hàm số $f(M)$ lấy trên mặt S. Ký hiệu:

$$I = \iint_S f(M)dS \quad hay \quad I = \iint_S f(x, y, z)dS$$

Nếu mặt S kín thì ký hiệu $I = \oiint\limits_S f(M)dS$. ***Đặc biệt*** $f(M) = 1$ ***thì*** $\iint\limits_S dS = S$ ***là diện tích mặt S. Các tính chất của tích phân mặt loại một đều giống các tính chất của tích phân đường loại một.***

1.2. Ý nghĩa cơ học

Coi $f(M)$ là mật độ khối lượng (mặt) của mặt S ($f(M) > 0$) và định nghĩa khối lượng m của mặt S là:

$$m = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$$

thì theo định nghĩa tích phân mặt loại một, ta có: $m = \iint\limits_S f(M)dS$.

1.3. Cách tính

Giả sử mặt S có phương trình $z = z(x, y)$, hình chiếu của S trên mặt phẳng xOy là miền D. Dựa vào định nghĩa tích phân mặt loại một và tích phân kép rồi lý luận tương tự như khi tính tích phân đường loại một, bằng cách chuyển về tính tích phân kép, ta có:

$$I = \iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$$

Từ công thức (1) lý luận tương tự như đối với tích phân đường loại một, ta suy ra:

Định lý 4. (Tồn tại của tích phân mặt loại một)

Nếu hàm f(x, y, z) liên tục trên mặt trơn hay trơn từng phần S (Chương 8, phần C : Chú ý) thì tích phân mặt loại một của hàm đó trên S là tồn tại.

Thí dụ: Tính $I = \iint\limits_S \sqrt{(x^2 + y^2)}dS$.

S là mặt bán cầu $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Ta có:

$$I = \iint_S \sqrt{(x^2 + y^2)}dS = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$$

Ở đây D là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$ còn $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ do đó:

$$I = R\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ độc cực ta có:

$$I = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi R\left(\int_0^R \frac{R^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} - \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\,dr\right)$$

$$= 2\pi R\left[R^2 \arcsin\frac{r}{R}\right]\Bigg|_0^R - \left(\frac{r}{2}\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{r}{R}\right)\Bigg|_0^R =$$

$$= 2\pi R\left(R^2\frac{\pi}{2} - \frac{R^2}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2 R^3}{2}$$

1.4. Áp dụng: Moment tĩnh tọa độ trọng tâm, moment quán tính của một mặt.

Tương tự như đã tính đối với các tích phân trước ta có công thức tính moment tĩnh M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} của mặt S, đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx:

$$M_{xy} = \iint_S \gamma(x, y, z)zdS; \quad M_{yz} = \iint_S \gamma(x, y, z)xdS; \quad M_{zx} = \iint_S \gamma(x, y, z)ydS$$

trong đó $\gamma(x, y, z)$ là mật độ khối lượng (mặt) của S.

Toạ độ trọng tâm x_0, y_0, z_0 của mặt S được xác định bởi các công thức:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_0 = \frac{M_{zx}}{m}; \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$$

trong đó $m = \iint\limits_S \gamma(x, y, z) dS$ là khối lượng của mặt S.

Các moment quán tính I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}, I_0 của mặt S đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx và gốc O được xác định bởi các công thức:

$$I_{xy} = \iint\limits_S \gamma(x, y, z) z^2 dS; \quad I_{yz} = \iint\limits_S \gamma(x, y, z) x^2 dS$$

$$I_{zx} = \iint\limits_S \gamma(x, y, z) y^2 dS; \quad I_0 = \iint\limits_S \gamma(x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2) y dS$$

Thí dụ: Tìm các moment tĩnh M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} và toạ độ trọng tâm của mặt bán cầu trên:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ với mật độ } \gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Từ $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$ suy ra mật độ khối lượng phân bố đối xứng với trục Oz, do đó trọng tâm của bán cầu phải ở trên trục Oz; nghĩa là $x_0 = y_0 = 0$. Theo công thức tọa độ trọng tâm suy ra $M_{yz} = M_{zx} = 0$. Vậy ta chỉ cần tính M_{xy}, và z_0....

Ta có:

$$M_{xy} = \iint\limits_S z\sqrt{x^2 + y^2} dS = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\sqrt{x^2 + y^2} \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3}\pi R^4$$

$$m = \iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2} dS = \frac{\pi^2 R^3}{2} \text{ (xem thí dụ ở 1.3)}$$

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{2\pi R^4}{3} \cdot \frac{2}{\pi^2 R^3} = \frac{4R}{3\pi}$$

§2. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI HAI

2.1. Mặt định hướng

Xét mặt trơn S giới hạn bởi một đường trơn từng phần C (H.167).

Lấy $M_0 \in S$ và dựng pháp tuyến $\vec{N}$ của S tại M_0, nếu xuất phát từ M_0 đi theo một đường khép kín bất kỳ L trên S không cắt biên giới C của S, trở lại vị trí xuất phát M_0 mà hướng của pháp tuyến tại M_0 không thay đổi thì mặt S gọi là mặt hai phía, ngược lại nếu hướng của pháp tuyến đổi ngược lại thì S gọi là mặt một phía. Ta chỉ xét mặt hai phía.

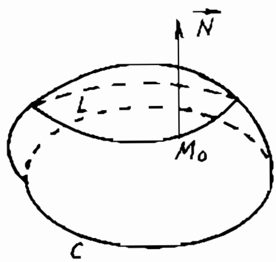
Chẳng hạn:

- Mặt trơn *S* bất kỳ có phương trình $z = f(x, y)$ là một mặt hai phía. Phía mà tại mọi điểm của nó, hướng của pháp tuyến làm với *Oz* một góc nhọn là phía trên của *S*, phía kia thì ngược lại gọi là phía dưới của *S*.

- Một mặt kín bất kỳ không tự cắt *S* là một mặt hai phía (mặt cầu, mặt ellipsoide...) phía có pháp tuyến hướng vào bên trong của miền giới hạn bởi mặt *S* gọi là phía trong của *S*, ngược lại, phía kia gọi là phía ngoài của *S*.

Một mặt hai phía cũng gọi là mặt định hướng được còn mặt một phía được gọi là mặt không định hướng được.

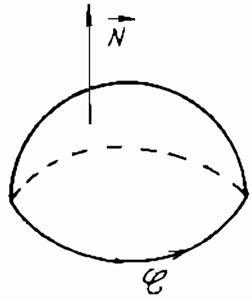
Trong thực tế cũng có những mặt một phía chẳng hạn băng Môbius (H.168).



Hình 167

Hình 168

Một mặt S gọi là định hướng được từng phần (mảnh) nếu nó là liên tục và được chia thành một số hữu hạn phần định hướng được bởi các đường trơn từng phần. Cho một mặt định hướng S giới hạn bởi đường cong C. Ta gọi hướng dương trên C ứng với một phía đã chọn của mặt S là hướng từ chân đến đầu của một quan sát viên nằm theo C nhìn thấy phía đã chọn của mặt S ở bên trái (H. 169).



Hình 169

2.2. Định nghĩa tích phân mặt loại hai

Cho hàm vecteur $\vec{F}$, đối vô hướng M(x, y, z):

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$$

xác định trên mặt hai phía S. Chọn một phía của S ứng với pháp tuyến

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N}(M) = \cos\alpha(M)\vec{i} + \cos\beta(M)\vec{j} + \cos\gamma(M)\vec{k}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin chỉ hướng của $\overrightarrow{N}$ tại $M \subset S$). Ta gọi tích phân mặt loại một của hàm: $\vec{F}\vec{N} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$ trên mặt S:

$$I = \iint_S \vec{F}\vec{N}dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

là tích phân mặt loại hai của hàm $\vec{F}(M)$ hay của các hàm, P, Q, R lấy trên phía đã chọn của mặt S. Theo định nghĩa:

$$I = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(M_i)\cos\alpha(M_i) + Q(M_i)\cos\beta(M_i) + R(M_i)\cos\gamma(M_i)]\Delta S_i$$

Coi ΔS_i như phẳng và gọi hình chiếu của nó trên mặt phẳng Oyz, Ozx, Oxy lần lượt là:

$$\Delta S_i^{(1)},\quad \Delta S_i^{(2)},\quad \Delta S_i^{(3)}\quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Theo định nghĩa hình chiếu ta có:

$$\cos\alpha(M_i)\Delta S_i = \Delta S_i^{(1)},\quad \cos\beta(M_i)\Delta S_i = \Delta S_i^{(2)},\quad \cos\gamma(M_i)\Delta S_i = \Delta S_i^{(3)}$$

Khi đó:

$$I = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(M_i)\Delta S_i^{(1)} + Q(M_i)\Delta S_i^{(2)} + R(M_i)\Delta S_i^{(3)}]$$

Do đó ta cũng ký hiệu tích phân mặt loại hai là:

$$I = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS \quad (1)$$

Nếu mặt S là kín ta cũng ký hiệu: $I = \oiint_S$.

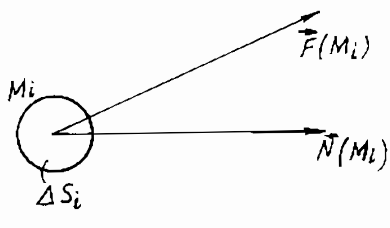
Các tính chất của tích phân mặt loại hai đều giống các tính chất của tích phân đường loại hai (kể cả tính chất đổi hướng mặt lấy tích phân).

