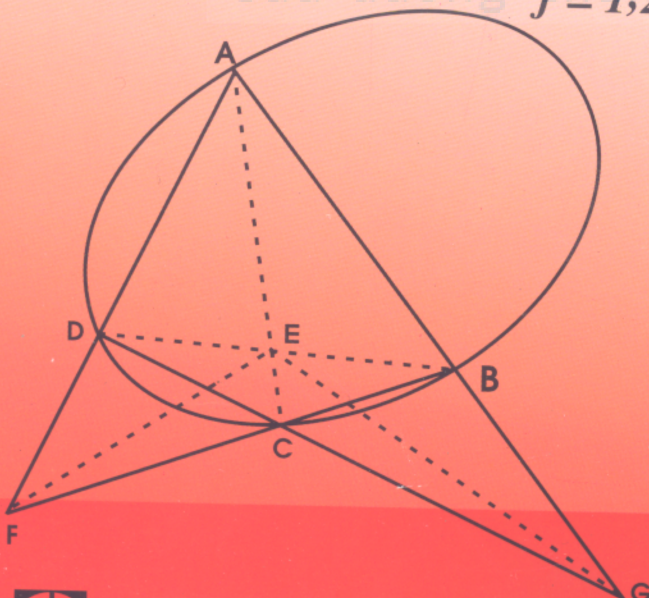
NGUYỄN MỘNG HY

BÀI TẬP HÌNH HỌC CAO CẤP

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + b_j = 0$$
$$j = 1, 2, \ldots, n - m$$



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN MỘNG HY

BÀI TẬP HÌNH HỌC CAO CẤP

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh
VŨ BÁ HOÀ

11 – 2007/CXB/269 – 2119/GD   Mã số : 7K495t7 - DAI

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn **BÀI TẬP HÌNH HỌC CAO CẤP** *này được biên soạn cùng với giáo trình* **HÌNH HỌC CAO CẤP** *(đã được xuất bản) nhằm mục đích phục vụ cho việc học tập của sinh viên ngành Toán hệ chính quy, hệ tại chức và các hệ đào tạo khác của Trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh. Tài liệu này còn có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho sinh viên Toán ở các trường Cao đẳng Sư phạm và giáo viên Toán các trường phổ thông trong việc tìm hiểu và nghiên cứu hình học.*

Nội dung cuốn bài tập này gồm có bốn chương :

Chương 1 : Bài tập về không gian afin và hình học afin;

Chương 2 : Bài tập về không gian Ơclit và hình học Ơclit;

Chương 3 : Bài tập về không gian xạ ảnh và hình học xạ ảnh.

Chương 4 : Ôn tập

Ở đầu mỗi chương có phần tóm tắt lí thuyết để giúp cho bạn đọc có tài liệu nghiên cứu khi cần thiết. Các đề ra được sắp xếp, lựa chọn dựa theo yêu cầu của môn học. Riêng các bài tập quan trọng được trình bày khá chi tiết giúp bạn đọc nắm được những kiến thức và kĩ năng cơ bản.

Có một số bài tập được trình bày bằng các cách giải khác nhau, đồng thời có kèm theo những điều lưu ý hoặc nhận xét cần thiết, giúp bạn đọc hiểu sâu hơn về nội dung chủ yếu của môn học. Đối với các bài tập có tính chất rèn luyện kĩ năng và ôn tập thì lời giải được trình bày ngắn gọn có tính chất hướng *dẫn hoặc chỉ cho biết kết quả. Đối với chương "CÁC BÀI TOÁN ÔN TẬP" có phần hệ thống lại các kiến thức cơ bản của môn học được trình bày ở đầu chương và sau đó là các đề toán có tính chất ôn tập chung đồng thời kèm theo phần hướng dẫn, hoặc trình bày cách giải tóm tắt, hoặc cho đáp số.*

Tài liệu này đã được chỉnh lí và bổ sung từ các bài giảng mà tác giả đã thực hiện trong nhiều năm; nhưng chắc rằng vẫn còn những sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được nhiều ý kiến góp ý của bạn đọc để có thể làm cho chất lượng cuốn sách được tốt hơn trong các lần tái bản sắp tới.

Chúng tôi xin chân thành cám ơn các đồng chí cán bộ chuyên môn và các đồng chí cán bộ lãnh đạo Nhà xuất bản Giáo dục đã tạo điều kiện thuận lợi cho cuốn sách được ra mắt bạn đọc.

Thành phố Hồ Chí Minh tháng 6 năm 2001

TÁC GIẢ

CHƯƠNG I

BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN AFIN VÀ HÌNH HỌC AFIN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

§1. KHÔNG GIAN AFIN

1.Định nghĩa

Cho tập hợp **A** khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là *điểm*, cho **V** là một không gian vectơ trên trường **K** và cho ánh xạ :

f: **A** × **A** → **V** được kí hiệu là $f(M, N) = \overrightarrow{MN}$ với các điểm M, N thuộc **A** và vectơ $\overrightarrow{MN}$ thuộc **V**.

Bộ ba (**A**, f, **V**) gọi là *không gian afin* nếu hai tiên đề sau đây được thỏa mãn:

i) Với mọi điểm M thuộc **A** và mọi vectơ $\vec{u}$ thuộc **V** có duy nhất điểm N thuộc **A** sao cho $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.

ii) Với mọi ba điểm M, N, P thuộc **A** ta luôn có:

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}.$$

Khi đó ta nói rằng không gian afin (**A**, f, **V**) *liên kết với không gian vectơ* **V** *trên trường* **K** và được gọi tắt là *không gian afin* **A** *trên trường* **K**. Không gian vectơ liên kết **V** còn được kí hiệu là $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, được gọi là *nền* của không gian afin **A**.

Nếu **V** là không gian vectơ thực nghĩa là **K** = **R** ta nói rằng

A là một *không gian afin thực*. Nếu **V** là không gian vectơ phức nghĩa là **K** = **C** ta nói rằng **A** là một *không gian afin phức*.

Không gian afin **A** gọi là *n chiều* nếu dim **V** = n và được kí hiệu dim **A** = n hay $\mathbf{A}^n$ (liên kết với không gian $\mathbf{V}^n$).

2. Một số tính chất đơn giản của không gian afin A

a) Với mọi điểm M ∈ **A** thì $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

b) Với mọi điểm M, N ∈ **A** mà $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ thì M ≡ N.

c) Với mọi cặp điểm M, N ∈ **A** thì $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.

d) Với A, B, C, D ∈ **A** ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

e) Với ba điểm bất kì O, A, B ∈ **A** ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

3. Hệ điểm độc lập

a) Định nghĩa. Hệ m+1 điểm A_0, A_1, ..., A_m (m ≥ 1) của không gian afin **A** gọi là *độc lập* nếu m vectơ $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, ..., $\overrightarrow{A_0A_m}$ của không gian vectơ $\vec{\mathbf{A}}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính. Hệ gồm một điểm A_0 bất kì (tức trường hợp m = 0) luôn luôn được xem là độc lập.

b) Chú ý. Trong định nghĩa nêu trên, điểm A_0 có vai trò bình đẳng như các điểm A_i khác.

c) Định lí. Trong không gian n chiều $\mathbf{A}^n$ luôn luôn có những hệ m điểm độc lập với 0 ≤ m ≤ n+1. Mọi hệ điểm nhiều hơn n+1 điểm đều không độc lập.

§2. MỤC TIÊU AFIN VÀ TỌA ĐỘ AFIN

1. Mục tiêu afin

Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$, một tập hợp có thứ tự gồm n+1 điểm độc lập $\{E_0, E_1, ..., E_n\}$ của $\mathbf{A}^n$ tạo nên một mục tiêu afin của $\mathbf{A}^n$. Điểm E_0 gọi là *gốc* của mục tiêu và các điểm còn lại

E_i gọi là các đỉnh thứ i của mục tiêu.

Ta kí hiệu mục tiêu afin nói trên là $\{E_0; E_i\}$ với i = 1, 2, ..., n.

Chú ý. Các vectơ $\vec{e_i} = \overrightarrow{E_0E_i}$ với i = 1, 2, ..., n là một cơ sở của không gian vectơ nền V^n của $\mathbf{A}^n$. Ta có ứng với một mục tiêu afin chỉ có một cơ sở nền duy nhất, nhưng ngược lại với một cơ sở $\{\vec{e_i}\}$, i = 1, 2, ..., n của V^n có thể đặt tương ứng với nhiều mục tiêu khác nhau trong $\mathbf{A}^n$. Ta có thể kí hiệu mục tiêu afin ứng với cơ sở $\{\vec{e_i}\}$ là $\{E_0; \vec{e_i}\}$ trong đó E_0 là gốc của mục tiêu afin.

2. Tọa độ afin của một điểm

Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ cho mục tiêu afin $\{O; \vec{e_i}\}$. Với mỗi điểm X thuộc không gian afin $\mathbf{A}^n$ ta có vectơ $\overrightarrow{OX}$ thuộc $\vec{\mathbf{A}}^n$ và do đó có duy nhất n phần tử x_1, x_2, ..., x_n của trường **K** sao cho:

$$\overrightarrow{OX} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \ldots + x_n\vec{e_n}.$$

Bộ n phần tử (x_1, x_2, ..., x_n) có thứ tự đó được gọi là *tọa độ afin của điểm* X đối với mục tiêu đã chọn và kí hiệu :

$X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hay $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hoặc ngắn gọn hơn $X(x_i)$ hay $X = (x_i)$.

Chú ý rằng nếu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ thì vectơ $\overrightarrow{XY}$ có tọa độ là $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)$ đối với cơ sở $\varepsilon = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n})$ của không gian vectơ $\vec{\mathbf{A}}^n$.

3. Đổi mục tiêu afin

Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho hai mục tiêu afin $\{E_0; E_i\}$ và $\{E'_0; E'_i\}$ lần lượt ứng với hai cơ sở nền là $\{\vec{e_i}\}$ và $\{\vec{e'_i}\}$ với i =1, 2, ..., n. Giả sử các điểm E'_i có tọa độ đối với mục tiêu $\{E_0; E_i\}$ là:

$$E'_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \quad \text{với } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ta có ma trận chuyển C từ cơ sở $\{E_oE_i\}$ sang cơ sở $\{E'_oE'_i\}$ là:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{01} & a_{12} - a_{02} & \dots & a_{1n} - a_{0n} \\ a_{21} - a_{01} & a_{22} - a_{02} & \dots & a_{2n} - a_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - a_{01} & a_{n2} - a_{02} & \dots & a_{nn} - a_{0n} \end{bmatrix}$$

Ma trận C cũng được gọi là *ma trận chuyển* từ mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ sang mục tiêu $\{E'_o; E'_i\}$. Ta có det C ≠ 0 và C là không suy biến.

Giả sử X là một điểm tùy ý của không gian afin $\mathbf{A}^n$ và lần lượt có tọa độ đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ và $\{E'_o; E'_i\}$ là $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ thì khi đó công thức biểu thị sự liên hệ tọa độ của cùng một điểm X đối với hai mục tiêu nói trên là công thức đổi mục tiêu sau đây:

$$\boxed{[x] = C^*[x'] + [a_o]}$$

trong đó [x], [x′] là ma trận cột tọa độ của điểm X đối với mục tiêu afin $\{E_o; E_i\}$ và $\{E'_o; E'_i\}$, C* là ma trận chuyển vị của ma trận chuyển C, còn $[a_o]$ là ma trận cột tọa độ của điểm E'_o đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$.

§3. CÁC PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN AFIN

1. Định nghĩa

Cho không gian afin **A** liên kết với không gian vectơ $\vec{\mathbf{A}}$. Gọi I là một điểm của **A** và $\vec{\alpha}$ là một không gian con của $\vec{\mathbf{A}}$. Khi đó tập hợp những điểm M của **A** sao cho $\overrightarrow{IM}$ thuộc $\vec{\alpha}$ được gọi là cái phẳng afin α đi qua điểm I và có phương $\vec{\alpha}$.

$$\alpha = \left\{ M \in \mathbf{A} \,\middle|\, \overrightarrow{IM} \in \vec{\alpha} \subset \vec{\mathbf{A}} \right\}$$

Nếu α có số chiều bằng m thì α gọi là *cái phẳng m-chiều*, được gọi tắt là *m- phẳng*.

Như vậy 0- phẳng là *điểm*, 1- phẳng là *đường thẳng*, 2- phẳng là *mặt phẳng* và (n-1) - phẳng gọi là *siêu phẳng*.

2. Định lí 1

Nếu α là m-phẳng của không gian afin **A** và có phương $\vec{\alpha}$ thì α là một không gian afin m- chiều liên kết với không gian vectơ $\vec{\alpha}$.

Do đó ta thường kí hiệu m- phẳng afin là $\mathbf{A}^m$.

3. Định lí 2

Qua m+1 điểm độc lập của $\mathbf{A}^n$ có một và chỉ một m-phẳng.

4. Phương trình tham số của m - phẳng

Trong $\mathbf{A}^n$ cho m - phẳng $\mathbf{A}^m$ xác định bởi **m +1** điểm độc lập:

$$A_o, A_1, A_2, \ldots, A_m.$$

Giả sử đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ cho trước, các điểm A_i có tọa độ là:

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \qquad \text{với } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$$X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}^m \Leftrightarrow \overrightarrow{A_oX} \in \mathbf{V}^m.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_oX} = t_1\overrightarrow{A_oA_1} + t_2\overrightarrow{A_oA_2} + \ldots + t_m\overrightarrow{A_oA_m}$$

Ta có phương trình tham số của m- phẳng $\mathbf{A}^m$ dưới dạng ma trận là:

$$\boxed{[x] = [a_o] + t_1([a_1] - [a_o]) + t_2([a_2] - [a_o]) + \ldots + t_m([a_m] - [a_o])}$$

Nếu viết dưới dạng tọa độ ta có n phương trình sau:

$$\boxed{\begin{gathered} x_i = a_{oi} + t_1(a_{1i} - a_{oi}) + t_2(a_{2i} - a_{oi}) + \ldots + t_m(a_{mi} - a_{oi}) \\ \text{với } i = 1, 2, \ldots, n \end{gathered}}$$

5. Phương trình tổng quát của A^m

Mỗi m- phẳng trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ được biểu thị bằng một hệ phương trình tuyến tính có hạng bằng n- m. Ngược lại trong $\mathbf{A}^n$, một hệ phương trình tuyến tính bằng n-m đều biểu thị cho một m-phẳng hoàn toàn xác định. Phương trình tổng quát của một m- phẳng có dạng:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i = 0 \qquad \text{với} \quad i = 1, 2, \ldots, n\text{-}m}$$

Trong phương trình trên ma trận $[a_{ij}]$ luôn luôn có hạng bằng $n - m$.

6. Vị trí tương đối của các phẳng afin trong A^n

Trong $\mathbf{A}^n$ giả sử cho p-phẳng $\mathbf{A}^p$ có phương $\mathbf{V}^p$ và q -phẳng $\mathbf{A}^q$ có phương $\mathbf{V}^q$. Giả sử $p \le q$. Để xét vị trí tương đối của hai cái phẳng nói trên ta cần xét hai yếu tố:

- Phương chung: $\mathbf{V}^p \cap \mathbf{V}^q$
- Điểm chung : $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q$.

Ta có bảng tóm tắt sau đây:

Phương chung / Điểm chung	$\mathbf{V}^p \cap \mathbf{V}^q = \mathbf{V}^r$, $(r > 0)$	$\mathbf{V}^p \cap \mathbf{V}^q = \{\bar{0}\}$
$\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q \neq \varnothing$	$r < p < q$: $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q$ là cái phẳng có phương $\mathbf{V}^r$ $r = p \le q$: $\mathbf{A}^p \subset \mathbf{A}^q$	$\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q = 1$ điểm
$\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q = \varnothing$	$r = p \le q$: $\mathbf{A}^p \,//\, \mathbf{A}^q$ $r = p = q$: $\mathbf{A}^p \,//\, \mathbf{A}^q$ $r < p \le q$: $\mathbf{A}^p$ và $\mathbf{A}^q$ chéo nhau không hoàn toàn	$\mathbf{A}^p$ và $\mathbf{A}^q$ chéo nhau (hoàn toàn)

7. Tổng và giao của hai cái phẳng

a) Định nghĩa. Tổng của hai cái phẳng $\mathbf{A}^p$ và $\mathbf{A}^q$ được kí hiệu là $\mathbf{A}^p + \mathbf{A}^q$ là cái phẳng có số chiều bé nhất chứa đồng thời cả $\mathbf{A}^p$ và $\mathbf{A}^q$.

Giao của hai cái phẳng $\mathbf{A}^p$ và $\mathbf{A}^q$ được kí hiệu là $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q$ là cái phẳng có số chiều lớn nhất chứa trong $\mathbf{A}^p$ và $\mathbf{A}^q$.

CHÚ Ý. Có thể định nghĩa tổng $\mathbf{A}^p + \mathbf{A}^q$ là giao của tất cả các phẳng chứa $\mathbf{A}^p$ và $\mathbf{A}^q$. Cần lưu ý rằng khái niệm tổng của hai cái phẳng khác với khái niệm tổng theo nghĩa tập hợp. Thí dụ tổng của hai đường thẳng cắt nhau là mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó còn tổng của hai đường thẳng theo nghĩa tập hợp chỉ gồm có tập hợp tất cả các điểm thuộc hai đường thẳng đó mà thôi.

b) Các định lí

Định lí 1. Giao của hai cái phẳng α và β hoặc là tập rỗng, hoặc là một cái phẳng có phương $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Định lí 2. Hai cái phẳng α và β cắt nhau khi và chỉ khi với mọi điểm A thuộc α và mọi điểm B thuộc β ta có $\overrightarrow{AB}$ thuộc $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

c) Định lí về số chiều của tổng và giao của hai cái phẳng

Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho hai cái phẳng α và β lần lượt có phương là $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$.

- Nếu α và β cắt nhau ($\alpha \cap \beta \neq \varnothing$) thì:

$$\dim(\alpha + \beta) = \dim\alpha + \dim\beta - \dim(\alpha \cap \beta)$$

- Nếu α và β không cắt nhau ($\alpha \cap \beta = \varnothing$) thì:

$$\dim(\alpha + \beta) = \dim\alpha + \dim\beta - \dim(\alpha \cap \beta) + 1$$

d) Giao của một siêu phẳng $\mathbf{A}^{n-1}$ và một m -phẳng $\mathbf{A}^m$ $(1 \leq m \leq n-1)$

Định lí: • hoặc $\mathbf{A}^m$ cùng phương với $\mathbf{A}^{n-1}$

• hoặc $\mathbf{A}^m \cap \mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{A}^{m-1}$

§4.TÂM TỈ CỰ CỦA MỘT HỆ ĐIỂM

1. Định lí

Cho hệ k điểm $P_1, P_2, \ldots, P_k$ của không gian afin **A** và k phần tử $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ thuộc trường **K** sao cho $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$. Khi đó *có một và chỉ một điểm G* thuộc **A** sao cho:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}}$$

CHÚ Ý: Lấy một điểm O tùy ý của không gian afin **A** thì điểm G xác định bởi biểu thức:

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OP_i}}$$

2. Định nghĩa

Điểm G nói trong định lí trên là *tâm tỉ cự của hệ điểm P_i gắn với họ hệ số λ_i.*

• Trường hợp đặc biệt nếu các λ_i bằng nhau, điểm G gọi là trọng tâm của hệ điểm $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Nếu lấy các $\lambda_i = 1$, khi đó ta có trọng tâm G của hệ k điểm P_i được xác định bởi hệ thức:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{OP_i}$$

• Khi k = 2 trọng tâm G của hai điểm P_1 và P_2 còn gọi là trung điểm của cặp điểm (P_1, P_2).

3. Định lí

Tập hợp tất cả các tâm tỉ cự của hệ điểm $P_0, P_1, \ldots, P_k$ với họ hệ số khác nhau là cái phẳng có số chiều bé nhất chứa các điểm P_i ấy.

4. Định lí

Cho m-phẳng α đi qua m+1 điểm độc lập $P_o, P_1, \ldots, P_m$ và một điểm O tùy ý. Điều kiện cần và đủ để điểm M thuộc α là:

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OP_i} \quad \text{trong đó } \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1.$$

§5.TẬP LỒI TRONG KHÔNG GIAN AFIN THỰC

1. Đoạn thẳng

Cho hai điểm P và Q phân biệt của không gian afin thực **A**. Điểm M thuộc đường thẳng d đi qua P và Q khi và chỉ khi với điểm O tùy ý thì:

$$\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{OQ} \text{ với } \lambda + \mu = 1.$$

hay là $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OP} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OQ}$ với $\lambda \in \mathbf{R}$.

Định nghĩa. Trong không gian afin thực A, cho hai điểm P, Q phân biệt, tập hợp những điểm M sao cho với một điểm O tùy ý ta có :

$\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OP} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OQ}$ với $0 \le \lambda \le 1$ được gọi là *đoạn thẳng PQ*. Khi $\lambda = 1$ ta có điểm P, khi $\lambda = 0$ ta có điểm Q, còn những điểm khác của đoạn thẳng PQ ứng với $0 < \lambda < 1$.

Hai điểm P, Q gọi là hai *mút* của đoạn thẳng PQ. Những điểm khác của đoạn thẳng PQ gọi là *ở giữa* P và Q.

2. Tỉ số đơn của hệ ba điểm thẳng hàng

Định nghĩa. Cho hai điểm P và Q phân biệt của không gian afin thực **A**. Điểm M thuộc đường thẳng d đi qua P và Q đồng thời $M \neq Q$ khi và chỉ khi có số $k \in \mathbf{R} - \{1\}$ để:

$$\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MQ}$$

Khi đó k gọi là tỉ số đơn của hệ ba điểm M, P, Q thẳng hàng lấy theo thứ tự đó và được kí hiệu $k = (MPQ)$.

Trung điểm M của đoạn thẳng PQ xác định bởi tỉ số đơn $(MPQ) = -1$.

Thứ tự các điểm trong cách viết tỉ số đơn. Nếu thay đổi thứ tự các điểm trong cách viết tỉ số đơn thì giá trị của tỉ số đơn đó thay đổi. Ta có:

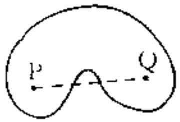
$$(MPQ) = \frac{1}{(MQP)}, \quad (PMQ) = \frac{(MPQ)}{(MPQ) - 1}, \quad (QPM) = 1 - (MPQ)$$

Trường hợp hai điểm trong ba điểm M, P, Q trùng nhau ta quy ước:

$$(MMQ) = 0, \quad (MPM) = \infty, \quad (MPP) = 1.$$

3. Tập lồi

Định nghĩa. Một tập X trong không gian afin thực **A** gọi là một tập lồi nếu với mọi điểm P, Q thuộc X thì đoạn thẳng PQ nằm hoàn toàn trong X.



Tập không lồi

Tập lồi

4. Đơn hình m chiều

a) Định nghĩa. Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ cho m+1 điểm độc lập $A_0, A_1, \ldots, A_m$ $(0 \leq m \leq n)$ có tọa độ đối với một mục tiêu afin cho trước là:

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \text{ với } i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Tập hợp các điểm X của $\mathbf{A}^n$ có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thỏa mãn hệ phương trình sau:

$$x_i = t_0 a_{0i} + t_1 a_{1i} + t_2 a_{2i} + \ldots + t_m a_{mi}$$

với $i = 1, 2, \ldots, n$ và điều kiện $t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_m = 1$

trong đó các $t_j \geq 0$ với $j = 0, 1, 2, \ldots, m$

được gọi là đơn hình m chiều hoặc m-đơn hình. Các điểm $A_0, A_1, \ldots, A_m$ gọi là các *đỉnh* của đơn hình đó.

b) Định lí. Đơn hình m chiều là một tập lồi.

5. Hình hộp m chiều

a) Định nghĩa. Cho m+1 điểm độc lập P_0, P_1, ..., P_m của không gian afin thực $\mathbf{A}^n$. Tập hợp những điểm M trong $\mathbf{A}^n$ sao cho:

$\overrightarrow{PM} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}$ với $0 \leq \lambda_i \leq 1$ được gọi là hình hộp m chiều hay gọi tắt là m- hộp. Các điểm P_i gọi là đỉnh của m - hộp.

b) Định lí. Hình hộp m chiều là một tập lồi.

§6. ÁNH XẠ AFIN CỦA CÁC KHÔNG GIAN AFIN VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI CỦA KHÔNG GIAN AFIN

1. Định nghĩa

Cho **A** và **A'** là hai không gian afin trên trường **K** liên kết với hai không gian vectơ **V** và **V'**. Ánh xạ f: **A** → **A'** được gọi là *ánh xạ afin* nếu có ánh xạ tuyến tính φ: **V** → **V'** sao cho mọi cặp điểm M, N∈**A** và ảnh M' = f(M), N' = f(N) ta có $\overrightarrow{M'N'} = \varphi(\overrightarrow{MN})$

Ánh xạ tuyến tính φ: **V** → **V'** được gọi là *ánh xạ tuyến tính* liên kết với ánh xạ afin f.

2. Tính chất của ánh xạ afin

a) Mỗi ánh xạ afin f: **A** → **A'** chỉ có một ánh xạ tuyến tính liên kết duy nhất φ: **V** → **V'**.

b) Với mỗi ánh xạ tuyến tính φ: **V** → **V'** và với cặp điểm I∈ **A** và I'∈ **A'**, xác định duy nhất một ánh xạ afin f: **A** → **A'** nhận φ là ánh xạ tuyến tính liên kết và có f(I) = I'.

c) Tích của hai ánh xạ afin f: **A** → **A'** và g: **A'** → **A''** là một ánh xạ afin và được kí hiệu là gof. Ánh xạ liên kết của tích gof này là tích của hai ánh xạ liên kết của hai ánh xạ f và g.

d) Cho n+1 điểm độc lập $M_o, M_1, \ldots, M_n$ trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ và cho n+1 điểm tùy ý $M'_o, M'_1, \ldots, M'_n$ trong không gian afin $\mathbf{A}'$. Khi đó có một và chỉ một ánh xạ afin duy nhất $f: \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}'$ sao cho $f(M_i) = M'_i$ với $i = 0, 1, \ldots, n$.

e) Ánh xạ afin $f: \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ biến một m - phẳng của **A** thành một l - phẳng của **A'** với $l \leq m$.

3. Đẳng cấu afin

Nếu ánh xạ afin $f: \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ là một song ánh thì khi đó f là *phép đẳng cấu afin* của không gian afin **A** lên không gian afin **A'**. Khi đó $\varphi(\vec{\mathbf{A}}) = \vec{\mathbf{A}'}$ là phép đẳng cấu tuyến tính giữa hai không gian có cùng số chiều là $\vec{\mathbf{A}}$ và $\vec{\mathbf{A}'}$.

Hệ quả. Trong $\mathbf{A}^n$ và $\mathbf{A}'^n$ lần lượt cho hai mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ và $\{E'_o; E'_i\}$ với i =1, 2, ..., n thì có duy nhất một phép đẳng cấu afin $f: \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}'^n$ sao cho $f(E_i) = E'_i$ với $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

4. Phép biến đổi afin

a) Định nghĩa. Phép đẳng cấu afin $f: \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ của không gian afin **A** lên chính nó được gọi là *phép biến đổi afin f* của không gian afin **A** và được gọi tắt là *phép afin*.

Khi đó ánh xạ tuyến tính liên kết $\varphi: \vec{\mathbf{A}} \to \vec{\mathbf{A}}$ là một phép tự đẳng cấu tuyến tính và còn được gọi là phép biến đổi tuyến tính.

b) Định lí 1. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho hai hệ điểm độc lập là $A_o, A_1, \ldots, A_n$ và $A'_o, A'_1, \ldots, A'_n$. Khi đó có một phép biến đổi afin duy nhất $f: \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ sao cho $f(A_i) = A'_i$ với $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

c) Định lí 2. Tích của hai phép biến đổi afin là một phép biến đổi afin có phép biến đổi tuyến tính liên kết là tích các phép biến đổi tuyến tính liên kết của hai phép biến đổi afin đã cho.

Đảo ngược của một phép biến đổi afin là một phép biến đổi afin có phép biến đổi tuyến tính liên kết là đảo ngược của phép biến đổi tuyến tính liên kết với phép biến đổi afin đã cho.

d) Định lí 3. Phép biến đổi afin biến một m - phẳng thành một m - phẳng.

Hệ quả. Phép biến đổi afin biến một đường thẳng thành một đường thẳng.

e) Định lí 4. Phép biến đổi afin f: **A** → **A** bảo tồn tỉ số đơn của hệ ba điểm thẳng hàng.

5. Phương trình của phép biến đổi afin

a) Trong $\mathbf{A}^n$ cho một mục tiêu afin $\{E_o; E_i\}$ và f: $\mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ là một phép biến đổi afin. Sự liên hệ giữa toạ độ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ của một điểm $X \in \mathbf{A}^n$ và tọa độ $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ của điểm $X' = f(X)$ đối với mục tiêu cho trước được biểu thị bằng phương trình sau đây:

$$\boxed{[x'] = C^*[x] + [b]}$$

trong đó [x'], [x], [b] lần lượt là ma trận cột tọa độ của các điểm $X' = f(X)$, X, $E'_o = f(E_o)$ đối với mục tiêu cho trước.

Ma trận C* không suy biến được gọi là *ma trận của phép biến đổi afin* f và ma trận C* này chính là ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ liên kết của f đối với cơ sở nền $\left\{\overline{E_oE_i}\right\}$ (i = 1, 2, ..., n) tương ứng. Ta có $\varphi(\overline{E_oE_i}) = \overline{E'_oE'_i}$ và $\varphi(\overline{E_oX}) = \overline{E'_oX'}$.

b) Ngược lại, trong $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ đã chọn mỗi phương trình có dạng :

$$[x'] = B[x] + [b]$$

trong đó B là một ma trận vuông cấp n không suy biến đều là phương trình của một phép biến đổi afin nào đó.

6. Mối quan hệ giữa phương trình của một phép biến đổi afin đối với hai mục tiêu afin khác nhau

Trong $\mathbf{A}^n$, giả sử đối với mục tiêu afin $\{E_o; E_i\}$ phép afin f có phương trình là :

$$[x'] = B[x] + [b]$$

Bây giờ đối với mục tiêu afin khác là $\{E'_0; E'_i\}$ phép afin f đó có phương trình là:

$$[x'] = B'[x] + [b'].$$

Khi đó ta có hệ thức liên hệ giữa hai ma trận B và B' như sau :

$$\boxed{B' = (C^*)^{-1}.B.C^*}$$

Trong đó C là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{E_0E_i}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{E'_0E'_i}\}$ và C^* là ma trận chuyển vị của C.

7. Ảnh của đơn hình m chiều và của hình hộp m chiều qua phép biến đổi afin f

a) Định lí : Qua phép biến đổi afin, một đơn hình m chiều biến thành một đơn hình m chiều.

b) Định lí. Qua phép biến đổi afin, một m - hộp biến thành một m- hộp.

§7. NHÓM CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI AFIN CỦA KHÔNG GIAN AFIN VÀ HÌNH HỌC AFIN

1. Các định nghĩa

a) *Không gian hình học* là một tập hợp M ≠ ∅ và mỗi phần tử của nó được gọi là *điểm*. Một tập hợp con H của M gọi là một *hình*. Một song ánh f: M → M của M lên chính nó là một *phép biến đổi*. Tập hợp các phép biến đổi của M làm thành một *nhóm* đối với phép toán lấy tích các song ánh.

b) Một tập hợp F không rỗng gồm những phép biến đổi f nào đó của không gian M được gọi là một nhóm các phép biến đổi với phép toán là tích của hai phép biến đổi nếu thỏa mãn hai điều kiện sau đây :

– Nếu f và g là hai phép biến đổi bất kì thuộc tập hợp F thì tích $g_o f$ cũng là một phép biến đổi của F.

– Nếu f là phép biến đổi thuộc F thì phép đảo ngược f^{-1} cũng thuộc F.

Như vậy F là một *nhóm con* của nhóm các phép biến đổi của không gian M.

c) Gọi F là một nhóm các phép biến đổi nào đó của không gian M. Giả sử H_1 và H_2 là hai hình nào đó của không gian M. Khi đó nếu có một phép biến đổi $f \in F$ biến hình H_1 thành H_2, ta nói rằng *hình H_1 tương đương với hình H_2 đối với nhóm F*.

Ta kí hiệu $f(H_1) = H_2$ hay $H_1 \overset{(F)}{\sim} H_2$.

2. Các bất biến đối với nhóm các phép biến đổi afin

a) Định nghĩa. Một tính chất của hình H sẽ gọi là *bất biến đối với nhóm F* nếu mọi hình H_1 tương đương với H đối với nhóm F đều có tính chất đó.

Các tính chất bất biến đối với nhóm các phép biến đổi afin trong không gian afin **A** được gọi là các *tính chất afin* hay các *bất biến afin*.

b) Các bất biến afin và các khái niệm afin

– Các bất biến afin như tính chất độc lập hay không độc lập của một hệ điểm. Tính chất song song, cắt nhau hay chéo nhau của hai cái phẳng cũng là những bất biến afin.

– Các khái niệm được xây dựng từ các bất biến afin được gọi là các *khái niệm afin*. Thí dụ hình tam giác, đường trung tuyến của một tam giác, hình bình hành, m- phẳng, tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng ... là những khái niệm afin. (Các khái niệm như hình vuông, hình tam giác đều, hình lập phương, hình tròn không phải là những khái niệm afin vì chúng thay đổi tính chất qua các phép biến đổi afin).

3. Hình học afin

a) Nhóm các phép biến đổi afin . Tập hợp các phép biến đổi afin trong không gian afin lập thành *nhóm các phép biến đổi afin* hay gọi tắt là *nhóm afin* .

b) Hình học afin. Môn học nghiên cứu các bất biến của nhóm afin gọi là *hình học afin*. Nói cách khác tập hợp các bất biến của nhóm afin tạo nên môn hình học afin của không gian afin.

§8. CÁC SIÊU MẶT BẬC HAI TRONG KHÔNG GIAN AFIN

1. Định nghĩa

Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$, một siêu mặt bậc hai (S) là tập hợp tất cả những điểm X có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đối với một mục tiêu afin $\{E_o; E_i\}$ đã chọn thỏa mãn một phương trình bậc hai đối với các x_i có dạng :

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_o = 0} \qquad (1)$$

trong đó các hệ số a_{ij}, a_i, a_o đều là các số thực, các a_{ij} không đồng thời bằng 0 và $a_{ij} = a_{ji}$.

2. Dạng ma trận của phương trình siêu mặt bậc hai

Phương trình của siêu mặt bậc hai (S) ở trên có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\boxed{[x]^* A[x] + 2[a]^*[x] + a_o = 0}$$

trong đó $A = [a_{ij}]$ là ma trận đối xứng, vuông, cấp n nên $A = A^*$.

3. Định lí

Qua một phép biến đổi afin, một siêu mặt bậc hai biến thành một siêu mặt bậc hai.

4. Giao của siêu mặt bậc hai với đường thẳng

Trong A^n cho siêu mặt bậc hai (S) và đường thẳng (d) :

$$(S): \ [x]^*A[x] + 2[a]^*[x] + a_o = 0$$

$$(d): \ [x] = [b] + [c]\,t$$

Các giao điểm (S) $\cap$ (d) có tọa độ thỏa mãn phương trình sau :

$$\boxed{[c]^*A[c].t^2 + 2\,Pt + Q = 0}$$

trong đó $P = [b]^*A[c] + [a]^*[c]$

$$Q = [b]^*A[b] + 2[a]^*[b] + a_o$$

• Nếu $[c]^*A[c] \neq 0$: đường thẳng (d) cắt siêu mặt bậc hai (S) tại hai điểm phân biệt, hoặc tiếp xúc hoặc không cắt (S).

• Nếu $[c]^*A[c] = 0$ và $P \neq 0$ đường thẳng (d) cắt (S) tại một điểm.

• Nếu $[c]^*A[c] = 0$, $P = 0$, $Q \neq 0$ đường thẳng (d) không cắt (S).

• Nếu $[c]^*A[c] = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, toàn bộ (d) $\subset$ (S).

5. Tâm của siêu mặt bậc hai

a) Định nghĩa. Tâm của siêu mặt bậc hai (S) là một điểm mà khi ta chọn điểm đó làm gốc mục tiêu thì phương trình của (S) có dạng :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + a_o = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad [x]^*A[x] + a_o = 0 \quad \text{với} \quad A = [a_{ij}]$$

b) Định lí. Trong không gian afin A^n với mục tiêu đã chọn, cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$[x]^*A[x] + 2[a]^*[x] + a_o = 0$$

Điều kiện cần và đủ để (S) có tâm là $\det A \neq 0$. Nếu $\det A = 0$ thì (S) không có tâm hoặc có vô số tâm.

• Tọa độ tâm của siêu mặt bậc hai (S) là nghiệm của hệ phương trình tổng quát gồm n phương trình có dạng :

$$\boxed{A[x] + [a] = 0}$$

với $A = [a_{ij}]$ và [a] là ma trận cột tọa độ có trong phương trình của (S).

6. Điểm kì dị của siêu mặt bậc hai

a) Định nghĩa. Một điểm I là *điểm kì dị* của siêu mặt bậc hai (S) nếu I thuộc (S) và I đồng thời là tâm của (S).

b) Cách tìm . Điểm kì dị của (S) có tọa độ thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} [x]^*A[x] + 2[a]^*[x] + a_o = 0 \\ A[x] + [a] = 0 \end{cases}$$

7. Phương tiệm cận và đường tiệm cận của siêu mặt bậc hai

a) Định nghĩa. Cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$[x]^*A[x] + 2[a]^*[x] + a_o = 0$$

Khi đó vectơ $\vec{c} \neq \vec{0}$ có tọa độ $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ gọi là *phương tiệm cận* của siêu mặt bậc hai (S) nếu

$$[c]^*A[c] = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_ic_j = 0$$

Người ta còn gọi phương tiệm cận của siêu mặt bậc hai là phương vô tận của siêu mặt bậc hai đó. Đường thẳng d đi qua tâm của (S) gọi là *đường tiệm cận* của (S) nếu phương của nó là phương tiệm cận và nó không cắt (S).

b) Siêu phẳng kính liên hợp với phương $\vec{c}$

Định lí. Cho hai điểm M_1, M_2 thay đổi của một siêu mặt bậc hai (S) sao cho đường thẳng M_1M_2 có phương không đổi $\vec{c} \neq \vec{0}$

mà không phải là phương tiệm cận. Khi đó tập hợp trung điểm các đoạn thẳng M_1M_2 nằm trên một siêu phẳng. Siêu phẳng đó gọi là *siêu phẳng kính của (S) liên hợp với phương* $\vec{c}$.

Ngược lại phương $\vec{c}$ cũng được gọi là *phương liên hợp với siêu phẳng kính đó.*

8.Dạng chuẩn tắc của siêu mặt bậc hai trong A^n

Định lí. Bằng cách chọn mục tiêu tọa độ thích hợp, mọi siêu mặt bậc hai (S) trong không gian afin A^n đều có phương trình thuộc một trong ba dạng sau đây :

$$(I) : \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i X_i^2 = 1 \quad , \ \varepsilon_i = \pm 1, \ 1 \le r \le n$$

$$(II) : \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i X_i^2 = 0 \quad , \ \varepsilon_i = \pm 1, \ 1 \le r \le n$$

$$(III) : \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i X_i^2 = 2X_{r+1} \quad , \ \varepsilon_i = \pm 1, \ 1 \le r \le n-1$$

Ba dạng trên gọi là *phương trình chuẩn tắc* của siêu mặt bậc hai trong không gian afin A^n.

9. Sự phân loại afin các siêu mặt bậc hai

a) Định nghĩa. Hai siêu mặt bậc hai trong A^n gọi là cùng loại nếu phương trình chuẩn tắc của chúng có cùng một dạng, cùng với một giá trị k và r như nhau.

b) Định lí. Hai siêu mặt bậc hai gọi là tương đương afin khi và chỉ khi chúng thuộc cùng một loại.

Sự phân loại đó gọi là sự phân loại afin.

c) Thí dụ.

• Trong mặt phẳng afin A^2, dựa vào phương trình chuẩn tắc của các đường bậc hai, ta có 9 loại đường bậc hai khác nhau.

• Trong không gian afin A^3, dựa vào phương trình chuẩn tắc của các mặt bậc hai, ta có 17 loại mặt bậc hai khác nhau.

B. ĐỀ BÀI TẬP

§1, §2

1.1. Chứng minh rằng trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ một hệ m+1 điểm $A_o, A_1, ..., A_m$ là độc lập khi và chỉ khi với mọi điểm O bất kì, từ đẳng thức

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{OA_i} = \bar{0} \text{ và } \qquad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$$

ta suy ra $\lambda_o = \lambda_1 = ... = \lambda_m = 0$.

1.2. Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ cho một hình hộp ABCDA'B'C'D' có AA'// BB'// CC'// DD'. Ta chọn mục tiêu afin $\{E_o; E_1, E_2, E_3\}$ như sau : $E_o \equiv A$, $E_1 \equiv A'$, $E_2 \equiv B$, $E_3 \equiv D$. Hãy tìm tọa độ afin của các đỉnh còn lại và tọa độ tâm của các mặt bên của hình hộp.

1.3. Tìm công thức đổi mục tiêu từ $\{E_o; E_i\}$ sang $\{E'_o; E_i\}$ khi biết tọa độ của điểm E'_o đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ là $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

1.4. Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ cho hình bình hành ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Tìm công thức đổi mục tiêu khi chọn mục tiêu cũ là{A; B, D}và mục tiêu mới là {O; B, C}.

1.5. Trong mặt phẳng afin cho tam giác ABC có trọng tâm G. Tìm công thức đổi mục tiêu khi chọn mục tiêu cũ là {A; B, C} và mục tiêu mới là {G; B, C}. Áp dụng công thức đổi mục tiêu hãy tìm tọa độ mới của trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC.

1.6. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thuộc một mặt phẳng afin là với một điểm P tuỳ ý ta có:

$$\alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{PA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{PA_3} + \alpha_4 \overrightarrow{PA_4} = \vec{0}$$

với $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ trong đó ít ra có một $\alpha_i \neq 0$.

1.7. Trong mặt phẳng afin cho mục tiêu $R = \{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$. Đối với mục tiêu này cho các điểm O'(2, – 3), A(1,1), B(3, –6),M(5, –1).

Hãy tìm tọa độ của M đối với mục tiêu afin $\{O'; A, B\}$.

1.8. Cho hình bình hành ABCD trong mặt phẳng với mục tiêu afin $\{A; B, D\}$. Đối với mục tiêu này giả sử cho điểm M có tọa độ là (α, β). Hãy tính tọa độ của điểm M đối với các mục tiêu sau :

a) $\{C; B, D\}$, b) $\{B; C, A\}$, c) $\{D; C, A\}$

§3

1.9. Chứng minh rằng có một và chỉ một (m+1)-phẳng đi qua một điểm cho trước và qua một m-phẳng cho trước và không chứa điểm đó.

1.10. Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của m-phẳng P đi qua các điểm $E_o, E_1, ..., E_m$ $(m < n)$ của mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ và của phẳng Q xác định bởi các phẳng còn lại của mục tiêu Xét trường hợp khi m = n.

1.11. Cho mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ và gọi $\{k_o, k_1, ..., k_m\}$ là một tập hợp con của $\{0, 1, 2, ..., n\}$ $(m < n)$.

Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của m-phẳng đi qua các điểm $E_{k_0}, E_{k_1}, ..., E_{k_m}$.

1.12. Trong A^4 viết phương trình tổng quát của m-phẳng có số chiều bé nhất chứa điểm M(–1, 0, 2, 2) và có phương chứa các vectơ $\vec{a}(2,1,4,4)$, $\vec{b}(0,0,7,7)$.

1.13. Trong A^4 viết phương trình tổng quát của cái phẳng có số chiều bé nhất chứa các điểm $M_1(1, 1, -3, -2)$, $M_2(-2, 0, 0, 0)$, $M_3(1, 2, 0, -1)$, và có phương chứa các phương $\vec{a}(3, 3, 1, 0)$, $\vec{b}(1, 1, 1, 0)$.

1.14. Trong A^5 viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của mặt phẳng P đi qua ba điểm (2,–1,3,4,0), (–1, 1,0,1,5), (1, 2,7,6,1) và viết phương trình tổng quát của mặt phẳng P' song song với P đồng thời đi qua điểm M(0, 0, 1, 2, 3).

1.15. Viết phương trình tham số của cái phẳng cho bởi phương trình tổng quát sau đây trong $\mathbf{A}^5$:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 - 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 - 6 = 0 \end{cases}$$

1.16. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 trong không gian afin $\mathbf{A}^4$. Đường thẳng d_1 đi qua A(1, 0, –2, 1) có phương $\vec{a}(1, 2, -1, -3)$ và đường thẳng d_2 đi qua B(0, 1, 1, –1) có phương $\vec{b}(2, 3, -2, -4)$.

Viết phương trình của cái phẳng có số chiều bé nhất chứa hai đường thẳng đó.

1.17. Trong không gian $\mathbf{A}^4$:

a) Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của cái phẳng có số chiều bé nhất chứa hai đường thẳng d_1, d_2 cho bởi phương trình của chúng sau đây :

$$d_1: \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 + t \\ x_3 = 3 + t \\ x_4 = 4 + t \end{cases} \qquad d_2: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 + 1 = 0 \\ x_4 - 3 = 0 \end{cases}$$

b) Cho hai điểm A(1, 3, –1, 2), B(–1, –2, 1, 3). Hãy tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với các siêu phẳng tọa độ.

1.18. Trong $\mathbf{A}^4$ xét vị trí tương đối của hai cái phẳng P và Q cho bởi phương trình của chúng sau đây :

$$P: \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 7 = 0 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 10 = 0 \end{cases}$$

$$Q: \begin{cases} 4x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 14 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 10 = 0 \end{cases}$$

1.19. Trong $\mathbf{A}^5$ xét vị trí tương đối của hai cái phẳng P và Q sau đây:

$$P: x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

$$Q: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

1.20. Cho tập $M = \{A_o, A_1, ..., A_m\}$ gồm m+1 điểm độc lập của không gian afin $\mathbf{A}^n$. Gọi N và N' là hai tập con không rỗng và không giao nhau của M. Chứng minh rằng có hai cái phẳng A và A' chéo nhau lần lượt chứa N và N'.

1.21. Chứng minh rằng nếu hai cái phẳng A^p và A^q song song với phẳng A^r thì giao $A^p \cap A^q$ nếu có là cái phẳng song song với A^r.

1.22. Cho hai siêu phẳng A và A' cắt nhau. Nếu $A \cap A'$ song song với siêu phẳng α thì $\alpha \cap A$ và $\alpha \cap A'$ (nếu có) sẽ song song với nhau.

1.23. Cho hai cái phẳng A^p và A^q $(p \leq q)$ của không gian afin $\mathbf{A}^n$ có phương trình tổng quát là :

$$A^p: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i = 0 \quad \text{với } i = 1, 2, ..., n - p$$

$$A^q: \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + d_i = 0 \quad \text{với } i = 1, 2, ..., n - q$$

Chứng minh rằng A^p cùng phương với A^q khi và chỉ khi hệ phương trình :

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = 0 \quad \text{với } i = 1, 2, ..., n - p$$

là hệ quả của hệ phương trình :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad \text{với } i = 1, 2, ..., n - p$$

1.24. Trong không gian afin $\mathbf{A}^4$, với mục tiêu afin cho trước, hãy tìm giao điểm của đường thẳng AB với các siêu phẳng tọa độ, biết rằng :

a) $A(4, 3, -1, 2)$, $\quad B(-1, 2, 1, 5)$

b) $A(1, -1, 2, -2)$, $\quad B(3, 2, -3, 1)$

1.25. Trong không gian afin $\mathbf{A}^4$ với mục tiêu afin đã chọn hãy xét vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD cho biết :

a) A(4, 0, –1, 2), B(0, 3, 2, 1), C(1, –1, –1, 0), D(2, –1, –4, –5)

b) A(–2, 2, –2, 2), B(7, –1,7, –1), C(–1, 2, 3, –4), D(5,–1,–3, 11)

1.26. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho m-phẳng $\mathbf{A}^m$ và một điểm B không thuộc m-phẳng đó. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một m-phẳng chứa điểm B và song song với m-phẳng $\mathbf{A}^m$ đã cho.

§4, §5

1.27. Cho k điểm $M_1, M_2, ..., M_k$ của không gian afin $\mathbf{A}^n$ và $m_1, m_2, ..., m_k$ là k số thuộc trường **K** thỏa mãn điều kiện $m_1 + m_2 + ... + m_k \neq 0$.

Với một điểm S tùy ý của $\mathbf{A}^n$ ta xác định được một điểm G duy nhất gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $M_1, M_2, ..., M_k$ ứng với họ hệ số $m_1, m_2, ..., m_k$ sao cho :

$$\overline{SG} = \frac{m_1\overrightarrow{SM_1} + m_2\overrightarrow{SM_2} + ... + m_k\overrightarrow{SM_k}}{m_1 + m_2 + ... + m_k}$$

Chứng minh rằng khi đó ta có hệ thức :

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + \ldots + m_k\overrightarrow{GM_k} = \vec{0}$$

1.28. Trong $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu afin đã chọn, giả sử k điểm $M_1, M_2, ..., M_k$ có tọa độ là :

$$M_i = (x^i_1,\ x^i_2,\ ......,\ x^i_n) \qquad \text{với } i = 1, 2, ..., k$$

và tâm tỉ cự G có tọa độ $(X_1, X_2, ..., X_n)$ thỏa mãn hệ thức

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + ... + m_k\overrightarrow{GM_k} = \vec{0}$$

với $m_1 + m_2 + ... + m_k \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$X_j = \frac{m_1x_j^1 + m_2x_j^2 + ... + m_kx_j^k}{m_1 + m_2 + ... + m_k}$$

1.29. Cho m-phẳng α xác định bởi m+1 điểm độc lập P_o, P_1, ..., P_m. Chứng minh rằng α là tập hợp các tâm tỉ cự của hệ điểm đó gắn với họ các hệ số khác nhau .

1.30. Trong A^n giả sử hệ p điểm $M_1, M_2, ..., M_p$ có G là tâm tỉ cự ứng với họ các hệ số $m_1, m_2, ..., m_p$ với $m_1 + m_2 + ... + m_p \neq 0$ và H là tâm tỉ cự của hệ điểm $M_1, M_2, ..., M_k$ với $k < p$, là hệ con của hệ điểm đã cho , ứng với các hệ số m_1, m_2, ... , m_k với

$$m_1 + m_2 + ... + m_k \neq 0 .$$

Chứng minh rằng tâm tỉ cự G nói trên trùng với tâm tỉ cự C của hệ điểm (H, M_{k+1}, M_{k+2}, ..., M_p) ứng với các hệ số

$$\left(\sum_{j=1}^{k} m_j, m_{k+1}, m_{k+2}, ..., m_p\right) \text{ với } \sum_{j=1}^{k} m_j + m_{k+1} + m_{k+2} + ... + m_p \neq 0.$$

1.31. Trong A^n cho G là tâm tỉ cự các hệ điểm (P_1, P_2, ... , P_k) gắn với họ các hệ số λ_1, λ_2, ..., λ_k .

a) Chứng minh rằng nếu thay tất cả các hệ số λ_i bằng $k\lambda_i$ với $k \neq 0$ thì tâm tỉ cự G nói trên không đổi.

b) Trường hợp các hệ số $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k$ điểm G gọi là trọng tâm của hệ điểm P_1, P_2, ..., P_k. Hãy tìm trọng tâm của đoạn thẳng AB và của tam giác ABC.

1.32. Chứng minh rằng với hai điểm P và Q phân biệt tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MQ}$ với $k < 0$ là một tập lồi .

1.33. Cho một hình lồi F chứa ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Chứng minh rằng tam giác ABC thuộc F .

1.34. Cho tỉ số đơn (ABC) = λ nghĩa là $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$. Hãy chứng minh :

a) $(ABC) = \dfrac{1}{(ACB)}$; b) $(BAC) = \dfrac{(ABC)}{(ABC) - 1}$

c) $(CBA) = 1 - (ABC)$.

1.35. Cho ba m-phẳng P, Q, R song song của A^n lần lượt cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 tại P_1, Q_1, R_1 và P_2, Q_2, R_2.

Chứng minh rằng :

a) $(P_1Q_1R_1) = (P_2Q_2R_2)$

b) $\overrightarrow{Q_1Q_2} = (1-p)\overrightarrow{P_1P_2} + p\overrightarrow{R_1R_2}$ trong đó $(P_1Q_1R_1) = p$

1.36. Cho ba siêu phẳng P, Q, R của $\mathbf{A}^n$ cùng đi qua một (n–2)-phẳng. Chứng minh rằng nếu P, Q, R cùng cắt hai đường thẳng song song d_1 và d_2 lần lượt tại P_1, Q_1, R_1 và P_2, Q_2, R_2 thì $(P_1Q_1R_1) = (P_2Q_2R_2)$.

1.37. Trong $\mathbf{A}^n$ cho hai siêu phẳng α và α' có phương trình lần lượt là :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0 \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d = 0$$

a) Tìm điều kiện để α và α' cắt nhau, song song, trùng nhau .

b) Chứng minh rằng phương trình tổng quát của các siêu phẳng đi qua giao $\alpha \cap \alpha'$ (nếu có) hoặc song song với α và α' (nếu $\alpha \cap \alpha' = \varnothing$) có thể viết dưới dạng :

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b\right) + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d\right) = 0$$

với λ và μ không đồng thời bằng 0. Người ta gọi đó là phương trình của chùm siêu phẳng xác định bởi hai siêu phẳng α và α'.

§6

1.38. Chứng minh rằng trong $\mathbf{A}^3$ cho siêu phẳng α phép chiếu song song theo phương vectơ $\vec{m}$ không thuộc phương $\vec{\alpha}$ là một ánh xạ afin.

1.39. Cho không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu afin $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$. Với mỗi điểm $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ta đặt tương ứng điểm

$X' = (0, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ta được ánh xạ $f: \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ mà $f(X) = X'$. Chứng minh rằng f là ánh xạ afin, nó liên kết với ánh xạ tuyến tính nào ? Ảnh $f(\mathbf{A}^n)$ là tập nào ?

Hãy minh họa phép chiếu song song này trong không gian afin ba chiều .

1.40. Cho hai không gian afin **A** và **A'**. Có phải mọi ánh xạ $f: \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ đều là ánh xạ afin hay không ? Nếu không, hãy đặt điều kiện để ánh xạ f trở thành ánh xạ afin.

1.41. Trong không gian $\mathbf{A}^n$ cho m-phẳng **P** có phương $\mathbf{V}^m$ và (n–m) - phẳng **Q** có phương $\mathbf{V}^{n-m}$ sao cho $\mathbf{V}^m \cap \mathbf{V}^{n-m} = \{\vec{0}\}$.

a) Chứng minh **P** và **Q** chỉ có một điểm chung duy nhất .

b) Gọi M là một điểm bất kì của $\mathbf{A}^n$, gọi **P'** là m-phẳng đi qua M và song song với **P**. Gọi **Q'** là (n–m) - phẳng đi qua M và song song với **Q** . Chứng minh rằng **P'** và **Q** chỉ cắt nhau tại 1 điểm ; **Q'** và **P** cũng cắt nhau tại 1 điểm và kí hiệu các điểm đó lần lượt là M_q và M_p.

c) Xét ánh xạ $p: \mathbf{A}^n \to \mathbf{P}$ sao cho $p(M) = M_p$ và ánh xạ $q: \mathbf{A}^n \to \mathbf{Q}$ sao cho $q(M) = M_q$. Các ánh xạ đó lần lượt có tên là phép chiếu lên **P** theo phương $\mathbf{V}^{n-m}$ và phép chiếu lên **Q** theo phương $\mathbf{V}^m$. Chứng minh rằng p và q là những ánh xạ afin thỏa mãn các tính chất sau đây :

$p^2 = p$; $q^2 = q$; $pq = qp = 1$ trong đó 1 kí hiệu cho ánh xạ hằng .

d) Chứng minh rằng nếu có một điểm A thuộc **P** và điểm B thuộc **Q** thì luôn luôn có một điểm X duy nhất của $\mathbf{A}^n$ sao cho $p(X) = A$, $q(X) = B$.

1.42. Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ cho phép afin f biến đổi các điểm như sau :

$$A(1, 1) \to A'(1, 1)$$
$$B(2, 0) \to B'(2, 0)$$
$$C(1, 0) \to C'(2, 2)$$

Viết phương trình phép afin đó đối với mục tiêu đã chọn và đối với mục tiêu $\{A; B, C\}$.

1.43. Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ với mục tiêu đã chọn cho các điểm:

$$A_o = (1, 1, 1) ; A_1 = (2, 0, 0) ; A_2 = (1, 0, 0) ; A_3 = (1, 1, 0)$$

$$A'_o = (0, 0, 0) ; A'_1 = (0, 1, 0) ; A'_2 = (2, 0, 1) ; A'_3 = (1, 0, 1)$$

a) Chứng minh bốn điểm A_o, A_1, A_2, A_3 và bốn điểm A'_o, A'_1, A'_2, A'_3 đều độc lập .

b) Lập phương trình phép biến đổi afin f: $\mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$ sao cho : $f(A_i) = A'_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ đối với mục tiêu đã chọn .

c) Tìm các điểm kép và phương bất biến của phép afin đó .

d) Viết phương trình phép afin f đó đối với mục tiêu $\{A_o; A_1, A_2, A_3\}$.

1.44.Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ cho một tứ diện ABCD. Lập phương trình phép biến đổi afin f đối với mục tiêu {A; B, C, D} sao cho

$$f(A) = B ,\ f(B) = A ,\ f(C) = C ,\ f(D) = D .$$

1.45. Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ cho phép biến đổi afin f đối với mục tiêu đã chọn :

$$f: \begin{cases} x'_1 = 2x_1 - 3x_2 - 7 \\ x'_2 = 3x_1 - 5x_2 - 9 \end{cases}$$

Hãy tìm phép afin f^{-1}.

1.46. Trong $\mathbf{A}^2$ cho phép biến đổi afin f đối với mục tiêu đã chọn:

$$f: \begin{cases} x'_1 = 3x_1 + 2x_2 - 2 \\ x'_2 = 2x_1 + 2x_2 - 1 \end{cases}$$

a) Tìm ảnh và tạo ảnh của điểm M(1, 2) .

b) Tìm ảnh và tạo ảnh của đường thẳng có phương trình $3x_1 + 2x_2 - 6 = 0$

c) Tìm điểm kép (điểm bất động) của phép afin f .

1.47. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho công thức đổi mục tiêu :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + 1 \\ x_2 = \quad\quad y_2 + y_3 + \dots + y_n + 2 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 + \dots + y_n + 3 \\ \dots \\ x_n = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad y_n + n \end{cases}$$

trong đó $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là tọa độ của một điểm X thuộc $\mathbf{A}^n$ đối với mục tiêu thứ nhất và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ là tọa độ của điểm X đó đối với mục tiêu thứ hai. Lập phương trình phép biến đổi afin đối với mục tiêu thứ nhất và biến mục tiêu thứ nhất thành mục tiêu thứ hai.Tìm tọa độ các đỉnh của mục tiêu thứ hai đối với mục tiêu thứ nhất.

1.48. Chứng minh rằng trong $\mathbf{A}^n$ nếu một phép afin f có n +1 điểm kép độc lập thì f là phép đồng nhất .

1.49. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ phép afin f: $\mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ là một phép *thấu xạ afin* nếu có một siêu phẳng $\mathbf{A}^{n-1}$ sao cho mọi điểm M của siêu phẳng đó đều là điểm kép. Siêu phẳng $\mathbf{A}^{n-1}$ được gọi là *nền thấu xạ* . Hãy chọn một mục tiêu afin thích hợp và viết phương trình của phép thấu xạ afin đó . Sau đó chứng minh rằng nếu phép thấu xạ afin không phải là phép đồng nhất thì các đường thẳng nối một điểm với ảnh phân biệt của nó hoặc song song với nhau hoặc trùng nhau.

§7

1.50.Chứng minh rằng tập hợp các phép tịnh tiến trong không gian $\mathbf{A}^n$ làm thành một nhóm .

1.51.Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho tam giác ABC và các điểm P, Q, R lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh điều kiện cần và đủ để ba điểm P, Q, R thẳng hàng là :

(PBC).(QCA).(RAB) = 1 (định lí Ménélaus).

1.52.Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy là:

$$(A'BC).(B'CA).(C'AB) = -1 \text{ (định lí Céva)}$$

1.53.Cho đơn hình m-chiều $A_oA_1...A_m$. Điểm G gọi là trọng tâm của đơn hình đó nếu : $\sum_{i=0}^{m} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

a) Chứng tỏ trọng tâm của đơn hình là một khái niệm afin .

b) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để cho G là trọng tâm của đơn hình $A_oA_1 \ldots A_m$ là với mọi điểm O ta đều có :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} \overrightarrow{OA_i}$$

c) Chứng minh rằng trong một đơn hình các đường thẳng nối hai trọng tâm của hai mặt bên đối diện luôn luôn đi qua một điểm. Phát biểu kết quả đối với trường hợp đơn hình hai chiều và ba chiều .

1.54. Chứng minh rằng ảnh của một tập lồi qua ánh xạ afin là một tập lồi .

1.55. Nhóm biến đổi lớn nhất của không gian afin **A** là nhóm nào ? Hình học của nhóm đó nghiên cứu những tính chất gì của không gian afin **A** .

1.56. Hai hình bình hành bất kì có tương đương afin hay không ? Vì sao?

1.57.Tìm điều kiện để hai hình thang tương đương afin.

1.58. Mặt phẳng Ơclit là mặt phẳng afin. Trong những định lí sau đây định lí nào thuộc hình học afin

a) Trong một tam giác ba đường trung tuyến đồng quy

b) Trong một tam giác ba đường phân giác trong đồng quy

c) Trong một hình bình hành, hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường .

d) Hai đường chéo của một hình thoi vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

§8

1.59. Trong không gian afin $\mathbf{A}^4$, với mục tiêu afin cho trước , hãy xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) đi qua hai điểm A(0, 0, 3, –3), B(0, 0, 11, –11) và siêu mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + 4x_2x_4 + x_3 + x_4 = 0$$

1.60. Trong $\mathbf{A}^2$ với mục tiêu đã chọn , cho đường bậc hai có phương trình :

$$x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 - 5x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$

a) Tìm phương tiệm cận của đường bậc hai đã cho .

b) Tìm tâm của đường bậc hai đó .

1.61.Tìm giao của một siêu mặt bậc hai với một m-phẳng trong $\mathbf{A}^n$.

1.62. Trong $\mathbf{A}^2$ với mục tiêu đã chọn, cho đường bậc hai có phương trình :

$$25x_1^2 + 2x_1x_2 + 13x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 - 27 = 0$$

Tìm tâm và đường kính liên hợp với phương $\vec{c}\,(1, -1)$.

1.63. Một siêu mặt bậc hai (S) của không gian afin $\mathbf{A}^n$ gọi là một *siêu nón bậc hai* nếu có thể tìm được một mục tiêu $\{\mathbf{E}_o; \mathbf{E}_i\}$ sao cho đối với nó (S) có phương trình :

$[x]^*A[x] = 0$ trong đó hạng của A là $r > 0$.

Hạng của A cũng gọi là hạng của siêu nón (S) .

a) Chứng tỏ rằng siêu nón hạng r là một khái niệm afin.

b) Chứng minh rằng nếu điểm X thuộc (S) thì đường thẳng E_oX nằm hoàn toàn trên (S) . Đường thẳng đó gọi là đường sinh của siêu nón (S).

c) Chứng minh rằng với mọi siêu nón (S) luôn luôn có một m-phẳng P với $0 < m \leq n - 1$, nằm trên (S) sao cho nếu M thuộc (S) thì phẳng đi qua P và M cũng nằm trên (S). Ta gọi m-phẳng P là *đỉnh* của siêu nón (S) .

1.64. Một siêu mặt bậc hai (S) của không gian afin $\mathbf{A}^n$ gọi là một *siêu mặt trụ* nếu có thể chọn một mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ sao cho đối với nó phương trình của (S) có dạng :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0\ ,\quad m < n \qquad (1)$$

trong đó f là một đa thức bậc hai đối với $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

a) Chứng tỏ rằng siêu mặt trụ là một khái niệm afin.

b) Trong m-phẳng đi qua các điểm $E_o, E_1, \ldots, E_m$ ta chọn mục tiêu tọa độ là $\{E_o; E_1, \ldots, E_m\}$. Chứng tỏ rằng giao của (S) với m-phẳng nói trên là một siêu mặt bậc hai của không gian afin m chiều $\mathbf{A}^m$ mà phương trình của siêu mặt bậc hai đó chính là phương trình (1) . Siêu mặt đó gọi là đáy của siêu mặt trụ (S) ta kí hiệu nó là (S').

c) Gọi $\mathbf{V}^{n-m}$ là không gian vectơ với cơ sở là $\{\overrightarrow{E_oE_i}\}$, i = m+1, ..., n. Chứng minh rằng nếu điểm $M \in (S)$ thì mọi (n−m)- phẳng đi qua M có phương $\mathbf{V}^{n-m}$ đều nằm trên (S). Ta gọi (n−m)-phẳng đó là phẳng sinh của mặt trụ.

d) Chứng minh rằng nếu $p : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ là phép chiếu lên $\mathbf{A}^m$ theo phương $\mathbf{V}^{n-m}$ thì f(S) = (S').

1.65.Trong $\mathbf{A}^3$ tìm phương trình chuẩn tắc của một siêu mặt bậc hai (S) có phương trình đối với một hệ tọa độ afin đã cho là:

$$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_3x_1 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0$$

1.66.Trong $\mathbf{A}^3$, tìm đường sinh thẳng của các mặt bậc hai :

a) $(S_1) : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1$ đi qua điểm M(3, 2, 1)

b) $(S_2) : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 2z$ đi qua điểm N(3, −4, 0)

C. HƯỚNG DẪN VÀ GIẢI

§1, §2

1.1. Giả sử trong không gian afin A^n ta có một hệ m+1 điểm A_o, $A_1, \ldots, A_m$ độc lập. Với mọi điểm O bất kì, từ đẳng thức

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \text{ và } \sum_{i=0}^{m}\lambda_i = 0$$

ta cần chứng minh $\lambda_o = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

$$\text{Ta có}: \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i(\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0A_i}) = \vec{0}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{OA_0} + \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{A_0A_i} = \vec{0}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{OA_0} + \lambda_0\overrightarrow{A_0A_0} + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overrightarrow{A_0A_i} = \vec{0}$$

Vì $\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{OA_0} = \vec{0}$ và $\lambda_0\overrightarrow{A_0A_0} = \vec{0}$ nên $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overrightarrow{A_0A_i} = \vec{0}$

Do hệ điểm $A_o, A_1, \ldots, A_m$ độc lập nên ta có $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Hơn nữa vì $\sum_{i=0}^{m}\lambda_i = 0$ nên ta suy ra $\lambda_o = 0$. Vậy ta đã chứng minh được $\lambda_o = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

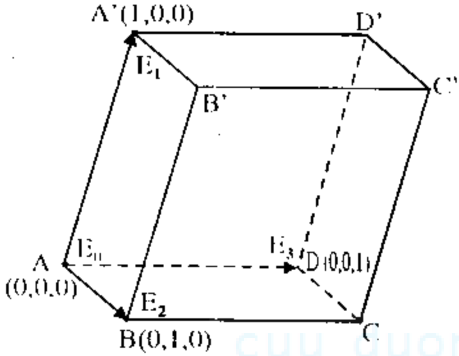
Ngược lại từ hai đẳng thức $\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$ và $\sum_{i=0}^{m}\lambda_i = 0$ ta suy ra $\lambda_o = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$, cần chứng minh rằng hệ m+1 điểm $A_o, A_1, \ldots, A_m$ là độc lập.

$$\text{Ta có } \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m}\lambda_i(\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0A_i}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{OA_0} + \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{A_0A_i} = \vec{0}$$

Vì $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$ và $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$ nên với đẳng thức $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$ ta suy ra hệ m vectơ $\{\overrightarrow{A_0A_i}\}$ với i = 1, 2,..., m là độc lập tuyến tính. Do đó hệ m+1 điểm A_o, A_1, A_2, ... , A_m là độc lập.

1.2. Ta biết rằng tọa độ của một điểm X trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ đối với mục tiêu afin $\{E_o; E_1, E_2, E_3\}$ chính là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{E_0X}$ đối với cơ sở tương ứng của mục tiêu đó là $\{\overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, \overrightarrow{E_0E_3}\}$



Vậy ta có :

B' = (1, 1, 0)

C = (0, 1, 1)

D'= (1, 0, 1)

C' = (1, 1, 1)

Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là tâm của các mặt bên ABB'A', ABCD, ADD'A', BCC'B', A'B'C'D', DCC'D'. Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$. Do đó ta tính được tâm M của mặt bên ABB'A' có tọa độ là $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Tương tự ta suy ra:

Tâm N của mặt bên ABCD có tọa độ là $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Tâm P của mặt bên ADD'A' có tọa độ là $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

Tâm Q của mặt bên BCC'B' có tọa độ là $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$

Tâm R của mặt bên A'B'C'D' có tọa độ là $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Tâm S của mặt bên DCC'D' có tọa độ là $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

1.3. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ ta có công thức đổi mục tiêu là:

$$[x] = A^*[x'] + [a]$$

trong đó $[x]$, $[x']$ lần lượt là ma trận cột tọa độ của điểm X đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ và mục tiêu $\{E'_0;E_i\}$, còn $[a]$ là ma trận tọa độ của điểm E'_o đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$. Để lập công thức đổi mục tiêu ta cần tìm ma trận chuyển A từ mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ sang mục tiêu $\{E'_0;E_i\}$ và sau đó ta tìm A^*. Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E'_0 E_1} = (1-a_1, -a_2, ..., -a_n) \\ \overrightarrow{E'_0 E_2} = (-a_1, 1-a_2, ..., -a_n) \\ .. \quad .. \quad .. \quad ... \quad .. \\ \overrightarrow{E'_0 E_n} = (-a_1, -a_2, ..., 1-a_n) \end{cases}$$

Do đó ta tìm được ma trận chuyển A là :

$$A = \begin{bmatrix} 1-a_1 & -a_2 & ... & -a_n \\ -a_1 & 1-a_2 & ... & -a_n \\ .. & .. & ... & .. \\ -a_1 & -a_2 & ... & 1-a_n \end{bmatrix}$$

Ta dễ dàng tìm được A^* và lập được công thức đổi mục tiêu là:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a_1 & -a_1 & ... & -a_1 \\ -a_2 & 1-a_2 & ... & -a_2 \\ .. & .. & ... & .. \\ -a_n & -a_n & .. & 1-a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ .. \\ x'_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .. \\ a_n \end{bmatrix}$$

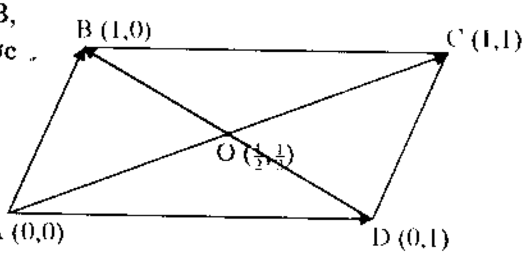
1.4. Trước hết ta cần tìm ma trận chuyển A từ mục tiêu cũ là {A; B, D} sang mục tiêu mới là {O; B, C}

Đối với mục tiêu {A; B, D} ta dễ dàng tìm được tọa độ các điểm sau đây :

A = (0, 0), B = (1, 0),

D = (0, 1), C = (1, 1),

$O = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Từ đó ta tính được tọa

độ của các vectơ $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$. Ta có :

$$\overrightarrow{OB} = (1 - \frac{1}{2}, 0 - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$\overrightarrow{OC} = (1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

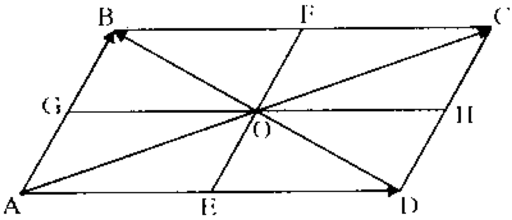
Do đó ta có ma trận chuyển A là:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vậy ta có công thức đổi mục tiêu cần tìm là :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

hay
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2' + \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2' + \frac{1}{2} \end{cases}$$



Cách khác . Dựa vào tính chất hình học của hình bình hành ta có thể biểu thị các vectơ $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$ qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ bằng cách vẽ qua O các đoạn EF// AB và GH // AD (xem hình vẽ) .

Ta có : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

Do đó ta có ma trận chuyển A :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

sau đó ta tiếp tục như đã làm ở phần trên.

1.5. Trong mặt phẳng afin chứa tam giác ABC , đối với mục tiêu {A; B, C} ta tìm được tọa độ afin của các điểm sau đây :

$$A = (0, 0)\ ,\ \ B = (1, 0)\ ,\ \ C = (0, 1)\ ,\ \ G = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

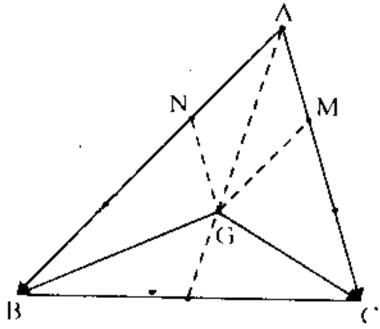
Muốn tìm công thức đổi mục tiêu khi chọn mục tiêu cũ là {A; B, C} và mục tiêu mới là {G; B, C} ta cần tìm ma trận chuyển A từ mục tiêu {A; B, C} sang mục tiêu {G; B, C} . Ta có :

$$\begin{matrix} \overrightarrow{GB} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\ \overrightarrow{GC} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{matrix} \Rightarrow\ A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = A^*$$

Vậy ta có công thức đổi mục tiêu cần tìm là :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Đối với mục tiêu {A; B, C} trung điểm của các cạnh BC, CA, AB lần lượt có tọa độ là $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 0)$.



Áp dụng công thức đổi mục tiêu ở trên ta tính được tọa độ (x'_1, x'_2) của các trung điểm nói trên đối với mục tiêu mới $\{G; B, C\}$ lần lượt là $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, -\frac{1}{2})$.

Cách khác : Qua trọng tâm G của tam giác ABC ta vẽ GM // AB và GN // AC (xem hình vẽ). Áp dụng tính chất hình học của trọng tâm G , ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

Ta có ma trận chuyển $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = A^*$

và tiếp tục như đã làm ở phần trên .

1.6. Giả sử trong 4 điểm đã cho có ít ra là ba điểm A_1, A_2, A_3 không thẳng hàng nghĩa là hai vectơ $\overrightarrow{A_1A_2}$ và $\overrightarrow{A_1A_3}$ không cùng phương . Khi đó nếu 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thuộc một mặt phẳng thì ta có :

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \lambda\overrightarrow{A_1A_2} + \mu\overrightarrow{A_1A_3}$$

hay $$\overrightarrow{PA_4} - \overrightarrow{PA_1} = \lambda(\overrightarrow{PA_2} - \overrightarrow{PA_1}) + \mu(\overrightarrow{PA_3} - \overrightarrow{PA_1})$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu - 1)\overrightarrow{PA_1} - \lambda\overrightarrow{PA_2} - \mu\overrightarrow{PA_3} + \overrightarrow{PA_4} = \vec{0}$$

Đặt $\alpha_1 = \lambda + \mu - 1$, $\alpha_2 = -\lambda$, $\alpha_3 = -\mu$, $\alpha_4 = 1$ ta có :

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \lambda + \mu - 1 - \lambda - \mu + 1 = 0$ trong đó có $\alpha_4 \neq 0$

Ngược lại giả sử ta có :

$$\alpha_1\overrightarrow{PA_1} + \alpha_2\overrightarrow{PA_2} + \alpha_3\overrightarrow{PA_3} + \alpha_4\overrightarrow{PA_4} = \vec{0}$$

với $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ và $\alpha_4 \neq 0$.

Khi đó: $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_3} + \overrightarrow{PA_4} = \vec{0}$

hay $\overrightarrow{PA_4} - \overrightarrow{PA_1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_3} - \overrightarrow{PA_1}$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_3} - \frac{\alpha_1+\alpha_4}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_1}$$

$$= -\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\left(\overrightarrow{PA_2} - \overrightarrow{PA_1}\right) - \frac{\alpha_3}{\alpha_4}\left(\overrightarrow{PA_3} - \overrightarrow{PA_1}\right) - \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{\alpha_4}\overrightarrow{PA_1}$$

mà $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ nên :

$$\overrightarrow{A_1A_4} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\overrightarrow{A_1A_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_4}\overrightarrow{A_1A_3}$$

Đặt $-\frac{\alpha_2}{\alpha_4} = \lambda$, $-\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = \mu$ ta có

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \lambda\overrightarrow{A_1A_2} + \mu\overrightarrow{A_1A_3}$$

Ta suy ra 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thuộc cùng một mặt phẳng

1.7. Ta có $\overrightarrow{O'A} = (-1, 4) = \vec{e}'_1$

$\overrightarrow{O'B} = (1, -3) = \vec{e}'_2$

Gọi C là ma trận chuyển từ mục tiêu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ sang mục tiêu $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, ta có:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow C^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Áp dụng công thức đổi mục tiêu $[x] = C^*[x'] + [a_o]$, đối với điểm $M(5, -1)$ ta có $(x_1, x_2) = (5, -1)$. Do đó :

$$\begin{cases} x_1 = -x'_1 + x'_2 + 2 = 5 \\ x_2 = 4x'_1 - 3x'_2 - 3 = -1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được tọa độ (x'_1, x'_2) của điểm M đối với mục tiêu $\{O'; A, B\}$ là $M = (x'_1, x'_2) = (11, 14)$

1.8. a) Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$.

Ta cần tìm tọa độ điểm M đối với mục tiêu $\{C; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\}$

Ta có $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$ (theo hệ thức Chasles)

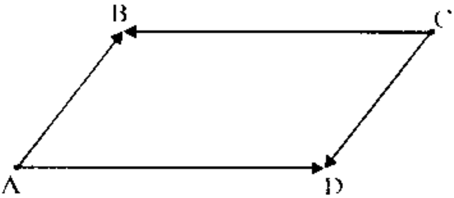
Vì $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ (theo qui tắc hình bình hành)

và $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD} = -\alpha\overrightarrow{CD} - \beta\overrightarrow{CB}$

(vì $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$)

Do đó :

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \alpha\overrightarrow{CD} - \beta\overrightarrow{CB}$$



hay

$$\overrightarrow{CM} = (1-\beta)\overrightarrow{CB} + (1-\alpha)\overrightarrow{CD}.$$

Vậy điểm M có tọa độ đối với mục tiêu afin {C; B, D} là

$$M = (1-\beta, 1-\alpha)$$

b) Tương tự ta tính được $M = (\beta, 1-\alpha)$ đối với mục tiêu {B; C, A}

c) Tương tự ta tính được $M = (\alpha, 1-\beta)$ đối với mục tiêu {D; C, A}.

§3

1.9. Trong m-phẳng P cho trước ta có thể chọn được m+1 điểm độc lập $A_0, A_1, \ldots, A_m$ .Gọi B là một điểm cho trước không thuộc m-phẳng P. Ta chứng minh hệ điểm :

$$\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m, B\}$$

là một hệ gồm m+2 điểm độc lập .

Thực vậy nếu giả sử hệ điểm đó là một hệ điểm không độc lập thì điểm B lại thuộc phẳng P là điều trái với giả thiết vì m-phẳng P được xác định bởi m+1 điểm độc lập $A_0, A_1, \ldots, A_m$. Vậy có

(m+1)-phẳng Q duy nhất xác định bởi m+2 điểm độc lập

$A_o, A_1, A_2, \ldots, A_m$, B. Ta cần chứng tỏ rằng phẳng Q này chứa tất cả các điểm của phẳng P và phẳng Q này là duy nhất. Ta có :

$$X \in Q \Leftrightarrow \overrightarrow{A_oX} = t_1\overrightarrow{A_0A_1} + \ldots + t_m\overrightarrow{A_0A_m} + t_{m+1}\overrightarrow{A_0B}.$$

Với các tham số $t_1, t_2, \ldots, t_{m+1}$ trong đó giá trị tham số $t_{m+1} = 0$ ta có phương trình tham số của phẳng P. Vậy phẳng Q chứa tất cả các điểm của phẳng P. Nếu có một cái phẳng Q' khác cũng là m+1 phẳng đi qua điểm B và chứa phẳng P thì Q' cũng chứa các điểm $A_o, A_1, \ldots, A_m$, B là một hệ m+2 điểm độc lập.Vậy Q' cũng được xác định bởi m+2 điểm độc lập chứa trong Q nên Q' trùng với Q .

Cách khác . Gọi T là phẳng tổng của 0-phẳng B (là 1 điểm) và m-phẳng P cho trước . Ta có T = B + P. Phẳng tổng này được xác định duy nhất và ta chỉ cần chứng minh rằng phẳng tổng T này có số chiều bằng m+1 .

Vì điểm B không thuộc phẳng P nghĩa là B và P không có điểm chung, áp dụng công thức tính số chiều của phẳng tổng ta có:

$$\dim(B+P) = \dim B + \dim P - \dim(\dot{0} \cap V^m) + 1$$
$$= m + 1$$

Vậy có một (m+1)-phẳng T duy nhất đi qua điểm B cho trước và qua m-phẳng P cho trước không chứa điểm đó .

1.10. Ta lập phương trình tham số của m-phẳng P xác định bởi m+1 điểm độc lập $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_m$ $(m < n)$ của mục tiêu $\{E_0; E_i\}$ như sau :

$$X \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{E_oX} = t_1\overrightarrow{E_0E_1} + t_2\overrightarrow{E_0E_2} + \ldots + t_m\overrightarrow{E_0E_m}.$$

$$X \in P \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = t_2 \\ \ldots \quad \ldots \\ x_m = t_m \\ x_{m+1} = 0 \\ \ldots \quad \ldots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

Muốn lập phương trình tổng quát của P là cái phẳng m chiều, ta khử các tham số $t_1, t_2, \ldots, t_m$ từ phương trình tham số ở trên ta được phương trình tổng quát gồm n −m phương trình sau đây:

$$\begin{cases} x_{m+1} = 0 \\ \ldots \quad \ldots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

Phương trình tham số của phẳng Q xác định bởi các đỉnh còn lại $E_{m+1}, E_{m+2}, \ldots, E_n$ của mục tiêu $\{E_0; E_i\}$là :

$$X \in Q \Leftrightarrow \overline{E_{m+1}X} = t_{m+2}\overline{E_{m+1}E_{m+2}} + \ldots + t_n\overline{E_{m+1}E_n}.$$

$$X \in Q \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \ldots \quad \ldots \\ x_m = 0 \\ x_{m+1} = 1 - t_{m+2} - t_{m+3} - \ldots - t_n \\ x_{m+2} = t_{m+2} \\ \ldots \quad \ldots \\ x_n = t_n \end{cases}$$

Muốn lập phương trình tổng quát của phẳng Q là cái phẳng n− m −1 chiều; ta khử các tham số $t_{m+2}, t_{m+3}, \ldots, t_n$ từ phương trình trên đây của Q và được phương trình tổng quát gồm m phương trình sau đây :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \ldots \quad \ldots \\ x_m = 0 \\ x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_n = 1 \end{cases}$$

Chú ý rằng phẳng Q là cái phẳng được xác định bởi n+1−(m+1) điểm độc lập nên Q là cái phẳng n−m−1 chiều và được biểu thị bằng hệ phương trình gồm m+1 phương trình nêu trên .

Khi m=n, ta có phẳng P chứa n+1 đỉnh $E_0, E_1, \ldots, E_n$ của mục tiêu $\{E_0; E_i\}$ nên P là toàn bộ không gian afin $\mathbf{A}^n$. Ta suy ra khi đó sẽ không có phẳng Q nữa.

1.11. Gọi P là m-phẳng xác định bởi các điểm $E_{k_0}, E_{k_1}, \ldots, E_{k_m}$ của mục tiêu $\{E_0; E_i\}$. Đây là một hệ gồm m+1 điểm độc lập. Các đỉnh còn lại của mục tiêu là $E_{k_{m+1}}, E_{k_{m+2}}, \ldots, E_{k_n}$. Tương tự như đối với bài 1.10 ta có phương trình tham số của m-phẳng P là :

$$X \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{E_{k_0}X} = t_1\overrightarrow{E_{k_0}E_{k_1}} + t_2\overrightarrow{E_{k_0}E_{k_2}} + \ldots + t_m\overrightarrow{E_{k_0}E_{k_m}}.$$

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = t_2 \\ \ldots \quad \ldots \\ x_m = t_m \\ x_{m+1} = 0 \\ \ldots \quad \ldots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

Ta suy ra phương trình tổng quát của P là :

$$\begin{cases} x_{m+1} = 0 \\ \ldots \quad \ldots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

1.12. Ta nhận thấy $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính nên chúng có thể dùng làm cơ sở cho phương của cái phẳng có số chiều bé nhất thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

$$X \in \mathbf{A}^m \Leftrightarrow \overrightarrow{MX} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - 2 \\ x_4 - 2 \end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left.\begin{aligned} x_1 &= 2t_1 - 1 \\ x_2 &= t_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = 2x_2 - 1 \\ \left.\begin{aligned} x_3 &= 4t_1 + 7t_2 + 2 \\ x_4 &= 4t_1 + 7t_2 + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 = x_4 \end{cases}$$

Ta có phương trình tổng quát của m-phẳng cần tìm là :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

CHÚ Ý. Do cách khử tham số khác nhau ta có thể biểu thị phương trình tổng quát của m-phẳng cần tìm bằng các hệ hai phương trình khác nhau .

1.13. Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_1M_2} = (-3,-1,3,2) \\ \overrightarrow{M_1M_3} = (0,1,3,1) \\ \vec{a} = (3,3,1,0) \\ \vec{b} = (1,1,1,0) \end{cases}$$

Xét định thức tọa độ của 4 vectơ này ta thấy rằng :

cột (2) – cột (1) = cột (4)

Vậy 4 vectơ $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \vec{a}, \vec{b}$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính.

Dễ dàng thấy rằng ba vectơ $\overrightarrow{M_1M_3}, \vec{a}, \vec{b}$ là độc lập tuyến tính vì ma trận tọa độ của chúng có một định thức cấp ba khác không. Đó là định thức :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Ta lập phương trình cái phẳng đi qua điểm M_1 và có phương xác định bởi ba vectơ độc lập tuyến tính là $\overrightarrow{M_1M_3}, \vec{a}, \vec{b}$. Đó chính là cái phẳng có số chiều bé nhất cần tìm . Ta có :

$$\overline{M_1X} = t_1\overline{M_1M_3} + t_2\overline{a} + t_3\overline{b}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 + 3 \\ x_4 + 2 \end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 3t_2 + t_3 & (1) \\ x_2 = 1 + t_1 + 3t_2 + t_3 & (2) \\ x_3 = -3 + 3t_1 + t_2 + t_3 & (3) \\ x_4 = -2 + t_1 & (4) \end{cases}$$

Hệ ba phương trình đầu độc lập. Lấy (2) – (1) ta có :

$$x_2 - x_1 = t_1$$

Thay giá trị của t_1 vào (4) ta có :

$$x_4 = -2 + x_2 - x_1$$

hay $\boxed{x_1 - x_2 + x_4 + 2 = 0}$

Ta tìm được phương trình của cái phẳng cần tìm là phương trình của một siêu phẳng vì nó được biểu thị bằng một phương trình . Ta nhận xét và thấy rằng siêu phẳng này không đi qua gốc tọa độ E_0 (vì tọa độ của E_0 không thỏa mãn phương trình siêu phẳng). Mặt khác đường thẳng E_oE_3 song song với siêu phẳng này (vì trong phương trình của siêu phẳng không chứa thành phần x_3 nghĩa là phương trình siêu phẳng thỏa mãn với mọi x_3).

1.14. Gọi A, B, C là ba điểm đã cho có tọa độ sau đây :

$$A = (2, -1, 3, 4, 0)$$

$$B = (-1, 1, 0, 1, 5)$$

$$C = (1, 2, 7, 6, 1)$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3, 2, -3, -3, 5)$

$$\overrightarrow{AC} = (-1, 3, 4, 2, 1)$$

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ là một hệ độc lập tuyến tính vì ma trận tọa độ của chúng có định thức cấp hai khác không – Mặt phẳng P đi qua ba điểm A, B, C độc lập nhận $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ làm cặp vectơ chỉ phương

$$X \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 + 1 \\ x_3 - 3 \\ x_4 - 4 \\ x_5 - 0 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ta có phương trình tham số của mặt phẳng P là :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 3t_1 - t_2 & (1) \\ x_2 = -1 + 2t_1 + 3t_2 & (2) \\ x_3 = 3 - 3t_1 + 4t_2 & (3) \\ x_4 = 4 - 3t_1 + 2t_2 & (4) \\ x_5 = \quad 5t_1 + t_2 & (5) \end{cases}$$

Lấy (1) + (5) ta có: $x_1 + x_5 = 2 + 2t_1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{x_1 + x_5 - 2}{2}$

Từ (5) ta có: $t_2 = x_5 - 5t_1 = x_5 - \dfrac{5(x_1 + x_5 - 2)}{2}$

Do đó : $t_2 = \dfrac{-5x_1 - 3x_5 + 10}{2}$

Thay các giá trị t_1, t_2 vừa tìm được vào (2), (3), (4) ta có :

$$\begin{cases} x_2 = -1 + x_1 + x_5 - 2 + \dfrac{3}{2}(-5x_1 - 3x_5 + 10) \\ x_3 = 3 - \dfrac{3}{2}(x_1 + x_5 - 2) - 10x_1 - 6x_5 + 20 \\ x_4 = 4 - \dfrac{3}{2}(x_1 + x_5 - 2) - 5x_1 - 3x_5 + 10\ . \end{cases}$$

Rút gọn ta có phương trình tổng quát của mặt phẳng P là :

$$\begin{cases} 6,5x_1 + x_2 + 3,5x_5 - 12 = 0 \\ 11,5x_1 + x_3 + 7,5x_5 - 26 = 0 \\ 6,5x_1 + x_4 + 4,5x_5 - 17 = 0 \end{cases}$$

CHÚ Ý : Do việc khử tham số từ các phương trình khác nhau nên ta sẽ có thể có các kết quả khác nhau .

1.15. Dựa vào hạng của phương trình tổng quát của cái phẳng đã cho, ta biết đó là cái phẳng ba chiều (vì 5 – 2 = 3) và do đó phương trình tham số của nó có ba tham số .

Ta có thể đặt :

$$\begin{cases} x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}$$

và thay vào phương trình tổng quát ta có :

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2t_1 + 7t_2 + 4t_3 - 3 = 0 & (1) \\ 2x_1 + 3x_2 - t_1 + 4t_2 + 2t_3 - 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

Nhân phương trình (2) với 2 và trừ đi phương trình (1) ta có :

$$-x_1 + t_2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -9 + t_2$$

Thay giá trị của x_1 vào phương trình (2) ta có

$$-18 + 2t_2 + 3x_2 - t_1 + 4t_2 + 2t_3 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x_2 = 24 + t_1 - 6t_2 - 2t_3$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 = 8 + \frac{1}{3}t_1 - 2t_2 - \frac{2}{3}t_3$$

Vậy ta có phương trình tham số của cái phẳng đã cho là :

$$\begin{cases} x_1 = -9 + t_2 \\ x_2 = 8 + \dfrac{1}{3}t_1 - 2t_2 - \dfrac{2}{3}t_3 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}$$

NHẬN XÉT : Do có các cách chọn tham số khác nhau nên phương trình tham số của cái phẳng đã cho có thể có các cách biểu thị khác nhau .

1.16. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 3, -2)$

$$\vec{a} = (1, 2, -1, -3)$$

$$\vec{b} = (2, 3, -2, -4)$$

Ta nhận thấy 3 vectơ $\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{b}$ là một hệ ba vectơ độc lập tuyến tính vì có định thức :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Ta lập phương trình của cái phẳng đi qua điểm A và có phương là một không gian vectơ $\mathbf{V}^3$ nhận ba vectơ $\{\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{b}\}$ làm cơ sở. Đó là cái phẳng có số chiều bé nhất chứa hai đường thẳng d_1 và d_2 đã cho . Ta có :

$$\overrightarrow{AX} = t_1\overrightarrow{AB} + t_2\vec{a} + t_3\vec{b} \ .$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 0 \\ x_3 + 2 \\ x_4 - 1 \end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + t_3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Ta có phương trình tham số của cái phẳng cần tìm là :

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t_1 + t_2 + 2t_3 & (1) \\ x_2 = \quad t_1 + 2t_2 + 3t_3 & (2) \\ x_3 = -2 + 3t_1 - t_2 - 2t_3 & (3) \\ x_4 = 1 - 2t_1 - 3t_2 - 4t_3 & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta có :

$$x_1 + x_3 = -1 + 2t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + 1)$$

Từ (1) và (4) ta có: $2x_1 + x_4 = 3 - 4t_1 - t_2$

Thay $t_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + 1)$ vào hệ thức trên ta có:

$$2x_1 + x_4 = 3 - (2x_1 + 2x_3 + 2) - t_2$$

$$\Rightarrow t_2 = -4x_1 - 2x_3 - x_4 + 1$$

Thay các giá trị tìm được của t_1, t_2 vào (4) ta có:

$$t_3 = \frac{1}{4}[1 - (x_1 + x_3 + 1) - 3(-4x_1 - 2x_3 - x_4 + 1)]$$

$$= \frac{1}{4}[11x_1 + 5x_3 + 2x_4 - 3]$$

Thay các giá trị tìm được của t_1, t_2, t_3 vào (2) ta có:

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + 1) + 2(-4x_1 - 2x_3 - x_4 + 1) + \frac{3}{4}(11x_1 + 5x_3 + 2x_4 - 3)$$

$$\Leftrightarrow 4x_2 = 2x_1 + 2x_3 + 2 - 32x_1 - 16x_3 - 8x_4 + 8 + 33x_1 + 15x_3 + 6x_4 - 9$$

$$\Leftrightarrow 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - 1 = 0$$

Như vậy ta được phương trình tổng quát của cái phẳng chứa d_1 và d_2 là một siêu phẳng . Đây chính là phẳng tổng của d_1 và d_2.

CHÚ Ý: Trên đây ta đã lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của cái phẳng có số chiều bé nhất chứa hai đường thẳng d_1 và d_2 .Nếu đề toán chỉ yêu cầu viết phương trình của cái phẳng nào đó thì ta chỉ cần lập hoặc là phương trình tham số hoặc là phương trình tổng quát của cái phẳng đó là đủ .

1.17 a) Dựa vào phương trình tham số của đường thẳng d_1 ta dễ dàng thấy rằng đường thẳng này đi qua điểm A(1, 2, 3, 4) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1, 1, 1, 1)$. Còn đối với đường thẳng d_2 ta có thể biến đổi phương trình tổng quát của nó thành phương trình tham số bằng cách đặt $x_3 = t$ và ta có:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t - 1 \\ x_3 = t \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

Như vậy đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (0, 1, 1, 0)$. Bây giờ trên đường thẳng d_1 ta lấy thêm điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$. Còn trên đường thẳng d_2 ta có điểm B(0, –1, 0, 3) và lấy thêm điểm B' sao cho $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$. Ta đưa bài toán đã cho về dạng lập phương trình cái phẳng có số chiều bé nhất chứa bốn điểm A, A', B, B'.

Ta có: $\overrightarrow{AA'} = \vec{a} = (1, 1, 1, 1)$

$$\overrightarrow{BB'} = \vec{b} = (0, 1, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{c} = (-1, -3, -3, -1)$$

Ta nhận thấy $\vec{c} = -2\vec{b} - \vec{a}$ và như vậy hệ ba vectơ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ phụ thuộc tuyến tính, trong đó $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính. Ta lập phương trình cái phẳng có số chiều bé nhất chứa d_1, d_2 đi qua điểm A và có phương xác định bởi hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ độc lập tuyến tính.

$$\overrightarrow{AX} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}.$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 3 \\ x_4 - 4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 & (1) \\ x_2 = 2 + t_1 + t_2 & (2) \\ x_3 = 3 + t_1 + t_2 & (3) \\ x_4 = 4 + t_1 & (4) \end{cases}$$

Ta khử các tham số bằng cách lấy (1) – (4) và lấy (2) – (3) ta có phương trình tổng quát của cái phẳng cần tìm là:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 + 3 = 0 \\ x_2 - x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2, -5, 2, 1)$

Đường thẳng AB có phương trình tham số là:

X∈ đường thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = 3 - 5t \\ x_3 = -1 + 2t \\ x_4 = 2 + t \end{cases}$$

Với siêu phẳng $x_1 = 0$ ta có: $x_1 = 1 - 2t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Thay giá trị của t vào phương trình tham số của đường thẳng ta tính được tọa độ giao điểm với siêu phẳng $x_1 = 0$:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2})$$

Tương tự ta tính được:

- Tọa độ của giao điểm đối với siêu phẳng $x_2 = 0$ là:

$$(-\frac{1}{5}; 0; \frac{1}{5}; \frac{13}{5})$$

- Tọa độ của giao điểm đối với siêu phẳng $x_3 = 0$ là:

$$(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2})$$

- Tọa độ của giao điểm đối với siêu phẳng $x_4 = 0$ là:

$$(5, 13, -5, 0)$$

1.18. Ta tìm nghiệm của hệ phương trình gồm các phương trình của hai cái phẳng P và Q sau đây

$$\left.\begin{array}{l} P:\begin{cases}3x_1-5x_2-2x_3+2x_4+7=0\\ -4x_1+7x_2+4x_3+4x_4-10=0\end{cases}\\ Q:\begin{cases}4x_1-9x_2-3x_3+7x_4+14=0\\ 2x_1-6x_2-3x_3+2x_4+10=0\end{cases}\end{array}\right\}\quad P\cap Q$$

Giải hệ 4 phương trình 4 ẩn này ta được nghiệm là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 0, 0)$$

CHÚ Ý: –Trong không gian $\mathbf{A}^4$ hai mặt phẳng có thể chỉ có một điểm chung duy nhất. Điều này không xảy ra đối với không gian $\mathbf{A}^3$ vì trong $\mathbf{A}^3$ nếu hai mặt phẳng đã có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy.

1.19. Các hệ phương trình tìm điểm chung và tìm phương chung của hai cái phẳng P và Q đều vô nghiệm. Do đó hai cái phẳng P và Q chéo nhau vì chúng không có điểm chung và không có phương chung.

1.20. Giả sử $N = \{A_o, A_1, ..., A_k\}$ gồm k+1 điểm độc lập của tập M đã cho và:

$N' = \{A_{k+1}, A_{k+2}, ..., A_m\}$ gồm m–k điểm độc lập còn lại của tập M đó.

Gọi **A** là k-phẳng xác định bởi k+1 điểm độc lập $A_o, A_1, ..., A_k$ và **A'** là (m–k–1)-phẳng xác định bởi m–k điểm độc lập $A_{k+1}, A_{k+2}, ..., A_m$.

Phẳng **A** có phương là V^k và phẳng **A'** có phương V^{m-k-1}. Ta hãy xét điểm chung và phương chung của hai cái phẳng **A** và **A'**. Trước hết ta nhận thấy rằng **A** và **A'** không có điểm chung tức là $\mathbf{A} \cap \mathbf{A'} = \varnothing$. Thực vậy giả sử $\mathbf{A} \cap \mathbf{A'} \neq \varnothing$, khi đó ta có:

$$\dim(\mathbf{A}+\mathbf{A'}) = \dim \mathbf{A} + \dim\mathbf{A'} - \dim(\mathbf{A} \cap \mathbf{A'})$$

$$m = k + m - k - 1 - \dim(\mathbf{A} \cap \mathbf{A'})$$

$$= m - 1 - \dim(\mathbf{A} \cap \mathbf{A'})$$

Ta suy ra $\dim(\mathbf{A} \cap \mathbf{A'}) = -1$ là vô lí. Do đó $\mathbf{A} \cap \mathbf{A'} = \varnothing$. Nếu $\mathbf{A} \cap \mathbf{A'} = \varnothing$ thì công thức về số chiều của phẳng tổng sẽ được nghiệm đúng.

CHÚ Ý: Nếu N có số điểm độc lập ít hơn k+1 và N' có số điểm độc lập ít hơn m – k thì ta vẫn có thể lấy phẳng **A** và **A'** như trên .

Bây giờ ta cần chứng minh $\mathbf{V}^k \cap \mathbf{V}^{m-k-1} = \vec{0}$.

Giả sử $\mathbf{V}^k \cap \mathbf{V}^{m-k-1} \neq \vec{0}$. Khi đó có vectơ $\vec{x} \neq \vec{0}$ và $\vec{x} \in \mathbf{V}^k \cap \mathbf{V}^{m-k-1}$.

Với $\vec{x} \in \mathbf{V}^k$, giả sử $\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{A_0A_i}$

Với $\vec{x} \in \mathbf{V}^{m-k-1}$, giả sử $\vec{x} = \sum_{j=k+2}^{m} t_j \overrightarrow{A_{k+1}A_j}$

Ta có $\vec{x} - \vec{x} = \vec{0} = \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{A_0A_i} - \sum_{j=k+2}^{m} t_j \overrightarrow{A_{k+1}A_j}$

Do đó:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{A_0A_i} - t_{k+2}(\overrightarrow{A_oA_{k+2}} - \overrightarrow{A_oA_{k+1}}) - t_{k+3}(\overrightarrow{A_oA_{k+3}} - \overrightarrow{A_oA_{k+1}}) -$$

$$-\ldots - t_m(\overrightarrow{A_oA_m} - \overrightarrow{A_oA_{k+1}}) .$$

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{A_0A_i} - t_{k+2}\overrightarrow{A_oA_{k+2}} - t_{k+3}\overrightarrow{A_oA_{k+3}} - \ldots -$$

$$-t_m\overrightarrow{A_oA_m} + (\sum_{j=k+2}^{m} t_j)\overrightarrow{A_oA_{k+1}}$$

Đặt $\sum_{j=k+2}^{m} t_j = -t_{k+1}$ ta có thể viết:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{A_0A_i} - \sum_{j=k+1}^{m} t_j \overrightarrow{A_0A_j}$$

Vì hệ điểm $A_o, A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_m$ độc lập nên ta suy ra

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_k = t_{k+1} = \ldots = t_m = 0$$

Ta suy ra $\vec{x} = \vec{0}$. Vậy $\mathbf{V}^k \cap \mathbf{V}^{m-k-1} = \vec{0}$

và do đó **A** và **A'** là hai cái phẳng chéo nhau .

NHẬN XÉT . Từ bài toán này ta rút ra một hệ qủa trực tiếp là có thể xác định được hai cái phẳng chéo nhau từ một hệ điểm độc lập của không gian afin $\mathbf{A}^n$.

Liên hệ trong $\mathbf{A}^3$: bốn điểm độc lập trong $\mathbf{A}^3$ tạo thành một tứ diện . Khi đó các cặp đường thẳng qua hai hệ điểm phân biệt là chéo nhau .

1.21. $\mathbf{A}^p$ song song với $\mathbf{A}^r$ nghĩa là $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^r = \varnothing$ và $\mathbf{V}^p \subset \mathbf{V}^r$.

$\mathbf{A}^q$ song song với $\mathbf{A}^r$ nghĩa là $\mathbf{A}^q \cap \mathbf{A}^r = \varnothing$ và $\mathbf{V}^q \subset \mathbf{V}^r$.

Ta biết rằng phẳng giao $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q$ có phương $\mathbf{V}^p \cap \mathbf{V}^q$

Vì $\mathbf{V}^p \subset \mathbf{V}^r$ và $\mathbf{V}^q \subset \mathbf{V}^r$ nên $\mathbf{V}^p \cap \mathbf{V}^q \subset \mathbf{V}^r$

Vì $\left.\begin{matrix} \mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^r = \varnothing \\ \mathbf{A}^q \cap \mathbf{A}^r = \varnothing \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q\right) \cap \mathbf{A}^r = \varnothing$

Vậy phẳng giao $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q$ nếu có là cái phẳng song song với $\mathbf{A}^r$ vì $\left(\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q\right) \cap \mathbf{A}^r = \varnothing$ và $\mathbf{V}^p \cap \mathbf{V}^q \subset \mathbf{V}^r$.

1.22. Gọi phương của các siêu phẳng $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, α lần lượt là $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$ và $\mathbf{V}^\alpha$. Ta biết rằng giao của hai siêu phẳng nếu có là một (n–2)-phẳng. Ta có:

$\mathbf{A} \cap \mathbf{A}' = \mathbf{A}^{n-2}$ có phương là $\mathbf{V}^{n-2}$

$\mathbf{A} \cap \alpha = \mathbf{A}'^{n-2}$ có phương là $\mathbf{V}'^{n-2}$

$\mathbf{A}' \cap \alpha = \mathbf{A}''^{n-2}$ có phương là $\mathbf{V}''^{n-2}$

Theo giả thiết $\mathbf{A} \cap \mathbf{A}'$ song song với α nên

$\mathbf{V} \cap \mathbf{V}' \subset \mathbf{V}^\alpha$

Do đó $\mathbf{V} \cap \mathbf{V}' \cap \mathbf{V}^\alpha \subset \mathbf{V}^\alpha \cap \mathbf{V}'$

$\Rightarrow \mathbf{V} \cap \mathbf{V}' \subset \mathbf{V}^\alpha \cap \mathbf{V}'$

$\Rightarrow \mathbf{V}^{n-2} \subset \mathbf{V}''^{n-2}$

Hai không gian có cùng số chiều là n – 2 nên $\mathbf{V}^{n-2} \equiv \mathbf{V}''^{n-2}$

Tương tự ta chứng minh được: $\mathbf{V}^{n-2} \equiv \mathbf{V}'^{n-2}$

Vậy $\mathbf{V}'^{n-2} \equiv \mathbf{V}''^{n-2}$

Mặt khác ta chứng minh được $A'^{n-2} \cap A''^{n-2} = \varnothing$

Thực vậy giả sử có một điểm $M \in A'^{n-2} \cap A''^{n-2}$ thì ta suy ra $M \in A$ và $M \in A'$ nên $M \in A \cap A'$, đồng thời $M \in \alpha$. Vậy

$M \in A \cap A' \cap \alpha$ là điều trái với giả thiết. Vậy $A'^{n-2} \cap A''^{n-2} = \varnothing$ và hai cái phẳng đó song song với nhau.

1.23. Ta gọi V^p, V^q lần lượt là phương của hai cái phẳng A^p và A^q. Dựa vào phương trình tổng quát cho trước của A^p và A^q trong không gian afin A^n ta suy ra phương V^p và V^q lần lượt được xác định bởi các hệ phương trình sau đây:

$$V^p: \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \ i = 1, 2, \ ..., \ n - p \ . \ (1)$$

$$V^q: \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = 0, \ i = 1, 2, \ ..., \ n - q \ . \ (2)$$

Theo giả thiết, (2) là hệ quả của (1) nghĩa là nếu $\vec{x} \in V^p$ thì $\vec{x} \in V^q$. Điều đó có nghĩa là $V^p \subset V^q$ tức là A^p cùng phương với A^q.

Ngược lại nếu A^p cùng phương với A^q tức là $V^p \subset V^q$, khi đó ta có hệ phương trình (2) là hệ quả của hệ phương trình (1).

1.24. Ta viết phương trình tham số của đường thẳng AB rồi tìm giao điểm của đường thẳng AB đó với các siêu phẳng tọa độ .

a) Ta có $A(4, 3, -1, 2)$, $B(-1, 2, 1, 5)$

Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-5, -1, 2, 3)$

Do đó ta có phương trình tham số của đường thẳng AB là:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 5t \\ x_2 = 3 - t \\ x_3 = -1 + 2t \\ x_4 = 2 + 3t \end{cases}$$

- Với siêu phẳng $x_1 = 0$ ta có tọa độ giao điểm là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \frac{11}{5}, \frac{3}{5}, \frac{17}{5})$$

- Với siêu phẳng $x_2 = 0$ ta có tọa độ giao điểm là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-11, 0, 5, 11)$$

- Với siêu phẳng $x_3 = 0$ ta có tọa độ giao điểm là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0, \frac{7}{2})$$

- Với siêu phẳng $x_4 = 0$ ta có tọa độ giao điểm là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{22}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{7}{3}, 0)$$

b) Tương tự như câu a) ta có: $\overline{AB} = (2, 3, -5, 3)$

Đường thẳng AB có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = -1 + 3t \\ x_3 = 2 - 5t \\ x_4 = -2 + 3t \end{cases}$$

Các giao điểm của đường thẳng AB với các siêu phẳng tọa độ lần lượt là: $(0, -\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{7}{2})$, $(\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}, -1)$, $(\frac{9}{5}, \frac{1}{5}, 0, -\frac{4}{5})$, $(\frac{7}{3}, 1, -\frac{4}{3}, 0)$.

1.25. a) Ta có $\overline{AB} = (-4, 3, 3, -1)$

$$\overline{CD} = (1, 0, -3, -5)$$

Ta nhận thấy hai đường thẳng AB và CD không cùng phương vì

$$(-4:3:3:-1) \neq (1:0:-3:-5)$$

Bây giờ ta lập phương trình tham số của hai đường thẳng AB và CD . Đường thẳng AB có phương trình tham số là:

$$AB: \begin{cases} x_1 = 4 - 4t \\ x_2 = \quad\quad 3t \\ x_3 = -1 + 3t \\ x_4 = 2 - \quad t \end{cases}$$

Đường thẳng CD có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + u \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -1 - 3u \\ x_4 = -5u \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm của AB và CD nếu có sẽ thỏa mãn hệ phương trình sau:

$$AB \cap CD: \begin{cases} 4 - 4t = 1 + u & (1) \\ 3t = -1 & (2) \\ -1 + 3t = -1 - 3u & (3) \\ 2 - t = -5u & (4) \end{cases}$$

Từ (2) ta tính được $t = -\frac{1}{3}$. Thay giá trị này của t vào (3) ta tính được $u = \frac{1}{3}$. Thay các giá trị này của t và u vào (1) và (4) ta thấy hai vế không bằng nhau. Vậy hai đường thẳng AB và CD không có điểm chung. Mặt khác chúng không cùng phương nên AB và CD là hai đường thẳng chéo nhau .

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (9, -3, 9, -3)$

$\overrightarrow{CD} = (6, -3, -6, 15)$

Ta nhận thấy hai đường thẳng AB và CD không cùng phương .

Lập phương trình tham số của đường thẳng AB và đường thẳng CD, rồi tìm tọa độ giao điểm của AB và CD ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -2 + 9t = -1 + 6u \\ 2 - 3t = 2 - 3u \\ -2 + 9t = 3 - 6u \\ 2 - 3t = -4 + 15u \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta tìm được $t = \frac{1}{3}$ và $u = \frac{1}{2}$. Từ đó ta tính được tọa độ của giao điểm I là (1, 1, 1, 1). Vậy hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại I(1, 1, 1, 1).

1.26. Giả sử m-phẳng cho trước $\mathbf{A}^m$ có phương $\mathbf{V}^m$. Gọi $\mathbf{A}'^m$ là m-phẳng đi qua điểm B và nhận $\mathbf{V}^m$ làm phương. Như vậy phẳng $\mathbf{A}'^m$ được xác định duy nhất. Ta cần chứng minh $\mathbf{A}'^m$ song song với $\mathbf{A}^m$.

Giả sử hai cái phẳng $\mathbf{A}^m$ và $\mathbf{A}'^m$ không song song và có một điểm $M \in \mathbf{A}^m \cap \mathbf{A}'^m$. Như vậy cái phẳng $\mathbf{A}'^m$ đi qua điểm $M \in \mathbf{A}^m$ và có phương $\mathbf{V}^m$ nên $\mathbf{A}'^m$ trùng với $\mathbf{A}^m$.

Do đó $\mathbf{A}'^m$ không chứa điểm B là điều trái với giả thiết. Ta suy ra $\mathbf{A}'^m$ song song với $\mathbf{A}^m$.

Cách khác: Giả sử $\mathbf{A}^m$ và $\mathbf{A}'^m$ cắt nhau. Theo định lí về tổng số chiều của tổng và giao của hai cái phẳng trong trường hợp có điểm chung ta có:

$$\dim(\mathbf{A}^m + \mathbf{A}'^m) = \dim \mathbf{A}^m + \dim \mathbf{A}'^m - \dim(\mathbf{A}^m \cap \mathbf{A}'^m)$$

Ta có $\dim(\mathbf{A}^m \cap \mathbf{A}'^m) = \dim(\mathbf{V}^m \cap \mathbf{V}^m) = \dim \mathbf{V}^m = m$

Do đó ta suy ra $\dim(\mathbf{A}^m + \mathbf{A}'^m) = m + m - m = m$

Vậy $\mathbf{A}^m + \mathbf{A}'^m = \mathbf{A}^m$ hay $\mathbf{A}'^m$ trùng với $\mathbf{A}^m$ nghĩa là $\mathbf{A}'^m$ không chứa điểm B (không thuộc $\mathbf{A}^m$) là điều trái với giả thiết. Như vậy là $\mathbf{A}^m$ và $\mathbf{A}'^m$ không cắt nhau và có chung phương $\mathbf{V}^m$ nên $\mathbf{A}'^m$ song song với $\mathbf{A}^m$.

1.27. Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{SG} = \dfrac{m_1\overrightarrow{SM_1} + \ldots + m_k\overrightarrow{SM_k}}{m_1 + \ldots + m_k}$

$$\Leftrightarrow m_1\overrightarrow{SM_1} + \ldots + m_k\overrightarrow{SM_k} = (m_1 + \ldots + m_k)\overrightarrow{SG}$$

$$\Leftrightarrow m_1(\overrightarrow{SM_1} - \overrightarrow{SG}) + \ldots + m_k(\overrightarrow{SM_k} - \overrightarrow{SG}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow m_1\overrightarrow{GM_1} + \ldots + m_k\overrightarrow{GM_k} = \vec{0} \quad \text{là đpcm.}$$

1.28. Với O là gốc tọa độ và G là tâm tỉ cự của điểm $M_1, M_2, \ldots, M_k$ ta có:

$$\vec{OG} = \frac{m_1\vec{OM_1} + m_2\vec{OM_2} + ... + m_k\vec{OM_k}}{m_1 + m_2 + ... + m_k}$$

Do đó ta suy ra: $X_j = \dfrac{m_1x_j^1 + m_2x_j^2 + ... + m_kx_j^k}{m_1 + m_2 + ... + m_k}$ với $j = 1, 2, ..., n$

là đpcm

1.29. Gọi G là tâm tỉ cự của hệ điểm $P_o, P_1, ..., P_m$ gắn với họ hệ số $\lambda_o, \lambda_1, ..., \lambda_m$, ta có:

$$\lambda_o\vec{GP_o} + \lambda_1\vec{GP_1} + ... + \lambda_m\vec{GP_m} = \vec{0} \text{ với } \sum_{i=0}^{m}\lambda_i \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m}\lambda_i(\vec{GP_o} + \vec{P_oP_i}) = \vec{0}.$$

Do đó: $\vec{P_oG} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\vec{P_oP_i}}{\sum_{i=0}^{m}\lambda_i}$. Vậy $G \in \alpha$.

Bây giờ ta lấy điểm G bất kì thuộc m- phẳng α ta có:

$$\vec{P_oG} = t_1\vec{P_oP_1} + ... + t_m\vec{P_oP_m}$$

$$\Leftrightarrow \vec{P_oG} = \sum_{i=1}^{m}t_i(\vec{GP_i} - \vec{GP_o})$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sum_{i=1}^{m}t_i)\vec{GP_o} + \sum_{i=1}^{m}t_i\vec{GP_i} = \vec{0} \qquad (1)$$

Đẳng thức (1) ở trên chứng tỏ rằng G là tâm tỉ cự của hệ điểm $P_o, P_1, ..., P_m$ gắn với họ các hệ số:

$$\underbrace{1 - \sum_{i=1}^{m}t_i}_{t_o},\ t_1,\ t_2,\ ...,\ t_m$$

$$t_1,\ t_2,\ ...,\ t_m$$

trong đó $t_o + t_1 + t_2 + ... + t_m = 1$

Vậy α là tập hợp các tâm tỉ cự của hệ điểm $P_o, P_1, ..., P_m$ gắn với họ các hệ số khác nhau.

1.30. Vì G là tâm tỉ cự của hệ điểm $M_1, M_2, ..., M_p$ ứng với họ các hệ số $m_1, m_2, ..., m_p$ với $m_1 + m_2 + ... + m_p \neq 0$ nên ta có:

$$\sum_{i=1}^{p} m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} m_i (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CM_i}) = \vec{0} \qquad (1)$$

với C là tâm tỉ cự của hệ điểm $(H, M_{k+1}, M_{k+2}, ..., M_p)$ trong đó H là tâm tỉ cự của hệ điểm $(M_1, M_2, ..., M_k)$ với $k < p$. Ta có thể viết đẳng thức (1) ở trên dưới dạng:

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} m_i \overrightarrow{GC} + \sum_{i=1}^{p} m_i (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HM_i}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} m_i \overrightarrow{GC} + \sum_{i=1}^{k} m_i \overrightarrow{HM_i} + \sum_{i=1}^{p} m_i \overrightarrow{CH} + \sum_{i=k+1}^{p} m_i \overrightarrow{HM_i} = \vec{0} \qquad (2)$$

Theo giả thiết H là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{M_1, M_2, ..., M_k\}$ $(k < p)$ ứng với các hệ số $m_1, m_2, ..., m_k$ với $m_1 + m_2 + ... + m_k \neq 0$ nên ta có : $\sum_{i=1}^{k} m_i \overrightarrow{HM_i} = \vec{0}$ (3)

Mặt khác ta có C là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{H, M_{k+1}, M_{k+2}, ..., M_p\}$ ứng với các hệ số $\sum_{i=1}^{k} m_i$, m_{k+1}, m_{k+2}, ..., m_p với

$$\sum_{i=1}^{k} m_i + m_{k+1} + m_{k+2} + ... + m_p \neq 0 \text{ nên ta có:}$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \overrightarrow{CH} + \sum_{j=k+1}^{p} m_j \overrightarrow{CM_i} = \vec{0} \qquad (4)$$

Thay các giá trị của (3) và (4) vào (2) ta có: $\sum_{i=1}^{p} m_i \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Ta suy ra tâm tỉ cự G của hệ điểm $\{M_1, M_2, ..., M_p\}$ trùng với tâm tỉ cự C của hệ điểm $\{H, M_{k+1}, M_{k+2}, ..., M_p\}$ vì từ

$$\sum_{i=1}^{p} m_i \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ mà } \sum_{i=1}^{p} m_i \neq 0 \text{ nên } \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ hay } G \equiv C.$$

1.31.a) Vì G là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{P_1, P_2, ..., P_k\}$ gắn với họ các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ nên ta có đẳng thức:

$$\lambda_1\overrightarrow{GP_1} + \lambda_2\overrightarrow{GP_2} + ... + \lambda_k\overrightarrow{GP_k} = \vec{0}$$

thay $\lambda_i = k\lambda_i$ với $i = 1, 2, ..., k$ ta vẫn có:

$$k\lambda_1\overrightarrow{GP_1} + k\lambda_2\overrightarrow{GP_2} + ... + k\lambda_k\overrightarrow{GP_k} = \vec{0}$$

Do đó ta có G là tâm tỉ cự của hệ điểm $P_1, P_2, ..., P_k$ gắn với họ các hệ số $k\lambda_1, k\lambda_2, ..., k\lambda_k$.

b) Trường hợp $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k$ ta chọn các $\lambda_i = 1$, khi đó ta có:

$$\overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GP_2} + ... + \overrightarrow{GP_k} = \vec{0}.$$

Điểm G gọi là trọng tâm của hệ điểm $P_1, P_2, ..., P_k$.

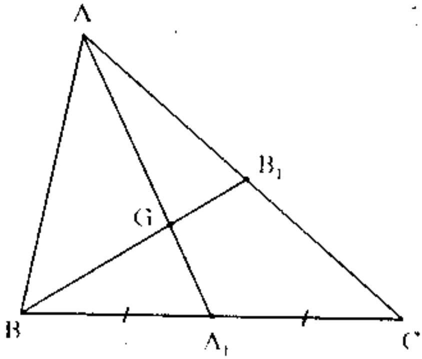
- Đối với đoạn thẳng AB ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow \text{G là trung điểm của đoạn AB.}$$

- Đối với tam giác ABC ta có:

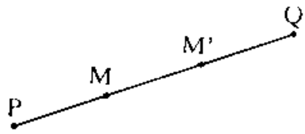
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$



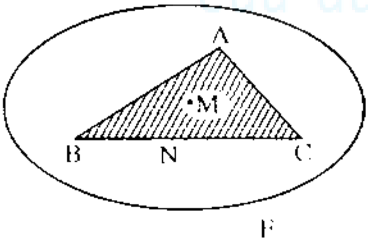
Gọi A_1 là trọng tâm của cạnh BC ta có A_1 là trung điểm của đoạn BC. Theo kết qủa của bài 1.30 ta suy ra trọng tâm của hệ điểm {A, B, C} trùng với trọng tâm của hệ điểm $\{A, A_1\}$ trong đó A_1 là trọng tâm của hệ điểm {B, C}. Do đó trọng tâm G của tam giác ABC là tâm tỉ cự của A, A_1 nên thuộc trung tuyến AA_1 của tam giác ABC.

Lí luận tương tự ta có G thuộc trung tuyến BB_1 (B_1 là trung điểm của đoạn AC). Vậy trọng tâm G của tam giác ABC là giao điểm của hai đường trung tuyến AA_1, BB_1 của tam giác đó.

1.32. Với hai điểm P, Q phân biệt, tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MQ}$ với $k < 0$ là tập hợp những điểm thuộc đường thẳng PQ và ở giữa hai điểm P và Q. Đó chính là những điểm trong của đoạn thẳng PQ. Do đó nếu ta lấy hai điểm M, M' bất kì thuộc đoạn PQ thì đoạn thẳng MM' nằm hoàn toàn trong đoạn PQ. Vậy tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MQ}$ với $k < 0$ là một tập lồi.



1.33. Giả sử A, B, C là ba điểm không thẳng hàng thuộc hình lồi F. Vì F là tập lồi nên với $A \in F$, $B \in F$ ta có đoạn thẳng AB nằm hoàn toàn trong F. Lí luận tương tự, ta có các đoạn thẳng BC, CA cũng nằm hoàn toàn trong F.



Gọi M là một điểm bất kì thuộc miền trong của tam giác ABC.

Gọi $N = AM \cap BC$. Ta có $N \in F$ nên đoạn AN thuộc F và do đó $M \in F$. Vậy tất cả các điểm của tam giác ABC đều thuộc F.

NHẬN XÉT. Có thể xem tam giác ABC là giao của ba nửa mặt phẳng đóng giới hạn bởi các đường thẳng AB, BC, CA theo thứ tự chứa C, A, B. Giao này là một bộ phận lồi của F. Ta dễ dàng chứng minh được giao của hai tam giác nếu có cũng là một tập lồi. Cần chú ý rằng hợp của hai tam giác có thể không phải là một tập lồi.

$$\sum_{i=1}^{p} m_i \vec{GC} = \vec{0} \text{ mà } \sum_{i=1}^{p} m_i \neq 0 \text{ nên } \vec{GC} = \vec{0} \text{ hay } G \equiv C.$$

1.31.a) Vì G là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{P_1, P_2, ..., P_k\}$ gắn với họ các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ nên ta có đẳng thức:

$$\lambda_1 \vec{GP_1} + \lambda_2 \vec{GP_2} + ... + \lambda_k \vec{GP_k} = \vec{0}$$

thay $\lambda_i = k\lambda_i$ với $i = 1, 2, ..., k$ ta vẫn có:

$$k\lambda_1 \vec{GP_1} + k\lambda_2 \vec{GP_2} + ... + k\lambda_k \vec{GP_k} = \vec{0}$$

Do đó ta có G là tâm tỉ cự của hệ điểm $P_1, P_2, ..., P_k$ gắn với họ các hệ số $k\lambda_1, k\lambda_2, ..., k\lambda_k$.

b) Trường hợp $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k$ ta chọn các $\lambda_i = 1$, khi đó ta có:

$$\vec{GP_1} + \vec{GP_2} + ... + \vec{GP_k} = \vec{0}.$$

Điểm G gọi là trọng tâm của hệ điểm $P_1, P_2, ..., P_k$.

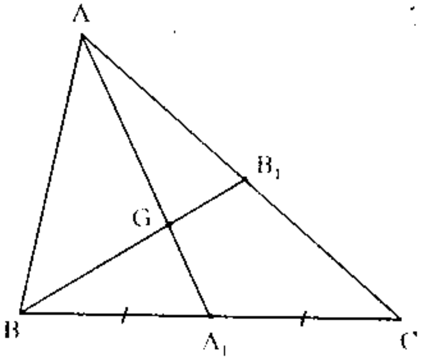
• Đối với đoạn thẳng AB ta có:

$$\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$$

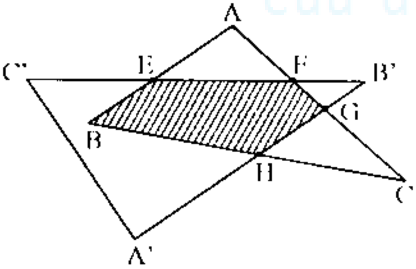
$$\Leftrightarrow \vec{GA} = -\vec{GB} \Leftrightarrow \text{G là trung điểm của đoạn AB.}$$

• Đối với tam giác ABC ta có:

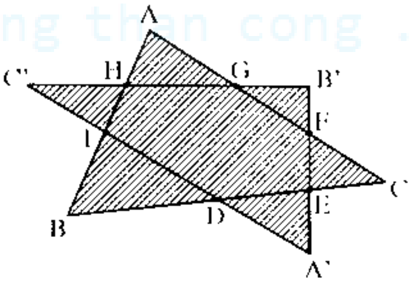
$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$



Gọi A_1 là trọng tâm của cạnh BC ta có A_1 là trung điểm của đoạn BC. Theo kết qủa của bài 1.30 ta suy ra trọng tâm của hệ điểm {A, B, C} trùng với trọng tâm của hệ điểm $\{A, A_1\}$ trong đó A_1 là trọng tâm của hệ điểm {B, C}. Do đó trọng tâm G của tam giác ABC là tâm tỉ cự của A, A_1 nên thuộc trung tuyến AA_1 của tam giác ABC.



Giao của hai tam giác ABC
và A'B'C' là một tập lồi



Hợp của hai tam giác ABC và A'B'C'
không phải là một tập lồi

1.34. a) Giả sử $(ABC) = \lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}$

Vậy ta có $(ACB) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{(ABC)}$

b) Giả sử $(ABC) = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

Ta suy ra $\overrightarrow{CB} = (1-k)\overrightarrow{CA}$

hay $(CBA) = 1 - k = 1 - (ABC)$.

c) Giả sử $(ABC) = t \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = t\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = t(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})$$

$$\Leftrightarrow t\overrightarrow{BC} = (t-1)\overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \frac{t}{t-1}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (BAC) = \frac{t}{t-1} = \frac{(ABC)}{(ABC)-1}$$

1.35. a) Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ đối với mục tiêu đã chọn, giả sử ba m- phẳng P, Q, R song song với nhau lần lượt có phương trình là:

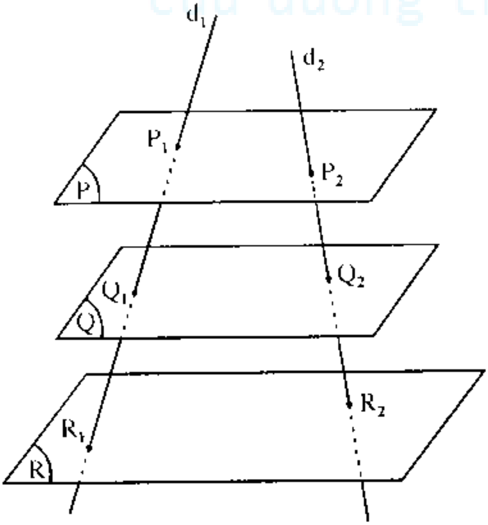
$$\left.\begin{array}{l} (P): \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + p_i = 0 \\ (Q): \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + q_i = 0 \\ (R): \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + r_i = 0 \end{array}\right\} \quad i = 1, 2, ..., n - m .$$

Các phẳng P, Q, R có cùng số chiều và song song với nhau nên phương trình của chúng có dạng như trên, trong đó các số p_i, q_i, r_i đôi một khác nhau với chỉ số i nào đó (và cũng có thể với mọi i).

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua điểm $A(a_i)$ và có phương $\vec{b}(b_i)$. Khi đó đường thẳng d_1 có phương trình tham số là:

$$x_j = a_j + b_j t \text{ với } j = 1, 2, ..., n.$$

Đường thẳng d_1 cắt các m- phẳng P, Q, R lần lượt tại P_1, Q_1, R_1. Giả sử các giao điểm P_1, Q_1, R_1 lần lượt ứng với các giá trị t_p, t_q, t_r của tham số t. Thay $x_j = a_j + b_j t$ vào phương trình của m phẳng P ta có:



$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(a_j + b_j t) + p_i = 0$$

$$\Rightarrow t_p = -\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_j + p_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j}$$

với mọi i = 1, 2, ..., n− m.

Tương tự ta có:

$$t_q = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_j + q_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j}$$

với mọi i = 1, 2, ..., n − m

$$t_r = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_j + r_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j} \text{ với mọi } i = 1, 2, ..., n - m$$

Các giá trị t_p, t_q, t_r không thay đổi với mọi i = 1,2, ..., n − m.

Ta giả sử $(P_1Q_1R_1) = k$, khi đó $\overrightarrow{P_1Q_1} = k\overrightarrow{P_1R_1}$.

Ta có $(P_1Q_1R_1) = \dfrac{t_q - t_p}{t_r - t_p} = \dfrac{q_i - p_i}{r_i - p_i}$.

Như vậy giá trị tỉ số đơn $(P_1Q_1R_1)$ này không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d_1 nghĩa là ta có $(P_1Q_1R_1) = (P_2Q_2R_2)$ với P_2, Q_2, R_2 là các giao điểm tương ứng của đường thẳng d_2 với các mặt phẳng P, Q, R. Điều này tất nhiên vẫn đúng khi d_1 và d_2 song song với nhau.

b) Theo kết qủa câu a) ta có $(P_1Q_1R_1) = (P_2Q_2R_2)$. Theo giả thiết ta có $(P_1Q_1R_1) = p$ nên $(P_2Q_2R_2) = p$.

Do đó: $\overrightarrow{P_1Q_1} = p\overrightarrow{P_1R_1} = p(\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2R_1}) = p\overrightarrow{P_1P_2} + p\overrightarrow{P_2R_1}$.

$$\overrightarrow{P_2Q_2} = p\overrightarrow{P_2R_2} = p(\overrightarrow{P_2R_1} + \overrightarrow{R_1R_2}) = p\overrightarrow{P_2R_1} + p\overrightarrow{R_1R_2}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_2Q_2} - \overrightarrow{P_1Q_1} = p\overrightarrow{R_1R_2} - p\overrightarrow{P_1P_2}.$$

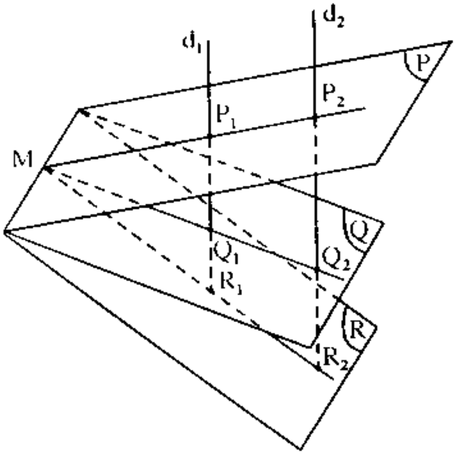
Mặt khác $\overrightarrow{P_2Q_2} = \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1Q_2}$ nên:

$$\overrightarrow{P_2Q_2} - \overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2P_1} + \underbrace{\overrightarrow{P_1Q_2} - \overrightarrow{P_1Q_1}} = p\overrightarrow{R_1R_2} - p\overrightarrow{P_1P_2}$$

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} \quad = -\overrightarrow{P_2P_1} - p\overrightarrow{P_1P_2} + p\overrightarrow{R_1R_2}$$

hay $\overline{Q_1Q_2} = (1-p)\overline{P_1P_2} + p\overline{R_1R_2}$.

1.36. Hai đường thẳng d_1, d_2 song song với nhau xác định một mặt phẳng. Các điểm P_1, Q_1, R_1 phân biệt và P_2, Q_2, R_2 phân biệt chứng tỏ rằng các đường thẳng d_1, d_2 không cắt (n–2)-phẳng giao của ba siêu phẳng đã cho. Mặt phẳng (d_1, d_2) cắt các siêu phẳng P, Q, R theo các đường thẳng P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2. (vì giao của siêu phẳng với một m-phẳng là một (m–1)-phẳng).



Ta xét hai trường hợp sau:

a) Giả sử đường thẳng P_1P_2 cắt đường thẳng Q_1Q_2 tại M thì tất nhiên M thuộc (m--2)-phẳng giao. Do đó M thuộc siêu phẳng R. Mặt khác M thuộc mặt phẳng (d_1, d_2) nên $M \in R \cap (d_1, d_2)$. Vậy M thuộc đường thẳng R_1R_2 nghĩa là trong mặt phẳng (d_1, d_2) ta có 3 đường thẳng P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2 đồng quy tại M. Với phép chiếu song song trong mặt phẳng (d_1, d_2) theo phương chiếu song song với d_1 (tất nhiên cũng song song với d_2) ta có:

$$(MP_1P_2) = (MQ_1Q_2) = (MR_1R_2) = k.$$

Do đó $\overline{MP_1} = k\overline{MP_2}$

$$\overline{MQ_1} = k\overline{MQ_2}$$

$$\overline{MR_1} = k\overline{MR_2}$$

Giả sử ta có $(P_1Q_1R_1) = t$, $\overline{P_1Q_1} = t\overline{P_1R_1}$

Ta suy ra $\overline{MQ_1} - \overline{MP_1} = t(\overline{MR_1} - \overline{MP_1})$

$$k(\overline{MQ_2} - \overline{MP_2}) = kt(\overline{MR_2} - \overline{MP_2})$$

$$k\overline{P_2Q_2} = kt\overline{P_2R_2}$$

$$\overrightarrow{P_2Q_2} = t\overrightarrow{P_2R_2} \Leftrightarrow (P_2Q_2R_2) = t.$$

Vậy $\quad (P_1Q_1R_1) = (P_2Q_2R_2)$.

b) Giả sử đường thẳng $P_1P_2 // Q_1Q_2$ nghĩa là hai đường thẳng này không có điểm chung. Do đó mỗi đường thẳng P_1P_2 và Q_1Q_2 đều không có điểm nào thuộc (n–2)- phẳng giao cả. Ta suy ra đường thẳng R_1R_2 phải song song với hai đường thẳng P_1P_2 và Q_1Q_2.Vì nếu R_1R_2 cắt một trong hai đường thẳng này thì điểm chung đó phải thuộc (n–2)-phẳng giao là vô lí. Vậy ba đường thẳng P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2 nằm trong mặt phẳng (d_1, d_2) và song song với nhau. Áp dụng kết quả của bài 1.35 ta có $(P_1Q_1R_1) = (P_2Q_2R_2)$.

1.37. a) Trong A^n cho hai siêu phẳng α và α' lần lượt có phương trình là: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0$ và $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d = 0$.

Siêu phẳng α và siêu phẳng α' lần lượt có các vectơ pháp tuyến là: $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$

$\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$

• Điều kiện để α và α' cắt nhau là $\vec{a}$ và $\vec{c}$ không cùng phương nghĩa là $\vec{a} \neq k\vec{c} \Leftrightarrow a_i \neq kc_i$ với i = 1, 2, ..., n và $k \neq 0$.

• Điều kiện để α và α' song song với nhau là $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng phương nghĩa là $a_i = kc_i$ với i = 1, 2, ..., n và $b \neq kd$ với $k \neq 0$.

• Điều kiện để α và α' trùng nhau là $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng phương nghĩa là $a_i = kc_i$ với i = 1, 2, ..., n và $b = kd$ với $k \neq 0$.

Tóm lại ta có :

α và α' cắt nhau $\quad \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{c_1} \neq \dfrac{a_2}{c_2} \neq ... \neq \dfrac{a_n}{c_n}$

$\alpha // \alpha' \quad \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{c_1} = \dfrac{a_2}{c_2} = ... = \dfrac{a_n}{c_n} \neq \dfrac{b}{d}$

$\alpha \equiv \alpha' \quad \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{c_1} = \dfrac{a_2}{c_2} = ... = \dfrac{a_n}{c_n} = \dfrac{b}{d}$

b) Ta chứng minh rằng phương trình của chùm siêu phẳng xác định bởi hai siêu phẳng α và α' có dạng :

$$\lambda(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b) + \mu(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d) = 0$$

trong đó λ và μ là các hệ số không đồng thời bằng 0.

• Nếu α'' là một siêu phẳng thuộc chùm siêu phẳng nói trên và giả sử α'' có phương trình là :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i x_i + f = 0$$

Khi đó hệ ba phương trình :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0 & (1) \\ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d = 0 & (2) \\ \sum_{i=1}^{n} e_i x_i + f = 0 & (3) \end{cases}$$

phải tương đương với hệ hai phương trình sau đây :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d = 0 \end{cases}$$

Muốn vậy ta phải có điều kiện là phương trình (3) phải là hệ qủa của hai phương trình (1) và (2), nghĩa là :

$e_i = \lambda a_i + \mu c_i$ với $i = 1, 2, \ldots, n$

và $f = \lambda b + \mu d$ với λ và μ là cặp hệ số không đồng thời bằng 0. Do đó phương trình của α'' có dạng :

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \mu c_i) x_i + \lambda b + \mu d = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b) + \mu(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d) = 0.$$

•Ngược lại nếu một siêu phẳng bất kì có phương trình dạng :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i x_i + f = 0 \qquad (3)$$

trong đó $e_i = \lambda a_i + \mu c_i$

và $f = \lambda b + \mu d$ với λ, μ là cặp hệ số không đồng thời bằng 0 thì siêu phẳng đó có phương trình là hệ qủa của hai phương trình biểu thị cho siêu phẳng α và siêu phẳng α'. Như vậy siêu phẳng $\sum_{i=1}^{n} e_i x_i + f = 0$ với điều kiện như trên là siêu phẳng thuộc chùm siêu phẳng xác định bởi hai siêu phẳng α và α' đã cho nói trên .

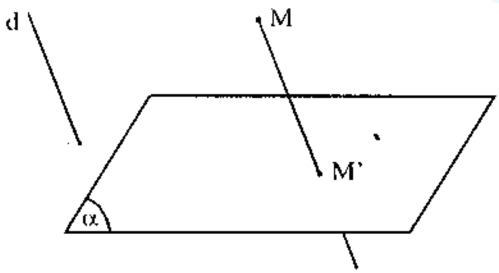
CHÚ Ý. Muốn xác định một siêu phẳng của chùm thỏa mãn một điều kiện nào đó, ta cần dựa vào điều kiện này để tìm ra các hệ số λ, μ xác định sai khác một hệ số tỉ lệ khác 0. Sau khi tìm được các giá trị của λ, μ ta thay các giá trị này vào phương trình của chùm siêu phẳng, ta sẽ lập được phương trình của siêu phẳng cần tìm. Với giá trị $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ ta tìm được phương trình của siêu phẳng α; với giá trị $(\lambda, \mu) = (0, 1)$ ta tìm được phương trình của siêu phẳng α'. Chú ý rằng hai siêu phẳng α và α' xác định nên chùm siêu phẳng có thể cắt nhau hoặc song song với nhau. Khi đó siêu phẳng của chùm sẽ đi qua giao $\alpha \cap \alpha'$ (nếu có) hoặc song song với α và α' (nếu $\alpha \cap \alpha' = \varnothing$)

§6

1.38.Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$, cho siêu phẳng α và một đường thẳng d có phương $\vec{m}$ không thuộc phương $\vec{\alpha}$. Phép chiếu song song từ không gian afin $\mathbf{A}^3$ lên mặt phẳng α theo phương của đường thẳng d được thực hiện như sau:

$f: \mathbf{A}^3 \to \alpha$:

Với mỗi điểm $M \in \mathbf{A}^3$ ta có $f(M) = M' \in \alpha$ bằng cách qua M dựng đường thẳng song song với d. Đường thẳng này cắt mặt



phẳng α tại M'. Ta gọi M' là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng α. Theo tính chất của phép chiếu song song nếu có một điểm $M \in A^3$ thì ta tìm được điểm M' duy nhất thuộc α.Vậy $f(M) = M'$ là một ánh xạ.

Gọi V^3, V^2 lần lượt là các không gian vectơ liên kết với các không gian afin A^3 và α. Gọi $\varphi: V^3 \to V^2$ là ánh xạ nền của f. Có thể coi $V^3 = V^2 + V^1$ trong đó V^2 là phương của mặt phẳng α và V^1 là phương của đường thẳng d. Cần chứng minh φ là ánh xạ tuyến tính nghĩa là φ có tính chất :

$$\varphi(a\vec{x} + b\vec{y}) = a\varphi(\vec{x}) + b\varphi(\vec{y}).$$

Lấy vectơ $\vec{x} \in V^3$ ta có $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$ trong đó $\vec{x_1} \in V^1$ và $\vec{x_2} \in V^2$, và vectơ $\vec{y} \in V^3$ ta có $\vec{y} = \vec{y_1} + \vec{y_2}$ trong đó $\vec{y_1} \in V^1$ và $\vec{y_2} \in V^2$.

Ta xét tính chất của ánh xạ nền φ :

$\varphi(\vec{x}) = \vec{x_2}$ với $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$: ta lấy vectơ $\vec{x_2}$ thuộc V^2

$\varphi(\vec{y}) = \vec{y_2}$ với $\vec{y} = \vec{y_1} + \vec{y_2}$: ta lấy vectơ $\vec{y_2}$ thuộc V^2

$$\underbrace{\varphi(a\vec{x} + b\vec{y})}_{\in V^3} = a\vec{x_1} + a\vec{x_2} + b\vec{y_1} + b\vec{y_2}$$
$$= \underbrace{a\vec{x_1} + b\vec{y_1}}_{\in V^1} + \underbrace{a\vec{x_2} + b\vec{y_2}}_{\in V^2}$$

Ta có $\varphi(a\vec{x} + b\vec{y}) = a\vec{x_2} + b\vec{y_2}$

$$\varphi(a\vec{x} + b\vec{y}) = a\varphi(\vec{x}) + b\varphi(\vec{y})$$

Vậy ánh xạ nền φ là ánh xạ tuyến tính, do đó ánh xạ f là ánh xạ afin.

1.39. Theo giả thiết ta có $f(X) = X'$ với $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $X' = (0, x_2, x_3, ..., x_n)$. Gọi $\mathbf{V}^n$ là không gian vectơ liên kết với không gian afin $\mathbf{A}^n$ và $\mathbf{V}^{n-1}$ là không gian vectơ nhận các vectơ $\{\vec{e_2}, \vec{e_3}, ..., \vec{e_n}\}$ làm cơ sở. Gọi $\varphi : \mathbf{V}^n \to \mathbf{V}^{n-1}$ là ánh xạ nền của ánh xạ $f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ mà $f(X) = X'$. Gọi $\mathbf{V}^1$ là không gian con một chiều của $\mathbf{V}^n$, được sinh ra bởi vectơ $\{\vec{e_1}\}$.

Ta có $\quad \mathbf{V}^n = \mathbf{V}^{n-1} + \mathbf{V}^1$

trong đó $\mathbf{V}^{n-1}$ là phương của siêu phẳng tọa độ có mục tiêu afin $\{O; \vec{e_2}, \vec{e_3}, ..., \vec{e_n}\}$ và $\mathbf{V}^1$ là phương của đường thẳng d nhận $\vec{e_1}$ làm vectơ chỉ phương.

Lấy vectơ $\vec{x} \in \mathbf{V}^n$ ta có $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x'}$ trong đó $\vec{x_1} \in \mathbf{V}^1$ và $\vec{x'} \in \mathbf{V}^{n-1}$. Ta có: $\varphi : \mathbf{V}^n \to \mathbf{V}^{n-1}$ là ánh xạ liên kết với f sao cho $\varphi(\vec{x}) = \vec{x'}$. Tương tự lấy vectơ $\vec{y} \in \mathbf{V}^n$ ta có $\vec{y} = \vec{y_1} + \vec{y'}$ trong đó $\vec{y_1} \in \mathbf{V}^1$ và $\vec{y'} \in \mathbf{V}^{n-1}$. Ta có: $\varphi : \mathbf{V}^n \to \mathbf{V}^{n-1}$ sao cho $\varphi(\vec{y}) = \vec{y'}$. Lấy vectơ $a\vec{x} + b\vec{y} \in \mathbf{V}^n$. Khi đó : $\varphi(a\vec{x} + b\vec{y}) = a\vec{x_1} + a\vec{x'} + b\vec{y_1} + b\vec{y'}$

$$= \underbrace{a\vec{x_1} + b\vec{y_1}}_{\in \mathbf{V}^1} + \underbrace{a\vec{x'} + b\vec{y'}}_{\in \mathbf{V}^{n-1}}$$

Ta suy ra $\varphi(a\vec{x} + b\vec{y}) = a\vec{x'} + b\vec{y'}$

$$= a\varphi(\vec{x}) + b\varphi(\vec{y})$$

Như vậy ánh xạ φ có tính chất tuyến tính. Ta suy ra ánh xạ f là ánh xạ afin liên kết với ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbf{V}^n \to \mathbf{V}^{n-1}$.

Ảnh $f(\mathbf{A}^n)$ là siêu phẳng chứa điểm gốc O có phương là $\mathbf{V}^{n-1}$ với $\{\vec{e_2}, \vec{e_3}, ..., \vec{e_n}\}$ là cơ sở của phương đó.

Vậy phép ánh xạ afin f là phép chiếu song song theo phương của đường thẳng d (nhận $\vec{e_1}$ làm vectơ chỉ phương) chiếu lên siêu phẳng tọa độ $\{O; \vec{e_2}, \vec{e_3}, ..., \vec{e_n}\}$.

Trong không gian afin ba chiều, phép chiếu song song này được minh họa trong bài tập 1.38 ở trên.

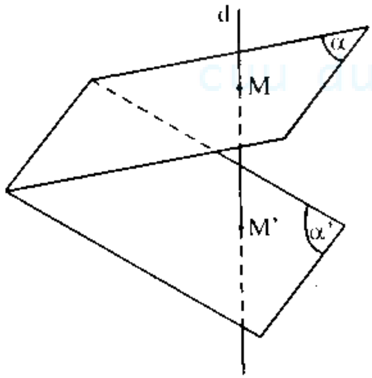
1.40. Cho hai không gian afin **A** và **A'**. Muốn ánh xạ afin f: **A** → **A'** là ánh xạ afin thì ánh xạ nền φ của f phải là ánh xạ tuyến tính. Nếu ánh xạ nền φ của f không phải là ánh xạ tuyến tính thì f không phải là ánh xạ afin.

• Thí dụ ta xét ánh xạ f : **A** → **A'** sau đây:

Gọi O là một điểm của không gian afin **A** và O' là một điểm của không gian afin **A'**. Giả sử f(O) = O'. Gọi M' là một điểm khác với O' của không gian afin **A'**. Với mọi điểm M ≠ O của không gian afin **A** giả sử ta đều có f(M) = M'. Khi đó ta có ánh xạ nền của f là $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'}$

Ta có $\varphi(k\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$. Như vậy ánh xạ nền của f là φ không phải là ánh xạ tuyến tính và do đó f không phải là ánh xạ afin.

• Giả sử α và α' là hai mặt phẳng afin. Gọi d là một đường thẳng cắt α và α' lần lượt tại M và M'. Ta gọi f : α → α' là phép chiếu song song theo phương của đường thẳng d biến α thành α'. Với hai điểm M, N của mặt phẳng α ta có f(M) = M' và f(N) = N' của mặt phẳng α'. Gọi $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$ là ánh xạ nền của f. Ta dễ dàng chứng minh được φ là ánh xạ tuyến tính và khi đó ánh xạ f liên kết với φ nhận φ làm nền là ánh xạ afin.



1.41. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$, giả sử m- phẳng P có phương trình tổng quát là :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + p_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., n-m$$

và (n−m)- phẳng Q có phương trình tổng quát là:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j + q_i = 0\,,\quad i = 1, 2, ..., m$$

a) Ta biết rằng tập hợp các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$, $i = 1, 2, ..., n-m$ tạo thành không gian vectơ $\mathbf{V}^m$ (gồm các vectơ có tọa độ x_i thỏa mãn hệ phương trình trên). Không gian $\mathbf{V}^m$ này là phương của m- phẳng **P** cho trước.

Tương tự ta có tập hợp các vectơ có tọa độ x_i thỏa mãn hệ phương trình

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = 0\,,\quad i = 1, 2, ..., n-m$$

tạo nên không gian vectơ $\mathbf{V}^{n-m}$ là phương của (n−m)- phẳng Q đã cho. Theo giả thiết $\mathbf{V}^m \cap \mathbf{V}^{n-m} = \{\vec{0}\}$ nghĩa là hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, & i = 1, 2, ..., n-m \\ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = 0, & i = 1, 2, ..., m \end{cases}$$

có nghiệm tầm thường và đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có hạng bằng n (các hệ số a_{ij} và b_{ij} tạo nên ma trận vuông cấp n không suy biến).

Bây giờ muốn tìm giao $P \cap Q$ ta cần giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + p_i = 0, & i = 1, 2, ..., n-m \\ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j + q_i = 0, & i = 1, 2, ..., m \end{cases}$$

Đây là một hệ phương trình bậc nhất có n ẩn (không thuần nhất) và có hạng cũng bằng n nên chúng có nghiệm duy nhất là điểm chung của **P** và **Q** (nghiệm của hệ Cramer)

b) Gọi **P**' là m- phẳng đi qua một điểm M bất kì của $\mathbf{A}^n$ và song song với **P** nên **P**' có phương trình là :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + p_i' = 0, \quad i = 1, 2, ..., n-m.$$

Lí luận tương tự như trên ta suy ra $\mathbf{P}' \cap \mathbf{Q}$ là một điểm duy nhất. Tương tự ta có phương trình của phẳng $\mathbf{Q}'$ là $(n-m)$- phẳng đi qua M và song song với $\mathbf{Q}$ như sau :

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j + q_i' = 0, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Ta cũng chứng minh được $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}'$ là một điểm duy nhất.

Ta kí hiệu $\mathbf{P}' \cap \mathbf{Q} = M_q$

và $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}' = M_p$

c) Gọi $O = \mathbf{P} \cap \mathbf{Q}$. Với một điểm M bất kì của $\mathbf{A}^n$ ta có :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} \text{ trong đó } \overrightarrow{x_1} \in \mathbf{V}^m, \quad \overrightarrow{x_2} \in \mathbf{V}^{n-m}.$$

Ánh xạ $p : \mathbf{A}^n \to \mathbf{P}$ theo phương $\mathbf{V}^{n-m}$ nên có ánh xạ nền $\mathcal{P}$ của p có tính chất : $\mathcal{P}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{x_2}$.

Ánh xạ $q : \mathbf{A}^n \to \mathbf{Q}$ theo phương $\mathbf{V}^m$ nên có ánh xạ nền $\mathcal{Q}$ của q có tính chất : $\mathcal{Q}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{x_1}$.

Các ánh xạ $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ của p và q có tính chất tuyến tính (chứng minh tương tự như ở bài 1.38 và 1.39 về phép chiếu song song) nên p và q là những ánh xạ afin.

Ánh xạ afin $p : \mathbf{A}^n \to \mathbf{P}$ sao cho $p(M) = M_p$ theo phương $\mathbf{V}^{n-m}$ có ánh xạ nền $\mathcal{P}(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}) = \overrightarrow{x_2}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{OM_p} \text{ với } \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{OM_p}$$

Tiếp tục ta lại có $\mathcal{P}(\overrightarrow{OM_p}) = \mathcal{P}(\overrightarrow{x_2}) = \overrightarrow{x_2}$

Do đó $p^2(M) = p[p(M)] = M_p = p(M)$

Vậy $p^2 = p$.

Tương tự ta chứng minh được $q^2 = q$

Ta có $p.q(M) = p.M_p = O$ (điểm O)

$q.p(M) = q.M_q = O$ (điểm O).

Ta có ảnh của M qua tích các ánh xạ nêu trên đều là điểm O.

Vậy $p.q = q.p = 1$ là ánh xạ hằng.

d) Theo giả thiết điểm X đó chính là giao điểm của m-phẳng song song với **P** đi qua B và (n–m)-phẳng song song với **Q** đi qua A. Ta có $p(X) = A$ và $q(X) = B$.

Hai cái phẳng này có phương $\mathbf{V}^m$ và $\mathbf{V}^{n-m}$. Theo câu a) ta chứng minh được chúng có một điểm chung duy nhất là X.

NHẬN XÉT. Ta có thể giải câu a) theo một cách khác như sau :

Giả sử $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} = \varnothing$. Theo công thức số chiều của phẳng tổng ta có :

$$\begin{aligned}\dim(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) &= \dim\mathbf{P} + \dim\mathbf{Q} + 1 - \dim(\mathbf{V}^m \cap \mathbf{V}^{n-m})\\ &= m + n - m + 1 = n + 1.\end{aligned}$$

Vậy $\dim(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = n + 1$ là điều vô lí. Do đó $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} \neq \varnothing$.

Theo giả thiết ta có $\mathbf{V}^m \cap \mathbf{V}^{n-m} = \{\vec{0}\}$ nên **P** và **Q** chỉ có một điểm chung duy nhất vì $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}$ là cái phẳng có phương

$$\mathbf{V}^m \cap \mathbf{V}^{n-m} = \{\vec{0}\}.$$

1.42. a) *cách 1*: Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$, phép biến đổi afin có phương trình tổng quát là :

$$f : \begin{cases} x_1' = a_1x_1 + a_2x_2 + c_1 \\ x_2' = b_1x_1 + b_2x_2 + c_2 \end{cases} \text{ trong đó } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Qua phép biến đổi afin này một điểm $X(x_1, x_2) \in \mathbf{A}^2$ biến thành điểm $f(X) = X'(x_1', x_2') \in \mathbf{A}^2$.

Ta cần tìm các số $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ trong phương trình của phép afin f như sau :

$$(1,\ 1) \rightarrow (1,\ 1) : \begin{cases} 1 = a_1 + a_2 + c_1 \\ 1 = b_1 + b_2 + c_2 \end{cases}$$

$$(2,\ 0) \to (2,\ 0) : \begin{cases} 2 = 2a_1 + c_1 \\ 0 = 2b_1 + c_2 \end{cases}$$

$$(1,\ 0) \to (2,\ 2) : \begin{cases} 2 = a_1 + c_1 \\ 2 = b_1 + c_2 \end{cases}$$

Giải hệ 6 phương trình 6 ẩn trên ta có kết qủa :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & c_1 \\ b_1 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ta có phương trình của phép afin f đối với mục tiêu đã chọn là:

$$\begin{cases} x'_1 = - x_2 + 2 \\ x'_2 = -2x_1 - x_2 + 4 \end{cases}$$

Cách 2. Gọi φ là phép biến đổi tuyến tính nền sinh ra phép biến đổi afin f, ta có :

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$$

$$\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1,\ -1)$, $\overrightarrow{A'B'} = (1,\ -1)$

$\overrightarrow{AC} = (0,\ -1)$, $\overrightarrow{A'C'} = (1,\ 1)$

Ta cần tìm ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ vì đó cũng là ma trận của phép biến đổi afin f tương ứng sinh ra bởi phép biến đổi tuyến tính φ đó.

Ta có $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \varphi(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \vec{e}'_1 - \vec{e}'_2 = \overrightarrow{A'B'} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$

$\varphi(\overrightarrow{AC}) = \varphi(-\vec{e}_2) = -\vec{e}'_2 = \overrightarrow{A'C'} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

Ta có :

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 - \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \phantom{\vec{e}'_1} - \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{cases}$$

Do đó : $\begin{cases} \vec{e}'_1 = \phantom{-\vec{e}_1} -2\vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{cases}$

Ta tìm được ma trận chuyển A từ cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Do đó phương trình của phép biến đổi afin f nhận φ là phép biến đổi tuyến tính liên kết có dạng :

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = \quad\quad - x_2 + c_1 \\ x_2' = -2x_1 - x_2 + c_2 \end{cases}$$

Theo giả thiết ta có : f(A) = A = (1, 1) nên ta có:

$$\begin{cases} 1 = \quad\quad -1 + c_1 \\ 1 = -2 - 1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình của phép biến đổi afin f là :

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

NHẬN XÉT. Ta có thể tính c_1, c_2 bằng cách thay tọa độ của các điểm B và B' hoặc của C và C' vào phương trình trên và thực hiện việc tính toán như đã làm với các điểm A và A'. Mặt khác ta cũng cần lưu ý rằng (c_1, c_2) chính là tọa độ của điểm $E' = f(E_o)$. Gọi φ là phép biến đổi tuyến tính sinh ra phép biến đổi afin f, ta có $\varphi(\overrightarrow{E_oA}) = \overrightarrow{E_o'A'}$.

Dựa vào phương trình của φ (là phương trình của f sau khi bỏ cột số hạng tự do) ta tính được tọa độ của vectơ $\overrightarrow{E_o'A'} = (-1, -3)$ mà điểm $A' = f(A)$ có tọa độ (1, 1) nên ta có $E_o' = f(E_o) = (2, 4)$.

Mặt khác, ta có thể giải bài toán trên theo sơ đồ sau đây:

$$\begin{tikzcd} \{A\ ;\ B,\ C\} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g^{-1}"'] & & \{A'\ ;\ B',\ C'\} \\ & \{E_0\ ;\ E_1,\ E_2\} \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Gọi g là phép biến đổi afin biến mục tiêu $\{E_0; E_1, E_2\}$ thành $\{A; B, C\}$ và h là phép biến đổi afin biến mục tiêu $\{E_0; E_1, E_2\}$ thành $\{A'; B', C'\}$. Khi đó ta có :

$$f = h_o g^{-1}$$

b) Bây giờ ta viết phương trình của phép biến đổi afin f đối với mục tiêu mới là $\{A; B, C\}$ trong đó A(1, 1), B(2, 0), C(1, 0).

Ta biết rằng phương trình của phép biến đổi afin đối với mục tiêu mới có dạng :

$[x'] = B'[x] + [b']$ trong đó $B' = C^{*-1}BC^*$ với C là ma trận chuyển từ mục tiêu cho trước sang mục tiêu $\{A; B, C\}$ và B là ma trận của phép biến đổi afin f đối với mục tiêu cho trước (là mục tiêu cũ).

Ta có :

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{A'B'} = (1,-1) \\ \overrightarrow{A'C'} = (0,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ma trận chuyển } C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(chú ý rằng $|C^*| = -1$).

$$\text{Ta có } B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$[b']$ là tọa độ của điểm f(A) đối với mục tiêu $\{A; B, C\}$. Theo giả thiết ta có f(A) = A nên f(A) = (0, 0). Do đó ta có phương trình của phép biến đổi afin f đối với mục tiêu $\{A; B, C\}$ là :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = \quad\; - 2x_2 \end{cases}$$

NHẬN XÉT THÊM

1) Đối với mục tiêu $\{A; B, C\}$, phép biến đổi afin đã biến mục tiêu này thành mục tiêu $\{A'; B', C'\}$. Giả sử $\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$ là ma trận chuyển từ mục tiêu $\{A; B, C\}$ sang mục tiêu $\{A'; B', C'\}$ nghĩa là :

$$\begin{cases}\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{A'C'} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}\end{cases} \Rightarrow \text{ma trận chuyển } T = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$$

trong đó $\overrightarrow{AB} = (1, -1)$, $\overrightarrow{A'B'} = (1, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (0, -1)$, $\overrightarrow{A'C'} = (1, 1)$

Do đó :

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \end{cases} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = -2 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Vậy đối với mục tiêu mới là {A; B, C} phép afin f có ma trận là:

$$B' = T^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2) Ta có thể dùng công thức đổi mục tiêu để tìm tọa độ mới của các điểm đã cho đối với mục tiêu {A; B, C}. Sau đó ta sẽ thực hiện việc tính toán đối với các tọa độ này đối với mục tiêu {A; B, C} như đối với phần trên. Thí dụ đối với mục tiêu mới ta có ngay tọa độ mới của các điểm sau đây:

$$A(0,\ 0) \to A'(0,\ 0)$$

$$B(1,\ 0) \to B'(1,\ 0)$$

$$C(0,\ 1) \to C'(c_1,\ c_2)$$

Ta cần tìm tọa độ mới của điểm C' đối với mục tiêu {A; B, C}. Ta đã tính được ma trận chuyển C từ mục tiêu cho trước sang mục tiêu {A; B, C} là :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Áp dụng công thức đổi mục tiêu, ta tìm tọa độ mới của điểm C'(2, 2) như sau :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 = x'_1 + 1 \\ 2 = -x'_1 - x'_2 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_1 = 1 = c_1 \\ x'_2 = -2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow C = (c_1, c_2) = (1, -2).$$

Đối với mục tiêu {A; B, C} ta thực hiện phép biến đổi afin f được xác định sau đây :

$$f : \begin{cases} A(0,0) \to A'(0,0) \\ B(1,0) \to B'(1,0) \\ C(0,1) \to C'(1,-2) \end{cases}$$

Đối với mục tiêu {A; B, C} ta có :

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{A'B'} = (1,0) \\ \overrightarrow{A'C'} = (1,-2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ma trận chuyển } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Do đó ta có phương trình của phép biến đổi afin f đối với mục tiêu {A; B, C} là : $[x'] = T^* [x] + [b]$

hay $$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ hay } \begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 \\ x'_2 = \quad - 2x_2 \end{cases}$$

Ta được kết quả giống như đã tìm được ở phần trên.

1.43.a) Ta có :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_oA_1} &= (1,-1,-1) \\ \overrightarrow{A_oA_2} &= (0,-1,-1) \Rightarrow \\ \overrightarrow{A_oA_3} &= (0,0,-1) \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Hệ ba vectơ $\{ \overrightarrow{A_oA_1}, \overrightarrow{A_oA_2}, \overrightarrow{A_oA_3} \}$ độc lập tuyến tính nên hệ 4 điểm $\{A_o, A_1, A_2, A_3\}$ độc lập.

Tương tự

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'_oA'_1} &= (0,1,0) \\ \overrightarrow{A'_oA'_2} &= (2,0,1) \Rightarrow \\ \overrightarrow{A'_oA'_3} &= (1,0,1) \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Hệ ba vectơ $\{\overrightarrow{A'_oA'_1}, \overrightarrow{A'_oA'_2}, \overrightarrow{A'_oA'_3}\}$ độc lập tuyến tính nên hệ 4 điểm $\{A'_o, A'_1, A'_2, A'_3\}$ độc lập.

b) *Cách 1.* Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ phương trình tổng quát của phép biến đổi afin f có dạng :

$$\begin{cases} x'_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + d_1 \\ x'_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + d_2 \\ x'_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + d_3 \end{cases}$$

$A_o(1,1,1) \rightarrow A'_o(0,0,0)$:

$$\begin{cases} 0 = a_1 + a_2 + a_3 + d_1 \\ 0 = b_1 + b_2 + b_3 + d_2 \\ 0 = c_1 + c_2 + c_3 + d_3 \end{cases}$$

$A_1(2,0,0) \rightarrow A'_1(0,1,0)$:

$$\begin{cases} 0 = 2a_1 + d_1 \\ 1 = 2b_1 + d_2 \\ 0 = 2c_1 + d_3 \end{cases}$$

$A_2(1,0,0) \rightarrow A'_2(2,0,1)$:

$$\begin{cases} 2 = a_1 + d_1 \\ 0 = b_1 + d_2 \\ 1 = c_1 + d_3 \end{cases}$$

$A_3(1,1,0) \rightarrow A'_3(1,0,1)$:

$$\begin{cases} 1 = a_1 + a_2 + d_1 \\ 0 = b_1 + b_2 + d_2 \\ 1 = c_1 + c_2 + d_3 \end{cases}$$

Giải hệ 12 phương trình trên ta được kết quả sau đây :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & d_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & d_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta có phương trình phép biến đổi afin f đối với mục tiêu đã chọn :

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 - x_2 - x_3 + 4 \\ x_2' = x_1 - 1 \\ x_3' = -x_1 - x_3 + 2 \end{cases}$$

Cách 2. Gọi φ là phép biến đổi tuyến tính liên kết với phép biến đổi afin f, ta có :

$$\varphi(\overrightarrow{A_oA_1}) = \overrightarrow{A_o'A_1'}$$

$$\varphi(\overrightarrow{A_oA_2}) = \overrightarrow{A_o'A_2'}$$

$$\varphi(\overrightarrow{A_oA_3}) = \overrightarrow{A_o'A_3'}$$

Ta tính được tọa độ các vectơ sau đây :

$$\overrightarrow{A_oA_1} = (1,-1,-1) \xrightarrow{\varphi} \overrightarrow{A_o'A_1'} = (0,1,0)$$

$$\overrightarrow{A_oA_2} = (0,-1,-1) \xrightarrow{\varphi} \overrightarrow{A_o'A_2'} = (2,0,1)$$

$$\overrightarrow{A_oA_3} = (0,0,-1) \xrightarrow{\varphi} \overrightarrow{A_o'A_3'} = (1,0,1)$$

$$\varphi(\overrightarrow{A_oA_1}) = \varphi(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1'} - \overrightarrow{e_2'} - \overrightarrow{e_3'} = \overrightarrow{A_o'A_1'} = \overrightarrow{e_2}$$

$$\varphi(\overrightarrow{A_oA_2}) = \varphi(-\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}) = -\overrightarrow{e_2'} - \overrightarrow{e_3'} = \overrightarrow{A_o'A_2'} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$$

$$\varphi(\overrightarrow{A_oA_3}) = \varphi(-\overrightarrow{e_3}) = -\overrightarrow{e_3'} = \overrightarrow{A_o'A_3'} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}.$$

Ta tìm ma trận chuyển A từ cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\}$ bằng cách biểu thị $\{\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}\}$ qua $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1'} = \overrightarrow{e_2'} + \overrightarrow{e_3'} + \overrightarrow{e_2} = -2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_2'} = -\overrightarrow{e_3'} - 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3} - 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_3'} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

Vậy $$\begin{cases} \overrightarrow{e_1'} = -2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_2'} = -\overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_3'} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ta có $A^* = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Phương trình phép biến đổi afin f có dạng $[x'] = A^*[x] + [b]$. Muốn tìm [b] ta thay tọa độ của $A_o(1, 1, 1)$ và $A'_o(0, 0, 0)$ vào phương trình của f ta có :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vậy phép afin f có phương trình là :

$$\begin{cases} x'_1 = -2x_1 - x_2 - x_3 + 4 \\ x'_2 = x_1 - 1 \\ x'_3 = -x_1 - x_3 + 2 \end{cases}$$

c) Điểm kép của phép afin f là điểm biến thành chính nó.

Nếu $M(x_1, x_2, x_3)$ là một điểm kép thì $f(M) = M$. Do đó ta có phương trình tìm điểm kép của f là :

$$\begin{cases} x_1 = -2x_1 - x_2 - x_3 + 4 \\ x_2 = x_1 - 1 \\ x_3 = -x_1 - x_3 + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 - 2x_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{7} \\ x_2 = \dfrac{1}{7} \\ x_3 = \dfrac{3}{7} \end{cases}$$

Vậy phép afin f có một điểm kép $M = (\frac{8}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7})$

Ta biết rằng một phép biến đổi afin f mà có một đường thẳng *l* sao cho mọi đường thẳng song song với *l* (cùng vectơ chỉ phương với *l*) đều biến thành chính nó thì *l* gọi là *phương bất biến* của phép afin f. Nếu f(A) = A', f(B) = B' ta có $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ mà $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ cùng phương nghĩa là $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A'B'}$ với $k \neq 0$. Do đó từ phương trình của phép biến đổi afin f ta có thể suy ra phương trình của phép biến đổi tuyến tính φ liên kết sinh ra phép biến đổi afin f đó. Theo câu b) ta có phương trình của phép afin f và phương trình của phép biến đổi tuyến tính nền φ là:

$$f: \begin{cases} x_1' = -2x_1 - x_2 - x_3 + 4 \\ x_2' = x_1 - 1 \\ x_3' = -x_1 - x_3 + 2 \end{cases} \Rightarrow \varphi: \begin{cases} x_1' = -2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = x_1 \\ x_3' = -x_1 - x_3 \end{cases}$$

Ta có $\varphi(\vec{x}) = k\vec{x} = (kx_1, kx_2, kx_3) = (x_1', x_2', x_3')$. Do đó :

$$\begin{cases} kx_1 = -2x_1 - x_2 - x_3 \\ kx_2 = x_1 \\ kx_3 = -x_1 - x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2-k)x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + 0 = 0 \\ -x_1 + 0 - (1+k)x_3 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên phải có nghiệm khác nghiệm tầm thường nghĩa là :

$$\begin{vmatrix} -2-k & -1 & -1 \\ 1 & -k & 0 \\ -1 & 0 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -1 - k - (1+k)[k(2+k)+1] = 0$$

$$\Leftrightarrow -(1+k)(1 + 2k + k^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+k)(2 + 2k + k^2) = 0.$$

Phương trình $(1 + k)(k^2 + 2k + 2) = 0$ có một nghiệm thực $k = -1$ và hai nghiệm phức. Trong không gian afin thực ta chỉ lấy nghiệm thực $k = -1$, khi đó ta có phép biến đổi tuyến tính φ ứng với giá trị riêng $k = 1$ có phương trình là :

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm tổng quát là $x_3 = -x_1$, $x_2 = 4x_1$ và x_1 tuỳ ý thuộc $\mathbf{R}$. Do đó $(\alpha, 4\alpha, -\alpha)$ với $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ là tập hợp các vectơ riêng của φ ứng với giá trị riêng $k = -1$. Một hệ nghiệm cơ bản là vectơ

$\overline{m} = (1, 4, -1)$. Các đường thẳng nhận $\overline{m}$ làm vectơ chỉ phương đều biến thành chính nó. Ta có $\overline{m} = (1, 4, -1)$ là phương bất biến của phép afin.

d) Ta đã lập được phương trình của phép biến đổi afin f đối với mục tiêu $\{E_o; E_1, E_2, E_3\}$ đã chọn là :

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 - x_2 - x_3 + 4 \\ x_2' = x_1 - 1 \\ x_3' = -x_1 - x_3 + 2 \end{cases}$$

Bây giờ ta lập phương trình của phép afin f đó đối với mục tiêu mới là $\{A_o; A_1, A_2, A_3\}$:

Trước hết ta cần tìm ma trận chuyển C từ mục tiêu đã chọn sang mục tiêu $\{A_o; A_1, A_2, A_3\}$:

Ta có :

$$\begin{matrix} \overrightarrow{A_oA_1} = (1,-1,-1) \\ \overrightarrow{A_oA_2} = (0,-1,-1) \\ \overrightarrow{A_oA_3} = (0,0,-1) \end{matrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Gọi B' là ma trận của phép biến đổi afin f đối với mục tiêu mới là $\{A_o; A_1, A_2, A_3\}$ ta có $B' = C^{*-1}BC^*$ trong đó B là ma trận của phép biến đổi afin f đối với mục tiêu cũ .

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Gọi $[x'] = B'[x] + [b']$ là phương trình của phép afin f đối với mục tiêu mới, trong đó $[b']$ là cột tọa độ của điểm $f(A_o) = A'_o$ đối với mục tiêu mới $\{A_o; A_1, A_2, A_3\}$. Áp dụng công thức đổi mục tiêu $[x] = C^*[x'] + [c]$ trong đó $[c]$ là cột tọa độ của điểm A_o đối với mục tiêu $\{E_o; E_1, E_2, E_3\}$. Ta có :

$$\begin{cases} 0 = x_1' + 1 \\ 0 = -x_1' - x_2' + 1 \\ 0 = -x_1' - x_2' - x_3' + 1 \end{cases} \Rightarrow A_o' : \begin{cases} x_1' = -1 \\ x_2' = 2 \\ x_3' = 0 \end{cases}$$

Ta có phương trình của phép biến đổi afin f đối với mục tiêu mới $\{A_o; A_1, A_2, A_3\}$ là :

$$\begin{cases} x_1' = 2x_2 + x_3 - 1 \\ x_2' = -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2 \\ x_3' = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

Cách khác. Ta đặt

$$\begin{cases} \vec{e_1} = \overrightarrow{A_oA_1} = (1,-1,-1) \\ \vec{e_2} = \overrightarrow{A_oA_2} = (0,-1,-1) \\ \vec{e_3} = \overrightarrow{A_oA_3} = (0,0,-1) \end{cases} \text{ và : } \begin{cases} \vec{e_1'} = \overrightarrow{A_o'A_1'} = (0,1,0) \\ \vec{e_2'} = \overrightarrow{A_o'A_2'} = (2,0,1) \\ \vec{e_3'} = \overrightarrow{A_o'A_3'} = (1,0,1) \end{cases}$$

Ta tìm ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ biến cơ sở $\{\vec{e_i}\}$ thành cơ sở $\{\vec{e_i'}\}$ với i = 1, 2, 3. Trước hết ta tìm ma trận chuyển từ cơ sở $\{\vec{e_i}\}$ sang cơ sở $\{\vec{e_i'}\}$. Giả sử ta có :

$$\begin{cases} \vec{e_1'} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} \\ \vec{e_2'} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3} \\ \vec{e_3'} = c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_3\vec{e_3} \end{cases}$$

Thay tọa độ của $\{\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}\}$ và của $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ vào hệ phương trình trên ta tính được ma trận chuyển A :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Phép biến đổi tuyến tính φ liên kết với phép afin f có ma trận là A^*. Do đó A^* cũng là ma trận của phép biến đổi afin f và ta có phương trình của f có dạng : $[x'] = A^*[x] + [b]$. Muốn tìm cột tọa độ $[b]$, ta cần tìm tọa độ điểm A_o' đối với mục tiêu $\{A_o; A_1, A_2, A_3\}$.

Ta có : $\overrightarrow{A_oA_o'} = (-1, -1, -1)$

Mặt khác $\overrightarrow{A_oA_o'} = a_1\overrightarrow{e_1'} + a_2\overrightarrow{e_2'} + a_3\overrightarrow{e_3'}$ nên :

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ta tính được $(a_1, a_2, a_3) = (-1, 2, 0)$. Vậy $A_o' = (-1, 2, 0)$. Do đó phương trình của phép biến đổi afin đối với mục tiêu mới $\{A_o; A_1, A_2, A_3\}$ là :

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ta tìm lại được kết quả đã nêu ở phần trên.

1.44.Ta tìm ma trận chuyển C từ cơ sở $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$. Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

Do đó ma trận chuyển $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^* = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Phương trình của phép afin f đối với mục tiêu {A; B, C, D} có dạng:

$$[x'] = C^*[x] + [b]$$

Ta có $f(A) = B = (1, 0, 0) = (b_1, b_2, b_3)$. Do đó ta lập được phương trình của phép afin f đối với mục tiêu {A; B, C, D} là :

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.45. Ta có phép afin f biến điểm (x_1, x_2) thành điểm (x'_1, x'_2).