2.3. Ý nghĩa cơ học

Xét mặt S đặt trong một chất lỏng nào đó

$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$ là vectơ tốc độ tại điểm M của chất lỏng đó. Trong phần ΔS_i (H.170) của S coi $\vec{F} = \vec{F}(M_i)$ (M_i là một điểm tuỳ ý trong phần đó) thì lưu lượng gần đúng của chất lỏng đó (trong một đơn vị thời gian) qua ΔS_i là:

$$\vec{F}(M_i)\vec{N}(M_i)\Delta S_i$$



Hình 170

trong đó $\vec{N}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là vecteur pháp tuyến của phía đã chọn của S và

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\vec{N}(M_i)\Delta S_i$$

là lưu lượng gần đúng qua mặt S. Người ta định nghĩa lưu lượng Φ của chất lỏng qua S là

$$\Phi = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\vec{N}(M_i)\Delta S_i$$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} [P(M_i)\cos\alpha(M_i) + Q(M_i)\cos\beta(M_i) + R(M_i)\cos\gamma(M_i)]\Delta S_i \ .$$

Theo định nghĩa tích phân mặt loại hai:

$$\Phi = \iint_S [P(M)\cos\alpha + Q(M)\cos\beta + R(M)\cos\gamma]dS$$

$$= \iint_S P(M)dydz + Q(M)dzdx + R(M)dxdy$$

2.4. Cách tính

Giả sử điều kiện tồn tại của tích phân (1) thoả mãn. Ta chỉ tính

$$I_1 = \iint_S R(x, y, z)dxdy \qquad \text{(a)}$$

còn các tích phân $\iint_S P(M)dydz$, $\iint_S Q(M)dzdx$ sẽ được tính tương tự. Giả sử mặt S cho bởi phương trình $z = z(x, y)$ và hình chiếu của nó trên mặt phẳng xOy là miền D. Dựa vào định nghĩa tích phân mặt loại hai và tích phân kép ta đi đến:

- Nếu tích phân lấy theo phía trên của mặt S thì ta có công thức tính (a) bằng cách chuyển về tính tích phân kép:

$$I_1 = \iint_S R(x, y, z)dxdy = \iint_D R[x, y, z(x, y)]dxdy \qquad (1)$$

- Nếu tích phân lấy theo phía dưới của S thì.

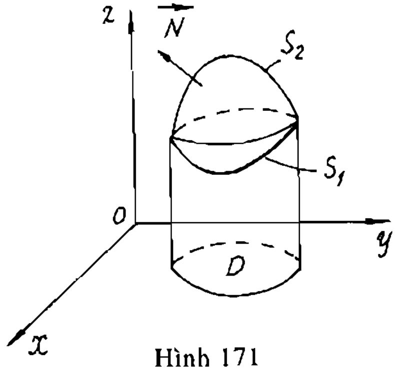
$$I_1 = \iint_S R(x, y, z)dxdy = -\iint_D R[x, y, z(x, y)]dxdy \qquad (2)$$

Thực vậy, xét tích phân lấy theo phía trên của S. Theo định nghĩa:

$$I_1 = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i) \cos\gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$

$$= \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} R[x_i, y_i, z_{(x_i, y_i)}] \Delta S_i^{(3)}, \qquad \cos\gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i = + \Delta S_i^{(3)}$$

vì pháp tuyến $\vec{N}$ của phía trên của S làm với Oz góc nhọn γ. Đây chính là tổng tích phân kép của hàm $R[x, y, z(x, y)]$ trên miền D, theo định nghĩa tích phân kép ta có công thức (1). Rõ ràng, nếu lấy tích phân theo phía dưới của S ta có công thức (2) vì khi đó γ là góc tù ($\cos\gamma < 0$).



Hình 171

Bây giờ xét trường hợp mặt S kín.

Giả sử hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxy là miền D và đường trên S có hình chiếu là biên của D chia S ra làm hai phần, phần dưới giả sử có phương trình $z = z_1(x, y)$ và phần trên giả sử có phương trình $z = z_2(x, y)$. (H. 171). Nếu lấy theo phía ngoài của S thì theo trên ta có:

$$I = \iint_S R(x, y, z)dxdy = \iint_D \{R[x, y, z_2(x, y)]dxdy - R[x, y, z_1(x, y)]\}dxdy$$

Nếu tích phân lấy theo phía trong của S thì ngược lại. Tương tự như các tích phân đường và mặt loại một, từ các công thức (1), (2) hoặc (3) suy ra:

Định lý: (Tồn tại của tích phân mặt loại hai)

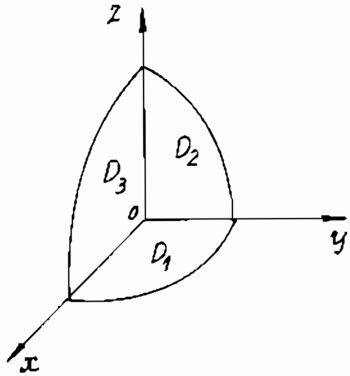
Nếu các hàm P, Q, R liên tục trên một mặt định hướng từng phần S thì tích phân mặt loại hai của các hàm đó lấy theo một phía của S là tồn tại.

Thí dụ:

1) Tính $$I = \iint\limits_S xdydz + dzdx + xz^2dxdy$$

S là phía ngoài của $\frac{1}{8}$ thứ nhất của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Đối với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx thì S có phương trình: (H.172)

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$
$$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2},$$
$$y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$$



Hình 172

Do đó, gọi D_1, D_2, D_3 là hình chiếu của S trên các mặt phẳng tọa độ đó thì áp dụng công thức (1) và chuyển sang toa độ độc cực, ta có:

$$I_1 = \iint\limits_S xz^2dxdy = \iint\limits_{D_1} x(1 - x^2 - y^2)dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^1 r^2(1 - r^2)dr = \frac{2}{15}$$

$$I_2 = \iint\limits_S xdydz = \iint\limits_{D_2} \sqrt{1 - y^2 - z^2}dydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}dr = \frac{\pi}{6}$$

$$I_3 = \iint\limits_S dxdz = \iint\limits_{D_3} dxdz = \frac{\pi}{4}$$

Do đó: $I = I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{2}{15} + \dfrac{5\pi}{12}$.

2) Tính $I = \iint\limits_S zdxdy$, S là phía ngoài của mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Ta có: $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, dấu + và - ứng với nửa trên và nửa dưới của mặt cầu. Do đó theo công (3) ta có:

$$I = \iint_S z dxdy = \iint_{D_9} [\sqrt{1 - x^2 - y^2}) - (-\sqrt{1 - x^2 - y^2})] dxdy$$

$$= 2\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr = \frac{4}{3}\pi \; . \; (D: x^2 + y^2 \leq 1)$$

3) Tính $I = \iint_S x^3 dydz$

S là phía trên của nửa trên của mặt ellipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Phương trình của nửa trên của ellipsoide đối với mặt phẳng Oyz là:

$$x = \pm a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$$

và hình chiếu D_1 của nó trên mặt phẳng Oyz là $\frac{1}{2}$ của hình ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, z ≥ 0. Theo công thức (3) ta có:

$$I = 2a^3 \iint_{D_1} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dydz$$

Chuyển sang tọa độ cực suy rộng $y = br\cos\varphi$, $z = cr\sin\varphi$:

$$I = 2a^3 \int_0^{\pi} \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} bcrdr = \frac{2}{5}\pi a^3 bc$$

§3. CÔNG THỨC STOKES VÀ OSTROGRADSKI

3.1. Công thức Stokes

Ta đã có công thức Green liên hệ giữa tích phân đường và tích phân kép. Bây giờ ta sẽ xét một công thức khác liên hệ giữa tích phân đường và tích phân mặt gọi là công thức Stokes.

Định lý: ***Nếu các hàm P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên một mặt định hướng từng phần S giới hạn bởi đường trơn từng phần C thì ta có công thức:***

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma \right] dS$$

$$= \oint_C (P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma')\,ds$$

trong đó tích phân mặt lấy theo phía đã chọn với pháp tuyến $\vec{N}$ (cosα, cosβ, cosγ) và tích phân đường lấy theo chiều dương với tiếp tuyến $\vec{\tau}$ (cosα', cosβ', cosγ') ứng với phía đã chọn của S.

Công thức Stokes có thể viết dưới dạng khác:

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$

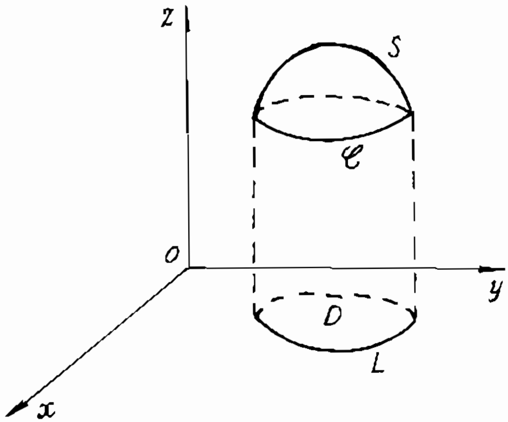
Chú ý rằng trong mặt phẳng, công thức Stokes trở thành công thức Green đã biết.

Để dễ nhớ công thức Stokes, ta dùng ký hiệu hình thức:

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_C (P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma')\,dS$$

hay

$$\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$



Hình 173

***Chứng minh:** Ta chỉ xét mặt S có phương trình $z = z(x, y)$, hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxy là miền D, và đường C có hình chiếu là L, biên của D (H.173).

Xét $I = \oint_C Pdx$ vì $z = z(x, y)$ nên $\oint_C P(x, y, z)dx = \oint_L P[x, y, z(x, y)]dx$.

Áp dụng công thức Green với $P = P[x, y, z(x, y)]$, $Q = 0$ ta có:

$$\oint_L P[x, y, z(x, y)]dx = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z'_y\right)dxdy$$

$$= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial z} z'_y dxdy = -\iint_S \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma dS - \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} z'_y \cos\gamma dS$$

Ta biết pháp tuyến của mặt S có thành phần là z'_x, z'_y, -1 nên

$$\cos\alpha = \frac{z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}};\quad \cos\beta = \frac{z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}};\quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$$

suy ra $z'_y \cos\gamma = -\cos\beta$. Do đó:

$$\oint_C Pdx = -\iint_S \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma dS + \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta dS$$

Tương tự $$\oint_C Qdy = -\iint_S \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha dS + \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma dS$$

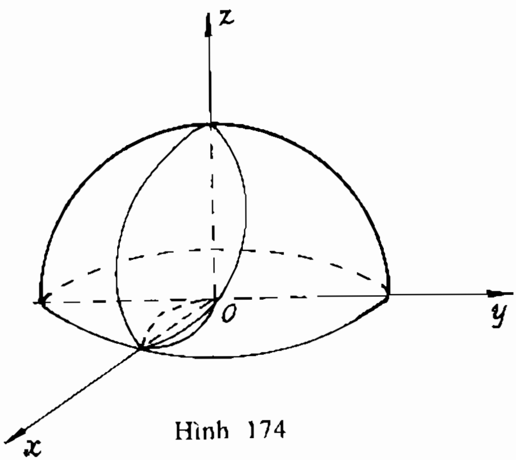
$$\oint_C Rdz = -\iint_S \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta dS + \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha dS$$

Cộng các công thức này vế với vế ta được công thức Stokes.