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 - 3x_2 - 7 \\ x'_2 = 3x_1 - 5x_2 - 9 \end{cases}$$

Phép afin f^{-1} sẽ biến điểm (x'_1, x'_2) thành điểm (x_1, x_2).

Ta tìm cách biểu thị (x_1, x_2) qua (x'_1, x'_2) và được kết quả là :

$$\begin{cases} x_1 = 5x'_1 - 3x'_2 + 8 \\ x_2 = 3x'_1 - 2x'_2 + 3 \end{cases}$$

Đây chính là phương trình của phép afin f^{-1} cần tìm.

CHÚ Ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng cách khác như sau :

Phép afin f có phương trình $[x'] = B[x] + [b]$

Do đó $B^{-1}[x'] = [x] + B^{-1}[b]$

Vậy $[x] = B^{-1}[x'] - B^{-1}[b]$ là phương trình của phép afin f^{-1}. Trong trường hợp cụ thể này ta có :

$$f : \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Ta có $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad -B^{-1}[b] = -\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & -27 \\ 21 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vậy ta có phương trình của f^{-1} là : $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

1.46. a) Ta có $f(M) = (5, 5)$

$$f^{-1}(M) = (0, \frac{3}{2})$$

b) Gọi Δ là đường thẳng có phương trình $3x_1 + 2x_2 - 6 = 0$.

Lấy M(0, 3), N(2, 0) là hai điểm trên Δ (có tọa độ thỏa mãn phương trình của Δ). Ta có $f(M) = M'(4, 3)$ và $f(N) = N'(4, 1)$. Ta có phương trình của đường thẳng $M'N' = f(\Delta)$ là : $x_1 - 4 = 0$

Gọi d' là đường thẳng có phương trình $3x_1' + 2x_2' - 6 = 0$. Ta có $f(d) = d'$. Cần tìm phương trình của đường thẳng d.

Ta có $3(3x_1 + 2x_2 - 2) + 2(2x_1 + 2x_2 - 1) - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 9x_1 + 6x_2 - 6 + 4x_1 + 4x_2 - 2 - 6 = 0$

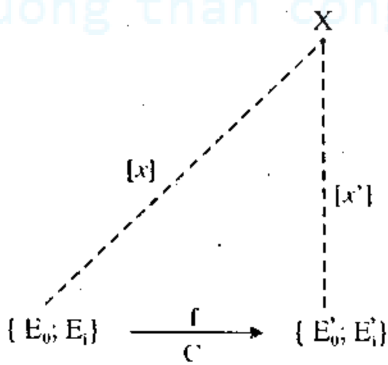
$\Leftrightarrow 13x_1 + 10x_2 - 14 = 0$ là phương trình của đường thẳng d mà $f(d) = d'$.

c) Điểm kép của phép afin f có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 = 3x_1 + 2x_2 - 2 \\ x_2 = 2x_1 + 2x_2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Điểm kép của f có tọa độ là $(x_1, x_2) = (0, 1)$

1.47. Ta đã biết công thức đổi mục tiêu $[x] = C^*[x'] + [a_o]$ trong đó $[x]$, $[x']$ theo thứ tự là tọa độ của điểm X đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ và đối với mục tiêu $\{E_o'; E_i'\}$. Còn C là ma trận chuyển từ mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ sang mục tiêu $\{E_o'; E_i'\}$. Theo giả thiết của đề toán ta suy ra phương trình phép biến đổi afin đối với mục tiêu thứ nhất $\{E_o; E_i\}$ và biến mục tiêu thứ nhất thành mục tiêu thứ hai $\{E_o'; E_i'\}$ là :



$$[x'] = C^*[x] + [a_o].$$

Cụ thể ta có phương trình phép afin đó như sau :

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ & & 1 & . & . & . & 1 \\ & & & . & . & . & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ . \\ . \\ . \\ n \end{bmatrix}$$

Do đó ta tính được tọa độ các đỉnh của mục tiêu thứ hai đối với mục tiêu thứ nhất. Thí dụ đối với điểm E_1 ta có :

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ & & 1 & . & . & . & 1 \\ & & & . & . & . & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ . \\ . \\ . \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ . \\ . \\ . \\ n \end{bmatrix}$$

Do đó tọa độ các đỉnh của mục tiêu thứ hai là :

$$E'_o = (1, 2, 3, 4, ..., n-1, n)$$
$$E'_1 = (2, 2, 3, 4, ..., n-1, n)$$
$$E'_2 = (2, 3, 3, 4, ..., n-1, n)$$
....
$$E'_{n-1} = (2, 3, 4, 5, ..., n, n)$$
$$E'_n = (2, 3, 4, 5, ..., n, n+1)$$

1.48.Ta biết rằng trong không gian afin $\mathbf{A}^n$, một phép afin f được xác định duy nhất bởi hai hệ n + 1 điểm độc lập. Giả sử hai hệ n + 1 điểm độc lập đó là :

$\{A_o, A_1, A_2, ..., A_n\} \xrightarrow{f} \{A'_o, A'_1, A'_2, ..., A'_n\}$ và ta có $f(A_i) = A'_i$ với i = 0, 1, 2, ..., n.

Lấy một điểm X bất kì thuộc $\mathbf{A}^n$ ta có :

$$\overrightarrow{A_oX} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{A_oA_i}$$

Qua phép afin f ta có $f(X) = X'$ và :

$$\overrightarrow{A'X'} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{A'_oA'_i}$$

Nếu các điểm A_i với $i = 0, 1, 2, ..., n$ đều là điểm kép của f, ta có $X' \equiv X$ với mọi $X \in \mathbf{A}^n$. Do đó phép afin f là phép đồng nhất.

1.49. Ta chọn trong siêu phẳng $\mathbf{A}^{n-1}$ đã cho n điểm độc lập $E_o, E_1, ..., E_{n-1}$, còn điểm E_n không thuộc $\mathbf{A}^{n-1}$. Ta có $f(E_i) = E_i$ với $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ và $f(E_n) = E'_n$.

Giả sử điểm E'_n có tọa độ đối với mục tiêu đã chọn là :

$$E'_n = (a_1, a_2, ..., a_n).$$

Vì $f(E_o) = E_o$ nên phương trình phép thấu xạ afin f có dạng :

$$[x'] = A^*[x]$$

Ta cần tìm ma trận chuyển A. Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E'_oE'_1} = \overrightarrow{E_oE_1} \\ \overrightarrow{E'_oE'_2} = \overrightarrow{E_oE_2} \\ \dots \qquad \dots \\ \overrightarrow{E'_oE'_{n-1}} = \overrightarrow{E_oE_{n-1}} \\ \overrightarrow{E'_oE'_n} = a_1\overrightarrow{E_oE_1} + a_2\overrightarrow{E_oE_2} + \dots + a_n\overrightarrow{E_oE_n}. \end{cases}$$

Do đó ta tìm được ma trận chuyển A như sau :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ .. & .. & .. & \dots & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

Từ đó ta suy ra phương trình của phép thấu xạ afin là :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + a_1x_n \\ x_2' = x_2 + a_2x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{n-1}' = x_{n-1} + a_{n-1}x_n \\ x_n' = a_nx_n \end{cases}$$

Ta lấy hai điểm $M(x_i)$, $N(y_i)$ bất kì không thuộc siêu phẳng nền $\mathbf{A}^{n-1}$ và gọi $M'(x_i')$, $N'(y_i')$ là ảnh của chúng qua phép thấu xạ afin f. Cần chứng minh hai đường thẳng MM' và NN' song song với nhau hoặc trùng nhau.

Vectơ $\overrightarrow{MM'}$ có tọa độ :

$(x_1' - x_1, x_2' - x_2, \ldots, x_n' - x_n) = (a_1x_n, a_2x_n, \ldots, a_{n-1}x_n, (a_n - 1)x_n)$

Vectơ $\overrightarrow{NN'}$ có tọa độ :

$(y_1' - y_1, y_2' - y_2, \ldots, y_n' - y_n) = (a_1y_n, a_2y_n, \ldots, a_{n-1}y_n, (a_n - 1)y_n)$

Ta có :

$$\frac{x_1' - x_1}{y_1' - y_1} = \frac{x_2' - x_2}{y_2' - y_2} = \ldots = \frac{x_n' - x_n}{y_n' - y_n} = \frac{x_n}{y_n}$$

Do đó hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{NN'}$ cùng phương (hay cộng tuyến) nghĩa là các đường thẳng MM' và NN' song song với nhau hoặc trùng nhau.

1.50.Ta biết rằng phép tịnh tiến là một phép afin. Do đó tập hợp các phép tịnh tiến là một tập hợp con của tập hợp các phép biến đổi afin. Gọi $\mathbf{V}^n$ là không gian vectơ liên kết của $\mathbf{A}^n$.

Với vectơ $\vec{a} \in \mathbf{V}^n$ ta có phép tịnh tiến $t_{\vec{a}}$ và ứng với vectơ $\vec{b} \in \mathbf{V}^n$ ta có phép tịnh tiến $t_{\vec{b}}$. Giả sử lấy điểm $M \in \mathbf{A}^n$ ta có:

$$t_{\vec{a}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{a}$$

$$t_{\vec{b}}(M') = t_{\vec{b}}.t_{\vec{a}}(M) = M'' \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M''} = \vec{b}$$

Ta có : $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

Vậy tích của hai phép tịnh tiến $t_{\vec{b}}.t_{\vec{a}}$ là một phép tịnh tiến $t_{\vec{c}}$ trong đó vectơ $\overrightarrow{MM''} = \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Bây giờ ta cần chứng minh phép tịnh tiến $t_{\vec{a}}$ có nghịch đảo.

Ta có $t_{\vec{a}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{a}$

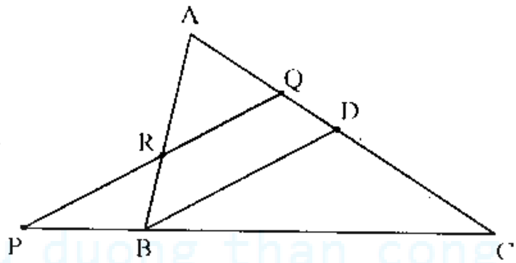
Như vậy $t_{\vec{a}}^{-1}(M') = M \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{a}$.

Vậy $t_{\vec{a}}^{-1}$ cũng là một phép tịnh tiến và ta kí hiệu $t_{-\vec{a}} = t_{\vec{a}}^{-1}$.

Kết luận :

Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ tập hợp các phép tịnh tiến làm thành một nhóm.

1.51. Giả sử ba điểm P, Q, R phân biệt, thẳng hàng và lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB của tam giác ABC. Trong mặt phẳng chứa tam giác vẽ BD// PQ cắt AC tại D. Do đó :



Ta có (PBC).(QCA).(RAB) = (QDC).(QCA).(QAD).

Giả sử (QDC) = a $\Leftrightarrow \overrightarrow{QD} = a\overrightarrow{QC}$

(QCA) = b $\Leftrightarrow \overrightarrow{QC} = b\overrightarrow{QA}$

(QAD) = c $\Leftrightarrow \overrightarrow{QA} = c\overrightarrow{QD}$

Do đó $\overrightarrow{QD} = a\overrightarrow{QC} = ab\overrightarrow{QA} = abc\overrightarrow{QD}$

Ta suy ra abc = 1 vì $\overrightarrow{QD} \neq \vec{0}$

Vậy (PBC).(QCA).(RAB) = 1.

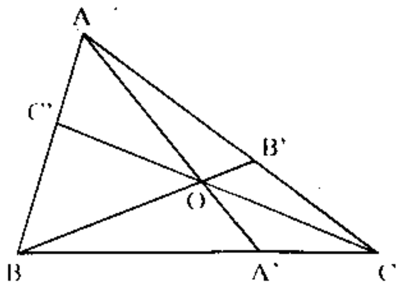
Ngược lại, giả sử ta có hệ thức (PBC).(QCA).(RAB) = 1 với P, Q, R là 3 điểm lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB chứa các cạnh của tam giác ABC, ta cần chứng minh ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

Giả sử đường thẳng PQ cắt đường thẳng AB tại R'. Vì ba điểm P, Q, R' thẳng hàng nên theo kết quả vừa tìm được ta có :

$$\left.\begin{aligned}&(PBC).(QCA).(R'AB) = 1\\&(PBC).(QCA).(RAB) = 1 \quad (gt)\end{aligned}\right\} \Rightarrow (RAB) = (R'AB)$$

Vậy R ≡ R' và ta chứng minh được ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

1.52. Giả sử ta có các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại O và ta có (A'BC) = a, (B'CA) = b. Cần tính (C'AB) = ?



• Xét tam giác BB'C và đường thẳng AOA' ta có :

$$(A'BC)(ACB')(OB'B) = 1 \qquad (1)$$

• Xét tam giác BB'A và đường thẳng COC', ta có :

$$(C'BA)(CAB')(OB'B) = 1 \qquad (2)$$

Chia (1) cho (2) ta có :

$$\frac{(A'BC)(ACB')(OB'B)}{(C'BA)(CAB')(OB'B)} = \frac{(A'BC)(ACB')}{(C'BA)(CAB')} = 1 \qquad (3)$$

Vì (A'BC) = a và (B'CA) = b nên (ACB') = 1 − b

Mặt khác $(CAB') = \dfrac{(ACB')}{(ACB') - 1} = \dfrac{1 - b}{(1 - b) - 1} = \dfrac{1 - b}{-b}$

Thay giá trị của (CAB') vào (3) ta có :

$$\frac{(A'BC)(ACB')}{(C'BA)(CAB')} = \frac{a.(1 - b)}{(C'BA)\dfrac{1 - b}{-b}} = 1$$

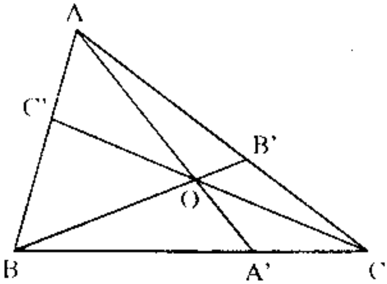
$$\Rightarrow (C'BA) = \frac{a.(1 - b)}{\dfrac{1 - b}{-b}} = -a.b \Rightarrow (C'AB) = \frac{1}{-ab}.$$

Do đó: $(A'BC)(B'CA)(C'AB) = a.b.\dfrac{1}{-ab} = -1$

• Ngược lại giả sử ta có hệ thức :

$(A'BC).(B'CA).(C'AB) = -1$. Ta cần chứng minh các đường thẳng AA', BB', CC' đồng qui. Gọi $O = BB' \cap CC'$ và $AO \cap BC = A''$. Theo giả thiết ta có :

$$(A'BC).(B'CA).(C'AB) = -1 \quad (1)$$



Theo kết quả tìm được của phần trên ta có :

$$(A''BC).(B'CA).(C'AB) = -1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$(A'BC) = (A''BC)$$

Do đó ta suy ra $A' \equiv A''$.

CHÚ Ý. Kết quả trên vẫn đúng khi AA', BB', CC' song song với nhau. Trong trường hợp này ta xem điểm O ở xa vô tận.

1.53.a) Gọi G là trọng tâm của đơn hình $A_oA_1...A_m$. Qua phép afin f liên kết với phép biến đổi tuyến tính φ ta có $f(G) = G'$, $f(A_i) = A'_i$ với $i = 0, 1, ..., m$. Ta cần chứng minh G' là trọng tâm của đơn hình $A'_0A'_1...A'_m$ nghĩa là phải chứng minh :

$$\sum_{i=0}^{m} \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$$

Theo giả thiết vì G là trọng tâm của đơn hình $A_oA_1...A_m$ nên ta có $\sum_{i=0}^{m} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Vì φ là một phép biến đổi tuyến tính nên :

$$\varphi(\sum_{i=0}^{m} \overrightarrow{GA_i}) = \sum_{i=0}^{m} \varphi(\overrightarrow{GA_i}) = \sum_{i=0}^{m} \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0} \text{ vì } \varphi(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Ta có $\sum_{i=0}^{m} \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$ và khi đó G' là trọng tâm của hệ điểm A'_i và như vậy G' trọng tâm của đơn hình là một khái niệm afin .

b) Ta có $\sum_{i=0}^{m}\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ mà $\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}$ nên :

$$\sum_{i=0}^{m}\overrightarrow{GA_i} = (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_0}) + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_1}) + \ldots + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_m}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\overrightarrow{OA_i}.$$

Ngược lại nếu $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\overrightarrow{OA_i}$ với mọi điểm O ta cần chứng minh G là trọng tâm của đơn hình $A_0A_1\ldots A_m$.

Thực vậy do $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\overrightarrow{OA_i}$ nên ta có :

$$(m+1)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=0}^{m}\overrightarrow{OA_i}$$

hay $\quad (m+1)\overrightarrow{GO} + \sum_{i=0}^{m}\overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{m}\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$ Vậy G là trọng tâm của đơn hình.

c) Cho đơn hình $A_0A_1\ldots A_pA_{p+1}\ldots A_m$ và trọng tâm G của nó. Gọi $A_0A_1\ldots A_p$ và $A_{p+1}\ldots A_m$ là 2 mặt bên đối diện của đơn hình. Hai mặt bên đối diện đó là đơn hình p chiều và đơn hình $(m-p-1)$ chiều. Gọi A và B lần lượt là các trọng tâm của hai đơn hình đó.Vì G là trọng tâm của đơn hình $A_0A_1\ldots A_m$ nên theo câu b) ta có :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\overrightarrow{AA_i} = \frac{1}{m+1}\Big(\sum_{i=0}^{p}\overrightarrow{AA_i} + \sum_{j=p+1}^{m}\overrightarrow{AA_j}\Big)$$

$$= \frac{1}{m+1}\Big(\sum_{i=0}^{p}\overrightarrow{AA_i} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_{p+1}}) + \ldots + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_m})\Big)$$

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{p}\overrightarrow{AA_i} + \frac{1}{m+1}(m-p)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{m+1}\sum_{j=p+1}^{m}\overrightarrow{BA_j}$$

Vì A và B là các trọng tâm của hai mặt bên đối diện nên :

$$\sum_{i=0}^{p}\overrightarrow{AA_i}=\vec{0} \text{ và } \sum_{j=p+1}^{m}\overrightarrow{BA_j}=\vec{0}$$

Do đó $\overrightarrow{AG}=\dfrac{m-p}{m+1}\overrightarrow{AB}$, ta suy ra ba điểm A, G, B thẳng hàng.

Vậy đường thẳng nối trọng tâm của hai mặt bên đối diện luôn luôn đi qua trọng tâm của đơn hình. Bây giờ ta cần chứng minh trọng tâm G của đơn hình là một điểm duy nhất. Giả sử ngoài trọng tâm G, đơn hình $A_0A_1...A'_m$ còn có trọng tâm thứ hai là G'. Lấy điểm G đóng vai trò điểm O trong câu b), ta có :

$\overrightarrow{GG'}=\dfrac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\overrightarrow{GA_i}$ và ta có $\sum_{i=0}^{m}\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$ vì G là trọng tâm của đơn hình .

Vậy $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$ nên $G\equiv G'$.

Phát biểu kết quả đối với các trường hợp :

• Trường hợp đơn hình hai chiều ta có kết quả :

Trong một tam giác, ba đường trung tuyến đồng quy tại trọng tâm của tam giác đó.

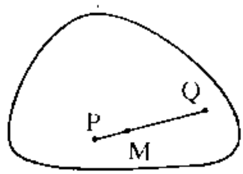
• Trường hợp đơn hình ba chiều ta có kết quả :

Trong một tứ diện, 7 đường thẳng sau đây đồng quy tại trọng tâm của tứ diện đó :

– ba đường thẳng nối trung điểm ba cặp cạnh đối diện

– bốn đường thẳng nối các đỉnh với trọng tâm các mặt đối diện.

1.54.Ta biết trong không gian afin một tập F gọi là lồi nếu với mọi điểm P, Q thuộc F thì đoạn thẳng PQ nằm hoàn toàn trong F. Cho ánh xạ afin $f : \mathbf{A}\to\mathbf{A'}$ liên kết với ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbf{V}\to\mathbf{V'}$ và giả sử M là một điểm bất kì lấy trên đoạn thẳng $PQ\subset F$ xác định bởi hệ thức :



$$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OP} + (1-\lambda)\overrightarrow{OQ}$$

với O là một điểm tuỳ ý và $0 \le \lambda \le 1$. Qua ánh xạ afin f ta có $f(O) = O'$, $f(P) = P'$, $f(Q) = Q'$ và $f(M) = M'$. Khi đó ta có :

$$\varphi(\overrightarrow{OM}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{OP}) + (1-\lambda)\varphi(\overrightarrow{OQ})$$

$$\overrightarrow{O'M'} = \lambda\overrightarrow{O'P'} + (1-\lambda)\overrightarrow{O'Q'} \text{ với } 0 \le \lambda \le 1 \quad (1)$$

Hệ thức (1) chứng tỏ điểm M' thuộc đoạn thẳng $P'Q' \subset F'$. Vậy F' là một tập lồi .

1.55.Nhóm biến đổi lớn nhất của không gian afin là nhóm các phép biến đổi afin. Tập hợp các phép biến đổi afin của không gian afin làm thành một nhóm gọi là nhóm afin. Hình học của nhóm đó nghiên cứu những bất biến, là những tính chất không thay đổi qua phép biến đổi afin. Đó là các tính chất ví dụ như :

– Tính chất độc lập hay không độc lập của một hệ điểm

– Tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng

– Tính chất song song, cắt nhau hay chéo nhau của hai cái phẳng

– Đơn hình m chiều, trọng tâm của đơn hình m chiều

– Các khái niệm được xây dựng từ các bất biến afin được gọi là các khái niệm afin. Thí dụ : hình tam giác, trọng tâm của tam giác, hình bình hành, m- phẳng, hình tứ diện, hình hộp vv... là những khái niệm afin.

1.56.Trong mặt phẳng afin cho hai hình bình hành ABCD và A'B'C'D'. Gọi f là phép afin sao cho $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Phép afin f trong $\mathbf{A}^2$ được xác định bởi hai bộ ba điểm độc lập {A, B, C} và {A', B', C'}. Khi đó ta suy ra $f(D) = D'$ do $\overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{B'C'}$. Như vậy trong mặt phẳng hai hình bình hành bất kì ABCD và A'B'C'D' với $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ xác định một phép biến đổi afin duy nhất trong mặt phẳng.

1.57.Trong mặt phẳng afin cho hai hình thang ABCD (có AB// CD) và A'B'C'D' (có A'B'// C'D'). Điều kiện để hai hình thang đó tương đương afin là :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

1.58. Trong mặt phẳng Ơclit những định lí sau đây là của hình học afin.

a) Trong một tam giác ba đường trung tuyến đồng quy .

c) Trong một hình bình hành hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường .

Các định lí b) và d) không phải là định lí của hình học afin.

§8

1.59. Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương $\overline{AB} = (0, 0, 8, -8)$. Ta có thể lấy vectơ $\vec{v} = (0,0,1,-1)$ làm vectơ chỉ phương của đường thẳng (d). Do đó đường thẳng (d) có phương trình tham số là :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 + t \\ x_4 = -3 - t \end{cases}$$

Muốn tìm giao điểm (d) $\cap$ (S) ta giải phương trình sau đây bằng cách thay các giá trị của x_1, x_2, x_3, x_4 vào phương trình của (S) :

$$(3 + t) + (-3 - t) = 0 \Rightarrow \text{nghiệm với mọi } t.$$

Vậy đường thẳng (d) $\subset$ siêu mặt bậc hai (S).

1.60. Trong A^2 cho đường bậc hai có phương trình :

$$x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 - 5x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$

a) Phương tiệm cận là phương của vectơ $\vec{c}$ (c_1, c_2) có tọa độ thỏa mãn phương trình :

$$c_1^2 - 3c_1c_2 + 2c_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 3\left(\frac{c_1}{c_2}\right) + 2 = 0 \quad (\text{giả sử } c_2 \neq 0)$$

Giải ra ta có $\frac{c_1}{c_2} = 1$ và $\frac{c_1}{c_2} = 2$.

Ta có hai phương tiệm cận là : $\vec{c} = (1, 1)$ và $\vec{c'} = (2, 1)$.

b) Tâm của đường bậc hai là nghiệm của phương trình :

$$A[x] + [a] = 0 \text{ với điều kiện } \det A \neq 0.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{5}{2} = 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 + 2x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -14 \\ x_2 = -11 \end{cases}$$

1.61.Ta chọn một mục tiêu afin thích hợp sao cho m-phẳng đã cho là m phẳng tọa độ xác định bởi m + 1 đỉnh $E_0, E_1, E_2, ..., E_m$ của mục tiêu afin $\{E_0; E_i\}$. Khi đó ta có phương trình tổng quát của m-phẳng $\mathbf{A}^m$ đã cho là :

$$x_{m+1} = x_{m+2} = ... = x_n = 0.$$

Giao của m-phẳng $\mathbf{A}^m$ và siêu mặt bậc hai (S) được xác định bởi hệ phương trình :

$$(*) \quad \begin{cases} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{m} a_i x_i + a = 0 \\ x_{m+1} = x_{m+2} = ... = x_n = 0 \end{cases}$$

a) Nếu các a_{ij} (i, j = 1, 2, ..., m) không đồng thời bằng 0 thì hệ phương trình (*) ở trên là phương trình của một siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{A}^m$ (là không gian afin m chiều).

b) Nếu các a_{ij} (i, j = 1, 2, ..., m) bằng 0 tất cả và

• các a_i (i = 1, 2, ..., m) không đồng thời bằng 0 thì (*) trở thành :

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{m} a_i x_i + a = 0 & \text{(gồm n – m phương trình)} \\ x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0 \end{cases}$$

Đó là phương trình của một (m–1)- phẳng vì hệ này có hạng bằng n–m+1.

• Nếu các $a_i = 0$ với mọi i và a = 0 ta có (*) biểu thị một m-phẳng $\mathbf{A}^m$ và m-phẳng này thuộc siêu mặt bậc hai.

Nếu các $a_i = 0$ với mọi i mà $a \neq 0$ thì hệ (*) vô nghiệm, khi đó (S) và $\mathbf{A}^m$ không cắt nhau.

1.62.Trong $\mathbf{A}^2$ cho đường bậc hai có phương trình:

$$25x_1^2 + 2x_1x_2 + 13x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 - 27 = 0$$

• Muốn tìm tâm của đường bậc hai đó ta giải phương trình sau đây:

$$\begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25x_1 + x_2 + 9 = 0 \\ x_1 + 13x_2 + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{3} \\ x_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy tâm của đường bậc hai có tọa độ là $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

• Đường kính liên hợp với phương $\vec{c} = (1,-1)$ của đường bậc hai có phương trình:

$$[1 \quad -1]\left(\begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [24 \quad -12]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = 0$$

NHẬN XÉT. Đường kính liên hợp với phương $\vec{c} = (1, -1)$ đi qua tâm của đường bậc hai đã cho.

1.63. Siêu mặt bậc hai (S) có phương trình $[x]^*A[x] = 0$ trong đó hạng của ma trận A bằng r > 0 là một siêu nón bậc hai.

a) Gọi $\{E_o; E_i\}$ là mục tiêu afin mà siêu nón (S) có phương trình $[x]^*A[x] = 0$ và giả sử f là một phép biến đổi afin bất kì đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ cho trước. Gọi $E'_i = f(E_i)$ với i = 1, 2, ..., n. Khi đó nếu một điểm M có tọa độ (x_i) đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ thì điểm $M' = f(M)$ cũng có tọa độ (x_i) đối với mục tiêu $\{E'_o; E'_i\}$. Do đó phương trình của $S' = f(S)$ đối với mục tiêu $\{E'_o; E'_i\}$ hoàn toàn giống như phương trình của (S) đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$. Vậy tồn tại một mục tiêu $\{E'_o; E'_i\}$ để phương trình của (S') là :

$$[x']^*A[x'] = 0$$

Vậy (S') là một siêu nón và cũng có hạng bằng r. Do đó siêu nón hạng r là một khái niệm afin.

b) Giả sử một điểm X thuộc (S) và $X = (x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$. Khi đó $\vec{E_oX} = (x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$ với mọi điểm Y thuộc đường thẳng E_oX, ta có $\vec{E_oY} = k_o\vec{E_oX} = (kx_1^o, kx_2^o, \dots, kx_n^o)$.

Vậy điểm Y có tọa độ là $Y = (kx_1^o, kx_2^o, \dots, kx_n^o)$. Thay tọa độ của Y vào phương trình của siêu nón (S) ta có :

$$[kx^o]^*A[kx^o] = k^2[x^o]^*A[x^o] = 0$$

(vì điểm X thuộc (S) nên $[x^o]^*A[x^o] = 0$).

Do đó điểm Y thuộc (S) với mọi Y thuộc đường thẳng E_oX.

Vậy đường thẳng E_oX nằm hoàn toàn trên (S) và được gọi là đường sinh của siêu nón (S).

c) Với siêu nón (S) có phương trình $[x]^*A[x] = 0$ với A là ma trận hạng r với r > 0. Ta nhận xét rằng siêu nón này luôn luôn chứa m phẳng P có phương trình :

$$A[x] = 0$$

Vì hạng của ma trận A bằng r nên $A[x] = 0$ là một (n−r)-phẳng. Ở đây ta có $m = n-r$.

Bây giờ ta lấy một điểm M tùy ý thuộc (S). Nếu M thuộc (n−r) phẳng P nói trên thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Bây giờ ta giả sử điểm M không thuộc phẳng P, gọi $Q = P + M$ là (n−r+1)- phẳng duy nhất chứa P và M. Ta cần chứng minh $Q \subset (S)$. Gọi $\{A_0, A_1, ..., A_{n-r}\}$ là hệ n−r+1 điểm độc lập trong P, khi đó $\{M, A_0, A_1, ..., A_{n-r}\}$ là hệ n−r+2 điểm độc lập trong Q. Với mọi điểm N thuộc Q ta có :

$$\vec{MN} = \sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i \vec{MA_i}$$

Gọi $[a_i]$, $[x^o]$, $[y^o]$ lần lượt là ma trận cột tọa độ của các điểm A_i, M, N, ta có :

$$[y^o] - [x^o] = \sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i([a_i] - [x^o])$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i[x^o] + \sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i[a_i]$$

Đặt $b = 1 - \sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i$ ta có :

$$[y^o] = b[x^o] + \sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i[a_i]$$

$$\Rightarrow A[y^o] = bA[x^o] + \sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i A[a_i]$$

$$= bA[x^o] \text{ (vì các điểm } A_i \in P \text{ nên } A[a_i] = 0)$$

Thay tọa độ của N vào phương trình của siêu nón (S) ta có :

$$[y^o]^* A[y^o] = (b[x^o]^* + \sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i[a_i]^*) A(b[x^o] + \sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i[a_i])$$

$$= b^2([x^o]^* A[x^o] + \sum_{i=0}^{n-r} \lambda_i[a_i]^* A[x^o]).$$

Vì $M \in (S)$ nên $[x^o]^* A[x^o] = 0$ và $A_i \in P$ nên $A[a_i] = 0$ và $[a_i]^* A = 0$.

Do đó $[y^o]^*A[y^o] = 0$ với mọi $N \in Q$. Vậy $Q \subset (S)$.

1.65.Trong $\mathbf{A}^3$, siêu mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_3x_1 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \ (1)$$

Vế trái phương trình của (S) có thể viết :

$$x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3 - 1) + (x_2 + x_3 - 1)^2 - (x_2 + x_3 - 1)^2 +$$

$$+ 5x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_3 + 6x_2 + 2x_3 = 0$$

vì $-(x_2 + x_3 - 1)^2 = -(x_2^2 + x_3^2 + 1 + 2x_2x_3 - 2x_2 - 2x_3)$

nên $(1) \Leftrightarrow [x_1 + (x_2 + x_3 - 1)]^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_2 + 8x_3 - 1 = 0.$

Thực hiện phép biến đổi tọa độ (cũng là một phép biến đổi afin)

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 1 \\ X_2 = \quad x_2 \\ X_3 = \quad\quad x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = X_1 - X_2 - X_3 + 1 \\ x_2 = \quad X_2 \\ x_3 = \quad\quad X_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad [x] = A[X] + [a] \text{ với } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } [a] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qua phép biến đổi tọa độ này ta có vế trái của (S) là:

$$VT = X_1^2 + 4X_2^2 + 4X_2X_3 + 8X_2 + 8X_3 - 1$$

$$= X_1^2 + (2X_2)^2 + 2(2X_2)(X_3 + 2) + (X_3 + 2)^2 - (X_3 + 2)^2 - 4X_3 - 1$$

$$= X_1^2 + [2X_2 + (X_3 + 2)]^2 - X_3^2 - 5$$

(vì $-(X_3 + 2)^2 = -X_3^2 - 4X_3 - 4$).

Thực hiện tiếp phép biến đổi tọa độ lần thứ hai :

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = 2X_2 + X_3 + 2 \\ Y_3 = X_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = Y_1 \\ X_2 = \dfrac{1}{2}Y_2 - \dfrac{1}{2}Y_3 - 1 \\ X_3 = Y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow [X] = B[Y] + [b] \text{ với } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ta được phương trình của (S) là :

$$Y_1^2 + Y_2^2 - Y_3^2 - 5 = 0$$

Cuối cùng thực hiện phép biến đổi tọa độ :

$$\begin{cases} Y_1 = \sqrt{5}Z_1 \\ Y_2 = \sqrt{5}Z_2 \\ Y_3 = \sqrt{5}Z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = \dfrac{Y_1}{\sqrt{5}} \\ Z_2 = \dfrac{Y_2}{\sqrt{5}} \\ Z_3 = \dfrac{Y_3}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Hay $[Z] = C[Y] + [c]$ với $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ và $[c] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Cuối cùng ta được phương trình chuẩn tắc của (S) là :

$$Z_1^2 + Z_2^2 - Z_3^2 = 1 \quad \text{(hypeboloit 1 tầng)}$$

1.66.a) Trong $\mathbf{A}^3$ tìm đường sinh thẳng của mặt bậc hai (S_1) :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1 \text{ đi qua điểm } M(3, 2, 1)$$

Đây là phương trình của mặt hypeboloit 1 tầng. Có thể viết phương trình trên dưới dạng :

$$\frac{x^2}{9} - z^2 = 1 - \frac{y^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\frac{x}{3}+z)(\frac{x}{3}-z)=(1+\frac{y}{2})(1-\frac{y}{2})$$

Ta có phương trình hai họ đường sinh thẳng của (S_1) là :

Họ l : $\begin{cases} p(\frac{x}{3}+z)=q(1+\frac{y}{2}) \\ q(\frac{x}{3}-z)=p(1-\frac{y}{2}) \end{cases}$ họ l': $\begin{cases} p'(\frac{x}{3}+z)=q'(1-\frac{y}{2}) \\ q'(\frac{x}{3}-z)=p'(1+\frac{y}{2}) \end{cases}$

NHẬN XÉT. Nếu nhân vế với vế của từng phương trình trên ta có lại phương trình đã cho.

Muốn tìm p, q, p', q' ta thay tọa độ điểm M(3, 2, 1) vào trong phương trình xác định họ l hay họ l'.

Đối với họ l ta có :

$$\begin{cases} 2p=2q \\ 0.q=0.p \end{cases} \Rightarrow \text{chọn } p=1 \text{ ta có } q=1.$$

Vậy họ l có phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+z=1+\frac{y}{2} \\ \frac{x}{3}-z=1-\frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+6z-6=0 \\ 2x+3y-6z-6=0 \end{cases}$$

Đối với họ l' ta có :

$$\begin{cases} p'.2=q'.0 \\ q'.0=p'.2 \end{cases} \Rightarrow \text{chọn } q'=1 \text{ ta có } p'=0$$

Vậy họ l' có phương trình:

$$\begin{cases} 1-\frac{y}{2}=0 \\ \frac{x}{3}-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-2=0 \\ x-3z=0 \end{cases}$$

b) Trong $\mathbf{A}^3$ tìm đường sinh thẳng của mặt bậc hai (S_2):

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=2z \quad \text{đi qua điểm } N(3, -4, 0).$$

Đây là phương trình của mặt yên ngựa và phương trình trên có thể viết dưới dạng :

$$(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}).(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}) = 2z.$$

Ta có phương trình hai họ đường sinh thẳng của (S_2) là :

họ l : $\begin{cases} p(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}) = 2q \\ q(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}) = p.z \end{cases}$ họ l': $\begin{cases} p'(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}) = q'.z \\ q'(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}) = 2p' \end{cases}$

Thay tọa độ của N(3, −4 , 0) vào phương trình họ l ta có :

$$\begin{cases} p.0 = 2q \\ q.2 = p.0 \end{cases} \Rightarrow \text{ cho } p = 1 \text{ ta có } q = 0.$$

Vậy họ l có phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{4} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Thay tọa độ của N(3, −4 , 0) vào phương trình họ l' ta có :

$$\begin{cases} p'.0 = q'.0 \\ q'.2 = 2p' \end{cases} \Rightarrow \text{ cho } p' = 1 \text{ ta có } q' = 1.$$

Vậy họ l' có phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{4} = z \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y-12z = 0 \\ 4x-3y-24 = 0 \end{cases}$$

CHƯƠNG II

BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN ƠCLIT VÀ HÌNH HỌC ƠCLIT

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

§1. BỔ SUNG CÁC PHÉP TOÁN TRÊN KHÔNG GIAN VECTƠ

1. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho **V** là không gian vectơ trên trường số thực. *Tích vô hướng của hai vectơ* $\vec{a},\vec{b}$ kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$ hay $\vec{a}\vec{b}$ là một phép toán f sao cho với mỗi cặp vectơ có thứ tự $\vec{a},\vec{b}$ ta đặt tương ứng với một số thực xác định, thỏa mãn 4 điều kiện sau :

1) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán)

2) $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ với $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \mathbf{V}$ (tính chất phân phối đối với phép cộng vectơ)

3) $(\lambda\vec{a}).\vec{b} = \lambda(\vec{a}.\vec{b})$ với $\lambda \in \mathbf{R}$

4) $\vec{a}.\vec{a} \geq 0$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a} = \vec{0}$

Nếu một không gian vectơ được trang bị thêm tích vô hướng đối với mọi hai vectơ bất kì của nó thì nó sẽ trở thành một *không gian vectơ Ơclit* được kí hiệu là $\mathbf{V}_E^n$ hoặc $\vec{\mathbf{E}}^n$.

2. Các định nghĩa có liên quan đến tích vô hướng của hai vectơ

- $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

- $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

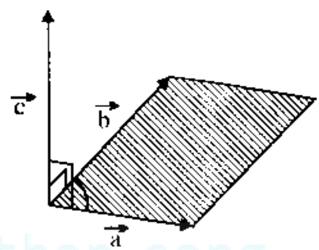
3. Tích có hướng của hai vectơ trong V_E^n

a) Định nghĩa. Trong V_E^n *tích có hướng của hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ là một vectơ $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện sau :

i) $\vec{c} \perp \vec{a}$ và $\vec{c} \perp \vec{b}$

ii) $|\vec{c}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$ = dt hình bình hành dựng trên các vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

iii) Tam diện tạo bởi ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là tam diện thuận (nếu vặn một nút chai theo chiều từ $\vec{a}$ đến $\vec{b}$ thì nút chai chuyển động theo hướng của vectơ $\vec{c}$).



b) Tính chất

1) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ (tính chất phản giao hoán)

2) $p(\vec{a} \wedge \vec{b}) = p\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge p\vec{b}$ với $p \in \mathbf{R}$

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}.$$

4. Tích hỗn hợp của ba vectơ trong V_E^n

a) Định nghĩa. *Tích hỗn hợp của ba vectơ* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ trong V_E^n là một số bằng cách nhân có hướng hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ ta được $\vec{a} \wedge \vec{b}$ rồi nhân vectơ ấy với $\vec{c}$. Ta kí hiệu tích hỗn hợp của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ như sau :

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c}$$

b) Ý nghĩa hình học

Tích hỗn hợp của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng là một số có trị số tuyệt đối bằng thể tích hình hộp dựng trên ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Hệ quả : Điều kiện cần và đủ để ba vectơ đồng phẳng (phụ thuộc tuyến tính) là tích hỗn hợp của chúng bằng 0.

§2. KHÔNG GIAN ƠCLIT

1.Định nghĩa

Không gian Ơclit là một loại không gian afin liên kết với không gian vectơ Ơclit hữu hạn chiều được kí hiệu là **E**.

Nếu $\dim \mathbf{V}_E^n = n$ thì số chiều của không gian Ơclit liên kết với nó bằng n. Ta có : $\dim \mathbf{E}^n = n$.

CHÚ Ý. Trong không gian Ơclit vẫn có các khái niệm và tính chất của không gian afin. Mặt khác trong không gian Ơclit còn có thêm các khái niệm và tính chất mới như sự vuông góc của các phẳng, độ dài các đoạn thẳng, độ lớn của góc v.v... là những khái niệm và tính chất không có trong không gian afin.

§3. MỤC TIÊU TRỰC CHUẨN – TỌA ĐỘ TRỰC CHUẨN

1. Mục tiêu trực chuẩn

Một mục tiêu afin $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ của không gian Ơclit n chiều được gọi là *mục tiêu trực chuẩn* nếu cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ của không gian liên kết $\mathbf{V}_E^n$ với nó là cơ sở trực chuẩn nghĩa là :

$$\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{khi } i \neq j \\ 1 & \text{khi } i = j \end{cases} \quad \text{với } i, j = 1,2,\ldots,n.$$

2. Tọa độ trực chuẩn

Tọa độ của một điểm X thuộc không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ đối với một mục tiêu trực chuẩn gọi là *tọa độ trực chuẩn* của điểm đó đối với mục tiêu đó. Người ta còn gọi tọa độ trực chuẩn của một điểm là tọa độ Đề - các vuông góc của điểm đó.

3. Đổi mục tiêu trực chuẩn

Cho hai mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ và $\{O'; \overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, ..., \overrightarrow{e'_n}\}$ của không gian Ơclit n chiều $\mathbf{E}^n$. Gọi C là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, ..., \overrightarrow{e'_n}\}$. Các cơ sở đó đều là cơ sở trực chuẩn nên C là ma trận trực giao. Khi đó ta có công thức đổi mục tiêu là :

$$\boxed{[x] = C^*[x'] + [b]}$$

trong đó C* là ma trận chuyển vị của C, [b] là ma trận cột tọa độ của điểm gốc O' đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$, còn [x] và [x'] là hai ma trận cột tọa độ của cùng một điểm lần lượt đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ và $\{O'; \overrightarrow{e'_i}\}$.

4. Khoảng cách giữa hai điểm

Cho hai điểm M, N của không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$. *Khoảng cách giữa hai điểm* đó kí hiệu là d(M, N) và được định nghĩa là:

$$\boxed{d(M, N) = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2}}$$

Tính chất

a) d(M, N) = d(N, M)

b) $d(M, N) \geq 0$ và $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M \equiv N$

c) $d(M, N) + d(N, P) \geq d(M, P)$ với mọi ba điểm bất kì M, N, P.

d) Nếu M, N, P là ba điểm phân biệt thì điểm N thuộc đoạn thẳng MP khi và chỉ khi d(M, N) + d(N, P) = d(M, P).

e) Cho biết tọa độ trực chuẩn của $M = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và

$N = (y_1, y_2, ..., y_n)$ thì :

$$\boxed{d(M, N) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}}$$

5. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng của hai vectơ trong V_E^n

Trong E^n với mục tiêu trực chuẩn giả sử :

$$\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

Ta có : $$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i}$$

Hệ quả $$|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

6. Biểu thức tọa độ của tích có hướng trong V_E^3

a) Trong V_E^3 với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxyz cho hai vectơ : $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3).$$

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)}$$

b) Hệ quả • Nếu $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ thì :

$$\sin\varphi = \pm\frac{|\vec{a}\wedge\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

- Gọi S là diện tích hình bình hành dựng trên các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$:

$$S = |\vec{a}\wedge\vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2}$$

7. Biểu thức tọa độ của tích hỗn hợp trong V_E^3

Trong hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxyz cho ba vectơ không đồng phẳng : $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Gọi V là thể tích hình hộp dựng trên ba vectơ đã cho thì

$$\pm V = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

hay

$$\pm V = \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

§4. CÁC PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN ƠCLIT

1. Vị trí tương đối của các phẳng trong E^n

Ngoài những vấn đề về vị trí tương đối của các phẳng đã được xét như trong không gian afin, đối với các phẳng của không gian Ơclit còn có thêm các quan hệ mới về vị trí tương đối.

a) Hai phẳng vuông góc với nhau. Trong $\mathbf{E}^n$ cho phẳng α có phương $\vec{\alpha}$ và phẳng β có phương $\vec{\beta}$:

- Hai phẳng α và β gọi là *vuông góc với nhau*, kí hiệu $\alpha \perp \beta$ nếu hai không gian vectơ $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$ trực giao với nhau nghĩa là mọi vectơ thuộc $\vec{\alpha}$ đều trực giao với mọi vectơ thuộc $\vec{\beta}$. Ta cũng kí hiệu $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

b) Hai phẳng bù vuông góc với nhau. Hai cái phẳng α và β gọi là *bù vuông góc với nhau* nếu $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$ bù trực giao với nhau trong $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$ nghĩa là :

$$\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = \overrightarrow{\mathbf{E}^n} \text{ hay } \dim\vec{\alpha} + \dim\vec{\beta} = n.$$

c) Định lí. Trong $\mathbf{E}^n$, hai phẳng vuông góc với nhau có không quá một điểm chung, hai phẳng bù vuông góc với nhau có một điểm chung duy nhất.

Hệ quả • Trong $\mathbf{E}^n$ nếu α và β bù vuông góc với nhau thì tổng của chúng là $\mathbf{E}^n$.

• Trong $\mathbf{E}^n$ qua một điểm đã cho có một và chỉ một phẳng bù vuông góc với phẳng đã cho.

d) Định lí. Trong $\mathbf{E}^n$ cho một điểm A và một phẳng β không chứa A. Khi đó trong β có một điểm A' duy nhất sao cho:

$$d(A, A') \leq d(A, M) \text{ với mọi } M \in \beta.$$

Số $d(A, A')$ gọi là *khoảng cách từ điểm A tới phẳng β* và được kí hiệu: $d(A, A') = d(A, \beta)$.

e) Định lí. Nếu phẳng α vuông góc với phẳng β và phẳng γ bù vuông góc với phẳng β thì α cùng phương với γ.

2. Khoảng cách giữa hai cái phẳng

a) Định nghĩa. Trong $\mathbf{E}^n$ *khoảng cách giữa hai cái phẳng* α và β là số inf $d(M, N)$ với $M \in \alpha$ và $N \in \beta$.

$$\boxed{d(\alpha, \beta) = \inf d(M, N) \text{ với } M \in \alpha \text{ và } N \in \beta}$$

b) Đường vuông góc chung của hai cái phẳng. Đường thẳng Δ gọi là đường *vuông góc chung của hai cái phẳng* α và β nếu Δ vuông góc với cả α và β, đồng thời Δ cắt cả α và β.

c) Định lí. Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai cái phẳng α và β. Nếu Δ cắt α và β lần lượt tại I và J thì :

$$d(\alpha,\beta) = d(I,J).$$

d) Định lí. Nếu hai cái phẳng α và β chéo nhau (nghĩa là không có điểm chung và phương chung) thì chúng có đường vuông góc chung duy nhất.

3. Khoảng cách từ một điểm đến một siêu phẳng

a) Vectơ pháp tuyến của siêu phẳng. Trong E^n với mục tiêu trực chuẩn, cho siêu phẳng α có phương trình :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_0 = 0$$

Khi đó vectơ $\vec{n} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ gọi là *vectơ pháp tuyến* của siêu phẳng α vì $\vec{n} \perp \vec{\alpha}$.

b) Khoảng cách từ một điểm đến một siêu phẳng

Trong E^n với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho điểm $I(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$ và siêu phẳng α có phương trình

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_o = 0$$

Khi đó khoảng cách từ I đến α được tính theo công thức :

$$\boxed{d(I, \alpha) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^o + a_o\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}}$$

§5. GÓC TRONG E^n

1. Góc giữa hai vectơ.

Trong E^n cho hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ đều khác $\vec{0}$. Ta gọi *góc giữa hai vectơ* $\vec{u}, \vec{v}$ đó là số φ mà :

$$0 \le \varphi \le \pi \quad \text{và} \quad \cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

Đối với ba điểm A, B, C bất kì ta có công thức:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos\widehat{A}$$

trong đó $\widehat{A}$ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

2. Góc giữa hai đường thẳng

Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt có phương là **V** và **V'**. Gọi $\vec{a}, \vec{b}$ là các vectơ khác vectơ $\vec{0}$ lần lượt lấy trên **V** và **V'**. Ta gọi *góc φ giữa hai đường thẳng* nói trên là số φ mà :

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \text{và} \quad \cos\varphi = \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

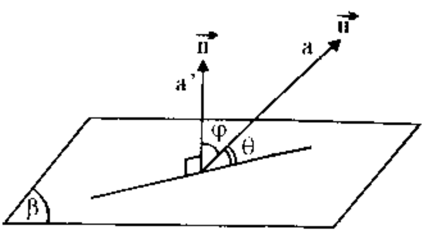
3. Góc giữa hai siêu phẳng

Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai siêu phẳng α và β. Gọi a, b lần lượt là các đường thẳng trực giao với α và β.

Khi đó góc giữa hai đường thẳng a, b gọi là *góc giữa hai siêu phẳng α và β.*

4. Góc giữa đường thẳng và siêu phẳng

Trong $\mathbf{E}^n$ cho đường thẳng a và siêu phẳng β.



• Nếu a ⊥ β ta nói rằng góc giữa a và β là góc vuông.

• Nếu a không vuông góc với β ta lấy a' ⊥ β và gọi φ là góc giữa a và a'. Khi đó góc giữa a và siêu phẳng β la góc θ mà θ ≥ 0 và $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Nếu gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng a và $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của siêu phẳng β ta có:

$$\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{n}}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}$$

Do đó $$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{(\vec{u}.\vec{n})^2}{\vec{u}^2.\vec{n}^2}}$$

§6. ÁNH XẠ ĐẲNG CỰ VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI ĐẲNG CỰ

1. Ánh xạ đẳng cự

a) Định nghĩa. Gọi **E** và **E'** là các không gian Ơclit. Ánh xạ f: **E** → **E'** gọi là *ánh xạ đẳng cự* nếu f là một ánh xạ afin mà ánh xạ tuyến tính liên kết φ : $\vec{\mathbf{E}} \to \vec{\mathbf{E}}'$ là một ánh xạ tuyến tính trực giao của hai không gian vectơ $\vec{\mathbf{E}}$ và $\vec{\mathbf{E}}'$.

b) Định lí : Mọi ánh xạ f : **E** → **E'** giữa các không gian Ơclit có tính chất bảo tồn khoảng cách giữa hai điểm bất kì tức là với mọi M,N ∈ **E** ta có d(f(M),f(N)) = d(M,N) là một ánh xạ đẳng cự.

Hệ quả : Ánh xạ đẳng cự bảo tồn số chiều của các phẳng, bảo tồn tính vuông góc của các phẳng, bảo tồn khoảng cách và góc giữa các phẳng.

2. Biến đổi đẳng cự

a) Định nghĩa. Ánh xạ f: **E** → **E** từ không gian Ơclit **E** vào chính nó là một *phép biến đổi đẳng cự* hay là một *phép dời hình* của không gian Ơclit **E**. Khi đó ánh xạ tuyến tính φ liên kết với f là một phép biến đổi tuyến tính trực giao của không gian vectơ $\vec{\mathbf{E}}$.

b) Nhận xét. Tập hợp các phép biến đổi đẳng cự (hay tập hợp các phép dời hình) của không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ làm thành một nhóm con của nhóm các phép biến đổi afin của $\mathbf{E}^n$.

Các phép tịnh tiến là các phép đẳng cự, chúng làm thành một nhóm con của nhóm các phép biến đổi đẳng cự.

3. Phép dời hình và phương trình của phép dời hình

a) Định lí. Trong $\mathbf{E}^n$, đối với một mục tiêu trực chuẩn cho trước, phương trình của phép dời hình có dạng :

$$\boxed{[x'] = A[x] + [b]}$$

trong đó A là ma trận trực giao cấp n.

Ngược lại : Trong $\mathbf{E}^n$ mỗi phương trình có dạng:

$$[x'] = A[x] + [b]$$

trong đó A là ma trận trực giao cấp n đều là phương trình của một phép dời hình đối với một mục tiêu trực chuẩn đã chọn.

b) Chú ý. Vì A là ma trận trực giao nên det A = ± 1 (vì $A^*A = I$ là ma trận đơn vị).

Nếu A là ma trận trực giao và :

• det A = 1 ta có phép dời hình loại 1 hay phép dời hình thuận

• det A =–1 ta có phép dời hình loại 2 hay phép dời hình nghịch.

Tập hợp các phép dời hình trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ làm thành một nhóm gọi là *nhóm dời hình*.

§7. HÌNH HỌC ƠCLIT

1. Định nghĩa

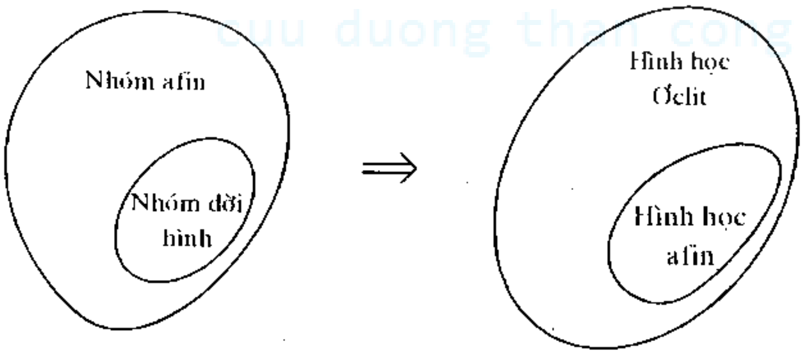
Hình học của nhóm các phép dời hình $\mathcal{D}^n$ của không gian Ơclit n chiều $\mathbf{E}^n$ gọi là *hình học Ơclit n chiều*.

Hai hình ứng với nhau qua tích một số phép dời hình gọi là *hai hình bằng nhau* .

Hình học Ơclit n chiều nghiên cứu những tính chất không thay đổi qua các phép dời hình của nhóm $\mathscr{D}^n$.

2. Mối quan hệ giữa hình học afin và hình học Ơclit trong $\mathbf{E}^n$

Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ có nhóm afin $\mathscr{A}^n$, do đó ta có hình học afin trên $\mathbf{E}^n$. Vì nhóm dời hình $\mathscr{D}^n$ là nhóm con của nhóm afin $\mathscr{A}^n$ nên hình học afin là một bộ phận của hình học Ơclit. Điều đó có nghĩa là những tính chất không thay đổi qua phép biến đổi afin cũng là những tính chất được nghiên cứu trong hình học Ơclit (ta có thể xem phép dời hình là một phép afin đặc biệt). Ngược lại những tính chất không thay đổi qua nhóm dời hình $\mathscr{D}^n$ chưa hẳn là những bất biến afin thí dụ như độ dài các đoạn thẳng, sự vuông góc của các phẳng. Vì vậy hình học Ơclit trên $\mathbf{E}^n$ phong phú hơn vì nó vừa nghiên cứu các bất biến của nhóm afin đồng thời với các bất biến của nhóm dời hình.



3. Phương pháp dùng hình tương đương afin để giải toán

Giả sử ta cần chứng minh một hình H nào đó có tính chất α mà α là một tính chất afin. Ta thực hiện các bước sau đây:

a) Ta chọn trong tập hợp các hình tương đương afin với hình H một hình H' mà trên đó tính chất afin α dễ chứng minh hơn. Có thể xem H' là ảnh của H qua một phép afin f nào đó. Ta có f(H) = H'.

b) Ta chứng minh tính chất α trên hình H'. Trong quá trình chứng minh có thể sử dụng thêm các công cụ của hình học Ơclit và như vậy việc chứng minh sẽ được thực hiện một cách dễ dàng, nhanh chóng.

c) Sau khi chứng minh được tính chất afin α trên hình H' ta thực hiện phép afin f^{-1} biến hình H' thành hình H và tất nhiên ta đã chứng minh được tính chất afin α trên hình H.

§8. HÌNH HỌC ĐỒNG DẠNG

1. Ánh xạ tuyến tính đồng dạng

a) Định nghĩa: Ánh xạ tuyến tính $\varphi : \vec{E} \to \vec{E'}$ của các không gian vectơ Ơclit $\vec{E}$ và $\vec{E'}$ gọi là một *ánh xạ tuyến tính đồng dạng* nếu có một số thực $k \neq 0$ để :

$$\varphi(\vec{x}).\varphi(\vec{y}) = k\vec{x}.\vec{y} \quad \text{với mọi } \vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}.$$

b) Tính chất

• Số thực $k > 0$ vì với $\vec{x} = \vec{y} \neq \vec{0}$ ta có $[\varphi(\vec{x})]^2 = k\vec{x}^2$

• Mọi ánh xạ tuyến tính trực giao đều là ánh xạ tuyến tính đồng dạng (với k = 1).

• Tích những ánh xạ tuyến tính đồng dạng là một ánh xạ tuyến tính đồng dạng.

c) Định lí. Một ánh xạ $\varphi : \vec{E} \to \vec{E}$ của không gian Ơclit **E** vào chính nó là một phép biến đổi tuyến tính nếu có một số thực $k \neq 0$ sao cho với mọi $\vec{x}, \vec{y}$ của $\vec{E}$ ta có :

$$\varphi(\vec{x}).\varphi(\vec{y}) = k\vec{x}.\vec{y}$$

Phép biến đổi tuyến tính này biến một cơ sở trực chuẩn thành một cơ sở trực giao.

2. Phép đồng dạng

a) Định nghĩa. Phép biến đổi f: $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ gọi là *phép đồng dạng* nếu với mọi hai điểm bất kì M,N của $\mathbf{E}^n$ và ảnh của chúng là $M' = f(M)$, $N' = f(N)$ ta luôn có :

$$d(M',N') = k \, . \, d(M,N)$$

trong đó k là một số dương cố định được gọi là tỉ số đồng dạng của phép đồng dạng f .

- Với k = 1, ta được phép đồng dạng f là phép dời hình.
- Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số k.

b) Định lí. Phép đồng dạng là một phép afin.

c) Định lí. Tập hợp các phép biến đổi đồng dạng của không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ làm thành một nhóm gọi là *nhóm đồng dạng* được kí hiệu là $\mathcal{S}^n$. Nó là nhóm con của nhóm afin và chứa nhóm dời hình .Ta có :

$$\mathcal{D}^n \subset \mathcal{S}^n \subset \mathcal{A}^n.$$

d) Hình học đồng dạng. Hình học của nhóm đồng dạng gọi là *hình học đồng dạng*. Hình học đồng dạng nghiên cứu những bất biến của nhóm đồng dạng tức là những tính chất không thay đổi qua phép đồng dạng. Ta có :

Hình học afin là một bộ phận của hình học đồng dạng và hình học đồng dạng là một bộ phận của hình học Ơclit. Như vậy trong hình học đồng dạng có mọi khái niệm và tính chất afin. Trong hình học của nhóm dời hình là hình học Ơclit có những khái niệm và tính chất của hình học đồng dạng. Thí dụ như hình vuông, hình tam giác đều, đường tròn, mặt cầu vv ... đều là những khái niệm của hình học đồng dạng. Một số định lí như các định lí nói về các hệ thức lượng trong tam giác, trong đường tròn vv ... đều là những định lí của hình học đồng dạng.

§9. SIÊU MẶT BẬC HAI TRONG E^n

1. Dạng chính tắc của phương trình siêu mặt bậc hai trong E^n

Định lí. Đối với mọi siêu mặt bậc hai (S) trong $\mathbf{E}^n$ ta luôn luôn tìm được một mục tiêu trực chuẩn sao cho phương trình của (S) đối với mục tiêu đó có một trong ba dạng chính tắc sau đây.

$$\text{Dạng I} : \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = 1 \qquad \text{với } 1 \le r \le n$$

$$\text{Dạng II} : \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = 0 \qquad \text{với } 1 \le r \le n$$

$$\text{Dạng III}: \sum_{i=1}^{r} b_i x_i^2 + 2mx_{r+1} = 0 \quad \text{với } 1 \le r < n$$

2. Phương chính của siêu mặt bậc hai trong E^n

a) Định nghĩa. Trong $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$[x]^*A[x] + 2[a]^*[x] + a_o = 0$$

Vectơ $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq \vec{0}$ gọi là *phương chính của (S)* nếu:

$$A[c] = \lambda\,[c] \text{ tức là } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = \lambda c_i \text{ với } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nói cách khác vectơ $\vec{c}\,(c_i)$ là phương chính *của (S)* nếu $\vec{c}$ là vectơ riêng của ma trận A .

b) Tính chất

- Phương chính không phải là phương tiệm cận khi và chỉ khi giá trị riêng tương ứng $\lambda \neq 0$.

- Siêu phẳng kính liên hợp với phương chính $\vec{c}$ thì có phương vuông góc với $\vec{c}$.

c) Định lí. Trong $\mathbf{E}^n$ đối với một hệ tọa độ trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ nếu phương trình của siêu mặt bậc hai (S) có dạng :

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_o = 0$$

thì các vectơ $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ đều là những phương chính của (S).

§10. SIÊU CẦU TRONG E^n

1. Định nghĩa

Trong không gian $\mathbf{E}^n$ cho một điểm I cố định, tập hợp tất cả những điểm M thuộc $\mathbf{E}^n$ sao cho $d(I,M) = r$ với số thực $r > 0$ cho trước gọi là *siêu cầu* (thực) tâm I, bán kính r.

Ta kí hiệu $S(I,r) = \{M \in \mathbf{E}^n \mid d(I,M) = r\}$.

2. Phương trình của siêu cầu thực

Giả sử điểm I có tọa độ trực chuẩn là $(a_1,a_2,\dots,a_n)$, khi đó siêu cầu thực tâm I bán kính r có phương trình :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 = r^2}$$

3. Siêu cầu tổng quát

Trong $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, một siêu mặt bậc hai (S) là một siêu cầu nếu phương trình của nó có dạng :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_o = 0$$

hay $$\sum_{i=1}^{n}(x_i + a_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_o$$

a) Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_o > 0$ ta có siêu cầu thực tâm $I(-a_1, -a_2,\dots, -a_n)$, bán kính $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_o}$

b) Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_o = 0$ ta có siêu cầu điểm tâm I, bán kính r =0

c) Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_o < 0$ ta có siêu cầu ảo tâm I.

4. Miền trong và miền ngoài của siêu cầu thực

Cho siêu cầu thực S(I,r) trong $\mathbf{E}^n$. *Miền trong* của siêu cầu đó là tập hợp các điểm T thuộc $\mathbf{E}^n$ mà d(I,T) < r, còn *miền ngoài* của siêu cầu đó là tập hợp các điểm N thuộc $\mathbf{E}^n$ mà d(I,N) > r. Miền trong của siêu cầu là một tập lồi. Đoạn thẳng nối một điểm thuộc miền trong với một điểm thuộc miền ngoài cắt mặt cầu S(I,r) tại một điểm .

5. Phương chính và siêu phẳng kính chính của siêu cầu

• Đối với siêu cầu tổng quát, mọi vectơ $\vec{c} \neq \vec{0}$ (thực) đều không phải là phương tiệm cận và luôn luôn là *phương chính*.

• Mọi siêu phẳng đi qua tâm $I(-a_1, -a_2, ..., -a_n)$ của siêu cầu tổng quát đều có phương trình dạng:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i + a_i) = 0$$

Đó là siêu phẳng kính chính vì liên hợp với phương chính

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

• Siêu phẳng đi qua điểm M_o thuộc siêu cầu S(I,r) và vuông góc với đường thẳng IM_o gọi là *siêu tiếp diện* của siêu cầu đó tại điểm M_o. Đường thẳng đi qua tâm I của siêu cầu được gọi là *đường kính* của siêu cầu.

6. Phương tích của một điểm đối với siêu cầu

a) Định nghĩa. Trong $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn, cho siêu cầu (S) có phương trình :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_o = 0$$

Với mỗi điểm M_o thuộc $\mathbf{E}^n$ có tọa độ trực chuẩn là $(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$ thì khi đó giá trị :

$$f(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o) = \sum_{i=1}^{n} {x_i^o}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^o + a_o$$

được gọi là *phương tích của điểm M_o đối với siêu cầu (S)* và kí hiệu là $\mathscr{P}(M_o)/(S)$.

Ta có $\mathscr{P}(M_o)/(S) = f(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$

b) Định lí : Trong $\mathbf{E}^n$, cho siêu cầu (S) tâm I bán kính r và một đường thẳng Δ đi qua điểm M_o cắt siêu cầu (S) tại hai điểm M_1, M_2 thì khi đó :

$$\mathscr{P}(M_o)/(S) = \overrightarrow{M_oM_1}.\overrightarrow{M_oM_2}$$

7. Siêu phẳng đẳng phương

a) Định lí. Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai siêu cầu (S_1) và (S_2) có tâm không trùng nhau. Khi đó tập hợp những điểm M có cùng phương tích đối với (S_1) và (S_2) sẽ nằm trên một siêu phẳng. Siêu phẳng này vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của hai siêu cầu đã cho.

b) Định nghĩa. Trong $\mathbf{E}^n$ tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai siêu cầu (S_1) và (S_2) không đồng tâm là một siêu phẳng. Siêu phẳng này gọi là *siêu phẳng đẳng phương* của hai siêu cầu đã cho. Siêu phẳng đẳng phương luôn luôn vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của hai siêu cầu cho trước.

B. ĐỀ BÀI TẬP

§1, §2, §3

2.1. Trong không gian vectơ Ơclit V_E^n ta thành lập ma trận Gram từ hệ vectơ $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}\}$ như sau :

$$G = \begin{bmatrix} \overrightarrow{a_1}^2 & \overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2} & . \; . \; . & \overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_n} \\ \overrightarrow{a_2}.\overrightarrow{a_1} & \overrightarrow{a_2}^2 & . \; . \; . & \overrightarrow{a_2}.\overrightarrow{a_n} \\ .. & .. & . \; . \; . & .. \\ \overrightarrow{a_n}.\overrightarrow{a_1} & \overrightarrow{a_n}.\overrightarrow{a_2} & . \; . \; . & \overrightarrow{a_n}^2 \end{bmatrix}$$

a) Chứng minh hệ vectơ đã cho độc lập tuyến tính khi và chỉ khi det G > 0.

b) Hãy tính det G trong V_E^2 với tích vô hướng được định nghĩa theo cách hiểu thông thường :

$$\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2} = |\overrightarrow{a_1}|.|\overrightarrow{a_2}|.\cos(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$$

2.2. Trong V_E^4 đối với cơ sở trực chuẩn cho trước cho các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ có tọa độ là :

$$\vec{a} = (1, 1, 1, 2)$$

$$\vec{b} = (1, 2, 3, -3)$$

a) Chứng minh $\vec{a} \perp \vec{b}$

b) Hãy bổ sung vào $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ hai vectơ nữa để được một cơ sở trực giao.

2.3. Tính diện tích hình bình hành dựng trên hai vectơ $\vec{a} = (8,4,1)$, $\vec{b} = (2, -3, 1)$ đối với một cơ sở trực chuẩn .

2.4. Đối với một cơ sở trực chuẩn cho ba vectơ

$\vec{a} = (3, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, 7, 4)$, $\vec{c} = (1, 2, 1)$. Tính tích hỗn hợp

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c}.$$

2.5. Tính khoảng cách từ một điểm M_1 đến đường thẳng d cho biết các tọa độ trực chuẩn của điểm M_1 là (x_1, x_2, x_3), của điểm M_o thuộc d là (x_1^o, x_2^o, x_3^o) và đường thẳng d có phương $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

2.6. Với hệ tọa độ trực chuẩn $\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ cho hai điểm A(2, –1, 3) và B(1, 1, 5). Hình vuông ABCD và điểm $M_o(\frac{5}{2}, -3, 0)$ thuộc mặt phẳng (ABC). Hãy tìm tọa độ điểm C và D .

2.7. Chứng minh rằng :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 + (\vec{a}.\vec{b})^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2$$

2.8. Trong không gian vectơ Ơclit $\mathbf{V}_E^4$ đối với cơ sở trực chuẩn cho trước cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có tọa độ lần lượt là $\vec{a} = (1, 1, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, 3, -3)$, $\vec{c} = (-7, 5, 0, 1)$. Chứng minh $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$ và hãy bổ sung vào hệ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ một vectơ nữa để được một cơ sở trực giao.

2.9. Cho $\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c}$ với $\vec{c} \neq \vec{0}$. Có thể suy ra $\vec{a} = \vec{b}$ hay không?

2.10. Với hệ tọa độ trực chuẩn trong $\mathbf{E}^3$, cho ba điểm A(3, 4, –1), B(2, 0, 3) , C(– 3, 5, 4) . Hãy chứng tỏ ba điểm đó không thẳng hàng và hãy tính diện tích của tam giác ABC đó .

2.11. Trong $\mathbf{E}^3$ với mục tiêu trực chuẩn cho các vectơ :

$$\vec{a} = (3, 0, -1)\ ,\ \vec{b} = (2, 4, 3)$$
$$\vec{c} = (-1, 3, 2)\ ,\ \vec{d} = (2, 0, 1)$$

Hãy tính $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ và $(\vec{a} \wedge \vec{c}).(\vec{b} \wedge \vec{d})$.

2.12.Trong không gian vectơ Ơclit n chiều $\mathbf{V}_E^n$ cho một hệ vectơ độc lập tuyến tính $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}\}$. Chứng minh rằng tồn tại một hệ vectơ duy nhất $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}\}$ sao cho :

$$\vec{a_i}.\vec{b_j} = \delta_{ij} \quad \text{với } i, j = 1, 2, ..., n$$

Chứng minh rằng nếu vectơ $\vec{x}$ có tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{a_i}\}$còn vectơ $\vec{y}$ có tọa độ $(y_1,y_2,...,y_n)$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{b_i}\}$ thì :

$$\vec{x}.\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

2.13. Giả sử trong $\mathbf{V}_E^n$ đã chọn một cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$. Đối với mỗi vectơ đơn vị $\vec{e}$ ta đặt $\alpha_i = \varphi(\vec{e}, \overrightarrow{e_i})$. Chứng minh rằng :

$$\vec{e} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e_i} \cos\alpha_i \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = 1$$

2.14. Cho hai đoạn thẳng AB và CD có độ dài không đổi lần lượt nằm trên hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 trong không gian $\mathbf{E}^3$.Chứng minh rằng thể tích của tứ diện ABCD không phụ thuộc vào vị trí của các đoạn thẳng AB và CD trên d_1 và d_2 .

2.15. Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^3$ cho bốn điểm A,B,C,D tùy ý . Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

Từ đẳng thức trên hãy suy ra một vài mệnh đề quen biết trong hình học .

2.16.Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì A,B,C,D của không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ ta đều có :

$$d(A, B) + d(C, D) + d(A, C) + d(B, D) \geq d(A, D) + d(B, C)$$

§4, §5

2.17. Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho siêu phẳng P có phương trình :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = 0$$

a) Chứng minh rằng vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, ... , a_n)$ vuông góc với phương của P. Vectơ $\vec{a}$ đó được gọi là *vectơ pháp tuyến* của siêu phẳng P.

b) Viết phương trình tham số và tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M_o(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$ và vuông góc với siêu phẳng P.

2.18. Trong E^n với mục tiêu trực chuẩn cho trước cho m-phẳng P có phương trình :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i = 0 \qquad , i = 1, 2, \ldots, n-m.$$

a) Chứng tỏ rằng n–m vectơ $\overrightarrow{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ với i =1,2, ..., n–m độc lập và tạo nên cơ sở của phương bù vuông góc với phương của phẳng P.

b) Viết phương trình tham số của cái phẳng Q đi qua điểm $C(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ và bù vuông góc với m– phẳng P đã cho .

2.19. Trong E^5 với mục tiêu trực chuẩn cho trước :

a) Lập phương trình tổng quát của phẳng P có số chiều bé nhất chứa các điểm A(1,3,–1,4,5), B(2,3,–1,4,5) và chứa phương $\vec{p}(0,1,0,0,0)$.

b) Lập phương trình tổng quát của phẳng Q đi qua điểm A đã cho và bù vuông góc với phẳng P.

2.20. Trong E^4 với mục tiêu trực chuẩn đã cho , xét vị trí tương đối của hai cái phẳng P và Q lần lượt cho bởi phương trình tham số của chúng như sau :

$$P: \begin{cases} x_1 = 2 + v \\ x_2 = 1 + 4v + 3u \\ x_3 = \quad 3v + u \\ x_4 = 5 + 11v + 3u \end{cases} \qquad Q: \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -1 + 3t \\ x_4 = 2 - t \end{cases}$$

2.21. Trong E^4 với mục tiêu trực chuẩn cho trước xét vị trí tương đối của hai cái phẳng R và S lần lượt cho bởi phương trình tổng quát của chúng như sau:

$$R : x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 3 = 0$$

S: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

2.22. Trong $\mathbf{E}^3$ viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d có phương trình :

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

và vuông góc với mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$

2.23. Hãy tìm công thức tính khoảng cách giữa hai siêu phẳng song song trong $\mathbf{E}^n$,sau đó hãy áp dụng công thức vừa tìm được để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song với nhau trong $\mathbf{E}^3$ và lần lượt có phương trình .

$$P : 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2 = 0$$

$$P' : 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 21 = 0.$$

2.24. Trong $\mathbf{E}^3$ tìm điểm đối xứng của điểm (1,2,3) đối với :

a) mặt phẳng $2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 68 = 0$

b) đường thẳng $x_1 - 8 = \dfrac{x_2 - 11}{3} = -x_3 + 4.$

2.25. Trong $\mathbf{E}^3$ cho một tứ diện ABCD. Các đỉnh có tọa độ trực chuẩn là :

$$A = (0,0,2) , B = (3,0,5) , C = (1,1,0) , D = (4,1,2).$$

Tính chiều cao của tứ diện hạ từ đỉnh D tới mặt ABC.

2.26. Trong $\mathbf{E}^3$ tìm khoảng cách từ điểm (1,3,5) tới đường thẳng có phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3 = 0 \end{cases}$$

2.27. Trong $\mathbf{E}^3$ tìm khoảng cách giữa các cặp đường thẳng lần lượt có phương trình :

a) $d_1: \begin{cases} x_1 = 3 + t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = 2 - 2t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x_1 = -u \\ x_2 = 2 + 3u \\ x_3 = 3u \end{cases}$

b) $m_1: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 = 0 \end{cases}$ và $m_2: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 9 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

2.28. Trong $\mathbf{E}^4$ với mục tiêu trực chuẩn đã cho ,cho mặt phẳng P đi qua ba điểm : A(1,1,1,1) , B(2,2,0,0) , C(1,2,0,1) và đường thẳng d đi qua hai điểm D(1,1,1,2) , E(1,1,2,1).

a) Chứng minh P và d chéo nhau.

b) Viết phương trình đường vuông góc chung và tính độ dài đoạn vuông góc chung .

2.29. Trong $\mathbf{E}^n$ hãy tìm quỹ tích :

a) những điểm cách đều hai điểm A, B phân biệt cho trước

b) những điểm cách đều ba điểm A, B, C độc lập cho trước.

2.30. Hãy tính độ dài đường chéo của hình "lập phương n chiều" cạnh a trong không gian $\mathbf{E}^n$.

2.31. Trong $\mathbf{E}^n$ cho siêu phẳng đi qua các điểm :

$$A_1 = (a_1, 0, \ldots, 0)$$
$$A_2 = (0, a_2, \ldots, 0)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$A_n = (0, 0, \ldots, a_n)$$

Hãy tính khoảng cách từ gốc tọa độ tới siêu phẳng đó .

2.32. Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai mục tiêu trực chuẩn $\{E_o;E_i\}$ và $\{E'_o;E_i\}$.

Chứng minh rằng đường thẳng $E_oE'_o$ vuông góc với siêu phẳng chứa đơn hình $(E_1,E_2,\ldots,E_n)$ tại trọng tâm của đơn hình và tính tọa độ điểm E'_o đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$.

2.33. Trong $\mathbf{E}^n$ cho mục tiêu trực chuẩn$\{E_o; E_i\}$, i =1,2, ... ,n. Trên các đường thẳng E_oE_i ta lấy các điểm A_i không trùng với gốc mục tiêu E_o .

a) Chứng minh hệ n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ độc lập và lập phương trình siêu phẳng P xác định bởi n điểm A_i độc lập đó.

b) Gọi h là khoảng cách từ E_o tới siêu phẳng P và gọi a_i là các khoảng cách $d(E_o, A_i)$, $i = 1,2, \ldots, n$. Chứng minh hệ thức :

$$\frac{1}{h^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}$$

2.34. Viết phương trình đường vuông góc chung của đường thẳng AB và mặt phẳng PQR cho trước trong $\mathbf{E}^4$ biết rằng tọa độ các điểm đó lần lượt là : A(1,1,1,1) , B(−2, −1,1,3) và P(2,1,−1,0) , Q(3,1,0, −1) ,R(0,0, −1,1) .

2.35. Trong $\mathbf{E}^n$ cho đường thẳng d vuông góc với siêu phẳng α và cắt siêu phẳng đó tại điểm M .Gọi A là một điểm tùy ý thuộc d và B là một điểm tùy ý trên α .Chứng minh :

$$d(M, A)^2 + d(M, B)^2 = d(A, B)^2 \text{ (định lí Pitago).}$$

2.36. Trong $\mathbf{E}^n$ cho m- phẳng α và k-phẳng β vuông góc với nhau. Chứng minh rằng α và β bù vuông góc với nhau khi và chỉ khi $n = m + k$.

2.37. Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai cái phẳng α và β . Chứng minh rằng :

a) Nếu α song song với β và $\dim\alpha \leq \dim\beta$ thì với mọi điểm A thuộc α ta đều có $d(A,\beta) = d(\alpha,\beta)$.

b) Nếu α và β chéo nhau hoàn toàn ($\vec{\alpha} \cap \vec{\beta} = \vec{0}$) thì có một điểm duy nhất $A \in \alpha$ và một điểm duy nhất $B \in \beta$ sao cho đường thẳng AB vừa vuông góc với α vừa vuông góc với β và $d(A,B) = d(\alpha,\beta)$.

2.38. Trong $\mathbf{E}^n$ cho một điểm I và m– phẳng α không chứa I với m < n đi qua điểm S có phương $\vec{\alpha}$ nhận m vectơ $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_m}\}$ làm cơ sở . Gọi J là hình chiếu vuông góc của I xuống α.

Chứng minh :

$$d^2(I, \alpha) = \overrightarrow{JI}^2 = \frac{|G(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_m}, \overrightarrow{SI})|}{|G(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_m})|}$$

2.39. Trong $\mathbf{E}^n$ (n >1) cho hai cái phẳng α và β chéo nhau ($\alpha \cap \beta = \phi$ và $\vec{\alpha} \cap \vec{\beta} = \vec{0}$) .Gọi $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_m}\}$ là cơ sở của không gian vectơ $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ và lấy điểm A $\in \alpha$, điểm B $\in \beta$. Chứng minh rằng:

$$d^2(\alpha,\beta) = \frac{|G(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_m})|}{|G(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_m})|}$$

2.40. Trong $\mathbf{E}^n$ tìm tập hợp các điểm M cách đều một siêu phẳng α cho trước một khoảng cách h cho trước .

2.41. Cho không gian afin thực n chiều $\mathbf{A}^n$ với n ≥ 1 và một hệ tọa độ afin $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ của $\mathbf{A}^n$. Chứng tỏ rằng có thể biến $\mathbf{A}^n$ trở thành một không gian Ơclit n chiều mà hệ tọa độ đã cho trở thành hệ tọa độ trực chuẩn của không gian Ơclit .

§6, §7, §8

2.42. Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^2$ xét tính chất của phép biến đổi có phương trình sau đây đối với một mục tiêu trực chuẩn :

a) $\begin{cases} x_1' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1 \\ x_2' = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}x_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1' = -x_1 - 6 \\ x_2' = \quad\quad x_2 \end{cases}$

2.43. Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai mục tiêu trực chuẩn $\{E_o; E_i\}$ và $\{E_o'; E_i\}$. Lập phương trình phép đẳng cự (phép dời hình) f đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$, biến mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ thành mục tiêu $\{E_o'; E_i\}$ sao cho $f(E_o) = E_o'$ và $f(E_i) = E_i$ với i = 1, 2, ..., n.

2.44. Trong $\mathbf{E}^n$ với hệ mục tiêu trực chuẩn cho vectơ $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Hãy viết phương trình phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ đã cho và tìm ảnh của điểm M có tọa độ là $(1,2,3,\dots,n)$ qua phép tịnh tiến đó. Chứng tỏ phép tịnh tiến là phép dời hình loại một .

2.45. Trong $\mathbf{E}^n$, đối với một mục tiêu trực chuẩn đã chọn , cho phép biến đổi f có phương trình như sau :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \\ \dots \qquad \dots \\ x'_m = x_m \\ x'_{m+1} = -x_{m+1} \\ \dots \qquad \dots \\ x'_n = -x_n \end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng f là một phép đẳng cự (phép dời hình)

b) Với những điều kiện nào của m và của n thì phép biến đổi f là phép dời hình loại một hoặc loại hai.

c) Hãy mô tả phép đẳng cự đó cùng với những tính chất của nó nếu $m = n - 1$.

2.46. Trong $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn đã chọn, cho siêu phẳng α có phương trình :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_o = 0 \quad \text{với} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$$

Hãy viết biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua siêu phẳng đó và qua đó chứng tỏ rằng siêu phẳng α chứa toàn điểm kép.

2.47. Trong $\mathbf{E}^2$ với hệ tọa độ trực chuẩn cho elip có phương trình

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \text{với } a \neq b.$$

Viết phương trình các phép đẳng cự (phép dời hình) của E^2 biến elip thành chính nó .

2.48. Trên E^n chứng minh rằng mỗi định lí của hình học afin (thực) là một định lí của hình học đồng dạng và cũng là một định lí của hình học Ơclit, nhưng ngược lại có thể không đúng.

2.49. Trong E^2 chứng minh rằng khái niệm đa giác lồi đều n cạnh là một khái niệm đồng dạng. Hãy phân loại đồng dạng tập hợp các đa giác lồi đều đó.

2.50. Trong E^2 chứng minh rằng đường trung tuyến, đường cao, đường phân giác , đường trung trực của một tam giác là các khái niệm đồng dạng. Trong các khái niệm nêu trên, khái niệm nào là khái niệm afin ? Vì sao ?

2.51. Trong các khái niệm liệt kê sau đây, các khái niệm nào là của hình học afin, hình học đồng dạng, hình học Ơclit : đường tròn, đường elip, đường hypebol, đường parabol, đường thẳng, sự chéo nhau của hai đường thẳng , khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau, hình vuông, hình bình hành, trọng tâm của một tam giác, khối tứ diện đều.

2.52. Cho một tam giác ABC. Mỗi cạnh của nó được chia làm

ba phần bằng nhau. Nối các điểm chia với đỉnh đối diện của cạnh đó ta sẽ được sáu đường thẳng tạo nên một hình lục giác (không đều). Chứng minh các đường chéo của hình lục giác đó đồng quy tại một điểm.

2.53. Cho hình bình hành có các đỉnh nằm trên một elip. Chứng minh tâm của hình bình hành trùng với tâm của hình elip còn các cạnh của hình bình hành thì song song với hai đường kính liên hợp của elip.

2.54. Cho hình bình hành có các cạnh tiếp xúc với một elip Chứng minh các đường chéo của hình bình hành là những đường kính liên hợp của elip.

2.55. Gọi AB, CD là một cặp đường kính liên hợp bất kì của một elip cho trước. Các tiếp tuyến của elip tại A và C cắt nhau tại M. Tìm quỹ tích các điểm M khi AB và CD thay đổi trên elip.

2.56. Cho elip có đường kính AB . Trên một nửa cung elip ta lấy hai điểm M,N .. Gọi $C = AM \cap BN$, $D = AN \cap BM$. Chứng minh phương của đường thẳng CD là phương liên hợp với phương của đường kính AB .

2.57. Chứng tỏ rằng phép đồng dạng f của $\mathbf{E}^n$ bảo toàn góc giữa hai đường thẳng, góc giữa hai siêu phẳng , góc giữa đường thẳng và siêu phẳng, và biến hai cái phẳng vuông góc với nhau thành hai cái phẳng cũng vuông góc với nhau .

2.58. Trong $\mathbf{V}_E^3$ với một cơ sở trực chuẩn cho các vectơ :

$$\vec{a} = (1, -2, 0) \quad , \quad \vec{b} = (3, 1, 0) \quad , \quad \vec{c} = (3, 1, 1)$$
$$\vec{a'} = (-2, -4, 0) \quad , \quad \vec{b'} = (-6, 2, 0) \quad , \quad \vec{c'} = (-6, 2, 2)$$

a) Xác định phép biến đổi tuyến tính φ sao cho

$$\varphi(\vec{a}) = \vec{a'},\ \varphi(\vec{b}) = \vec{b'},\ \varphi(\vec{c}) = \vec{c'}\ .$$

b) Giả sử φ liên kết với phép afin f . Chứng tỏ f là phép đồng dạng và hãy xác định tỉ số đồng dạng của f.

2.59. Chứng tỏ rằng phép vị tự tâm S tỉ số k của $\mathbf{E}^n$ là một phép đồng dạng của $\mathbf{E}^n$ với tỉ số $|k|$.

2.60. Viết phương trình của phép đồng dạng tỉ số k trong $\mathbf{E}^2$ biến mục tiêu trực chuẩn $\{E_o ; \vec{e_1} , \vec{e_2} \}$ thành mục tiêu $\{ E'_o ; \vec{e'_1} , \vec{e'_2} \}$, biết $\alpha = (\widehat{\vec{e_1}, \vec{e'_1}})$ và tọa độ trực chuẩn của E'_o = = (x_o, y_o) đối với mục tiêu $\{E_o ; \vec{e_1} , \vec{e_2} \}$.

2.61. Chứng minh rằng bất kì một phép đồng dạng nào trong mặt phẳng mà không phải là phép đẳng cự đều có một điểm kép .

2.62. Trong $\mathbf{E}^2$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước , hãy xét tính chất của phép biến đổi f cho bởi phương trình sau đây :

$$\begin{cases} x'_1 = 8x_1 - x_2 + 1 \\ x'_2 = x_1 + 8x_2 \end{cases}$$

§9, §10

2.63. Chứng minh rằng n + 1 điểm độc lập trong $\mathbf{E}^n$ luôn luôn thuộc một siêu cầu .

2.64. Trong $\mathbf{E}^3$ hãy xác định tâm và bán kính của các mặt cầu sau đây :

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 12x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_3 - 7 = 0$

2.65. Trong $\mathbf{E}^3$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, $D(d_1, d_2, d_3)$ không cùng nằm trên một mặt phẳng .

2.66. Trong $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn , hãy xét vị trí tương đối của siêu phẳng và siêu cầu cho bởi phương trình sau đây :

siêu phẳng : $x_n = 0$

siêu cầu : $\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 - R^2 = 0$.

2.67. Trong $\mathbf{E}^n$ cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho :

$$d^2(M, A) + d^2(M, B) = d^2(M, C) .$$

2.68. Trong $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn $\{E_o; E_i\}$ cho n điểm A_1, A_2, ..., A_n lần lượt có tọa độ là :

$A_i = (0, \dots, 0, a_i, 0, \dots, 0)$ với $a_i \neq 0$ và ở cột thứ i, i =1, 2, ... , n

Hãy xác định tâm và bán kính siêu cầu đi qua các điểm E_o, $A_1, A_2, \dots, A_n$.