Thí dụ: Áp dụng công thức Stokes tính:

1) $$I = \oint_C ydx + zdy + xdz$$

với C là đường tròn: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + z = a$ (H.174) chạy ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của Ox. Để tính I ta dùng công thức Stokes chuyển tích phân trên đường C về tích phân trên mặt S là mặt tròn có biên giới là C.



Hình 174

Ở đây $P = y$, $Q = z$, $R = x$.

Do đó:

$$I = \oint_C ydx + zdy + xdz = \quad = -\iint_S dydz + dzdx + dxdy$$

$$= -\left(\iint_{D_1} dydz + \iint_{D_2} dzdx + \iint_{D_3} dxdy\right)$$

D_1, D_2, D_3 là hình chiếu của mặt tròn trên các mặt phẳng toạ độ Oyz, Ozx, Oxy ta có $D_2 = 0$; $D_1 = D_3$. Vì mặt tròn S có bán kính là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và hợp với mặt phẳng Oxy một góc $\dfrac{\pi}{4}$, nên theo lý thuyết hình chiếu diện tích của D_3 là:

$$\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $\qquad I = -\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$

2) $\qquad I = \oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$

trong đó C là đường $x^2 + y^2 = a^2$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1$ $(a > 0,\ h > 0)$ chạy ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox (H.175). Theo công thức Stokes ta có:

$$I = -2\iint_S dydz + dzdx + dxdy = -2\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)dS$$

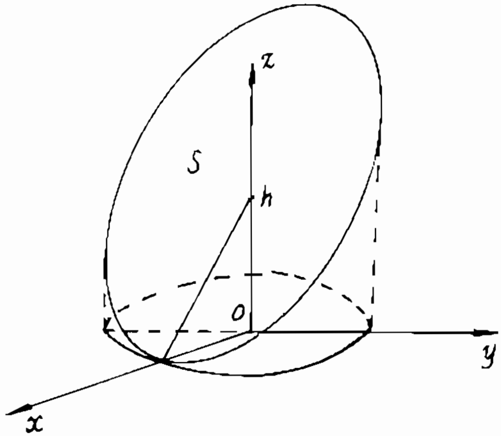
S là hình phẳng biên giới là đường C; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin chỉ hướng của pháp tuyến $\overrightarrow{N}$ của phía trên của S (dấu +).

Chuyển về tích phân kép, chú ý

$$dS\cos\alpha = -z'_x dxdy = \frac{h}{a}dxdy,\ dS\cos\beta = -z'_y dxdy = 0;$$

$dS\cos\gamma = dxdy$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxy là hình tròn D: $x^2 + y^2 \le a^2$, ta có:

$$I = -2\iint_D \left(1+\frac{h}{a}\right)dxdy = -2\left(1+\frac{h}{a}\right)\pi a^2 = -2\pi a(a+h)$$



Hình 175

Chú ý: Từ công thức Stokes, có thể chứng minh điều kiện cần và đủ để tích phân đường trong không gian $\int_C Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc đường lấy tích phân, hay

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad \text{hoặc} \quad Pdx + Qdy + Rdz$$

là một vi phân toàn phần của một hàm số u nào đó là P, Q, R có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong một miền đơn liên chứa C và:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

và ta cũng có công thức tìm hàm $u(x, y, z)$ tương tự như trường hợp hàm hai biến.

Thí dụ: Chứng minh:

$$I = \oint_C yzdx + xzdy + xydz = 0 \text{ (với mọi đường khép kín } C\text{)}.$$

Ở đây $P = yz$, $Q = xz$, $R = xy$, theo công thức Stokes:

$$I = \oint_C yzdx + xzdy + xydz = \iint_S 0\, dS = 0$$

3.2. Công thức Ostrogradski (liên hệ giữa tích phân mặt và tích phân bội ba)

Định lý: ***Nếu các hàm P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z) cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền compact V giới hạn bởi mặt kín trơn từng phần S thì ta có công thức:***

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

trong đó tích phân mặt lấy theo phía ngoài của S.

Công thức này gọi là công thức Ostrogradski.

Chứng minh: Ta chỉ chứng minh trường hợp mà các đường thẳng song song với Oz, không cắt S quá hai điểm, trường hợp tổng quát có thể đưa về trường hợp này.

Giả sử mặt S gồm hai phần, phần dưới có phương trình $z = z_1(x, y)$ và phần trên có phương trình $z = z_2(x, y)$ cũng có hình chiếu trên mặt phẳng Oxy là miền D.

Xét

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_D \{R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)]\} dxdy.$$

Theo công thức tính tích phân mặt trong trường hợp mặt kín thì:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \oiint_S R(x, y, z) dxdy$$ (tích phân lấy theo phía ngoài của S).

Tương tự:

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \oiint_S Q(x, y, z) dzdx \,;\; \iiint_V \frac{\partial R}{\partial x} dV = \oiint_S R(x, y, z) dydz$$

Cộng vế với vế các công thức này ta có công thức Ostrogradski

Thí dụ: áp dụng công thức Ostrogradski tính

$I = \oiint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, S là phía ngoài của mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Ta sẽ tính I bằng cách áp dụng công thức Ostrogradski, chuyển về tính tích phân bội ba. Ở đây:

$$P = x^3,\ Q = y^3,\ R = z^3,\ \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2,\ \ \frac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2,\ \ \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2$$

do đó:

$$I = \oiint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = 3\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dV =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{12\pi}{5}R^5$$

Chú ý: 1) Từ công thức Ostrogradski có thể chứng minh điều kiện cần và đủ để tích phân mặt:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy\ ,$$

không phụ thuộc mặt lấy tích phân (chỉ phụ thuộc đường giới hạn mặt) hay tích phân lấy theo mặt kín bằng không là:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

2) Trong công thức Ostrogradski, đặt $P = x$, $Q = y$, $R = z$ ta có công thức tính thể tích của miền V bằng tích phân theo phía ngoài của mặt giới hạn miền V:

$$V = \frac{1}{3}\oiint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

Thí dụ: Tính thể tích của hình ellipsoide : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Theo công thức trên: $V = \frac{1}{3}\oiint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ (S là mặt ellipsoide, phía ngoài)

Tính toán ta có: $V = \frac{4}{3}\pi abc$

§4. CÁC YẾU TỐ CỦA GIẢI TÍCH VECTEUR
(Lý thuyết về trường)

4.1. Trường vô hướng

a) Định nghĩa: Trong vật lý ta biết rằng:

- Khi xét nhiệt độ T phân bố trong một phần không gian V nào đó ta thấy tại mỗi điểm $M(x, y, z)$ của V có những nhiệt độ khác nhau nghĩa là trong V nhiệt độ T là hàm số của điểm M.

$T = T(M) = T(x, y, z)$. Người ta nói rằng trong phần không gian V có xác định một trường nhiệt độ, đặc trưng bởi hàm nhiệt độ $T = T(x, y, z)$.

Khi đặt một điện tích q tại gốc toạ độ O thì các điểm $M(x, y, z)$ chung quanh O có những điện thế u khác nhau xác định bởi công thức:

$$u = \frac{q}{r} \text{ trong đó } r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Như vậy u là hàm số của điểm $M(x, y, z)$

$$u = u(M) = u(x, y, z) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Ta nói phần không gian chung quanh O có xác định một trường điện thế đặc trưng bởi hàm thế: $u = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Vì nhiệt độ hay điện thế chỉ biểu diễn thuần tuý bằng một số nên chúng là những đại lượng vô hướng và trường nhiệt độ hay điện thế gọi là những trường vô hướng. Một cách tổng quát ta có định nghĩa:

Trường vô hướng là phần không gian mà tại mỗi điểm M(x, y, z) của nó có xác định một đại lượng vô hướng u, u = u(M) = u(x, y, z), gọi là hàm vô hướng của nó. Do đó để nghiên cứu các đặc trưng của trường, ta chỉ nghiên cứu hàm u.

Nếu hàm vô hướng u không phụ thuộc z: $u = u(x, y)$ thì trường xác định bởi u gọi là trường phẳng.

Nếu u không phụ thuộc thời gian thì trường gọi là trường dừng, trái lại thì gọi là trường không dừng. Ta chỉ nghiên cứu trường dừng (thực tế ít khi có trường dừng, nhưng chỉ xét một khoảng thời gian khá nhỏ và coi trường là trường dừng).

Quỹ tích các điểm M(x, y, z) của trường mà u lấy cùng một trị số gọi là mặt đồng mức hay mặt đẳng trị của trường.

Như vậy phương trình của mặt đồng mức là $u = u(x, y, z) = C$ vì C có thể lấy nhiều trị số khác nhau nên trong trường có nhiều mặt đồng mức khác nhau, không giao nhau.

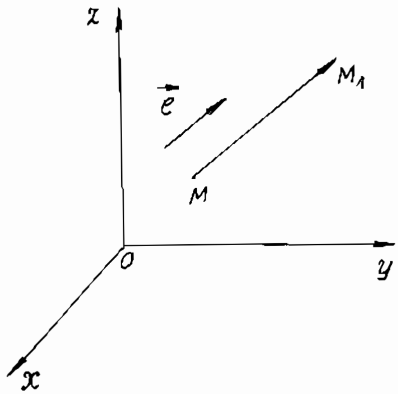
Thí dụ: Đối với trường điện thế xét ở trên thì mặt đồng mức có phương trình:

$$u = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = C \quad \text{hay} \quad x^2+y^2+z^2 = \frac{q^2}{C^2}$$

Đó là những mặt cầu đồng tâm O, bán kính $\frac{q}{C}$. Trong trường hợp trường phẳng $u = u(x, y)$ thì quỹ tích các điểm $u(x, y) = C$ gọi là đường đồng mức. Bây giờ ta chuyển sang xét các đặc trưng quan trọng của trường là: tốc độ biến thiên của trường theo một hướng bất kỳ và hướng mà tốc độ biến thiên là lớn nhất.

b) Đạo hàm theo hướng: Ta đã xét các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ của hàm số $u = u(x, y, z)$, về cơ học các đạo hàm này biểu thị tốc độ biến thiên của hàm số đối với x, y, z hay cũng thế theo các hướng của các trục Ox, Oy, Oz.

Để xét tốc độ biến thiên của trường nghĩa là của hàm $u(x, y, z)$ theo một hướng bất kỳ ta đi đến khái niệm đạo hàm theo một hướng bất kỳ.



Hình 176

Định nghĩa:

Cho một hướng đặc trưng bằng vecteur đơn vị $\vec{e}$ $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ và hàm $u = u(M) = u(x, y, z)$.

Xét các điểm $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ sao cho $\overrightarrow{MM_1}$ song song với $\vec{e}$ (H 176). Đặt $|\overrightarrow{MM_1}| = \rho$, $x_1 - x = \Delta x$, $y_1 - y = \Delta y$, $z_1 - z = \Delta z$ thì $\Delta x = \rho\cos\alpha$, $\Delta y = \rho\cos\beta$, $\Delta z = \rho\cos\gamma$ và $x_1 = x + \rho\cos\alpha$, $y_1 = y + \cos\rho\beta$, $z_1 = z + \rho\cos\gamma$. ***Nếu:***

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{u(M_1) - u(M)}{\rho} \lim_{\rho\to 0}\frac{u(x+\rho\cos\alpha, y+\rho\cos\beta, z+\rho\cos\gamma) - u(x, y, z)}{\rho}$$

tồn tại, thì giới hạn này gọi là đạo hàm của hàm số u tại điểm M theo
hướng $\vec{e}$.

Ký hiệu: $\frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho}$

Đặc biệt $\vec{e} \,//\, Ox$ thì $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$, $\rho = \Delta x$ và

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Tương tự $\vec{e} \parallel Oy$ thì $\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial y}$, $\vec{e} \parallel Oz$ thì $\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial z}$, nghĩa là các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ là các đạo hàm theo các hướng đặc biệt song song với Ox, Oy, Oz, vì tại một điểm có rất nhiều hướng đi, nên tại một điểm cũng có rất nhiều đạo hàm theo hướng. Để tính các đạo hàm theo hướng ta có định lý:

Định lý: ***Nếu hàm số u = u(x, y, z) khả vi tại M(x, y, z) thì đạo hàm theo hướng $\vec{e}$ (cosα, cosβ, cosγ) tại M(x, y, z) tồn tại và được tính theo công thức***

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Chứng minh: Theo giả thiết u khả vi tại M nên ta có:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + O(\rho)$$

$O(\rho)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, mặt khác $\Delta x = \rho\cos\alpha$; $\Delta y = \rho\cos\beta$; $\Delta z = \rho\cos\gamma$ do đó:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\rho\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\rho\cos\gamma + O(\rho)$$

và

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \frac{O(\rho)}{\rho}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

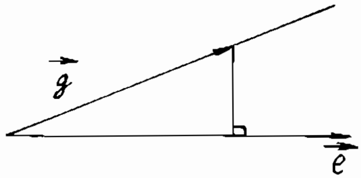
vì $\lim_{\rho\to 0}\frac{O(\rho)}{\rho} = 0$ do $O(\rho)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Hệ quả:

1) Nếu cho $\vec{e}'(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ ngược với hướng của $\vec{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ thì $\frac{\partial u}{\partial e'} = -\frac{\partial u}{\partial e}$ vì lúc đó $\alpha' = \pi + \alpha$, $\beta' = \pi + \beta$, $\gamma = \pi + \gamma$ nên các cos đổi dấu.

2) Nếu trường phẳng $u = (x, y)$ thì $\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha$, vì lúc đó $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Thí dụ: Tìm đạo hàm của hàm số $u = xyz$ tại điểm $M(5, 1, 2)$ theo hướng $\vec{e}$ nối từ M đến $M_1(7, -1, 3)$.



Hình 177

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = zx,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

Do đó tại $M(5, 1, 2)$

thì

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 10,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = 5$$

mặt khác $\overrightarrow{MM_1} = \{7 - 5, -1 -1, 3 \quad 2\} = \{2, -2, 1\}$

nên $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$; $\cos\gamma = 1$. Vậy theo công thức tính đạo hàm theo hướng ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{2}{3} + 10\frac{-2}{3} + 5\frac{1}{3} = -\frac{11}{3}$$

dấu (-) chứng tỏ hàm số u là giảm theo hướng $\vec{e}$.

c) Gradient: Bây giờ ta xét vấn đề: Tốc độ biến thiên của trường theo hướng nào là lớn nhất ? Nghĩa là đạo hàm của hàm $u(x, y, z)$ theo hướng nào là lớn nhất ?

Xét

$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$. Ta biết $\vec{e}$ (cosα, cosβ, cosγ) nếu dựa vào vecteur $\vec{g}$

$$\vec{g} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

thì $\quad \frac{\partial u}{\partial e} = \vec{g}.\vec{e} = |\vec{g}|\,|\vec{e}|\cos\varphi = |\vec{g}|\cos\varphi$

φ là góc giữa $\vec{g}$ và $\vec{e}$. Ta thấy $\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right|$ lớn nhất khi |cosφ| =1 tức là khi phương của $\vec{e}$ trùng với phương của $\vec{g}$. Ký hiệu $\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right|$ lớn nhất là max $\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right|$ thì max $\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right| = |\vec{g}|$.

Như vậy vecteur $\vec{g}$ có tính chất là trị số tuyệt đối của đạo hàm theo hướng của nó là lớn nhất, người ta gọi $\vec{g}$ là ***vecteur gradient của trường vô hướng u và ký hiệu*** $\vec{g} = \overline{grad u}$.

Như vậy

$\overline{\mathbf{grad} u} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ***là các vecteur đơn vị trên 3 trục.***

$$\max\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right| = |\overrightarrow{\mathbf{grad} u}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

và $\frac{\partial u}{\partial e} = |\overline{\mathbf{grad} u}|\cos\varphi = proj_{\vec{e}}\,\overline{grad u}$ ***(H.177). Từ công thức này ta có:***

Định lý 1: ***Đạo hàm của u theo hướng*** $\vec{e}$ ***bằng hình chiếu của vecteur gradient của trường u trên*** $\vec{e}$***. Đó là sự liên hệ giữa đạo hàm theo hướng và gradient.***

Thí dụ: Xác định gradient của trường điện thế $u = \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ và tốc độ biến thiên lớn nhất của trường.

Ta có: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-qx}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = \frac{-qx}{r^3}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-qy}{r^3}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-qz}{r^3}$.

Do đó: $\overrightarrow{gradu} = \frac{-q(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{r^3} = \frac{-q\vec{r}}{r^3}$

Tốc độ biến thiên lớn nhất của trường là:

$$V_{max} = \max\left|\frac{\partial u}{\partial e}\right| = |\overrightarrow{gradu}| = \frac{q}{r^2}$$

Ta biết mặt đồng mức của trường là những mặt cầu đồng tâm O, do đó vecteur $\overrightarrow{gradu} = \frac{-q\vec{r}}{r^3}$ là thẳng góc với các mặt đồng mức. Trong trường hợp tổng quát, u là một trường bất kỳ, điều đó vẫn đúng, ta có:

Định lý 2: ***Gradient của trường vô hướng $u = u(x, y, z)$ tại một điểm là đồng phương với pháp tuyến của mặt đồng mức của trường đi qua điểm ấy.***

Thực vậy, xét mặt đồng mức $u(x, y, z) = C_0$ của trường, ta có $u(x, y, z)$ $C_0 = 0$. Ta lại biết pháp tuyến của mặt đồng mức tại $M(x, y, z)$ của nó có thành phần là: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$. Đây cũng chính là các thành phần của gradient của trường tại M.

Từ định lý này ta suy ra:

Hệ quả: ***Đạo hàm theo hướng $\frac{\partial u}{\partial e}$ tại M triệt tiêu trên mọi hướng tiếp xúc với mặt đồng mức qua điểm M.***

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra:

Tính chất:

$$1)\ \overrightarrow{grad}\,(u_1 + u_2) = \overrightarrow{gradu_1} + \overrightarrow{gradu_2}$$

$$2)\ \overrightarrow{grad}\,(Cu) = C\,\overrightarrow{gradu}\ \ (C = const)$$

$$3)\ \overrightarrow{grad}\,(u_1u_2) = u_1\,\overline{gradu_2} + u_2\,\overline{gradu_1}$$

$$4)\ \overrightarrow{grad}\,f(u) = f'(u)\ \overrightarrow{gradu}$$

Thực vậy, chẳng hạn xét 3). Ta có:

$$\overrightarrow{grad}\,(u_1u_2) = \frac{\partial(u_1u_2)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(u_1u_2)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(u_1u_2)}{\partial z}\vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}u_2 + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}u_2 + u_1\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z}u_2 + u_1\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\vec{k}$$

$$= u_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\vec{k}\right) + u_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= u_1\,\overline{gradu_2} + u_2\,\overline{gradu_1}$$

4.2. Trường vecteur

Ta đã nghiên cứu trường vô hướng là phần không gian mà tại mỗi điểm của nó có xác định một đại lượng vô hướng. Bây giờ áp dụng lý thuyết tích phân mặt ta sẽ nghiên cứu trường vecteur.

a) Định nghĩa: ***Trường vecteur là phần không gian mà tại mỗi điểm $M(x, y, z)$ của nó có xác định một vecteur $\vec{F}$ suy ra $\vec{F}$ là hàm vecteur đối vô hướng $M(x, y, z)$.***

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x, y, z)$$

Thí dụ:

1) Xét một chất lỏng tại mỗi điểm của nó có một tốc độ biểu diễn bởi vecteur $\vec{V}$, thì trong chất lỏng ta có một trường vecteur tốc độ $\vec{V}$.