2.69. Chứng minh rằng nếu một phép afin $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ của không gian $\mathbf{E}^n$ biến một siêu cầu tâm O bán kính R thành siêu cầu tâm O' bán kính R' thì f là một phép đồng dạng. Xác định tỉ số đồng dạng của f.

2.70. Trong $\mathbf{E}^3$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho phương trình siêu mặt bậc hai (S) :

$$x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 + p(x_1 + x_2 + x_3) + q = 0 \text{ với } p,q \in \mathbb{R}.$$

Hãy viết phương trình chính tắc của (S).

C. HƯỚNG DẪN VÀ GIẢI

§1, §2, §3

2.1. Trong không gian V_E^n, giả sử đối với một cơ sở trực chuẩn $\{\vec{a_i}\}$ đã chọn, các vectơ $\vec{a_i}$ có tọa độ trực chuẩn là:

$$\vec{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \text{ với } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Giả sử hệ vectơ $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$ độc lập tuyến tính. Ta có:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ hệ $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$ độc lập tuyến tính.

Ta biết rằng $\vec{a_i}.\vec{a_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.a_{jk}$, thay vào ma trận Gram ta có :

$$G = \begin{bmatrix} \sum a_{1i}^2 & \sum a_{1i}a_{2i} & \ldots & \sum a_{1i}a_{ni} \\ \sum a_{2i}a_{1i} & \sum a_{2i}^2 & \ldots & \sum a_{2i}a_{ni} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum a_{ni}a_{1i} & \sum a_{ni}a_{2i} & \ldots & \sum a^2_{ni} \end{bmatrix}$$

Vì $\vec{a_i}.\vec{a_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.a_{jk} = [a_i]^*[a_j]$ nên ta có thể phân tích :

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A.A^*$$

Do đó $|G| = |A.A^*| = |A|.|A^*| = |A|^2 > 0$ vì $|A| \neq 0$.

Vậy điều kiện cần và đủ để hệ vectơ $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}\}$ độc lập tuyến tính là det G > 0.

b) Trong V_E^2 ta có :

$$\det G = \begin{vmatrix} \vec{a_1}^2 & \vec{a_1}\vec{a_2} \\ \vec{a_2}\vec{a_1} & \vec{a_2}^2 \end{vmatrix} = \vec{a_1}^2 . \vec{a_2}^2 - (\vec{a_1}.\vec{a_2})^2$$

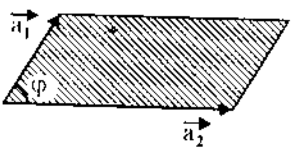
$$= |\vec{a_1}|^2 . |\vec{a_2}|^2 - |\vec{a_1}|^2 . |\vec{a_2}|^2 . \cos^2(\widehat{\vec{a_1}, \vec{a_2}})$$

$$= |\vec{a_1}|^2 . |\vec{a_2}|^2 . (1 - \cos^2(\widehat{\vec{a_1}, \vec{a_2}}))$$

$$= |\vec{a_1}|^2 . |\vec{a_2}|^2 . \sin^2(\widehat{\vec{a_1}, \vec{a_2}}). \text{ Đặt } (\widehat{\vec{a_1}, \vec{a_2}}) = \varphi$$

Ta biết rằng :

$|\vec{a_1}|.|\vec{a_2}|.\sin(\widehat{\vec{a_1}, \vec{a_2}})$ là diện tích của hình bình hành có cạnh $|\vec{a_1}|, |\vec{a_2}|$ và có góc giữa các cạnh đó là $\varphi = (\widehat{\vec{a_1}, \vec{a_2}})$



Vậy det G = $(|\vec{a_1}|.|\vec{a_2}|.\sin\varphi)^2$ = bình phương diện tích hình bình hành có cạnh là $|\vec{a_1}|$ và $|\vec{a_2}|$ và có góc giữa các cạnh đó là φ. Đây là ý nghĩa hình học của định thức Gram trong V_E^2.

2.2. a) Ta có $\vec{a} \perp \vec{b}$ vì $\vec{a}.\vec{b} = 1 + 2 + 3 - 6 = 0$.

b) Ta bổ sung thêm hai vectơ $\vec{c}$ và $\vec{d}$ để được một cơ sở trực giao $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$.

Gọi $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ có tính chất $\vec{c}.\vec{a} = 0$ và $\vec{c}.\vec{b} = 0$ nên:

$$\left.\begin{aligned}\vec{c}.\vec{a} &= c_1 + c_2 + c_3 + 2c_4 = 0\\ \vec{c}.\vec{b} &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 - 3c_4 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_3 - 7c_4 \\ c_2 = -2c_3 + 5c_4 \end{cases}$$

Cho $c_4 = 0$, $c_3 = 1$ ta tính được $c_2 = -2$, $c_1 = 1$.

Vậy $\vec{c} = (1, -2, 1, 0)$.

Gọi $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ có tính chất $\vec{d}.\vec{a} = 0$, $\vec{d}.\vec{b} = 0$, $\vec{d}.\vec{c} = 0$ nên:

$$\vec{d}.\vec{a} = d_1 + d_2 + d_3 + 2d_4 = 0$$
$$\vec{d}.\vec{b} = d_1 + 2d_2 + 3d_3 - 3d_4 = 0$$
$$\vec{d}.\vec{c} = d_1 - 2d_2 + d_3 = 0$$

Cho $d_4 = 1$ ta tính được $d_2 = -\dfrac{2}{3}$, $d_3 = \dfrac{17}{6}$, $d_1 = -\dfrac{25}{6}$

Vậy $\vec{d} = (-\dfrac{25}{6}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{17}{6}, 1)$

Ta có thể thay vectơ $\vec{d}$ bằng vectơ $\vec{d'}$ cùng phương với d như sau :

$$\vec{d'} = (-25, -4, 17, 6)$$

Ta được một cơ sở trực giao gồm bốn vectơ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d'}\}$ trong đó có hai vectơ $\vec{c}$ và $\vec{d'}$ vừa được bổ sung thêm.

2.3. Ta biết rằng diện tích hình bình hành dựng trên hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ là bằng $|\vec{c}|$ trong đó $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

$$S_{\square} = |\vec{c}| = \sqrt{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}^2}$$

$$= \sqrt{7^2 + (-6)^2 + (-32)^2} = \sqrt{1109} \text{ đvdt.}$$

2.4. Ta biết tích hỗn hợp của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ được tính theo công thức : $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c}$.

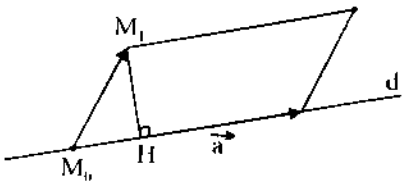
Ta có $\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix}1 & 2\\7 & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 7\end{vmatrix}\right) = (-10, -8, 19)$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c} = (-10).1 + (-8).2 + 19.1 = -17.$$

CHÚ Ý. Ta có thể tính tích hỗn hợp theo công thức :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\2 & 7 & 4\\1 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2\\7 & 4\end{vmatrix}.1 + \begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 2\end{vmatrix}.2 + \begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 7\end{vmatrix}.1 = -17.$$

2.5.Ta có $\overrightarrow{M_oM_1} = (x_1 - x_1^o, x_2 - x_2^o, x_3 - x_3^o)$



Gọi M_1H là khoảng cách từ điểm M_1 đến đường thẳng d. Ta có công thức :

$$M_1H = \frac{\left|\overrightarrow{M_oM_1} \wedge \vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$$

Vậy :

$$M_1H = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix}x_2 - x_2^o & x_3 - x_3^o\\a_2 & a_3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}x_3 - x_3^o & x_1 - x_1^o\\a_3 & a_1\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}x_1 - x_1^o & x_2 - x_2^o\\a_1 & a_2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

2.6. Ta có :

$\overrightarrow{BA} = (1, -2, -2)$

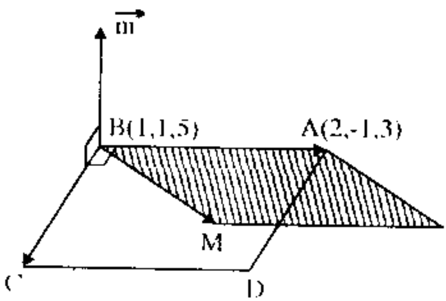
$\overrightarrow{BM} = (\frac{3}{2}, -4, -5)$

Đặt $\vec{m} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BM}$.

Ta có : $\vec{m}$ =

$$= \left(\begin{vmatrix}-2 & -2\\-4 & -5\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-2 & 1\\-5 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -2\\\frac{3}{2} & -4\end{vmatrix}\right)$$

= (2, 2, –1).



Vectơ $\vec{m}$ này cũng vuông góc với mặt phẳng (ABC) chứa hình vuông ABCD. Giả sử $\overrightarrow{BC} = (kc_1, kc_2, kc_3)$ với $k \neq 0$.

$$k.\ \overrightarrow{BC} \perp \vec{m} \Rightarrow 2c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \text{ (vì } \overrightarrow{BC}.\vec{m} = 0)$$

$$k.\ \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BA} \Rightarrow c_1 - 2c_2 - 2c_3 = 0 \text{ (vì } \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 0).$$

Chọn $c_3 = 1$ ta tính được $c_1 = 1$, $c_2 = -\dfrac{1}{2}$. Vậy $(c_1, c_2, c_3) = (1, -\dfrac{1}{2}, 1)$. Ta chọn vectơ $k\overrightarrow{BC} = (2, -1, 2)$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{BC}$. Cần xác định hệ số k. Hình vuông ABCD có độ dài mỗi cạnh bằng :

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

Do đó $|k\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow k = 1$. Vậy $\overrightarrow{BC} = (2, -1, 2)$.

Vì tọa độ của B là (1, 1, 5) nên ta tính được tọa độ đỉnh C là (3, 2, 7). Ta có : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = (3, -3, 0)$.

Do đó ta tính được tọa độ điểm D là (4, 2, 5)

2.7. Trong V_E^3 ta có :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 + (\vec{a}.\vec{b})^2 = |\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 + \left[|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})\right]^2$$

$$= \left[|\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})\right]^2 + \left[|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})\right]^2$$

$$= \vec{a}^2.\vec{b}^2\left[\sin^2(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})\right]$$

Vậy $\boxed{(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 + (\vec{a}.\vec{b})^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2}$

Đẳng thức trên có tên gọi là *hằng đẳng thức Lagrange.*

2.8. Ta có $\vec{a}.\vec{b} = 1 + 2 + 3 - 6 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$$\vec{b}.\vec{c} = -7 + 10 + 0 - 3 = 0 \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\vec{c}.\vec{a} = -7 + 5 + 0 + 2 = 0 \Rightarrow \vec{c} \perp \vec{a}.$$

Gọi $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ có tính chất :

$\vec{d}.\vec{a} = 0$, $\vec{d}.\vec{b} = 0$, $\vec{d}.\vec{c} = 0$ nên :

$$\vec{d}\cdot\vec{a} = d_1 + d_2 + d_3 + 2d_4 = 0$$

$$\vec{d}\cdot\vec{b} = d_1 + 2d_2 + 3d_3 - 3d_4 = 0$$

$$\vec{d}\cdot\vec{c} = -7d_1 + 5d_2 + d_4 = 0$$

Chọn $d_2 = -1$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} d_1 + d_3 + 2d_4 = 1 & (1) \\ d_1 + 3d_3 - 3d_4 = 2 & (2) \\ -7d_1 + d_4 = 5 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra : $2d_1 + 9d_4 = 1$ (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra : $-65d_1 = 44 \Rightarrow d_1 = -\dfrac{44}{65}$

Từ (3) ta có :$d_4 = 5 + 7d_1 = 5 - \dfrac{308}{65} = \dfrac{17}{65}$

Từ (1) ta có : $d_3 = 1 - d_1 - 2d_4 = 1 + \dfrac{44}{65} - \dfrac{34}{65} = \dfrac{75}{65}$

Vậy $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4) = (-\dfrac{44}{65}, -1, \dfrac{75}{65}, \dfrac{17}{65})$

Ta có thể thay vectơ $\vec{d}$ bởi vectơ $\vec{d'} = 65\vec{d}$ như sau :

$$\vec{d'} = (-44, -65, 75, 17)$$

Vậy trong V_E^4 ta có một hệ cơ sở trực giao là $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d'}\}$.

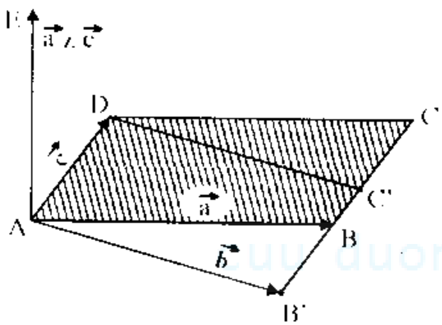
NHẬN XÉT. Từ bài tập số 2.2 và bài tập số 2.8 ta rút ra nhận xét sau đây :

a) Trong không gian V_E^4 nếu cho trước hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$ và $\vec{a} \perp \vec{b}$. Khi đó ta có thể bổ sung vào hệ này hai vectơ $\vec{c}, \vec{d}$ để tạo thành một hệ cơ sở trực giao. Kết quả là ta có thể chọn các cặp vectơ $\{\vec{c}, \vec{d}\}$khác nhau sao cho $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ là một hệ trực giao.

b) Nếu trong V_E^4 cho trước hệ ba vectơ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ đều khác $\vec{0}$ và đôi một vuông góc với nhau thì khi đó ta có thể bổ sung vào hệ này một vectơ $\vec{d}$ sao cho hệ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ là một cơ sở trực giao. Chú ý rằng phương của vectơ $\vec{d}$ được xác định duy nhất. Vì đây chính là vectơ sinh ra không gian con 1 chiều bù trực giao với không gian $\mathbf{V}_E^3$ được xác định bởi hệ 3 vectơ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$cho trước.

2.9.Theo giả thiết ta có $\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c}$ với $\vec{c} \neq \vec{0}$. Ta không thể suy ra $\vec{a} = \vec{b}$ được. Điều này được giải thích thông qua thí dụ sau đây:

Giả sử ta có hình bình hành ABCD với $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Khi đó vectơ $\vec{a} \wedge \vec{c}$ có mô đun bằng diện tích hình bình hành ABCD và có hướng vuông góc với mặt phẳng chứa hình bình hành sao cho ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ tạo thành một tam diện thuận.



Ta hãy tạo nên một hình bình hành mới là AB'C'D sao cho các đỉnh B', C' đều nằm trên đường thẳng BC và B', C' không trùng với B, C.

Đặt $\overrightarrow{AB'} = \vec{b}$. Ta có :

$$\vec{b} \wedge \vec{c} = \overrightarrow{AB'} \wedge \overrightarrow{AD}$$

Hai hình bình hành ABCD và AB'C'D có cùng diện tích vì có chung cạnh đáy AD và có chung chiều cao. Do đó ta suy ra $\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c}$ nhưng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ khác nhau. Như vậy ta có thể lấy vô số điểm B' khác nhau trên đường thẳng BC để tạo nên những vectơ $\vec{b}$ khác nhau và đều khác với vectơ $\vec{a}$ thỏa mãn hệ thức $\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c}$

2.10.Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1, -4, 4)$

$\overrightarrow{AC} = (-6, 1, 5)$

Ba điểm A, B, C không thẳng hàng vì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Ta có :

$$\frac{-1}{-6} \neq \frac{-4}{1} \neq \frac{4}{5} \Rightarrow 3 \text{ điểm A, B, C không thẳng hàng.}$$

Gọi S là diện tích tam giác ABC. Ta có : $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (-24, -19, -25)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{24^2 + 19^2 + 25^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1562}$$

Vậy diện tích tam giác ABC là : $S = \frac{1}{2}\sqrt{1562}$

2.11. $\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right) = (4, -11, 12)$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} -11 & 12 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right) = (-58, -20, 1)$$

Gọi $\vec{m} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ ta có $\vec{m} = (-58, -20, 1)$.

Đặt $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{c}$ ta có :

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right) = (3, -5, 9)$$

Đặt $\vec{p} = \vec{b} \wedge \vec{d}$ ta có :

$$\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) = (4, 4, -8)$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{c}).(\vec{b} \wedge \vec{d}) = \vec{n}.\vec{p} = 3.4 + (-5).4 + 9.(-8)$$

$$= 12 - 20 - 72 = -80.$$

2.12. Trong V_E^n giả sử đối với một cơ sở trực chuẩn đã chọn, các vectơ $\overrightarrow{a_i}$ có tọa độ là :

$$\overrightarrow{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \text{ với } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Theo giả thiết hệ vectơ $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}\}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ .. & .. & \cdots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Giả sử đối với cơ sở trực chuẩn cho trước các vectơ $\overrightarrow{b_j}$ có tọa độ là :

$$\overrightarrow{b_j} = (b_{j1}, b_{j2}, ..., b_{jn}) \text{ với } j = 1, 2, ..., n.$$

Gọi B là ma trận tọa độ của n vectơ $\overrightarrow{b_j}$, ta có :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ .. & .. & \cdots & .. \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Theo giả thiết $\overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{b_j} = \delta_{ij}$ với i, j = 1, 2, ..., n.

Ta có $\overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{b_j} = \begin{cases} 0 & \text{khi } i \neq j \\ 1 & \text{khi } i = j \end{cases}$, do đó :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ .. & .. & \cdots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ .. & .. & \cdots & .. \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ .. & .. & \cdots & .. \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

hay là $A.B^* = I$ (I là ma trận đơn vị).

Do đó $\quad B^* = A^{-1}$

Vì $A \neq 0$ nên tồn tại $A^{-1} = B^*$. Các cột tọa độ của ma trận B^* chính là tọa độ trực chuẩn cần tìm của các vectơ $\overrightarrow{b_j}$ với j = 1, 2, ..., n. Ta suy ra hệ vectơ $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_n}\}$ độc lập tuyến tính vì $|A| \neq 0$ nên ta có $|B| \neq 0$ và ma trận B được xác định duy nhất.

Như vậy tồn tại một hệ vectơ duy nhất :

$\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_n}\}$ sao cho $\overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{b_j} = \delta_{ij}$ với i, j = 1, 2, ..., n.

Nếu vectơ $\vec{x}$ có tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{a_i}\}$và vectơ $\vec{y}$ có tọa độ $(y_1, y_2, ..., y_n)$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{b_j}\}$thì :

$$\vec{x} = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} + ... + x_n\overrightarrow{a_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{a_i}$$

$$\vec{y} = y_1\overrightarrow{b_1} + y_2\overrightarrow{b_2} + ... + y_n\overrightarrow{b_n} = \sum_{j=1}^{n} y_j\overrightarrow{b_j}$$

Khi đó $\vec{x}.\vec{y} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{a_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\overrightarrow{b_j}\right)$

hay $\vec{x}.\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ vì $\overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{b_j} = \delta_{ij}$

NHẬN XÉT. Bài toán trên đây có thể thực hiện theo cách khác như sau :

Vì hệ vectơ $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}\}$ độc lập tuyến tính nên có thể dùng hệ đó làm cơ sở và ta có :

$$\overrightarrow{b_j} = b_{j1}\overrightarrow{a_1} + b_{j2}\overrightarrow{a_2} + ... + b_{jn}\overrightarrow{a_n}.$$

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{b_j} = \delta_{ij}$ nên :

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{b_j} = \overrightarrow{a_1}^2 b_{j1} + \overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_2}b_{j2} + ... + \overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_n}b_{jn} = \delta_{1j} \\ \overrightarrow{a_2}.\overrightarrow{b_j} = \overrightarrow{a_2}\overrightarrow{a_1}b_{j1} + \overrightarrow{a_2}^2 b_{j2} + ... + \overrightarrow{a_2}\overrightarrow{a_n}b_{jn} = \delta_{2j} \\ .. \quad .. \quad .. \quad ... \quad .. \quad .. \\ \overrightarrow{a_n}.\overrightarrow{b_j} = \overrightarrow{a_n}\overrightarrow{a_1}b_{j1} + \overrightarrow{a_n}.\overrightarrow{a_2}b_{j2} + ... + \overrightarrow{a_n}^2 b_{jn} = \delta_{nj} \end{cases}$$

Hệ phương trình trên gồm có n phương trình và n ẩn $b_{j1}, b_{j2}, ..., b_{jn}$. Ta có định thức các hệ số là định thức Gram $|G|$. Vì hệ $\{\overrightarrow{a_i}\}$ độc lập tuyến tính nên theo kết quả bài 2.1 ta có $|G| > 0$ nghĩa là $|G| \neq 0$. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất và đó là các tọa độ của vectơ $\overrightarrow{b_j}$. Lí luận tương tự đối với các vectơ $\overrightarrow{b_j}$ còn lại ta xác định được hệ vectơ $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_n}\}$ sao cho $\overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{b_j} = \delta_{ij}$.

Nếu gọi ma trận tọa độ của hệ vectơ $\overrightarrow{a_i}$ đối với một cơ sở trực chuẩn là A và gọi ma trận tọa độ của hệ vectơ $\overrightarrow{b_j}$ cũng đối với cơ sở trực chuẩn đó là B thì ta có :

$$A.B^* = I \Rightarrow B^* = A^{-1}.$$

Vì $|A| \neq 0$ nên $|A^{-1}| \neq 0$ và $|B^*| \neq 0$. Do đó hệ vectơ $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_n}\}$ độc lập tuyến tính và phần tiếp theo làm theo cách đã được trình bày ở phần trên.

2.13. Đối với cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{e_i}\}$ trong $\mathbf{V}_E^n$, mỗi vectơ đơn vị $\vec{e}$ được biểu thị như sau :

$$\vec{e} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + ... + x_n\overrightarrow{e_n}.$$

Vì $|\vec{e}| = 1$ nên $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

Ta có $\vec{e}.\overrightarrow{e_i} = |\vec{e}||\overrightarrow{e_i}|.\cos\alpha_i$ (1)

mặt khác $\vec{e}.\overrightarrow{e_i} = (\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{e_i}).\overrightarrow{e_i} = x_i$ (2) (vì $\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j} = 0$ với $i \neq j$)

Từ (1) và (2) ta suy ra $x_i = \cos\alpha_i$

Vậy $\vec{e} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i\overrightarrow{e_i}$.

Vì $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ nên $\sum_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = 1$.

2.14. Giả sử hai đoạn thẳng AB và CD có độ dài không đổi lần lượt nằm trên hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 trong không gian $\mathbf{E}^3$.

Dựng $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}$. Ta có hai hình bình hành bằng nhau ABME và CFND.

Diện tích hình bình hành ABME bằng :

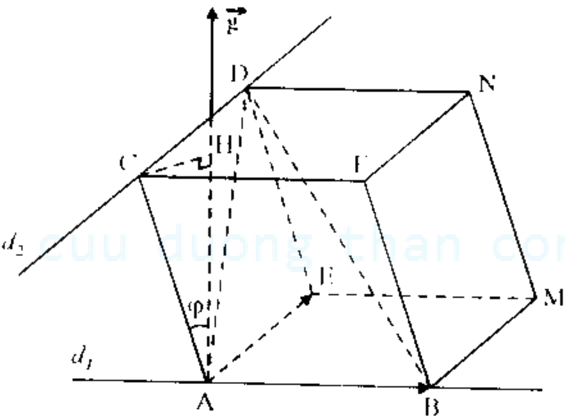
$$|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{CF} \wedge \overrightarrow{CD}|.$$

Gọi V là thể tích hình hộp ABMECFND và AH là chiều cao của hình hộp đó. Ta có :

$$V = |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}|.AH$$

Mặt khác ta có : $V = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}).\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}).\overrightarrow{AC}$

Gọi $\vec{g} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}$ ta có $|\vec{g}|$ = diện tích hình bình hành ABME. Do đó: $V = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}).\overrightarrow{AC}| = |\vec{g}.\overrightarrow{AC}| = |\vec{g}|.|\overrightarrow{AC}|\cos\varphi$ với φ là góc giữa $\overrightarrow{AC}$ và $\vec{g}$. Khi đoạn CD di động trên đường thẳng d_2 ta luôn luôn có $AH = AC\cos\varphi$ trong đó AC và φ thay đổi còn AH chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2. Khoảng cách này là một số không đổi. Do đó khi AB và CD di động trên d_1 và d_2 thì hình hộp ABMECFND có thể tích không đổi. Ta biết rằng thể tích của tứ diện ABCD bằng $\frac{1}{6}$ thể tích hình hộp nói trên. Vì hình hộp có thể tích không đổi, ta suy ra thể tích của tứ diện ABCD không phụ thuộc vào vị trí của đoạn thẳng AB và CD trên d_1 và d_2.



2.15. Với bốn điểm A, B, C, D tùy ý trong $\mathbf{E}^3$ ta luôn luôn có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} =$$

$$= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = 0$$

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

Từ kết quả trên ta suy ra nếu 4 điểm A, B, C, D phân biệt thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$ thì $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$. Từ đó ta suy ra :

a) Cho tam giác ABC. Nếu hai đường cao xuất phát từ B và C cắt nhau tại D thì đường cao xuất phát từ A cũng đi qua D.

b) Nếu một tứ diện ABCD có hai cặp cạnh đối diện là $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì ta có cặp cạnh đối diện còn lại $AD \perp BC$.

2.16. Ta có

$$\begin{array}{l} d(AD) \le d(AB) + d(BD) \\ d(AD) \le d(AC) + d(CD) \\ d(BC) \le d(BA) + d(AC) \\ d(BC) \le d(BD) + d(DC) \\ \hline 2[d(AD) + d(BC)] \le 2[d(AB) + d(CD) + d(AC) + d(BD)] \end{array}$$

Do đó $d(AD) + d(BC) \le d(AB) + d(CD) + d(AC) + d(BD)$.

§4, §5

2.17. a) Siêu phẳng P trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ có phương trình:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0 \qquad (1)$$

Lấy một điểm $M(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ thuộc siêu phẳng P ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m_i + b = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - m_i) = 0$ (3)

Với X là một điểm bất kì của siêu phẳng P có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và khác với M, ta có $\overrightarrow{MX} = (x_1 - m_1, x_2 - m_2, \ldots, x_n - m_n)$.

Như vậy vectơ $\overrightarrow{MX}$ thuộc phương của siêu phẳng P.

Đẳng thức (3) ở trên chứng tỏ rằng $\vec{a}.\overrightarrow{MX} = 0$.

Vậy vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ luôn luôn vuông góc với mọi vectơ $\overrightarrow{MX}$ của phương siêu phẳng. Như vậy nếu biết phương trình của siêu phẳng là $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0$ thì ta dễ dàng suy ra vectơ pháp tuyến

$\vec{a}$ của siêu phẳng đó có tọa độ là $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$ và vuông góc với siêu phẳng P sẽ nhận vectơ pháp tuyến $\vec{a}$ của siêu phẳng làm vectơ chỉ phương. Do đó :

$$X \in P \Leftrightarrow \overline{MX} = t\vec{a}$$

Ta có phương trình tham số của đường thẳng d là:

$$x_i = ta_i + x_i^o \text{ với } i = 1, 2, ..., n.$$

Ta suy ra phương trình tổng quát bằng cách khử tham số t trong phương trình trên ta có :

$$\frac{x_1 - x_1^o}{a_1} = \frac{x_2 - x_2^o}{a_2} = ... = \frac{x_n - x_n^o}{a_n}$$

Đây là một hệ gồm n – 1 phương trình biểu thị cho phương trình tổng quát của đường thẳng d. Hệ phương trình trên có thể viết như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 - x_1^o}{a_1} = \dfrac{x_n - x_n^o}{a_n} \\ \dfrac{x_2 - x_2^o}{a_2} = \dfrac{x_n - x_n^o}{a_n} \\ \quad .. \qquad\qquad .. \\ \dfrac{x_{n-1} - x_{n-1}^o}{a_{n-1}} = \dfrac{x_n - x_n^o}{a_n} \end{cases}$$

2.18. Giả sử m-phẳng P có phương trình tổng quát đối với một mục tiêu trực chuẩn cho trước là :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n-m \qquad (1)$$

a) Giả sử $M_o = (x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$ là một điểm cố định nào đó của m-phẳng P. Vì $M_o \in P$ nên ta có :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^o + b_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n-m \qquad (2)$$

Nếu gọi M là một điểm bất kì của m-phẳng **P** với $M \neq M_o$ và giả sử M có tọa độ là $(x_1, x_2, ..., x_n)$ thì tọa độ của M sẽ thỏa mãn phương trình của m-phẳng **P** nghĩa là thỏa mãn phương trình (1). Từ (1) và (2) ta suy ra :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^o) = 0, \ i = 1,2,..., n-m \qquad (3)$$

Hệ phương trình (3) chứng tỏ rằng n–m vectơ:

$$\overline{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), \ i = 1, 2, ..., n-m$$

là hệ n–m vectơ độc lập tuyến tính và mỗi vectơ $\overline{a_i}$ đều vuông góc với vectơ $\overline{M_oM} = (x_1 - x_1^o, x_2 - x_2^o, ..., x_n - x_n^o)$ thuộc phương $\mathbf{V}^m$ của m-phẳng **P**. Vậy n–m vectơ độc lập $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overline{a_{n-m}}\}$là cơ sở của phương bù vuông góc với phương $\mathbf{V}^m$ của phẳng **P**.

b) Gọi **Q** là cái phẳng đi qua điểm $C(c_1, c_2, ..., c_n)$ và bù vuông góc với m-phẳng **P** đã cho. Phẳng **Q** này nhận n–m vectơ $\overrightarrow{a_i}$ làm cơ sở nên có phương trình tham số là :

$$X(x_i) \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow \overrightarrow{CX} = t_1\overrightarrow{a_1} + t_2\overrightarrow{a_2} + ... + t_{n-m}\overline{a_{n-m}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 - c_1 \\ x_2 - c_2 \\ ... \\ x_n - c_n \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ .. \\ a_{1n} \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ .. \\ a_{2n} \end{bmatrix} + ... + t_{n-m} \begin{bmatrix} a_{n-m,1} \\ a_{n-m,2} \\ .. \\ a_{n-m,n} \end{bmatrix}$$

hay:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + t_1a_{11} + t_2a_{21} + ... + t_{n-m}a_{n-m,1} \\ x_2 = c_2 + t_1a_{12} + t_2a_{22} + ... + t_{n-m}a_{n-m,2} \\ .. \quad .. \ .. \quad .. \quad ... \quad .. \\ x_n = c_n + t_1a_{1n} + t_2a_{2n} + ... + t_{n-m}a_{n-m,n} \end{cases}$$

2.19.a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1,0,0,0,0)$

$$\overrightarrow{p} = (0,1,0,0,0)$$

là hai vectơ độc lập tuyến tính (vì ma trận tọa độ có hạng bằng 2) tạo nên phương của phẳng P có số chiều bé nhất chứa A, B và chứa phương $\vec{p}$. Ta có phương trình tham số của P là :

$$X \in \mathbf{P} \Leftrightarrow \vec{AX} = t_1 \vec{AB} + t_2 \vec{p}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 3 \\ x_3 + 1 \\ x_4 - 4 \\ x_5 - 5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t_1 + 1 \\ x_2 = t_2 + 3 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 4 \\ x_5 = 5 \end{cases}$$

Từ phương trình tham số của P ta suy ra phương trình tổng quát của P là :

$$\begin{cases} x_3 = -1 \\ x_4 = 4 \\ x_5 = 5 \end{cases}$$

b) Dựa vào phương trình tổng quát của P ta tìm được phương của phẳng Q bù vuông góc với P. Phương của phẳng Q này được xác định bởi các vectơ độc lập tuyến tính sau đây (theo kết quả của bài 2.18) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1} = (0,0,1,0,0) \\ \overrightarrow{a_2} = (0,0,0,1,0) \\ \overrightarrow{a_3} = (0,0,0,0,1) \end{cases}$$

Ta có phương trình tham số của Q đi qua điểm A và bù vuông góc với P

$$X \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = t_1 \overrightarrow{a_1} + t_2 \overrightarrow{a_2} + t_3 \overrightarrow{a_3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1-1 \\ x_2-3 \\ x_3+1 \\ x_4-4 \\ x_5-5 \end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1\\0 \end{bmatrix} + t_3\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = t_1 - 1 \\ x_4 = t_2 + 4 \\ x_5 = t_3 + 5 \end{cases}$$

Do đó ta suy ra phương trình tổng quát của **Q** đi qua điểm A và bù vuông góc với P là :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

2.20. Gọi $\mathbf{V}^p$ và $\mathbf{V}^q$ lần lượt là phương của **P** và **Q**. Dựa vào phương trình tham số của chúng ta tìm các vectơ cơ sở của $\mathbf{V}^p$ và $\mathbf{V}^q$. Ta có thể viết phương trình tham số của **P** như sau :

$$\begin{bmatrix} x_1-2 \\ x_2-1 \\ x_3-0 \\ x_4-5 \end{bmatrix} = v\begin{bmatrix} 1\\4\\3\\11 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 0\\3\\1\\3 \end{bmatrix}$$

Gọi $\vec{a} = (1,4,3,11)$ và $\vec{b} = (0,3,1,3)$

Các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là một hệ độc lập tuyến tính và ta có :

$$\vec{x} \in \mathbf{V}^p \Leftrightarrow x_1\vec{a} + x_2\vec{b}.$$

Mặt khác, phương trình tham số của **Q** có thể viết :

$$\begin{bmatrix} x_1-0 \\ x_2-3 \\ x_3+1 \\ x_4-2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2\\0\\3\\-1 \end{bmatrix}$$

Gọi $\vec{c} = (2,0,3,-1)$ là vectơ cơ sở của $\mathbf{V}^q$ và ta có :

$$\vec{y} \in \mathbf{V}^q \Leftrightarrow \vec{y} = y_1\vec{c}.$$

Ta cần xét tích $\vec{x}.\vec{y}$ với $\vec{x} \in \mathbf{V}^p$ và $\vec{y} \in \mathbf{V}^q$

$$\vec{x}.\vec{y} = (x_1\vec{a} + x_2\vec{b}).y_1\vec{c}.$$

$$= x_1y_1\,\vec{a}.\vec{c} + x_2y_1\,\vec{b}.\vec{c}$$

Ta có $\vec{a}.\vec{c} = 2 + 0 + 9 - 11 = 0$

$\vec{b}.\vec{c} = 0 + 0 + 3 - 3 = 0.$

Vậy $\vec{x}.\vec{y} = 0$, do đó $\mathbf{V}^p \perp \mathbf{V}^q$.

Bây giờ ta cần tìm giao $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}$. Các điểm chung nếu có là các điểm M có tọa độ (x_1,x_2,x_3,x_4) ứng với các giá trị tương ứng của các tham số u, v, t trong hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2 + v = 2t \\ 1 + 4v + 3u = 3 \\ 3v + u = -1 + 3t \\ 5 + 11v + 3u = 2 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - v - 2 = 0 \\ 3u + 4v - 2 = 0 \\ 3t - u - 3v - 1 = 0 \\ t + 3u + 11v + 3 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này gồm có 4 phương trình độc lập và chỉ có 3 ẩn nên vô nghiệm. Vậy hai phẳng **P** và **Q** không có điểm chung nghĩa là $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} = \varnothing$. Căn cứ vào việc xét phương chung và điểm chung của hai phẳng **P**, **Q** ta kết luận hai cái phẳng đó chéo nhau và vuông góc với nhau.

2.21.Gọi $\mathbf{V}^r$ và $\mathbf{V}^s$ lần lượt là phương của **R** và **S**. Ta có $\vec{a} = (1, -1,3,1)$ là vectơ pháp tuyến của siêu phẳng **R**. Do đó mọi vectơ $\vec{x}$ mà $\vec{x}.\vec{a} = 0$ đều thuộc $\mathbf{V}^r$.

Từ phương trình tổng quát của **S** ta có hệ vectơ:

$$\begin{cases} \vec{b} = (1,1,0,0) \\ \vec{c} = (4,1,-1,0) \\ \vec{d} = (2,1,0,-1) \end{cases}$$

tạo nên một hệ vectơ độc lập tuyến tính làm cơ sở của phương bù vuông góc với $\mathbf{V}^s$. Ta hãy xét :

$$\vec{b}.\vec{a} = 1 - 1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{a}$$

$$\vec{c}.\vec{a} = 4 - 1 - 3 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{c} \perp \vec{a}$$

$$\vec{d}.\vec{a} = 2 - 1 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{d} \perp \vec{a}.$$

Vậy các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ đều vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{a}$ của siêu phẳng **R** nên $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbf{V}^r$ với $\dim \mathbf{V}^r = 3$. Do đó $\mathbf{V}^r$ bù vuông góc với $\mathbf{V}^s$. Như vậy **R** và **S** là hai cái phẳng bù vuông góc với nhau nên chúng có một điểm chung duy nhất M. Ta hãy tìm tọa độ điểm chung M đó bằng cách giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 & (1) \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 & (2) \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 & (3) \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 & (4) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (3)+(4) \Rightarrow 3x_1 + 3x_3 = 3 \\ (2)-(1) \Rightarrow 3x_1 - x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x_3 = 3 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{4} \text{ và } x_1 = \frac{1}{4}.$$

Thay $x_1 = \frac{1}{4}$ vào (1) ta có $x_2 = \frac{11}{4}$

Thay $x_1 = \frac{1}{4}$ và $x_2 = \frac{11}{4}$ vào (3) ta có: $x_4 = \frac{13}{4}$.

Vậy $\mathbf{R} \cap \mathbf{S} = M(\frac{1}{4}, \frac{11}{4}, \frac{3}{4}, \frac{13}{4})$.

2.22. Gọi α là mặt phẳng cần tìm. Theo giả thiết ta có ngay hai vectơ chỉ phương của đường thẳng là :

$$\vec{v} = (a,b,c) \text{ và } \vec{n} = (A,B,C).$$

Do đó mặt phẳng α cần tìm có phương trình là :

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

2.23. Trong không gian E^n cho hai siêu phẳng **P** và **P'** song song với nhau và lần lượt có phương trình là :

$$(\mathbf{P}): \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0$$

$$(\mathbf{P'}): \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b' = 0 \quad \text{với } b \neq b'.$$

Lấy một điểm $M \in \mathbf{P}'$ và giả sử M có tọa độ là :

$$M = (m_1, m_2, \ldots, m_n).$$

Ta có khoảng cách từ M tới siêu phẳng **P** là :

$$d(M,\mathbf{P}) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i m_i + b\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

Vì $M \in \mathbf{P}'$ nên $\sum_{i=1}^{n} a_i m_i + b' = 0$ nên $\sum_{i=1}^{n} a_i m_i = -b'$.

Thay giá trị này vào công thức trên ta có :

$$d(M,\mathbf{P}) = \frac{-b' + b}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} = d(\mathbf{P}',\mathbf{P})$$

Biểu thức tính khoảng cách giữa $\mathbf{P}'$ và **P** này chứng tỏ khoảng cách $d(\mathbf{P}', \mathbf{P})$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M lấy trên $\mathbf{P}'$.

Áp dụng vào $\mathbf{E}^3$ với hai mặt phẳng **P** và $\mathbf{P}'$ song song với nhau:

P có phương trình : $2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2 = 0$

$\mathbf{P}'$ có phương trình : $4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 21 = 0$.

Phương trình của **P** có thể viết dưới dạng :

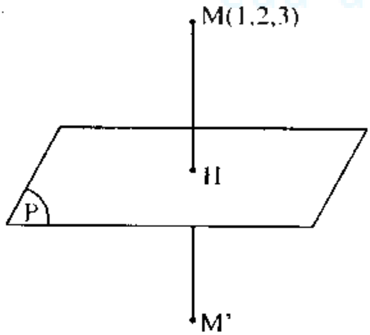
$$4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4 = 0.$$

Áp dụng công thức trên ta có :

$$d(\mathbf{P}', \mathbf{P}) = \frac{|+21 + 4|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{25}{6}.$$

2.24.a) Gọi P là mặt phẳng cho trước có phương trình

$$2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 68 = 0$$



Ta lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(1,2,3) và vuông góc với P :

$$(d):\begin{cases}x_1 = 1+2t\\ x_2 = 2-2t\\ x_3 = 3+5t\end{cases}$$

Gọi H là giao điểm của d và mặt phẳng P.

Muốn tìm tọa độ của H ta giải phương trình :

$$2(1+2t)-2(2-2t)+5(3+5t)-68=0$$

$$\Leftrightarrow 33t-55=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{3}$$

Ta suy ra tọa độ của $H = d \cap P$ là :

$$H\left(\frac{13}{3},-\frac{4}{3},\frac{34}{3}\right)$$

Gọi (x_1', x_2', x_3') là tọa độ của điểm M' đối xứng với M qua P và vì H là trung điểm của đoạn MM' nên ta có :

$$\frac{x_1'+1}{2}=\frac{13}{3} \Rightarrow x_1'=\frac{23}{3}$$

$$\frac{x_2'+2}{2}=-\frac{4}{3} \Rightarrow x_2'=-\frac{14}{3}$$

$$\frac{x_3'+3}{2}=\frac{34}{3} \Rightarrow x_3'=\frac{79}{3}$$

Vậy $M'\left(\frac{23}{3},-\frac{14}{3},\frac{79}{3}\right)$.

b) Gọi Δ là đường thẳng đã cho có phương trình :

$$x_1-8=\frac{x_2-11}{3}=\frac{x_3-4}{-1}.$$

Đường thẳng này có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1,3,-1)$.

Mặt phẳng **R** đi qua M(1,2,3) và vuông góc với đường thẳng Δ nên có phương trình dạng :

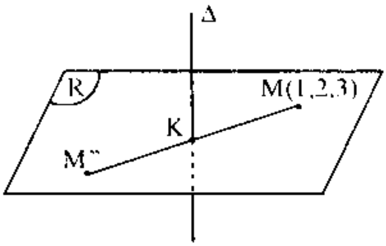
$$x_1 + 3x_2 - x_3 + b = 0.$$

Vì M(1,2,3) ∈ **R** nên ta có: $1 + 6 - 3 + b = 0 \Rightarrow b = -4$

Vậy mặt phẳng **R** có phương trình là : $x_1 + 3x_2 - x_3 - 4 = 0$.

Đường thẳng Δ có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x_1 = 8 + t \\ x_2 = 11 + 3t \\ x_3 = 4 - t \end{cases}$$



Gọi K là giao điểm của mặt phẳng R với đường thẳng Δ. Muốn tìm giao điểm K ta giải phương trình sau:

$$(8 + t) + 3(11 + 3t) - (4 - t) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 11t + 33 = 0 \Leftrightarrow t = -3.$$

Ta suy ra tọa độ của giao điểm $K = R \cap \Delta$ là :

K(5,2,7)

Điểm M" đối xứng của M đối với điểm K chính là điểm đối xứng cần tìm đối với đường thẳng Δ. Gọi (x_1'', x_2'', x_3'') là tọa độ của điểm M" đối xứng của M đối với đường thẳng Δ. Vì K là trung điểm của đoạn MM" nên ta có :

$$\frac{x_1'' + 1}{2} = 5 \Rightarrow x_1'' = 9$$

$$\frac{x_2'' + 2}{2} = 2 \Rightarrow x_2'' = 2$$

$$\frac{x_3'' + 3}{2} = 7 \Rightarrow x_3'' = 11$$

Vậy điểm M" đối xứng với M qua Δ có tọa độ là : M"(9,2,11)

2.25.Chiều cao của tứ diện hạ từ đỉnh D tới mặt phẳng ABC chính là khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng ABC.

Với tọa độ trực chuẩn của các điểm A,B,C đã cho ta lập được phương trình mặt phẳng (ABC) là :

$$x_1 - 3x_2 - x_3 + 2 = 0$$

Ta có $d(D,(ABC)) = \dfrac{|4-3-2+2|}{\sqrt{1+9+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{11}} = \dfrac{\sqrt{11}}{11}$.

Vậy tứ diện ABCD có chiều cao DH hạ từ đỉnh D tới mặt phẳng ABC là :

$$DH = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

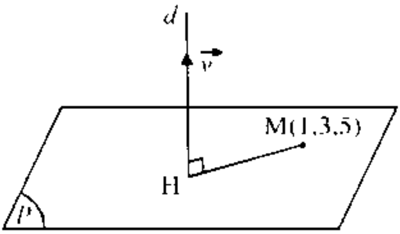
NHẬN XÉT. Ta có thể tính chiều cao DH bằng công thức :

$$\boxed{DH = \frac{\left|(\overline{AB} \wedge \overline{AC}).\overline{AD}\right|}{\left|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\right|}}$$

2.26.Đường thẳng **d** : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3 = 0 \end{cases}$

nhận vectơ chỉ phương $\vec{v}$ có tọa độ là :

$$\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, -1)$$



Gọi **P** là mặt phẳng đi qua điểm M(1,3,5) cho trước và nhận $\vec{v}$ làm vectơ pháp tuyến. Ta lập được phương trình của **P** là :

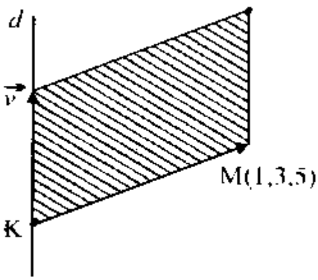
$$x_1 - x_2 - x_3 + 7 = 0$$

Gọi H là giao điểm của **P** và đường thẳng d. Tọa độ giao điểm H = **P** ∩ d thỏa mãn hệ phương trình sau đây :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 7 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow H(-2,1,4)$$

Khoảng cách từ điểm M(1,3,5) tới đường thẳng d bằng $|\overrightarrow{HM}|$.

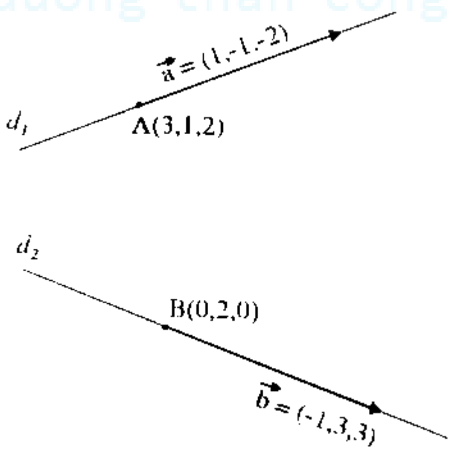
Ta có $\overrightarrow{HM} = (3,2,1) \Rightarrow |\overrightarrow{HM}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$.



NHẬN XÉT. Ta có thể lấy một điểm K thuộc đường thẳng d, tọa độ của điểm K thỏa mãn phương trình của d, thí dụ K(0,–1,2) ∈ d và có thể tính khoảng cách MH từ điểm M tới đường thẳng d theo công thức :

$$MH = \frac{\left|\overrightarrow{KM} \wedge \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

2.27. a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm A(3,1,2) và nhận vectơ $\vec{a} = (1,-1,-2)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng d_2 đi qua điểm B(0,2,0) và nhận vectơ $\vec{b} = (-1,3,3)$ làm vectơ chỉ phương .



Gọi β là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1. Mặt phẳng β đi qua điểm B(0,2,0) và nhận cặp vectơ chỉ phương $(\vec{a}, \vec{b})$ có tọa độ:

$$\vec{a} = (1,-1,-2)$$

$$\vec{b} = (-1,3,3)$$

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng β, ta có: $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (3,-1,2)$$

Từ đó ta lập được phương trình của mặt phẳng β là :

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2 = 0.$$

Ta có $d(d_1,d_2) = d(A, \beta) = \dfrac{|3.3 - 1 + 2.2 + 2|}{\sqrt{9+1+4}} = \sqrt{14}$

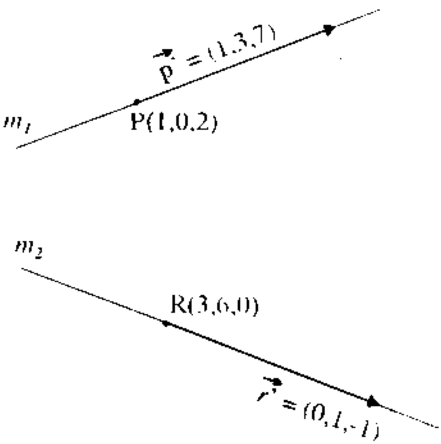
NHẬN XÉT. Ta có thể tính khoảng cách giữa d_1 và d_2 dựa vào công thức :

$$d(d_1,d_2) = \frac{\left|(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB})\right|}{\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|}$$

b)Đường thẳng m_1 đi qua điểm P(1,0,2) (vì ta có thể chọn P có tọa độ thỏa mãn phương trình đường thẳng m_1) và nhận $\vec{p}$ làm vectơ chỉ phương. Ta có :

$$\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right) = (-1, -3, -7)$$

Ta lấy $\overrightarrow{p'} = -\vec{p}$ làm vectơ chỉ phương của đường thẳng m_1 và ta có $\overrightarrow{p'} = (1,3,7)$. Đường thẳng m_2 đi qua điểm R(3,6,0) và nhận vectơ $\vec{r}$ làm vectơ chỉ phương. Ta có :



$$\vec{r} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (0,3,-3).$$

Ta lấy vectơ $\overrightarrow{r'} = (0,1,-1)$ làm vectơ chỉ phương của đường thẳng m_2. Gọi α là mặt phẳng đi qua điểm R và nhận $(\overrightarrow{p'}, \overrightarrow{r'})$ làm cặp vectơ chỉ phương. Ta lập được phương trình mặt phẳng α là:

$$10x_1 - x_2 - x_3 - 24 = 0$$

Ta có $d(m_1,m_2) = d(P,\alpha) = \dfrac{|10-0-2-24|}{\sqrt{100+1+1}} = \dfrac{16}{\sqrt{102}}$

NHẬN XÉT. Ta có thể tính khoảng cách giữa m_1 và m_2 bằng công thức :

$$d(m_1,m_2) = \frac{\left|(\overrightarrow{p'},\overrightarrow{r'},\overrightarrow{PR})\right|}{\left|\overrightarrow{p'}\wedge\overrightarrow{r'}\right|}$$

2.28.a) Ta có :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (1,1,-1,-1)\\ \overrightarrow{AC} &= (0,1,-1,0)\\ \overrightarrow{DE} &= (0,0,1,-1)\end{aligned} \quad \text{có} \quad \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Ba vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DE}$ độc lập tuyến tính nên mặt phẳng P đi qua ba điểm A, B, C và đường thẳng d đi qua hai điểm D, E không có phương chung. Ta có phương trình tham số của mặt phẳng P là:

$$X \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{bmatrix}x_1-1\\ x_2-1\\ x_3-1\\ x_4-1\end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\\ -1\end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = 1+t_1\\ x_2 = 1+t_1+t_2\\ x_3 = 1-t_1-t_2\\ x_4 = 1-t_1\end{cases}$$

Mặt khác ta có phương trình tham số của đường thẳng DE là :

$$X \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{DX} = u.\overrightarrow{DE}$$

$$\begin{bmatrix}x_1-1\\ x_2-1\\ x_3-1\\ x_4-2\end{bmatrix} = u\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ -1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = 1\\ x_2 = 1\\ x_3 = 1+u\\ x_4 = 2-u\end{cases}$$

Giao điểm của mặt phẳng **P** và đường thẳng d nếu có sẽ thỏa mãn hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 1+t_1 = 1 \\ 1+t_1+t_2 = 1 \\ 1-t_1-t_2 = 1+u \\ 1-t_1 = 2-u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_1+t_2 = 0 \\ -t_1-t_2 = u \\ -t_1 = 1-u \end{cases}$$

Hệ phương trình vô nghiệm vì nếu cộng từng vế ta có 0 = 1 là vô lí. Vậy đường thẳng d và mặt phẳng P không có điểm chung và không có phương chung, nên chúng chéo nhau.

NHẬN XÉT. Sau khi khử các tham số ở phương trình tham số của P ta được phương trình tổng quát của P là :

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Tương tự, ta khử các tham số ở phương trình tham số của d, ta được phương trình tổng quát của d là :

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Sau đó ta lập hệ phương trình gồm (1) và (2) để tìm điểm chung và thấy rằng hệ phương trìng này vô nghiệm nghĩa là $P \cap d = \varnothing$.

b) Muốn lập phương trình đường vuông góc chung IJ trong đó $I \in d$ và $J \in P$ ta hãy tìm phương của đường thẳng IJ. Gọi Q là siêu phẳng chứa đường thẳng d và có phương chứa phương của mặt phẳng P.

$$X \in Q \Leftrightarrow \overrightarrow{DX} = t_1\overrightarrow{DE} + t_2\overrightarrow{AB} + t_3\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + t_2 \\ x_2 = 1 + t_2 + t_3 \\ x_3 = 1 + t_1 - t_2 - t_3 \\ x_4 = 2 - t_1 - t_2 \end{cases}$$

Khử các tham số, ta được phương trình tổng quát của siêu phẳng Q là :

$$(Q) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 5 = 0.$$

Siêu phẳng Q có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1,1,1,1)$. Vectơ $\vec{n}$ này chính là vectơ chỉ phương của đường vuông góc chung IJ và ta có $IJ \perp P$ và $IJ \perp d$.

Bây giờ ta lập phương trình siêu phẳng R chứa P và bù vuông góc với d. Như vậy R có phương chứa phương của IJ. Ta biết rằng d và R bù vuông góc sẽ có một điểm chung duy nhất là I.

$$X \in R \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = t_1\vec{n} + t_2\overrightarrow{AB} + t_3\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + t_2 \\ x_2 = 1 + t_1 + t_2 + t_3 \\ x_3 = 1 + t_1 - t_2 - t_3 \\ x_4 = 1 + t_1 - t_2 \end{cases}$$

Khử các tham số ta được phương trình tổng quát của siêu phẳng R:

$$(R) : x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

Muốn tìm tọa độ giao điểm $I = d \cap R$ ta giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (R) \\ \left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 3 \end{array}\right\} & (d) \end{cases}$$

Giải ra ta có $I(1,1,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$. Đường vuông góc chung IJ đi qua điểm I và nhận $\vec{n} = (1,1,1,1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là :

$$(IJ) : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = \dfrac{3}{2} + t \\ x_4 = \dfrac{3}{2} + t \end{cases}$$

Gọi J = P ∩ IJ ta có:

$$\begin{cases} 1+t+\dfrac{3}{2}+t=2 \\ 1+t+\dfrac{3}{2}+t=2 \end{cases} \Rightarrow \quad t=-\frac{1}{4}$$

Vậy điểm J có tọa độ là: $(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{5}{4})$

Ta có $\overrightarrow{IJ}=(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$ và do đó ta tính được độ dài đường vuông góc chung là :

$$d(P,d)=\left|\overrightarrow{IJ}\right|=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}$$

CHÚ Ý. Ta có thể tìm vectơ chỉ phương $\vec{n}$ của đường vuông góc chung bằng cách buộc $\vec{n}$ phải thỏa mãn các điều kiện sau đây :

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{DE}=0 \end{cases}$$

2.29.a) Giả sử đối với một mục tiêu trực chuẩn đã chọn trong $\mathbf{E}^n$ ta có :

$$A=(a_1, a_2, ..., a_n)$$

$$B=(b_1, b_2, ..., b_n)$$

Quỹ tích hay tập hợp những điểm $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ có tính chất cách đều hai điểm A, B phân biệt thỏa mãn điều kiện :

$$d(AX)=d(BX) \Leftrightarrow |\overrightarrow{AX}|=|\overrightarrow{BX}|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-b_i)^2}$$

Bình phương hai vế và rút gọn ta có phương trình :

$$\sum_{i=1}^{n}2(a_i-b_i)x_i+\sum_{i=1}^{n}(a_i^2-b_i^2)=0$$

Đây là phương trình của một siêu phẳng có dạng $\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i + \beta = 0$ trong đó các α_i không đồng thời bằng 0 vì $A \neq B$. Siêu phẳng này vuông góc với đường thẳng AB tại trung điểm của đoạn AB vì có vectơ pháp tuyến là vectơ $\overline{BA}$ và tọa độ trung điểm của đoạn AB là $\frac{a_i + b_i}{2}$ với i = 1,2, ..., n thỏa mãn phương trình của siêu phẳng đó. Ta gọi tập hợp này là siêu phẳng trung trực của đoạn AB.

b) Trong $\mathbf{E}^n$ giả sử ba điểm A, B, C độc lập có tọa độ trực chuẩn là:

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n)$$
$$B = (b_1, b_2, ..., b_n)$$
$$C = (c_1, c_2, ..., c_n)$$

Áp dụng kết quả câu a của bài 2.29 ta có phương trình siêu phẳng trung trực của đoạn AB là :

$$\sum_{i=1}^{n} 2(a_i - b_i)x_i + \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 - b_i^2) = 0$$

Tương tự, ta có phương trình siêu phẳng trung trực của đoạn AC là :

$$\sum_{i=1}^{n} 2(a_i - c_i)x_i + \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 - c_i^2) = 0$$

Vậy quỹ tích những điểm cách đều ba điểm A, B, C độc lập cho trước là một (n−2)- phẳng có phương trình sau đây :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2(a_i - b_i)x_i + \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 - b_i^2) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} 2(a_i - c_i)x_i + \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 - c_i^2) = 0 \end{cases}$$

NHẬN XÉT THÊM : (n−2)- phẳng này bù vuông góc với mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C độc lập và có giao điểm duy nhất với mặt phẳng (ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

2.30. Áp dụng định lí Pitago ta tính được độ dài d của đường chéo là :

$$d = a\sqrt{n}$$

2.31. Ta lập được phương trình của siêu phẳng P đi qua các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ đã cho là :

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + ... + \frac{x_n}{a_n} = 1$$

hay $$\frac{1}{a_1}x_1 + \frac{1}{a_2}x_2 + ... + \frac{1}{a_n}x_n - 1 = 0$$

Do đó ta tính được khoảng cách từ gốc tọa độ tới siêu phẳng P là :

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + ... + \frac{1}{a_n^2}}}.$$

2.32. Trước hết ta lập phương trình siêu phẳng P chứa đơn hình $(E_1, E_2, ..., E_n)$:

$$\overrightarrow{E_1X} = t_1\overrightarrow{E_1E_2} + t_2\overrightarrow{E_1E_3} + ... + t_{n-1}\overrightarrow{E_1E_n}$$

Từ đó ta có phương trình tổng quát của siêu phẳng P là :

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$

Gọi $G = (g_1, g_2, ..., g_n)$ là trọng tâm của đơn hình $(E_1, E_2, ..., E_n)$. Theo định nghĩa trọng tâm của đơn hình ta có :

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GE_i} = \vec{0} \text{ với } i = 1, 2, ..., n$$

hay là $\overrightarrow{GE_1} + \overrightarrow{GE_2} + ... + \overrightarrow{GE_n} = \vec{0}$. Do đó :

$$\begin{bmatrix} 1-g_1 \\ -g_2 \\ ... \\ -g_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g_1 \\ 1-g_2 \\ ... \\ -g_n \end{bmatrix} + ... + \begin{bmatrix} -g_1 \\ -g_2 \\ ... \\ 1-g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = ng_1 \\ 1 = ng_2 \\ \dots \\ 1 = ng_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_1 = \dfrac{1}{n} \\ g_2 = \dfrac{1}{n} \\ \dots \\ g_n = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Ta tính được tọa độ trọng tâm G của đơn hình $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ là:

$$G = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$$

Do đó $\overline{E_oG} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$

Vậy đường thẳng E_oG vuông góc với siêu phẳng $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ tại G. Vì đường thẳng có phương là phương của vectơ pháp tuyến của siêu phẳng. Bây giờ ta cần chứng minh đường thẳng E_oG đi qua điểm E'_o. Đường thẳng E_oG có phương trình tổng quát là:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Giả sử điểm E'_o có tọa độ đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ là:

$$E'_o = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Ta cần chứng minh $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ tức là điểm E'_o thuộc đường thẳng E_oG. Ta có :

$$\left.\begin{array}{lcl} \left|\overrightarrow{E'_oE_1}\right|^2 & = & (1-a_1)^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1 \\ \left|\overrightarrow{E'_oE_2}\right|^2 & = & a_1^2 + (1-a_2)^2 + \dots + a_n^2 = 1 \\ \dots & & \dots \\ \left|\overrightarrow{E'_oE_n}\right|^2 & = & a_1^2 + a_2^2 + \dots + (1-a_n)^2 = 1 \end{array}\right\}$$

Từ hệ phương trình trên ta suy ra :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2a_1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2a_2 \\ \cdots \quad\quad \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2a_n \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n \text{ là đpcm.}$$

Vậy điểm E'_o thuộc đường thẳng E_oG hay đường thẳng $E_oE'_o$ đi qua trọng tâm G của đơn hình $(E_1, E_2, ..., E_n)$.

Theo kết quả ở phần trên ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2a_1 = 2a_2 = \ldots = 2a_n \text{ hay } na_i^2 = 2a_i \text{ với mọi i.}$$

Vậy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{2}{n}$. Do đó ta có :

$$E'_o = (\frac{2}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2}{n})$$

NHẬN XÉT. Ta có thể tìm tọa độ điểm E'_o như trên rồi viết phương trình đường thẳng $E_oE'_o$ như sau :

$$\overrightarrow{E_oX} = t\overrightarrow{E_oE'_o}$$

Cần xác định giá trị của tham số t ứng với giao điểm của đường thẳng $E_oE'_o$ với siêu phẳng $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Ta suy ra :

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{2t}{n}$$

Thay các giá trị này vào phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ ta có : $t = \dfrac{1}{2}$.

Nếu gọi G là giao điểm của đường thẳng $E_oE'_o$ với siêu phẳng $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ta có :

$$\overrightarrow{E_oG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{E_oE'_o} \Rightarrow G = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$$

Muốn chứng minh G là trọng tâm của đơn hình (E_1, E_2, ..., E_n) ta xét đẳng thức :

$$\overrightarrow{GE_1} + \overrightarrow{GE_2} + ... + \overrightarrow{GE_n} = \vec{0}$$

Ta nhận thấy tọa độ của G thỏa mãn phương trình trên. Vậy G là trọng tâm của đơn hình (E_1, E_2, ..., E_n) .

Mặt khác để chứng tỏ rằng $a_i = \dfrac{2}{n}$ với mọi i ta có thể sử dụng hệ thức : $\begin{cases} \overrightarrow{E'_oE_i}.\overrightarrow{E'_oE_i} = 1 \\ \overrightarrow{E'_oE_i}.\overrightarrow{E'_oE_j} = 0 \quad \text{với mọi } i \neq j \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + ... + (1 - a_i)^2 + ... + a_n^2 = 1 & (1) \\ a_1^2 + a_2^2 + ... + (-a_i)(1 - a_i) + ... + (-a_j)(1 - a_j) + ... + a_n^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) – (2) ta có : $(1 - a_i)^2 + a_i(1 - a_i) + a_j^2 + a_j(1 - a_j) = 1$

$\Leftrightarrow 1 - a_i + a_j = 1 \Leftrightarrow a_i = a_j$ với mọi j $\Rightarrow$ thay vào (1) ta có $a_i = \dfrac{2}{n}$

2.33. a)Giả sử đối với mục tiêu trực chuẩn {E_o; E_i} các điểm A_i với $i = 1, 2, ..., n$ có tọa độ trực chuẩn là :

$$A_i = (0, ...,0, a_i, 0,..., 0), \ a_i \neq 0 \text{ với mọi } i.$$

Căn cứ vào tọa độ của n điểm A_i, ta dễ dàng thấy rằng hệ điểm {A_1, A_2, ..., A_n} độc lập.

Ta có phương trình của siêu phẳng P xác định bởi n điểm A_i là:

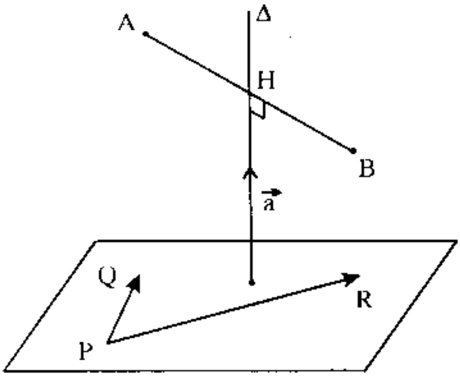
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} - 1 = 0$$

b) Áp dụng công thức tính khoảng cách ở bài 2.31 ta có :

$$h = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}}} \text{ hay } h^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}}$$

Từ đó ta suy ra hệ thức $\frac{1}{h^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}$

2.34. Ta có



$\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 0, 2)$

$\overrightarrow{PQ} = (1, 0, 1, -1)$

$\overrightarrow{PR} = (-2, -1, 0, 1)$

Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ là 3 vectơ độc lập tuyến tính vì ma trận tọa độ của chúng có chứa định thức:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Giả sử $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ là vectơ chỉ phương của đường vuông góc chung cần tìm. Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow -3a_1 - 2a_2 + 2a_4 = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_3 - a_4 = 0 \\ \overrightarrow{PR}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow -2a_1 - a_2 + a_4 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta tính được $\vec{a} = (0, 1, 1, 1)$.

Gọi α là siêu phẳng chứa mặt phẳng (PQR) và chứa đường vuông góc chung Δ. Ta có α là cái phẳng 3 chiều và có phương trình tham số là :

$$X \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{PX} = t_1\overrightarrow{PQ} + t_2\overrightarrow{PR} + t_3\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \\ x_3 + 1 \\ x_4 - 0 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + t_1 - 2t_2 & (1) \\ x_2 = 1 - t_2 + t_3 & (2) \\ x_3 = -1 + t_1 + t_3 & (3) \\ x_4 = -t_1 + t_2 + t_3 & (4) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} (3) + (4) \Rightarrow x_3 + x_4 &= -1 + t_2 + 2t_3 \\ (2) \Rightarrow \quad x_2 &= 1 - t_2 + t_3 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 3t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{1}{3}(x_2 + x_3 + x_4)$$

$$(2) \Rightarrow x_2 = 1 - t_2 + \frac{1}{3}(x_2 + x_3 + x_4)$$

$$\Rightarrow t_2 = -x_2 + 1 + \frac{1}{3}(x_2 + x_3 + x_4)$$

$$= \frac{1}{3}(-3x_2 + 3 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$= \frac{1}{3}(-2x_2 + x_3 + x_4 + 3)$$

$$(4) \Rightarrow t_1 = t_2 + t_3 - x_4 = \frac{1}{3}(-2x_2 + x_3 + x_4 + 3 + x_2 + x_3 + x_4) - x_4.$$

$$= \frac{1}{3}(-x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3) - x_4$$

$$= \frac{1}{3}(-x_2 + 2x_3 - x_4 + 3)$$

Thay các giá trị của t_1 và t_2 vào (1) ta có :

$$x_1 = 2 + \frac{1}{3}(-x_2 + 2x_3 - x_4 + 3) - \frac{2}{3}(-2x_2 + x_3 + x_4 + 3)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 + x_4 - 1 = 0 \quad (\alpha)$$

Ta lập phương trình tham số của đường thẳng AB :

$$X \in AB \Leftrightarrow \overline{AX} = t\overline{AB}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 1 \\ x_4 - 1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 3t \\ x_2 = 1 - 2t \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 + 2t \end{cases}$$

Gọi H là giao điểm của đường thẳng AB với siêu phẳng α. Tọa độ của H thỏa mãn phương trình sau :

$$(1 - 3t) - (1 - 2t) + (1 + 2t) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow t = 0$$

Ta tính được tọa độ giao điểm H ứng với giá trị $t = 0$ là :

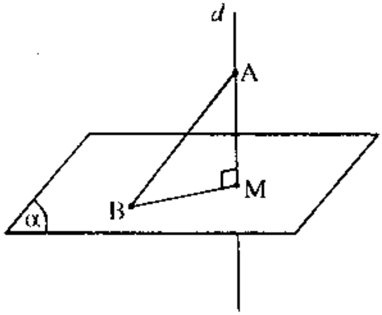
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,1,1)$$

Đường vuông góc chung Δ đi qua điểm H(1,1,1,1) nhận $\vec{a} = (0,1,1,1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là:

$$(\Delta) : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = 1 + t \\ x_4 = 1 + t \end{cases}$$

Ta nhận thấy điểm H chính là điểm A cho trước.

2.35. Đường thẳng d vuông góc với siêu phẳng α trong $\mathbf{E}^n$ nên d và α là hai cái phẳng bù trực giao với nhau. Do đó d và α có một giao điểm chung duy nhất là M. Gọi A là một điểm tùy ý trên d và B là một điểm tuỳ ý trên α ta có :



$$d(A,B)^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}|^2$$

$$= |\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB}$$

Vì $\overrightarrow{AM} \in \vec{d}$ và $\overrightarrow{MB} \in \vec{\alpha}$ nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} = 0$ vì $\vec{d}$ và $\vec{\alpha}$ là hai không gian vectơ bù trực giao với nhau. Vậy :

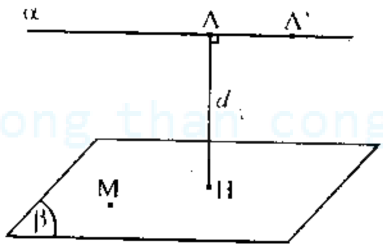
$$d(A,B)^2 = d(M,A)^2 + d(M,B)^2. \text{ (định lí Pitago).}$$

2.36. Nếu m-phẳng α và k-phẳng β bù vuông góc với nhau thì theo định nghĩa ta có $\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = \overrightarrow{E^n}$. Áp dụng định lí về số chiều với tổng các không gian vectơ con $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ta có m + k = n.

Ngược lại nếu n = m + k thì cũng do định lí về số chiều đó, ta suy ra $\dim(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = m + k = n$ vì $\vec{\alpha} \cap \vec{\beta} = \vec{0}$. Do đó $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$ bù trực giao tức là hai cái phẳng α và β bù vuông góc với nhau.

Chú thích : $\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = \overrightarrow{E^n}$ là kí hiệu chứng tỏ rằng không gian vectơ Ơclit $\overrightarrow{E^n}$ có tổng trực tiếp là hai không gian vectơ Ơclit con $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$.

2.37. a) Vì α song song với β và $\dim\alpha \le \dim\beta$ nên ta có $\vec{\alpha} \subset \vec{\beta}$ và $\alpha \cap \beta = \varnothing$. Trong không gian vectơ $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ lấy không gian con $\vec{d}$ bù trực giao với $\vec{\beta}$.



Đường thẳng d đi qua điểm A bất kì thuộc α và có phương $\vec{d}$ bù vuông góc với phẳng β trong không gian $\alpha + \beta$ nên có giao với β tại một điểm H duy nhất. Ta có $d(A,H) = d(\alpha,\beta)$.

Thực vậy nếu M là một điểm tùy ý của β thì

$$d(A,M)^2 = (AH + HM)^2 = d(A,H)^2 + d(H,M)^2.$$

Do đó $\quad d(A,H) = \min d(A,M)$.

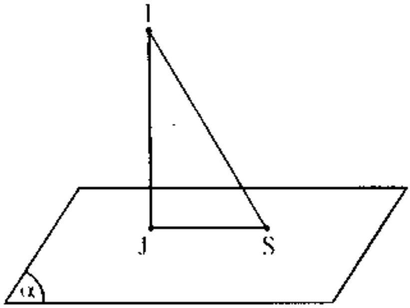
Mặt khác vì α song song với β nên đường thẳng d cũng trực giao với α và ta cũng có $d(H, \alpha) = \min d(H,A')$ với mọi $A' \neq A$.

Lí luận trên đây cũng đúng với mọi điểm $A \in \alpha$ và ta có :

$$d(\alpha,\beta) = d(A,H) = d(A, \beta) \text{ với mọi } A \in \alpha.$$

b) Nếu α và β chéo nhau hoàn toàn nghĩa là $\alpha \cap \beta = \varnothing$ và $\vec{\alpha} \cap \vec{\beta} = \vec{0}$ thì khi đó có một đường vuông góc chung AB duy nhất với $A \in \alpha$ và $B \in \beta$ và ta có $d(A,B) = d(\alpha,\beta)$.

2.38. Ta biết rằng m-phẳng α có phương là $\vec{\alpha}$ nhận m vectơ $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}\}$ làm cơ sở và J là hình chiếu vuông góc của I xuống α. Xét ma trận Gram được lập từ hệ vectơ : $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}, \vec{SI}\}$



Do $\vec{SI} = \vec{SJ} + \vec{JI}$ và $\vec{SJ}$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}\}$ mà $\vec{SJ} \in \vec{\alpha}$ nên $|G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}, \vec{SJ})| = 0$ (vì hệ vectơ $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}, \vec{SJ}\}$ phụ thuộc tuyến tính) và từ đẳng thức :

$$|G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}, \vec{SI})| = |G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}, \vec{SJ} + \vec{JI})|$$

ta suy ra :

$$|G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}, \vec{SI})| = 0 + |G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}, \vec{JI})|$$

$$= \vec{JI}^2 . |G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m})|$$

vì $\vec{JI} \perp \vec{u_i}$ với i = 1,2, ..., m.

Do đó ta có công thức :

$$d^2(I, \alpha) = \vec{JI}^2 = \frac{|G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m}, \vec{SI})|}{|G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_m})|}$$

2.39. Vì α và β là hai cái phẳng chéo nhau trong $\mathbf{E}^n$ nên ta có MN là đường vuông góc chung với $M \in \alpha$ và $N \in \beta$.

Khi đó d(M,N) = d(α,β).

Ta có $|G(\vec{MN}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_m})| = d^2(M,N)|G(\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_m})|$

vì $\vec{MN}.\vec{e_i} = 0$ với i = 1,2,...,m.

Mặt khác ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}$ trong đó $\overrightarrow{AM} \in \vec{\alpha}, \overrightarrow{NB} \in \vec{\beta}$

Do đó $d^2(\alpha,\beta) = d^2(M,N) = \dfrac{\left|G(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_m})\right|}{\left|G(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_m})\right|}$

2.40. Giả sử siêu phẳng α cho trước có phương trình tổng quát là :

$$u_1x_1 + u_2x_2 + ... + u_nx_n + u_o = 0$$

và M là một điểm thuộc tập hợp các điểm cách đều α cho trước một khoảng cách h cho trước. Giả sử M có tọa độ là $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Khi đó ta có :

$$|u_1x_1 + u_2x_2 + ... + u_nx_n + u_o| = h\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2} = p$$

hay $\quad u_1x_1 + u_2x_2 + ... + u_nx_n \pm p = 0.$

Vậy tập hợp đó là hai siêu phẳng song song với siêu phẳng α đã cho.

2.41. Trong không gian afin thực n chiều $\mathbf{A}^n$ với $n \geq 1$ cho hệ tọa độ afin $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ của $\mathbf{A}^n$. Ta có thể biến không gian $\mathbf{A}^n$ trở thành một không gian Ơclit n chiều mà hệ tọa độ đã cho trở thành hệ tọa độ trực chuẩn của không gian Ơclit bằng cách sau đây :

Với hai vectơ bất kì $\vec{x}, \vec{y}$ thuộc $\overrightarrow{\mathbf{A}^n}$ có các tọa độ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ là $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$

thì đặt $\vec{x}.\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$.

Khi đó không gian vectơ $\overrightarrow{\mathbf{A}^n}$ trở thành không gian vectơ Ơclit n chiều và cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ là cơ sở trực chuẩn. Như vậy ta đã biến không gian afin $\mathbf{A}^n$ thành không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$.

§6, §7, §8

2.42. a)Ta xét ma trận A của phép biến đổi :

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1$$

Đây là phép dời hình loại 1 vì detA = 1. Trong E^2 phép dời hình loại 1 chỉ có thể là phép tịnh tiến hoặc phép quay. Nếu đó là phép quay thì phép dời hình đó sẽ có một điểm kép duy nhất, còn nếu là phép tịnh tiến với vectơ $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì không có điểm kép. Ta lập phương trình tìm điểm kép:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1 \\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 = 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét : } \begin{vmatrix} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 2 - \sqrt{2} \neq 0$$

Phép dời hình này có một điểm kép duy nhất. Vậy đó là phép quay.Tâm quay $O(x_1, x_2)$ với $x_1 = \frac{1}{2}$ và $x_2 = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$.

Ta nhận thấy rằng đây là phép quay với góc quay $\varphi = 45°$ vì ta có $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45° = \cos 45°$.

b) Xét ma trận A của phép biến đổi :

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Đây là phép dời hình loại 2. Trong E^2 đó là phép đối xứng trục.

Ta thực hiện phép đổi mục tiêu :

$$\begin{cases} X_1' = x_1' + 3 \\ X_2' = x_2' \end{cases} \text{ và } \begin{cases} X_1 = x_1 + 3 \\ X_2 = x_2 \end{cases}$$

rồi thay vào phương trình phép dời hình ta có :

$$\begin{cases} X_1' - 3 = -X_1 + 3 - 6 \\ X_2' = X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1' = -X_1 \\ X_2' = X_2 \end{cases}$$

Đây là phép đối xứng qua trục $X_1 = 0$ tức là đường thẳng

$x_1 + 3 = 0.$

2.43. Áp dụng kết quả của bài 2.32 ta tìm được tọa độ của điểm E_o' đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ là :

$$E_o' = (\frac{2}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2}{n})$$

Ta có ma trận chuyển C của phép dời hình cần tìm chính là ma trận chuyển của phép biến đổi trực giao nền của phép dời hình đó. Ta có :

$$\overrightarrow{E_o'E_1} = \left(1 - \frac{2}{n}, -\frac{2}{n}, \ldots, -\frac{2}{n}\right)$$

$$\overrightarrow{E_o'E_2} = \left(-\frac{2}{n}, 1 - \frac{2}{n}, \ldots, -\frac{2}{n}\right)$$

.. ..

$$\overrightarrow{E_o'E_n} = \left(-\frac{2}{n}, -\frac{2}{n}, \ldots, 1 - \frac{2}{n}\right)$$

Trong trường hợp này ta có $C = C^*$. Ta suy ra phương trình phép đẳng cự (phép dời hình) f cần tìm là :

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ .. \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{2}{n} & -\frac{2}{n} & ... & -\frac{2}{n} \\ -\frac{2}{n} & 1-\frac{2}{n} & ... & -\frac{2}{n} \\ .. & .. & ... & .. \\ -\frac{2}{n} & -\frac{2}{n} & ... & 1-\frac{2}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{n} \\ \frac{2}{n} \\ .. \\ \frac{2}{n} \end{bmatrix}$$

2.44. Gọi t là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ của $\mathbf{E}^n$. Với A,B là hai điểm tùy ý của $\mathbf{E}^n$ ta có $A' = t(A)$, $B' = t(B)$. Theo định nghĩa ta có $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}, \overrightarrow{BB'} = \vec{v}$. Do đó ta suy ra :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B} = \vec{v} + \overrightarrow{A'B'} - \vec{v} = \overrightarrow{A'B'}.$$

Vậy $d(A,B) = d(A',B')$ và t là phép đẳng cự vì có tính chất bảo tồn khoảng cách của hai điểm bất kì trong $\mathbf{E}^n$. Phép tuyến tính $\vec{t}$ liên kết với phép tịnh tiến t là phép đồng nhất của $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$ vì với mọi vectơ $\overrightarrow{AB}$ ta có $\vec{t}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{t(A).t(B)} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Giả sử điểm M có tọa độ là (1,2,3,..., n) và giả sử $M' = t(M) = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$, ta có phương trình của phép tịnh tiến là :

$$x'_i = x_i + v_i \text{ với } i = 1, 2, ..., n.$$

Như vậy ma trận của phép tịnh tiến t là ma trận đơn vị, từ đó ta suy ra phép tịnh tiến là phép dời hình loại một.

2.45.a) Theo giả thiết ma trận của phép biến đổi f là ma trận A có dạng chéo có n−m số −1, số còn lại là 1. Vì vậy

$$\det A = (-1)^{n-m} = \pm 1.$$

Điều này chứng tỏ rằng f là một phép đẳng cự (phép dời hình)

b) Nếu n−m là một số chẵn tức là n và m cùng lẻ hoặc cùng chẵn thì phép biến đổi f là phép dời hình loại 1. Nếu n−m là một số lẻ thì f là phép dời hình loại 2.

c) Nếu m = n−1 thì ta có một (n−1)-phẳng (siêu phẳng) hoàn toàn bất động đối với f. Siêu phẳng này chứa hệ tọa độ

$\{O;\ \overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_{n-1}}\}$ còn vectơ $\overline{e_n}$ vuông góc với phương của siêu phẳng. Khi đó phép biến đổi f này là phép đối xứng qua một siêu phẳng.

2.46. Trong E^n với hệ tọa độ trực chuẩn đã chọn theo giả thiết siêu phẳng α có phương trình :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_o = 0 \text{ với } \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$$

Với một điểm M bất kì của E^n và giả sử M có tọa độ trực chuẩn là :

$$M = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

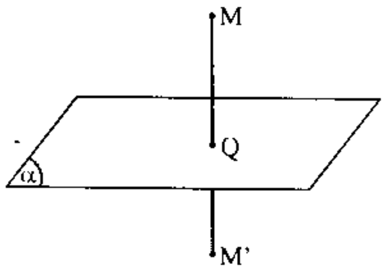
Có ảnh qua phép đối xứng qua siêu phẳng α là M' có tọa độ trực chuẩn

$$M' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$$

Lập phương trình của phép đối xứng nói trên là tìm biểu thức liên hệ giữa các tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ của M và M'.

Gọi d là đường thẳng MM'. Đường thẳng này nhận $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ là vectơ pháp tuyến của siêu phẳng α làm vectơ chỉ phương.

Gọi Q là giao điểm của d với siêu phẳng α và giả sử tọa độ của Q là $(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$



Ta có $\overrightarrow{MQ} = t\vec{a}$

$\Rightarrow x_i^o - x_i = ta_i$ với $i = 1, 2, ..., n.$

$\Leftrightarrow x_i^o = x_i + ta_i$ với $i = 1, 2, ..., n$

Tọa độ của điểm Q phải thỏa mãn phương trình của siêu phẳng α nên ta có:

$$a_1(x_1 + ta_1) + a_2(x_2 + ta_2) + ... + a_n(x_n + ta_n) + a_o = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)t + a_o = 0$$

$$\Leftrightarrow\ t_Q = -\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_o}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Như vậy điểm Q $\in \alpha$ ứng với giá trị tham số

$$t_Q = -(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_o)$$

vì theo giả thiết $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$.

Theo định nghĩa của phép đối xứng qua siêu phẳng α ta suy ra: $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MQ}$

Ta có $\overrightarrow{MQ} = t_Q.\vec{a} = -(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_o)\vec{a}$.

Do đó ta có biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua siêu phẳng α là :

$$x_i' - x_i = -2a_i(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_o),\ i = 1, 2, \dots, n.$$

hay $\boxed{x_i' = x_i - 2a_i(\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_o)}$ với i = 1, 2, ..., n.

Chú ý rằng khi viết công thức trên ta coi điểm M không thuộc siêu phẳng α. Nếu điểm M thuộc siêu phẳng α thì công thức trên vẫn đúng vì khi đó $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_o = 0$.

Công thức trên có thể viết gọn dưới dạng sau :

$$\boxed{x_i' = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + a_i} \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n$$

Trong đó $c_{ij} = -2a_ia_j$, $c_{ii} = 1 - 2a_i^2$

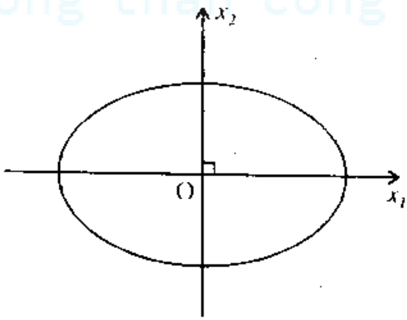
$$a_i = -2a_ia_o$$

Như vậy ma trận $A = [c_{ij}]$ của phép đối xứng qua siêu phẳng α là một ma trận đối xứng.

2.47. Elip có phương trình $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ với $a \neq b$ có hai trục đối xứng là Ox_1 và Ox_2. Do đó ta suy ra có hai phép đẳng cự biến elip thành chính nó :

1) Phương trình của phép đối xứng qua trục Ox_1 :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = -x_2 \end{cases}$$



2) Phương trình của phép đối xứng qua trục Ox_2 :

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$$

Các phép dời hình này đều là các phép dời hình loại 2.

2.48. Trong không gian Ơclit E^n ta biết rằng :

nhóm dời hình $\subset$ nhóm đồng dạng $\subset$ nhóm afin.

Do đó : hình học Ơclit $\supset$ hình học đồng dạng $\supset$ hình học afin. Vì vậy mỗi định lí của hình học afin cũng là một định lí của hình học đồng dạng và cũng là một định lí của hình học Ơclit nhưng điều ngược lại có thể không đúng. Hình học afin nghiên cứu những bất biến qua nhóm các phép biến đổi afin. Nếu một khái niệm bất biến qua phép biến đổi afin thì cũng bất biến qua phép đồng dạng vì phép biến đổi đồng dạng cũng là một phép biến đổi afin. Thí dụ giả sử có hai đường thẳng song song a và b và qua phép afin f ta có $a' = f(a)$, $b' = f(b)$, thì khi đó ta có a' song song với b'. Nếu gọi g là phép đồng dạng, ta có $a'' = g(a)$, $b'' = g(b)$ thì khi đó ta vẫn có $a'' // b''$. Ngược lại qua phép đồng dạng g mỗi tam giác đều ABC biến thành tam giác đều $A'B'C'$ nhưng đối với phép afin f thì mỗi tam giác đều ABC có thể biến thành tam giác ABC có thể không đều. Lập luận tương tự đối với mối quan hệ giữa hình học đồng dạng và hình học Ơclit.

2.49. Vì phép biến đổi đồng dạng là phép biến đổi afin bảo toàn góc nên mỗi phép biến đổi đồng dạng biến một đa giác lồi đều n cạnh thành một đa giác lồi đều n cạnh.

Phân loại đồng dạng hệ hình các đa giác lồi đều : mỗi loại gồm các đa giác đều lồi có cùng số cạnh, các cạnh tương ứng tỉ lệ, các góc tương ứng bằng nhau.

2.50. Trong E^2 đối với một tam giác :

–đường trung tuyến là khái niệm đồng dạng vì phép đồng dạng biến đường thẳng thành đường thẳng và bảo toàn trung điểm của một đoạn thẳng .

–đường cao là một khái niệm đồng dạng vì phép đồng dạng bảo toàn đường thẳng và bảo toàn góc.

–đường phân giác là một khái niệm đồng dạng vì phép đồng dạng bảo toàn đường thẳng và bảo toàn góc.

– đường trung trực là một khái niệm đồng dạng vì phép đồng dạng bảo toàn góc và bảo toàn trung điểm của một đoạn thẳng.

Trong các khái niệm trên chỉ có khái niệm đường trung tuyến là khái niệm afin vì phép afin bảo toàn đường thẳng và bảo toàn trung điểm của một đoạn thẳng (bảo toàn tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng).

2.51. Theo giả thiết ta sắp xếp các khái niệm như sau:

a) Các khái niệm của hình học afin: đường elip, đường hypebol, đường parabol, đường thẳng, sự chéo nhau của hai đường thẳng, hình bình hành, trọng tâm của một tam giác.

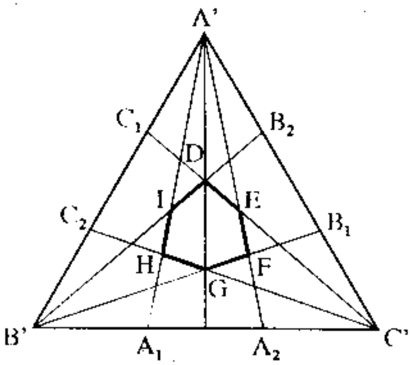
b) Các khái niệm của hình học đồng dạng :đường tròn, đường elip, đường hypebol, đường parabol, đường thẳng, sự chéo nhau của hai đường thẳng, hình vuông, hình bình hành, trọng tâm của một tam giác, khối tứ diện đều.

c) Các khái niệm của hình học Ơclit :đường tròn, đường elip, đường hypebol, đường parabol, đường thẳng, sự chéo nhau của hai đường thẳng, khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau, hình vuông, hình bình hành, trọng tâm của một tam giác, khối tứ diện đều.

2.52. Đây là một bài toán của hình học afin, do đó ta có thể chọn tam giác đều $A'B'C'$ làm hình tương đương afin với tam giác ABC đã cho. Theo giả thiết trên các cạnh $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ ta lần lượt có các điểm chia là A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_1, C_2 sao cho :

$$B'A_1 = A_1A_2 = A_2C' = C'B_1 = B_1B_2 = B_2A' = A'C_1 = C_1C_2 = C_2B'.$$

Ta có lục giác DEFGHI (xem hình vẽ). Cần chứng minh các điểm D, G nằm trên đường trung trực của đoạn $B'C'$ và tất nhiên đường trung trực này đi qua đỉnh A'.



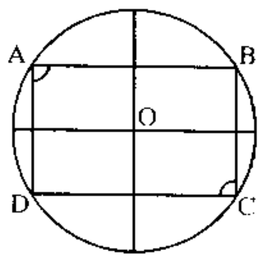
Hai tam giác $B'C'C_2$ và $C'B'B_1$ bằng nhau vì có $B'C'$ chung, $\widehat{B'} = \widehat{C'} = 60^\circ$ và $B'C_2 = C'B_1$ (c,g,c).

Do đó $\widehat{B_1B'C'} = \widehat{C_2C'B'}$. Ta suy ra tam giác $GB'C'$ cân tại G nên đỉnh G thuộc đường trung trực của đoạn $B'C'$.

Hai tam giác $B'C'B_2$ và $C'B'C_1$ bằng nhau vì có $B'C'$ chung, $\widehat{B'} = \widehat{C'} = 60^\circ$ và $B'C_1 = C'B_2$ (c,g,c).Ta suy ra tam giác $DB'C'$ cân tại D vì $\widehat{B_2B'C'} = \widehat{C_1C'B'}$. Vậy điểm D thuộc đường trung trực của đoạn $B'C'$.

Tương tự ta chứng minh được hai đỉnh E, H thuộc đường trung trực của đoạn $A'C'$ và hai đỉnh F, I thuộc đường trung trực của đoạn $A'B'$. Trong tam giác đều $A'B'C'$ các đường trung trực này đồng quy, do đó các đường chéo của hình lục giác DEFGHI đồng quy tại một điểm. Tính chất đồng quy này vẫn đúng trên tam giác ABC bất kì tương đương afin với tam giác đều ABC.

2.53. Ta chọn một hình tròn làm hình tương đương afin với elip. Khi đó ta cần chứng minh rằng hình bình hành nội tiếp đường tròn là một hình chữ nhật. Thực vậy giả sử ta có hình bình hành ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O (xem hình vẽ). Ta có :



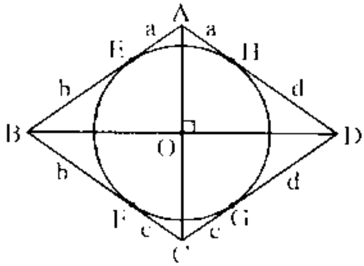
$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$$

vì hai góc nội tiếp này chắn toàn bộ đường tròn. Mặt khác $\widehat{A} = \widehat{C}$ vì đó là hai góc đối diện của một hình bình hành. Vậy $\hat{A} = \hat{C} = 90^o$ và ABCD là một hình chữ nhật. Khi đó các đường chéo AC, BD của hình chữ nhật là các đường kính của đường tròn. Vậy tâm của hình chữ nhật trùng với tâm của đường tròn. Bây giờ qua tâm đường tròn ta vẽ các đường kính lần lượt song song với các cạnh của hình chữ nhật thì các đường kính này vuông góc với nhau. Đó là các đường kính liên hợp của đường tròn (vì đường kính này là tập hợp trung điểm các dây cung song song với đường kính kia).

Nếu ta dùng phép afin thích hợp biến đường tròn thành elip đã cho thì hình chữ nhật nội tiếp đường tròn sẽ biến thành hình bình hành nội tiếp elip. Khi đó tâm của hình bình hành trùng với tâm của elip, còn các cạnh của hình bình hành thì song song với hai đường kính liên hợp của elip.

2.54. Ta chọn một đường tròn làm hình tương đương afin với elip. Khi đó ta chứng minh được hình bình hành có các cạnh tiếp xúc với đường tròn là một hình thoi (dùng tính chất bằng nhau của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm ở ngoài tới đường tròn (*)). Hình thoi này có tâm trùng với tâm của đường tròn. Các đường chéo của hình thoi chính là hai đường kính vuông góc của đường tròn. Do đó khi ta thực hiện phép afin biến đường tròn thành elip thì hình thoi biến thành hình bình hành có cạnh tiếp xúc với elip. Khi đó hai đường chéo của hình bình hành biến thành hai đường kính liên hợp của elip.

(*)Chú thích: Giả sử hình bình hành ABCD có các cạnh AB, BC, CD, DA tiếp xúc với đường tròn tại E, F, G, H (xem hình vẽ).



Ta có AE = AH = a, BE = BF = b,

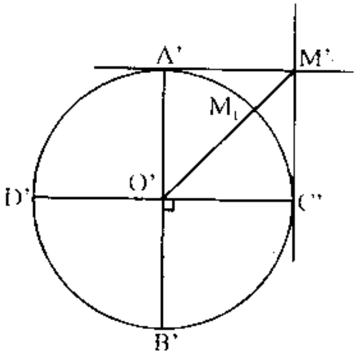
CF = CG = c, DH = DG = d.

$$\left.\begin{aligned} AB = CD &\Rightarrow a + b = c + d \\ AD = BC &\Rightarrow a + d = b + c \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow 2a + b + d = 2c + b + d$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a = c \\ b = d \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB = BC = CD = DA.$$

2.55. Ta chọn đường tròn tâm O' làm hình tương đương afin với elip. Khi đó cặp đường kính liên hợp AB, CD của elip trở thành cặp đường kính A'B', C'D' vuông góc của đường tròn tâm O' (xem hình vẽ). Ta dễ dàng chứng minh được giao điểm M' của hai tiếp tuyến tại A' và C' luôn luôn cách đều tâm O' của đường tròn. Khi AB và CD thay đổi trên elip thì A'B' và C'D' thay đổi trên đường tròn. Ta chứng minh được quỹ tích các điểm M' là đường tròn tâm O' có bán kính $O'M' = O'A'\sqrt{2}$. Gọi M'_1 là giao điểm của O'M' với đường tròn tâm O'. Ta có :

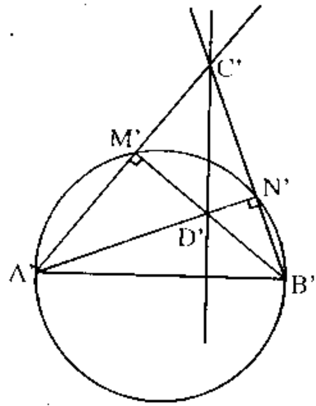


$$(O'M'M'_1) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{O'M'} = \sqrt{2}\,\overline{O'M'_1}$$

Vậy khi ta thực hiện phép afin biến đường tròn thành elip đã cho thì đường tròn tâm O' bán kính O'M' sẽ biến thành elip vị tự với elip đã cho trong phép vị tự tâm O với tỉ số vị tự $k = \sqrt{2}$ (vì phép afin bảo tồn tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng).

2.56. Ta chọn đường tròn đường kính A'B' làm hình tương đương afin với elip cho trước. Trên một nửa cung tròn ta lấy hai điểm M', N'. Gọi $C' = A'M' \cap B'N'$, $D' = A'N' \cap B'M'$.

Xét tam giác A'B'C' ta có A'N' và B'M' là hai đường cao và D' là trực tâm của tam giác A'B'C'. Vậy C'D' là đường cao xuất phát từ đỉnh C' và vuông góc với A'B'. Vậy C'D' là phương của đường thẳng liên hợp với phương của đường kính A'B'.



Vậy khi ta thực hiện phép afin biến đường tròn đường kính A'B' thành elip có đường kính AB, các điểm M', N' lần lượt biến thành các điểm M, N trên nửa cung elip. Khi đó các điểm C', D' lần lượt biến thành C và D. Ta suy ra phương của đường thẳng CD là phương liên hợp với phương của đường kính AB.

2.57. Giả sử f là một phép đồng dạng của $\mathbf{E}^n$ thì khi đó f cũng là một phép biến đổi afin có ánh xạ tuyến tính liên kết với nó là phép biến đổi tuyến tính φ của không gian vectơ Ơclit $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$.

Giả sử $(\widehat{\vec{x},\vec{y}})$ là góc giữa hai đường thẳng và ta có ảnh của góc đó qua phép biến đổi tuyến tính φ là $(\widehat{\varphi(\vec{x}),\varphi(\vec{y})})$. Ta có

$$\cos(\widehat{\varphi(\vec{x}),\varphi(\vec{y})}) = \frac{\varphi(\vec{x}).\varphi(\vec{y})}{|\varphi(\vec{x})|.|\varphi(\vec{y})|} = \frac{k^2\vec{x}.\vec{y}}{k|\vec{x}|.k|\vec{y}|}$$

$$= \frac{\vec{x}.\vec{y}}{|\vec{x}|.|\vec{y}|} = \cos(\widehat{\vec{x},\vec{y}})$$

Từ đó ta suy ra phép đồng dạng f bảo toàn góc :

– giữa hai siêu phẳng (xét góc giữa hai vectơ pháp tuyến)

– giữa đường thẳng và siêu phẳng (xét góc giữa vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ pháp tuyến của siêu phẳng).

Nếu hai cái phẳng vuông góc với nhau thì mọi vectơ thuộc phương của cái phẳng này sẽ vuông góc với mọi vectơ thuộc phương của cái phẳng kia. Vì phép đồng dạng bảo toàn góc của hai vectơ nên bảo toàn sự vuông góc của hai cái phẳng bất kì.

2.58. Ta cần chứng minh rằng hai hệ vectơ $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ và $\{\vec{a'},\vec{b'},\vec{c'}\}$ là độc lập tuyến tính. Ta hãy xét các định thức :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -56 \neq 0$$

Vậy mỗi hệ $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ và $\{\vec{a'},\vec{b'},\vec{c'}\}$ là một cơ sở của $\mathbf{V}^3_{\mathbf{E}}$. Hai cơ sở này xác định một phép biến đổi tuyến tính φ sao cho

$\varphi(\vec{a}) = \vec{a'}, \varphi(\vec{b}) = \vec{b'}, \varphi(\vec{c}) = \vec{c'}$. Giả sử $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ là cơ sở trực chuẩn đã cho của $\mathbf{V}_E^3$. Gọi $\varphi(\vec{e_i}) = \vec{e_i'}$ với i = 1,2,3.

Theo giả thiết :

$$\vec{a} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} \Rightarrow \varphi(\vec{a}) = \varphi(\vec{e_1}) - 2\varphi(\vec{e_2}) = -2\vec{e_1} - 4\vec{e_2}$$

$$\vec{b} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2} \Rightarrow \varphi(\vec{b}) = 3\varphi(\vec{e_1}) + \varphi(\vec{e_2}) = -6\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$$

$$\vec{c} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3} \Rightarrow \varphi(\vec{c}) = 3\varphi(\vec{e_1}) + \varphi(\vec{e_2}) + \varphi(\vec{e_3})$$

$$= -6\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$$

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \vec{e_1'} + 2\vec{e_2'} = -2\vec{e_1} - 4\vec{e_2} \\ 3\vec{e_1'} + \vec{e_2'} = -6\vec{e_1} + 2\vec{e_2} \\ 3\vec{e_1'} + \vec{e_2'} + \vec{e_3'} = -6\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 2\vec{e_3} \end{cases}$$

Giải ra ta được :

$$\begin{cases} \vec{e_1'} = -2\vec{e_1} \\ \vec{e_2'} = 2\vec{e_2} \\ \vec{e_3'} = 2\vec{e_3} \end{cases} \Rightarrow \text{ma trận } C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vậy phép biến đổi tuyến tính φ có phương trình là :

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Như vậy ta có thể phân tích phép biến đổi tuyến tính φ thành tích g.h trong đó g là phép vị tự tỉ số k = 2 và h là phép biến đổi tuyến tính trực giao (là phép đối xứng qua siêu phẳng $x_1 = 0$). Vậy đối với cơ sở $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ phép biến đổi tuyến tính φ có dạng :

$$[x'] = kA[x]$$

trong đó A là ma trận trực giao dạng chính tắc.

Vậy phép biến đổi đồng dạng φ sinh ra phép afin liên kết tương ứng là phép biến đổi đồng dạng tỉ số là 2 đối với cơ sở trực chuẩn đã cho.

2.59. Trong $\mathbf{E}^n$, phép vị tự tâm S tỉ số k là một phép biến hình biến mỗi điểm $M \in \mathbf{E}^n$ thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{SM'} = k\overrightarrow{SM}$. Với $k > 0$ ta có phép vị tự thuận, với $k < 0$ ta có phép vị tự nghịch. Giả sử ta có một điểm $N \in \mathbf{E}^n$ qua phép vị tự tâm S tỉ số k nói trên biến thành điểm N'. Ta có $\overrightarrow{SN'} = k\overrightarrow{SN}$.

Từ đó ta suy ra $|\overrightarrow{M'N'}| = |k|\,|\overrightarrow{MN}|$.

Vậy phép vị tự tâm S tỉ số k là một phép đồng dạng của $\mathbf{E}^n$ với tỉ số $|k|$

2.60.Phép đồng dạng f tỉ số k trong $\mathbf{E}^2$ biến mục tiêu trực chuẩn $\{E_o;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$ thành mục tiêu trực giao $\{E_o';\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}\}$ với $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1'}})$ có tính chất: $|\overrightarrow{e_1'}| = |\overrightarrow{e_2'}| = k$ và $\overrightarrow{e_1'} \perp \overrightarrow{e_2'}$.

Theo giả thiết $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1'}})$ ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1'} = k(\overrightarrow{e_1}\cos\alpha + \overrightarrow{e_2}\sin\alpha) \\ \overrightarrow{e_2'} = k\varepsilon(-\overrightarrow{e_1}\sin\alpha + \overrightarrow{e_2}\cos\alpha) \end{cases} \quad \text{với } \varepsilon = 1 \text{ hoặc } \varepsilon = -1.$$

Ta có ma trận của phép đồng dạng cần tìm là A :

$$A = \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\varepsilon\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\varepsilon\cos\alpha \end{pmatrix} \text{ với } \varepsilon = 1 \text{ hoặc } \varepsilon = -1.$$

Giả sử (x_o,y_o) là tọa độ của điểm E_o' đối với mục tiêu $\{E_o;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$ ta có phương trình của phép đồng dạng f là :

$$\begin{cases} x_1' = k\cos\alpha x_1 - k\varepsilon\sin\alpha x_2 + x_o \\ x_2' = k\sin\alpha x_1 + k\varepsilon\cos\alpha x_2 + y_o \end{cases} \text{ với } \varepsilon = 1 \text{ hoặc } \varepsilon = -1.$$

2.61. Dựa vào kết quả của bài 2.60 ta lập phương trình tìm điểm kép của phép đồng dạng f mà không phải là phép đẳng cự :

$$\begin{cases} x_1 = k\cos\alpha x_1 - k\varepsilon\sin\alpha x_2 + x_o \\ x_2 = k\sin\alpha x_1 + k\varepsilon\cos\alpha x_2 + y_o \end{cases} \text{ với } \varepsilon = 1 \text{ hoặc } \varepsilon = -1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-k\cos\alpha)x_1 + (\varepsilon k\sin\alpha)x_2 = x_o \\ -(k\sin\alpha)x_1 + (1-\varepsilon k\cos\alpha)x_2 = y_o \end{cases}$$

Gọi $D = \begin{vmatrix} 1-k\cos\alpha & \varepsilon k\sin\alpha \\ -k\sin\alpha & 1-\varepsilon k\cos\alpha \end{vmatrix}$

$= 1 + \varepsilon k^2 - (1+\varepsilon)k\cos\alpha.$

Theo giả thiết phép đồng dạng f đã cho không phải là phép đẳng cự tức $k \neq 1$ ta suy ra $D \neq 0$. Thực vậy :

Giả sử $D = 0$ và $\varepsilon = 1$ ta có $\cos\alpha = \dfrac{1+k^2}{2k} \leq 1 \Leftrightarrow (1-k)^2 \leq 0$

$\Rightarrow k = 1$ là trái với giả thiết.

Vậy $D \neq 0$ nên phương trình trên có nghiệm duy nhất và đó là điểm kép của phép đồng dạng.

Nếu $\varepsilon = -1 \Rightarrow D = 1 - k^2 \neq 0$ vì $0 < k \neq 1$.

Vậy phương trình trên cũng cho ta nghiệm duy nhất.

Kết luận lại, trong cả hai trường hợp vừa xét, nếu một phép đồng dạng mà không phải là phép đẳng cự đều có một điểm kép duy nhất.

2.62. Ta hãy xét định thức của ma trận phép biến đổi f đã cho :

Ta có: $\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 65 \neq \pm 1.$

Vậy f là một phép afin nhưng không phải là một phép dời hình (phép đẳng cự). Ta hãy xét xem f có phải là phép đồng dạng hay không. Áp dụng kết quả ở bài 2.60 ta có :

$$\left.\begin{aligned} k\cos\alpha &= 8 \\ -k\varepsilon\sin\alpha &= -1 \\ k\sin\alpha &= 1 \\ k\varepsilon\cos\alpha &= 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{8}{k} \\ \varepsilon = 1 \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{k} \end{cases}$$

Do đó $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \dfrac{8^2}{k^2} + \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{65}{k^2} = 1 \Rightarrow k = \sqrt{65}$.

Vậy f là phép đồng dạng có tỉ số $k = \sqrt{65}$.

§9, §10

2.63. *a) Cách thứ 1:*

Giả sử trong $\mathbf{E}^n$ $n + 1$ điểm $A_o, A_1, A_2, ..., A_n$ độc lập có tọa độ trực chuẩn là : $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ với $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Ta biết tâm của siêu cầu là một điểm $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ mà :

$$d(A_i, X) = R \text{ không đổi với } i = 0, 1, 2, ..., n.$$

hay là $d(A_o, X) = d(A_1, X) = ... = d(A_n, X)$.

Ta có hệ n phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_{oi})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_{1i})^2} \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_{oi})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_{2i})^2} \\ \quad ... \qquad\qquad ... \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_{oi})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_{ni})^2} \end{cases}$$

Ta suy ra :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}2(a_{1i} - a_{oi})x_i + \sum_{i=1}^{n}a_{oi}^2 - \sum_{i=1}^{n}a_{1i}^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}2(a_{2i} - a_{oi})x_i + \sum_{i=1}^{n}a_{oi}^2 - \sum_{i=1}^{n}a_{2i}^2 = 0 \\ \quad ... \qquad\qquad ... \qquad ... \\ \sum_{i=1}^{n}2(a_{ni} - a_{oi})x_i + \sum_{i=1}^{n}a_{oi}^2 - \sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2 = 0 \end{cases}$$

Điều kiện cần và đủ để hệ n phương trình trên có nghiệm duy nhất là :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-a_{01} & a_{12}-a_{02} & \dots & a_{1n}-a_{0n} \\ a_{21}-a_{01} & a_{22}-a_{02} & \dots & a_{2n}-a_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-a_{01} & a_{n2}-a_{02} & \dots & a_{nn}-a_{0n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Đây là định thức tọa độ của n vectơ $\overrightarrow{A_oA_1}, \overrightarrow{A_oA_2}, \dots, \overrightarrow{A_oA_n}$. Vì n vectơ đó độc lập tuyến tính nên định thức trên luôn luôn khác 0. Do đó hệ phương trình trên luôn luôn có một nghiệm duy nhất là tọa độ của tâm siêu cầu.

b) Cách thứ 2:

Ta có thể xem tâm $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của siêu cầu thuộc các siêu phẳng trung trực của các đoạn thẳng A_oA_1, A_oA_2, ..., A_oA_n và áp dụng kết quả bài 2.29 a) ta lập được hệ n phương trình sau đây :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(a_{1i}-a_{0i})x_i + b_1 = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(a_{2i}-a_{0i})x_i + b_2 = 0 \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \sum_{i=1}^{n}(a_{ni}-a_{0i})x_i + b_n = 0 \end{cases}$$

Ta cũng lí luận tương tự như ở phần trên và tìm được tâm của siêu cầu.

2.64. Trong $\mathbf{E}^3$ chuyển phương trình mặt cầu về dạng tổng quát, ta dễ dàng tìm được tâm và bán kính mặt cầu :

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \Rightarrow$ Tâm I(a,b,c), bán kính R.

Đáp số . a) Tâm $I = (6, -2, 3)$, $R = 7$

b) Tâm $I' = (0,0,3)$, $R = 4$.

2.65. Ta lập được phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$, $D(d_1,d_2,d_3)$ không đồng phẳng là :

$$\begin{vmatrix} x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2 & b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1^2+c_2^2+c_3^2 & c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1^2+d_2^2+d_3^2 & d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.66.Ta xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_n = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$

Siêu cầu và siêu phẳng có giao thỏa mãn phương trình :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 + a_n^2 - R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 - (R^2 - a_n^2) = 0$$

Đây là siêu cầu của không gian Ơclit n−1 chiều. Siêu cầu này nằm trong siêu phẳng $x_n = 0$ đã cho. Siêu cầu này có tâm $O = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ và có bán kính $r = \sqrt{R^2 - a_n^2}$.

Nếu $a_n < R$: siêu phẳng cắt siêu cầu đã cho.
$a_n = R$: siêu phẳng tiếp xúc với siêu cầu đã cho.
$a_n > R$: siêu phẳng không cắt siêu cầu đã cho.

CHÚ Ý . Ta có thể nhận xét a_n chính là khoảng cách từ tâm siêu cầu đã cho tới siêu phẳng đã cho.

2.67. Giả sử đối với mục tiêu trực chuẩn cho trước trong $\mathbf{E}^n$, các điểm A,B,C lần lượt có tọa độ là (a_i), (b_i), (c_i). Gọi M là điểm có tọa độ (x_i) thỏa mãn điều kiện :

$$d^2(M,A) + d^2(M,B) = d^2(M,C).$$

Ta suy ra :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - b_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - c_i)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i + c_i)x_i + \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) = 0$$

Ta có thể nhận xét đây là phương trình của siêu cầu trong $\mathbf{E}^n$ vì trong phương trình đó có các đặc điểm :

–Hệ số của các số hạng chứa x_i^2 đều bằng nhau và khác 0.

–Vắng mặt các số hạng chữ nhật (chứa $x_i x_j$ với $i \neq j$).

Mặt khác ta có thể biến đổi phương trình trên để xác định tâm và bán kính của siêu cầu. Ta có :

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i - (a_i + b_i - c_i)]^2 + \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2 - c_i^2) - \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i - c_i)^2 = 0.$$

Siêu cầu này có tâm $O = (a_i + b_i - c_i)$ với $i = 1, 2, ..., n$.

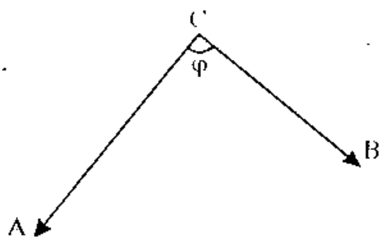
và bán kính R được xác định bởi hệ thức :

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i - c_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2 - c_i^2)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}(c_i^2 + a_i b_i - a_i c_i - b_i c_i)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}[(a_i - c_i)(b_i - c_i)]$$

$$= 2\,\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}.$$



Biện luận. Gọi $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ ta có :

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|}$$

– Nếu $\cos\varphi > 0$, tức là $\varphi < \frac{\pi}{2}$ ta có siêu cầu thực bán kính

$R = \sqrt{2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}$.

– Nếu $\cos\varphi = 0$ tức là $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (khi đó ba điểm A,B,C thẳng hàng) ta có siêu cầu điểm.

– Nếu $\cos\varphi < 0$ tức là $\varphi > \frac{\pi}{2}$ ta có siêu cầu ảo bán kính $i\sqrt{|2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}|}$.

2.68. Hệ n+1 điểm $\{E_o, A_1, A_2, ..., A_n\}$ độc lập vì n vectơ $\{\overrightarrow{E_oA_i}\}$, i = 1, 2, ..., n độc lập tuyến tính. Vậy có một siêu cầu duy nhất (S) đi qua các điểm đó theo bài 2.63. Phương trình tổng quát của siêu cầu này có dạng :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} m_i x_i + n = 0.$$

Điểm $E_o(0,0,...,0)$ thuộc (S) nên ta suy ra n = 0.

Các điểm $A_i(0,0,..., a_i, ..., 0)$ thuộc (S) nên ta có:

$$a_i^2 + 2m_ia_i = 0$$

Do đó $m_i = -\frac{a_i}{2}$ với i = 1,2,..., n.

Vậy siêu cầu (S) có phương trình :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

hay $$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \frac{a_i}{2})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{4}$$

Vậy siêu cầu (S) có tâm $O = (\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, ..., \frac{a_n}{2})$ và có bán kính

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

2.69. Gọi f là phép afin biến siêu cầu (S) tâm O bán kính R thành siêu cầu (S') tâm O' bán kính R'. Với mọi điểm M, N của $\mathbf{E}^n$ ta có $M' = f(M)$, $N' = f(N)$.

Theo tiên đề thứ nhất i) của không gian afin với vectơ $\overrightarrow{MN}$ cho trước ta có một điểm C thuộc $\mathbf{E}^n$ sao cho $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{MN}$. Gọi φ là ánh xạ nền của f ta có :

$$\varphi(\overrightarrow{MN}) = \varphi(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{O'C'} \text{ với } O' = f(O) \text{ và } C' = f(C).$$

Gọi A là giao điểm của đường thẳng OC với (S) và giả sử $\overrightarrow{OC} = h.\overrightarrow{OA}$. Vì phép afin bảo tồn tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng nên ta có $\overrightarrow{O'C'} = h.\overrightarrow{O'A'}$. Vì $A \in (S)$ nên $A' \in f(A) \in (S')$. Vậy $R' = |\overrightarrow{O'A'}|$ và do đó : $|\overrightarrow{O'C'}| = hR'$. Ta có :

$$d(M',N') = |\varphi(\overrightarrow{MN})| = |\overrightarrow{O'C'}| = hR'$$

$$d(M,N) = |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{OC}| = hR$$

Ta suy ra $d(M', N') = \dfrac{R'}{R}d(M, N)$.

Vậy f là phép đồng dạng tỉ số $k = \dfrac{R'}{R}$.

2.70. Trong $\mathbf{E}^3$ ma trận A của mặt bậc hai (S) đối với mục tiêu đã cho là :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của nó là:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2})^2$$

Ta tìm được hai giá trị riêng là $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$, tọa độ của vectơ riêng thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{vectơ riêng } \overrightarrow{u_1} = (1,1,1) \Rightarrow \overrightarrow{i_1} = \frac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|}.$$

Gọi $\overrightarrow{i_1}$ là vectơ riêng đơn vị ta có $\overrightarrow{i_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, tọa độ của vectơ riêng thỏa mãn phương trình :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Ta lấy hai vectơ riêng trực giao với nhau là $\overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{u_3}$ với :

$$\overrightarrow{u_2} = (1, -1, 0) \text{ và } \overrightarrow{u_3} = (1, 1, -2).$$

Chuẩn hóa chúng thành hai vectơ đơn vị $\overrightarrow{i_2}$ và $\overrightarrow{i_3}$ với

$$\overrightarrow{i_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ và } \overrightarrow{i_3} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Vậy ma trận chuyển cơ sở là ma trận C :

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Ta dùng phép biến đổi mục tiêu trực chuẩn với phương trình :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_3' \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_3' \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1' \qquad\qquad - \dfrac{2}{\sqrt{6}}x_3' \end{cases}$$

Đối với mục tiêu mới mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$x_1'^2 - \frac{1}{2}x_2'^2 - \frac{1}{2}x_3'^2 + \frac{3px_1'}{\sqrt{3}} + q = 0$$

• Nếu $p = q = 0$ thì phương trình trên trở nên :

$$x_1'^2 - \frac{1}{2}x_2'^2 - \frac{1}{2}x_3'^2 = 0$$

khi đó (S) là mặt nón tròn xoay.

• Nếu $p = 0$, $q \neq 0$ thì phương trình của (S) là :

$$-\frac{x_1'^2}{q} + \frac{x_2'^2}{2q} + \frac{x_3'^2}{2q} = 1$$

Đây là mặt hypeboloit tròn xoay một tầng hay hai tầng tùy theo $q > 0$ hay $q < 0$.

• Nếu $p \neq 0$ ta đặt :

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' + p\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x_2'' = x_2' \\ x_3'' = x_3' \end{cases}$$

Khi đó (S) có phương trình trong mục tiêu trực chuẩn mới là :

$$x_1''^2 - \frac{1}{2}x_2''^2 - \frac{1}{2}x_3''^2 + \frac{4q - 3p^2}{4} = 0$$

ta được (S) là mặt nón, hoặc hypeboloit một tầng, hoặc hypeboloit hai tầng.

CHƯƠNG III

KHÔNG GIAN XẠ ẢNH VÀ HÌNH HỌC XẠ ẢNH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

§1. KHÔNG GIAN XẠ ẢNH

1. Định nghĩa

Giả sử $\mathbf{V}^{n+1}$ là không gian vectơ n+1 chiều ($n \geq 0$) trên trường **K** và **X** là một tập hợp không rỗng tùy ý. Ta kí hiệu $P(\mathbf{V}^{n+1})$ là tập hợp tất cả các không gian con một chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$ nghĩa là mỗi phần tử của $P(\mathbf{V}^{n+1})$ là một không gian con $\mathbf{V}^1$ của $\mathbf{V}^{n+1}$. Nếu có song ánh

$$\pi : P(\mathbf{V}^{n+1}) \to \mathbf{X}$$

thì bộ ba ($\mathbf{X}$, π, $\mathbf{V}^{n+1}$) được gọi là một *không gian xạ ảnh n chiều liên kết với không gian vectơ* $\mathbf{V}^{n+1}$ trên trường **K** và được kí hiệu là $\mathbf{P}^n$.

Ta có $\mathbf{P}^n = (\mathbf{X}, \pi, \mathbf{V}^{n+1})$

Tùy theo $\mathbf{V}^{n+1}$ là không gian vectơ thực hay phức, ta được không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ *thực* hay *phức*. Trong giáo trình này chủ yếu được trình bày về không gian xạ ảnh thực.

2. Các mô hình của không gian xạ ảnh

a) Mô hình vectơ. Ta lấy **X** là chính tập hợp $P(\mathbf{V}^{n+1})$ và song ánh π là phép đồng nhất: $\pi: P(\mathbf{V}^{n+1}) \to P(\mathbf{V}^{n+1})$

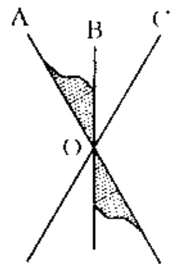
Điểm của không gian xạ ảnh $[P(\mathbf{V}^{n+1}), \pi, \mathbf{V}^{n+1}] = \mathbf{X}$ là các không gian vectơ con một chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$. Tập hợp các không gian con một chiều thuộc một không gian con m+1 chiều nào đó là một m–phẳng của không gian xạ ảnh này.

b) Mô hình số học. Ta hãy xét một bộ số thực có thứ tự gồm n+1 số $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ trong đó có ít nhất là một số khác 0. Hai bộ số thực $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ và $(y_1, y_2, ..., y_{n+1})$ như vậy sẽ gọi là tương đương khi và chỉ khi có một số thực $\lambda \neq 0$ sao cho $x_i = \lambda y_i$ với $i=1,2,...,n+1$. Tập hợp các bộ số thực nói trên sẽ được phân thành các lớp tương đương. Ta gọi **K** là tập hợp tất cả các lớp tương đương đó. Bây giờ gọi $\mathbf{V}^{n+1}$ là một không gian vectơ nào đó và trên đó đã có một cơ sở được chọn. Ta hãy xét song ánh π như sau:

$$\pi : P(\mathbf{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbf{K}$$

Giả sử $\mathbf{V}^1$ là một không gian con một chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$. Ta chọn trên $\mathbf{V}^1$ một vectơ $\vec{x} \neq \vec{0}$ và gọi $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ là toạ độ của vectơ $\vec{x}$ đối với cơ sở đã chọn. Qua song ánh π, mỗi không gian con $\mathbf{V}^1$ ta đặt tương ứng với một lớp tương đương các bộ số thực mà phần tử đại diện là $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$. Như vậy $(\mathbf{K}, \pi, \mathbf{V}^{n+1})$ là một mô hình của không gian xạ ảnh n chiều và được gọi là mô hình số học của $\mathbf{P}^n$.

c) Mô hình bó. Trong không gian afin $\mathbf{A}^{n+1}$ xây dựng trên không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ ta lấy một điểm O tùy ý. Gọi **X** là tập hợp tất cả các đường thẳng của $\mathbf{A}^{n+1}$ cùng đi qua điểm O, và một tập hợp **X** như vậy được gọi là *bó đường thẳng tâm O*. Nếu $\mathbf{V}^1$ là không gian con một chiều thuộc $\mathbf{V}^{n+1}$ thì ta có $\pi(\mathbf{V}^1)$ là đường thẳng có phương $\mathbf{V}^1$.



Ta có song ánh π:

$$\pi = P(\mathbf{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbf{X}$$

Do đó: $(\mathbf{X}, \pi, \mathbf{V}^{n+1})$ là một mô hình của không gian xạ ảnh n chiều. Mỗi đường thẳng của bó biểu thị một "*điểm xạ ảnh*". Hai đường thẳng phân biệt của bó tạo nên một mặt phẳng afin đi qua

O biểu thị cho một "*đường thẳng xạ ảnh*".

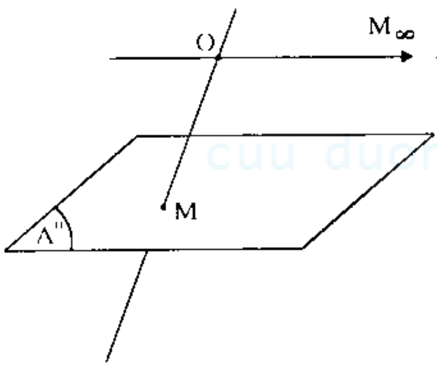
d) Mô hình afin sau khi bổ sung các phần tử vô tận. Gọi $\mathbf{A}^{n+1}$ là một không gian afin n+1 chiều liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ và $\mathbf{A}^n$ là một siêu phẳng của $\mathbf{A}^{n+1}$ có phương là không gian vectơ con $\mathbf{V}^n \subset \mathbf{V}^{n+1}$.

Ta hãy xét tập hợp:

$$\tilde{\mathbf{A}}^n = \mathbf{A}^n \cup P(\mathbf{V}^n)$$

và xây dựng song ánh $\pi : P(\mathbf{V}^{n+1}) \to \tilde{\mathbf{A}}^n$ như sau:

Lấy một điểm cố định O của $\mathbf{A}^{n+1}$ không nằm trên $\mathbf{A}^n$. Giả sử $\mathbf{V}^1$ là không gian con một chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$.



–Nếu $\mathbf{V}^1 \not\subset \mathbf{V}^n$ thì trên $\mathbf{A}^n$ có một điểm M duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} \in \mathbf{V}^1$.

Trong trường hợp này ta đặt $\pi(\mathbf{V}^1) = M$.

– Nếu $\mathbf{V}^1 \subset \mathbf{V}^n$ thì đặt $\pi(\mathbf{V}^1) = M_\infty$. Có thể hiểu rằng điểm $\pi(\mathbf{V}^1)$ là điểm gặp nhau của những đường thẳng song song với nhau trong $\mathbf{A}^n$ có cùng phương $\mathbf{V}^1$ và ta thường gọi đó là *điểm vô tận* của các đường thẳng song song đó.

Ta dễ dàng chứng minh được π là một song ánh vì mỗi đường thẳng của bó tâm O trong không gian afin $\mathbf{A}^{n+1}$ có tương ứng 1–1 với một điểm của $\tilde{\mathbf{A}}^n$. Như vậy ta có một không gian xạ ảnh n chiều $(\tilde{\mathbf{A}}^n, \pi, \mathbf{V}^{n+1})$ và gọi đó là *mô hình afin có bổ sung thêm các phần tử vô tận*.

§2. TỌA ĐỘ XẠ ẢNH VÀ MỤC TIÊU XẠ ẢNH

1. Vectơ đại diện cho một điểm

Gọi $\mathbf{P}^n$ là không gian xạ ảnh liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ qua song ánh π. Trong $\mathbf{V}^{n+1}$ mỗi vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ sẽ sinh ra một không gian con một chiều và qua song ánh π không gian này sẽ ứng với một điểm A duy nhất của $\mathbf{P}^n$. Ta nói rằng *vectơ $\vec{a}$ đại diện cho điểm A*. Ta suy ra hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng đại diện cho một điểm A khi và chỉ khi $\vec{a} = k\vec{b}$ với k là một số thực khác 0. Như vậy $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ cộng tuyến của $\mathbf{V}^{n+1}$ sẽ cùng đại diện cho một điểm của $\mathbf{P}^n$.

2. Hệ điểm độc lập

Ta gọi một hệ gồm r điểm $M_1, M_2, ..., M_r$ của $\mathbf{P}^n$ là *độc lập* nếu trong không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ liên kết với $\mathbf{P}^n$ ta có r vectơ đại diện cho r điểm ấy độc lập tuyến tính. Ta nhận thấy rằng nếu có r điểm độc lập thì bất cứ hệ r vectơ nào đại diện cho chúng cũng độc lập tuyến tính và do đó r điểm $M_1, M_2, ..., M_r$ xác định một (r –1)–phẳng xạ ảnh. Như vậy muốn xác định một m–phẳng xạ ảnh ta phải biết m+1 điểm độc lập thuộc phẳng đó. Trong $\mathbf{P}^n$ muốn có r điểm độc lập thì $r < n+1$ và do đó mọi hệ điểm nhiều hơn n+1 điểm đều không độc lập.

3. Tọa độ xạ ảnh của một điểm

Cho không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$. Ta chọn trong $\mathbf{V}^{n+1}$ một cơ sở $\varepsilon = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_{n+1}\}$. Gọi X là một điểm tùy ý của $\mathbf{P}^n$ và trong $\mathbf{V}^{n+1}$ ta có $\vec{x}$ là vectơ đại diện cho điểm X. Nếu $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ là tọa độ của vectơ $\vec{x}$ đối với cơ sở ε trong $\mathbf{V}^{n+1}$ thì ta cũng gọi đó là tọa độ xạ ảnh của điểm X của $\mathbf{P}^n$ ứng với cơ sở ε trong $\mathbf{V}^{n+1}$. Khi đó ta kí hiệu:

$$X = (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \text{ hoặc } X\,(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$$

Do cách xây dựng như trên nên các tọa độ xạ ảnh của các điểm thuộc $\mathbf{P}^n$ có các tính chất sau đây:

a) Nếu (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) là tọa độ xạ ảnh của một điểm thì các x_i không đồng thời bằng 0 vectơ đại diện cho một điểm phải luôn luôn là vectơ khác vectơ $\vec{0}$.

b) Một bộ số có thứ tự gồm n+1 số (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) trong đó ít nhất có một số khác 0 xác định một điểm X duy nhất của $\mathbf{P}^n$. Điểm X này nhận bộ số thực đó làm tọa độ xạ ảnh ứng với cơ sở đã cho.

c) Nếu (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) là tọa độ xạ ảnh của một điểm X thì mọi bộ số có dạng (kx_1, kx_2, ..., kx_{n+1}) với $k \neq 0$ đều là tọa độ của điểm X đó.

4. Mục tiêu xạ ảnh

Giả sử không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$. Gọi $\varepsilon = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_{n+1}\}$ là một cơ sở cho trước của $\mathbf{V}^{n+1}$. Khi đó trong $\mathbf{P}^n$ tọa độ xạ ảnh của mỗi điểm đều được xác định đối với cơ sở ε đó. Bây giờ trong $\mathbf{P}^n$ ta gọi A_i là các điểm nhận các vectơ $\vec{e}_i$ với i = 1,2,..., n+1 làm các vectơ đại diện. Ta được tọa độ xạ ảnh của các điểm A_i đó là:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= (1,0,0,...,0,0)\\
A_2 &= (0,1,0,...,0,0)\\
.. &\quad .. \quad ... \quad ..\\
A_n &= (0,0,0,...,1,0)\\
A_{n+1} &= (0,0,0,...,0,1)
\end{aligned}
$$

Gọi E là điểm có vectơ đại diện là vectơ $\vec{e}$, trong đó:

$$\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + ... + \vec{e}_{n+1}$$

Như vậy điểm E có tọa độ xạ ảnh là:

$$\mathbf{E} = (1\ ,\ 1,\ ...\ ,1)$$

a) Định nghĩa: Một tập hợp gồm n+2 điểm được xây dựng như trên: $\{A_1, A_2, ..., A_{n+1}; E\}$ là một *mục tiêu xạ ảnh* của không gian xạ ảnh n chiều $\mathbf{P}^n$ ứng với cơ sở ε trong $\mathbf{V}^{n+1}$. Ta kí hiệu mục tiêu xạ ảnh đó là $\{A_i ; E\}$ với i = 1,2, ..., n+1.Các điểm A_i là các *đỉnh* của mục tiêu và điểm E là *điểm đơn vị*.

Nếu một điểm X thuộc $\mathbf{P}^n$ có tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ đối với cơ sở ε, và mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ được xây dựng cũng ứng với cơ sở ε đó thì ta nói rằng $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ là tọa độ xạ ảnh của điểm X đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ với $i = 1,2,..., n+1$.

CHÚ Ý: Trong n+2 điểm $\{A_1, A_2, ..., A_{n+1} ; E\}$ của một mục tiêu xạ ảnh trong $\mathbf{P}^n$ bất cứ n+1 điểm nào cũng độc lập.

5. Mối liên hệ giữa mục tiêu xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ và cơ sở tương ứng ε trong $\mathbf{V}^{n+1}$

Định lí: Gọi $\mathbf{P}^n$ là không gian xạ ảnh liên kết với không gian $\mathbf{V}^{n+1}$, khi đó:

a) Trong $\mathbf{V}^{n+1}$ các cơ sở vị tự với nhau xác định một và chỉ một mục tiêu xạ ảnh tương ứng trong $\mathbf{P}^n$.

b) Trong $\mathbf{P}^n$ với một mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$, $i = 1,2,..., n+1$ cho trước, (hoặc n+2 điểm $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$, E sao cho bất kì n+1 điểm nào trong chúng đều độc lập) ta có thể tìm được trong $\mathbf{V}^{n+1}$ một lớp duy nhất các cơ sở vị tự với nhau nhận $\{A_i ; E\}$ làm mục tiêu xạ ảnh tương ứng.

6. Các m-phẳng tọa độ

a) Định nghĩa. Qua m+1 đỉnh A_i của mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ với $0 < m < n$ ta có một m–phẳng xạ ảnh và được gọi là *m–phẳng tọa độ*.

b) Phương trình. Ta hãy viết phương trình của m–phẳng tọa độ $\mathbf{P}^m$ đi qua m+1 đỉnh sau đây:

$$A_{n-m+1}, A_{n-m+2}, \ldots, \underbrace{A_n}_{A_{n-m+m}}, A_{n+1}$$

Điểm $X \in \mathbf{P}^m$ khi và chỉ khi vectơ $\vec{x}$ đại diện cho nó thuộc không gian vectơ $\mathbf{V}^{m+1}$ có cơ sở là m+1 vectơ sau đây:

$$\{\vec{e}_{n-m+1}, \vec{e}_{n-m+2}, \ldots, \vec{e}_n, \vec{e}_{n+1}\}$$

$$X \in \mathbf{P}^m \quad \Leftrightarrow \vec{x} \in \mathbf{V}^{m+1}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = 0\vec{e}_1 + \ldots + 0\vec{e}_{n-m} + x_{n-m+1}\vec{e}_{n-m+1} + \ldots + x_{n+1}\vec{e}_{n+1}$$

Vậy $X \in \mathbf{P}^m \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_i = 0 \\ \text{với } i = 1,2, \ldots, n-m \end{array}}$ (4)

Ta có phương trình tổng quát của m–phẳng tọa độ $\mathbf{P}^m$ là một hệ gồm có n–m phương trình có dạng (4) ở trên.

7. Công thức đổi mục tiêu xạ ảnh

Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ cho hai mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ và $\{A'_i; E'\}$ lần lượt ứng với hai cơ sở $\varepsilon = \{\vec{e}_i\}$ và $\varepsilon' = \{\vec{e}'_i\}$ của $\mathbf{V}^{n+1}$.

Giả sử $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ và $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1})$ lần lượt là tọa độ của một điểm X nào đó của $\mathbf{P}^n$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ và mục tiêu $\{A'_i; E'\}$. Để tìm sự liên hệ giữa các tọa độ của điểm X đó, ta cần tìm sự liên hệ giữa tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ và $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1})$ của vectơ $\vec{x}$ đại diện cho điểm X đối với cơ sở ε và ε'. Trong không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ ta có:

$$[x] = C^*[x'] \text{ hay } \quad [x'] = C^{*-1}[x]$$

trong đó C là ma trận chuyển từ cơ sở ε sang cơ sở ε', C^* là ma trận chuyển vị của C, còn $[x]$ và $[x']$ lần lượt là ma trận cột tọa độ của điểm X đối với mục tiêu thứ nhất và mục tiêu thứ hai.

Ma trận C trong công thức trên cũng được gọi là ma trận chuyển từ mục tiêu $\{A_i; E\}$ sang mục tiêu $\{A'_i; E'\}$. Như vậy khi chuyển từ mục tiêu này sang mục tiêu khác, các tọa độ cũ và mới được liên hệ với nhau bằng một phép biến đổi tuyến tính thuần nhất có ma trận vuông cấp n+1 không suy biến.

CHÚ Ý: Ma trận C trong công thức đổi mục tiêu xạ ảnh không được xác định một cách duy nhất, mà được xác định sai khác một hệ số tỉ lệ khác 0 vì nếu C là ma trận chuyển của hai mục tiêu xạ ảnh thì kC với $k \neq 0$ cũng là ma trận chuyển của hai mục tiêu đó. Nếu ta biết tọa độ các đỉnh A'_i và tọa độ điểm E' của mục tiêu xạ ảnh $\{A'_i; E'\}$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ thì ma trận chuyển C nói trên sẽ được xác định. Ngược lại nếu cho C là một ma trận vuông cấp n+1 không suy biến thì ta có thể xác định được mục tiêu xạ ảnh $\{A'_i; E'\}$ sao cho ma trận chuyển từ mục tiêu $\{A_i; E\}$ sang mục tiêu $\{A'_i; E'\}$ chính là ma trận C nói trên.

§3. PHƯƠNG TRÌNH CỦA m–PHẲNG TRONG P^n

Ta biết rằng m–phẳng trong $\mathbf{P}^n$ được xác định bởi m+1 điểm độc lập nghĩa là trong không gian $\mathbf{V}^{n+1}$ liên kết với $\mathbf{P}^n$ đó, m+1 vectơ đại diện của m+1 điểm đã cho, tạo nên một hệ m+1 vectơ độc lập tuyến tính.

1. Phương trình tham số của m-phẳng xạ ảnh

Giả sử trong $\mathbf{P}^n$, m-phẳng $\mathbf{P}^m$ xác định bởi m+1 điểm $A_1, A_2, ..., A_{m+1}$ độc lập và giả sử với mục tiêu xạ ảnh cho trước các điểm A_i nói trên có tọa độ là:

$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{i,n+1})$ với $i = 1, 2, ..., m+1$

Gọi $\vec{a}_i$ là các vectơ trong $\mathbf{V}^{n+1}$ theo thứ tự đại diện cho các điểm A_i với $i = 1,2,..., m+1$. Vì m+1 điểm A_i độc lập nên m+1 vectơ $\vec{a}_i$ độc lập tuyến tính tạo nên một cơ sở của không gian vectơ $\mathbf{V}^{m+1}$.

Ta có: $X(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbf{P}^m \Leftrightarrow \vec{x} \in \mathbf{V}^{m+1}$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^{m+1} t_i\vec{a}_i$$

Viết dưới dạng tọa độ ta có:

$$\begin{cases} x_1 = t_1a_{11} + t_2a_{21} + ... + t_{m+1}a_{m+1,1} \\ x_2 = t_1a_{12} + t_2a_{22} + ... + t_{m+1}a_{m+1,2} \\ .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad ... \quad .. \\ x_{n+1} = t_1a_{1,n+1} + t_2a_{2,n+1} + ... + t_{m+1}a_{m+1,n+1} \end{cases} \qquad (1)$$

Vì m+1 vectơ $\vec{a}_i$ độc lập tuyến tính nên ma trận $[a_{ij}]$ trong hệ phương trình (1) có hạng bằng m+1.

Hệ phương trình (1) cũng có thể được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$[x] = t_1[a_1] + t_2[a_2] + ... + t_{m+1}[a_{m+1}] \quad (1')$$

trong đó [x], [a_i] lần lượt là ma trận cột tọa độ của điểm X và của các điểm A_i. Với một bộ m+1 giá trị của các tham số $t_1, t_2, ..., t_{m+1}$ không đồng thời bằng 0 sẽ xác định cho ta một điểm X thuộc m-phẳng $\mathbf{P}^m$ và ngược lại. Cần chú ý rằng một bộ m+1 của tham số đó nhân với một hệ số tỉ lệ $k \neq 0$ có tương ứng 1-1 với một điểm X thuộc $\mathbf{P}^m$.

Phương trình (1) và (1') được gọi là *phương trình tham số của m–phẳng xạ ảnh P^m* xác định bởi m+1 điểm $A_1, A_2, ..., A_{m+1}$ độc lập.

Ngược lại mọi phương trình tham số có dạng (1) hoặc (1') trong đó ma trận [a_{ij}] có hạng m+1 đều là phương trình tham số của một m–phẳng trong $\mathbf{P}^m$.

2. Phương trình tổng quát của m-phẳng xạ ảnh

Định lí: Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$

a) Một m–phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^m$ ($0 \leq m < n$) được biểu thị bằng một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có hạng bằng n – m và đó là phương trình tổng quát của một m–phẳng đối với một mục tiêu xạ ảnh cho trước.

b) Ngược lại với một mục tiêu xạ ảnh đã chọn, bất kì một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có hạng bằng n-m($0 \leq m < n$) đều là phương trình của một m-phẳng xác định.

3.Phương trình tổng quát của siêu phẳng trong $\mathbf{P}^n$

a) Phương trình tổng quát. Với m = n – 1, phương trình tổng quát của siêu phẳng gồm có n – m = n – (n – 1) = 1 phương trình và có dạng:

$$\boxed{u_1x_1 + u_2x_2 + ... + u_{n+1}x_{n+1} = 0} \text{ hay } \boxed{\sum_{i=1}^{n+1} u_i x_i = 0} \quad (3)$$

trong đó các hệ số u_i không đồng thời bằng 0 (vì phương trình có ma trận hạng 1).

Ngược lại mỗi phương trình có dạng (3) như trên đều là phương trình của một siêu phẳng xác định.

b) Tọa độ của siêu phẳng xạ ảnh

Cho siêu phẳng $u_1x_1 + u_2x_2 + ... + u_{n+1}x_{n+1} = 0$ trong $\mathbf{P}^n$.

Bộ số $[u_1, u_2, ..., u_{n+1}]$ gọi là *tọa độ của siêu phẳng* có phương trình đã cho và được kí hiệu như trên để phân biệt với tọa độ của điểm. Như vậy nếu biết tọa độ của siêu phẳng thì siêu phẳng đó hoàn toàn xác định vì ta dễ dàng viết được phương trình của siêu phẳng đó và ngược lại. Tọa độ của siêu phẳng cũng có những tính chất giống như tọa độ xạ ảnh của một điểm nghĩa là:

- Các u_i không đồng thời bằng 0.
- Mỗi bộ $[u_1, u_2, ... , u_{n+1}]$ xác định một siêu phẳng duy nhất.
- Hai bộ số $[u_1, u_2, ..., u_{n+1}]$ và $[v_1, v_2, ... , v_{n+1}]$ xác định một siêu phẳng khi và chỉ khi có một số $k \neq 0$ sao cho $u_i = kv_i$ với mọi $i = 1,2,..., n+1$.

5. Vị trí tương đối của các phẳng trong $\mathbf{P}^n$

Trong không gian xạ ảnh, muốn xét vị trí tương đối của các phẳng ta chỉ cần xét sự cắt nhau hoặc chéo nhau của các phẳng đó mà thôi.

a) Sự cắt nhau và chéo nhau của các phẳng xạ ảnh

- Hai cái phẳng xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ được gọi là *cắt nhau* nếu chúng có điểm chung nghĩa là chúng có giao khác rỗng. Ta dễ dàng suy ra rằng giao của hai cái phẳng là một cái phẳng có số chiều lớn nhất thuộc các phẳng cho trước.

- Hai cái phẳng xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ được gọi là *chéo nhau* nếu chúng không có điểm chung.

b) Công thức số chiều của tổng và giao các phẳng xạ ảnh. Ta gọi tổng của hai cái phẳng là giao của tất cả cái phẳng chứa đồng thời cả hai phẳng đó. Ta suy ra tổng của hai cái phẳng là cái phẳng có số chiều bé nhất chứa các phẳng cho trước. Chú ý rằng khái niệm tổng của hai cái phẳng khác với khái niệm tổng hiểu theo nghĩa tổng hợp. Thí dụ cho hai đường thẳng xạ ảnh phân biệt cắt nhau thì tổng của chúng là mặt phẳng chứa hai đường thẳng ấy. Nếu hai đường thẳng xạ ảnh chéo nhau (tức là không cắt nhau) thì tổng của hai cái phẳng đó là không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^3$ chứa hai đường thẳng ấy.

Để xét vị trí tương đối của hai cái phẳng xạ ảnh ta cần dựa vào các không gian vectơ con liên kết với hai phẳng đó và ta có các công thức về số chiều của tổng và giao của các phẳng như sau:

- Nếu hai cái phẳng xạ ảnh P và Q cắt nhau ta có:

$$\boxed{\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q)}$$

- Nếu hai cái phẳng xạ ảnh P và Q chéo nhau ta có:

$$\boxed{\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q + 1}$$

CHÚ Ý: Từ định nghĩa về tổng và giao của hai cái phẳng xạ ảnh, bằng phương pháp quy nạp ta suy ra được định nghĩa của tổng và giao một số hữu hạn các phẳng trong $\mathbf{P}^n$.

c) Hệ siêu phẳng độc lập

Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh đã chọn cho m siêu phẳng có tọa độ là:

$$[u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{i,n+1}] \text{ với } i = 1,2,\ldots, m \text{ và } 0 < m \le n+1$$

m siêu phẳng đó gọi là *độc lập* nếu tọa độ của chúng làm thành ma trận $[u_{ij}]$ có hạng bằng m với $i = 1,2,\ldots, m$ và $j = 1,2,\ldots, n+1$.

d) Định lí. Giao của m siêu phẳng độc lập ($0 < m < n$) là một $n - m$ phẳng

Hệ quả: Ta có thể xem phương trình của một m–phẳng trong $\mathbf{P}^n$ có dạng:

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j = 0 \ ; \ i = 1,2, \ldots, n - m.$$

Đó là giao của $n - m$ siêu phẳng độc lập. Từ đó ta suy ra giao của n siêu phẳng độc lập là một điểm. Do đó áp dụng vào mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ ta thấy rằng hai đường thẳng phân biệt luôn cắt nhau.

e) Định lí. Giao của một siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ và một m–phẳng $\mathbf{P}^m$ không nằm trong siêu phẳng đó là một (m–1)-phẳng.

Hệ quả • Hai siêu phẳng phân biệt của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ luôn luôn cắt nhau theo một (n–2)-phẳng.

• Một siêu phẳng và một đường thẳng không thuộc siêu phẳng đó luôn luôn cắt nhau tại một điểm.

§4. ÁNH XẠ XẠ ẢNH VÀ BIẾN ĐỔI XẠ ẢNH

1. Ánh xạ xạ ảnh

a) Định nghĩa. Cho hai không gian xạ ảnh có cùng số chiều là $\mathbf{P}^n$ và $\mathbf{P}'^n$ lần lượt liên kết với hai không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ và $\mathbf{V}'^{n+1}$. Một ánh xạ f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ được gọi là *ánh xạ xạ ảnh* nếu có một phép đẳng cấu tuyến tính φ: $\mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{V}'^{n+1}$ sao cho nếu $\vec{a}$ là vectơ đại diện của điểm A của $\mathbf{P}^n$ thì $\varphi(\vec{a})$ là vectơ đại diện của điểm f(A) thuộc $\mathbf{P}'^n$.

Ta nói rằng ánh xạ xạ ảnh f được cảm sinh bởi phép đẳng cấu tuyến tính φ.

b) Tính chất

α) Từ định nghĩa trên ta suy ra ánh xạ xạ ảnh là một song ánh và do đó người ta còn gọi ánh xạ xạ ảnh là phép đẳng cấu xạ ảnh. Nếu f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ là ánh xạ xạ ảnh cảm sinh bởi phép đẳng cấu tuyến tính φ: $\mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{V}'^{n+1}$ thì f^{-1} : $\mathbf{P}'^n \to \mathbf{P}^n$ là ánh xạ xạ ảnh cảm sinh bởi φ^{-1} : $\mathbf{V}'^{n+1} \to \mathbf{V}^{n+1}$.

β) Một lớp các phép đẳng cấu tuyến tính vị tự với nhau biến không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ thành không gian vectơ $\mathbf{V}'^{n+1}$ cùng cảm sinh ra một ánh xạ xạ ảnh f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ và ngược lại mỗi phép ánh xạ xạ ảnh f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ đều được cảm sinh bởi một lớp các phép đẳng cấu tuyến tính vị tự với nhau biến $\mathbf{V}^{n+1}$ thành $\mathbf{V}'^{n+1}$.

γ) Qua ánh xạ xạ ảnh f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ một hệ điểm độc lập của $\mathbf{P}^n$ biến thành một hệ điểm độc lập của $\mathbf{P}'^n$ và biến một hệ điểm không độc lập của $\mathbf{P}^n$ thành một hệ điểm không độc lập của $\mathbf{P}'^n$.

λ) Nếu f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ và g: $\mathbf{P}'^n \to \mathbf{P}''^n$ là hai ánh xạ xạ ảnh lần lượt được cảm sinh bởi φ: $\mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{V}'^{n+1}$ và ψ: $\mathbf{V}'^{n+1} \to \mathbf{V}''^{n+1}$ thì tích g . f là ánh xạ xạ ảnh được cảm sinh bởi tích ψ . φ

c) Định lí. Cho n+2 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{n+2}$ thuộc $\mathbf{P}^n$ trong đó bất kì hệ n+1 điểm nào cũng độc lập và cho hệ n+1 điểm $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n+2}$ thuộc $\mathbf{P}'^n$ cũng có tính chất như vậy. Khi đó có một ánh xạ xạ ảnh duy nhất f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ sao cho $f(A_i) = A'_i$ với i = 1,2,..., n.

d) Định lí : Qua ánh xạ xạ ảnh f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ một m–phẳng của $\mathbf{P}^n$ biến thành một m–phẳng của $\mathbf{P}'^n$.

CHÚ Ý: Vì ánh xạ xạ ảnh biến đường thẳng thành đường thẳng nên người ta nói rằng ánh xạ xạ ảnh có tính chất *cộng tuyến*.

2. Biến đổi xạ ảnh

a) Định nghĩa. Một phép ánh xạ xạ ảnh f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ biến không gian xạ ảnh thành chính nó được gọi là *phép biến đổi xạ ảnh*. Phép biến đổi xạ ảnh này được cảm sinh bởi phép biến đổi tuyến tính φ: $\mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{V}^{n+1}$.

b) Tính chất. Từ các tính chất của ánh xạ xạ ảnh ta suy ra:

α) Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, một phép biến đổi xạ ảnh f được xác định bởi:

– hoặc là hai mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ và $\{A'_i; E'\}$ với $f(A_i) = A'_i$, i = 1,2,... , n+1 và f(E) = E'.

– hoặc là hai bộ n+2 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{n+2}$ và $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n+2}$ trong mỗi bộ bất cứ n+1 điểm nào cũng độc lập với $f(A_i)=A'_i$; i=1,2,..., n+2.

β) Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, phép biến đổi xạ ảnh biến một m–phẳng thành một m–phẳng. Vì phép biến đổi xạ ảnh biến đường thẳng thành đường thẳng nên người ta còn gọi nó là *phép cộng tuyến*.

c) Phương trình của phép biến đổi xạ ảnh

α) **Lập phương trình**. Gọi f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ là phép biến đổi xạ ảnh cảm sinh bởi phép biến đổi tuyến tính φ: $\mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{V}^{n+1}$. Trong $\mathbf{P}^n$ ta chọn một mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ và trong $\mathbf{V}^{n+1}$ ta có cơ sở tương ứng là $\{\vec{e}_i\}$. Qua phép biến đổi xạ ảnh f, đối với mục tiêu xạ ảnh cho trước, một điểm X có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ biến thành điểm X' có tọa độ $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1})$. Ta hãy tìm sự liên hệ giữa tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ của điểm X và tọa độ $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1})$ của điểm X' = f(X).

Khi đó trong $\mathbf{V}^{n+1}$ là không gian vectơ liên kết với không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, vectơ $\vec{x}$ có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ đại diện cho điểm X và vectơ $\vec{x}'$ có tọa độ $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1})$ đại diện cho điểm X' = f(X). Ta có vectơ $\varphi(\vec{x})$ cũng đại diện cho điểm X' = f(X) nên $\vec{x}' = k\varphi(\vec{x})$ với $k \neq 0$.

Do đó nếu gọi B là ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ đối với cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ thì ta có phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ tương ứng là:

$$\boxed{[x'] = k\,B\,[x] \text{ với } k \neq 0}$$

trong đó B là ma trận vuông cấp n+1 không suy biến.

Nếu gọi $\{\vec{e}'_i\} = \{\varphi(\vec{e}_i)\}$ với C là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ sang cơ sở $\{\vec{e}'_i\}$ thì ta có thể viết phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f nói trên như sau:

$$\boxed{[x'] = k\,C^*\,[x] \text{ với } k \neq 0}$$

Ngược lại trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh cho trước, mỗi phương trình có dạng [x'] = B[x] trong đó B là ma trận vuông cấp n+1 không suy biến là phương trình của một phép biến đổi xạ ảnh xác định.

d) Nhóm các phép biến đổi xạ ảnh và hình học xạ ảnh

α) **Định lí.** Tập hợp các phép biến đổi xạ ảnh của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ lập thành một nhóm với phép toán lấy tích các phép biến đổi.

β) **Hình học xạ ảnh**: *Hình học xạ ảnh n chiều* nghiên cứu những tính chất bất biến qua nhóm các phép biến đổi xạ ảnh $\mathcal{K}^n$. Những tính chất được nghiên cứu trong hình học xạ ảnh được gọi là những *tính chất xạ ảnh*.Thí dụ phép biến đổi xạ ảnh f biến một m–phẳng thành một m–phẳng. Vậy m–phẳng là một khái niệm xạ ảnh. Ngoài ra ta còn có các tính chất xạ ảnh khác như tính chất thẳng hàng của ba điểm, tính chất đồng quy của các đường thẳng. Sau này trong các phần tiếp theo của giáo trình chúng ta sẽ được biết thêm các khái niệm xạ ảnh khác.

e) Điểm kép hay điểm bất động của phép biến đổi xạ ảnh

α)**Định nghĩa**: Điểm M thuộc $\mathbf{P}^n$ là *điểm kép* hay *điểm bất động* của phép biến đổi xạ ảnh f nếu M = f(M).

β) **Tìm điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh**

Cho phép biến đổi xạ ảnh f của $\mathbf{P}^n$. Giả sử M = f(M) và gọi φ là phép biến đổi tuyến tính cảm sinh ra phép biến đổi xạ ảnh f đã cho. Khi đó nếu vectơ $\vec{x}$ đại diện cho điểm M thì ta có $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}' = k\vec{x}$ $(k \neq 0)$ cũng đại diện cho điểm M. Như vậy $\vec{x}$ là vectơ riêng và k là giá trị riêng của φ.

Giả sử phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình:

$$k\,[x'] = B\,[x]$$

Khi đó phương trình tìm điểm kép của f là:

$$k\,[x] = B\,[x] \Leftrightarrow (B - kI)[x] = 0$$

với I là ma trận đơn vị.

Đây là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm có n+1 phương trình với n+1 ẩn. Muốn cho hệ phương trình này có nghiệm không phải là nghiệm tầm thường (là tọa độ của các điểm kép) điều kiện cần và đủ là:

$$\boxed{|B - kI| = 0}$$

Với mỗi nghiệm $k = k_i$ của hệ phương trình $|B - kI| = 0$ ta có tập hợp các điểm kép của f ứng với giá trị riêng k_i có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình sau đây:

$$(B - k_iI)[x] = 0$$

Nếu hạng của ma trận $(B - k_iI)$ bằng m $(0 < m \leq n)$ nghĩa là có m phương trình độc lập thì phương trình $(B - k_iI)[x] = 0$ xác định một (n−m)-phẳng gồm toàn điểm kép ứng với giá trị riêng k_i đó.

f) Các phép thấu xạ. Các phép thấu xạ là các phép biến đổi xạ ảnh đặc biệt. Trong trường hợp tập hợp các điểm kép của một phép biến đổi xạ ảnh f là một m phẳng P và một (n−m−1)- phẳng Q chéo nhau thì ta gọi phép biến đổi xạ ảnh f là một phép *thấu xạ m-cặp*. Như vậy trong trường hợp này, nếu có điểm M thuộc P và điểm N thuộc Q thì đường thẳng MN luôn luôn biến thành chính nó vì M và N đều là các điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh đó.

Đặc biệt nếu m = 0 thì phẳng P lúc đó là một điểm được gọi là *tâm thấu xạ* còn Q là một siêu phẳng được gọi là *nền thấu xạ*. Phép thấu xạ này là phép *thấu xạ 0–cặp* hay là *phép thấu xạ tâm*. Trong trường hợp này mọi đường thẳng đi qua tâm thấu xạ đều biến thành chính nó vì đường thẳng đó có hai điểm kép phân biệt.

Trong trường hợp các điểm kép của f là một siêu phẳng thì ta gọi đó là phép *thấu xạ đặc biệt* vì lúc đó tâm thấu xạ thuộc nền thấu xạ.

Phép đồng nhất của $\mathbf{P}^n$ cũng được xem là một phép thấu xạ và lúc đó mọi điểm của $\mathbf{P}^n$ đều là điểm kép. Phép thấu xạ này là phép *thấu xạ tầm thường*.

3. Phép chiếu xuyên tâm

a) Định nghĩa: Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ $(n \geq 2)$ cho hai siêu phẳng phân biệt P và P' và một điểm O nằm ngoài hai siêu phẳng đó.

Với mỗi điểm $M \in P$ ta tìm được điểm $M' = OM \cap P'$ duy nhất. Phép ánh xạ $f: P \to P'$ sao cho $M' = f(M)$ được gọi là *phép chiếu xuyên tâm* từ P lên P' bởi tâm chiếu O.

b) Định lí. Phép chiếu xuyên tâm f từ siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ lên siêu phẳng P'^{n-1} là một ánh xạ xạ ảnh (là phép đẳng cấu xạ ảnh).

c) Định lí: Cho hai siêu phẳng phân biệt P^{n-1} và P'^{n-1} của không gian xạ ảnh P^n ($n \geq 2$). Một ánh xạ xạ ảnh $f: P^{n-1} \rightarrow P'^{n-1}$ là phép chiếu xuyên tâm khi và chỉ khi $f(M) = M$ với mọi điểm M thuộc $P^{n-1} \cap P'^{n-1}$.

§5. TỈ SỐ KÉP

1. Tỉ số kép của 4 điểm thẳng hàng

a) Định nghĩa. Trong không gian xạ ảnh P^n, với mục tiêu xạ ảnh cho trước, trên một đường thẳng xác định bởi hai điểm A, B phân biệt, ta lấy các điểm C và D sao cho không trùng với A hoặc B. Gọi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ là các vectơ lần lượt đại diện cho các điểm A, B, C, D, ta có:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b}\\ \vec{d} &= \lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b}\end{aligned} \quad \text{hay} \quad \begin{aligned}[C] &= \lambda_1[A] + \mu_1[B]\\ [D] &= \lambda_2[A] + \mu_2[B]\end{aligned}$$

Khi đó tỉ số: $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1} : \dfrac{\mu_2}{\lambda_2}$ được gọi là *tỉ số kép của 4 điểm A,B,C,D lấy theo thứ tự đó* và kí hiệu:

$$\boxed{(ABCD) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}}$$

Bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường thẳng như trên được gọi là một *hàng điểm* và đường thẳng đó gọi là *giá* của hàng điểm.

Chú ý rằng các số λ_1 và μ_1 có thể thay thế bằng các số $k\lambda_1$, $k\mu_1$ với $k \neq 0$ và các số λ_2, μ_2 cũng thế.

NHẬN XÉT. Khái niệm tỉ số kép trong định nghĩa nói trên không phụ thuộc vào việc chọn mục tiêu tọa độ.

b) Các tính chất của tỉ số kép

α) Do giá trị của tỉ số kép không lệ thuộc vào việc chọn mục tiêu tọa độ ta suy ra rằng qua một phép biến đổi xạ ảnh, tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng không thay đổi. Giả sử qua phép biến đổi xạ ảnh f các điểm A, B, C, D thẳng hàng lần lượt biến thành A', B', C', D' cũng thẳng hàng và ta có

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

Ta nói rằng tỉ số kép là một bất biến xạ ảnh.

β) Dựa vào định nghĩa ta chứng minh được các tính chất sau đây của tỉ số kép:

- $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$
- $(ABCD) = \dfrac{1}{(BACD)} = \dfrac{1}{(ABDC)}$
- $(ABCD) = 1 - (ACBD) = 1 - (DBCA)$

γ) Các trường hợp đặc biệt (mở rộng định nghĩa) của tỉ số kép:

- $(ABCC) = 1$ (trường hợp $D \equiv C$)
- $(AACD) = 1$ (trường hợp $A \equiv B$)
- $(ABAD) = (ABCB) = 0$ (trường hợp $C \equiv A$ hoặc $D \equiv B$)
- $(ABBD) = (ABCA) = \infty$ (trường hợp $C \equiv B$ hoặc $D \equiv A$)

c) Hàng điểm điều hòa

Nếu tỉ số kép $(ABCD) = -1$ ta nói rằng cặp điểm C,D *chia điều hòa* cặp điểm A,B. Vì $(ABCD) = (CDAB)$ nên khi đó ta có $(CDAB) = -1$ và như vậy cặp điểm A,B cũng chia điều hòa cặp điểm C,D. Ta gọi cặp điểm A,B và cặp điểm C,D *liên hiệp điều hòa với nhau* hay bốn điểm A,B,C,D làm thành một *hàng điểm điều hòa*

d) Hình bốn cạnh toàn phần

α) **Định nghĩa.** Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ một tập hợp gồm 4 đường thẳng, trong đó không có 3 đường nào đồng quy được gọi là một *hình bốn cạnh toàn phần*. Mỗi đường thẳng đó là một *cạnh* (4 cạnh). Mỗi giao điểm của hai cạnh là một *đỉnh* (6 đỉnh). Hai đỉnh không thuộc cùng một cạnh gọi là *hai đỉnh đối diện* (3 cặp đỉnh đối diện). Mỗi đường thẳng nối hai đỉnh đối diện là một *đường chéo* (3 đường chéo). Mỗi giao điểm của hai đường chéo là một *điểm chéo* (3 điểm chéo) β) **Định lí.** Trong một hình bốn cạnh toàn phần, trên mỗi đường chéo hai đỉnh đối diện và hai điểm chéo liên hiệp điều hòa với nhau.

2. Tỉ số kép của bốn siêu phẳng thuộc một chùm

a) Định nghĩa chùm siêu phẳng. Trong không gian xạ ảnh P^n tập hợp các siêu phẳng cùng đi qua một (n–2)–phẳng được gọi là một *chùm siêu phẳng* và (n–2)–phẳng đó là *giá* của chùm. Một chùm siêu phẳng được xác định bởi hai siêu phẳng phân biệt của chùm.

Gọi P và Q là hai siêu phẳng phân biệt nào đó của chùm và có tọa độ đối với một mục tiêu xạ ảnh cho trước lần lượt là:

$$P = [p_1, p_2, ..., p_{n+1}]$$

$$Q = [q_1, q_2, ..., q_{n+1}]$$

Khi đó giá của chùm có phương trình là:

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_{n+1}x_{n+1} = 0 \\ q_1x_1 + q_2x_2 + ... + q_{n+1}x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Nếu có một siêu phẳng R của chùm có phương trình là:

$$r_1x_1 + r_2x_2 + ... + r_{n+1}x_{n+1} = 0$$

thì vì R đi qua $P \cap Q$ nên ta có:

$$r_i = \lambda p_i + \mu q_i \text{ với } i = 1, 2, ..., n+1 \text{ và } (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Như vậy với mỗi cặp số $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ sẽ xác định cho ta một siêu phẳng của chùm và tất nhiên cặp số (λ, μ) và cặp số $(k\lambda, k\mu)$ với $k \neq 0$ cùng xác định cho ta một siêu phẳng của chùm. Ta thường kí hiệu [P], [Q], [R] lần lượt là ma trận cột tọa độ của các siêu phẳng P, Q, R và ta có:

$$[R] = \lambda[P] + \mu[Q]$$

b) Tỉ số kép của chùm bốn siêu phẳng. Trong không gian xạ ảnh P^n với mục tiêu tọa độ cho trước, cho một chùm siêu phẳng xác định bởi hai siêu phẳng phân biệt P và Q cho trước. Giả sử R và S là hai siêu phẳng của chùm và được xác định bởi các hệ thức:

$$[R] = \lambda_1[P] + \mu_1[Q]$$
$$[S] = \lambda_2[P] + \mu_2[Q]$$

Khi đó tỉ số $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1} : \dfrac{\mu_2}{\lambda_2}$ là *tỉ số kép của 4 siêu phẳng* P, Q, R, S của chùm lấy theo thứ tự đó và kí hiệu:

$$\boxed{(P\ Q\ R\ S) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}}$$

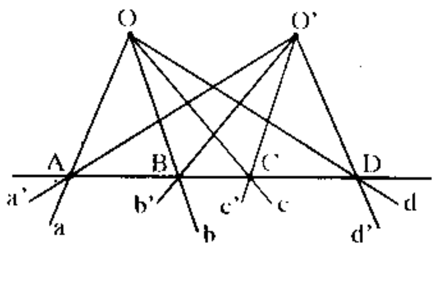
CHÚ Ý. α) Tỉ số kép của 4 siêu phẳng thuộc một chùm có các tính chất giống như các tính chất của tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng.

β) Nếu (PQRS) = −1 thì ta nói rằng bốn siêu phẳng P, Q, R, S làm thành một chùm điều hòa.

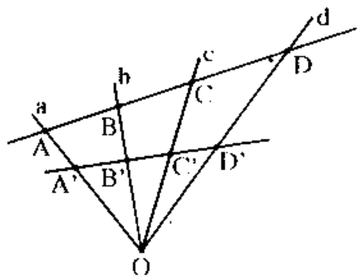
c) Định lí.Trong P^n cho một chùm bốn siêu phẳng P, Q, R, S và một đường thẳng d không cắt giá của chùm. Nếu A, B, C, D lần lượt là giao điểm của d với P, Q, R, S thì:

$$\boxed{(P\ Q\ R\ S) = (A\ B\ C\ D)}$$

Ứng dụng.Trong $\mathbf{P}^2$ với phương pháp cắt và chiếu ta có thể chuyển tỉ số kép của một chùm bốn đường thẳng sang một chùm bốn đường thẳng khác, hoặc chuyển tỉ số kép của một hàng bốn điểm sang một hàng bốn điểm khác.



(abcd) = (ABCD) = (a'b'c'd')

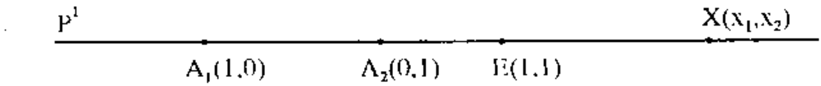


(ABCD) = (abcd) = (A'B'C'D')

3. Tọa độ xạ ảnh không thuần nhất

a) Trên đường thẳng xạ ảnh

α) **Định nghĩa.** Trên đường thẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^1$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2; E\}$ đã chọn, một điểm $X \neq A_1$ có tọa độ xạ ảnh là (x_1, x_2). Khi đó tỉ số $\dfrac{x_1}{x_2}$ được gọi là *tọa độ xạ ảnh không thuần nhất* của điểm X đối với mục tiêu xạ ảnh cho trước.



β) **Tính chất.** Tọa độ xạ ảnh không thuần nhất của một điểm X trên đường xạ ảnh đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2; E\}$ bằng tỉ số kép (A_1A_2EX).

NHẬN XÉT. Trên đường thẳng xạ ảnh nếu cho biết tọa độ xạ ảnh của một điểm X là (x_1, x_2) với $x_2 \neq 0$ thì ta dễ dàng tính được tọa độ không thuần nhất của điểm đó là $\dfrac{x_1}{x_2}$. Ngược lại nếu biết tọa độ không thuần nhất của một điểm là m thì ta suy ra tọa độ xạ ảnh của điểm đó là $(m, 1)$.

Đặc biệt với tọa độ xạ ảnh là cặp số $(x_1, 0)$ thì ta quy ước lấy tọa độ không thuần nhất của điểm đó là ∞ (vô tận) và ngược lại.

b) Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$

α) **Định nghĩa.** Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho trước, cho một điểm X có tọa độ xạ ảnh là $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ trong đó $x_{n+1} \neq 0$ thì khi đó bộ n số thực có thứ tự $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ trong đó $X_i = \dfrac{x_i}{x_{n+1}}$ với $i = 1, 2, \ldots, n$ được gọi là tọa độ xạ ảnh không thuần nhất của điểm X đối với mục tiêu xạ ảnh đã cho.

β) **Tính chất.** Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ cho mục tiêu xạ ảnh

$\{A_i; E\}$. Ta hãy xét đường thẳng A_iA_{n+1} và chùm siêu phẳng P, Q, R, S có giá là (n−2)– phẳng xác định bởi n−1 đỉnh còn lại của mục tiêu và lần lượt đi qua các điểm A_i, A_{n+1}, E, X. Gọi E_i và X_i lần lượt là giao điểm của đường thẳng A_iA_{n+1} với các siêu phẳng R và S. Khi đó ta có:

$$\boxed{(A_iA_{n+1}E_iX_i) = \frac{x_i}{x_{n+1}}}$$

§6. MÔ HÌNH XẠ ẢNH CỦA KHÔNG GIAN AFIN

1. Xây dựng mô hình của A^n từ P^n

Xuất phát từ không gian afin A^n ta đã biết cách xây dựng mô hình của không gian xạ ảnh P^n bằng cách thêm vào A^n những điểm vô tận. Bây giờ ngược lại, từ không gian xạ ảnh P^n ta hãy bỏ bớt đi một số điểm nào đó để xây dựng mô hình của không gian afin.

Ta hãy chọn trong $\mathbf{P}^n$ một siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ nào đó và gọi là $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{P}^{n-1}$ là tập hợp những điểm của $\mathbf{P}^n$ mà không thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$. Ta sẽ chứng minh $\mathbf{A}^n$ là một không gian afin n chiều.

Ta chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ của $\mathbf{P}^n$ sao cho các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ và do đó đỉnh A_{n+1} không thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$. Đối với mục tiêu đã chọn siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ có phương trình $x_{n+1} = 0$. Bởi vậy mọi điểm X thuộc $\mathbf{A}^n$ sẽ có tọa độ xạ ảnh là $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ trong đó $x_{n+1} \neq 0$ và có tọa độ xạ ảnh không thuần nhất là $(X_1, X_2, ..., X_n)$ trong đó $X_i = \dfrac{x_i}{x_{n+1}}$. Như vậy có tương ứng 1 – 1 giữa tập hợp các điểm của $\mathbf{A}^n$ và tập hợp các bộ n số thực có thứ tự $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Bây giờ với hai điểm X, Y của $\mathbf{A}^n$ mà tọa độ xạ ảnh không thuần nhất là $(X_1, X_2, ..., X_n)$ và $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ta cho ứng với một vectơ của không gian vectơ $\mathbf{V}^n$ mà tọa độ của nó là:

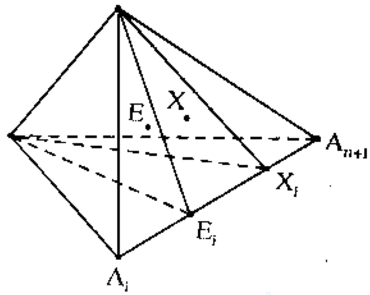
$$(Y_1 - X_1, Y_2 - X_2, ..., Y_n - X_n)$$

Ta dễ dàng thấy sự tương ứng này thỏa mãn hai tiên đề của không gian afin. Vậy $\mathbf{A}^n$ là một không gian afin n chiều.

2. Một số thể hiện trên mô hình

a) Tọa độ afin và mục tiêu afin

Ta xét mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$. Gọi E_i là giao điểm của đường thẳng A_iA_{n+1} với siêu phẳng chứa các đỉnh A_i còn lại của mục tiêu và điểm E, còn X_i là giao điểm của đường thẳng đó với siêu phẳng chứa các điểm A_i còn lại và điểm X. Ta có các tỉ số kép :



$$\boxed{(A_iA_{n+1}E_iX_i) = \frac{x_i}{x_{n+1}}}$$

và $(A_iA_{n+1}E_iE_i) = 1$

Do đó các điểm E_i có tọa độ xạ ảnh là:

$$E_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, 1)$$

(con số 1 thứ nhất ở cột thứ i)

Do đó ta tính được tọa độ xạ ảnh của các điểm $E_1, E_2, ..., E_n$ là:

$$E_1 = (1, 0, ... , 0, 1)$$
$$E_2 = (0, 1, 0, ... , 0, 1)$$
$$. . . \quad . . . \quad . . . \quad . . .$$
$$E_n = (0, ... , 1, 1)$$

Ta suy ra tọa độ xạ ảnh không thuần nhất của các điểm đó là:

$$E_1 = (1, 0, \quad ... , 0)$$
$$E_2 = (0, 1, 0, ... , 0)$$
$$... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ...$$
$$E_n = (0, \quad ... , 0, 1)$$

Điểm $A_{n+1}(0, 0, ... , 0, 1)$ có tọa độ xạ ảnh không thuần nhất là:

$$A_{n+1} = (0, 0, ... , 0)$$

Do cách đặt tương ứng khi xây dựng mô hình ta có:

$$\overrightarrow{A_{n+1}E_1} = (1, 0, \dots, 0) = \overrightarrow{e_1}$$

$$\overrightarrow{A_{n+1}E_2} = (0, 1, 0, \dots, 0) = \overrightarrow{e_2}$$

. . . .

$$\overrightarrow{A_{n+1}E_n} = (0, \dots, 0, 1) = \overrightarrow{e_n}$$

Ta nhận thấy các vectơ $\overrightarrow{A_{n+1}E_i}$ chính là các vectơ cơ sở $\overrightarrow{e_i}$ trong không gian vectơ $\mathbf{V}^n$. Do đó ta có thể dùng bộ điểm $\{A_{n+1} ; E_1, E_2, \dots, E_n\}$ làm mục tiêu afin của không gian afin $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{P}^{n-1}$. Mục tiêu afin này được sinh ra bởi mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ đã cho.

Nếu một điểm $X \in \mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{P}^{n-1}$ có tọa độ xạ ảnh không thuần nhất là $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ thì vectơ $\overrightarrow{A_{n+1}X}$ có tọa độ là:

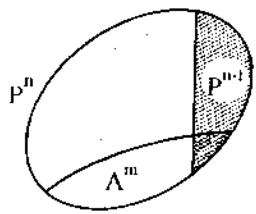
$$\overrightarrow{A_{n+1}X} = (X_1 - 0, X_2 - 0, \dots, X_n - 0)$$

$$\overrightarrow{A_{n+1}X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Điều đó chứng tỏ rằng $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ là tọa độ afin của điểm X đối với mục tiêu afin $\{A_{n+1} ; E_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Vậy:

Kết luận: Tọa độ xạ ảnh không thuần nhất của một điểm X thuộc $\mathbf{A}^n$ đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ chính là tọa độ afin của điểm X đó đối với mục tiêu afin $\{A_{n+1} ; E_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, còn mục tiêu afin $\{A_{n+1} ; E_i\}$ gọi là được sinh ra bởi mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ cho trước.

b) Các m-phẳng afin. Ta hãy xét một m-phẳng $\mathbf{P}^m$ nào đó của $\mathbf{P}^n$ mà không nằm trong siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$. Giả sử đối với mục tiêu xạ ảnh đã chọn sao cho $\mathbf{P}^{n-1}$ có phương trình $x_{n+1} = 0$, khi đó $\mathbf{P}^n$ có phương trình:



$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-m$$

trong đó ma trận $[a_{ij}]$ có hạng bằng n– m.

Gọi $\mathbf{A}^m$ là tập hợp những điểm X thuộc $\mathbf{P}^m$ mà không thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ có nghĩa là:

$$\mathbf{A}^m = \mathbf{P}^m \cap \mathbf{A}^n \text{ với } \mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{P}^{n-1}.$$

Khi đó mỗi điểm X của $\mathbf{A}^m$ có tọa độ xạ ảnh không thuần nhất là $(X_1, X_2, ..., X_n)$ với $X_i = \dfrac{x_i}{x_{n+1}}$

$$X(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{A}^m \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j = 0 \text{ với } x_{n+1} \neq 0$$

Chia hai vế của phương trình m–phẳng cho x_{n+1} ta có:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + a_{i,n+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-m$$

Ta thấy ma trận a_{ij} của hệ phương trình này cũng có hạng bằng n – m.

Vậy mỗi m–phẳng afin $\mathbf{A}^m$ chính là một m–phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^m$ (không phụ thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$) sau khi bỏ đi những điểm nằm trên siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$.

c) Sự cùng phương của các phẳng afin. Trong $\mathbf{P}^n$ cho hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ phân biệt $(r \geq s)$ đều không thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ nhưng có giao là một cái phẳng s–1 chiều thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$.

Bây giờ nếu gọi $\mathbf{A}^r$ và $\mathbf{A}^s$ là hai cái phẳng afin được sinh ra bởi hai cái phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ thì khi đó phương trình của chúng đối với mục tiêu afin lần lượt là:

$$(\mathbf{A}^r): \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + a_{i,n+1} = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n-r.$$

$$(\mathbf{A}^s): \sum_{j=1}^{n} b_{ij}X_j + b_{i,n+1} = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n-s.$$

Vì mỗi hệ số a_{ij} trong mỗi vế trái của n–r phương trình đầu được biểu thị tuyến tính qua các hệ số của n–s phương trình sau nghĩa là:

$$a_{ij} = k_{i1}b_{1j} + k_{i2}b_{2j} + \dots + k_{i,n-s}b_{n-s,j}$$
$$i = 1, 2, \dots, n-r$$
$$j = 1, 2, \dots, n$$

Do đó $\mathbf{A}^s$ cùng phương với $\mathbf{A}^r$ (nghĩa là $\mathbf{V}^s \subset \mathbf{V}^r$) và vì chúng là các phẳng phân biệt nên $\mathbf{A}^s$ song song với $\mathbf{A}^r$.