2) Xét điện tích q đặt tại gốc toạ độ O thì tại mỗi điểm $M(x, y, z)$ thuộc phần không gian xung quanh O, theo định luật Coulomb, có xác định một vecteur điện

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3} \text{ với } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Như vậy phần không gian xung quanh O xác định một trường vecteur $\vec{E}$ gọi là điện trường và $\vec{E}$ gọi là vecteur điện trường. Tương tự như trường vô hướng ta chỉ xét những trường vecteur không phụ thuộc thời gian gọi là trường dừng.

b) Đường dòng: Xét trường vecteur

$$\vec{F} = \vec{F}(\mathrm{M}) = P(M)\vec{i} + Q(M)y\vec{j} + R(M)\vec{k}.$$

Ta gọi đường dòng của trường là mọi đường C mà tiếp tuyến tại mỗi điểm của nó là đồng phương với veteur của trường đi qua điểm ấy. Rõ ràng tại mỗi điểm của trường chỉ có một đường dòng duy nhất đi qua và các đường dòng của trường không cắt nhau. Để tìm phương trình của đường dòng C của trường vecteur $\vec{F}$, ta giả sử phương trình của nó là $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ thì tiếp tuyến của C tại $M(x, y, z)$ có hệ số chỉ phương là $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$. Theo định nghĩa thì:

$$\frac{x'(t)}{P} = \frac{y'(t)}{Q} = \frac{z'(t)}{R} \quad \text{hay} \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (1)$$

Hệ (1) gọi là hệ phương trình vi phân của các đường dòng của trường. Giải hệ đó, ta sẽ tìm được phương trình của các đường dòng của trường.

Thí dụ: Tìm các đường dòng của điện trường

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}, \text{ ta có } P = \frac{qx}{r^3}, \quad Q = \frac{qy}{r^3}, \quad R = \frac{qz}{r^3}$$

Theo (1), hệ phương trình vi phân của các đường dòng của điện trường trên là:

$$\frac{dx}{\frac{qx}{r^3}} = \frac{dy}{\frac{qy}{r^3}} = \frac{dz}{\frac{qz}{r^3}} \text{ hay } \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Từ hệ này tích phân (bất định) ta có:

$$\ln C_1 x = \ln C_2 y = \ln C_3 z \quad \text{hay} \quad \frac{x}{k_1} = \frac{y}{k_2} = \frac{z}{k_3} \quad k_i = \frac{1}{C_i} = \text{const};\ i = 1, 2, 3.$$

Đây là phương trình của một họ đường thẳng qua O. Vậy các đường dòng của điện trường là một họ đường thẳng qua điểm đặt điện tích q cũng gọi là họ các đường sức của điện trường.

c) **Thông lượng và divergence:** Về cơ học, ta biết lưu lượng Φ của chất lỏng (trong một đơn vị thời gian) có tốc độ $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ qua mặt S đặt trong chất lỏng là

$$\Phi = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Trong đó $\vec{N}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là pháp tuyến của một phía của mặt S. Một cách tổng quát, ta định nghĩa: ***Thông lượng Φ của trường vecteur $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ qua mặt S đặt trong trường là:***

$$\Phi = \iint_S \vec{F}\vec{N}dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

$$= \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \qquad (1)$$

Thí dụ: Tìm thông lượng của điện trường $\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$ (gọi là điện thông) qua mặt cầu tâm O, bán kính R. Theo công thức (1) là:

$$\Phi = \iint_S \vec{F}\vec{N}dS = \iint_S \frac{q}{r^3}|\vec{r}|1\,dS \ (\text{vì } \vec{E} \parallel \vec{N}) = \frac{q}{R^2}\iint_S dS = \frac{q}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi q$$

vì trên mặt cầu $r = R$.

Bây giờ xét mặt S kín trơn từng phần bao miền V, gọi thể tích của nó cũng là V. Xét điểm cố định $M(x, y, z) \in V$. Nếu $\lim\limits_{V \to M} \frac{\Phi}{V}$ tồn tại ($V \to M$: thể tích V co lại điểm M) thì giới hạn này gọi là ***divergence (độ phân kỳ) của trường vecteur*** $\vec{F} = \vec{F}(M)$ ***tại M trong trường. Ký hiệu:***

$$div\vec{F}(M) = \lim_{V \to M} \iint_S \vec{F}\vec{N}dS \qquad (2)$$

Theo công thức Ostrogradski ta có:

$$\Phi = \iint_S \vec{F}\vec{N}dS = \iint_S [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

Theo định lý trung bình (đối với tích phân bội bai ta có:

$$\iint_S \vec{F}\vec{N}dS = \left(\frac{\partial P(M_c)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M_c)}{\partial y} + \frac{\partial R(M_c)}{\partial z}\right).V$$

M_c là một điểm nào đó trong thể tích V.

Theo định nghĩa của divergence (2) ta suy ra:

$$div\vec{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z} \qquad (3)$$

Vậy công thức Ostrograndski viết được dưới dạng vecteur:

$$\iint_S \vec{F}\vec{N}dS = \iiint_V div\vec{F}dV \qquad (4)$$

Giả sử div$\vec{F}$ là một hàm liên tục tại $M \in V$ và div$\vec{F}$(M) > 0 theo tính chất của hàm liên tục thì tồn tại một lân cận của M trong đó div$\vec{F}$ > 0. Nếu V' là một miền giới hạn bởi mặt kín S' trong lân cận đó thì theo công thức (4) thông lượng Φ qua mặt S' từ trong ra ngoài là một số dương hay chính xác hơn: Thông lượng vào mặt S' ít hơn thông lượng ra khỏi mặt đó, khi đó ta gọi M là một điểm nguồn của trường $\vec{F}$. Ngược lại nếu div$\vec{F}$ < 0 thì M gọi là điểm rò của trường. Ta cũng gọi div$\vec{F}(M)$ là mật độ của thông lượng của trường $\vec{F}$. Đặc biệt nếu div$\vec{F}$ = 0 tại ∀M trong trường, nghĩa là trong trường không có những điểm nguồn và điểm rò (hay chính xác hơn thông lượng do các điểm nguồn phát ra bằng thông lượng do các điểm rò rỉ mất) thì thông lượng qua mọi mặt kín đặt trong trường đều bằng không.

Thí dụ:

1) Tính thông lượng của trường $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua mặt xung quanh và mặt toàn phần của hình trụ $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le z \le h$.

Ta có $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$, $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 0$. Do đó, theo (1) thông lượng Φ_1 qua mặt xung quanh S_1 của hình trụ là:

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} y \right) dS_1 \quad hay \quad \Phi_1 = \iint_{S_1} a dS_1 = 2\pi a^2 h$$

Theo (3), ta có: $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$. Theo (4) thông lượng qua mặt toàn phần của hình trụ là: $\Phi = \iiint_V 3dV = 3\pi a^2 h$

2) Xét điện trường $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

Gọi hình chiếu của $\vec{E}$ trên ba trục Ox, Oy, Oz là P, Q, R thì:

$$P = \frac{qx}{r^3}; \quad Q = \frac{qy}{r^3}; \quad R = \frac{qz}{r^3}; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = q\left(\frac{-3r^2 r'_x}{r^6} x + \frac{1}{r^3} \right)$$

nhưng: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $r'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$

nên: $$\frac{\partial P}{\partial x} = q\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right) = q\left(\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \right)$$

Tương tự: $$\frac{\partial Q}{\partial y} = q\left(\frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \right), \quad \frac{\partial R}{\partial z} = q\left(\frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \right)$$

do đó: $$div\vec{E} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = q\left[\frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right] = 0$$

với $r \neq 0$ suy ra thông lượng: Φ qua mọi mặt kín giới hạn miền V không chứa gốc tọa độ đều bằng không. Bây giờ xét mặt S gồm 2 mặt. mặt cầu S_1 tâm O và một mặt S_2 bất kỳ bao quanh O (H 178)

Theo trên:

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = 0 \quad \text{nhưng} \quad \iint_{S_1} = -4\pi q \text{ (thí dụ phần c) suy ra } \iint_{S_2} = 4\pi q$$

(vì hướng của pháp tuyến $\vec{N}$ của S_1, S_2 là ngược nhau). Vậy: trong điện trường, điện thông qua mọi mặt kín bao quanh gốc tọa độ đều bằng $4\pi q$ (định luật Gauss).

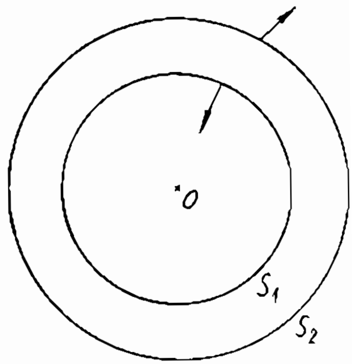
Từ định nghĩa dễ dàng suy ra các tính chất của divergence:

1) $div(\vec{F_1} + \vec{F_2}) = div\vec{F_1} + div\vec{F_2}$

2) $div(C\vec{F}) = C.div\vec{F}; \ C = const$

3) $div(u\vec{C}) = \vec{C}.\overline{gradu}; \ \vec{C} = const$

4) $div(u\vec{F}) = \vec{F}.\overline{gradu} + udiv\vec{F}$



Hình 178

Thực vậy, chẳng hạn 4) giả sử $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Theo định nghĩa (3)

$$div(u\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(uP) + \frac{\partial}{\partial y}(uQ) + \frac{\partial}{\partial z}(uR)$$

$$= (P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z}) + u(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) = \vec{F}.\overline{gradu} + udiv\vec{F}$$

d) Lưu số (Hoàn lưu) và rotation: Về cơ học, ta biết công T của lực $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dọc theo đường cong C là tích phân đường:

$$T = \int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_C (P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma')ds$$

Trong đó $\vec{\tau}$ $(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ là vecteur tiếp tuyến đơn vị của đường C theo hướng đi trên C

Theo công thức tích vô hướng của 2 vecteur theo tọa độ ta có thể viết: $T = \int_C \vec{F}\vec{\tau} ds$

Một cách tổng quát, ta định nghĩa: Lưu số C của trường $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dọc đường C trong trường là $C = \int_C \vec{F}\vec{\tau}\, ds$

Bây giờ trong trường xét một đường khép kín, trơn từng phần C giới hạn mặt trơn từng phần S mà ta gọi diện tích của nó cũng là S, giả sử xét chiều dương trên C ứng với phía có pháp tuyến $\vec{N}$ (cosα, cosβ, cosγ) của S.