CHÚ Ý: Ta thường gọi các điểm của siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ là các *điểm vô tận*. Do đó nếu hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ có giao là phẳng $\mathbf{Q}$ chứa toàn điểm vô tận nghĩa là $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}^{n-1}$ thì ta nói rằng $\mathbf{A}^s$ song song với $\mathbf{A}^r$.

d) Phép biến đổi afin

Trong tập hợp tất cả những phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ ta hãy xét những phép biến đổi siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ thành chính nó.

Mỗi phép biến đổi như vậy biến mỗi điểm có tọa độ xạ ảnh $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ thành điểm có tọa độ xạ ảnh $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1})$ sao cho nếu $x_{n+1} = 0$ thì $x'_{n+1} = 0$ và nếu $x_{n+1} \neq 0$ thì $x'_{n+1} \neq 0$.

Muốn vậy trong phương trình của phép biến đổi xạ ảnh cần có phương trình $x'_{n+1} = x_{n+1}$. Do đó phương trình của phép biến đổi xạ ảnh có dạng:

$$\begin{cases} x'_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j & i = 1, 2, \dots, n \\ x'_{n+1} = x_{n+1} \end{cases}$$

Trong đó ma trận A của phép biến đổi xạ ảnh là một ma trận vuông cấp n+1 không suy biến và có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

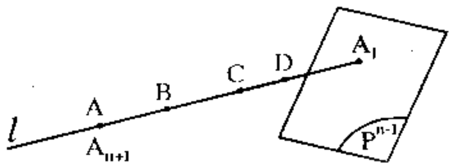
Khi đó phép biến đổi xạ ảnh nói trên của $\mathbf{P}^n$ sẽ sinh ra trên không gian afin $\mathbf{A}^n$ một phép biến đổi afin.

Kết luận: Mỗi phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ và biến $\mathbf{P}^{n-1}$ thành chính nó sẽ sinh ra trên $\mathbf{A}^n$ một phép biến đổi afin.

Ngược lại mỗi phép biến đổi afin của không gian afin $\mathbf{A}^n$ đều có thể xem như được sinh ra bởi một phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ biến siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ thành chính nó.

e) Tỉ số kép

α) Giả sử A, B, C, D là bốn điểm phân biệt nằm trên một đường thẳng xạ ảnh l của $\mathbf{P}^n$ nhưng không có điểm nào trong bốn điểm thuộc siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$.



Ta chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_i\ ;\ E\}$ sao cho $A_{n+1} \equiv A$, $A_1 = l \cap \mathbf{P}^{n-1}$. Khi đó các điểm B, C, D có tọa độ biểu thị tuyến tính qua tọa độ của A_{n+1} và A_1.

Ta có:

$$A = (0, 0, \dots, 0, 1)$$
$$B = (b, 0, \dots, 0, 1)$$
$$C = (c, 0, \dots, 0, 1)$$
$$D = (d, 0, \dots, 0, 1)$$

Thay tọa độ của các điểm A, B, C, D vào công thức định nghĩa của tỉ số kép ta có:

$$(ABCD) = \frac{c}{b-c} : \frac{d}{b-d}$$

Nếu chuyển tọa độ xạ ảnh của các điểm A, B, C, D sang tọa độ afin ta có:

Do đó $(CAB) = -\dfrac{c}{b-c}$ và $(DAB) = -\dfrac{d}{b-d}$

nên: $$\boxed{(ABCD) = \frac{(CAB)}{(DAB)}}$$

Như vậy tỉ số kép (ABCD) của bốn điểm A, B, C, D bằng tỉ số của hai tỉ số đơn (CAB, DAB).

β) Nếu có một trong bốn điểm A, B, C, D là điểm vô tận, thí dụ điểm D thuộc siêu phẳng P^{n-1} thì khi đó $D \equiv A_1$ và ta có:

$$[D] = -[A] + [B]$$

nên $$(ABCD) = \frac{c}{b-c} : \frac{1}{-1} = -\frac{c}{b-c} = (CAB)$$

Vậy $$\boxed{(ABCD_\infty) = (CAB)}$$

Đặc biệt nếu (ABCD) = –1 và D là điểm vô tận thì khi đó C là trung điểm của đoạn AB.

$$\boxed{(ABCD_\infty) = (CAB) = -1}$$

3. Vài áp dụng của mô hình

a) Dùng hình học afin để nghiên cứu hình học xạ ảnh. Ta có thể chứng minh một số định lí của hình học xạ ảnh hoặc giải một số bài toán của hình học xạ ảnh bằng cách dựa vào những kết quả đã biết của hình học afin. Sau khi chọn siêu phẳng vô tận P^{n-1} một cách khôn khéo ta có thể chuyển một bài toán xạ ảnh thành một bài toán afin mà cách giải dễ thực hiện hơn.

b) Dùng hình học xạ ảnh để nghiên cứu hình học afin

Ta có thể chứng minh một số định lí của hình học afin hoặc giải một số bài toán của hình học afin bằng cách dựa vào những kết quả đã biết của hình học xạ ảnh.

Sau khi bổ sung các điểm vô tận vào không gian afin mà tập hợp các điểm vô tận này đều thuộc một siêu phẳng, ta được không gian xạ ảnh. Ta có thể giải bài toán xạ ảnh này bằng các công cụ của hình học xạ ảnh.

c) Sáng tạo các bài toán mới

α) Từ một bài toán xạ ảnh trong không gian xạ ảnh, bằng cách chọn các siêu phẳng khác nhau đóng vai trò siêu phẳng vô tận ta có thể có nhiều bài toán afin khác nhau mà các kết quả ta có thể suy ra từ những kết quả đã biết trong không gian xạ ảnh.

β) Từ một bài toán afin ta có thể suy ra một bài toán xạ ảnh bằng cách bổ sung thêm vào không gian afin này những điểm vô tận thuộc một siêu phẳng vô tận. Khi đó ta có một bài toán của không gian xạ ảnh mà các kết quả có thể suy ra từ bài toán afin cho trước.

γ) Từ một bài toán afin ta có thể suy ra nhiều bài toán afin khác bằng cách kết hợp cả hai cách làm trên đây.

§7. NGUYÊN TẮC ĐỐI NGẪU TRONG P^n

1. Khái niệm đối ngẫu cơ bản

Điểm $\Leftrightarrow$ siêu phẳng

Điểm thuộc siêu phẳng $\Leftrightarrow$ siêu phẳng thuộc điểm.

2. Định lí

Trong P^n đối ngẫu của một m-phẳng là một (n–m–1)- phẳng.

3. Định lí

Trong P^n cho P^r và P^s là hai cái phẳng thuộc nhau thì khi đó hai cái phẳng đối ngẫu của chúng cũng thuộc nhau.

Hệ quả. Nếu $P^r \subset P^s$ thì ta có các phẳng đối ngẫu của chúng là: $P^{n-r-1} \supset P^{n-s-1}$.

4. Nguyên tắc đối ngẫu

a) Định nghĩa. Giả sử A là một mệnh đề nói về những cái phẳng của P^n và về quan hệ liên thuộc giữa những cái phẳng đó. Nếu trong A ta thay các từ "m–phẳng" bằng các từ "(n–m–1)–phẳng" còn tất cả các từ khác giữ nguyên thì khi đó ta được mệnh đề A* là *mệnh đề đối ngẫu* của mệnh đề A.

Nếu A* là mệnh đề đối ngẫu của A thì ngược lại A là mệnh đề đối ngẫu của A*. Do đó A và A* được gọi là *hai mệnh đề đối ngẫu của nhau*.

b) Nguyên tắc đối ngẫu. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ nếu A là một mệnh đề đúng thì mệnh đề đối ngẫu A* cũng đúng.

Do đó trong $\mathbf{P}^n$ áp dụng nguyên tắc đối ngẫu ta có thể thay việc chứng minh một định lí bằng cách chứng minh định lí đối ngẫu với định lí đó và có thể giải một bài toán bằng cách giải bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho.

5. Các thí dụ

• Trong $\mathbf{P}^2$:

điểm	↔	đường thẳng
hình ba đỉnh	↔	hình ba cạnh
hàng điểm	↔	chùm đường thẳng
hình bốn cạnh toàn phần	↔	hình bốn đỉnh toàn phần

• Trong $\mathbf{P}^3$:

điểm	↔	mặt phẳng
đường thẳng	↔	đường thẳng
hàng điểm	↔	chùm mặt phẳng

• Trong $\mathbf{P}^n$:

điểm	↔	siêu phẳng
đường thẳng	↔	(n−2)–phẳng
hàng điểm	↔	chùm siêu phẳng
m–phẳng	↔	(n−m−1)–phẳng

§8. SIÊU MẶT BẬC HAI TRONG $\mathbf{P}^n$

1. Định nghĩa

Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ với một mục tiêu xạ ảnh đã chọn, tập hợp tất cả những điểm X mà tọa độ $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ của chúng thỏa mãn một phương trình bậc hai có dạng:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = 0 \qquad (1)$$

với các hệ số $a_{ij} = a_{ji}$ và các a_{ij} không đồng thời bằng 0 là một siêu mặt bậc hai của $\mathbf{P}^n$.

Nếu kí hiệu vế phải của (1) là một dạng toàn phương với ma trận $A = [a_{ij}]$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

thì phương trình trên có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$[x]^* A [x] = 0 \qquad (2)$$

Trong đó [x] là ma trận cột tọa độ của điểm X và $[x]^*$ là ma trận chuyển vị của [x]. Ta gọi ma trận A là ma trận của siêu mặt bậc hai đã cho, ta có $A = A^*$ và hạng của ma trận A lớn hơn hay bằng 1. Nếu hạng của ma trận A bằng n+1 nghĩa là $\det A \neq 0$ ta nói rằng siêu mặt bậc hai đó *không suy biến*, nếu ma trận A có hạng bé hơn n+1 nghĩa là $\det A = 0$, ta nói rằng siêu mặt bậc hai khi đó *suy biến*.

Siêu mặt bậc hai của P^2 gọi là *đường bậc hai* và siêu mặt bậc hai của P^3 gọi là *mặt bậc hai*.

2.Phương trình chuẩn tắc của một siêu mặt bậc hai

Định lí: Với mọi siêu mặt bậc hai (S) của $\mathbf{P}^n$, ta luôn luôn có thể tìm được một mục tiêu tọa độ xạ ảnh, sao cho đối với mục tiêu đó phương trình (S) có dạng:

$$\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 + \dots + \mathbf{x}_k^2 - \mathbf{x}_{k+1}^2 - \dots - \mathbf{x}_r^2 = 0 \qquad (3)$$

trong đó $r \le n+1$ và $k \ge \dfrac{r}{2}$

3. Sự phân loại xạ ảnh các siêu mặt bậc hai

a)Định nghĩa. Hai siêu mặt bậc hai gọi là *cùng thuộc một loại* nếu chúng có phương trình chuẩn tắc giống nhau, nghĩa là cặp số (k, r) của các phương trình chuẩn tắc của hai siêu mặt bậc hai đó trùng nhau.

b) Định lí. Điều kiện cần và đủ để hai siêu mặt bậc hai (S_1) và (S_2) tương đương xạ ảnh với nhau là chúng thuộc cùng một loại.

c) Phân loại. Dựa vào phương trình chuẩn tắc của siêu mặt bậc hai ta có thể phân loại tập hợp tất cả các siêu mặt bậc hai (S) trong (P^n) theo cặp số (k, r). Mỗi loại được đặc trưng bằng cặp số (k, r) nên ta gọi chúng là loại (k, r).

4. Siêu mặt bậc hai trong không gian afin $A^n = P^n \backslash P^{n-1}$

Mỗi siêu mặt bậc hai của không gian afin A^n chính là một siêu mặt bậc hai trong không gian xạ ảnh P^n sau khi bỏ đi những điểm thuộc siêu phẳng P^{n-1} (nếu có)

Vậy *phương trình tiệm cận của siêu mặt bậc hai trong A^n chính là giao điểm của siêu mặt bậc hai trong P^n với siêu phẳng vô tận P^{n-1}*

Trong mô hình $A^2 = P^2 \backslash P^1$:

–Nếu conic cắt P^1 tại hai điểm : ta có đường hypebol.

–Nếu conic không cắt P^1: ta có đường elip.

–Nếu conic tiếp xúc với P^1 : ta có đường parabol.

§ 9. CỰC VÀ SIÊU PHẲNG ĐỐI CỰC ĐỐI VỚI MỘT SIÊU PHẲNG BẬC HAI

1. Định nghĩa

Trong P^n với mục tiêu xạ ảnh cho trước, cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình:

$$[x]^* A[x] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (1)$$

và một điểm U có tọa độ $(u_1, u_2, ..., u_{n+1})$. Ta hãy xét phương trình:

$$[u]^* A[x] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} u_i x_j = 0 \qquad (2)$$

nếu n+1 hệ số $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}u_i$ với j = 1,2,..., n+1 không đồng thời bằng 0

thì phương trình $\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}u_i x_j = 0$

là phương trình của một siêu phẳng P. Khi siêu phẳng P gọi là *siêu phẳng đối cực* của điểm U đối với siêu mặt bậc hai (S), còn điểm U gọi là *điểm cực* hay *cực điểm* của siêu phẳng P đối với siêu mặt bậc hai (S)

CHÚ Ý. Nếu n+1 hệ số $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}u_i$ với j = 1,2,..., n+1 đều bằng 0 thì điểm U được gọi là điểm đặc biệt của siêu mặt bậc hai (S). Như vậy sẽ không có siêu phẳng đối cực với điểm đặc biệt của (S) vì không tồn tại phương trình của siêu phẳng đó.

2. Tính chất

a) Nếu $U = (u_1, u_2, ..., u_{n+1})$ là điểm đặc biệt của (S) thì (S) suy biến và điểm $U \in (S)$

3. Định lí

Nếu (S) là một siêu mặt bậc hai không suy biến thì bất kỳ siêu phẳng nào của $\mathbf{P}^n$ cũng có một điểm cực duy nhất đối với (S).

4. Định lí

Các khái niệm "điểm cực", "siêu phẳng đối cực" trong định nghĩa nêu ở trên đều là các khái niệm xạ ảnh.

5. Giao điểm của một siêu mặt bậc hai với một đường thẳng

Trong $\mathbf{P}^n$ (n > 1) với mục tiêu xạ ảnh cho trước, cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình:

$$[x]^* A[x] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_i x_j = 0$$

và đường thẳng xác định bởi hai điểm $U(u_i)$ và $V(v_i)$ phân biệt có phương trình:

$$x_i = \lambda u_i + \mu v_i, \qquad i = 1,2,..., n+1$$

Để tìm giao điểm của đường thẳng và siêu mặt bậc hai ta cần giải phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}(\lambda u_i + \mu v_i)(\lambda u_j + \mu v_j) = 0 \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P\lambda^2 + 2Q\lambda\mu + R\mu^2 = 0} \qquad (5')$$

trong đó $P = [u]^*A[u] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}u_iu_j$

$$Q = [u]^*A[v] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}u_iv_j$$

$$R = [v]^*A[v] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}v_iv_j$$

Mỗi cặp số (λ, μ) không đồng thời bằng 0 nghiệm phương trình (5') sẽ cho ta một giao điểm cần tìm.

6. Định lí

Nếu một điểm U không thuộc siêu mặt bậc hai (S) và một đường thẳng đi qua U cắt siêu phẳng đối cực tại V đồng thời cắt (S) tại hai điểm phân biệt (thực hoặc ảo liên hợp) thì (UVMN) = –1

7. Định nghĩa

Hai điểm U, V mà thỏa mãn điều kiện (UVMN) = –1 như ở định lý 6 gọi là *liên hợp với nhau* đối với siêu mặt bậc hai (S).

Do đó ta có thể nói rằng:

Siêu phẳng đối cực của một điểm U đối với siêu mặt bậc hai (S) (U không thuộc (S)) là tập hợp tất cả những điểm V liên hợp của U đối với (S)

Ta suy ra hai điểm U,V liên hợp với nhau đối với (S) khi và chỉ khi $[u]^*A\,[v] = 0$

8. Định lí

Nếu điểm V nằm trên siêu phẳng đối cực của điểm U đối với siêu mặt bậc hai (S) thì điểm U nằm trên siêu phẳng đối cực của điểm V đối với S.

Áp dụng: Người ta áp dụng định lý này trong $\mathbf{P}^2$ để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng khi biết ba đường đối cực của chúng (đối với một đường bậc hai) đồng qui và ngược lại.

9. Siêu phẳng tiếp xúc, r – phẳng tiếp xúc

Nếu điểm U nằm trên siêu mặt bậc hai (S) nhưng không phải là điểm đặc biệt của (S) thì siêu phẳng đối cực của điểm U là siêu *phẳng tiếp xúc* của (S) tại U. Thật vậy vì siêu phẳng đối cực của điểm U đối với (S) có phương trình $[u]^*A[x] = 0$ nên nếu U thuộc (S) thì $[u]^*A[u] = 0$. Điều đó chứng tỏ U phải thuộc siêu phẳng đối cực của nó.

Mọi r-phẳng ($1 \leq r \leq n-1$) đi qua U và nằm trong siêu phẳng tiếp xúc được gọi là r-phẳng *tiếp xúc* của (S) tại U. Đường thẳng tiếp xúc với (S) tại U gọi là *tiếp tuyến* của (S) tại U.

CHÚ Ý: Các điểm đặc biệt của siêu mặt bậc hai (S) không có các r- phẳng tiếp xúc.

10. Siêu mặt lớp hai

a) Định nghĩa: Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh đã chọn, tập các siêu phẳng tạo nên một *siêu mặt lớp hai* nếu tọa độ $\{u_1, u_2, ..., u_{n+1}\}$ của chúng thỏa mãn phương trình:

$$[u]^* A[u] = 0 \text{ hoặc } \sum a_{ij}u_iu_j = 0$$

trong đó $a_{ij} = a_{ji}$ và các a_{ij} không đồng thời bằng 0. Nếu ma trận $A = [a_{ij}]$ không suy biến ta có *siêu mặt lớp hai không suy biến* và ngược lại nếu A suy biến ta có *siêu mặt lớp hai suy biến*

CHÚ Ý: Siêu mặt lớp hai là khái niệm đối ngẫu của siêu mặt bậc hai.

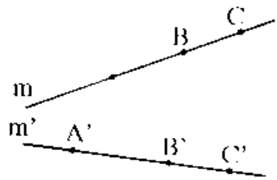
b) Định lý: Tập hợp tất cả các siêu phẳng tiếp xúc với siêu mặt bậc hai không suy biến$[x]^* A[x] = 0$ là một siêu mặt lớp hai có phương trình $[u]^* A^{-1}[u] = 0$

§10. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ QUAN TRỌNG TRONG P^2

1. Ánh xạ xạ ảnh

a) Ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm và hai chùm đường thẳng. Ánh xạ f biến mỗi điểm của đường thẳng m thành một điểm của đường thẳng m' hoặc biến mỗi đường thẳng của chùm tâm S thành một đường thẳng của chùm tâm S' là *ánh xạ* xạ ảnh nếu nó bảo tồn tỉ số kép 4 điểm của hàng hoặc bảo tồn tỉ số kép 4 đường thẳng của chùm.

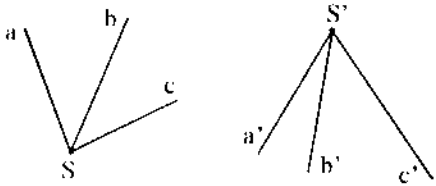
Khi đó ta nói rằng có một *liên hệ xạ ảnh* giữa hai hàng điểm hoặc giữa hai chùm đường thẳng. Ta kí hiệu sự liên hệ xạ ảnh giữa hai hàng điểm m và m' như sau:



$\{A, B, C, ...\} \barwedge \{A', B', C', ...\}$

hoặc $\{m\} \barwedge \{m'\}$

Tương tự ta cũng kí hiệu sự liên hệ xạ ảnh giữa hai chùm tâm S và tâm S' như sau:



$\{a, b, c, ...\} \barwedge \{a', b', c', ...\}$ hoặc $\{S\} \barwedge \{S'\}$

CHÚ Ý: Ánh xạ xạ ảnh ở đây chính là phép đẳng cấu xạ ảnh giữa hai hàng điểm hoặc giữa hai chùm đường thẳng.

b) Sự xác định ánh xạ xạ ảnh trong P^2

Định lí. Nếu cho ba điểm A, B, C phân biệt thuộc đường thẳng m và ba điểm A', B', C' phân biệt thuộc đường thẳng m' thì khi đó có một phép ánh xạ xạ ảnh duy nhất $f: \{m\} \to \{m'\}$ sao cho $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

Định lí đối ngẫu. Cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c thuộc chùm tâm S và ba đường thẳng phân biệt thuộc chùm tâm S' thì khi đó có một phép đẳng cấu xạ ảnh duy nhất f: {S} → {S'} sao cho f(a) = a' ; f(b) = b' ; f(c) = c'.

2. Phép phối cảnh

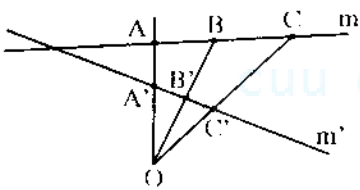
a) Định nghĩa • Một ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm gọi là *phép phối cảnh* (hay phép chiếu xuyên tâm) nếu đường thẳng nối các điểm tương ứng luôn luôn đi qua một điểm O cố định. Ta gọi O là *tâm phối cảnh*.

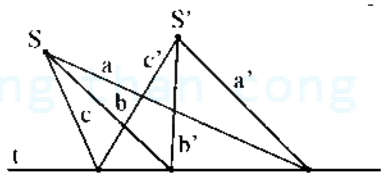
• Một ánh xạ xạ ảnh giữa hai chùm đường thẳng gọi là *phép phối cảnh* nếu giao điểm của các cặp đường thẳng tương ứng luôn luôn nằm trên một đường thẳng t cố định. Ta gọi t là *trục phối cảnh*.

Ta kí hiệu sự liên hệ phối cảnh giữa hai hàng điểm hoặc giữa hai chùm như sau:

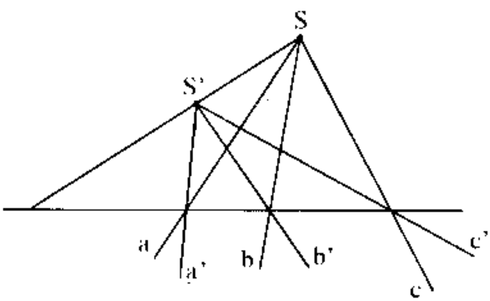
{A, B, C,....} $\stackrel{=}{\wedge}$ {A', B', C', ...}   {a, b, c, ...} $\stackrel{=}{\wedge}$ {a', b', c', ...}

Hoặc {m} $\stackrel{=}{\wedge}$ {m'}   {S} $\stackrel{=}{\wedge}$ {S'}





b) Định lí. Điều kiện cần và đủ để phép ánh xạ xạ ảnh f: {m} → {m'} giữa hai điểm trở thành phép phối cảnh là giao điểm O của hai giá tự ứng nghĩa là f (O) = O.



c) Định lí đối ngẫu. Điều kiện cần và đủ để ánh xạ xạ ảnh f giữa hai chùm đường thẳng trở thành phép phối cảnh là đường thẳng nối hai tâm tự ứng

f: {S} → {S'} là phối cảnh ⇔ f(SS') = SS'

3. Định lí Steiner

a) Định lí thuận: Nếu ánh xạ xạ ảnh f: $\{A_1\} \to \{A_2\}$ giữa hai chùm tâm A_1 và A_2 không phải là một phép phối cảnh thì giao điểm của các đường thẳng tương ứng nằm trên một đường conic.

b) Định lí đảo. Nếu A_1, A_2 là hai điểm cố định của một đường conic (S) và M là một điểm thay đổi trên (S) thì ánh xạ f: $\{A_1\} \to \{A_2\}$ giữa hai chùm sao cho f $(A_1M) = A_2M$ là một ánh xạ xạ ảnh nhưng không phải là phối cảnh.

Định lí thuận đối ngẫu. Nếu f: $\{m_1\} \to \{m_2\}$ là ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm có giá là các đường thẳng m_1, m_2 nhưng không phải là phối cảnh thì các đường thẳng nối các cặp điểm tương ứng sẽ tiếp xúc với một đường conic.

Định lí đảo đối ngẫu. Nếu m_1 và m_2 là hai tiếp tuyến khác nhau của một đường conic và m là một tiếp tuyến thay đổi của nó thì phép ánh xạ f: $\{m_1\} \to \{m_2\}$ sao cho giao điểm của m_1 và m biến thành giao điểm của m_2 và m thì f là một ánh xạ xạ ảnh nhưng không phải là phối cảnh.

4. Vấn đề xác định một conic

a) Định lí. Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, bao giờ cũng có một đường conic duy nhất đi qua 5 điểm đó.

b) Định lí đối ngẫu. Cho 5 đường thẳng a, b, c, d, e trong đó không có ba đường nào đồng quy, bao giờ cũng có một đường conic duy nhất tiếp xúc với 5 đường thẳng đó.

c) Các trường hợp đặc biệt

Nếu ta thay điều kiện đường conic đi qua một điểm bằng điều kiện conic đó tiếp xúc với một đường thẳng ta có các trường hợp đặc biệt sau đây:

- Cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và một đường thẳng a đi qua điểm A nhưng không đi qua các điểm còn lại. Khi đó có một conic duy nhất đi qua A, B, C, D và tiếp xúc với a tại A.

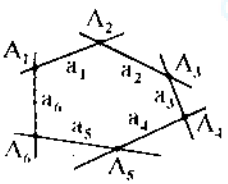
• Cho 4 đường thẳng a, b, c, d trong đó không có ba đường nào đồng quy và một điểm A thuộc a nhưng không thuộc các đường thẳng còn lại. Khi đó có một conic duy nhất tiếp xúc với a, b, c, d và đi qua A.

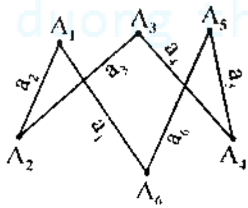
• Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng, đường thẳng a đi qua A nhưng không đi qua B và C, đường thẳng b đi qua B nhưng không đi qua A và C. Khi đó có một conic duy nhất đi qua C tiếp xúc với a tại A và tiếp xúc với b tại B.

• Cho ba đường thẳng a, b, c không đồng quy, điểm A thuộc đường thẳng a nhưng không thuộc b và c, điểm B thuộc đường thẳng b nhưng không thuộc a và c. Khi đó có một đường conic duy nhất tiếp xúc với c, tiếp xúc với a tại A và tiếp xúc với b tại B.

5. Định lí Pascal (Paxcan)

a) Định nghĩa. Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$, tập hợp 6 điểm và 6 đường thẳng sao cho mỗi điểm là giao của hai đường thẳng, mỗi đường thẳng đi qua hai và chỉ hai điểm, gọi là một *hình lục giác*.





Các điểm đã cho gọi là *đỉnh* và các đường thẳng đã cho gọi là *cạnh* của hình lục giác.

Xét hình lục giác có các đỉnh và các cạnh theo thứ tự là A_1,a_1, A_2,a_2,A_3,a_3,A_4,a_4, A_5,a_5,A_6,a_6 (xem hình vẽ)

Khi đó các cặp đỉnh A_1 và A_4, A_2 và A_5, A_3 và A_6 gọi là các *cặp đỉnh đối diện*, các cặp cạnh a_1 và a_4, a_2 và a_5, a_3 và a_6 gọi là các *cặp cạnh đối diện*.

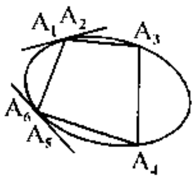
b) Định lí Pascal

Điều kiện cần và đủ để một lục giác nội tiếp trong một conic (các đỉnh của nó thuộc conic) là giao điểm của các cặp cạnh đối diện nằm trên một đường thẳng (đường thẳng này gọi là đường thẳng Pascal)

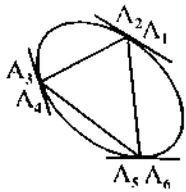
c) Các trường hợp đặc biệt của định lí Pascal

Ta có thể xem ngũ giác, tứ giác, tam giác nội tiếp một conic là các trường hợp đặc biệt của lục giác khi một cặp đỉnh, hai cặp đỉnh hay ba cặp đỉnh trùng nhau. Khi đó ta xem cạnh của lục giác chứa cặp đỉnh trùng nhau là tiếp tuyến của conic tại điểm đó. Người ta chứng minh được định lí Pascal vẫn đúng trong các trường hợp đặc biệt đó. Các trường hợp suy biến của lục giác minh họa bằng các hình vẽ sau đây (Hình a, b, c):

a)



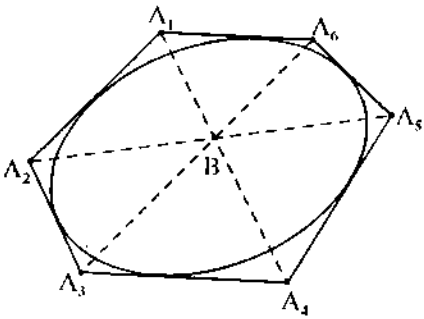
b)



c)

6. Định lí Brianchon (Briăng-sông)

a) Định lí. Điều kiện cần và đủ để một lục giác ngoại tiếp một đường conic (có cạnh tiếp xúc với conic) là các đường thẳng nối các đỉnh đối diện đồng quy tại một điểm (gọi là điểm Brianchon)

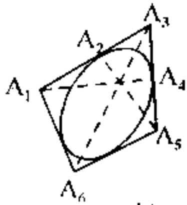


CHÚ Ý: Định lí Brianchon là định lí đối ngẫu của định lí Pascal trong $\mathbf{P}^2$

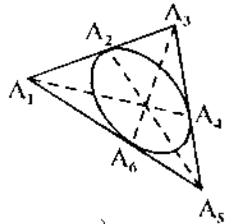
b) Các trường hợp đặc biệt của định lí Brianchon

Tương tự như đối với định lí Pascal, ta có thể xem ngũ giác, tứ giác, tam giác ngoại tiếp conic là những trường hợp đặc biệt của lục giác khi có một cặp cạnh, hai cặp cạnh hay ba cặp cạnh trùng nhau. Khi đó ta xem đỉnh của cặp cạnh trùng nhau là tiếp điểm của conic với cặp cạnh đó.Các trường hợp suy biến của lục giác ngoại tiếp conic được minh họa bằng các hình vẽ sau đây (Hình a, b, c)

a)



b)



c)

CHÚ Ý: Định lí Pascal và định lí Brianchon có thể được áp dụng đối với các đường bậc hai trong mặt phẳng afin (như elip, hypebol, parabol) và trong mặt phẳng Ơclit (như đường tròn).

§11. MÔ HÌNH XẠ ẢNH CỦA KHÔNG GIAN ƠCLIT

1. Xây dựng mô hình

Nếu ta chọn trong không gian xạ ảnh n chiều một siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ làm siêu phẳng vô tận, ta được một không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \setminus \mathbf{P}^{n-1}$.

Bây giờ ta định nghĩa tích vô hướng cho hai vectơ bất kì trong không gian vectơ liên kết với không gian afin $\mathbf{A}^n$, ta sẽ làm cho $\mathbf{A}^n$ trở thành không gian Ơclit n chiều $\mathbf{E}^n$. Mô hình đó được gọi là *mô hình xạ ảnh của không gian Ơclit.*

Ta hãy chọn trong không gian $\mathbf{E}^n$ đó một mục tiêu trực chuẩn $\{A_{n+1}, E_i\}$ tức là:

$$\overline{A_{n+1}E_i}.\overline{A_{n+1}E_j} = \begin{cases} 0 \text{ khi } i \neq j \\ 1 \text{ khi } i = j \end{cases} \quad \text{với } i, j = 1,2,\dots, n$$

Ta hãy gọi $\{A_i; E\}$ là mục tiêu xạ ảnh sinh ra mục tiêu trực chuẩn $\{A_{n+1}; E_i\}$. Điều đó có nghĩa là: A_i là giao điểm của đường thẳng $A_{n+1}E_i$ với siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ với $i = 1,2,...n$ còn E là điểm của $\mathbf{E}^n$ có tọa độ trực chuẩn là $(1,1,...1)$.

Khi đó ta có = $\overline{A_{n+1}E} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_{n+1}E_i}$

Ta chú ý rằng nếu một điểm $X \in \mathbf{E}^n$ có tọa độ đối với mục tiêu trực chuẩn $\{A_{n+1}; E_i\}$ là $(X_1, X_2, ..., X_n)$ thì nó sẽ có tọa độ đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ là $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ với $x_{n+1} \neq 0$ và

$$X_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}, \quad i = 1,2 ..., n$$

Đối với mục tiêu trực chuẩn đã chọn hai vectơ $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ và $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_{n+1})$ sẽ có tích vô hướng là:

$$\vec{u}.\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = [u]^*[v]$$

2. Cái tuyệt đối của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$

Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ ta chọn siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ có phương trình $x_{n+1} = 0$. Trong siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ ta lấy mục tiêu $\{A_1, A_2, ..., A_n ; E'\}$ trong đó E' là giao của đường thẳng $A_{n+1}E$ với siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$. Ta hãy xét một siêu mặt trái xoan không T có phương trình đối với mục tiêu $\{A_1, A_2, ..., A_n; E'\}$ là:

$$[x]^*[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

Siêu mặt trái xoan không T gọi là *cái tuyệt đối* của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$.

3.Vài khái niệm cơ bản của hình học Ơclit thể hiện trên mô hình

a) Sự vuông góc của hai đường thẳng

Định lí. Điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau là hai điểm vô tận của chúng liên hợp với nhau đối với cái tuyệt đối T.

b) Siêu cầu

Định lí : Mỗi siêu mặt bậc hai trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ là một siêu cầu khi và chỉ khi nó cắt siêu phẳng vô tận theo cái tuyệt đối T.

c) Phép đồng dạng. Định lí sau đây sẽ nêu lên ý nghĩa xạ ảnh của phép đồng dạng:

Định lí. Mỗi phép biến đổi afin của không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ là một phép đồng dạng khi và chỉ khi nó được sinh ra bởi một phép biến đổi của $\mathbf{P}^n$ sao cho cái tuyệt đối T được giữ nguyên.

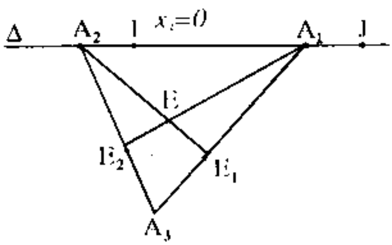
4. Các nhóm con của nhóm các phép biến đổi xạ ảnh

Gọi $\mathcal{K}^n$ là nhóm các phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ và khi đó hình học xạ ảnh là hình học của nhóm $\mathcal{K}^n$. Nếu trong $\mathbf{P}^n$ ta chọn một siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ làm siêu phẳng vô tận thì các phép biến đổi xạ ảnh giữ nguyên $\mathbf{P}^{n-1}$ làm thành một nhóm con của nhóm $\mathcal{K}^n$. Nhóm con này đẳng cấu với nhóm các phép biến đổi afin $\mathcal{A}^n$ của không gian afin $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \setminus \mathbf{P}^{n-1}$.

Nếu bây giờ xét tập hợp các phép biến đổi xạ ảnh giữ nguyên $\mathbf{P}^{n-1}$ và giữ nguyên cái tuyệt đối T thì tập hợp đó làm thành một nhóm con đẳng cấu với nhóm các phép đồng dạng của $\mathbf{E}^n$. Tóm lại ta có:

nhóm xạ ảnh $\supset$ nhóm afin $\supset$ nhóm đồng dạng $\supset$ nhóm dời

hình học xạ ảnh $\subset$ hình học afin $\subset$ hình học đồng dạng $\subset$ hình học Ơclit.



5. Mô hình xạ ảnh của mặt phẳng Ơclit

Ta chọn trong mặt phẳng xạ ảnh P^2 một đường thẳng Δ làm đường thẳng vô tận. Chọn mục tiêu xạ ảnh sao cho Δ có phương trình $x_3 = 0$. Đường thẳng Δ như vậy sẽ đi qua A_1,

A_2 của mục tiêu.

Cái tuyệt đối T trên Δ là hai cặp điểm ảo I, J liên hợp thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ta có I(1,i,0) , J(1,–i,0) là hai điểm cyclic (hay là hai viên điểm) của mô hình.

B. ĐỀ BÀI TẬP

§1, §2, §3

3.1. Trong không gian Euclide n chiều đã cho một mục tiêu trực chuẩn, cho một siêu cầu S có phương trình:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

Gọi S' là tập hợp các cặp điểm xuyên tâm đối của S. Hãy xây dựng S' trở thành một không gian xạ ảnh n–1 chiều.

3.2. Gọi S và S' là các tập hợp như ở bài 3.1, còn B là tập hợp các điểm nằm trong siêu cầu S

$$B = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n \middle| x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1\right\}$$

Hãy xây dựng B' = B∪S' trở thành một không gian xạ ảnh n chiều.

3.3. Chứng minh rằng tập hợp siêu phẳng cùng đi qua một điểm cố định của không gian afin A^n có thể được xây dựng thành một không gian xạ ảnh n chiều.

3.4. Chứng minh rằng nếu có một m – phẳng xạ ảnh đi qua m+1 điểm độc lập của một p – phẳng (m < p) thì nó nằm trên p – phẳng đó.

3.5. Trong không gian xạ ảnh P^n cho hai cái phẳng P^r và P^s. Tổng của hai cái phẳng này là một cái phẳng có số chiều bé nhất chứa cả $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$. Giao của hai cái phẳng này là một cái phẳng có số chiều lớn nhất chứa trong $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$. Chứng minh rằng nếu p và q là số chiều của tổng và giao thì:

a) $r + s = p + q$ nếu $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ có điểm chung

b) $r + s = p + q - 1$ nếu $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ chéo nhau.

3.6. Tìm điều kiện cần và đủ để hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ của không gian $\mathbf{P}^n$ chéo nhau.

3.7. Cho hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ của không gian $\mathbf{P}^n$. Chứng minh rằng tập hợp tất cả các điểm nằm trên tất cả các đường thẳng MN với $M \in \mathbf{P}^r$, $N \in \mathbf{P}^s$ là tổng của $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$.

3.8. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ cho mục tiêu xạ ảnh $\{A_1,A_2,A_3;E\}$ và các điểm $A'_1=(0,1,1)$, $A'_2=(2,0,1)$, $A'_3=(1,1,0)$, $E'=(1,1,1)$

a) Chứng tỏ có thể chọn hệ điểm $\{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$ làm mục tiêu xạ ảnh của $\mathbf{P}^2$.

b) Lập công thức đổi mục tiêu từ $\{A_1,A_2,A_3;E\}$ sang $\{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$.

3.9. Trong $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho các điểm $A'_1(0,1,1)$, $A'_2(2,0,1)$, $A'_3(1,1,0)$, $E'(1,1,1)$.

a) Tìm ma trận chuyển mục tiêu từ mục tiêu $\{A_i;E\}$ sang mục tiêu $\{A'_i;E'\}$

b) Tìm tọa độ của điểm M(1,2,3) đối với mục tiêu $\{A'_i;E'\}$

3.10. Trong $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho các điểm $A'_1(1,1,0)$, $A'_2(0,1,-2)$, $A'_3(1,1,1)$, $E'(2,3,-5)$.

a) Tìm ma trận chuyển mục tiêu từ mục tiêu $\{A_i; E\}$ sang mục tiêu $\{A'_i;E'\}$.

b) Tìm tọa độ của điểm N(0,1,1) đối với mục tiêu $\{A'_i;E'\}$.

3.11. Trong $\mathbf{A}^2$ với mục tiêu afin $\{A_3; E_1, E_2\}$ cho điểm E(1,1). Từ một điểm O nằm ngoài mặt phẳng afin đó, ta gọi

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA'_1} = \overrightarrow{A_3E_1}\ ,\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{OA'_2} = \overrightarrow{A_3E_2}\ , \vec{e}_3 = \overrightarrow{OA_3}, \vec{e} = \overrightarrow{OE}\ .$$

Ta có e_1, e_2, e_3 là một cơ sở của V^3. Bây giờ ta bổ sung các phần tử vô tận vào mặt phẳng afin đã cho để có mặt phẳng xạ ảnh P^2. Gọi $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ là mục tiêu xạ ảnh ứng với cơ sở nói trên.

a) Nếu một điểm X của mặt phẳng afin có tọa độ là (x_1, x_2) thì điểm đó có tọa độ xạ ảnh là bao nhiêu?

b) Các điểm vô tận được bổ sung vào mặt phẳng afin có tọa độ xạ ảnh là bao nhiêu?

3.12. Mặt phẳng afin A^2 được bổ sung các điểm vô tận để trở thành một mặt phẳng xạ ảnh P^2. Trong A^2 ta chọn một mục tiêu afin và xét các điểm có tọa độ đối với mục tiêu đó như sau: $A_1 = (1,0)$, $A_2 = (0,1)$, $A_3 = (0,0)$ và $E(1,1)$. Xem $\{A_1,A_2,A_3;E\}$ là mục tiêu xạ ảnh của P^2. Nếu một điểm M có tọa độ afin là (x_1, x_2) thì tọa độ xạ ảnh của nó bằng bao nhiêu? Điểm vô tận của mỗi đường thẳng afin Δ sẽ có tọa độ xạ ảnh là bao nhiêu nếu biết phương trình của đường thẳng Δ đối với mục tiêu afin đã cho?

3.13. Trong P^n với mục tiêu $\{A; E\}$ cho trước:

a) Lập phương trình tham biến và phương trình tổng quát của m–phẳng đi qua m+1 đỉnh đầu tiên và mục tiêu.

b) Lập phương trình tham biến và phương trình tổng quát của m–phẳng đi qua m+1 đỉnh cuối của mục tiêu.

c) Lập phương trình tổng quát của siêu phẳng đi qua tất cả các đỉnh của mục tiêu trừ đỉnh thứ k.

3.14. Trong mặt phẳng xạ ảnh P^2 với mục tiêu $\{A_1,A_2,A_3;E\}$ cho trước. Gọi $\{i, j, k\}$ là một hoán vị của tập hợp $\{1, 2, 3\}$ và

$$E_i = A_iE \cap A_jA_k,\quad E_i' = A_iE \cap E_jE_k$$

a) Tìm tọa độ của các đường thẳng A_iE $(i = 1, 2, 3)$

b) Tìm tọa độ của các điểm E_i, E_i' $(i = 1, 2, 3)$

c) Chứng minh rằng ba điểm E'_1, E'_2, E'_3 thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng đi qua ba điểm đó.

3.15. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai điểm $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ phân biệt.

Chứng tỏ rằng hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm và tọa độ giao điểm là:

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

3.16. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai đường thẳng a và b khác nhau có tọa độ là (a_1,a_2,a_3) và (b_1,b_2,b_3). Chứng tỏ rằng hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm và tọa độ giao điểm là:

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

3.17. Trong $\mathbf{P}^2$ cho ba điểm $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để ba điểm đó thẳng hàng là:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

3.18. Trong $\mathbf{P}^2$ cho ba đường thẳng a,b,c lần lượt có tọa độ (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) và (c_1,c_2,c_3). Chứng minh điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng a,b,c đồng quy là:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

3.19. Chứng minh định lí Pappus: Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ cho ba điểm A, B, C nằm trên đường thẳng d và ba điểm A', B', C' nằm trên đường thẳng d'. Chứng minh rằng các điểm sau đây thẳng hàng:

$$AB' \times A'B,\ AC' \times A'C \text{ và } BC' \times B'C$$

(kí hiệu AB là đường thẳng đi qua hai điểm A và B, còn $BC' \times B'C$ là giao điểm của hai đường thẳng BC' và B'C).

3.20. Trong $\mathbf{P}^2$ cho tam giác $A_1A_2A_3$ và hai đường thẳng p và q phân biệt không đi qua các đỉnh của tam giác đó. Các đường thẳng p và q cắt các cạnh A_iA_j lần lượt tại P_k và Q_k (ở đây $\{i,j,k\}$ là một hoán vị của tập hợp $\{1,2,3\}$).

Gọi $M_1 = P_2Q_3 \cap Q_2P_3$, $M_2 = P_1Q_3 \cap Q_1P_3$, $M_3 = P_1Q_2 \cap Q_1P_2$. Chứng minh rằng M_1, M_2, M_3 thẳng hàng.

3.21. Chứng minh định lí Desargues trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$. Cho hai tam giác ABC và A'B'C'. Chứng minh rằng đường thẳng nối ba đỉnh AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi các giao điểm $AB \times A'B'$, $BC \times B'C'$, $AC \times A'C'$ thẳng hàng.

3.22. Trong $\mathbf{P}^2$ cho một tam giác ABC và một điểm S. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AS và BC, BS và CA, CS và AB. Chứng minh rằng các điểm $AB \times A'B'$, $BC \times B'C'$, $AC \times A'C'$ thẳng hàng.

3.23. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho $\mathbf{P}$ là m–phẳng đi qua m+1 đỉnh đầu tiên của mục tiêu và $\mathbf{Q}$ là cái phẳng đi qua các đỉnh còn lại.

a) Lập phương trình tổng quát của $\mathbf{P}$ và $\mathbf{Q}$.

b) Xét vị trí tương đối của $\mathbf{P}$ và $\mathbf{Q}$.

c) Tìm số chiều của phẳng tổng $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$.

3.24. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho P là siêu phẳng đi qua n đỉnh đầu tiên của mục tiêu và gọi E' là giao điểm của đường thẳng $A_{n+1}E$ với siêu phẳng P.

a) Chứng minh rằng $\{A_i; E'\}$ là mục tiêu xạ ảnh trong P.

b) Chứng minh rằng nếu điểm X thuộc P có tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ thì điểm đó có tọa độ đối với mục tiêu $\{A_i; E'\}$ là $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

3.25. Trong $\mathbf{P}^2$ cho tam giác $A_1A_2A_3$ và một đường thẳng e không đi qua các đỉnh của tam giác đó. Chứng minh rằng luôn luôn tồn tại một điểm E sao cho đối với mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ đường thẳng e có phương trình $x_1+x_2+x_3 = 0$ (Đường thẳng e này được gọi là đường thẳng đơn vị).

3.26. Trong $\mathbf{P}^3$ viết phương trình của một đường thẳng đi qua một điểm M đã cho và cắt hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cho trước không chứa M.

3.27. Trong $\mathbf{P}^3$ cho hai đường thẳng có phương trình:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = 0 \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4 = 0 \end{cases}$$

Tìm điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng đó chéo nhau.

§4

3.28. Tìm phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f của $\mathbf{P}^n$ biến các đỉnh A_i của mục tiêu $\{A_i; E\}$ thành chính nó, nghĩa là $f(A_i) = A_i$, $i = 1, 2, ..., n+1$.

3.29. Tìm phương trình của phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ biến các đỉnh A_i của mục tiêu $\{A_i; E\}$ thành chính nó và biến các điểm của siêu phẳng $x_{n+1} = 0$ thành chính nó.

Chứng minh rằng mỗi phép biến đổi xạ ảnh như thế biến các đường thẳng đi qua điểm A_{n+1} thành chính nó.

3.30. Trong $\mathbf{P}^2$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình:

$$\begin{cases} kx'_1 = x_2 + x_3 \\ kx'_2 = x_1 + x_3 \\ kx'_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Hãy tìm các điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh đó.

3.31. Trong $\mathbf{P}^2$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình:

$$\begin{cases} kx'_1 = 4x_1 - x_2 \\ kx'_2 = 6x_1 - 3x_2 \\ kx'_3 = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

Hãy tìm các điểm kép và các đường thẳng bất biến qua phép biến đổi xạ ảnh f.

3.32. Trong $\mathbf{P}^2$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình:

$$\begin{cases} kx'_1 = x_2 + x_3 \\ kx'_2 = x_1 + x_3 \\ kx'_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng f là một phép thấu xạ. Xác định tâm và nền của phép thấu xạ.

3.33. Trong $\mathbf{P}^2$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình:

$$\begin{cases} kx'_1 = x_2 - x_3 \\ kx'_2 = x_1 + x_3 \\ kx'_3 = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng f là một phép thấu xạ. Xác định tâm và nền của phép thấu xạ.

3.34. Tìm điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh sau đây:

$$\begin{cases} x'_1 = ax_1 + a_1x_{n+1} \\ x'_2 = ax_2 + a_2x_{n+1} \\ \dots \quad \dots \quad \dots\dots\dots \\ x'_{n+1} = ax_{n+1} + a_{n+1}x_{n+1} \end{cases}$$

3.35. Trong $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu $\{A_i; E\}$ cho phép biến đổi xạ ảnh f xác định bởi

$$f(A_1) = A_3;\ f(A_3) = A_1;\ f(A_2) = E;\ f(E) = A_2$$

a) Viết phương trình của f đối với mục tiêu đã chọn

b) Tìm các điểm kép của f.

c) Cho một điểm M tùy ý trong $\mathbf{P}^2$, gọi N là ảnh của M. Chứng minh rằng M là ảnh của N.

3.36. Chứng minh rằng trong $\mathbf{P}^2$ nếu một phép biến đổi xạ ảnh f có 3 điểm kép thẳng hàng thì nó là phép thấu xạ.

3.37. Một phép biến đổi xạ ảnh f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ gọi là một phép thấu xạ m – cặp nếu tồn tại hai cái phẳng $\mathbf{P}^m$ (m < n) và $\mathbf{P}^{n-m-1}$ không cắt nhau và chứa toàn những điểm kép (gọi là cơ sở thấu xạ)

a) Bằng cách chọn một mục tiêu thích hợp, hãy viết phương trình của phép thấu xạ m – cặp.

b) Chứng minh rằng nếu M và M' là một cặp điểm tương ứng nào đó của f thì đường thẳng MM' cắt $\mathbf{P}^n$ và $\mathbf{P}^{n-m-1}$ tại hai điểm U, V sao cho (MM'UV) là một hằng số k.

• Nếu k = 0 ta có phép thấu xạ 0 – cặp (đó là một phép thấu xạ mà tâm thấu xạ không nằm trên nền thấu xạ).

• Nếu k = –1 ta có phép thấu xạ đối hợp.

3.38. Chứng minh rằng tập hợp tất cả các phép thấu xạ có chung một nền lập thành một nhóm con của nhóm các phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$.

3.39. Chứng minh rằng tập hợp tất cả các phép thấu xạ m – cặp có cùng cơ sở thấu xạ lập thành một nhóm con của nhóm các phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$, nhóm này đẳng cấu với nhóm nhân các số khác 0 của trường K.

3.40. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh đã chọn $\{A_i; E\}$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình $[x'] = B[x]$ và một siêu phẳng có phương trình $u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_{n+1}x_{n+1} = 0$. Hãy tìm ảnh của siêu phẳng qua phép biến đổi xạ ảnh đã cho.

3.41. Trong $\mathbf{P}^n$ gọi f là phép biến đổi xạ ảnh xác định bởi hai mục tiêu $\{A_i; E\}$ và $\{A'_i; E'\}$ sao cho $f(A_i) = A'_i$, i = 1,2,..., n+1 và $f(E) = E'$. Chứng minh rằng nếu một điểm $X \in P^n$ có tọa độ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ thì điểm $X' = f(X)$ cũng có tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ đối với mục tiêu $\{A'_i;E'\}$

§5

3.42. Trong $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh cho trước, cho ba điểm A(1,2,0), B(2,1,1), C(5,4,2)

a) Tính tỉ số kép (ABCD) biết rằng điểm D có tọa độ là (4,5,1)

b) Tìm tọa độ điểm M sao cho (ABCM) = –1

3.43. Trong $\mathbf{P}^2$ cho ba điểm A,B,C phân biệt cùng thuộc một đường thẳng. Bằng cách dựng các đường thẳng hãy dựng điểm D sao cho:

a) (ABCD) = –1

b) (ABDC) = –1

3.44. Cho bốn điểm A,B,C,D thuộc một đường thẳng xạ ảnh. Cho biết (ABCD) = λ hãy tìm ra tất cả các tỉ số kép có giá trị khác nhau có thể thành lập từ hệ bốn điểm đó.

3.45. Cho 5 điểm A,B,C,D,E phân biệt thuộc đường thẳng xạ ảnh. Chứng minh rằng:

$$(ABCD) \,.\, (ABDE) \,.\, (ABEC) = 1$$

3.46. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai đường thẳng a,b phân biệt cắt nhau tại O và một điểm M không thuộc hai đường thẳng đó. Một đường thẳng d đi qua M lần lượt cắt a,b tại U và V. Trên d ta lấy một điểm N không trùng với M,U,V và giả sử ta có (MNUV) = k. Tìm quĩ tích những điểm N khi d thay đổi nhưng luôn luôn đi qua điểm M cho trước.

3.47. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai đường thẳng phân biệt a,b cắt nhau tại O và một điểm M không thuộc hai đường thẳng đó. Qua M có hai đường thẳng m, m' thay đổi. Đường thẳng m cắt a, b lần lượt tại A và B còn đường thẳng m' cắt a, b lần lượt tại A' và B'. Tìm quỹ tích điểm $N = AB' \cap A'B$.

3.48. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho tam giác $A_1A_2A_3$ và một đường thẳng d không đi qua các đỉnh của tam giác đó. Gọi K_1, K_2, K_3 lần lượt là giao điểm của d đối với các đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Giả sử L_1, L_2, L_3 là ba điểm lần lượt nằm trên ba đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm L_1, L_2, L_3 thẳng hàng khi và chỉ khi

$$(A_2A_3K_1L_1) . (A_3A_1K_2L_2) . (A_1A_2K_3L_3) = 1$$

b) Ba đường thẳng A_1L_1, A_2L_2, A_3L_3 đồng qui khi và chỉ khi:

$$(A_2A_3K_1L_1) . (A_3A_1K_2L_2) . (A_1A_2K_3L_3) = -1$$

3.49. Trên đường thẳng xạ ảnh cho một mục tiêu xạ ảnh và bốn điểm A,B,C,D có tọa độ xạ ảnh không thuần nhất lần lượt là a, b, c, d. Chứng minh rằng:

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

§6

3.50. Chứng minh định lí Pappus bằng cách dùng mô hình xạ ảnh của không gian afin.

3.51. Chứng minh định lí Desargues bằng cách dùng mô hình xạ ảnh của không gian afin.

3.52. Trong mặt phẳng afin cho ba điểm L_1, L_2, L_3 lần lượt trên ba cạnh A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2 của một tam giác $A_1A_2A_3$ cho trước. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để L_1,L_2,L_3 thẳng hàng là:

$$(L_1A_2A_3).(L_2A_3A_1).(L_3A_1A_2) = 1$$

3.53. Trong mặt phẳng afin cho ba điểm L_1, L_2, L_3 lần lượt trên ba cạnh A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2 của một tam giác $A_1A_2A_3$ cho trước. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để A_1L_1, A_2L_2, A_3L_3 đồng qui là:

$$(L_1A_2A_3).(L_2A_3A_1).(L_3A_1A_2) = -1$$

3.54. Trong mặt phẳng afin cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Ta lấy hai điểm A và B trên đường thẳng a và một điểm P không thuộc a.

a) Bằng cách chỉ dùng thước, hãy dựng trung điểm I của đoạn AB.

b) Cũng chỉ dùng thước, hãy dựng một đường thẳng qua P và song song với a.

3.55. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và một đường thẳng d không đi qua các điểm đó. Gọi $B_{ij} = d \cap A_iA_j$ với $i,j = 1,2,3,4$ và $i \neq j$. Gọi C_{ij} là điểm liên hiệp điều hòa với B_{ij} đối với A_i và A_j.

a) Chứng minh rằng C_{12}, C_{14}, B_{24} thẳng hàng. Bằng cách chứng minh tương tự, hãy chỉ ra các bộ ba điểm thẳng hàng khác.

b) Chứng minh ba đường thẳng $C_{12}C_{34}$, $C_{13}C_{24}$, $C_{14}C_{23}$ đồng qui.

3.56. Trong mặt phẳng afin cho hình bình hành ABCD. Từ một điểm M tùy ý trên cạnh AB ta dựng đường thẳng a cắt cạnh BC tại N và từ một điểm Q tùy ý trên cạnh AD ta dựng đường thẳng b song song với a cắt CD tại P. Các đường thẳng MP, NQ của hình thang MNPQ cắt nhau tại O. Chứng minh rằng ba điểm O, B, D thẳng hàng.

3.57. Trong mặt phẳng afin cho tam giác $A_1A_2A_3$. Một đường thẳng d không đi qua các đỉnh của tam giác đó cắt các đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 lần lượt tại P_1, P_2, P_3. Ta gọi B_1 là điểm đối xứng của A_1 qua trung điểm của đoạn P_2P_3, B_2 là điểm đối xứng của A_2 qua trung điểm của đoạn P_3P_1 và B_3 là điểm đối xứng của A_3 qua trung điểm của đoạn P_1P_2. Chứng minh rằng ba điểm B_1, B_2, B_3 thẳng hàng.

3.58. Trong mặt phẳng afin cho hình thang $A_1A_2B_1B_2$ với hai đáy là A_1A_2 và B_1B_2. Qua các đỉnh A_1 và B_1 ta vẽ các đường thẳng song song a_1 và b_1, qua các đỉnh A_2 và B_2 ta vẽ các đường thẳng song song a_2 và b_2 sao cho a_1 và a_2 không song song. Chứng minh rằng ba điểm $A_1B_1 \cap A_2B_2$, $a_1 \cap a_2$ và $b_1 \cap b_2$ thẳng hàng.

§7

3.59. Trong $\mathbf{P}^n$ hãy tìm các khái niệm đối ngẫu của các khái niệm sau đây:

a) m – phẳng thuộc k – phẳng $(m \le k)$

b) Siêu phẳng chứa m – phẳng

c) Bốn điểm thẳng hàng

d) Tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng.

3.60. Tìm khái niệm đối ngẫu của khái niệm hình ba cạnh (tam giác)

a) Trong $\mathbf{P}^2$

b) Trong $\mathbf{P}^3$

3.61. Phát biểu định lí đối ngẫu của định lí Desargues trong $\mathbf{P}^2$ và $\mathbf{P}^3$.

3.62. Phát biểu định lí đối ngẫu của định lí Pappus trong $\mathbf{P}^2$.

§8, §9

3.63. Xác định loại của các đường bậc hai sau đây trong mặt phẳng xạ ảnh:

a) $4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$

b) $2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$

c) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$

d) $5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = 0$

e) $2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + 5x_1x_3 - x_2x_3 = 0$

3.64. Tìm giao điểm của đường bậc hai:

$$2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$$

với các đường thẳng sau đây:

a) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

b) $\begin{cases} x_1 = 5m - n \\ x_2 = -3m \\ x_3 = -2m + n \end{cases}$

3.65. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho đường bậc hai (S) có phương trình:

$$2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0$$

a) Viết phương trình đường đối cực đối với (S) của các điểm sau đây:

$$A_1(1,0,0),\ A_2(0,1,0),\ A_3(0,0,1),\ E(1,1,1),\ M(2,-1,5)$$

b) Tìm tọa độ cực điểm của đường thẳng $7x_1 + 4x_2 - 10x_3 = 0$ đối với (S).

3.66. Trong mặt phẳng xạ ảnh hãy lập phương trình các tiếp tuyến đi qua điểm M(1, –7,4) với đường bậc hai (S) có phương trình:

$$3x_1^2 - x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$$

3.67. Cho đường bậc hai (S) có phương trình:

$$4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^3 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$$

cho hai điểm A(1,1,1), B(1,2,0). Hãy viết phương trình đường đối cực của A và B đối với (S). Hai điểm A và B có liên hợp với nhau đối với (S) không?

3.68. Trong P^3 cho mặt bậc hai (S) có phương trình:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_4 + 4x_2x_3 = 0$$

và hai điểm A(1,1,0,0), B(1,1,1,1).

a) Chứng tỏ điểm A thuộc (S) và viết phương trình của mặt phẳng tiếp xúc của (S) tại A.

b) Chứng minh rằng đường thẳng AB là tiếp tuyến của (S) và hãy viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB.

3.69. Chứng tỏ rằng nếu 4 đỉnh của một hình bốn đỉnh toàn phần nằm trên một đường cong bậc hai (S) thì ba điểm chéo của nó tạo thành một tam giác tự đối cực đối với (S).

3.70. Trong $\mathbf{P}^2$ cho một đường cong bậc hai (S) và một tam giác ABC tự đối cực đối với (S). Một đường thẳng m cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, R. Gọi P', Q', R' theo thứ tự là các điểm thuộc các đường thẳng BC, CA, AB và lần lượt liên hợp với P, Q, R đối với (S). Chứng minh rằng ba đường thẳng AP', BQ', CR' đồng quy.

3.71. Chứng minh rằng nếu một phép thấu xạ tâm O biến một siêu mặt bậc hai thành chính nó thì đó là phép thấu xạ đối hợp và nền của nó là siêu phẳng đối cực của O đối với siêu mặt bậc hai (S).

3.72. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiệu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho trước, tìm giao của một siêu mặt bậc hai (S) với siêu phẳng R đi qua n đỉnh A_1, A_2, ..., A_n của mục tiêu đã cho.

3.73. Trong $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh cho trước, cho đường bậc hai (S) có phương trình:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$$

a) Chứng tỏ các đỉnh A_1, A_2, A_3 của mục tiêu nằm trên đường bậc hai (S).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (S) tại các đỉnh A_1, A_2, A_3.

c) Tìm cực điểm của các đường thẳng A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1.

3.74. Trong P^2 cho hình bốn cạnh toàn phần abcd ngoại tiếp một đường bậc hai (S) lần lượt tại các điểm A, B, C, D tương ứng.

Gọi $P = a \cap b$, $Q = b \cap c$, $L = c \cap d$, $M = d \cap a$.

Chứng minh rằng :

a) Các điểm chéo của abcd làm thành một tam giác mà mỗi đỉnh là điểm cực của cạnh đối diện đối với (S).

b) Các đường thẳng AC, BD, PL, MQ đồng qui.

§10

3.75. Trong $\mathbf{P}^2$ một tam giác ABC có hai điểm A và B chạy trên hai đường thẳng a, b cố định và ba cạnh BC, CA, AB lần lượt đi qua ba điểm cố định α, β, γ. Tìm tập hợp điểm C. Xét trường hợp đặc biệt khi α, β, γ thẳng hàng.

3.76. Trong $\mathbf{P}^2$ cho conic (S), hai điểm A, B thuộc (S) và một điểm P không thuộc (S). Vẽ qua P một đường thẳng d thay đổi cắt (S) tại M và N. Tìm tập hợp giao điểm của các cặp đường thẳng AM và BN, AN và BM.

3.77. Trong $\mathbf{P}^2$ cho conic (S) và một đường thẳng d không có điểm chung với (S). Trên (S) ta lấy hai điểm cố định A, B. Gọi X là một điểm biến thiên trên đường thẳng d. Gọi M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường thẳng AX và BX với (S). Tìm tập hợp giao điểm I của AN và BM.

3.78. Chứng minh rằng nếu hai hình bốn đỉnh toàn phần có chung ba điểm chéo thì tám đỉnh của chúng nằm trên một đường cong bậc hai.

3.79. Chứng minh rằng nếu hai tam giác cùng nội tiếp một conic thì chúng cùng ngoại tiếp một conic nào đó.

3.80. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hình lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ nội tiếp một conic (S). Gọi B_i là giao điểm của hai tiếp tuyến của (S) tại A_i và A_{i+1}(xem $A_7 = A_1$). Như vậy ta được hình lục giác $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ ngoại tiếp (S). Chứng minh rằng đường thẳng Pascal của lục giác thứ nhất là đường đối cực của điểm Brianchon của lục giác thứ hai.

3.81. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. (S) là một conic biến thiên đi qua bốn điểm đó. Tiếp tuyến (S) tại B và C lần lượt cắt AC và BD tại B' và C'. Gọi M là giao điểm của BB' và CC'. Chứng minh rằng đường thẳng B'C' luôn luôn đi qua một điểm cố định và điểm M chạy trên một đường thẳng cố định.

3.82. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho tam giác ABC và conic (S) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh rằng các giao điểm $P = BC \cap B'C'$, $Q = CA \cap C'A'$, $R = AB \cap A'B'$ thẳng hàng.

3.83. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho ba điểm A, B, C nằm trên conic (S) và K là điểm không thuộc (S). Các đường thẳng KA, KB, KC cắt (S) tại A', B', C'. Gọi P là một điểm biến thiên trên (S). Các đường thẳng PA, PB, PC lần lượt cắt B'C', C'A', A'B' tại A", B", C". Chứng minh rằng ba điểm A", B", C" cùng nằm trên một đường thẳng cố định và đường thẳng này luôn luôn đi qua một điểm cố định.

3.84. Trong $\mathbf{P}^2$ cho một tứ giác ABCD và một conic (S) thay đổi nhưng luôn luôn tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác lần lượt tại P, Q, R, S.

a) Chứng minh các đường thẳng PR và QS cùng đi qua một điểm cố định.

b) Tìm tập hợp giao điểm của AQ và BS.

3.85. Trong $\mathbf{P}^2$ cho một conic (S) đi qua ba điểm A_1, A_2, A_3 của mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3\}$. Các đường thẳng A_iE lại cắt (S) tại A'_i $(i = 1,2,3)$. Các tiếp tuyến của (S) tại A'_1, A'_2, A'_3 cắt các đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 lần lượt tại α, β, γ. Chứng minh rằng α, β, γ thẳng hàng.

3.86. Cho một conic (S) xác định bởi 5 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng.

a) Hãy dựng tiếp tuyến của conic tại điểm A

b) Cho d là đường thẳng đi qua A. Hãy dựng giao điểm còn lại của d với (S)

3.87. Trong $\mathbf{P}^2$ cho một conic (S) và sáu điểm A, B, C, D, E, F thuộc (S). Chứng minh rằng ba đường thẳng Pascal của ba hình lục giác ABCDEF, ADCFEB, AFCBED đồng quy tại một điểm.

3.88. Trong mặt phẳng afin cho tam giác ABC cố định. Một parabol biến thiên tiếp xúc với BC, CA, AB theo thứ tự tại A', B', C'. Chứng minh rằng mỗi một trong ba đường thẳng B'C', C'A', A'B' đều đi qua một điểm cố định.

3.89. Trong mặt phẳng afin cho hình bình hành ABCD có các cạnh song song với các đường tiệm cận của một hypebol cho trước và có hai đỉnh đối diện A, C nằm trên hypebol. Chứng minh rằng hai đỉnh còn lại của hình bình hành thẳng hàng với tâm O của hypebol.

3.90. Trong mặt phẳng afin, một tiếp tuyến bất kì tiếp xúc với một hypebol cho trước tại điểm C và cắt hai đường tiệm cận tại A và B. Chứng minh C là trung điểm của đoạn AB.

3.91. Trong mặt phẳng afin cho một hypebol (S) có tâm O và hai đường tiệm cận là a và b. Gọi M và N là hai điểm bất kì trên (S). Tiếp tuyến của (S) tại M và N lần lượt cắt a và b tại các cặp điểm A; B và C; D. Chứng minh AD // BC.

§11

3.92. Chứng minh rằng trong mặt phẳng Ơclit hai đường phân giác của góc hợp thành bởi hai đường thẳng a, b cùng với a, b làm thành một chùm điều hòa.

3.93. Hãy diễn tả các khái niệm sau đây trong mô hình xạ ảnh của mặt phẳng Ơclit:

a) Hình chữ nhật.

b) Hình vuông

c) Hình tam giác cân

d) Đường tròn cùng với đường kính và tâm của đường tròn đó.

e) Đường elip cùng với tâm và hai trục của elip đó.

C. HƯỚNG DẪN VÀ GIẢI

§1, §2, §3

3.1. Gọi O là tâm của siêu cầu (S). Xét bó đường thẳng tâm O trong $\mathbf{E}^n$. Mỗi đường thẳng của bó tâm O cắt siêu cầu (S) tại hai điểm xuyên tâm đối. Gọi $\{S'\}$ là tập hợp các cặp điểm xuyên tâm đối của (S). Gọi {B} là tập hợp các đường thẳng của bó tâm O. Rõ ràng ta có song ánh $\alpha : \{B\} \to \{S'\}$. Vì {B} là một mô hình của không gian xạ ảnh n–1 chiều nên sự tồn tại của song ánh α chứng tỏ $\{S'\}$ cũng lập thành một mô hình của không gian xạ ảnh n–1 chiều. Trong mô hình này mỗi cặp điểm xuyên tâm đối (A, A') của $\{S'\}$ là một điểm xạ ảnh và tập hợp các cặp điểm xuyên tâm đối của $\{S'\}$ cùng thuộc một (m + 1)- phẳng Ơclit đi qua tâm O tạo nên một m-phẳng xạ ảnh. Khi đó :

Nếu một điểm $A(a_1,a_2, ..., a_n)$ thuộc siêu cầu (S) thì điểm xuyên tâm đối của A là A' sẽ có tọa độ là $(-a_1, -a_2, ..., -a_n)$ với điều kiện là

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1.$$

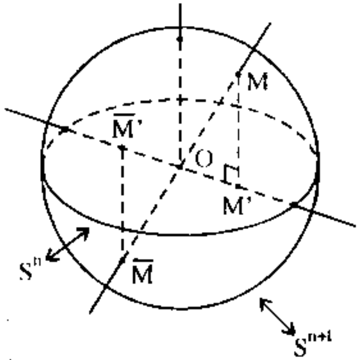
3.2. Gọi S' là tập hợp các cặp điểm xuyên tâm đối của siêu cầu S^n trong không gian $\mathbf{E}^n$. Gọi S^{n+1} là siêu cầu trong $\mathbf{E}^{n+1} \supset \mathbf{E}^n$. S^{n+1} có phương trình là :

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1.$$

Trong $\mathbf{E}^{n+1}$ siêu cầu S^n là giao của siêu cầu S^{n+1} với siêu phẳng $x_{n+1} = 0$. Do đó S^n có phương trình là :

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$$

Ta hãy xét tập hợp các đường thẳng của bó tâm O trong $\mathbf{E}^{n+1}$: Điểm O là tâm của siêu cầu S^n và đồng thời cũng là tâm của siêu cầu S^{n+1}. Ta có thể đặt tương ứng 1-1 giữa mỗi đường thẳng của bó tâm O nằm trong mặt phẳng $x_{n+1} = 0$ với một cặp điểm xuyên tâm đối của siêu cầu S^n. Các cặp điểm này có tọa độ là $(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$ và $(-x_1, -x_2, ..., -x_n, 0)$. Còn mỗi đường thẳng thuộc bó tâm O trong $\mathbf{E}^{n+1}$ nhưng không thuộc siêu phẳng $x_{n+1} = 0$ cắt siêu cầu S^{n+1} tại các cặp điểm xuyên tâm đối M và $\overline{M}$ (xem hình vẽ). Các cặp điểm này có tọa độ là $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ và $(-x_1, -x_2, ..., -x_n, -x_{n+1})$ với $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1$ và $1 > x_{n+1} > 0$.



Hình chiếu vuông góc của các cặp điểm này trên siêu phẳng $x_{n+1} = 0$ là :

$$M'(x_1, x_2, ..., x_n, 0) \text{ và } \overline{M'}(-x_1, -x_2, ..., -x_n, 0)$$

với $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 < 1$.

Tập hợp các hình chiếu này tạo nên tập hợp các điểm thuộc B nằm trong siêu cầu S^n. Ta biết rằng tập hợp các đường thẳng của bó tâm O trong $\mathbf{E}^{n+1}$ là một mô hình của không gian xạ ảnh n chiều. Như vậy ta đã lập được một song ánh giữa tập hợp các đường thẳng của bó tâm O trong $\mathbf{E}^{n+1}$ với tập hợp $B' = B \cup S'$, gồm tập hợp B các điểm trong của siêu cầu S^n và tập hợp S' gồm các cặp điểm xuyên tâm đối của S^n.

Vậy tập hợp $B' = B \cap S'$ là một mô hình của không gian xạ ảnh n chiều.

3.3. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với hệ tọa độ afin cho trước, mỗi siêu phẳng có phương trình dạng :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_{n+1} = 0$$

trong đó các hệ số a_i không đồng thời bằng 0 với $i = 1,2,...,n$. Như vậy mỗi bộ gồm $n + 1$ số có thứ tự $(a_1,a_2,..., a_n,a_{n+1})$ xác định một siêu phẳng. Hai bộ số $(a_1,a_2,...,a_{n+1})$ và $(b_1,b_2,...,b_{n+1})$ gọi là thuộc cùng một lớp tương đương nếu $b_i = ka_i$ với mọi i và $k \neq 0$. Mỗi lớp tương đương này xác định một siêu phẳng afin.

Bây giờ ta hãy xét tập hợp các siêu phẳng afin của $\mathbf{A}^n$ cùng đi qua một điểm $K(x_1^o, x_2^o,..., x_n^o)$ cố định mà mỗi lớp tương đương nói trên ứng với một siêu phẳng. Ta suy ra tập hợp các siêu phẳng afin trong $\mathbf{A}^n$ cùng đi qua một điểm cố định có tương ứng 1-1 với tập hợp các điểm trong mô hình số học của không gian xạ ảnh n chiều. Trong mô hình này, mỗi siêu phẳng afin là một điểm xạ ảnh được xác định bởi một lớp gồm n+1 số thực có thứ tự có phần tử đại diện là $(a_1,a_2,...,a_n,a_{n+1})$. Từ bộ số này ta dễ dàng xác định được phương trình của siêu phẳng afin đó như sau :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_{n+1} = 0.$$

3.4. Gọi α là một p-phẳng chứa m+1 điểm độc lập $(m < p)$ $A_o,A_1, ...,A_m$ và β là một m-phẳng đi qua m+1 điểm độc lập đó. Cần chứng minh $\beta \subset \alpha$.

Ta biết rằng phẳng β được hoàn toàn xác định bởi m+1 điểm độc lập cho trước $A_o,A_1, ...,A_m$. Vì $m < p$ nên ngoài m+1 điểm độc lập này p-phẳng α còn chứa thêm một số điểm độc lập khác nữa. Do đó ta suy ra : $\alpha \cap \beta = \beta$ nên $\beta \subset \alpha$.

3.5. Gọi $\mathbf{P}^p = \mathbf{P}^r + \mathbf{P}^s$ là tổng của hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ và

$\mathbf{P}^q = \mathbf{P}^r \cap \mathbf{P}^s$ là giao của hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$.

Gọi các không gian vectơ $\mathbf{V}^{r+1}$, $\mathbf{V}^{s+1}$,$\mathbf{V}^{p+1}$,$\mathbf{V}^{q+1}$ lần lượt sinh ra các phẳng $\mathbf{P}^r$, $\mathbf{P}^s$, $\mathbf{P}^p$, $\mathbf{P}^q$.

Vì tổng của hai cái phẳng là cái phẳng có số chiều bé nhất chứa hai cái phẳng đó nên $\mathbf{V}^{p+1}$ là không gian vectơ có số chiều bé nhất chứa $\mathbf{V}^{r+1}$ và $\mathbf{V}^{s+1}$. Do đó: $\mathbf{V}^{p+1} = \mathbf{V}^{r+1} + \mathbf{V}^{s+1}$ (1)

Mặt khác giao của hai cái phẳng là cái phẳng lớn nhất thuộc cả hai cái phẳng đó nên $\mathbf{V}^{q+1}$ là không gian vectơ có số chiều lớn nhất thuộc $\mathbf{V}^{r+1}$ và $\mathbf{V}^{s+1}$. Do đó $\mathbf{V}^{q+1} = \mathbf{V}^{r+1} \cap \mathbf{V}^{s+1}$ (2)

Từ (1) và (2) dựa vào công thức về số chiều của không gian vectơ ta có :

$$(r + 1) + (s + 1) = (p + 1) + (q + 1)$$

a)Nếu $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ có điểm chung nghĩa là $\mathbf{P}^r \cap \mathbf{P}^s \neq \varnothing$ thì $\mathbf{V}^{q+1}$ không chỉ gồm có vectơ $\vec{0}$ nghĩa là $q + 1 \neq 0$ và ta có :

$$r + s = p + q$$

b) Nếu $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ chéo nhau nghĩa là $\mathbf{P}^r \cap \mathbf{P}^s = \varnothing$ thì $\mathbf{V}^{q+1}$ chỉ gồm có vectơ $\vec{0}$ nghĩa là $q + 1 = 0$. Ta suy ra :

$$(r + 1) + (s + 1) = p + 1$$

hay $\quad r + s = p - 1.$

3.6. Dùng lại các kí hiệu như ở bài 3.5 và các kết quả của bài đó ta có :

Nếu $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ chéo nhau thì $r + s = p - 1$ (1)

Ngược lại giả sử $r + s = p - 1$, ta cần chứng minh $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ chéo nhau. Gọi $\mathbf{V}^{r+1}$, $\mathbf{V}^{s+1}$,$\mathbf{V}^{p+1}$,$\mathbf{V}^{q+1}$ là các không gian vectơ lần lượt sinh ra các phẳng $\mathbf{P}^r$, $\mathbf{P}^s$, $\mathbf{P}^p$,$\mathbf{P}^q$ ta có :

$$(r + 1) + (s + 1) = (p + 1) + (q + 1) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $q + 1 = 0$ nghĩa là $\mathbf{V}^{q+1}$ chỉ là vectơ $\vec{0}$. Do đó: $\mathbf{P}^q = \varnothing$ nghĩa là $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ chéo nhau.

3.7. Gọi $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}^r + \mathbf{P}^s$ và gọi $\mathbf{V}^{m+1}$, $\mathbf{V}^{r+1}$, $\mathbf{V}^{s+1}$ là các không gian con của $\mathbf{V}^{n+1}$ lần lượt sinh ra các phẳng $\mathbf{P}^m$, $\mathbf{P}^r$, $\mathbf{P}^s$.

Với $M \in \mathbf{P}^r$ và $N \in \mathbf{P}^s$ ta suy ra $M, N \in \mathbf{P}^m$. Do đó đường thẳng MN thuộc phẳng tổng $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}^r + \mathbf{P}^s$. Ngược lại giả sử X là một điểm thuộc phẳng tổng $\mathbf{P}^m$. Cần chứng minh X thuộc một đường thẳng nào đó cắt cả $\mathbf{P}^r$ lẫn $\mathbf{P}^s$.

$$X \in \mathbf{P}^m \Leftrightarrow \vec{x} \in \mathbf{V}^{m+1} = \mathbf{V}^{r+1} + \mathbf{V}^{s+1}.$$

Vectơ $\vec{x}$ đại diện cho điểm X được phân tích thành hai vectơ trong đó một vectơ thuộc $\mathbf{V}^{r+1}$ và một vectơ thuộc $\mathbf{V}^{s+1}$.

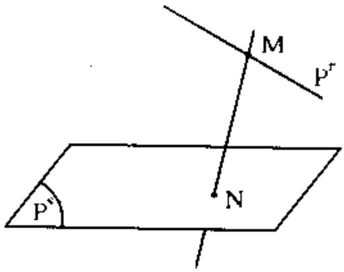
Muốn chứng minh rằng tập hợp các điểm X của đường thẳng MN với mọi $M \in \mathbf{P}^r$ và mọi $N \in \mathbf{P}^s$ là tập hợp điểm của phẳng tổng $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}^r + \mathbf{P}^s$ ta phải chứng minh rằng :

$X \in MN$ ($M \in \mathbf{P}^r, N \in \mathbf{P}^s$) $\Leftrightarrow \exists \vec{a} \in \mathbf{V}^{r+1}, \exists \vec{b} \in \mathbf{V}^{s+1}$

sao cho $\vec{a} + \vec{b} = \vec{x} \in \mathbf{V}^{m+1} = \mathbf{V}^{r+1} + \mathbf{V}^{s+1}$.

Gọi $\vec{x}$ là vectơ đại diện cho điểm $X \in MN$ thì cần và đủ là vectơ $\vec{x}$ thuộc không gian vectơ 2 chiều sinh ra đường thẳng MN. Gọi $\vec{m}$ và $\vec{n}$ lần lượt là các vectơ đại diện cho M,N độc lập (vì $M \neq N$). Do đó :

$$\vec{x} \in \mathbf{V}^2 \text{ (sinh ra đường thẳng MN)} \Leftrightarrow \vec{x} = p\vec{m} + q\vec{n}$$



Hai vectơ $\{\vec{m}, \vec{n}\}$ được dùng làm cơ sở của $\mathbf{V}^2$. Mặt khác vì $M \in \mathbf{P}^r$, $N \in \mathbf{P}^s$ nên $\vec{m} \in \mathbf{V}^{r+1}$, $\vec{n} \in \mathbf{V}^{s+1}$. Do đó $p\vec{m} \in \mathbf{V}^{r+1}$, $q\vec{n} \in \mathbf{V}^{s+1}$ với $(p,q) \neq (0,0)$. Vậy

$$\vec{x} = p\vec{m} + q\vec{n} \in \mathbf{V}^{m+1} = \mathbf{V}^{r+1} + \mathbf{V}^{s+1}.$$

Ta suy ra điểm X thuộc phẳng tổng $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}^r + \mathbf{P}^s$.

CHÚ Ý : Phẳng tổng $(\mathbf{P}^r + \mathbf{P}^s) = \mathbf{P}^m$ có thể là một cái phẳng có số chiều $m = r + s + 1$ khi $\mathbf{P}^r \cap \mathbf{P}^s = \varnothing$.

3.8. a) Muốn chứng tỏ rằng có thể chọn hệ điểm $\{A_1', A_2', A_3'; E'\}$ làm một mục tiêu xạ ảnh, ta chứng minh rằng bất cứ ba điểm nào trong bốn điểm đã cho đều độc lập, bằng cách lập định thức tọa độ của các bộ 3 điểm đó và chứng tỏ các định thức đó đều khác 0.

b) Gọi $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}, \vec{e'}$ là các vectơ lần lượt đại diện cho các điểm A_1', A_2', A_3', E' của mục tiêu xạ ảnh $\{A_1', A_2', A_3'; E'\}$. Ta có :

$$\vec{e'} = \vec{e_1'} + \vec{e_2'} + \vec{e_3'}, \text{ do đó :}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}1 = 2\beta + \gamma\\ 1 = \alpha + \gamma\\ 1 = \alpha + \beta\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tính được $\alpha = \dfrac{2}{3}, \beta = \dfrac{1}{3}, \gamma = \dfrac{1}{3}$.

Do đó ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1'} = (0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \\ \overrightarrow{e_2'} = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}) \\ \overrightarrow{e_3'} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0) \end{cases} \Rightarrow \text{ma trận chuyển } C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (3C)^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Do đó áp dụng công thức đổi mục tiêu từ $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ sang $\{A_1', A_2', A_3'; E'\}$ là $[x] = (3C)^*[x']$ ta được kết quả :

$$\begin{cases} kx_1 = 2x_2' + x_3' \\ kx_2 = 2x_1' + x_3' \\ kx_3 = 2x_1' + x_2' \end{cases} \quad \text{với } k \in \mathbf{R}.$$

3.9. a) Xem lời giải câu b) bài 3.8.

b) Gọi (x_1, x_2, x_3) và (x_1', x_2', x_3') theo thứ tự là tọa độ của điểm M đối với mục tiêu thứ nhất và mục tiêu thứ hai. Áp dụng công thức đổi mục tiêu ta có :

$$\begin{cases} 1 = 2x_2' + x_3' \\ 2 = 2x_1' + x_3' \\ 3 = 2x_1' + x_2' \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tính được $(x_1', x_2', x_3') = (\frac{7}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

Vì tọa độ xạ ảnh có tính chất đẳng cấp nên ta có thể lấy tọa độ của điểm M đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_1', A_2', A_3'; E'\}$ là $M = (7, 4, -2)$.

3.10. a) Áp dụng cách giải tương tự như đối với bài 3.8 và 3.9 ta tìm được ma trận chuyển C từ mục tiêu $\{A_i; E\}$ sang mục tiêu $\{A_i'; E\}$ là :

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Tọa độ xạ ảnh của điểm N(0,1,1) đối với mục tiêu $\{A'_1, A'_2, A'_3; E'\}$ là :

$$N = (-\frac{3}{5}, 1, -1) = (-3, 5, -5)$$

3.11. Với mỗi điểm X của mặt phẳng afin ta đặt tương ứng 1-1 với đường thẳng OX của bó đường thẳng tâm O trong không gian afin 3 chiều chứa không gian afin $\mathbf{A}^2$ đã cho. Các điểm vô tận của mặt phẳng afin ứng với các đường thẳng đi qua O và song song với mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ đó. Ta suy ra tọa độ xạ ảnh của một điểm X thuộc mặt phẳng afin chính là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OX}$ đối với cơ sở $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$. Vectơ $\overrightarrow{OX}$ chính là vectơ đại diện cho điểm X. Do đó :

a) Một điểm X có tọa độ (x_1, x_2) đối với mục tiêu afin $\{A_3; E_1, E_2\}$ nghĩa là $\overrightarrow{A_3X} = x_1\overrightarrow{A_3E_1} + x_2\overrightarrow{A_3E_2} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$. Khi đó trong $\mathbf{V}^3$ ta có : $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3X} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + 1.\vec{e_3}$ với $\overrightarrow{OA_3} = \vec{e_3}$.

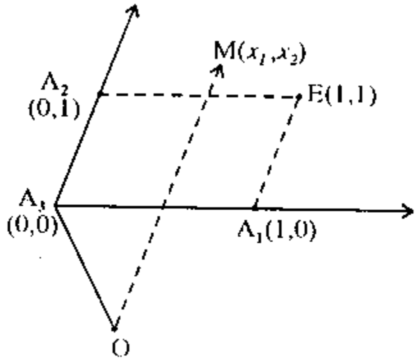
Vậy điểm X có tọa độ xạ ảnh là $(x_1, x_2, 1)$

b) Các điểm vô tận của mặt phẳng afin nhận các vectơ đại diện là các vectơ thuộc phương của mặt phẳng afin. Do đó các điểm vô tận của mặt phẳng afin có tọa độ xạ ảnh dạng $(x_1, x_2, 0)$. Các đường thẳng nhận vectơ $\overrightarrow{A_3X}$ làm vectơ chỉ phương (với $X \neq A_3$) đều chứa điểm vô tận này. Các điểm A_1, A_2 của mục tiêu xạ ảnh nhận các vectơ $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ làm vectơ đại diện nên có tọa độ xạ ảnh là $A_1 = (1,0,0)$, $A_2 = (0,1,0)$.

Đường thẳng xác định bởi hai điểm vô tận A_1, A_2 chính là đường thẳng vô tận của mặt phẳng afin. Đường thẳng này có phương trình $x_3 = 0$ đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ và chứa tất cả các điểm vô tận của mặt phẳng afin.

3.12. Áp dụng kết quả của bài 3.11, ta lấy một điểm O nằm ngoài mặt phẳng afin và suy ra nếu một điểm M có tọa độ afin là (x_1, x_2)

thì tọa độ xạ ảnh của nó là $M = (x_1,x_2,1)$ vì $\overrightarrow{OM} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + 1\overline{e_3}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng OM. Giả sử đối với mục tiêu afin đã chọn, cho đường thẳng afin Δ có phương trình : $ax_1 + bx_2 + c = 0$. Đường thẳng Δ này nhận vectơ $\vec{v} = (b,-a)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó đường thẳng đi qua O nhận $\vec{v}$ làm vectơ chỉ phương (song song với Δ) đặt tương ứng với điểm vô tận của Δ, có tọa độ là (b, –a,0).



CHÚ Ý. Trong không gian xạ ảnh, điểm afin thông thường và điểm vô tận đều có vai trò bình đẳng và có tên chung là điểm xạ ảnh. Đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_1,A_2,A_3; E\}$ thì đường thẳng $x_3 = 0$ đi qua A_1,A_2 đóng vai trò đường thẳng vô tận.