Xét S khá bé và $\lim\limits_{S \to M} \dfrac{\oint_C \vec{F}.\vec{\tau}\, ds}{S}$ (1)

($S \to M$: chỉ diện tích S thu tại điểm M).

Ta sẽ chứng minh rằng giới hạn này chỉ phụ thuộc điểm M đã chọn trong trường. Thực vậy, theo công thức Stokes ta có:

$$\oint_C \vec{F}.\vec{\tau}\, ds = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS$$

Đặt: $$\vec{X} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

thì công thức này viết được dưới dạng:

$$\oint_C \vec{F}.\vec{\tau}\, ds = \iint_S \vec{X}\vec{N} dS = \iint_S proj_{\vec{N}} \vec{X}(M) dS$$

áp dụng định lý trung bình đối với tích phân mặt ta có:

$$\oint_C \vec{F}.\vec{\tau}\, ds = S.proj_{\vec{N}} \vec{X}(M_c) \quad M_C \in S$$

Cho $S \to M$ thì $M_C \to M$, và:

$$proj_{\vec{N}} \vec{X}(M) = \lim_{S \to M} \frac{1}{S} \oint_C \vec{F}.\vec{\tau} ds$$

Vậy giới hạn (1) chỉ phụ thuộc điểm M trong trường. ***Người ta gọi vecteur $\overrightarrow{X}$ là vecteur rotation hay vecteur xoáy tại M trong trường, ký hiệu:*** $\overrightarrow{X}(M) = rot\overrightarrow{F}(M)$ ***vậy***

$$rot\overrightarrow{F}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \quad (2)$$

và công thức Stokes viết được dưới dạng vecteur:

$$\oint_C \overrightarrow{F}\vec{\tau}\, ds = \iint_S rot\overrightarrow{F}\overrightarrow{N} dS \qquad (3)$$

Công thức này cho ta thấy rằng: Lưu số của trường vecteur $\overrightarrow{F}$ theo một đường cong khép kín C đặt trong trường bằng thông lượng của vecteur rot $\overrightarrow{F}$ qua mặt S giới hạn bởi đường C. Để hiểu rõ ý nghĩa thực tế của rot $\overrightarrow{F}$ ta xét một dòng chất lỏng chảy trong miền nào đó. Tích phân $\oint_C \overrightarrow{F}\vec{\tau}\, ds$ biểu thị công T sinh ra khi đi theo C trong chất lỏng. Nếu rot $\overrightarrow{F}$(M) = 0, và C là một đường cong khép kín bao quanh mặt S khá bé chứa M, thì theo (3) công T khi đi trên C bằng không, điều này chứng tỏ công sản ra khi đi theo phần thuận chiều với dòng chảy bằng công sản ra khi đi theo phần ngược chiều với dòng chảy, ta gọi điểm M là một điểm bình thường. Nếu rot $\overrightarrow{F}$(M) ≠ 0 lý luận tương tự ta thấy hai loại công đó là khác nhau, khi đó điểm M là không bình thường, ta gọi điểm M là một điểm xoáy. Vì lý do đó ta có vecteur rot $\overrightarrow{F}$ hay vecteur xoáy.

Thí dụ: Tìm vecteur rot $\overrightarrow{E}$ của điện trường $\overrightarrow{E} = \dfrac{q\vec{r}}{r^3}$.

Ta có: $\quad P = \dfrac{qx}{r^3}, \quad Q = \dfrac{qy}{r^3}, \quad R = \dfrac{qz}{r^3}$

Tính: $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = -qx\dfrac{3}{r^4}r'_y = \dfrac{-3qxy}{r^5} \quad (r'_y = \dfrac{y}{r})$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -qy\frac{3}{r^4}r'_x = \frac{-3qxy}{r^5} \quad (r'_x = \frac{x}{r})$$

Vậy $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \forall M(x, \ y, \ z) \neq 0$$

Tương tự, ta thấy: $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}$

Vậy tại $\forall M \neq 0$ ta có rot $\vec{E} = 0$, nghĩa là mọi điểm của trường trừ điểm đặt điện tích q đều là điểm bình thường. Theo công thức (3) lưu số dọc theo mọi đường khép kín trong điện trường đều bằng không.

Từ định nghĩa của rot, ta suy ra các tính chất:

1) $rot(\vec{F_1} + \vec{F_2}) = rot\vec{F_1} + rot\vec{F_2}$

2) $rot(C\vec{F}) = C\, rot\,\vec{F}$; $C = const$

3) $rot(u\vec{C}) = \overline{grad\ u} \wedge \vec{C}$; $\vec{C} = const$

4) $rot(u\vec{F}) = u\,rot\vec{F} + \overline{grad\ u} \wedge \vec{F}$

Thực vậy, chẳng hạn xét 3) ta có $\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$.

$$C_x, C_y, \ C_z = \text{const (tọa độ của } \vec{C} \text{ trên ba trục)}$$

Khi đó $u\vec{C} = uC_x\vec{i} + uC_y\vec{j} + uC_z\vec{k}$

$$rot(u\vec{C}) = \left(\frac{\partial uC_z}{\partial y} - \frac{\partial uC_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial uC_x}{\partial z} - \frac{\partial uC_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial uC_y}{\partial x} - \frac{\partial uC_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

hay

$$rot(u\vec{C}) = \left(C_z\frac{\partial u}{\partial y} - C_y\frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(C_x\frac{\partial u}{\partial z} - C_z\frac{\partial u}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(C_y\frac{\partial u}{\partial x} - C_x\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \overline{grad\ u} \wedge \vec{C}$$

Chú ý: Ta có thể dùng ký hiệu hình thức:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

4.3. Các toán tử vi phân: Đối với trường vô hướng $u = u(x, y, z)$ ta đã định nghĩa:

$$\overrightarrow{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

và đối với trường vecteur $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ ta đã định nghĩa

$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Người ta gọi $\overrightarrow{grad}$, div, rot là các toán tử vi phân. Bây giờ ta định nghĩa:

+ Toán tử Laplace: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ ***là toán tử mà:***

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

+ Toán tử Nabla hay toán tử Hamiton là vecteur tượng trưng

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Áp dụng một cách hình thức các phép toán như đối với vecteur ta có:

$$\vec{\nabla}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}; \quad \vec{\nabla}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Theo định nghĩa của $\overrightarrow{grad}$, div, rot ta có:

$$\vec{\nabla}u = \overrightarrow{\text{grad}}\, u, \quad \vec{\nabla}\vec{F} = div\vec{F}, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = rot\vec{F}$$

do đó người ta thường ký hiệu $\overrightarrow{gradu}$, div $\vec{F}$, rot $\vec{F}$ là $\vec{\nabla}u$, $\vec{\nabla}.\vec{F}$, $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$. Từ định nghĩa ta suy ra các tính chất:

1) $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}u}) = \vec{\nabla}\vec{\nabla}u = \Delta u$, do đó $\vec{\nabla}\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \Delta$.

2) $\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}u}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}u = 0$ (tích có hướng của hai vecteur bằng nhau).

3) $\text{div}(\text{rot}\vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = 0$ (tích hỗn hợp của ba vecteur trong đó có hai vecteur bằng nhau).

4.4. Trường ống và trường thế: Ta đã xét trường $\vec{F}$ một cách tổng quát. Bây giờ ta xét vài trường đặc biệt trong thực tế.

Nếu tại mọi điểm của trường $\vec{F}$ ta có div $\vec{F}$ = 0 thì trường $\vec{F}$ gọi là một trường ống (hay $\vec{F}$ là trường ống nếu trong trường không có nguồn).

Thí dụ: Điện trường $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{r^3}$ là trường ống (trừ gốc O); div $\vec{E} = 0$, $\forall M \neq 0$.

Nếu tại mọi điểm của trường $\vec{F}$ mà rot $\vec{F}$ = 0 thì $\vec{F}$ gọi là một trường thế (hay $\vec{F}$ là một trường thế nếu trong trường không có những điểm xoáy).

Thí dụ: Điện trường $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{r^3}$ là trường thế (trừ gốc O); rot $\vec{E} = 0$, $\forall M \neq 0$.

Nếu trường $\vec{F}$ vừa là trường ống vừa là trường thế thì $\vec{F}$ gọi là một trường điều hoà.

Thí dụ: Điện trường trên là một trường điều hoà (trừ gốc O).

Vì $\vec{F}$ là trường thế nên rot $\vec{F} = 0$ suy ra $\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ (tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân) hay $Pdx + Qdy + Rdz$ là vi phân toàn phần của một hàm số u nào đó, nghĩa là $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial u}{\partial z} = R$. Do đó $\vec{F} = \overrightarrow{gradu}$.

Mặt khác $\vec{F}$ lại là trường ống nên div $\vec{F} = 0$ hay

div($\overrightarrow{gradu}$.) = 0. Nhưng div($\overrightarrow{gradu}$.) = Δu. Do đó:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

u gọi là thế vô hướng của trường $\vec{F}$ và phương trình này gọi là phương trình Laplace. Như vậy $\vec{F}$ là trường điều hoà thì thế vô hướng u của trường thoả mãn phương trình Laplace. Thế vô hướng u cũng gọi là một hàm điều hoà.

BÀI TẬP

1. Tính các tích phân đường loại một:

1) $I = \int_C xyds$, C là chu vi của $|x| + |y| = a$ $(a > 0)$.