3.13. a) Phương trình tham số của m-phẳng xác định bởi m+1 đỉnh đầu tiên $A_1,A_2, ..., A_{m+1}$ của mục tiêu là :

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = t_2 \\ \dots \quad \dots \\ x_{m+1} = t_{m+1} \\ x_{m+2} = 0 \\ \dots \quad \dots \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Phương trình tổng quát của phẳng đó là :

$$\begin{cases} x_{m+2} = 0 \\ \dots \quad \dots \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

b) Phương trình tham số của m-phẳng xác định bởi m+1 đỉnh cuối của mục tiêu $A_{n-m+1}, A_{n-m+2}, ..., A_{n-m+m}, A_{n+1}$ là :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \dots \quad \dots \\ x_{n-m} = 0 \\ x_{n-m+1} = t_1 \\ \dots \quad \dots \\ x_{n+1} = t_{m+1} \end{cases}$$

Phương trình tổng quát của phẳng đó là :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \dots \quad \dots \\ x_{n-m} = 0 \end{cases}$$

c) Phương trình tổng quát của siêu phẳng đi qua tất cả các đỉnh của mục tiêu trừ đỉnh thứ k là : $x_k = 0$.

3.14. Gọi

$$\begin{cases} E_1 = A_1E \cap A_2A_3 \\ E_2 = A_2E \cap A_3A_1 \\ E_3 = A_3E \cap A_1A_2 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} E'_1 = A_1E \cap E_2E_3 \\ E'_2 = A_2E \cap E_3E_1 \\ E'_3 = A_3E \cap E_1E_2 \end{cases}$$

Ta có $A_1 = (1,0,0)$, $A_2 = (0,1,0)$, $A_3 = (0,0,1)$, $E = (1,1,1)$.

a) Ta tính được tọa độ các đường thẳng A_1E, A_2E, A_3E :

$$A_1E = [0, -1, 1],\ A_2E = [-1, 0, 1],\ A_3E = [-1, 1, 0]$$

b) Tọa độ các điểm E_i và E'_i với $i = 1,2,3$ là :

$$E_1 = (0, 1, 1),\ E_2 = (1, 0, 1),\ E_3 = (1, 1, 0)$$

$$E'_1 = (0, -1, 1),\ E'_2 = (-1, 0, 1),\ E'_3 = (-1, 1, 0)$$

c) Muốn chứng minh ba điểm E'_1, E'_2, E'_3 thẳng hàng ta tính định thức tọa độ của chúng và thấy rằng định thức này bằng 0. Có thể lập phương trình của đường thẳng đi qua hai trong ba điểm E'_1, E'_2, E'_3 rồi chứng tỏ rằng điểm còn lại có tọa độ thỏa mãn phương trình đường thẳng vừa tìm được.

Ta tính được tọa độ của đường thẳng qua E'_1, E'_2, E'_3 là: $[1,1,1]$

Chú thích : Người ta gọi tên đường thẳng có tọa độ [1, 1, 1] là *đường thẳng đơn vị*. Trong việc chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ ta có thể chọn đường thẳng đơn vị thay cho việc chọn điểm đơn vị.

3.15. a) Giả sử X là một điểm thuộc đường thẳng AB và $X = (x_1, x_2, x_3)$. Ta có điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, X thẳng hàng là các vectơ đại diện cho ba điểm ấy làm thành một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính nghĩa là :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Đó chính là phương trình của đường thẳng AB. Nếu gọi $[u_1, u_2, u_3]$ là tọa độ của đường thẳng AB ta có :

$$[u_1, u_2, u_3] = \left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right]$$

Cách khác : Đường thẳng AB trong $\mathbf{P}^2$ có phương trình dạng :

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

Vì đường thẳng này đi qua điểm A và điểm B nên :

$$\begin{cases} u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 = 0 \\ u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ hai phương trình này với ẩn là $[u_1, u_2, u_3]$ ta tìm được kết quả như ở phần trên.

3.16. Theo giả thiết đường thẳng a có phương trình :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

và đường thẳng b có phương trình :

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

Giao điểm của hai đường thẳng a và b có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta có :

$$a \cap b = (x_1, x_2, x_3) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

3.17. Trong $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh đã chọn, đường thẳng d có phương trình dạng $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$.

Vì đường thẳng này đi qua ba điểm A, B, C nên ta có :

$$\begin{cases} u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 = 0 \\ u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3 = 0 \\ u_1c_1 + u_2c_2 + u_3c_3 = 0 \end{cases}$$

Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình tuyến tính thuần nhất này có nghiệm $[u_1, u_2, u_3]$ không phải là nghiệm tầm thường là :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Cách khác. Gọi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là 3 vectơ lần lượt đại diện cho ba điểm A, B, C. Ta có điều kiện cần và đủ để 3 điểm A, B, C thẳng hàng trong $\mathbf{P}^2$ là hệ ba vectơ {a, b, c} phụ thuộc tuyến tính. Từ đó ta suy ra định thức cấp ba trên phải bằng 0.

3.18. Giả sử $M(x_1, x_2, x_3)$ là giao điểm chung của ba đường thẳng nghĩa là $M(x_1, x_2, x_3)$ thuộc mỗi đường thẳng. Do đó ta có :

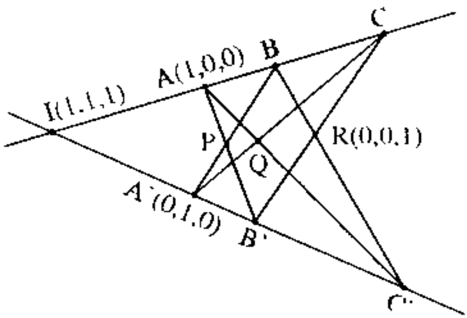
$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0 \end{cases}$$

Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình tuyến tính thuần nhất này có nghiệm (x_1, x_2, x_3) không phải là nghiệm tầm thường (là tọa độ giao điểm) là :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

NHẬN XÉT : Hệ ba phương trình trên tương đương với hai phương trình nghĩa là ma trận các hệ số có hạng bằng hai. Từ đó ta có thể suy ra điều cần chứng minh .

3.19. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng d và d' vì hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ luôn luôn cắt nhau. Ta kí hiệu :



$P = AB' \cap A'B$,

$Q = AC' \cap A'C$,

$R = BC' \cap B'C$.

Chọn bốn điểm {A, A', R; I} làm mục tiêu xạ ảnh vì bất cứ ba điểm nào trong bốn điểm này cũng không thẳng hàng.

Ta có tọa độ các điểm sau đây:

$$A = (1, 0, 0),\ A' = (0, 1, 0),\ R = (0, 0, 1),\ E = (1, 1, 1).$$

Điểm B thuộc đường thẳng IA nên: [B] = m[I] + n[A]

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = m + n \\ b_2 = m \\ b_3 = m \end{cases}$$

Do đó điểm B có tọa độ biểu thị bằng dạng tham số sau đây:

$$B = (b, 1, 1)$$

Tương tự điểm B' thuộc đường thẳng IA' và ta có $B' = (1, b', 1)$.

Ta có $C = IA \cap RB'$:

$$\left.\begin{array}{l} IA\ :\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow[0,1,-1] \\ RB':\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & b' & 1\end{bmatrix}\Rightarrow[-b',1,0]\end{array}\right\}\Rightarrow C=(1,\ b',\ b')$$

$C' = IA' \cap RB$:

$$\left.\begin{array}{l} IA':\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow[1,0,-1] \\ RB:\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ b & 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow[-1,b,0]\end{array}\right\}\Rightarrow C'=(b,\ 1,\ b)$$

Ta tính tọa độ của giao điểm $Q = AC' \cap A'C$

$$\left.\begin{array}{l} AC':\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ b & 1 & b\end{bmatrix}\Rightarrow[0,-b,1] \\ A'C:\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & b' & b'\end{bmatrix}\Rightarrow[b',0,-1]\end{array}\right\}\Rightarrow\ Q=(b,\ b',\ bb')$$

- Bây giờ ta cần tìm tọa độ của điểm $P = AB' \cap A'B$

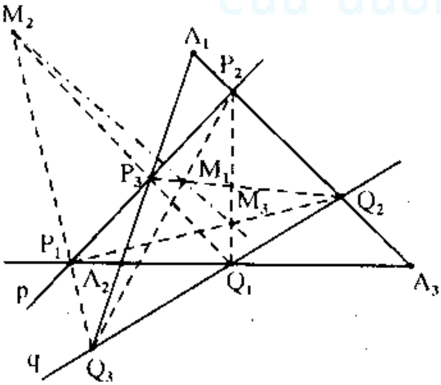
$$\left.\begin{array}{l} AB':\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & b' & 1\end{bmatrix}\Rightarrow[0,-1,b'] \\ A'B:\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ b & 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow[1,0,-b]\end{array}\right\}\Rightarrow\ P=(b,b',1)$$

Xét định thức của ba điểm P, Q, R ta có :

$$\begin{vmatrix}b & b' & 1\\ b & b' & bb'\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = bb' - b'b = 0.$$

Vậy ba điểm P, Q, R thẳng hàng (Bài tập này là nội dung của định lí Pappus trong mặt phẳng xạ ảnh).

3.20. Trên đường thẳng p ta có ba điểm P_1, P_2, P_3 và trên đường thẳng q ta có ba điểm Q_1, Q_2, Q_3 (xem hình vẽ).



Áp dụng định lí Pappus (bài 3.19) đối với hai bộ ba điểm thẳng hàng P_1, P_2, P_3 và Q_1, Q_2, Q_3 ta có :

$$P_1Q_2 \cap P_2Q_1 = M_3$$

$$P_1Q_3 \cap P_3Q_1 = M_2$$

$$P_2Q_3 \cap P_3Q_2 = M_1$$

Vậy ba điểm M_1, M_2, M_3 thẳng hàng.

3.21. Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA', BB', CC'. Ta kí hiệu :

$$D = BC \cap B'C'$$

$$E = CA \cap C'A'$$

$$F = AB \cap A'B'$$

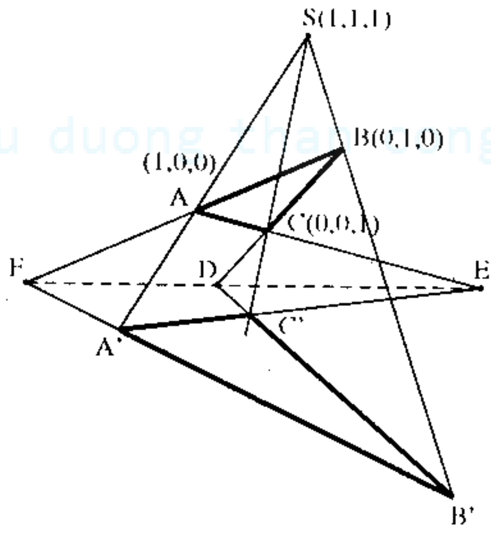
Chọn mục tiêu xạ ảnh {A, B, C; S}. Ta có :

$$A = (1, 0, 0)$$

$$B = (0, 1, 0)$$

$$C = (0, 0, 1)$$

$$S = (1, 1, 1)$$



Các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng SA, SB, SC nên ta có :

$$A' = (a, 1, 1),\ B' = (1, b, 1),\ C' = (1, 1, c).$$

Ta cần tính tọa độ xạ ảnh của các điểm D, E, F với

$D = BC \cap B'C'$:

$$\left.\begin{array}{l} BC\ :[0,1,0] \\ B'C':[bc-1,1-c,1-b] \end{array}\right\} \Rightarrow D = (0,\ b-1,\ 1-c)$$

$E = CA \cap C'A'$:

$$\left.\begin{array}{l} CA\ :[0,1,0] \\ C'A':[c-1,1-ac,a-1] \end{array}\right\} \Rightarrow E = (a-1,\ 0,\ c-1)$$

$F = AB \cap A'B'$

$$\left.\begin{array}{l} AB\ :[0,0,1] \\ A'B':[1-b,1-a,ab-1] \end{array}\right\} \Rightarrow F = (1-a,\ 1-b,\ 0)$$

Xét định thức tọa độ của ba điểm D, E, F :

$$\begin{vmatrix} 0 & b-1 & 1-c \\ a-1 & 0 & c-1 \\ 1-a & 1-b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b-1 & 1-c \\ 0 & 1-b & c-1 \\ 1-a & 1-b & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vì định thức tọa độ của ba điểm D, E, F bằng 0 nên ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Ngược lại nếu ba giao điểm $D = BC \cap B'C'$, $E = CA \cap C'A'$, $F = AB \cap A'B'$ thẳng hàng, ta cần chứng minh ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy. Xét hai tam giác $AA'E$ và $BB'D$ có đường thẳng nối các đỉnh tương ứng là AB, DE, $A'B'$ đồng quy tại F nên theo chứng minh ở phần thuận ở trên ba giao điểm của các cạnh tương ứng là $AA' \cap BB' = S$, $AE \cap BD = C$, $A'E \cap B'D = C'$ thẳng hàng. Do đó ta suy ra AA', BB', CC' đồng quy tại S.

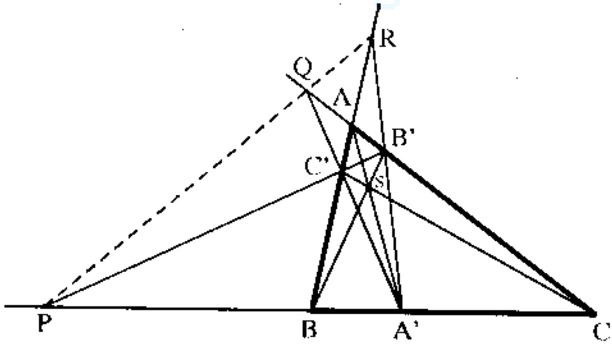
(Bài tập này là nội dung của định lí Desargues trong mặt phẳng xạ ảnh).

3.22. Gọi $P = BC \cap B'C'$

$Q = CA \cap C'A'$

$R = AB \cap A'B'$

Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có các đường thẳng nối các đỉnh tương ứng là AA', BB', CC' đồng quy tại S nên theo định lí Desargues, ba giao điểm của ba cặp cạnh tương ứng là P, Q, R thẳng hàng.



3.23. a) Theo kết quả ở bài 3.13 ta có phương trình tổng quát của m-phẳng P xác định bởi m+1 đỉnh đầu tiên là :

$$\begin{cases} x_{m+2} = 0 \\ \dots \quad \dots \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Gọi Q là cái phẳng đi qua các đỉnh còn lại $A_{m+2}, A_{m+3}, \dots, A_{n+1}$ của mục tiêu (gồm có n−m điểm độc lập) nên có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \dots \quad \dots \\ x_{m+1} = 0 \\ x_{m+2} = t_{m+2} \\ \dots \quad \dots \\ x_{n+1} = t_{n+1} \end{cases}$$

Do đó ta suy ra phương trình tổng quát của phẳng Q là hệ phương trình bậc nhất có hạng bằng m+1 sau đây :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \dots \quad \dots \\ x_{m+1} = 0 \end{cases}.$$

b) Muốn xét vị trí tương đối của P và Q ta xét phương trình tìm giao $P \cap Q$:

$$\begin{cases} x_1 & = 0 \\ \dots & \dots \\ x_{m+1} & = 0 \\ x_{m+2} & = 0 \\ \dots & \dots \\ x_{n+1} & = 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm tầm thường (không phải là điểm xạ ảnh) nên $P \cap Q = \varnothing$. Như vậy P và Q là hai cái phẳng chéo nhau.

c) Phẳng P được sinh ra từ không gian vectơ m+1 chiều $\mathbf{V}^{m+1}$ còn phẳng Q được sinh ra từ không gian vectơ n−m chiều $\mathbf{V}^{n-m}$.

Ta có dim P = m và dim Q = n−m−1.

Vì P và Q chéo nhau nên ta có :

$$\begin{aligned} \dim (P + Q) &= \dim P + \dim Q + 1 \\ &= m + (n-m-1) + 1 = n. \end{aligned}$$

Vậy phẳng tổng (P + Q) có số chiều bằng n nghĩa là chiếm toàn bộ không gian.

3.24. a) Muốn chứng minh $\{A_i; E'\}$ với i = 1, 2, ..., n là mục tiêu xạ ảnh trong siêu phẳng P ta chỉ cần chứng minh bất cứ bộ n điểm nào trong số n+1 điểm $A_1, A_2, \dots, A_n, E'$ đều là hệ điểm độc lập. Ma trận tọa độ của các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ là một ma trận có hạng bằng n nên $A_1, A_2, \dots, A_n$ là một hệ n điểm độc lập. Gọi E' là giao của đường thẳng $E_{n+1}E$ với siêu phẳng **P**. Ta dễ dàng tính được tọa độ điểm E' là (1, 1, ..., 1,0) gồm n số 1. Bây giờ nếu trong ma trận trên ta thay tọa độ của điểm A_i $(1 \le i \le n)$ bởi tọa độ điểm E' thì ta thấy rằng ma trận này vẫn có hạng bằng n. Vậy hệ điểm $\{A_1, \dots, A_{i-1}, E', A_{i+1}, \dots, A_n\}$ là một hệ n điểm độc lập. Do đó $\{A_1, A_2, \dots, A_n; E'\}$ là một mục tiêu xạ ảnh trong siêu phẳng **P**.

b) Với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ trong $\mathbf{P}^n$, siêu phẳng **P** có phương trình $x_{n+1} = 0$ nên mọi điểm X thuộc **P** đều có tọa độ thứ n+1 bằng 0. Giả sử ta lấy một điểm X thuộc **P** có tọa độ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ là :

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$$

Gọi $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_{n+1}}\}$ là cơ sở của $\mathbf{V}^{n+1}$ tương ứng với mục tiêu $\{A_i; E\}$ trong $\mathbf{P}^n$ và gọi $\mathbf{V}^n$ là không gian vectơ sinh ra siêu phẳng **P**.

Khi đó cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ của $\mathbf{V}^n$ ứng với mục tiêu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n; E'\}$.

Gọi $\vec{x}$ là vectơ đại diện cho điểm X thuộc **P**. Khi đó vectơ $\vec{x}$ có tọa độ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_{n+1}}\}$ cũng là $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$.

Ta có : $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n} + 0\overrightarrow{e_{n+1}}$

hay là $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n}$

Hệ thức này chứng tỏ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ vectơ $\vec{x}$ đại diện cho điểm X có tọa độ là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Do đó điểm X có tọa độ đối với mục tiêu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n; E'\}$ là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

3.25. Trong $\mathbf{P}^2$ tam giác $A_1A_2A_3$ và một điểm E' có thể tạo nên một mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E'\}$ khi bất cứ ba điểm nào trong bốn điểm đó không thẳng hàng. Một đường thẳng e không đi qua các đỉnh A_1, A_2, A_3 có phương trình là :

$$u_1x'_1 + u_2x'_2 + u_3x'_3 = 0.$$

Ta có $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$, $u_3 \neq 0$ vì đường thẳng e này không đi qua các điểm A_1, A_2, A_3. Thực hiện phép biến đổi mục tiêu bằng công thức :

$$\begin{cases} x'_1 = \dfrac{1}{u_1}x_1 \\ x'_2 = \dfrac{1}{u_2}x_2 \\ x'_3 = \dfrac{1}{u_3}x_3 \end{cases}$$

thì mục tiêu {A_1, A_2, A_3; E'} sẽ biến thành mục tiêu {A_1, A_2, A_3; E}. Khi đó đối với mục tiêu {A_1, A_2, A_3; E} đường thẳng e có phương trình :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Như vậy ta tìm được điểm đơn vị E.

NHẬN XÉT. Để làm một bài toán xạ ảnh trong $\mathbf{P}^2$, khi lựa chọn mục tiêu xạ ảnh {A_1, A_2, A_3; E} ta có thể thay việc chọn điểm đơn vị E bằng cách chọn một đường thẳng bất kì không đi qua các đỉnh của mục tiêu làm đường thẳng đơn vị e = [1, 1, 1].

3.26. Giả sử đường thẳng d_1 trong $\mathbf{P}^3$ có phương trình :

$$(d_1) : \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 & (\alpha) \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

Có thể xem d_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β). Gọi R là một mặt phẳng chứa $(d_1) = \alpha \cap \beta$ và giả sử R có phương trình:

$$r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + r_4x_4 = 0 \quad (R) \quad (1)$$

khi đó hệ hai phương trình xác định giao tuyến (d_1) tương đương với hệ ba phương trình sau đây:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0 \\ r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + r_4x_4 = 0 \end{cases}$$

Điều đó có nghĩa là $r_i = pa_i + qb_i$ (2)

với $(p, q) \neq (0, 0)$ và $i = 1, 2, 3, 4$.

Do đó mặt phẳng (R) chứa d_1 có phương trình sau đây :

$$(pa_1 + qb_1)x_1 + (pa_2 + qb_2)x_2 + (pa_3 + qb_3)x_3 + (pa_4 + qb_4)x_4 = 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow p(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) + q(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4) = 0.$$

Giả sử điểm M cho trước có tọa độ là (m_1, m_2, m_3, m_4) và vì $M \in (R)$ nên :

$$p(a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + a_4m_4) + q(b_1m_1 + b_2m_2 + b_3m_3 + b_4m_4) = 0.$$

Ta có thể chọn $p = b_1m_1 + b_2m_2 + b_3m_3 + b_4m_4$

$$q = -(a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + a_4m_4).$$

Thay các giá trị của p và q vào phương trình (3) ta có phương trình mặt phẳng R đi qua M và chứa d_1.

Giả sử đường thẳng d_2 trong $\mathbf{P}^3$ chéo với d_1, có phương trình :

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = 0 \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4 = 0 \end{cases}$$

Tương tự như phần trên ta lập phương trình mặt phẳng (S) đi qua M và chứa đường thẳng d_2. Phương trình biểu thị giao của hai mặt phẳng (R) và (S) chính là phương trình của đường thẳng đi qua điểm M và cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

3.27. Điều kiện cần và đủ để cho hai đường thẳng chéo nhau là định thức ma trận các hệ số của hệ bốn phương trình đã cho khác không, nghĩa là :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Khi đó hệ phương trình gồm bốn phương trình đã cho có nghiệm tầm thường tức là hai đường thẳng đã cho chéo nhau và ngược lại.

§4

3.28. Gọi φ là phép biến đổi tuyến tính sinh ra phép biến đổi xạ ảnh f .

Vì $f(A_i) = A_i$ với $i = 1, 2, ..., n+1$ nên :

$$\varphi(\overline{e_i}) = k_i\overline{e_i} \quad \text{với } i = 1, 2, ..., n+1 \text{ với mọi } k_i \neq 0.$$

Do đó ta có phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f là :

$$\begin{cases} x_1' = k_1x_1 \\ x_2' = k_2x_2 \\ \dots \quad \dots \\ x_{n+1}' = k_{n+1}x_{n+1} \end{cases}$$

Với mỗi bộ số $(k_1, k_2, ..., k_{n+1})$ trong đó mọi k_i đều khác 0 xác định một phép biến đổi xạ ảnh có tính chất biến các đỉnh của mục tiêu $\{A_i; E\}$ thành chính nó.

3.29. Dựa vào kết quả của bài 3.28, ta có phép biến đổi xạ ảnh f biến các điểm M có tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ thành các điểm $M' = f(M)$ có tọa độ $(k_1x_1, k_2x_2, ..., k_{n+1}x_{n+1})$ với mọi $k_i \neq 0$. Mặt khác theo giả thiết phép biến đổi xạ ảnh f còn biến các điểm của siêu phẳng $x_{n+1} = 0$ thành chính nó tức là biến các điểm M có tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$ thành các điểm f(M) có tọa độ $(kx_1, kx_2, ..., kx_n, 0)$ với $k \neq 0$. Phối hợp hai điều kiện trên ta lập được phương trình của phép biến đổi f như sau :

$$\begin{cases} x'_1 = kx_1 \\ x'_2 = kx_2 \\ \dots \quad \dots \\ x'_n = kx_n \\ x'_{n+1} = k_{n+1}x_{n+1} \end{cases}$$

NHẬN XÉT : Với mỗi bộ hai số $(k, k_{n+1}) \neq (0, 0)$ ta có một phép biến đổi xạ ảnh f thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Nếu $k = k_{n+1}$ ta có phép đồng nhất .

Phép biến đổi xạ ảnh f nói trên biến các đường thẳng d đi qua điểm A_{n+1} thành chính nó. Thật vậy gọi N là giao điểm của d với siêu phẳng $x_{n+1} = 0$. Theo giả thiết các điểm A_{n+1} và N đều là các điểm kép của f. Mặt khác ta biết rằng qua phép biến đổi xạ ảnh một đường thẳng có ảnh là một đường thẳng, do đó đường thẳng ảnh đi qua A_{n+1} và N nghĩa là $f(d) = d$.

CHÚ Ý. Ta có thể dùng phương pháp tọa độ để chứng minh tính chất $f(d) = d$ như sau :

$$X \in \text{đường thẳng } d \Leftrightarrow [X] = a[A_{n+1}] + b[N].$$

Vậy mỗi điểm X thuộc đường thẳng d có tọa độ dạng :

$$d \ni X = (bn_1, bn_2, ..., bn_n, a) \text{ với } N = (n_1, n_2, ..., n_n, 0)$$

Qua phép biến đổi xạ ảnh f nói trên một điểm X thuộc đường thẳng d biến thành một điểm $X' = f(X)$ có dạng tọa độ như trên nghĩa là :

$$X' = a'[A_{n+1}] + b'[N]$$

trong đó $a' = k_{n+1}a$ và $b' = kb$. Vậy điểm X' thuộc đường thẳng d.

3.30. Lập phương trình tìm điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh f, ta có :

$$\begin{cases} -kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - kx_3 = 0 \end{cases}$$

Muốn cho f có điểm kép thì hệ phương trình trên phải có nghiệm không phải là nghiệm tầm thường, nghĩa là phải thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (k+1)^2(2-k) = 0$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = -1,\ k_3 = 2.$$

–Với k = –1 ta có phương trình tìm điểm kép của f là :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này có hạng bằng 1 và tương đương với phương trình sau đây :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Vậy tập hợp các điểm kép thuộc đường thẳng có phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, đường thẳng này chứa tất cả các điểm kép của f.

–Với k = 2 ta có phương trình tìm điểm kép của f là :

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này có hạng bằng 2 và tương đương với hệ hai phương trình sau :

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

Ta có điểm kép là $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$

Vậy phép biến đổi xạ ảnh f có một điểm kép và có một đường thẳng chứa toàn điểm kép.

3.31.Ta có phương trình tìm điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh f là :

$$\begin{cases} kx_1 = 4x_1 - x_2 \\ kx_2 = 6x_1 - 3x_2 \\ kx_3 = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-k)x_1 - x_2 = 0 \\ 6x_1 - (k+3)x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - (k+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

Muốn cho f có điểm kép thì hệ phương trình trên phải có nghiệm không phải là nghiệm tầm thường nghĩa là phải thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{vmatrix} 4-k & -1 & 0 \\ 6 & -k-3 & 0 \\ 1 & -1 & -k-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -k^3 + 7k + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k+1)(-k^2 + k + 6) = 0.$$

Ta có ba nghiệm $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, $k_3 = -2$.

- Với $k_1 = -1$ ta có phương trình tìm điểm kép của f là :

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - 0x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{điểm kép } P = (0, 0, 1)$$

- Với $k_2 = 3$ ta có phương trình :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ điểm kép $Q = (1,1,0)$.

• Với $k_3 = -2$ ta có phương trình :

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 = 0 \\ 6x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ điểm kép $R = (1,6,5)$.

Phép biến đổi xạ ảnh có tính chất bảo tồn đường thẳng và có ba điểm kép là P, Q, R. Ba điểm này độc lập vì có định thức tọa độ của chúng khác 0. Do đó ta có ba đường thẳng bất biến qua f là các đường thẳng PQ, PR, QR.

PQ có tọa độ là $[u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [-1, 1, 0] = [1, -1, 0]$

PR có tọa độ là $[u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} = [-6, 1, 0] = [6, -1, 0]$

QR có tọa độ là $[u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} = [5, -5, 5] = [1, -1, 1]$

Vậy các đường thẳng bất biến qua phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình là :

PQ : $x_1 - x_2 = 0$

PR : $6x_1 - x_2 = 0$

QR : $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

3.32. Muốn chứng minh f là một phép thấu xạ có tâm và nền, ta chứng minh phép f này có một điểm kép là tâm thấu xạ và có một đường thẳng kép là nền thấu xạ. Ta lập phương trình tìm điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh f :

$$\begin{cases} kx_1 = x_2 + x_3 \\ kx_2 = x_1 + x_3 \\ kx_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - kx_3 = 0 \end{cases}$$

Ta có phương trình đặc trưng của f :

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (k+1)^2(2-k) = 0$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = -1, k_3 = 2.$$

Theo kết quả tìm điểm kép ở bài 3.30 ta có :

Với k =−1 ta có đường thẳng kép chứa toàn điểm kép có phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Với k = 2 ta có tọa độ của điểm kép là I = (1, 1, 1).

Vậy phép biến đổi xạ ảnh f là phép thấu xạ tâm I = (1, 1, 1) và có nền là đường thẳng d có phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Trong trường hợp này mọi đường thẳng đi qua tâm thấu xạ I đều biến thành chính nó vì các đường thẳng đó đi qua tâm I không thuộc d và một điểm kép thuộc d. Phép thấu xạ này là phép thấu xạ m-cặp với m = 0 và được gọi là phép *thấu xạ tâm*.

3.33. Muốn chứng minh f là một phép thấu xạ ta cần tìm các điểm kép của f . Phương trình tìm điểm kép của f là :

$$\begin{cases} kx_1 = x_2 - x_3 \\ kx_2 = x_1 + x_3 \\ kx_3 = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -kx_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + (3-k)x_3 = 0 \end{cases}$$

Cần và đủ để f có điểm kép là :

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & -1 \\ 1 & -k & 1 \\ 2 & -2 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -k^3 + 3k^2 - 3k + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k-1)(-k^2 + 2k + 1) = 0.$$

Phương trình đặc trưng chỉ có một nghiệm $k = 1$.

Với $k = 1$ ta có phương trình tìm điểm kép của f là :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Như vậy ta tìm được một đường thẳng mà mọi điểm của nó là điểm kép và không có điểm kép nào nằm ngoài đường thẳng đó. Vậy phép thấu xạ này là phép thấu xạ đặc biệt có tâm thuộc nền thấu xạ.

Muốn tìm tâm thấu xạ O ta chỉ cần lấy một cặp điểm tương ứng M, $M' = f(M)$ và tìm giao điểm của đường thẳng MM' với nền thấu xạ.

Giả sử $M = (1, 1, 1)$. Dựa vào phương trình của f ta tính được tọa độ của $f(M) = M' = (0, 2, 3)$. Vậy đường thẳng MM' có tọa độ là:

$$[u_1, u_2, u_3] = \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right] = [1, -3, 2]$$

Giao điểm của MM' với nền thấu xạ :

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-1, 1, 2).$$

Vậy tâm thấu xạ f là điểm $O = (-1, 1, 2)$ và nền thấu xạ là đường thẳng có phương trình $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

2.34. Trước hết ta nhận xét rằng nếu mọi $a_i = 0$ với $i = 1, 2, ..., n+1$ ta có f là phép đồng nhất. Khi đó mọi điểm của $\mathbf{P}^n$ đều là điểm kép. Bây giờ ta giả sử mọi a_i không đồng thời bằng 0 và ta có phương trình tìm điểm kép của f là :

$$\begin{cases} (a-k)x_1 + a_1x_{n+1} = 0 \\ (a-k)x_2 + a_2x_{n+1} = 0 \\ \quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ (a-k)x_{n+1} + a_{n+1}x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Để tìm được tọa độ các điểm kép, phương trình trên buộc phải không có nghiệm tầm thường. Do đó ta phải có :

$$(a-k)^n(a-k+a_{n+1})=0$$

• Với $k = a$ thay vào phương trình tìm điểm kép ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a_1x_{n+1} = 0 \\ a_2x_{n+1} = 0 \\ \dots \quad \dots \\ a_{n+1}x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Vì ít ra có một $a_i \neq 0$ nên ta suy ra $x_{n+1} = 0$ là siêu phẳng chứa toàn điểm kép.

• Với $k = a + a_{n+1}$ thay vào phương trình tìm điểm kép, ta tìm được một điểm kép có tọa độ là $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$.

Nếu $a_{n+1} = 0$ thì siêu phẳng đó thuộc siêu phẳng $x_{n+1} = 0$.

Vậy ta có các kết qủa sau đây :

a) Nếu mọi $a_i \neq 0$ với $i = 1, 2, \dots, n+1$ ta có f là phép đồng nhất.

b) Nếu có một $a_i \neq 0$ và $a_{n+1} = 0$ ta có siêu phẳng $x_{n+1} = 0$ chứa toàn điểm kép.

c) Nếu $a_{n+1} \neq 0$ ta có siêu phẳng $x_{n+1} = 0$ chứa toàn điểm kép đồng thời lại còn có thêm một điểm kép có tọa độ $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ không thuộc siêu phẳng $x_{n+1} = 0$.

CHÚ Ý. Nếu phép biến đổi xạ ảnh f không phải là phép đồng nhất thì f là phép thấu xạ m-cặp với m = 0, có nền là siêu phẳng $x_{n+1} = 0$ và có tâm thấu xạ là điểm kép có tọa độ $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$. Nếu $a_{n+1} = 0$ tâm thấu xạ khi đó thuộc nền thấu xạ, còn nếu $a_{n+1} \neq 0$ thì tâm thấu xạ sẽ không thuộc nền thấu xạ. Đây là phép thấu xạ tâm trong $\mathbf{P}^n$.

3.35. a)Ta có theo giả thiết :

$$A_1 = (1, 0, 0) \to A_3 = (0, 0, 1)$$

$$A_2 = (0, 1, 0) \to E = (1, 1, 1)$$

$$A_3 = (0, 0, 1) \to A_1 = (1, 0, 0)$$

$$E = (1, 1, 1) \to A_2 = (0, 1, 0)$$

Gọi φ là phép biến đổi tuyến tính cảm sinh ra phép biến đổi xạ ảnh f và gọi $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}, \overrightarrow{e'}$ là các vectơ lần lượt đại diện cho các điểm A_3, E ,A_1, A_2. Ta có :

$$\overrightarrow{e'} = \overrightarrow{e_1'} + \overrightarrow{e_2'} + \overrightarrow{e_3'}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}0 = \beta + \gamma\\1 = \beta\\0 = \alpha + \beta\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tính được $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -1$

Do đó

$$\begin{cases}\overrightarrow{e_1'} = (0,0,-1)\\\overrightarrow{e_2'} = (1,1,1)\\\overrightarrow{e_3'} = (-1,0,0)\end{cases} \Rightarrow \text{ma trận chuyển } C = \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^* = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Ta tìm được ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ là C^*. Ma trận C^* này cũng là ma trận của phép biến đổi xạ ảnh f được cảm sinh bởi phép biến đổi tuyến tính φ.

Do đó ta có phương trình của phép biến đổi xạ ảnh đối với mục tiêu đã chọn là $k[x'] = C^*[x]$

Hay: $$k\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}kx_1' = x_2 - x_3\\kx_2' = x_2\\kx_3' = -x_1 + x_2\end{cases}$$

b)Phương trình tìm điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh f :

$$\begin{cases} -kx_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ (1-k)x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 - kx_3 = 0 \end{cases}$$

Muốn có điểm kép của f thì hệ phương trình trên phải có nghiệm không phải là nghiệm tầm thường. Điều kiện đó là :

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & -1 \\ 0 & 1-k & 0 \\ -1 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k^2(1-k) - (1-k) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-k)(k^2-1) = 0$$

Ta có các nghiệm $k_1 = 1$, $k_2 = -1$.

- Với $k_1 = 1$ ta có phương trình tìm điểm kép của f :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 0x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Tập hợp các điểm kép của f là đường thẳng d có phương trình

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

- Với $k_2 = -1$ ta có phương trình tìm điểm kép của f :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

Ta có điểm kép của f là điểm I có tọa độ (1, 0, 1).

Có thể nhận xét thêm rằng qua phép biến đổi xạ ảnh f đường thẳng A_1A_3 biến thành chính nó và đường thẳng A_2E cũng biến thành chính nó. Do đó giao điểm $I = A_1A_3 \cap A_2E$ là một điểm kép của f. Ta dễ dàng suy ra I = (1, 0, 1).

c) Gọi B là ma trận của phép biến đổi xạ ảnh f, ta có $[x'] = B[x]$. Gọi [x] là ma trận cột tọa độ của một điểm M tùy ý trong $\mathbf{P}^2$, $[x']$ là ma trận cột tọa độ của điểm N = f(M) và $[x'']$ là ma trận cột tọa độ của điểm f(N). Khi đó ta có $[x''] = B[x'] = B.B[x] =$ $= [x]$ vì B.B = I là ma trận đơn vị. Thật vậy :

$$B.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Do đó f(N) = M nghĩa là M là ảnh của N qua f. Ta nói rằng f có tính chất đối hợp.

3.36. Giả sử f là phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^2$. Nếu f có 3 điểm kép thẳng hàng trên một đường thẳng d thì do tính chất bảo toàn tỉ số kép của f ta suy ra mọi điểm của d đều là kép. Do đó f có một đường thẳng chứa toàn điểm kép. Đường thẳng này đóng vai trò siêu phẳng của $\mathbf{P}^2$.

Nếu ngoài d ra không còn có một điểm kép nào khác thì f là phép thấu xạ đặc biệt (có tâm thuộc nền thấu xạ). Nếu ngoài d còn có một điểm bất động hay là điểm kép duy nhất nữa thì f là phép thấu xạ O-cặp hay phép thấu xạ tâm. Nếu ngoài d còn có quá một điểm kép thì f là phép đồng nhất và phép này có thể coi là một trường hợp đặc biệt của phép thấu xạ.

3.37. a) Giả sử f là một phép thấu xạ m-cặp trong $\mathbf{P}^n$. Khi đó tồn tại hai cái phẳng $\mathbf{P}^m$ (m < n) và $\mathbf{P}^{n-m-1}$ không cắt nhau và chứa toàn những điểm kép của f. Vì dim $\mathbf{P}^m$ = m nên có thể chọn trên phẳng đó m+1 điểm độc lập là: $A_o, A_1, \dots, A_m$. Vì dim $\mathbf{P}^{n-m-1}$ = n-m-1 nên có thể chọn trên phẳng đó n – m điểm độc lập $A_{m+1}, A_{m+2}, \dots, A_n$. Chọn thêm một điểm E không nằm trên $\mathbf{P}^m$ và $\mathbf{P}^{n-m-1}$ (vì chúng là hai cái phẳng chéo nhau) ta được một mục tiêu xạ ảnh trong $\mathbf{P}^n$ là $\{A_i; E\}$ với i = 0, 1, ..., n.

Đối với mục tiêu đó, m-phẳng $\mathbf{P}^n$ có phương trình :

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$$

còn (n-m-1)-phẳng $\mathbf{P}^{n-m-1}$ có phương trình :

$$x_o = x_1 = \dots = x_m = 0$$

Qua phép thấu xạ, các điểm của $\mathbf{P}^m$ và $\mathbf{P}^{n-m-1}$ đều kép nên ta suy ra biểu thức tọa độ của f đối với mục tiêu đã chọn có dạng :

$$\begin{cases} kx'_i = px_i \quad \text{với } p \neq 0 \text{ và } i = 1, 2, \ldots, m. \\ kx'_j = qx_j \quad \text{với } q \neq 0 \text{ và } j = m+1, m+2, \ldots, n \end{cases}$$

Ma trận A của f có m+1 số p và có n- m số q trên đường chéo chính, các số còn lại đều bằng 0 nghĩa là :

$$A = \begin{bmatrix} p & & & & & & & & \\ & p & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & 0 & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & p & & & & \\ & & & & & q & & & \\ & & & & & & q & & \\ & & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & q \end{bmatrix}$$

Khi đó phép thấu xạ f có phương trình là $k[x'] = A[x]$.

Nếu p = q thì f là phép đồng nhất.

b)Nếu M và M' là một cặp điểm tương ứng nào đó của f (tất nhiên M không phải là điểm kép). Giả sử $M = (x_o, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$. Vì M không nằm trên $\mathbf{P}^m$ và $\mathbf{P}^{n-m-1}$ nên trong các số $x_o, \ldots, x_m$ phải có ít nhất một số khác 0 và trong các số $x_{m+1}, \ldots, x_n$ cũng phải có ít nhất một số khác 0. Ta có $M' = (px_o, \ldots, px_m, qx_{m+1}, \ldots, qx_n)$.

Giả sử đường thẳng nối M và M' cắt $\mathbf{P}^m$ và $\mathbf{P}^{n-m-1}$ lần lượt tại hai điểm U và V. Điểm U thuộc đường thẳng MM' nên U có tọa độ là :

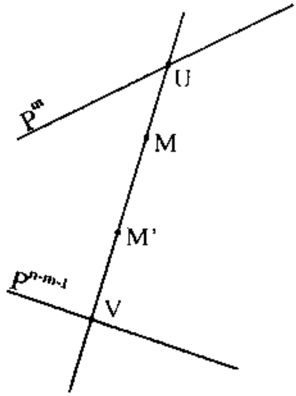
$$[U] = \alpha[M] + \beta[M']$$

Mặt khác điểm U $\in$ $\mathbf{P}^m$ nên tọa độ của nó phải thỏa mãn phương trình của $\mathbf{P}^m$. Do đó với $U = (u_o, u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n)$ thì $u_{m+1} = \ldots = u_n = 0$.

Ta có : $u_j = \alpha x_j + \beta q x_j = 0$ với $j = m+1, \ldots, n$.

Vì ít nhất có một $x_j \neq 0$ nên $\alpha + \beta q = 0$. Ta lấy $\beta = 1$ và $\alpha = -q$. Vậy đường thẳng MM' cắt $\mathbf{P}^m$ tại điểm U mà :

$$[U] = -q[M] + [M']$$



Tương tự đường thẳng MM' cắt $\mathbf{P}^{n-m-1}$ tại V mà :

$$[V] = -p[M] + [M']$$

Từ đó ta suy ra

$(MM'UV) = \dfrac{-p}{-q} = \dfrac{p}{q} = k$ là hệ số thấu xạ.

Như vậy tỉ số kép (MM'UV) không phụ thuộc vào điểm M.

• Nếu k = 0 ta có (MM'UV) = 0, do đó U $\equiv$ M hoặc V $\equiv$ M'. Khi M $\equiv$ U, vì U là điểm kép nên M' $\equiv$ U. Lúc đó $\mathbf{P}^m$ trở thành một điểm là 0-phẳng và $\mathbf{P}^{n-m-1}$ là một siêu phẳng. Trường hợp V $\equiv$ M' ta có $\mathbf{P}^{n-m-1}$ là một điểm và $\mathbf{P}^m$ là một siêu phẳng.

• Nếu k = –1 ta có (MM'UV) = –1. Khi đó (M'MUV) = –1, ta có f(M) = M' và f(M') = M hay f^2 là phép đồng nhất. Vậy f là phép thấu xạ đối hợp.

3.38. Ta biết tập hợp các phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ lập thành một nhóm và tập hợp các phép thấu xạ là một tập hợp con của nhóm đó. Do đó ta chỉ cần chứng minh hai tính chất :

1) Tích của hai phép thấu xạ có chung một siêu phẳng P làm nền là một phép thấu xạ nhận siêu phẳng đó làm nền.

2) Đảo ngược của một phép thấu xạ có nền là siêu phẳng P là một phép thấu xạ nhận P làm nền.

Gọi g và f là hai phép thấu xạ nhận siêu phẳng P làm nền nghĩa là tất cả mọi điểm của P đều là điểm kép của g và f. Do đó $f(P) = P$ và $g[f(P)] = g(P) = P$.

Mặt khác $f(P) = P$ nên ta có $f^{-1}(P) = P$.

Vậy tập hợp tất cả các phép thấu xạ có chung nền P lập thành một nhóm con của nhóm các phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$.

3.39. Giả sử $(\mathcal{T})$ là tập hợp tất cả các phép thấu xạ m-cặp của $\mathbf{P}^n$ có cùng cơ sở (α,β) với α là m-phẳng, β là (n−m−1)-phẳng và $\alpha \cap \beta = \varnothing$. Theo bài 3.37, với mục tiêu xạ ảnh thích hợp ta có phương trình của phép thấu xạ f là :

$[x'] = A[x]$ trong đó ma trận A có dạng :

$$A = \begin{bmatrix} p & & & & & & & \\ & p & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & p & & & & \\ & & & & q & & & \\ & & & & & q & & \\ & & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & & q \end{bmatrix}$$

Ma trận A của f có m+1 số p và có n−m số q trên đường chéo chính, các số còn lại đều bằng 0. Giả sử M và M' là một cặp điểm tương ứng của f và gọi U, V là giao điểm của đường thẳng MM' lần lượt với α và β.

Ta có $(MM'UV) = \dfrac{p}{q} = k$ gọi là hệ số thấu xạ của f, hệ số này không phụ thuộc vào vị trí điểm $M \in \mathbf{P}^n$.

Dễ dàng chứng minh được tập hợp các phép thấu xạ có cơ sở

(α,β) là nhóm con của nhóm các phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$. Đẳng cấu giữa nhóm các phép thấu xạ có cùng cơ sở (α,β) với nhóm nhân các số khác 0 của trường K được cho bởi quy tắc $f \to k$ với k là hệ số thấu xạ của f.

3.40. Gọi P là siêu phẳng có phương trình $u_1x_1 + \ldots + u_{n+1}x_{n+1} = 0$. Ta có thể viết phương trình của siêu phẳng P dưới dạng ma trận :

$$[u]^*[x] = 0.$$

Vì phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình $[x'] = B[x]$ nên ta có:

$$[x] = B^{-1}[x']$$

Do đó $[u]^*[x] = [u]^*B^{-1}[x']$ (1)

Ta biết rằng qua phép biến đổi xạ ảnh f một siêu phẳng P sẽ biến thành một siêu phẳng P' có dạng :

$$[u']^*[x'] = 0 \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có :

$$[u']^* = [u]^*B^{-1}$$

hay $\quad [u'] = (B^{-1})^*[u]$

Dựa vào hệ thức trên ta tìm được tọa độ $[u']$ của siêu phẳng $P' = f(P)$ và viết được phương trình của siêu phẳng $P' = f(P)$.

3.41. Giả sử f là phép biến đổi xạ ảnh được cảm sinh bởi phép biến đổi tuyến tính $\varphi : \mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{V}^{n+1}$. Gọi $\{\overrightarrow{e_i}\}$ là cơ sở của $\mathbf{V}^{n+1}$ ứng với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ và $\{\overrightarrow{e_i'}\}$ là cơ sở trong $\mathbf{V}^{n+1}$ ứng với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i'; E'\}$. Ta có $\varphi(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{e_i'}$ với $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Giả sử $X \in \mathbf{P}^n$ và $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$. Gọi $\vec{x}$ là vectơ đại diện cho điểm X. Ta suy ra :

$$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_{n+1}\overrightarrow{e_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i\overrightarrow{e_i}$$

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i\varphi(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i\overrightarrow{e_i'} \qquad (1)$$

Theo định nghĩa của ánh xạ xạ ảnh thì $\varphi(\vec{x})$ là vectơ đại diện cho điểm $X' = f(X)$. Hệ thức (1) chứng tỏ rằng điểm X' có tọa độ đối với mục tiêu $\{A'_i; E'\}$ là $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ với $\{A'_i; E'\}$ là mục tiêu ứng với cơ sở $\{\overrightarrow{e'_i}\}$.

§5

3.42. a) Tính (ABCD) :

$$[C] = a[A] + b[B] \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ta tính được $a = 1$, $b = 2$

$$[D] = c[A] + d[B] \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ta tính được $c = 2$, $d = 1$.

Theo định nghĩa ta có $(ABCD) = \dfrac{b}{a} : \dfrac{d}{c} = \dfrac{2}{1} : \dfrac{1}{2} = 4.$

b) Tìm tọa độ điểm M sao cho $(ABCM) = -1$.

Từ $[C] = a[A] + b[B]$ ta tính được $a = 1$, $b = 2$

$$[M] = c[A] + d[B] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ta có hệ phương trình với $M = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{cases} x_1 = c + 2d \\ x_2 = 2c + d \\ x_3 = \quad\quad d \end{cases}$$

Theo giả thiết $(ABCM) = -1$ nên $\dfrac{2}{1} : \dfrac{d}{c} = -1 \Rightarrow d = -2c.$

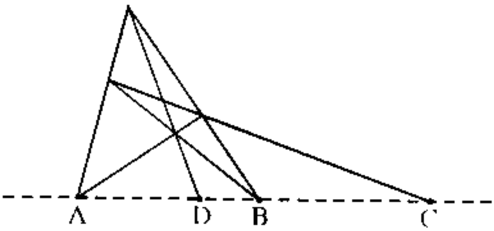
Có thể chọn $c = 1$ ta có $d = -2$. Thay các giá trị này của c và d vào phương trình trên ta tính được tọa độ của điểm M:

$$x_1 = -3,\ x_2 = 0,\ x_3 = -2.$$

Vậy $M = (-3, 0, -2) = (3, 0, 2)$.

3.43. Ta biết rằng trên mỗi đường chéo của hình bốn cạnh toàn phần, hai đỉnh đối diện và hai điểm chéo làm thành một hàng điểm điều hòa.

a) Ta hãy tạo nên một hình bốn cạnh toàn phần nhận A, B là hai đỉnh đối diện và C là một điểm chéo. Khi đó ta dễ dàng xác định được điểm chéo còn lại là D (xem hình vẽ).



b) Ta hãy tạo nên một hình bốn cạnh toàn phần nhận A, B là hai đỉnh đối diện và D là một điểm chéo. Khi đó ta dễ dàng tìm được điểm C. Ta chú ý rằng vì $(ABDC) = \dfrac{1}{(ABCD)} = -1$ nên vai trò của C và D là bình đẳng trong hệ thức đã cho.

3.44.Cho $(ABCD) = \lambda$. Từ hệ bốn điểm đó ta có tỉ số kép sau đây :

a) $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \lambda$

b) $(BACD) = (ABDC) = \dfrac{1}{(ABCD)} = \dfrac{1}{\lambda}$

c) $(ACBD) = (DBCA) = 1 - (ABCD) = 1 - \lambda$.

3.45. Giả sử ta có :

$$[C] = a[A] + b[B]$$

$$[D] = c[A] + d[B]$$

$$[E] = e[A] + f[B]$$

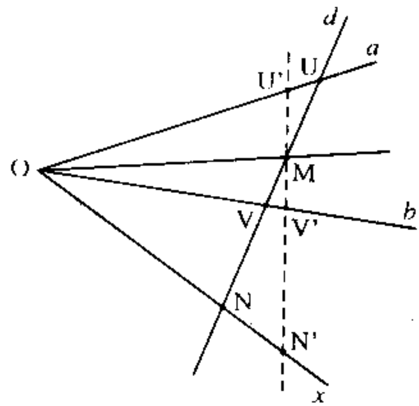
Áp dụng định nghĩa của tỉ số kép ta có :

$$(ABCD).(ABDE).(ABEC) = \left(\frac{b}{a} : \frac{d}{c}\right).\left(\frac{d}{c} : \frac{f}{e}\right).\left(\frac{f}{e} : \frac{b}{a}\right) = 1.$$

Vậy với 5 điểm A, B, C, D, E thuộc một đường thẳng xạ ảnh, ta có :

$$(ABCD).(ABDE).(ABEC) = 1.$$

3.46. Giả sử N là điểm trên đường thẳng d đi qua M sao cho (MNUV) = k với U, V lần lượt là giao điểm của đường thẳng MN với a và b. Khi đó ta có :



(MNUV) =(OM,ON,OU,OV) = k.

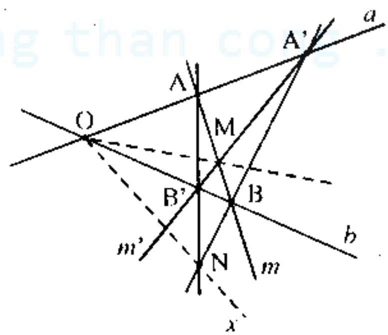
Vậy điểm N luôn luôn thuộc đường thẳng Ox sao cho :

$$(OM, Ox, a, b) = k.$$

Ngược lại với mỗi điểm N' trên đường thẳng Ox, gọi U', V' lần lượt là giao điểm của đường thẳng N'M với a và b. Ta có (MN'U'V') = k.

Vậy quỹ tích những điểm N khi d thay đổi nhưng luôn luôn đi qua M là đường thẳng Ox sao cho

$$(OM, Ox, a, b) = k.$$



3.47. Xét hình bốn cạnh toàn phần AA'BB' ta có O, M, N là ba điểm chéo.

Ta chứng minh được quỹ tích của N là đường thẳng Ox sao cho:

$$(a, b, OM, Ox) = -1.$$

3.48. Chọn A_1, A_2, A_3 làm đỉnh của mục tiêu tọa độ, còn điểm đơn vị E của mục tiêu đó thì chọn sao cho đường thẳng d cho trước có phương trình là $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ nghĩa là d là đường thẳng đơn vị và d = [1, 1, 1] (theo kết quả của bài 3.25). Ta suy ra $K_1 = (0,-1, 1)$, $K_2 = (-1, 0, 1)$, $K_3 = (-1, 1, 0)$.

Vì L_1, L_2, L_3 là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 nên tọa độ của các điểm L_1, L_2, L_3 này có dạng sau đây:

$$L_1 = (0,\ x,\ 1),\ L_2 = (y,\ 0,\ 1),\ L_3 = (z,\ 1,\ 0).$$

Dựa vào định nghĩa tỉ số kép ta tính được:

$$(A_2A_3K_1L_1) = -x,\ (A_3A_1K_2L_2) = -\frac{1}{y},\ (A_1A_2K_3L_3) = -z.$$

Vậy $(A_2A_3K_1L_1).(A_3A_1K_2L_2).(A_1A_2K_3L_3) = -\dfrac{xz}{y}$

a) L_1, L_2, L_3 thẳng hàng $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow xz + y = 0 \Leftrightarrow y = -xz.$$

Do đó :

$(A_2A_3K_1L_1).(A_3A_1K_2L_2).(A_1A_2K_3L_3) = 1 \Leftrightarrow L_1, L_2, L_3$ thẳng hàng

b) Ta tính được tọa độ các đường thẳng:

$A_1L_1 = [0, -1, x]$, $A_2L_2 = [-1, 0, y]$, $A_3L_3 = [-1, z, 0]$

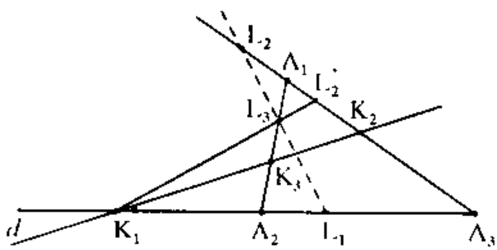
A_1L_1, A_2L_2, A_3L_3 đồng quy $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & x \\ -1 & 0 & y \\ -1 & z & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow y - xz = 0 \Leftrightarrow y = xz.$$

Ta suy ra:

$(A_2A_3K_1L_1).(A_3A_1K_2L_2).(A_1A_2K_3L_3) = -1 \Leftrightarrow A_1L_1, A_2L_2, A_3L_3$ đồng quy

NHẬN XÉT. Có thể dựa vào tính chất của phép chiếu xuyên tâm và các tính chất của tỉ số kép ta chứng minh câu a) bài toán trên như sau :



- Với tâm chiếu L_3, gọi

$L'_2 = K_1L_3 \cap A_1A_3$

Ta có L_1, L_2, L_3 thẳng hàng $\Leftrightarrow (A_2A_3K_1L_1) = (A_1A_3L'_2L_2)$

Mặt khác ta có :

$$(A_3A_1K_2L_2) = (A_3A_1K_2L'_2)(A_3A_1L'_2L_2).$$

Vậy $(A_2A_3K_1L_1).(A_3A_1K_2L_2) = (A_3A_1K_2L'_2)$

$$\text{vì } (A_1A_3L'_2L_2) = \frac{1}{(A_3A_1L'_2L_2)}.$$

• Với tâm chiếu K_1 ta lại có :

$$(A_3A_1K_2L'_2) = (A_2A_1K_3L_3).$$

Do đó $(A_2A_3K_1L_1).(A_3A_1K_2L_2) = (A_2A_1K_3L_3)$.

Vì $(A_2A_1K_3L_3) = \dfrac{1}{(A_1A_2K_3L_3)}$ nên :

$$(A_2A_3K_1L_1)(A_3A_1K_2L_2)(A_1A_2K_3L_3) = 1.$$

3.49. Trên đường thẳng xạ ảnh cho một mục tiêu xạ ảnh, giả sử ta có tọa độ xạ ảnh của các điểm A,B,C,D như sau :

$$A = (a,1),\ B = (b, 1),\ C = (c, 1),\ D = (d, 1)$$

$$\begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c = pa + qb \\ 1 = p + q \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d = ra + sb \\ 1 = r + s \end{cases}$$

Với $p = 1 - q$ ta tính được $q = \dfrac{c-a}{b-a} \Rightarrow p = 1 - q = \dfrac{b-c}{b-a}$

Với $r = 1 - s$ ta tính được $s = \dfrac{d-a}{b-a} \Rightarrow r = 1 - s = \dfrac{b-d}{b-a}$

$$\text{Vậy } (ABCD) = \frac{q}{p} : \frac{s}{r} = \frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-a}{b-c} : \frac{d-a}{b-a} \times \frac{b-a}{b-d}$$

$$= \frac{c-a}{b-c} : \frac{d-a}{b-d} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}.$$

§6

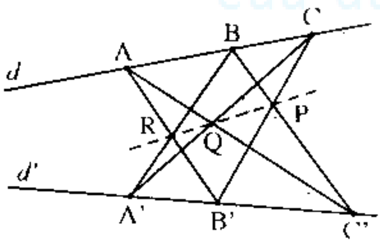
3.50. Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ cho ba điểm A,B,C nằm trên đường thẳng d và ba điểm A',B',C' nằm trên đường thẳng d'. Theo định lí Pappus ta có ba điểm $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$, $BC' \cap B'C$ thẳng hàng. Bây giờ ta dùng mô hình xạ ảnh của không gian afin để chứng minh định lí đó.

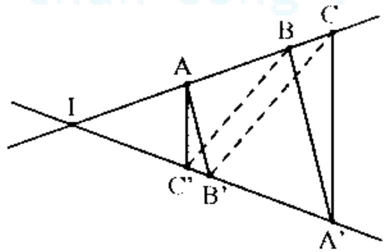
Gọi $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \setminus$ đường thẳng QR.

Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ này ta có $AB' // A'B$ và $AC' // A'C$. Cần chứng minh $BC' // B'C$. Ta xét hai trường hợp sau đây:

a) Nếu $I = d \cap d'$ không thuộc đường thẳng vô tận QR thì khi đó ta có :

- $AB' // A'B \Rightarrow (IAB) = (IB'A') = a$ hay $\overrightarrow{IA} = a\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{IA'} = a\overrightarrow{IB'}$ (1)





- $AC' // A'C \Rightarrow (IAC) = (IC'A') = b$ hay $\overrightarrow{IA} = b\overrightarrow{IC}$ và $\overrightarrow{IC'} = b\overrightarrow{IA'}$ (2)

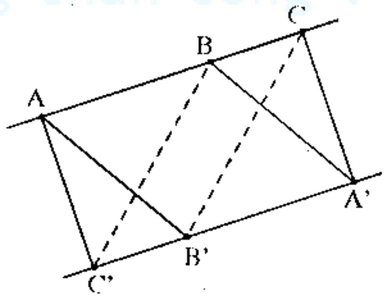
So sánh (1) và (2) ta có :

$$\overrightarrow{IA} = a\overrightarrow{IB} = b\overrightarrow{IC} \Rightarrow \overrightarrow{IB} = \frac{b}{a}\overrightarrow{IC}$$

$$\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{a}\overrightarrow{IB'} = \frac{1}{b}\overrightarrow{IC'} \Rightarrow \overrightarrow{IC'} = \frac{b}{a}\overrightarrow{IB'}$$

Ta suy ra (IBC) = (IC'B') hay BC'// CB'

b) Nếu I = d ∩ d' thuộc đường thẳng vô tận QR nghĩa là d//d', khi đó ta có AB'A'B và AC'A'C là các hình bình hành.



Do đó

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'A'}$.

Do đó

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'A'} - \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'C'}$$

hay $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'B'}$

Vậy BC'// CB'.

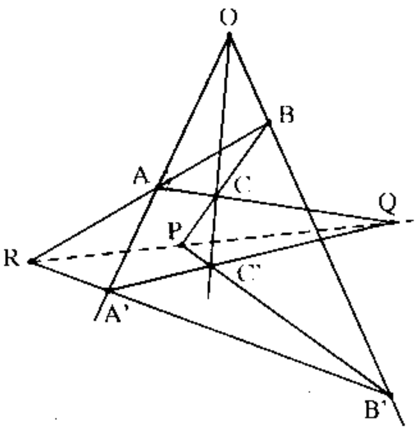
3.51.Giả sử hai tam giác ABC và A'B'C' có các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại O ta cần chứng minh ba điểm

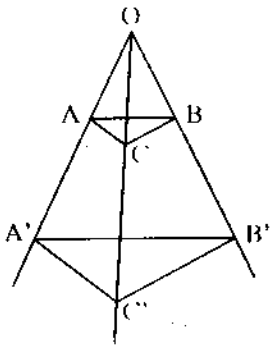
P = BC ∩ B'C', Q = CA ∩ C'A', R = AB ∩ A'B' thẳng hàng.

Dùng mô hình $A^2 = P^2 \backslash$ đường thẳng PQ.

Ta xét hai trường hợp :

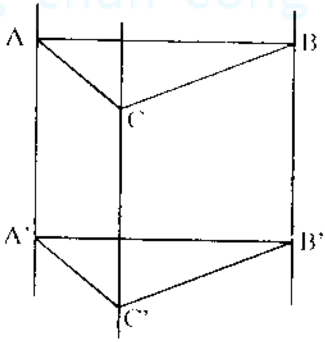
a) Nếu điểm O không thuộc đường thẳng vô tận PQ thì khi đó





ta có $BC // B'C'$ và $CA // C'A'$. Theo định lí Thales ta suy ra $AB // A'B'$.

b) Nếu điểm O thuộc đường thẳng vô tận PQ thì khi đó $AA' // BB' // CC'$. Vì $BC // B'C'$ và $CA // C'A'$ nên ta có $AB // A'B'$.



3.52. Theo kết quả của bài số 3.48 ở mục a) ta có kết quả là :

L_1, L_2, L_3 thẳng hàng $\Leftrightarrow (A_2A_3K_1L_1)(A_3A_1K_2L_2)(A_1A_2K_3L_3) = 1$

Theo tính chất của tỉ số kép ta có :

$$(A_2A_3L_1K_1) = \frac{1}{(A_2A_3K_1L_1)}$$

$$(A_3A_1L_2K_2) = \frac{1}{(A_3A_1K_2L_2)}$$

$$(A_1A_2L_3K_3) = \frac{1}{(A_1A_2K_3L_3)}$$

Do đó :

L_1, L_2, L_3 thẳng hàng $\Leftrightarrow (A_2A_3L_1K_1)(A_3A_1L_2K_2)(A_1A_2L_3K_3) = 1.$

Chọn mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \setminus$ đường thẳng d. Khi đó các điểm K_1, K_2, K_3 trên d trở thành các điểm vô tận và ta có :

$$(A_2A_3L_1K_1) = (L_1A_2A_3)$$

$$(A_3A_1L_2K_2) = (L_2A_3A_1)$$

$$(A_1A_2L_3K_3) = (L_3A_1A_2)$$

Do đó trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \setminus d$ ta có điều kiện cần và đủ để L_1, L_2, L_3 thẳng hàng là $(L_1A_2A_3)(L_2A_3A_1)(L_3A_1A_2) = 1$.

3.53. Theo kết quả ở mục b) bài 3.48 ta có kết quả là :

A_1L_1, A_2L_2, A_3L_3 đồng quy $\Leftrightarrow (A_2A_3K_1L_1)(A_3A_1K_2L_2)(A_1A_2K_3L_3) = -1.$

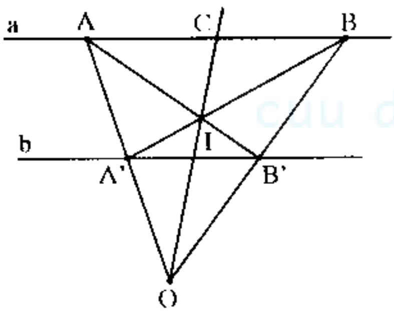
Áp dụng cách làm như ở bài 3.52, trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \setminus d$ với K_1, K_2, K_3 là các giao điểm của d lần lượt với các cạnh A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 của tam giác $A_1A_2A_3$ ta có :

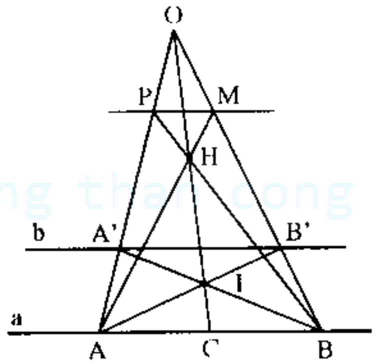
$$A_1L_1,\ A_2L_2,\ A_3L_3 \text{ đồng quy} \Leftrightarrow (L_1A_2A_3)\,(L_2A_3A_1)(L_3A_1A_2) = -1.$$

3.54. a) Ta biết rằng trung điểm C của đoạn thẳng AB và điểm D vô tận chia điều hòa hai điểm A, B. Khi đó ta có :

$$(CAB) = (ABCD) = -1.$$

Ta dựng một hình bốn cạnh toàn phần nhận A, B làm hai đỉnh đối diện, bằng cách từ một điểm O không thuộc a và b ta nối OA, OB lần lượt cắt b tại A' và B'. Gọi $I = AB' \cap A'B$. Đường thẳng OI cắt a tại điểm C. Ta có $(CAB) = (ABCD_\infty) = -1$ nên C là trung điểm của đoạn AB.



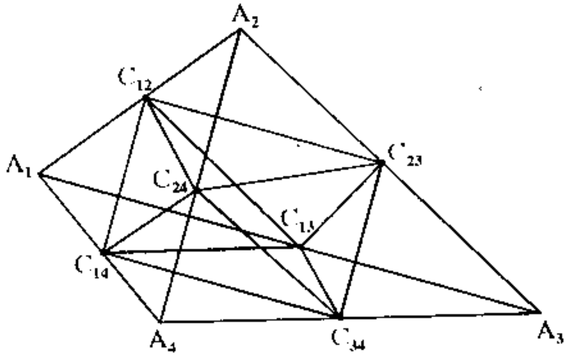


b) Trên đường thẳng AP ta lấy một điểm O khác với A và P. các đường thẳng OA, OB lần lượt cắt b tại A' và B'. Theo câu a) ta tìm được điểm C là trung điểm của đoạn AB. Gọi $H = PB \cap OC$ và $M = AH \cap OB$. Đường thẳng PM là đường thẳng cần dựng. Ta dễ dàng chứng minh được PM // a.

CHÚ Ý. Có thể mở rộng bài toán để đoạn AB thành 4 phần bằng nhau bằng cách tiếp tục chia đôi đoạn AC và đoạn CB. Nếu tiếp tục ta còn có thể chia đoạn AB ra 2^n phần bằng nhau.

3.55. Xét mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \setminus d$. Khi đó các điểm B_{ij} là các điểm vô tận và các điểm C_{ij} trở thành trung điểm của các đoạn A_iA_j với i,j = 1, 2, 3,4.

a) Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \setminus d$ ta có $C_{14}C_{12} // A_2A_4$ mà B_{24} là điểm vô tận trên đường thẳng A_2A_4.



Vậy C_{12}, C_{14}, B_{24} thẳng hàng. Tổng quát ta có thể tìm các bộ ba điểm thẳng hàng sau đây:

B_{ij}, C_{in}, C_{jn} với $n \neq i, j$.

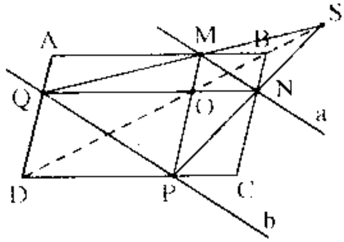
Như vậy có tất cả 12 bộ ba điểm thẳng hàng sau đây :

$B_{12}C_{13}C_{23}$	$B_{14}C_{12}C_{42}$	$B_{24}C_{21}C_{41}$
$B_{12}C_{14}C_{24}$	$B_{14}C_{13}C_{43}$	$B_{24}C_{23}C_{43}$
$B_{13}C_{12}B_{32}$	$B_{23}C_{21}C_{31}$	$B_{34}C_{31}C_{41}$
$B_{13}C_{14}B_{34}$	$B_{23}C_{24}C_{34}$	$B_{34}C_{32}C_{42}$.

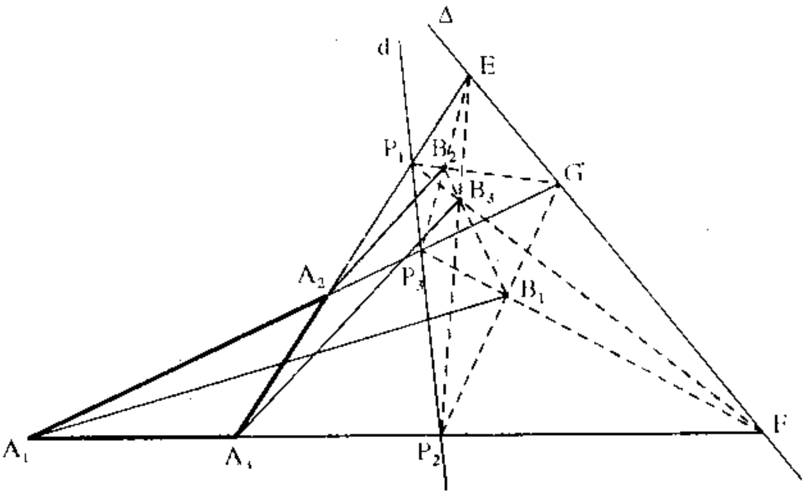
b) Xét các hình bình hành $C_{12}C_{23}C_{34}C_{14}$, $C_{12}C_{13}C_{34}C_{24}$, $C_{14}C_{24}C_{23}C_{13}$. Các đường chéo của các hình bình hành này cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường . Do đó $C_{12}C_{34}$, $C_{13}C_{24}$, $C_{14}C_{23}$ đồng quy.

CHÚ Ý. Ta có thể dùng định lí Desargues đối với hai tam giác có cạnh song song với nhau là $C_{12}C_{13}C_{14}$ và $C_{34}C_{24}C_{23}$. Hai tam giác này có giao điểm các cạnh tương ứng thẳng hàng (thuộc đường thẳng vô tận) nên ba đường thẳng nối các cặp đỉnh tương ứng đồng quy.

3.56. Ta bổ sung vào mặt phẳng afin này một đường thẳng vô tận d. Các đường thẳng AB và DC song song với nhau nên cắt nhau tại một điểm E ∈ d. Hai đường thẳng AD và BC song song với nhau nên cắt nhau tại một điểm $F \in d$. Khi đó hai đường thẳng MN, PQ cũng có giao điểm trên d. Áp dụng định lí Desargues đối với hai tam giác BMN và DPQ. Hai tam giác này có các cạnh tương ứng song song nghĩa là giao điểm của các cặp cạnh tương ứng đều thuộc đường thẳng d. Vậy các đường thẳng nối các điểm tương ứng phải đồng quy nghĩa là ba điểm O, B, D thẳng hàng.



3.57. Gọi E, F, G là các điểm vô tận lần lượt của các đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Cả ba điểm này đều nằm trên đường thẳng vô tận Δ. Gọi mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2 = \mathbf{A}^2 + \{\Delta\}$. Ta có các hình bình hành $A_1P_2B_1P_3$, $A_2P_3B_2P_1$, $A_3P_2B_3P_1$ vì B_1 đối xứng với A_1 qua trung điểm của P_2P_3, B_2 đối xứng với A_2 qua trung điểm của P_3P_1, B_3 đối xứng với A_3 qua trung điểm của P_1P_2. Ta có ba điểm P_1, P_2, P_3 thẳng hàng và ba điểm E, F, G cũng thẳng hàng.



Áp dụng định lí Pappus của hình học xạ ảnh ta có $B_1 = P_2G \cap P_3F$, $B_2 = P_3E \cap P_1G$, $B_3 = P_1F \cap P_2E$ là ba điểm thẳng hàng.

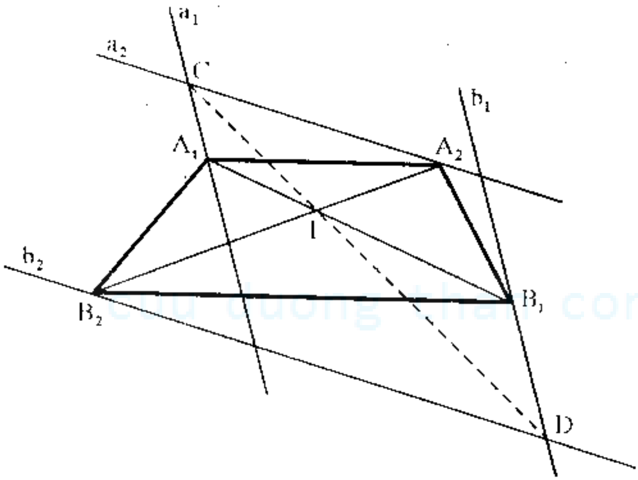
3.58. Gọi $C = a_1 \cap a_2$, $D = b_1 \cap b_2$, $I = A_1B_1 \cap A_2B_2$. Xét hai tam giác A_1A_2C và B_1B_2D.

Hai tam giác này có $A_1A_2 // B_1B_2$

$A_1C // B_1D$

$CA_2 // DB_2$.

Bổ sung vào mặt phẳng afin chứa hình thang một đường thẳng d vô tận chứa ba điểm vô tận của ba cặp đường thẳng song



song nói trên. Theo định lí Desargues trong mặt phẳng $\mathbf{P}^2 = \mathbf{A}^2 + \{d\}$, hai tam giác A_1A_2C và B_1B_2D có giao điểm các cạnh tương ứng thẳng hàng (cùng thuộc đường thẳng vô tận d) nên có ba đường thẳng A_1B_1, A_2B_2, CD nối các cặp điểm tương ứng đồng quy nghĩa là ba điểm C, I, D thẳng hàng.

§7

3.59. Trong $\mathbf{P}^n$ ta có các khái niệm đối ngẫu sau đây :

a) (n−m−1)-phẳng thuộc (n−k−1)-phẳng.

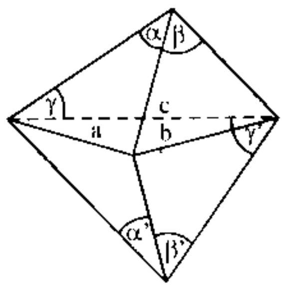
b) Điểm thuộc (n−m−1)-phẳng.

c) Bốn siêu phẳng thuộc một (n−2)-phẳng (hay bốn siêu phẳng thuộc một chùm).

d) Tỉ số kép của bốn siêu phẳng thuộc một chùm.

3.60. a) Trong $\mathbf{P}^2$ đối ngẫu của một hình ba cạnh (ba cạnh này không cùng thuộc một điểm) là một hình ba điểm (ba điểm này không thẳng hàng).

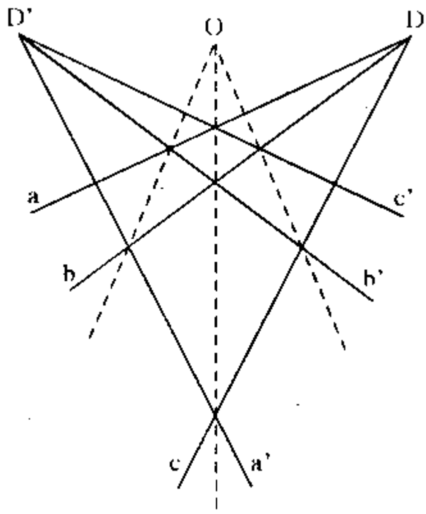
b) Trong $\mathbf{P}^3$ đối ngẫu của một tam giác là một tam giác (vì đối ngẫu của đường thẳng là đường thẳng).



3.61.–Trong $\mathbf{P}^2$ định lí Desargues (thuận và đảo) có tính chất tự đối ngẫu.

–Trong $\mathbf{P}^3$ định lí đối ngẫu của định lí Desargues thuận được phát biểu :

"Trong $\mathbf{P}^3$ cho hai hình ba mặt $\alpha\beta\gamma$ và $\alpha'\beta'\gamma'$. Nếu các đường thẳng $a = \alpha \cap \alpha'$, $b = \beta \cap \beta'$, $c = \gamma \cap \gamma'$ cùng thuộc một mặt phẳng thì các mặt phẳng xác định bởi $\alpha \cap \beta$ và $\alpha' \cap \beta'$, $\beta\cap\gamma$ và $\beta'\cap\gamma'$, $\gamma \cap \alpha$ và $\gamma' \cap \alpha'$ cùng thuộc một đường thẳng".



Phần định lí đảo, bạn đọc tự làm .

3.62. Trong $\mathbf{P}^2$ ta có định lí đối ngẫu của định lí Pappus như sau :

"Trong $\mathbf{P}^2$ cho ba đường thẳng a, b, c thuộc một điểm D và ba đường thẳng a', b', c' thuộc một điểm D'. Khi đó ba đường thẳng sau đây đồng quy tại một điểm: đường thẳng nối điểm $a \cap b'$ với điểm $a' \cap b$, đường thẳng nối điểm $a \cap c'$ với điểm $a' \cap c$, đường thẳng nối điểm $c \cap b'$ với điểm $c' \cap b$.

§8, §9

3.63 a) Đưa dạng toàn phương ở vế trái về dạng chính tắc và tiếp tục đưa nó về dạng chuẩn tắc, ta sẽ kết luận được về loại của đường bậc hai đã cho. Cụ thể ta làm như sau :

$$P(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

$$= 4\left(x_1^2 + 2x_1 . \frac{2x_2 - 6x_3}{4}\right) + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_2x_3$$

$$= 4\left(x_1 + \frac{x_2 - 3x_3}{2}\right)^2 - (x_2^2 - 6x_2x_3 + 9x_3^2) + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_2x_3$$

$$= 4\left(x_1 + \frac{x_2 - 3x_3}{2}\right)^2 - 4x_3^2$$

Đặt

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{3}{2}x_3 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

Ta có $P(x) = 4x_1'^2 - 4x_3'^2$

Do đó với một mục tiêu xạ ảnh thích hợp, đường bậc hai có phương trình là :

$$X_1^2 - X_2^2 = 0$$

Như vậy đường bậc hai này là một cặp đường thẳng thực cắt nhau.

Bằng phương pháp tương tự ta có các kết quả :

b) Đường conic.

c) Cặp đường thẳng trùng nhau.

d) Cặp đường thẳng ảo liên hợp cắt nhau tại điểm thực (1,–1,2).

e) Cặp đường thẳng thực cắt nhau.

3.64. Ta tìm được giao điểm của đường bậc hai với các đường thẳng và được các kết quả sau đây :

a) Hai giao điểm là $(1, -1, -3)$ và $(1, -2, -5)$.

b) Một giao điểm kép là $(1, -2, 0)$.

3.65. a) Ta tìm ma trận A của siêu mặt bậc hai (S) và thấy rằng (S) không suy biến.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Lập phương trình đường đối cực đối với (S) của các điểm U dưới dạng :

$$[u]^{*}A[x] = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

ta được các kết quả sau đây :

– Đường đối cực của điểm A_1 có phương trình $2x_1 - 3x_2 = 0$

– Đường đối cực của điểm A_2 có phương trình $3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$

– Đường đối cực của điểm A_3 có phương trình $x_2 - x_3 = 0$

– Đường đối cực của điểm E có phương trình $x_1 = 0$

– Đường đối cực của điểm M có phương trình $7x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 0$

b) Theo giả thiết ta có $U = (u_1, u_2, u_3)$ là cực điểm của đường thẳng $7x_1 + 4x_2 - 10x_3 = 0$.

$$\text{Do đó : } \begin{cases} 2u_1 - 3u_2 = 7 \\ -3u_1 + u_2 + 2u_3 = 4 \\ 2u_2 - 2u_3 = -10 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được tọa độ của cực điểm U của đường thẳng đã cho đối với (S) :

$$U = (u_1, u_2, u_3) = (-1, -3, 2) = (1, 3, -2).$$

3.66. Ta tìm được phương trình đường đối cực của điểm $M(1, -7, 4)$ đối với đường bậc hai đã cho là : $x_3 = 0$.

Các giao điểm A, B của đường đối cực với đường bậc hai chính là các tiếp điểm của các tiếp tuyến cần tìm. Tọa độ các giao điểm thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ 3x_1^2 - x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta có các giao điểm là $A = (-1, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$.Từ đó ta suy ra các tiếp tuyến MA và MB lần lượt có phương trình là :

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

và $6x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0.$

3.67. Đường đối cực của các điểm A và B đối với đường bậc hai (S) lần lượt có phương trình là $x_3 = 0$ và $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$.

Vì tọa độ điểm B thỏa mãn phương trình đường đối cực của điểm A nghĩa là B thuộc đường đối cực của A thì ta suy ra A cũng nằm trên đường đối cực của B đối với (S). Mặt khác ta cũng thấy rằng tọa độ điểm A cũng thỏa mãn phương trình đường đối cực của điểm B. Do đó ta gọi A và B là hai điểm liên hợp với nhau đối với (S).

NHẬN XÉT. Giả sử đường thẳng AB cắt đường bậc hai (S) tại hai điểm M, N. Ta tính được tọa độ các điểm M, N (có thể ảo liên hợp) và từ đó ta có thể tính được tỉ số kép (ABMN) và nhận thấy rằng $(ABMN) = -1$.

Do đó có thể kết luận A, B liên hợp với nhau đối với đường bậc hai (S).

3.68. a) Ta có ma trận M của mặt bậc hai (S) là :

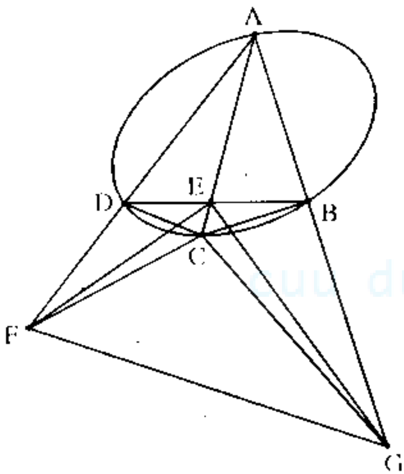
$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dễ dàng thấy rằng điểm A(1,1,0,0) thuộc (S) và mặt bậc hai (S) không suy biến vì $|M| \neq 0$. Viết phương trình mặt phẳng đối cực của điểm A đối với (S) ta được phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A là $x_3 - x_4 = 0$.

b) Dễ dàng nhận thấy điểm B có tọa độ thỏa mãn phương trình của mặt phẳng tiếp xúc nói trên. Ta suy ra đường thẳng AB là tiếp tuyến của (S) và có phương trình tổng quát là :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

3.69. Ta biết rằng hình bốn đỉnh toàn phần gồm có 4 đỉnh, 6 cạnh và có ba điểm chéo. Giả sử ta có hình bốn đỉnh toàn phần có bốn đỉnh A, B, C, D nằm trên đường cong bậc hai (S). Gọi các điểm chéo là : E = AC ∩ BD, F = AD ∩ BC, G = AB ∩ CD.



Ta có (GB,GC,GE,GF) =–1

và (FC,FD,FE,FG) =–1

Do đó EG là đường đối cực của điểm F đối với (S),

EF là đường đối cực của điểm G đối với (S),

FG là đường đối cực của điểm E đối với (S).

Vậy tam giác EFG là tam giác tự đối cực đối với (S).

3.70. Gọi p,q,r lần lượt là các đường đối cực của các điểm P, Q, R đối với đường cong bậc hai (S). Do đó :

p đi qua P' và đi qua A vì A liên hợp với P

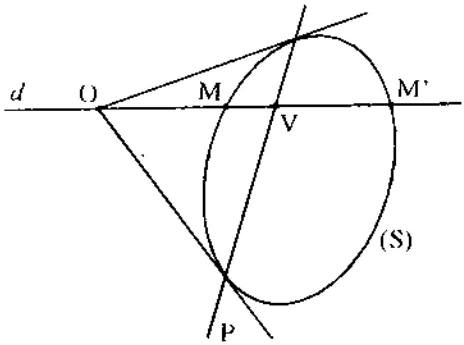
q đi qua Q' và đi qua B vì B liên hợp với Q

r đi qua R' và đi qua C vì C liên hợp với R

Vì P, Q, R thẳng hàng nên p,q,r đồng quy tại một điểm M. Điểm M này là cực điểm của đường thẳng m đối với (S).

Vậy AP', BQ', CR' đồng quy tại M.

3.71. Gọi f là phép thấu xạ tâm O biến siêu mặt bậc hai (S) thành chính nó.



Gọi P là nền của phép thấu xạ f. Ta biết rằng qua f mọi đường thẳng đi qua O đều biến thành chính nó vì đường thẳng đó có hai điểm kép. Giả sử d là một đường thẳng đi qua tâm O cắt (S) tại hai điểm M và M'và cắt siêu phẳng đối cực của O đối với (S) tại V.

Ta có (OVMM') = −1.

Vì f(S) = (S) và f(P) = P nên f(M) = M' và f(M') = M. Phép thấu xạ này được xác định bởi tỉ số thấu xạ (OVMM') = −1. Do đó phép thấu xạ có tính chất đối hợp nghĩa là f∘f là phép đồng nhất. Phép thấu xạ này có nền là siêu phẳng đối cực P của O đối với siêu mặt bậc hai (S).

3.72. Giả sử đối với mục tiêu đã chọn $\{A_i; E\}$ của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, siêu mặt bậc hai (S) có phương trình là :

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_i x_j = 0$$

Siêu phẳng R đi qua n đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ của mục tiêu có phương trình là $x_{n+1} = 0$. Khi đó giao (S) ∩ R được xác định bởi hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_i x_j = 0 \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Gọi E' là giao điểm của đường thẳng $A_{n+1}E$ với siêu phẳng R và khi đó trong R là một không gian xạ ảnh n–1 chiều ta có một mục tiêu xạ ảnh là :

$$\{A_1, A_2, ..., A_n; E'\} \qquad \text{(theo bài tập 3.24)}$$

Do đó trong **R**, giao (S) ∩ **R** đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, ..., A_n; E'\}$ có phương trình là :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = 0 \qquad (1)$$

Ta xét hai trường hợp :

a) Nếu các $a_{ij} = 0$ với mọi i, j = 1,2,...,n thì hệ thức (1) thỏa mãn tọa độ của mọi điểm thuộc R, nghĩa là :

$$(S) \cap R = R$$

b) Nếu các a_{ij} này không đồng thời bằng 0 thì (S) ∩ R là một siêu mặt bậc hai trong không gian xạ ảnh n–1 chiều R.

3.73. a) Các đỉnh $A_1 = (1,0,0)$, $A_2 = (0,1,0)$, $A_3 = (0,0,1)$ của mục tiêu nằm trên đường bậc hai (S) vì tọa độ tất cả các điểm đó thỏa mãn phương trình của (S).

b) Tiếp tuyến của (S) tại các đỉnh A_1, A_2, A_3 là các đường đối cực của các điểm đó đối với (S) có phương trình :

$$x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_3 = 0,\ x_1 + x_2 = 0.$$

c) Các đường thẳng A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 lần lượt có phương trình là :

$$x_3 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0.$$

Ta có cực điểm của các đường thẳng A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 lần lượt là :

$$(-1, 1,1), (1, -1, 1), (1, 1, -1).$$

NHẬN XÉT : Muốn tìm cực điểm của đường thẳng A_1A_2 ta có thể có hai cách :

Cách 1. So sánh phương trình đường đối cực của điểm $U = (u_1, u_2, u_3)$ có dạng :

$[u]^* A[x] = 0$ với phương trình đường thẳng A_1A_2 là $x_3 = 0$:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 + u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta tính được $(u_1, u_2, u_3) = (1, 1, -1)$.