2) $I = \int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, C là đoạn nối $O(0, 0)$ đến $A(1, 2)$.

3) $I = \int_C y^2 ds$, C là cung: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$

4) $I = \int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, C là cung: $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$

5) $I = \int\limits_C (x+y)ds$, C là cung: $r^2 = a^2\cos 2\varphi$; $-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$.

6) $I = \oint\limits_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds$, C là đường $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

7) $I = \int\limits_C zds$, C là cung $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$; $0 \le t \le t_0$.

8) $I = \int\limits_C zds$, C là cung $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ từ điểm $(0, 0, 0)$ đến $(a, a, a\sqrt{2})$.

9) $I = \oint\limits_C \sqrt{2y^2 + z^2}\,ds$, C là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$.

2.

1*) Tính diện tích phần mặt trụ $y = \dfrac{3}{8}x^2$ giới hạn bởi các mặt phẳng $z = 0$, $x = 0$, $z = x$, $y = 6$.

2) Tính độ dài của cung $x = ae^t\cos t$, $y = ae^t\sin t$, $z = ae^t$ từ điểm $(0, 0, 0)$ đến $(a, 0, a)$.

3) Tính khối lượng của đường $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; $0 \le t \le 2\pi$, nếu mật độ khối lượng (dài) của đường là $\gamma(x, y) = |y|$.

4) Tìm toạ độ trọng tâm của:

a) Cung đồng chất: $(\gamma = 1)$ $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$; $0 \le t \le \pi$.

b) Chu vi của tam giác cầu đồng chất: $(\gamma = 1)$ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$

5) Tính moment quán tính đối với các trục toạ độ của cung đồng chất : $(\gamma = 1)$ $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = \dfrac{ht}{2\pi}$, $0 \le t \le 2\pi$.

3. Tính các tích phân đường loại hai:

1) $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy;\quad \overset{\frown}{AB}:\ y = x^2$ nối $A(1, 1)$ đến $B(2, 4)$.

2)) $I = \int\limits_C (2a - y)dx + xdy$, C là cung: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

3) $I = \oint\limits_C \dfrac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, C: $x^2 + y^2 = a^2$, ngược chiều kim đồng hồ.

*4) $I = \oint\limits_C \dfrac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}$, C: phần bên phải của $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, ngược chiều kim đồng hồ.

5) $I = \int\limits_C \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$, C: chu vi hình vuông: $A(1,\ 0)$; $B(0,\ 1)$; $C(-1,\ 0)$; $D(0, -1)$.

6) $I = \int\limits_C ydx + zdy + xdz$, C: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$ (theo chiều tăng của tham số).

7) $I = \int\limits_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, C: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x\,\mathrm{tg}\alpha$, ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía x dương.

8) $I = \int\limits_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, C: là chu vi của tam giác cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ theo chiều sao cho phía ngoài của tam giác luôn ở bên trái.

4. Tính các tích phân đường:

1) $I = \oint\limits_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, C: chu vi của tam giác $A(1, 2)$; $B(2, 2)$; $C(1, 3)$ theo chiều dương.

2) $I = \oint\limits_C -x^2 y dx + xy^2 dy$, C: $x^2 + y^2 = R^2$ ngược chiều kim đồng hồ.

3) $I = \int\limits_C (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$,

C: nửa trên của $x^2 + y^2 = ax$ từ $A(a, 0)$ đến $O(0, 0)$.

4) $I = \oint\limits_C \frac{dx - dy}{x + y}$, C: chu vi của: $A(1, 0)$; $B(0, 1)$; $C(-1, 0)$; $D(0, -1)$ ngược chiều kim đồng hồ.

5) $I = \int\limits_{(-2,\ 1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

6) $I = \int\limits_{(1,1)}^{(3,1)} \frac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2}$, C không cắt đường $y = -x$.

7) $I = \int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x\right)dy$

8) $I = \int\limits_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

với $(x_1, y_1, z_1) \in$ mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$(x_2, y_2, z_2) \in$ mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$. $(a, b > 0)$

9) $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xydx + yzdy + zxdz$, $\overset{\frown}{AB}$ là cung $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $z = x$, $y > 0$, $R > 0$.

*10) $G = \oint\limits_C \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds$ (Tích phân Gauss)

$r = \sqrt{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2}$, $A(\zeta, \eta)$, $M(x, y) \in C$, $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$.

$(\vec{r}, \vec{n})$ góc giữa $\vec{r}$, $\vec{n}$; $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của C tại M.

5.

1) Tìm u biết:

a) $du = (3x^2 - 2xy + y^2)\,dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy$

b) $du = \dfrac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$

c) $du = \dfrac{(x+y-z)dx + (x+y-z)dy + (x+y+z)dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$

2) Tính diện tích của hình giới hạn bởi:

a) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

b) $x = a(2\cos t - \cos 2t),\ y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

c) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

*d) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n + \left(\dfrac{y}{b}\right)^n = \left(\dfrac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{n-1}$, $x = 0$, $y = 0$, $(a, b, n > 0)$

6.

1) Tìm công của lực đàn hồi hướng về gốc tọa độ, độ lớn của nó tỷ lệ với khoảng cách từ chất điểm đến gốc tọa độ nếu điểm này vạch một cung ellipse.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x, y > 0$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

2) Tìm công của lực: $|\vec{F}| = \dfrac{k}{r^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ tác dụng lên một chất điểm khối lượng m chuyển động từ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ đến $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

7.

1) Xác định $P(x, y)$, $Q(x, y)$ hai lần khả vi liên tục sao cho $I = \oint\limits_C P(x+\alpha, y+\beta)dx + Q(x+\alpha, y+\beta)dy$ không phụ thuộc các hằng số α, β với C khép kín tuỳ ý.

2) Hàm khả vi $f(x, y)$ phải thoả mãn điều kiện nào để $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)(ydx + xdy)$ không phụ thuộc đường nối A, B.

*3) Tìm $\lim\limits_{d \to 0} \dfrac{1}{S} \oint\limits_C \vec{F}.\vec{n}ds$; S: diện tích miền D, giới hạn bởi C bao quanh điểm (x_0, y_0); d là đường kính của miền D, $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của C, $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ khả vi liên tục trong miền đóng D.

*4) Dùng công thức Green chứng minh:

a) $\iint\limits_D \Delta u dxdy = \oint\limits_C \dfrac{\partial u}{\partial n} ds$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta) \text{ vecteur pháp của } C.$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta.$$

b) $\iint\limits_D v.\Delta u dxdy = -\iint\limits_D \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy + \oint\limits_C v\dfrac{\partial u}{\partial n} ds$

c) $\iint\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)dxdy = \oint\limits_C \left(v\dfrac{\partial u}{\partial n} - u\dfrac{\partial v}{\partial n}\right)ds$

8. Tính các tích phân mặt:

1) $I = \iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$, S là mặt: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2) $I = \iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}dS$, S là mặt bên của hình nón:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0,\ 0 \le z \le b.$$

3) $I = \iint\limits_S (xy + yz + zx)dS$

S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt $x^2 + y^2 = 2ax$.

4) $I = \iint\limits_S yzdydz + xzdzdx + xydxdy$,

S là phía ngoài tứ diện $x = y = z = 0$, $x + y + z = a$.

5) $I = \iint\limits_S zdxdy$, S: phía ngoài mặt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

6) $I = \iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$

S là phía ngoài của nửa hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$.

7) $I = \iint\limits_S (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy$

S là phía ngoài của mặt nón: $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$.

*8) $F(t) = \iint\limits_S f(x, y, z)dS$

$S: x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ với $f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{nếu} \quad z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 & \text{nếu} \quad z < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

9.

1) Tìm toạ độ trọng tâm của:

a) Phần mặt đồng chất ($\gamma = 1$): $az = x^2 + y^2$ ($0 \le z \le a$).

b) Phần mặt đồng chất ($\gamma = 1$): $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = ax$.

2) Tìm moment quán tính đối với gốc tọa độ của các mặt đồng chất ($\gamma = 1$):

a) Mặt toàn phần của hình $a \le x, y, z \le a$.

b) Mặt toàn phần của hình trụ $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$.

*3) Mặt nón cụt đồng chất mật độ khối lượng μ:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r$, $0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le b \le r \le a$, hút một chất điểm khối lượng m đặt tại đỉnh mặt nón đó một lực bằng bao nhiêu ?

10. Áp dụng công thức Stokes tính:

1) $I = \oint\limits_C (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$

C là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ theo ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương của trục Ox.

2) $I = \oint\limits_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$

C là ellipse: $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$ theo ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương của trục Ox.

3) $I = \oint\limits_C (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz$

C là đường: $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$ $(0 < r < R, z > 0)$, theo chiều sao cho phần nhỏ nhất của phía ngoài của mặt cầu giới hạn bởi C là ở bên trái.

4) $I = \oint\limits_C y^2z^2dx + z^2x^2dy + x^2y^2dz$

C là đường khép $x = a\cos t$, $y = b\cos 2t$, $z = a\cos 3t$ theo chiều tăng của tham số t.

11. Áp dụng công thức Ostrogradski tính:

1) $I = \iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$

S phía ngoài của hình lập phương: $0 \le x, y, z \le a$.

2) $I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$

S là phía ngoài của mặt tứ diện giới hạn bởi: $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3) $I = \iint\limits_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy$

S là phía ngoài của mặt: $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$.

*4) $I(x, y, z) = \iint\limits_S \dfrac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS$ (tích phân Gauss).

S là mặt trơn, kín, giới hạn thể tích V, $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của S tại $(\xi, \eta, \zeta) \in S$, $\vec{r}$ là vecteur nối điểm (x, y, z) và (ξ, η, ζ).

$$r = \sqrt{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \varsigma)^2}$$

*5) $I(x, y, z) = \iint\limits_S \cos(\vec{n}, \vec{l}) dS$

S là mặt trơn kín, $\vec{l} = \text{const}$; $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của S.

12.

1) Xác định mặt mức của các trường vô hướng:

a) $u = f(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

b) $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $u = \arcsin \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2) Xác định đường dòng của các trường vecteur:

a) $\vec{F}(M) = \vec{C} = \text{const}$

b) $\vec{F}(P) = -wy\vec{i} + wx\vec{j}$, $w = \text{const}$

13. Tính các đạo hàm theo hướng của:

1) $u = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ tại $M(x, y, z)$ theo hướng của bán kính vecteur $\vec{r}$ của điểm đó.

Khi nào thì $\dfrac{\partial u}{\partial e} = \left|\overrightarrow{\text{grad}}\, u\right|$

2) $u = \dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ theo hướng của $\vec{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Khi nào thì $\frac{\partial u}{\partial e} = 0$.

3) $u = xy - z^2$ tại $M(-9, 12, 10)$ theo hướng của phân giác thứ nhất của gốc tọa độ Oxy.

Tính $|\overrightarrow{\text{grad}u}|$ tại M.

14.

1) Cho u $= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ tại điểm nào $\overline{\text{grad}u}$:

a) $\perp Oz$.

b) $\parallel Oz$.

c) $= 0$.

2) Cho $u = \ln\frac{1}{r}$, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ tại điểm nào: $|\overrightarrow{\text{grad}u}| = 1$.

3) Tìm góc giữa $\overline{\text{grad}u}$, $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ tại các điểm $A(1, 2, 2)$, $B(-3, 1, 0)$.

15. Tìm thông lượng của các hàm vecteur:

1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua:

a) Mặt toàn phần.

b) Mặt bên của hình trụ $x^2 + y^2 \le R^2$; $0 \le z \le H$.

2) $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + x^3\vec{k}$ qua :

a) Mặt bên

b) Mặt toàn phần của hình nón $\frac{x^2 + y^2}{R^2} \le \frac{z^2}{H^2}$; $0 \le z \le H$

c) Mặt ngoài của $x^2 + y^2 + z^2 \leq y$

3) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ qua mặt cầu: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

4) $\vec{F} = \dfrac{m\vec{r}}{r^3}$, m = const qua mặt kín S bao quanh gốc tọa độ.

16. Tìm lưu số của các trường:

1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ theo phần đường $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$; $0 \leq t \leq 2\pi$ theo chiều tăng của t.

2) $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ dọc theo cung bé nhất của đường tròn lớn nhất của mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ nối các điểm $M(3, 4, 0)$, $N(0, 0, 5)$.

3) $\vec{F} = \overrightarrow{grad}(arctg\dfrac{y}{x})$ dọc theo đường C:

a) Không bao quanh Oz.

b) Bao quanh Oz.

17. Các trường sau đây có là trường ống hay là trường thế không, nếu là trường thế tìm hàm thế

1) $\vec{F} = (5x^2y - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j}$

2) $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$

3) $\vec{F} = yz(2x+y+z)\vec{i} + zx(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k}$

4) $\vec{F} = f(r)\vec{r}$ (lực xuyên tâm).

18. Chứng minh các công thức:

1) $\vec{\nabla}^2(u.v) = u\vec{\nabla}^2 v + v\vec{\nabla}^2 u + 2\vec{\nabla}u\vec{\nabla}v$ $\quad(\vec{\nabla}^2 = \Delta)$

2) $\operatorname{div}(u\,\overrightarrow{grad u}) = |\overrightarrow{grad u}|^2 + u\Delta u$.

3) $\operatorname{div}(u\,\overrightarrow{grad v}) = \overrightarrow{grad u}.\overrightarrow{grad v} + u\Delta v$

*4) $div(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) = \vec{F}_2 rot\vec{F}_1 - \vec{F}_1 rot\vec{F}_2$

*5) $rot(\vec{C} \wedge \vec{F}) = \vec{C} div\vec{F} - (\vec{C}, \vec{\nabla})\vec{F}, \quad \vec{C} = const$

*6) $rot(\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2) = (\vec{F}_2, \vec{\nabla})\vec{F}_1 - \vec{F}_2 div\vec{F}_1 + \vec{F}_1 div\vec{F}_2 - (\vec{F}_1, \vec{\nabla})\vec{F}_2$.

TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

1.

1) 0.

2) $\ln\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$

3) $\dfrac{256}{15}a^3$

4) $\dfrac{a^2}{3}[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1]$

5) $a^2\sqrt{2}$

6) $4a^{\frac{7}{3}}$

7) $\dfrac{1}{3}[(t_0^2+2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}]$

8) $\dfrac{a^2}{256\sqrt{2}}(100\sqrt{38} - 72 - 17\ln\dfrac{25+4\sqrt{38}}{17})$

9) $2\pi a^2$

2.

1) $\dfrac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$. $(S = \int\limits_C xds$, C là $y = \dfrac{3}{8}x^2$ nối (0, 0) và (4, 6)

2) $a\sqrt{3}$

3) $2(b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a})$

4)

a) $\left(\frac{4a}{3}, \frac{4a}{3}\right)$

b) $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}\right)$

5) $I_x = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}$

$I_y = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}$

$I_z = a^2\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}$

3.

1) $40\frac{19}{30}$, 2) $-2\pi a^2$, 3) -2π, 4) 0

5) 0, 6) $-\pi a^2$, 7) $2\sqrt{2}\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, 8) -4.

4.

1) $-\frac{4}{3}$

2) $\frac{\pi R^4}{2}$

3) $\frac{m\pi a^2}{8}$

4) -4 không thể áp dụng công thức Green.

5) 62

6) $\frac{1}{4} + \ln 2$

7) $1 + \sqrt{2}$

8) $b \quad a$

9) $\left(\frac{1}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)R^3$

10) 2π: với A trong C; π: với A ở ngoài C.

5.

1)

a) $x^3 \quad x^2y + xy^2 - y^3 + C$

b) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \, arctg \frac{3x - y}{2\sqrt{2}y} + C$

c) $\ln\sqrt{(x+y)^2 + z^2} + arctg \frac{z}{x+y} + C$

2)

a) $\frac{3\pi a^2}{8}$

b) $6\pi a^2$

c) $\frac{3a^2}{2}$,(đặt $y = tx$)

d) $\frac{ab}{n}\left(1 + (1 - \frac{1}{n})\right)\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$

(Đặt $x = a\cos^{\frac{2}{n}}\varphi, \quad y = \sin^{\frac{2}{n}}\varphi; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$).

6.

1) $-\dfrac{K}{2}(b^2-a^2)$, K là hệ số tỷ lệ

2) $K\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}\right)$, $r_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$, $i=1, 2$.

7.

1) $P=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\varphi(x)$; $Q=Cx+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\psi(y)$

$u(x, y)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$: hai lần khả vi liên tục.

2) $\dfrac{\partial}{\partial x}(xf)=\dfrac{\partial}{\partial y}(yf)$ trong miền đóng D giới hạn bởi $AmBnA$

3) $\dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}=\dfrac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y}$, với $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}$ $\left(\oint\limits_C \vec{F}\vec{n}ds=\oint\limits_C -Qdx+Pdy\right)$

4) Đặt $P=V\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $Q=V\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ta có b); a) là đặc biệt của b) với V = 1.

8.

1) $\dfrac{8\pi a^4}{3}$

2) $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$

3) $\dfrac{64\sqrt{2}a^4}{15}$

4) 0

5) $\dfrac{4}{3}\pi abc$

6) $\dfrac{\pi a^4}{2}$

7) 0

8) $\dfrac{\pi}{6}t^4(8-5\sqrt{2})(F(t)=|t|\iint\limits_D \dfrac{(x^2+y^2)dxdy}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},\ D: x^2+y^2 \leq \dfrac{t^2}{2})$

9.

1)

a) $x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ z_0 = \dfrac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}a$

b) $x_0 = \dfrac{a}{2},\ y_0 = 0,\ z_0 = \dfrac{16a}{9\pi}$

2)

a) $I_0 = 40a^4$

b) $I_0 = \pi R[R(R+H)^2 + \dfrac{2}{3}H^3]$

3) $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, $P = 0,\ Q = 0,\ R = \quad m \ln\dfrac{a}{b}$, $d\vec{F}(M) = \dfrac{\gamma\mu m dS}{r^2}\vec{e}$

$\vec{r} = \overrightarrow{OM},\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \vec{e} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

10.

1) 0

2) -4π

3) $2\pi R r^2$

4) 0

11.

1) $3a^4$

2) $\dfrac{a^3}{2}$

3) 1

4) 0: S không bao quanh điểm (x, y, z)

4π; S bao quanh điểm (x, y, z)

$\left(\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \dfrac{\vec{r}\vec{n}}{r}\right)$

5) 0

12.

1)

a) Mặt cầu

b) Mặt trụ

c) Mặt nón

2)

a) Các đường thẳng song song với $\vec{C}$

b) Các đường tròn: $x^2 + y^2 = C_1^2$, $z = C_2$

13.

1) $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{2u}{r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial r} = |\overrightarrow{gradu}|$ khi $a = b = c$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial e} = -\dfrac{\cos(\vec{e}, \vec{r})}{r^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial e} = 0$ *khi* $\vec{e} \perp \vec{r}$

3) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial e}\right|_M = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $|\overrightarrow{gradu}|_M = 25$

14.

1)

a) $z^2 = xy$, b) $x = y = z$, c) $x = y = z$

2) $r = 1$

3) $\cos\varphi = -\dfrac{8}{9}$

15.

1)

a) $3\pi R^2 H$, b) $2\pi R^2 H$,

2)

a) $\dfrac{1}{10}\pi R^2 H(3R^2 - 4H^2)$, b) $\dfrac{3}{10}\pi R^2 H(R^2 + 2H^2)$,

c) $\dfrac{\pi}{5}$,

3) $\dfrac{8}{3}\pi R^3(a + b + c)$

4) $4\pi m$

16.

1) $2\pi^2 b^2$, 2) -12,

3)

a) 0

b) $2\pi n$; n: số lần đi khắp C quanh Oz

17.

1) Không là trường ống cũng không phải là trường thế

2) Là trường ống và là trường thế:

$$u = xy + yz + zx + C$$

3) Không là trường ống, là trường thế

$$u = xyz(x + y + z) + C$$