Cách 2. Tìm giao điểm hai tiếp tuyến tại A_1 và A_2 (dựa vào kết quả ở câu b))

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

Cực điểm của đường thẳng A_1A_2 : $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, -1)$.

Bằng phương pháp tương tự ta tìm được tọa độ cực điểm của các đường thẳng A_2A_3, A_3A_1.

3.74. a) Gọi

$I = a \cap c$

$H = b \cap d$

$E = PL \cap QM$

$R = PL \cap IH$

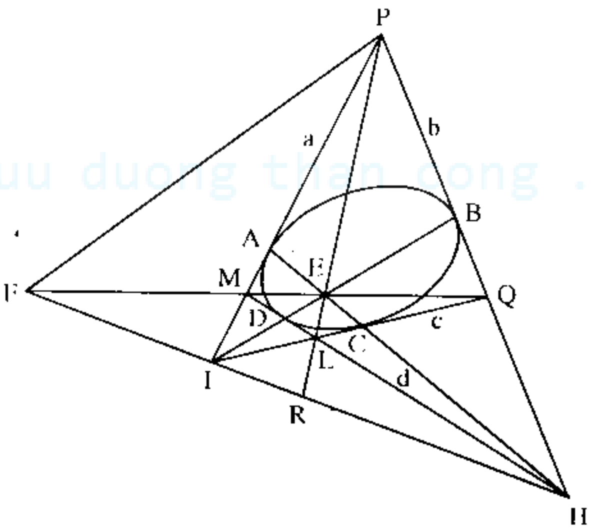
$F = QM \cap IH$

Theo tính chất của hình bốn cạnh toàn phần abcd ta có E, F,R là ba điểm chéo. Do đó

$(FEMQ) = -1$

$(PLER) = -1$

$(FRIH) = -1$.

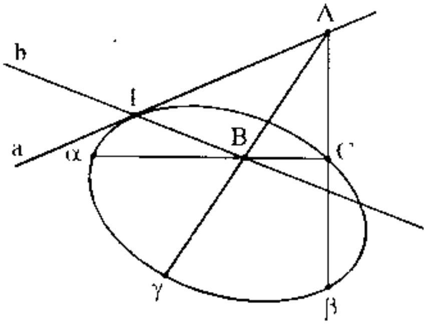


Ta suy ra tam giác EFR có mỗi đỉnh là điểm cực của cạnh đối diện đối với (S). Vì ba đường thẳng a, c, FR đồng quy tại I nên ba cực điểm của ba đường thẳng này là A, C, E thẳng hàng. Tương tự ba đường thẳng b, d, HE đồng quy tại H nên ba cực điểm của chúng là B, D, E thẳng hàng. Do đó 4 đường thẳng AC, BD, PL, MQ đồng quy.

§10

3.75. Ta xét chùm tâm β và chùm tâm γ. Hai chùm này có giao điểm A chạy trên đường thẳng a nên ta có liên hệ phối cảnh giữa hai chùm tâm β và tâm γ :

$$\{\beta, \beta A\} \overset{=}{\overline{\wedge}} \{\gamma, \gamma A\}$$



Tương tự hai chùm tâm γ và tâm α có giao điểm B chạy trên đường thẳng b nên ta có liên hệ phối cảnh giữa hai chùm tâm α và tâm γ :

$$\{\alpha, \alpha B\} \overset{=}{\overline{\wedge}} \{\gamma, \gamma B\}$$

Ta suy ra có liên hệ xạ ảnh giữa hai chùm tâm α và tâm β.

$$\{\alpha, \alpha C\} \overline{\wedge} \{\beta, \beta C\}$$

Ta xét hai trường hợp :

• a) Nếu α, β, γ không thẳng hàng, khi đó đường thẳng αβ nối hai tâm không tự ứng thì theo định lí Steiner thuận ta có quỹ tích của C là một đường conic. Conic này đi qua α, β và đi qua giao điểm $I = a \cap b$ (khi đó $I \equiv A \equiv B \equiv C$ và tam giác ABC trở thành một điểm) và điểm I này không thuộc quỹ tích.

• b) Nếu α, β, γ thẳng hàng, khi đó đường thẳng αβ tự ứng, liên hệ xạ ảnh giữa hai chùm tâm {α}và tâm {β} trở thành liên hệ phối cảnh, ta có quỹ tích C là đường bậc hai suy biến thành đường thẳng IC và đường thẳng αβ với IC là trục phối cảnh, sau khi loại bỏ điểm I và giao điểm của IC với đường thẳng αβ. (Khi đó tam giác ABC bị suy biến).

CHÚ Ý. Nếu ta lấy thêm một vị trí của tam giác ABC là A'B'C' thì thấy rằng đường thẳng CC' phải đi qua I vì hai tam giác ABC và A'B'C' có giao điểm các cạnh tương ứng là α, β, γ thẳng hàng nên đường thẳng nối các đỉnh tương ứng đồng quy (theo định lí Desargues).

3.76. a) Giả sử ba điểm P, A, B không thẳng hàng và gọi

$$A' = PA \cap (S).$$

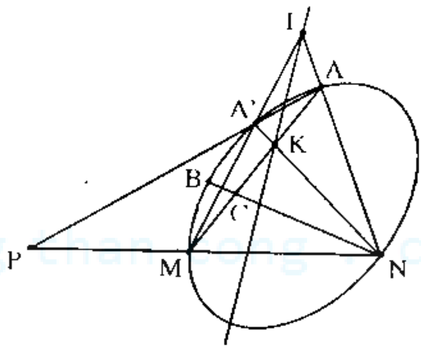
Ta có $K = AM \cap A'N$ và $I = AN \cap A'M$. Dễ thấy rằng đường thẳng IK là đường đối cực của điểm P đối với (S) và do đó IK là đường thẳng cố định. Ta có chùm tâm A liên hệ phối cảnh với chùm tâm A' vì chúng có giao điểm K nằm trên đường đối cực của điểm P.

$$\{A, AM\} \overset{=}{\barwedge} \{A', A'N\}.$$

Mặt khác theo định lí Steiner đảo ta có chùm tâm A' liên hệ xạ ảnh với chùm tâm B vì có giao điểm N luôn luôn thuộc conic (S) :

$$\{A', A'N\} \barwedge \{B, BN\}$$

Ta suy ra chùm tâm A liên hệ xạ ảnh với chùm tâm B :



$$\{A, AM\} \barwedge \{B, BN\}$$

Trong trường hợp này đường thẳng AB nối hai tâm không tự ứng nên theo định lí Steiner quỹ tích $C = AM \cap BN$ là một đường conic đi qua A và B.

Đối với điểm $D = AN \cap BM$ được xét tương tự.

b) Giả sử P, A, B thẳng hàng, khi đó đường thẳng AB tự ứng, liên hệ xạ ảnh trên trở thành liên hệ phối cảnh, quỹ tích $AM \cap BN$ gồm trục phối cảnh (là đường đối cực của P đối với (S)) và đường thẳng PAB.

3.77. Vì điểm X thuộc đường thẳng d nên ta có liên hệ phối cảnh giữa hai chùm {A, AX} và {B, BX}.

$$\{A, AM\} \equiv \{A, AX\} \stackrel{=}{\wedge} \{B, BX\} \equiv \{B, BN\}$$

Mặt khác vì M, N thuộc conic (S) nên theo định lí Steiner đảo, ta có liên hệ xạ ảnh giữa hai chùm tâm A và tâm B.

$$\{A, AN\} \overline{\wedge} \{B, BN\} \text{ và } \{A, AM\} \overline{\wedge} \{B, BM\}$$

Ta suy ra có liên hệ xạ ảnh giữa hai chùm {A, AN} và {B, BM}.

Gọi P là giao điểm của hai tiếp tuyến với conic (S) tại A và B. Ta xét hai trường hợp :

a) Nếu P không thuộc d thì liên hệ xạ ảnh:

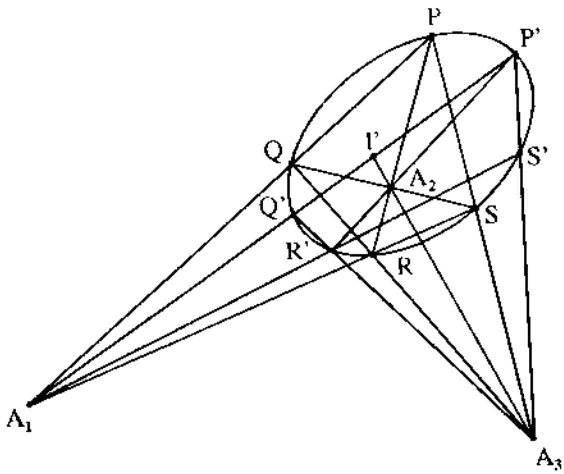
$$\{A, AN\} \overline{\wedge} \{B, BM\}$$

không phải là liên hệ phối cảnh. Khi đó theo định lí Steiner, quỹ tích giao điểm $AN \cap BM$ là một conic đi qua A và B.

b) Nếu điểm P thuộc d thì liên hệ xạ ảnh nói trên trở thành liên hệ phối cảnh vì lúc đó đường thẳng AB nối hai tâm tự ứng. Lúc này quỹ tích giao điểm $AN \cap BM$ là hai đường thẳng gồm trục phối cảnh và đường thẳng AB.

3.78. Gọi (S) là đường cong bậc hai xác định bởi 5 điểm P, Q, R, S, P'. Ta có 3 điểm chéo của hình 4 đỉnh toàn phần PQRS là:

$$A_1 = PQ \cap RS,\ A_2 = PR \cap QS,\ A_3 = PS \cap QR.$$



Gọi $I' = P'Q' \cap A_2A_3$. Đường đối cực của điểm A_1 đối với (S) là đường thẳng A_2A_3. Theo tính chất của hình 4 đỉnh toàn phần ta có:

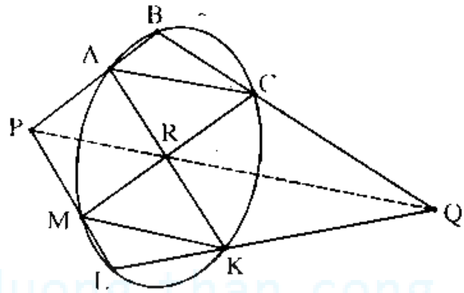
$$(A_1I'P'Q') = -1$$

Mặt khác I' thuộc đường đối cực A_2A_3 của điểm A_1 nên A_1 liên hợp với I' đối với (S). Vì P' thuộc (S) nên ta suy ra Q' thuộc (S).

Tương tự ta chứng minh được R' và S' cũng thuộc conic (S).

NHẬN XÉT. Ở đây ta có phép thấu xạ đối hợp f tâm là A_1, nền là đường thẳng A_2A_3 (là phép thấu xạ điều hòa) có $f(P) = Q$, $f(S) = R$, $f(P') = Q'$, $f(S') = R'$.

3.79. Giả sử hai tam giác ABC và KLM cùng nội tiếp conic (S). Khi đó ta có hình lục giác ABCMLK nội tiếp conic (S). Theo định lí Pascal thì ba điểm $P = AB \cap ML$, $Q = BC \cap LK$, $R = CM \cap KA$ thẳng hàng.



Bây giờ xét lục giác PACQKM có ba đường thẳng nối ba cặp đỉnh đối diện là PQ, AK, CM đồng quy tại R nên theo định lí Brianchon đảo, hình lục giác này nội tiếp một conic nào đó. Điều đó có nghĩa là tam giác ABC và tam giác KLM cùng ngoại tiếp conic đó.

3.80. Gọi $P = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $Q = A_2A_3 \cap A_5A_6$, $R = A_3A_4 \cap A_6A_1$.

Đường đối cực của B_1 là A_1A_2, đường đối cực của B_4 là A_4A_5. Do đó $P = A_1A_2 \cap A_4A_5$ là điểm cực của đường thẳng B_1B_4 đối với (S). Tương tự ta chứng minh được Q là điểm cực của đường thẳng B_2B_5 đối với (S) và R là điểm cực của B_3B_6 đối với (S). Vì B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6 đồng quy tại điểm Brianchon B nên các điểm cực P, Q, R của các đường thẳng đó thẳng hàng và đường thẳng PQR này chính là đường thẳng Pascal của lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

3.81. Áp dụng định lí Pascal cho lục giác ADBBCC nội tiếp conic ta suy ra đường thẳng $B'C'$ luôn luôn đi qua điểm $I = AD \cap BC$ với I là một điểm cố định vì AD và BC là hai đường thẳng cho trước. Gọi $K = AC \cap BD$ và $H = AB \cap CD$. Hai tam giác ADK và BCM có giao điểm các cạnh tương ứng là I, B', C' thẳng hàng nên ta suy ra ba đường thẳng nối các đỉnh tương ứng là AB, KM, DC' đồng quy. Do đó điểm M luôn luôn thuộc đường thẳng KH cố định.

CHÚ Ý. Có thể dùng định lí Pascal để chứng minh ba điểm K, M, H thẳng hàng. Mặt khác cũng có thể thấy rằng IH, BC, KI lần lượt là các đường đối cực của các điểm K, M, H. Các đường này đồng quy tại I nên K, M, H thẳng hàng và thuộc đường đối cực của I đối với conic.

3.82. Áp dụng định lí Brianchon cho lục giác $AB'CA'BC'$ ngoại tiếp conic (S) ta có AA', BB', CC' đồng quy. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có các đường thẳng nối các đỉnh tương ứng đồng quy nên theo định lí Desargues ta suy ra P, Q, R thẳng hàng.

3.83.Áp dụng định lí Pascal cho lục giác $PBB'C'A'A$ nội tiếp conic ta chứng minh được ba điểm K, A'', B'' thẳng hàng. Lại áp dụng định lí Pascal cho lục giác $PCC'A'B'B$ nội tiếp conic ta suy ra ba điểm K, B'', C'' thẳng hàng. Như vậy ba điểm A'', B'', C'' nằm trên một đường thẳng luôn luôn đi qua một điểm K cố định cho trước.

3.84. Gọi $I = AC \cap BD$. Áp dụng định lí Brianchon cho lục giác APBCRD ngoại tiếp conic (S) ta có AC, PR, BD đồng quy tại I. Lại áp dụng định lí Brianchon cho lục giác ABQCDS ngoại tiếp conic (S) ta có AC, BD, QS đồng quy cũng tại I. Vậy PR và QS luôn luôn đi qua điểm I cố định.

Vì Q thuộc BC nên ta có liên hệ phối cảnh giữa chùm tâm A và chùm tâm I:

$$\{A, AQ\} \overset{=}{\barwedge} \{I, AQ\}$$

Mặt khác vì điểm S thuộc AD nên ta có liên hệ phối cảnh giữa chùm tâm I và chùm tâm B:

$$\{I, IS\} \overset{=}{\barwedge} \{B, BS\}$$

Ta suy ra có liên hệ xạ ảnh giữa chùm tâm A và chùm tâm B :

$$\{A, AQ\} \barwedge \{B, BS\}$$

Vì đường thẳng AB nối hai tâm không tự ứng, nghĩa là nếu ta gọi f là liên hệ xạ ảnh đó ta có $f(AB) = BD$ và $f^{-1}(BA) = AC$, do đó f không phải là liên hệ phối cảnh. Vậy theo định lí Steiner quỹ tích giao điểm $AQ \cap BS = M$ là conic đi qua A, B và nhận BD, AC làm các tiếp tuyến. Conic này đi qua điểm $E = AD \cap BC$ vì $f(AE) = BE$.

3.85. a) *Cách thứ nhất.* Chọn $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ làm mục tiêu xạ ảnh, ta có phương trình của (S) có dạng :

$$ax_2x_3 + bx_3x_1 + cx_1x_2 = 0$$

Ta suy ra tọa độ điểm A_1' là :

$$A_1' = (-a, b + c, b + c)$$

Vì A_1' thuộc (S) nên đường đối cực của A_1' chính là đường thẳng $\alpha A_1'$. Do đó ta có phương trình của $\alpha A_1'$ là :

$$\begin{bmatrix}-a & b+c & b+c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & c & b\\ c & 0 & a\\ b & a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = 0$$

hay $(b + c)^2x_1 + abx_2 + acx_3 = 0$

Ta có $\alpha = A_2A_3 \cap \alpha A_1'$ nên ta tìm được tọa độ điểm α :

$$\alpha = (0, c, -b)$$

Tương tự ta tính được $\beta = (-c, 0, a)$

và $\gamma = (b, -a, 0)$.

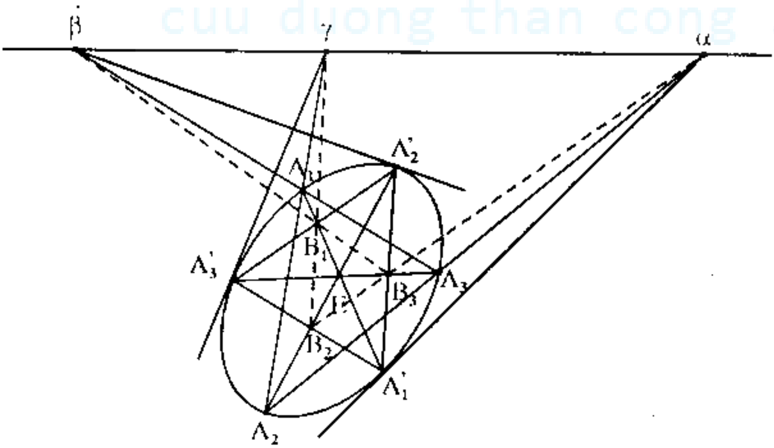
Xét định thức tọa độ của ba điểm α, β, γ ta có :

$$\begin{vmatrix}0 & c & -b\\ -c & 0 & a\\ b & -a & 0\end{vmatrix} = 0$$

Điều đó chứng tỏ ba điểm α, β, γ thuộc một đường thẳng .

b) *Cách thứ hai*

Gọi $B_1 = A_1E \cap A_2'A_3'$, $B_2 = A_2E \cap A_3'A_1'$, $B_3 = A_3E \cap A_1'A_2'$.



Áp dụng định lí Pascal vào lục giác $A_2A'_2A'_1A_1A'_3A_3$ nội tiếp conic (S) và đường thẳng $A_2A'_2$ ta có ba điểm B_2, B_3, α thẳng hàng.

Tương tự ta chứng minh được B_3, B_1, β thẳng hàng và B_1, B_2, γ thẳng hàng. Áp dụng định lí Desargues vào hai tam giác $B_1B_2B_3$ và $A_1A_2A_3$. Hai tam giác này có ba đường thẳng nối các đỉnh tương ứng đồng quy tại E nên các giao điểm của ba cặp cạnh tương ứng là α, β, γ thẳng hàng.

3.86. a) Áp dụng định lí Pascal cho lục giác AABCDE nội tiếp conic ta có $P = AB \cap ED$, $Q = AE \cap BC$, ta có đường thẳng PQ là đường thẳng Pascal của lục giác nói trên. Gọi $R = PQ \cap DC$. Nối RA ta được tiếp tuyến cần dựng với conic tại điểm A và dễ dàng chứng minh được điều này.

b) Gọi F là giao điểm cần tìm của d và (S). Gọi $I = AB \cap DE$, $J = CD \cap d$, ta có IJ là đường thẳng Pascal của lục giác ABCDEF nội tiếp conic. Gọi $K = IJ \cap BC$ ta có giao điểm $F = EK \cap AJ$. Vì ba điểm I, J, K thẳng hàng nên theo định lí Pascal đảo hình lục giác ABCDEF nội tiếp conic và ta có $F = d \cap (S)$.

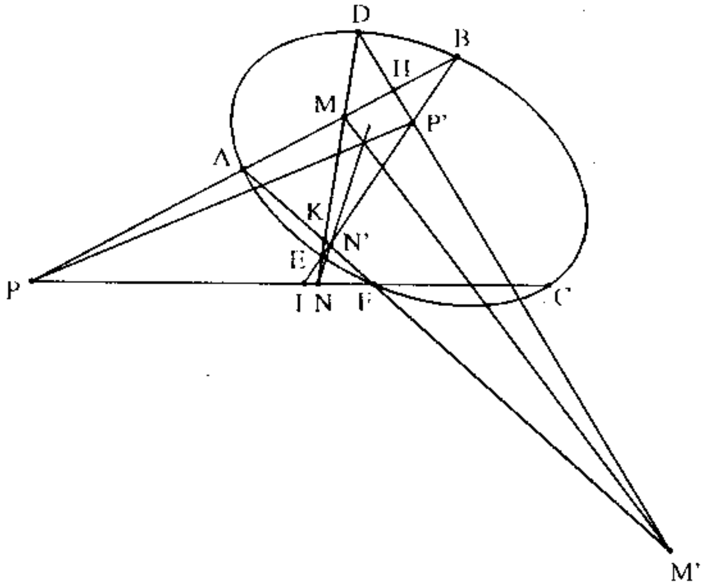
3.87. Ta gọi $M = AB \cap DE$, $M' = CD \cap AF$

$P = CF \cap BA$, $P' = CD \cap BE$

$N = CF \cap DE$, $N' = AF \cap BE$

$H = PM \cap P'M'$, $I = NP \cap N'P'$

$K = MN \cap M'N'$.



Các hình lục giác ABCDEF, ADCFEB, AFCBED có các đường thẳng Pascal theo thứ tự là MM', PP', NN'. Muốn chứng minh ba đường thẳng này đồng quy ta phải chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng. Xét lục giác AFCDEB ta thấy đường thẳng Pascal của hình này chính là đường thẳng đi qua ba điểm H, I, K. Áp dụng định lí Desargues cho hai tam giác MNP và $M'N'P'$ ta thấy các giao điểm của ba cặp cạnh tương ứng là H, I, K thẳng hàng nên các đường thẳng MM', PP', NN' nối các đỉnh tương ứng phải đồng quy.

3.88. Trên mô hình xạ ảnh của mặt phẳng afin ta biết rằng đường parabol là đường conic tiếp xúc với đường thẳng vô tận. Do đó ta có thể đưa bài toán afin đã cho về bài toán xạ ảnh sau đây:

"Trong $\mathbf{P}^2$ cho tam giác ABC và một đường thẳng d không đi qua đỉnh nào của tam giác đó. Một conic (S) biến thiên luôn luôn tiếp xúc với các đường thẳng BC, CA, AB, d lần lượt tại A', B', C', D. Chứng minh rằng đường thẳng $B'C'$ luôn luôn đi qua một điểm cố định. Các đường thẳng $C'A'$, $A'B'$ cũng đều đi qua một điểm cố định".

Ta giải bài toán xạ ảnh nói trên như sau :

Gọi E = d ∩ AC, F = d ∩ AB. Áp dụng định lí Brianchon cho lục giác BCB'EFC' ngoại tiếp conic (S) ta có BE, CF, B'C' đồng quy. Vậy B'C' luôn luôn đi qua điểm cố định I = BE ∩ CF.

Gọi G = d ∩ BC. Áp dụng định lí Brianchon cho lục giác ACA'GFC' ngoại tiếp conic (S) ta có AG, CF, A'C' đồng quy. Vậy A'C' luôn luôn đi qua điểm cố định H = CF ∩ AG.

Tiếp tục áp dụng định lí Brianchon cho lục giác ABA'GEB' ngoại tiếp conic (S) ta có AG, BE, A'B' đồng quy. Vậy A'B' luôn luôn đi qua điểm cố định K = AG ∩ BE.

3.89. Trên mô hình xạ ảnh của mặt phẳng afin ta xem đường hypebol là đường conic cắt đường thẳng vô tận tại hai điểm I, J. Tiếp tuyến của conic tại hai điểm vô tận I, J chính là các đường tiệm cận của hypebol. Giao điểm O của hai tiếp tuyến chính là tâm của hypebol. Do đó ta có thể chuyển bài toán afin đã cho sang bài toán xạ ảnh sau đây:

"Trong $\mathbf{P}^2$ cho một conic (S) và một đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm I, J. Trên conic (S) ta lấy 2 điểm A, C và gọi B = AC ∩ CJ, D = AJ ∩ CI. Các tiếp tuyến của conic tại I và J cắt nhau tại O. Chứng minh 3 điểm B, D, O thuộc một đường thẳng".

Áp dụng định lí Pascal cho lục giác IICJJA nội tiếp conic ta chứng minh được 3 điểm B, D, O thẳng hàng vì chúng thuộc đường thẳng Pascal.

3.90. Trên mô hình xạ ảnh của mặt phẳng afin ta biết rằng nếu ta có (ABCD) = −1 trong đó D là điểm vô tận thì C là trung điểm của đoạn AB. Do đó ta có thể chuyển bài toán afin đã cho về bài toán xạ ảnh sau đây:

"Trong $\mathbf{P}^2$ cho một conic (S) và một đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm I và J. Hai tiếp tuyến của conic tại I và J cắt nhau tại O. Một tiếp tuyến bất kì tiếp xúc với conic tại C, cắt hai tiếp tuyến tại hai điểm A, B và cắt đường thẳng IJ tại D. Chứng minh rằng (ABCD) = −1".

Áp dụng định lí Brianchon vào lục giác OIACBJ ngoại tiếp conic ta có các đường thẳng OC, IB, AJ đồng quy tại E. Dựa vào tính chất của hình 4 cạnh toàn phần OABEIJ ta có (ABCD) = −1.

3.91. Ta chuyển bài toán afin đã cho thành bài toán xạ ảnh sau đây : "Trong $\mathbf{P}^2$ cho conic (S) và đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm I, J.Các tiếp tuyến của (S) tại I và J là a và b cắt nhau tại O. Gọi M, N là hai điểm bất kì trên (S) khác với các điểm I, J. Tiếp tuyến tại M cắt a, b lần lượt tại A, B. Tiếp tuyến tại N cắt a, b lần lượt tại C, D. Chứng minh rằng giao điểm $AD \cap BC$ thuộc IJ"

Áp dụng định lí Brianchon vào lục giác ABJDCI ngoại tiếp conic ta có các đường thẳng AD, BC, JI đồng quy. Điều đó chứng tỏ giao điểm $AD \cap BC$ thuộc IJ.

§11

3.92. Gọi phân giác trong và phân giác ngoài của góc $(\widehat{a,b})$ là c và d. Trong mặt phẳng Ơclit ta có $c \perp d$. Dựng một đường thẳng $\Delta //$ d cắt a, b, c lần lượt tại A, B, C. Ta có C là trung điểm của đoạn AB và $(CAB) = (ABCD_\infty) = -1$. Mặt khác ta có (ABCD) = (abcd) và do đó (abcd) = –1. Vậy a, b, c, d là một chùm điều hòa.

3.93.Gọi Δ là đường thẳng vô tận, I, J là hai điểm cyclic trên Δ.

a) Nếu ABCD là một hình chữ nhật thì AB // CD, BC // AD và $AB \perp BC$. Khi đó trên mô hình ta phải có $AB \cap CD = E$ thuộc Δ, $BC \cap AD = F$ thuộc Δ và $(EFIJ) = -1$.

b) Hình vuông là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau. Do đó đối với hình vuông ngoài những điều kiện nói trong câu a) còn phải thêm điều kiện $AC \perp BD$. Do đó nếu $AC \cap \Delta = M$, $BD \cap \Delta = N$ thì $(MNIJ) = -1$.

c) Ta biết rằng hình thoi là một hình bình hành có hai đường chéo vuông góc và hình tam giác cân là một nửa của hình thoi có cạnh đáy là đường chéo của hình thoi. Sử dụng hai tính chất này ta sẽ diễn tả được khái niệm hình tam giác cân.

d) Đường tròn là đường conic đi qua hai điểm cyclic I,J. Lấy một điểm M khác với I và J trên đường thẳng vô tận Δ, vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với conic. Khi đó AB là đường kính của đường tròn. Gọi O là cực điểm của đường thẳng vô tận Δ. Các tiếp tuyến với conic tại I và J cắt nhau tại O, ta có O là tâm của đường tròn. Khi đó tất nhiên đường kính AB nói trên phải đi qua tâm O của đường tròn.

CHƯƠNG IV

ÔN TẬP

A. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Trước khi đi sâu nghiên cứu các dạng bài tập chúng ta cần lưu ý tới một số vấn đề sau đây trong khi làm toán:

1. Cần đọc kĩ đề ra để hiểu được các khái niệm nêu ra trong bài tập và các yêu cầu của từng bài. Cần chú ý khai thác các giả thiết và kết luận.

2. Xác định hướng đi của từng bài toán và các bước cần phải thực hiện trước khi đi vào giải bài toán đó.

3. Sau khi giải xong cần có thói quen kiểm tra lại các kết quả của từng phần để tránh kéo dài các sai sót đáng tiếc.

Sau đây chúng ta đi sâu phân tích cách giải các loại toán chủ yếu thường gặp.

I. LẬP PHƯƠNG TRÌNH CÁC PHẲNG VÀ XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA CHÚNG

1. Các phẳng afin

Mọi bài toán về lập phương trình của một m-phẳng afin đều quy về lập phương trình của một m- phẳng *đi qua một điểm cho trước và có một phương xác định bởi các vectơ cơ sở của nó*. Ví dụ lập phương trình của m-phẳng P đi qua điểm A và có phương V^m với các vectơ cơ sở là $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_m}$. Ta lập phương trình như sau:

$$X \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = t_1\overrightarrow{a_1} + t_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + t_m\overrightarrow{a_m}$$

Đây là phương trình tham số của m-phẳng P dưới dạng vectơ. Nếu thay tọa độ vào ta có phương trình tham số dưới dạng tọa độ. Nếu khử các tham số t_1, t_2, ..., t_m, ta được phương trình tổng quát của P, là một hệ gồm n–m phương trình tuyến tính độc lập. Khi khử tham số cần chọn các phương trình thích hợp nhằm làm cho việc khử được thực hiện nhanh gọn nhất.

Do việc chọn điểm đi qua khác nhau và các hệ cơ sở khác nhau đồng thời do cách khử tham số khác nhau nên có thể chúng ta sẽ được những kết quả không giống nhau. Nếu gặp bài toán mà đề ra yêu cầu cần viết phương trình có cái phẳng có số chiều bé nhất thì chúng ta cần chú ý tìm hệ vectơ độc lập tuyến tính cực đại nằm trong hệ vectơ được suy ra từ giả thiết của bài toán.

Để xét vị trí tương đối của hai cái phẳng, *chúng ta cần xét điểm chung và phương chung của hai cái phẳng đó*, rồi căn cứ *vào định nghĩa mà kết luận*. Có trường hợp khi tìm điểm chung, với hệ phương trình tìm giao ta có một điểm chung duy nhất thì không cần thiết phải tìm phương chung của chúng nữa. Nếu phương trình tìm giao gồm có m phương trình độc lập (ma trận hệ số của chúng có hạng bằng m) thì ta kết luận đó là phương trình của một (n–m)-phẳng. Chú ý rằng người ta có thể tìm giao của hai cái phẳng hoặc bằng các phương trình tham số của chúng, hoặc dùng một phương trình tổng quát với một phương trình tham số của các phẳng cho trước. Việc lựa chọn cách giải phụ thuộc vào các bài toán cụ thể.

Nếu phải lập phương trình của phẳng tổng của hai cái phẳng P và Q cho trước, ta chọn trong P một hệ gồm p + 1 điểm độc lập lớn nhất và trong Q một hệ gồm q + 1 điểm độc lập lớn nhất. Sau đó ta lập phương trình của cái phẳng có số chiều bé nhất chứa đồng thời cả hai hệ điểm độc lập nói trên (phẳng tổng có số chiều nhỏ hơn hoặc bằng p+q).

2. Các phẳng Ơclit

Đối với các bài toán về các phẳng của không gian Ơclit chúng ta cũng sẽ gặp các vấn đề tương tự như đã xét đối với các phẳng của không gian afin. Sau đây ta chỉ nói thêm các vấn đề của riêng không gian Ơclit như phương trình của phẳng bù vuông góc với một phẳng cho trước, tính khoảng cách từ một điểm tới một cái phẳng, tính góc của hai đường thẳng vv ...

Chúng ta cần chú ý rằng đối với một mục tiêu trực chuẩn cho trước một siêu phẳng của E^n có phương trình :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0$$

nhận vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ làm *pháp vectơ*. Nếu một m-phẳng P có phương trình đối với một mục tiêu trực chuẩn là:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 = 0 \\ \ldots \\ a_{n-m,1}x_1 + a_{n-m,2}x_2 + \ldots + a_{n-m,n}x_n + b_{n-m} = 0 \end{cases}$$

thì ta có thể xem m-phẳng này là giao của (n-m) siêu phẳng độc lập. Mỗi siêu phẳng sẽ có một pháp vectơ và hệ n-m vectơ này tạo nên cơ sở của phương cái phẳng bù vuông góc với m-phẳng P cho trước. Căn cứ vào phương trình của P ta có các pháp vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_{n-m}}$ có tọa độ như sau :

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ \overrightarrow{a_2} = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ \ldots \\ \overrightarrow{a_{n-m}} = (a_{n-m,1}, a_{n-m,2}, \ldots, a_{n-m,n}) \end{cases}$$

Nếu gặp bài toán lập phương trình của phẳng Q đi qua điểm M (tất nhiên có tọa độ cho trước) và bù vuông góc với phẳng P cho trước ta tìm phương của Q như trên và viết phương trình của Q như sau :

$$X \in Q \Leftrightarrow \overrightarrow{MX} = t_1\overrightarrow{a_1} + t_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + t_{n-m}\overrightarrow{a_{n-m}}$$

sau đó ta thay tọa độ và khử các tham số ta sẽ tìm được phương trình tổng quát của Q đi qua M và bù vuông góc với P cho trước.

Muốn tính khoảng cách từ một điểm M tới một m-phẳng P thì ta lập phương trình phẳng Q đi qua M và bù vuông góc với P như trên. Sau đó tìm giao điểm $H = P \cap Q$ và ta có khoảng cách :

$$d(M,P) = |\overline{MH}|$$

Nếu gọi $(m_1, m_2, ..., m_n)$ là tọa độ của vectơ $\overline{MH}$ ta có :

$$d(M,P) = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + ... + m_n^2}$$

3.Các phẳng xạ ảnh

Một m-phẳng xạ ảnh được xác định bởi m+1 điểm độc lập và hệ các vectơ đại diện cho m+1 điểm độc lập này là có cơ sở của không gian vectơ $\mathbf{V}^{m+1}$ sinh ra m-phẳng xạ ảnh đó. Vì vậy muốn viết phương trình của m-phẳng xạ ảnh chúng ta cần xác đinh được hệ vectơ cơ sở này (khác với vectơ trong phẳng afin). Giả sử phẳng P xác định bởi m+1 điểm $A_1, A_2, ..., A_{m+1}$ độc lập và gọi $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_{m+1}}$ là các vectơ lần lượt đại diện cho các điểm đó. Phương trình của m-phẳng xạ ảnh P có dạng :

$$X \in P \Leftrightarrow \vec{x} = t_1\overline{a_1} + t_2\overline{a_2} + ... + t_{m+1}\overline{a_{m+1}}$$

$$\Leftrightarrow [x] = t_1[a_1] + t_2[a_2] + ... + t_{m+1}[a_{m+1}]$$

trong đó [x] và $[a_i]$ là ma trận cột tọa độ của điểm X và các điểm A_i. Chú ý rằng phương trình tham số của m-phẳng xạ ảnh có m+1 tham số (khác với m-phẳng afin chỉ có m tham số) và sau khi khử m+1 tham số, ta được phương trình tổng quát của P là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (hay đẳng cấp) có hạng bằng n–m.

Muốn xét vị trí tương đối của hai cái phẳng xạ ảnh ta chỉ cần lập phương trình tìm giao điểm. Nếu phương trình này có hạng bằng k thì giao điểm của hai cái phẳng đó là một (n–k)-phẳng, còn nếu hệ phương trình tìm giao có nghiệm tầm thường ta kết luận hai phẳng đó chéo nhau vì điểm (0, 0, ..., 0) không phải là điểm xạ ảnh. Với hai siêu phẳng phân biệt ta có giao là một (n–2)-phẳng.

Chùm siêu phẳng là tập hợp các siêu phẳng cùng thuộc một (n–2)-phẳng. Để xác định một chùm siêu phẳng ta cần biết tọa độ của hai siêu phẳng phân biệt của chùm. Các siêu phẳng khác của chùm được biểu thị tuyến tính qua hai siêu phẳng đó. Đường thẳng là siêu phẳng trong $\mathbf{P}^2$ do đó cần chú ý làm thành thạo các kĩ năng về viết phương trình của đường thẳng qua hai điểm và cách tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng cho trước trong $\mathbf{P}^2$.

II. LẬP PHƯƠNG TRÌNH CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

Qua phép biến đổi f một điểm X biến thành một điểm $X' = f(X)$. Lập phương trình của phép biến đổi f tức là tìm được sự liên hệ về tọa độ của một điểm X và điểm $X' = f(X)$ đối với mục tiêu tọa độ cho trước.

1. Phương trình phép biến đổi afin

Có hai phương pháp lập phương trình phép biến đổi afin trong $\mathbf{A}^n$

a) Dựa vào phương trình của phép biến đổi tuyến tính φ (sinh ra phép afin f): Ta biết rằng phép biến đổi tuyến tính φ có phương trình $[x'] = A^*[x]$ sẽ sinh ra phép biến đổi afin f có phương trình $[x'] = A^*[x] + [b]$ trong đó A là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{e_i'}\} = \varphi(\overrightarrow{e_i})$. Vì vậy muốn lập phương trình phép afin f ta cần tìm ma trận A^* và ma trận [b]. Muốn tìm A^* ta phải tìm A tức là tìm cách biểu thị các vectơ của cơ sở $\{\overrightarrow{e_i'}\}$ qua các vectơ của cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$. Còn ma trận [b] chính là ma trận cột tọa độ của điểm $f(E_o)$ đối với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$. Có thể sau khi tìm được ma trận A^* ta thay tọa độ của một cặp điểm tương ứng nào đó vào phương trình $[x'] = A^*[x] + [b]$ ta sẽ tìm được [b].

b) Dựa vào dạng tổng quát của phương trình phép biến đổi afin. Ta biết phương trình tổng quát của một phép biến đổi afin trong $\mathbf{A}^n$ có dạng :

$$[x'] = B[x] + [b]$$

trong đó B là ma trận vuông cấp n không suy biến. Với hai hệ n+1 điểm độc lập cho trước, ta lần lượt thay tọa độ các cặp điểm tương ứng vào phương trình tổng quát nói trên và mỗi cặp điểm ta được một hệ n phương trình. Sau khi thay ta được một hệ gồm có

$n(n+1)$ phương trình và $n^2 + n$ ẩn. Giải hệ này ta tìm được ma trận B và [b].

c) Ta có thể gặp các bài toán về tìm ảnh hoặc tạo ảnh của 1 điểm hoặc của một đường thẳng qua một phép biến đổi afin, hoặc tìm điểm kép của một phép biến đổi afin. Ta sẽ dễ dàng làm được các bài toán này nếu hiểu rõ định nghĩa của các khái niệm ảnh tạo ảnh, điểm kép của một phép biến đổi afin. Muốn tìm ảnh của một m-phẳng (có thể là đường thẳng, mặt phẳng ...) ta lấy m+1 điểm độc lập trong các phẳng đó (bằng cách lấy tọa độ sao cho thỏa mãn phương trình của phẳng đã cho) rồi tìm ảnh của chúng qua phép biến đổi afin. Sau đó ta viết phương trình của m-phẳng ảnh xác định bởi m+1 điểm ảnh vừa tìm được.

2. Phương trình phép dời

Vì phép dời cũng là một phép afin nên cách lập phương trình phép dời cũng tương tự như đối với phép afin. Cần chú ý rằng ma trận của phép dời đối với một mục tiêu trực chuẩn bao giờ cũng là *ma trận trực giao* và định thức của ma trận đó có giá trị bằng 1 hoặc -1, còn ngược lại định thức $\det A = \pm 1$ thì A chưa chắc là ma trận trực giao. Muốn xét một phép afin nào đó viết đối với một mục tiêu trực chuẩn có phải là phép dời hay không ta chỉ cần xét xem ma trận của phép afin đó trực giao hay không.

3) Phương trình phép biến đổi xạ ảnh

Có hai phương pháp lập phương trình phép biến đổi xạ ảnh :

a) Dựa vào phương trình của phép biến đổi tuyến tính φ trong không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$: Nếu φ có phương trình là $[x'] = B[x]$ thì phương trình của phép biến đổi xạ ảnh tương ứng là $k[x'] = B[x]$. Mặt khác ta lại biết rằng phương trình phép biến đổi tuyến tính φ có dạng $[x'] = A^*[x]$ trong đó A là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\vec{e_i}\}$ sang cơ sở $\{\vec{e_i'}\}$ với $\vec{e_i'} = \varphi(\vec{e_i})$; $i = 1,2,\ldots, n+1$. Vì vậy nếu trong giả thiết của bài toán, phép biến đổi xạ ảnh f được cho bởi hai mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ và $\{A_i'; E'\}$ thì ta có hệ thức sau đây :

$$[E'] = k_1[A'_1] + k_2[A'_2] + \ldots + k_{n+1}[A'_{n+1}]$$

trong đó $[E']$, $[A'_i]$ là các ma trận cột tọa độ của điểm f(E) và của các điểm $f(A_i)$. Giải hệ n+1 phương trình này ta tìm được các ẩn là các giá trị của $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$. Sau đó ta lấy tọa độ các điểm A'_i nhân với các hệ số k_i vừa tìm được ta tìm được tọa độ các vectơ $\overrightarrow{e'_i} = \varphi(\overrightarrow{e_i})$ với i = 1, 2, ..., n+1 và dễ dàng lập được ma trận chuyển A từ cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{e'_i}\}$. Do đó ta có phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f là :

$$k[x'] = A^*[x]$$

b) Dựa vào phương trình tổng quát của phép biến đổi xạ ảnh trong $\mathbf{P}^n$: Ta biết rằng phương trình tổng quát của phép biến đổi xạ ảnh f có dạng :

$$k[x'] = B[x]$$

trong đó B là ma trận vuông cấp n+1 không suy biến. Giả sử cần viết phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f xác định bởi hai bộ n+2 điểm $M_1, M_2, \ldots, M_{n+2}$ và $N_1, N_2, \ldots, N_{n+2}$ nghĩa là $f(M_i) = N_i$ với i = 1, 2, ..., n+2. Sau khi thay tọa độ của một cặp điểm M_i, N_i vào phương trình tổng quát ta được một hệ gồm n+1 phương trình có dạng :

$$k_i[N_i] = B[M_i]$$

trong đó k_i là một hệ số tỉ kệ khác 0. Với n+2 cặp điểm M_i, N_i thay vào phương trình tổng quát ta được một hệ gồm (n+1)(n+2) = $= n^2 + 3n + 2$ phương trình trong đó các ẩn là $(n+1)^2$ phần tử của ma trận B và n + 2 các hệ số k_i nghĩa là có $(n+1)^2 + n + 2 = n^2 + 3n + 3$ ẩn. Các ẩn này có thể xác định sai khác nhau một hệ số tỉ lệ nên $n^2 + 3n + 3$ ẩn này tương đương với $n^2 + 3n + 2$ ẩn. Các ẩn k_i chỉ đóng vai trò trung gian trong khi giải và cuối cùng ta tìm được ma trận B. Với n = 2 nghĩa là trong mặt phẳng xạ ảnh, hệ phương trình này gồm có 12 phương trình và 13 ẩn trong đó có 9 ẩn thuộc ma trận B còn 4 ẩn là các hệ số tỉ lệ.

c) Tìm ảnh và tìm điểm kép

Với phép biến đổi xạ ảnh $k[x'] = B[x]$ ta có $[x']$, $[x]$ lần lượt là ma trận cột tọa độ của ảnh và tạo ảnh. Nếu biết $[x]$ ta sẽ tìm được $[x']$ và ngược lại.

Muốn tìm điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình :

$$k[x'] = B[x]$$

ta cần tìm các điểm sao cho $f(M) = M$ nghĩa là các điểm M có tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ thành chính nó nghĩa là thành điểm có tọa độ $(kx_1, kx_2, ..., kx_{n+1})$ với $k \neq 0$.

Ta có phương trình tìm điểm kép của f là :

$$k[x] = B[x] \text{ hay } (B - kI)[x] = 0.$$

Với I là ma trận đơn vị.

Muốn có điểm kép thì hệ phương trình trên phải có nghiệm khác nghiệm tầm thường có nghĩa là $|B - kI| = 0$. Ta được một phương trình bậc n+1 đối với k. Với mỗi nghiệm $k = k_i$ thực (ta hạn chế với không gian xạ ảnh thực) thay vào phương trình tìm điểm kép nói trên ta được tập hợp các điểm kép ứng với giá trị riêng $k = k_i$ thỏa mãn hệ phương trình :

$$(B - k_iI)[x] = 0$$

Nếu hạng của hệ phương trình này bằng m (nghĩa là trong đó có m phương trình độc lập) thì phương trình đó xác định một (n−m)-phẳng chứa toàn điểm kép ứng với giá trị riêng $k = k_i$. Lần lượt với các nghiệm $k = k_i$ khác ta cũng làm tương tự và sẽ được tất cả các điểm kép của f.

Nếu phép biến đổi xạ ảnh f có tập hợp các điểm kép thỏa mãn phương trình của một siêu phẳng thì khi đó phép biến đổi xạ ảnh này là phép *thấu xạ xạ ảnh*. Siêu phẳng kép gọi là *nền thấu xạ* và điểm kép còn lại là *tâm thấu xạ*. Tâm thấu xạ có thể thuộc hay không thuộc nền thấu xạ.

III. DÙNG CÔNG CỤ TỌA ĐỘ ĐỂ CHỨNG MINH CÁC TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

1. Ý nghĩa: Dùng công cụ tọa độ để chứng minh một tính chất hình học nào đó có nghĩa là tìm cách sử dụng "ngôn ngữ đại số" thay cho "ngôn ngữ hình học", trong việc chứng minh đó. Ví dụ như ta có thể thay điểm bằng một bộ số thực có thứ tự, thay các đường các mặt, bằng phương trình của chúng. Để tìm mối quan hệ cắt nhau, chéo nhau, vuông góc với nhau của các phẳng ta có thể dựa vào các phép tính định thức, tính hạng của ma trận, tìm nghiệm của một hệ phương trình v.v ... để kết luận về các tính chất hình học ứng với các tính chất đại số vừa tìm được.

2. Chọn hệ mục tiêu tọa độ thích hợp

Ta biết rằng trong việc tìm tọa độ một số điểm, viết phương trình một số đường, một số mặt, nếu chúng ta khéo léo chọn được một mục tiêu tọa độ thích hợp thì việc làm nói trên sẽ nhẹ nhàng, nhanh gọn và việc tính toán sẽ đơn giản, dễ thực hiện. Mặt khác việc chọn mục tiêu tọa độ lại phụ thuộc vào tính chất của bài toán vì bài toán của thứ hình học nào thì có mục tiêu tọa độ dùng cho thứ hình học đó. Ví dụ trong không gian Ơclit nếu ta gặp bài toán cần chứng minh sự thẳng hàng của ba điểm nào đó hoặc cần chứng minh hai đường thẳng nào đó song song với nhau thì ta chỉ cần dùng mục tiêu afin là đủ. Tất nhiên nếu ta dùng mục tiêu trực chuẩn và tọa độ trực chuẩn cũng được (vì mục tiêu trực chuẩn cũng là một loại mục tiêu afin) nhưng làm như vậy ta đã tự hạn chế điều kiện lựa chọn mục tiêu và việc tính toán sẽ phiền phức lôi thôi hơn nhiều. Còn nếu trong không gian Ơclit mà ta gặp các bài toán về tính khoảng cách, tính độ dài, tính góc v.v ... hoặc chứng minh hai cái phẳng nào đó vuông góc với nhau thì bắt buộc chúng ta phải dùng mục tiêu và tọa độ trực chuẩn.

3. Vài tính chất hình học thường gặp cần chứng minh

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng

– Trong không gian afin và Ơclit, khi biết tọa độ của các điểm

A, B, C muốn xét xem ba điểm đó có thẳng hàng hay không ta có thể xét sự cộng tuyến của hai vectơ $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$, hoặc xét hạng ma trận tọa độ của hai vectơ này, hoặc xét xem các thành phần tương ứng của tọa độ hai vectơ này có tỉ lệ với nhau hay không.

– Trong không gian xạ ảnh muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng ta chỉ cần chứng minh hệ vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đại diện cho ba điểm A, B, C là hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính, thông qua tọa độ của chúng.

– Mặt khác để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta có thể lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm rồi chứng minh điểm thứ ba có tọa độ thỏa mãn phương trình đường thẳng nói trên.

b) Chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng quy

– Giữa bài toán chứng minh sự đồng quy của ba đường thẳng và sự thẳng hàng của ba điểm có sự liên quan rất mật thiết. Nếu ta lấy trên đường thẳng a hai điểm M, N phân biệt và gọi P là giao điểm của hai đường thẳng b và c thì khi đó ta có thể thay việc chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng quy bằng việc chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng. Ngược lại ta cũng có thể thay việc chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng bằng việc chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng quy.

– Để chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng quy trong mặt phẳng ta có thể lập phương trình của ba đường này rồi chứng minh rằng hệ ba phương trình này có hạng bằng hai nghĩa là ba phương trình này tương đương với hai phương trình độc lập. Mặt khác ta cũng có thể tìm giao điểm của hai đường và chứng tỏ rằng tọa độ điểm đó thỏa mãn phương trình của đường thẳng còn lại.

– Trong mặt phẳng xạ ảnh chúng ta có thể xét định thức tọa độ của ba đường thẳng a, b, c này, nếu định thức này bằng 0 thì ba đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm.

– Chúng ta có thể áp dụng phương pháp chùm đường thẳng trong mặt phẳng để chứng tỏ rằng trong ba đường đó có một đường thuộc chùm đường thẳng xác định bởi hai đường còn lại.

c) Chứng minh hai cái phẳng có cùng số chiều song song với nhau trong A^n. Nếu hai cái phẳng cho bởi phương trình tổng quát mà có phần xác định phương giống nhau và có số hạng tự do khác nhau thì hai cái phẳng đó song song với nhau.

d) Chứng minh hai cái phẳng bù vuông góc với nhau trong không gian E^n ta cần chứng minh rằng hai cái phẳng đó có tổng số chiều bằng n và hai cái phẳng đó có các phương vuông góc với nhau.

IV. ÁP DỤNG CÁC ĐỊNH LÍ CỦA HÌNH HỌC XẠ ẢNH ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN

Muốn áp dụng một định lí nào đó chúng ta cần phải nắm thật vững định lí đó nghĩa là cần phải hiểu thật rõ giả thiết và kết luận của định lí. Ví dụ khi đọc tới định lí Pappus ta cần chú ý tới tính chất thẳng hàng của ba điểm A, B, C và sự thẳng hàng của ba điểm A', B', C' chứ không cần quan tâm tới thứ tự của chúng. Ngoài ra khi đọc xong một định lí chúng ta cần suy nghĩ xem khi nào thì dùng được định lí đó và mục đích của định lí đó là gì ? Sau đây chúng tôi xin lưu ý tới việc dùng một số định lí quen thuộc của hình học xạ ảnh.

1. Định lí Desargues (Đờ-dác). Định lí này cho biết mối quan hệ giữa hai tam giác và dùng để chứng minh sự thẳng hàng của ba điểm hoặc sự đồng quy của ba đường thẳng. Muốn áp dụng định lí này để chứng minh ba điểm nào đó thẳng hàng, ta cần xem đó có phải là giao điểm của các cặp cạnh tương ứng của một cặp tam giác nào đó không và xét xem đường thẳng nối các đỉnh tương ứng của hai tam giác này có đồng quy không. Ngược lại muốn chứng minh ba đường thẳng nào đó đồng quy ta cần xem các đường thẳng này có đi qua các cặp đỉnh của hai tam giác nào đó không và xét xem hai tam giác này có giao điểm các cặp cạnh tương ứng có thuộc một đường thẳng nào đó hay không.

2. Định lí Pascal (Paxcan). Muốn dùng được định lí này cần hiểu rõ khái niệm về các *cạnh đối diện* của một lục giác nội tiếp conic nhất là đối với các trường hợp lục giác suy biến thành ngũ giác, tứ giác, tam giác. Ví dụ ta cần chứng minh ba điểm nào đó thẳng hàng, ta cần xem ba điểm đó có thể là giao điểm của ba cạnh đối diện của một lục giác nào đó nội tiếp conic hay không. Nếu bài toán không có conic và sự nội tiếp của lục giác (có thể suy biến thành ngũ giác, tứ giác, tam giác) thì ta nên nghĩ tới các định lí khác. Mặt khác muốn chứng minh một lục giác nào đó nội tiếp được trong một conic ta cần nghĩ tới định lí Pascal đảo. Có thể vận dụng định lí này nhiều lần để chứng minh 4 điểm, 5 điểm nào đó thẳng hàng, hoặc dựng tiếp tuyến với conic hoặc dựng cạnh còn thiếu của lục giác nội tiếp conic. Chú ý rằng người ta cũng có thể dùng định lí Pascal để chứng minh sự đồng quy của ba đường thẳng.

3. Định lí Brianchon (Briăngsông)

Muốn sử dụng định lí này, chúng ta cần biết rõ khái niệm hai *đỉnh đối diện* của một lục giác ngoại tiếp conic và đặc biệt đối với các trường hợp khi lục giác suy biến thành ngũ giác, tứ giác, tam giác. Ví dụ nếu cần chứng minh ba đường thẳng nào đó đồng quy ta cần tìm ra một lục giác Briăngsông (có thể ngũ giác, tứ giác, tam giác) thích hợp nào đó ngoại tiếp conic. Còn muốn chứng minh một lục giác nào đó ngoại tiếp được một conic thì chúng ta cần chứng tỏ rằng đó là một lục giác Briăngsông gắn liền với ba đường thẳng nối các cạnh đối diện đồng quy, có trường hợp cần phải chứng minh 4 hoặc 5 đường thẳng nào đó đồng quy thì ta cần phải vận dụng định lí Briăngsông nhiều lần hoặc chứng minh một đường thẳng thay đổi nào đó luôn luôn đi qua một điểm cố định thì có thể chứng minh điểm cố định ấy là một điểm Briăngsông. Người ta còn có thể dùng định lí Briăngsông để chứng minh sự thẳng hàng của ba điểm.

4. Định lí về cực và siêu phẳng đối cực đối với một siêu mặt bậc hai

Ta cần chú ý tới hai định lí quan trọng sau đây:

a) Nếu một đường thẳng đi qua một điểm U không thuộc đường bậc hai (S), cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N và cắt đường đối cực của U tại V thì (UVMN) = –1.

b) Nếu điểm V nằm trên đường đối cực của điểm U đối với đường bậc hai (S) thì điểm U nằm trên đường đối cực của điểm V đối với (S).

Các điểm U, V, M, N làm thành một hàng điểm điều hòa ở đây thường có quan hệ với tính chất (UVMN) = –1 đối với một hình bốn cạnh toàn phần hoặc ngược lại. Có thể sử dụng tính chất đó để dựng đường đối cực của một điểm đối với một đường bậc hai cho trước hoặc tìm cực điểm của một đường thẳng cho trước đối với một đường bậc hai cho trước. Định lí thứ hai của phần này thường được dùng để chứng minh sự thẳng hàng của ba điểm hoặc sự đồng quy của ba đường thẳng.

5. Định lí về sự liên hệ xạ ảnh và phối cảnh trong P^2

Cần nắm vững định nghĩa ánh xạ xạ ảnh (hay liên hệ xạ ảnh) giữa hai hàng điểm và giữa hai chùm đường thẳng, đồng thời nắm được điều kiện cần và đủ để một ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm (hoặc giữa hai chùm đường thẳng) trở thành phối cảnh.

Phép phối cảnh (hay phép chiếu xuyên tâm) giúp chúng ta chứng minh hai tỉ số kép nào đó bằng nhau thông qua một số hữu hạn các phép cắt và chiếu. Khi gặp các bài toán về chứng minh các đẳng thức về tỉ số kép hoặc tính các tỉ số kép, nhiều trường hợp chúng ta còn phải dùng định lí Steiner đảo hoặc các định lí có liên quan tới hàng điểm điều hòa và chùm điều hòa cùng các công thức biến đổi tỉ số kép.

Chúng ta còn có thể gặp liên hệ xạ ảnh hoặc phối cảnh trong các bài toán về tìm quỹ tích giao điểm của các cặp đường thẳng tương ứng với nhau qua một liên hệ xạ ảnh hoặc phối cảnh nào đó, và quỹ tích này có thể là một đường conic hoặc một cặp đường thẳng cắt nhau, liên hệ phối cảnh còn được dùng trong việc chứng minh tập hợp các đường thẳng nào đó thuộc hai chùm có giao điểm luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định (là trục phối cảnh) hoặc cần chứng minh tập hợp các đường thẳng đi qua hai điểm tương ứng của hai hàng điểm phối cảnh luôn luôn đi qua một điểm cố định.

V. HÌNH HỌC XẠ ẢNH VÀ CÁC HÌNH HỌC CÓ LIÊN QUAN

1. Vận dụng các định lí của hình học xạ ảnh

Các định lí của hình học xạ ảnh như định lí Desargues, định lí Pappus, định lí Pascal, định lí Briăngsông ... đều có thể vận dụng trong hình học afin và hình học Ơclit. Ví dụ định lí Desargues ngoài việc áp dụng hoàn toàn giống như trong không gian xạ ảnh, ta còn xét thêm trường hợp khi đường thẳng nối các đỉnh tương ứng song song với nhau (xem các đường này đồng quy tại điểm vô tận) hoặc trường hợp các cạnh tương ứng của hai tam giác song song với nhau (xem ba giao điểm này đều thuộc đường thẳng vô tận). Mặt khác đối với các định lí Pascal, Briăngsông hoặc mối quan hệ cực và đối cực ta có thể áp dụng cho trường hợp conic là đường tròn, đường elip, đường parabol, đường hypebol.

2. Sự liên quan giữa hình học xạ ảnh và hình học afin

a) Trong mặt phẳng xạ ảnh nếu chọn một đường thẳng nào đó làm đường thẳng vô tận thì ta được phần còn lại là mặt phẳng afin :

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \setminus \mathbf{P}^1$$

Khi đó nếu ta có hai đường thẳng xạ ảnh nào đó cắt nhau trên đường thẳng vô tận $\mathbf{P}^1$ thì trong $\mathbf{A}^2$ đó là hai đường thẳng song song. Ngược lại hai đường thẳng song song với nhau trong $\mathbf{A}^2$ có thể biểu thị bằng hai đường thẳng xạ ảnh cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng vô tận $\mathbf{P}^1$.

b) Giữa tỉ số đơn và tỉ số kép ta có công thức :

$$(ABCD) = \frac{(CAB)}{(DAB)}.$$

Nếu D là một điểm thuộc đường thẳng vô tận $\mathbf{P}^1$ thì ta có:

$$(ABCD_\infty) = (CAB)$$

Đặc biệt nếu D là điểm vô tận và (ABCD) = –1 thì khi đó trong mặt phẳng afin C là trung điểm của đoạn AB.

$$(ABCD_\infty) = (CAB) = -1$$

c) Một conic trong $\mathbf{P}^2$ sẽ thể hiện thành elip, parabol, hypebol trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ tùy theo đường thẳng vô tận không cắt conic, tiếp xúc với conic hoặc cắt conic tại hai điểm thực.

d) Trong trường hợp conic thể hiện thành hypebol, khi đó hai tiếp tuyến với conic là hai đường tiệm cận của hypebol. Các đường tiệm cận này cắt nhau tại tâm của hypebol.

e) Trong trường hợp conic thể hiện thành hypebol hoặc elip (là những đường bậc hai có tâm) thì đường thẳng vô tận là đường đối cực của tâm đường bậc hai và dây cung đi qua tâm gọi là đường kính của đường bậc hai đó.

f) Hình bình hành trong mặt phẳng afin là một hình bốn cạnh toàn phần trong mặt phẳng xạ ảnh có hai đỉnh đối diện thuộc đường thẳng vô tận.

3. Dùng hình học afin để giải các bài toán xạ ảnh

Nếu ta có một bài toán xạ ảnh phẳng mà muốn chuyển về một bài toán afin thì ta chọn một đường thẳng nào đó đóng vai trò đường thẳng vô tận và khi đó mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ trở thành mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$. Tùy theo yêu cầu của bài toán, ta cần khôn khéo chọn đường thẳng vô tận sao cho bài toán xạ ảnh trở thành một bài toán afin mà cách giải dễ thực hiện bằng các công cụ của hình học afin. Như vậy có nhiều cách biến một bài toán xạ ảnh thành một bài toán afin và sự lựa chọn này muốn đạt được hiệu quả thì người làm toán cần phải có một số hiểu biết và một số kinh nghiệm cụ thể đối với từng loại toán.

4. Dùng hình học xạ ảnh để giải các bài toán afin

Trước hết muốn giải một bài toán afin bằng công cụ xạ ảnh, chúng ta cần bổ sung vào mặt phẳng afin các điểm vô tận. Mỗi đường thẳng afin đều được thêm vào một điểm vô tận và trở thành một đường thẳng xạ ảnh. Tập hợp các điểm vô tận này của mặt phẳng đều nằm trên một đường thẳng vô tận. Thông thường người ta hay bổ sung các điểm vô tận bằng cách xem các đường thẳng song song với nhau thì đều gặp nhau tại một điểm vô tận nằm trên đường thẳng vô tận. Các đường elip, parabol, hypebol trở thành các đường conic theo thứ tự không cắt, tiếp xúc hay cắt đường thẳng vô tận tại hai điểm. Sau khi chuyển bài toán afin trở thành bài toán xạ ảnh, ta có thể dùng các tính chất, các định lí của hình học xạ ảnh để giải bài toán đó.

5. Sáng tạo các bài toán mới

a) Xuất phát từ một bài toán xạ ảnh, do cách chọn các đường thẳng khác nhau đóng vai trò đường thẳng vô tận, ta sẽ được các bài toán afin khác nhau mà kết quả của bài toán này ta có thể suy ra từ kết quả đã biết trong bài toán xạ ảnh (còn cách giải thì còn phải tiếp tục nghiên cứu !)

b) Từ một bài toán afin có thể suy ra một bài toán xạ ảnh bằng cách thêm vào mặt phẳng afin này những điểm vô tận và các điểm vô tận này nằm trên một đường thẳng vô tận. Từ kết quả của bài toán afin cho trước ta có thể dễ dàng suy ra các kết quả của bài toán xạ ảnh vừa tìm được còn cách giải thì tất nhiên chúng ta phải suy nghĩ tìm hiểu thêm.

6. Dùng hình học Ơclit để giải các bài toán afin trong không gian Ơclit. Giả sử ta cần chứng minh một hình H nào đó có tính chất α trong đó *α là một tính chất afin*. Khi đó trong tập hợp tất cả các hình tương đương afin với hình H, ta khéo léo chọn một hình H' mà trên đó tính chất α dễ chứng minh hơn. Trên hình H' có thể bằng các công cụ của hình học Ơclit làm trung gian, người ta tìm cách chứng minh tính chất α trên hình H'. Sau đó ta thực hiện một phép afin biến H' thành H thì hình H cũng có tính chất α.

CHÚ THÍCH. Ở đây ta chưa xét tới sự liên quan giữa hình học Ơclit và hình học xạ ảnh. Mô hình xạ ảnh của không gian Ơclit sẽ giúp chúng ta hiểu rõ vấn đề này.

KẾT LUẬN

Trên đây chúng tôi chỉ nêu lên một số điểm quan trọng chủ yếu nhất về lí thuyết và bài tập của môn hình học cao cấp. Muốn học tốt môn học này anh chị em sinh viên cần nắm thật vững các khái niệm cơ bản, nắm vững cách giải các loại toán đồng thời bắt tay vào làm một số bài toán cơ bản để rèn luyện kĩ năng suy luận, tư duy và tính toán. Các bài tập mẫu sau đây có tính chất tổng hợp, giúp anh chị em hiểu rõ mức độ của một bài thi, mặt khác cũng giúp cho anh chị em nắm chắc các khái niệm cơ bản và các kĩ năng cơ bản của môn học.

B. 8 ĐỀ TOÁN ÔN TẬP

I.ĐỀ BÀI

Đề số 1

Câu 1: a) Định nghĩa không gian xạ ảnh n chiều $\mathbf{P}^n$.

b) Hãy trình bày về mô hình afin có bổ sung các phần tử vô tận của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ và dùng mô hình này để chứng minh rằng trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$, hai đường thẳng xạ ảnh phân biệt luôn luôn cắt nhau.

Câu 2: Trong không gian afin 3 chiều $\mathbf{A}^3$ với mục tiêu afin cho trước, cho các điểm:

$B_1(1,1,0)$, $B_2(0,1,1)$, $B_3(1,0,1)$, $B_4(0,0,0)$ và các điểm

$B'_1(3,4,9)$, $B'_2(2,8,8)$, $B'_3(4,6,4)$, $B'_4(1,2,3)$.

a) Chứng minh rằng có một phép afin duy nhất f biến không gian afin $\mathbf{A}^3$ thành chính nó và biến các điểm B_i thành B'_i với $i = 1,2,3,4$.

b) Lập phương trình phép afin f đối với mục tiêu afin cho trước.

c) Qua f hãy tìm ảnh của đường thẳng d có phương trình :

$$(d):\begin{cases}x_1 = x_3\\ x_2 = 0\end{cases}$$

d) Tìm ma trận của phép afin f đối với mục tiêu:

$\{B_1; B_2, B_3, B_4\}$.

Câu 3: Trong không gian Ơclit n chiều $\mathbf{E}^n$ với hệ mục tiêu trực chuẩn cho trước cho các điểm :

$A_1 = (a_1, 0, ..., 0)$

$A_2 = (0, a_2, 0, ..., 0)$

. . . .

$A_n = (0, ..., 0, a_n)$ với mọi $a_i \neq 0$

a) Chứng minh rằng hệ m điểm $A_1, A_2, ..., A_m$ với $m < n$ là một hệ m điểm độc lập. Hãy lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của phẳng P xác định bởi m điểm $A_1, A_2, ..., A_m$ độc lập nói trên.

b) Lập phương trình tổng quát của siêu phẳng R xác định bởi n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ đã cho.

c) Lập phương trình tổng quát của phẳng Q đi qua điểm M(1,2,...,n) và bù vuông góc với phẳng P nói trên.

Câu 4 : Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ cho ba điểm A, B, C nằm trên conic (S). Từ một điểm D không thuộc conic (S) ta kẻ các đường thẳng DA, DB, DC lần lượt cắt conic tại A', B', C'. Từ M là một điểm bất kì trên (S) ta kẻ các đường thẳng MA, MB, MC lần lượt cắt các đường thẳng $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng 4 điểm A_1, B_1, C_1, D thuộc cùng một đường thẳng .

Đề số 2

Câu 1 : a) Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ hãy chứng minh rằng phương trình tổng quát của một m-phẳng afin $(0 < m < n)$ xác định bởi m + 1 điểm độc lập là một hệ phương trình tuyến tính có hạng bằng n−m.

b) Chứng minh rằng trong không gian $\mathbf{A}^n$ một siêu phẳng và một m-phẳng không thuộc siêu phẳng đó có giao là một (m–1)-phẳng.

Câu 2: Trong mặt phẳng Ơclit $\mathbf{E}^2$ với mục tiêu trực chuẩn, cho phép biến đổi f có phương trình :

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + 1 \\ x_2' = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 2 \end{cases}$$

a) Chứng minh f là một phép afin. Xét xem f có phải là một phép dời không ?

b) Tìm điểm kép của f.

c) Cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x_1 = t - 1 \\ x_2 = 2t - 2 \end{cases}$

Hãy tìm ảnh $d' = f(d)$ và tính góc giữa d và d'.

Câu 3: Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ cho mục tiêu trực chuẩn $\{E_o; E_i\}$. Trên mỗi đường thẳng E_oE_i ta lấy một điểm $B_i \neq E_o$ sao cho $(E_oB_iE_i) = b_i$ cho trước.

a) Chứng minh rằng n điểm $B_1, B_2, \ldots, B_n$ độc lập và lập phương trình siêu phẳng P xác định bởi n điểm B_i độc lập nói trên.

b) Lập phương trình tham số và tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm M(1,2,...,n) và vuông góc với siêu phẳng P.

c) Lập phương trình siêu cầu có tâm là gốc tọa độ và tiếp xúc với siêu phẳng P.

d)Lập phương trình siêu cầu đi qua điểm E_o và n điểm $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nói trên.

Câu 4: Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ cho conic (S) và 4 điểm A, B, C, D thuộc conic. Tiếp tuyến tại A và B của conic cắt nhau tại K. Gọi $I = AC \cap BD$, $H = AD \cap BC$.

a) Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng.

b) Nếu chọn AB làm đường thẳng vô tận hãy phát biểu kết quả của bài toán trên đối với tứ giác CHDI trong mặt phẳng a fin :

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \backslash \text{ đường thẳng } AB.$$

c) Gọi M, N là các giao điểm của đường thẳng AB lần lượt với các đường thẳng IK và CD. Hãy tính tỉ số kép (ABMN).

Đề số 3

Câu 1: Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ cho đường thẳng d. Gọi $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \backslash d$ là một tập hợp những điểm của $\mathbf{P}^2$ nhưng không thuộc d. Hãy chứng minh rằng $\mathbf{A}^2$ là một không gian afin 2 chiều.

Trong mô hình đó hãy xét vị trí tương đối của hai đường thẳng afin được sinh ra bởi hai đường thẳng xạ ảnh phân biệt a, b có phương trình sau đây :

$$(a): a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

$$(b): b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

Câu 2 : Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^4$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước cho các điểm A(1,0,1,1), B(0,1,0,2), C(0,0, –1,0), D(1,0,0,0)

a) Lập phương trình tham số và tổng quát của phẳng P có số chiều bé nhất chứa các điểm A, B, C, D.

b) Lập phương trình tham số của phẳng Q đi qua điểm M(1,2,3,4) và bù vuông góc với P.

c) Tính khoảng cách từ M tới phẳng P.

d) Lập phương trình phẳng P' đi qua điểm M, có cùng số chiều với P và song song với P.

Câu 3 : Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ cho mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3 ; E\}$. Gọi E_1, E_2, E_3 là giao điểm của các đường thẳng A_1E, A_2E, A_3E lần lượt với các đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2.

a) Tính tọa độ các điểm E_1, E_2, E_3.

b) Lập phương trình phép biến đổi xạ ảnh f sao cho $f(A_i) = E_i$ với i = 1, 2, 3 và f(E) = E.

c) Tìm điểm kép của f.

d) Tìm ảnh của đường thẳng d có phương trình $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$ qua phép biến đổi xạ ảnh f nói trên.

Câu 4: Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ cho một conic (S) và một đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A, B. Các tiếp tuyến của (S) tại A và B cắt nhau tại P. Qua P có một cát tuyến bất kì cắt d tại E và cắt (S) tại hai điểm M và M'. Từ một điểm O trên conic ta kẻ các đường thẳng OM và OM' lần lượt cắt d tại N và N'.

a) Chứng minh rằng điểm $I = AM' \cap OB$ thuộc đường thẳng PN.

b) Chứng minh 4 điểm A, B, N, N' làm thành một hàng điểm điều hòa.

Đề số 4

Câu 1 : Định nghĩa m-phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^m$. Trong $\mathbf{P}^n$ hãy lập phương trình tham số và tổng quát của một m-phẳng xạ ảnh xác định bởi m+1 điểm $A_1, A_2, ..., A_{m+1}$ độc lập với $A_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{n+1}})$ và $i = 1,2,...,m+1$ đối với một mục tiêu xạ ảnh cho trước.

Câu 2 : Trong không gian afin $\mathbf{A}^4$ với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ đã chọn, cho bốn điểm A(1,1,1,1) , B(2,1,1,2), C(1,2,2,1), D(2,3,3,2)

a) Lập phương trình tổng quát của phẳng P có số chiều bé nhất chứa các điểm A, B, C, D.

b) Gọi Q là cái phẳng đi qua điểm M(2,1,2,2) và có phương xác định bởi hai vectơ $\vec{a} = (-2,1,1,2)$, $\vec{b} = (1, -1, -1,1)$. Chứng minh rằng Q song song với P.

c) Lập phương trình tổng quát của phẳng tổng P + Q.

Câu 3: Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh đã chọn :

a) Hãy lập phương trình phép biến đổi xạ ảnh f biến các điểm A(0,0,1), B(1,2,0), C(1,0,1), D(0,1,0) lần lượt thành các điểm A'(1,2,0), B'(1,0, –1), C'(0,1,0), D'(0,0,1).

b) Tìm điểm kép của f.

c) Tìm ảnh của đường thẳng d có phương trình :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Câu 4: Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ cho mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$. Gọi E_1, E_2, E_3 lần lượt là giao điểm của các đường thẳng A_1E, A_2E, A_3E với các đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Đường thẳng E_2E_3 cắt đường thẳng A_2A_3 tại P. Một đường thẳng d đi qua P cắt A_2E và A_3E lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh ba đường thẳng A_1E_1, CE_3, DE_2 đồng quy.

b) Gọi M_1 là điểm biến thiên trên A_2A_3, M_2 là điểm biến thiên trên A_3A_1 sao cho $(A_2A_3E_1M_1) = (A_3A_1E_2M_2)$. Hãy lập phương trình quỹ tích của điểm $M = A_1M_1 \cap A_2M_2$.

Để số 5

Câu 1 : Định nghĩa tỉ số kép của 4 điểm A, B, C, D thẳng hàng và chứng minh rằng tỉ số kép là một bất biến xạ ảnh. Trong mô hình xạ ảnh của không gian afin $\mathbf{A}^2$ hãy xét sự thể hiện của một hình bình hành và trình bày sự liên hệ giữa tỉ số kép và tỉ số đơn.

Câu 2 : Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ với hệ mục tiêu đã chọn, cho các điểm A(1,1,1), B(2,0,0), C(1,0,0), D(1,1,0), E(0,0,0), F(2,0,1), G(1,0,1).

a) Chứng minh rằng có thể dùng các hệ điểm {A; B,C,D} và {E; D,F,C} làm những mục tiêu afin.

b) Tìm các công thức đổi mục tiêu từ mục tiêu đã chọn sang mục tiêu {A; B,C,D} và từ mục tiêu {A; B,C,D} sang mục tiêu {E; D,F,G}.

c) Lập phương trình phép biến đổi afin f đối với mục tiêu đã chọn sao cho f(A) = E, f(B) = D, f(C) = F, f(D) = G.

Câu 3 : Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^4$ với mục tiêu trực chuẩn $\{E_o; E_1, E_2, E_3, E_4\}$:

a) Lập phương trình tổng quát của phẳng P có số chiều bé nhất chứa ba điểm E_1, E_2, E_3.

b) Lập phương trình tổng quát của phẳng Q bù vuông góc với P và đi qua điểm M(1,2,3,4).

c) Tính khoảng cách từ M tới phẳng P.

d) Lập phương trình phép afin f sao cho $f(E_o) = E_1$, $f(E_1) = E_2$, $f(E_3) = E_4$, $f(E_4) = E_o$ và xét xem f có phải là phép dời không ?

Câu 4 : Trong mặt phẳng xạ ảnh cho 5 điểm A, B, C, D, E cố định trên một conic (S). Trên (S) ta có một điểm M di động và gọi $N = AD \cap MC$, $P = BM \cap AE$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng NP luôn luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh 3 giao điểm $X = BE \cap CD$, $Y = BP \cap AN$, $Z = AP \cap CN$ cùng thuộc một đường thẳng .

Đề số 6

Câu 1 : Định nghĩa m-phẳng trong $\mathbf{A}^n$. Chứng minh rằng m-phẳng afin là một không gian afin m chiều. Hãy cho một ví dụ về phương trình tổng quát của một cái phẳng 2 chiều trong không gian afin $\mathbf{A}^5$.

Câu 2 : Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^4$, với mục tiêu trực chuẩn đã chọn, cho các điểm A(1,2,0,1), B(2,2,1,1), C(3,3,0,2), D(1,1,2,0).

a) Viết phương trình tổng quát của phẳng P có số chiều bé nhất chứa các điểm A, B, C, D.

b) Gọi Q là cái phẳng đi qua điểm M(0,1,0,2) và có hai vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (0,1,2,1), \vec{b} = (3,1,1,1)$. Hãy xét vị trí tương đối của P và Q.

c) Tính khoảng cách từ điểm M tới P.

Câu 3 : Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ cho mục tiêu xạ ảnh {D; A,B,C}.

a) Lập phương trình phép biến đổi xạ ảnh f sao cho f(A) = B, f(B) = A, f(C) = D, f(D) = C.

b) Tìm điểm kép của f.

c) Lập phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f^1 và hãy xét tính chất của f^{-1} này.

Câu 4 : Trong $\mathbf{P}^2$ cho một conic (S). Các tiếp tuyến tiếp xúc với conic tại hai điểm P và Q cho trước cắt nhau tại B. Trên đường thẳng PQ ta lấy hai điểm A, C sao cho (PQAC) = –1. Gọi d là một đường thẳng bất kì đi qua điểm A và cắt conic (S) tại M và N.

a) Chứng minh rằng khi d thay đổi nhưng luôn luôn đi qua A thì cực điểm của đường thẳng MN đối với conic (S) luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định.

b) Gọi $I = PM \cap NQ$, $O = PN \cap QM$. Chứng minh 4 điểm B, C, I, O cùng thuộc một đường thẳng .

c) Chứng minh rằng khi d thay đổi, giao điểm R của hai đường thẳng NC và BM vẫn luôn luôn thuộc conic (S).

Đề số 7

Câu 1: Phát biểu định nghĩa phép dời trong $\mathbf{E}^n$.

Cho ánh xạ $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ biến không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ thành chính nó, có tính chất không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì của $\mathbf{E}^n$. Chứng minh f là một phép dời.

Hãy kể tên các phép dời quen biết trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^2$.

Câu 2 : Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^3$ với mục tiêu xạ ảnh cho trước, cho điểm M(1,0,2, –1) và hai mặt phẳng

$$P = [0,0,1,0],\ Q = [1,2,0,2].$$

a) Lập phương trình mặt phẳng R đi qua điểm A và thuộc chùm mặt phẳng xác định bởi hai mặt phẳng P và Q đã cho.

b) Tìm mặt phẳng S sao cho (PQRS) = –1.

c) Tìm giao điểm của đường thẳng đi qua hai đỉnh A_1, A_3 của mục tiêu xạ ảnh và các mặt phẳng P,Q,R,S. Hãy nhận xét về tính chất các giao điểm.

Câu 3 : Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^3$ với mục tiêu xạ ảnh $\{E; A_1,A_2,A_3,A_4\}$ cho trước, cho điểm $E' = (1,1,-1,-1)$.

a) Lập phương trình phép biến đổi xạ ảnh f sao cho $f(A_i) = A_i$ với i = 1,2,3,4 và $f(E) = E'$.

b) Tìm các điểm kép của f và chứng minh rằng tập hợp các điểm kép của f thuộc hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

c) Lấy một điểm M không thuộc d và d'. Chứng minh rằng M' = f(M) ≠ M. Đường thẳng MM' cắt d tại điểm U và cắt d' tại điểm V. Hãy tính tỉ số kép (MM'UV).

d) Chứng minh rằng f∘f là phép đồng nhất.

Câu 4: trong mặt phẳng afin cho một hypebol (S). Chứng minh rằng:

a) Một tiếp tuyến tiếp xúc với hypebol tại C và cắt hai đường tiệm cận tại A và B thì C là trung điểm của đoạn AB.

b) Một dây cung MN của hypebol cắt hai đường tiệm cận tại P và Q thì hai đoạn MN và PQ có cùng trung điểm.

Đề số 8

Câu 1 : Định nghĩa tọa độ xạ ảnh của một điểm X và định nghĩa mục tiêu xạ ảnh trong $\mathbf{P}^n$. Gọi $\mathbf{P}^{n-1}$ là siêu phẳng xác định bởi các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ của mục tiêu và E' là giao điểm của đường thẳng $A_{n+1}E$ với siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$. Hãy chứng tỏ rằng có thể dùng $\{E'; A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ làm một mục tiêu xạ ảnh của $\mathbf{P}^{n-1}$.

Câu 2 : Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu $\{E_o; E_i\}$ cho các điểm $B_1(b_1, 0, \ldots, 0)$, $B_2(0, b_2, 0, \ldots, 0)$, ..., $B_n(0, \ldots, 0, b_n)$ với mọi $b_i \neq 0$.

a) Viết phương trình siêu phẳng P qua các điểm B_i đã cho.

b) Qua một điểm M thuộc siêu phẳng P ta dựng siêu phẳng P_i song song với siêu phẳng có phương trình $x_i = 0$. Gọi M_i là giao điểm của P_i với đường thẳng E_oE_i với i = 1, 2, ..., r. Chứng minh rằng tổng :

$$\sum_{i=1}^{n}(E_o M_i B_i) = k \text{ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên P.}$$

Hãy xác định giá trị của tổng đó.

c) Chứng minh rằng khi các điểm B_i thay đổi sao cho $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i} = n+1$ thì siêu phẳng P xác định bởi các điểm B_i luôn luôn đi qua một điểm cố định. Xác định tọa độ điểm đó.

Câu 3 : Một phép biến đổi xạ ảnh f của $\mathbf{P}^n$ được gọi là phép thấu xạ nếu có một siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ sao cho mọi điểm M của nó ta đều có f(M) = M.

a) Hãy chọn một mục tiêu xạ ảnh thích hợp và lập phương trình của phép thấu xạ f đối với mục tiêu đó.

b) Tìm điểm kép của f.

Câu 4 : Trong mặt phẳng afin cho một tam giác ABC. Một parabol biến thiên tiếp xúc với các đường thẳng BC, CA, AB theo thứ tự tại A', B', C'. Từ tam giác ABC, ta dựng hình bình hành CABH có đường chéo CB, hình bình hành BCAK có đường chéo BA và hình bình hành ABCI có đường chéo AC.

a) Chứng minh các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

b) Chứng minh các điểm H,I,K theo thứ tự thuộc các đường thẳng $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$.

II.HƯỚNG DẪN VÀ GIẢI

Đề số 1

Câu 1 : a) Xem giáo trình lí thuyết.

b) Trình bày mô hình afin có bổ sung các phần tử vô tận của $\mathbf{P}^n$ với n = 2. Trong mô hình này hai đường thẳng afin phân biệt chỉ có 2 trường hợp :cắt nhau hoặc song song với nhau và nếu chúng song song với nhau ta xem như chúng cắt nhau tại một điểm vô tận. Do đó hai đường thẳng afin trong cả hai trường hợp đều có thể hiện bằng hai đường thẳng xạ ảnh cắt nhau.

Câu 2: a) Chứng minh hai hệ điểm $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ và $\{B'_1, B'_2, B'_3, B'_4\}$ là hai hệ điểm độc lập. Ta biết rằng hai bộ 4 điểm độc lập trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ xác định một phép biến đổi afin duy nhất f và ta có $f(B_i) = B'_i$ với i = 1,2,3,4.

b) Phương trình của phép afin f:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_3 + 1 \\ x'_2 = 2x_2 + 4x_3 + 2 \\ x'_3 = x_1 + 5x_2 + 3 \end{cases}$$

c) Để tìm ảnh của đường thẳng d, ta có thể chuyển phương trình của đường thẳng d về dạng tham số và tìm được phương trình của f(d) là :

$$\begin{cases} x_1 = 3t + 1 \\ x_2 = 4t + 2 \\ x_3 = t + 3 \end{cases}$$

d) Ma trận B' của phép afin f đối với mục tiêu $\{B';B_2,B_3,B_4\}$ là:

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Chú ý : Ma trận B' của f đối với mục tiêu mới có thể suy ra từ ma trận B của f đối với mục tiêu cũ hoặc có thể tính trực tiếp bằng cách tìm ma trận chuyển A từ mục tiêu $\{B_1;B_2,B_3,B_4\}$ sang mục tiêu $\{B'_1;B'_2,B'_3,B'_4\}$ và ta có $B' = A^*$.

Câu 3: a) Chứng minh bộ m–1 vectơ $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, ..., \overline{A_1A_m}$ độc lập tuyến tính bằng cách chứng minh ma trận tọa độ của hệ vectơ này có hạng bằng m–1.

Phương trình tham số của phẳng P:

$$X \in P \Leftrightarrow \overline{A_1X} = t_1\overline{A_1A_2} + t_2\overline{A_1A_3} + ... + t_{m-1}\overline{A_1A_m}$$

$$\begin{cases} x_1 = a_1 - t_1a_1 - t_2a_1 - ... - t_{m-1}a_1 \\ x_2 = t_1a_2 \\ ... \quad ... \\ x_m = t_{m-1}a_m \\ x_{m+1} = 0 \\ ... \quad ... \\ x_n = 0 \end{cases}$$

Phương trình tổng quát của P:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1} + \dfrac{x_2}{a_2} + \dots + \dfrac{x_m}{a_m} = 1 \\ x_{m+1} = 0 \\ \dots \quad \dots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

b) Phương trình tổng quát của siêu phẳng R:

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$$

c) Phương trình tổng quát của phẳng Q :

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \dfrac{1}{a_1}(x_m - m)a_m \\ x_2 = 2 + \dfrac{1}{a_2}(x_m - m)a_m \\ \dots \quad \dots \\ x_{m-1} = m - 1 + \dfrac{1}{a_{m-1}}(x_m - m)a_m \end{cases}$$

Rút gọn ta có kết quả :

$$\begin{cases} a_1x_1 - a_mx_m - a_1 + ma_m = 0 \\ a_2x_2 - a_mx_m - 2a_2 + ma_m = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m-1}x_{m-1} - a_mx_m - (m-1)a_{m-1} + ma_m = 0 \end{cases}$$

Câu 4 : Áp dụng định lí Pascal vào lục giác $ABB'CC'A'A$ nội tiếp conic ta có A_1, B_1,D thẳng hàng. Lại áp dụng định lí Pascal vào lục giác $MCC'A'B'B$ nội tiếp conic ta có B_1, C_1, D thẳng hàng. Phối hợp hai kết quả trên ta suy ra 4 điểm A_1,B_1,C_1, D thuộc cùng một đường thẳng .

Đề số 2

Câu 1 : a) và b) xem giáo trình lí thuyết.

Câu 2 : a) Gọi A là ma trận của phép biến đổi f. Ta có det $A \neq 0$.

Vậy f là một phép afin trong mặt phẳng E^2.

Hơn nữa ta có $A.A^* = I$. Vậy A là ma trận trực giao và do đó f là một phép dời.

b) Điểm kép :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} - \sqrt{3} \\ x_2 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

c) Ảnh của đường thẳng d là $d' = f(d)$ có phương trình :

$$\begin{cases} x_1 = (\dfrac{1}{2} - \sqrt{3})t + \dfrac{1}{2} + \sqrt{3} \\ x_2 = (1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2})t + 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Góc giữa d và d' là góc giữa hai vectơ chỉ phương $\overline{a}, \overline{a'}$ của hai đường thẳng đó. Ta có $\vec{a} = (1,2)$ và $\overrightarrow{a'} = (1 - 2\sqrt{3}\ , 2 + \sqrt{3}\ )$.

Ta tính được : $(d, d') = \dfrac{\pi}{3}$

Câu 3: a) Ta có : $B_1 = (b_1,0,...,0)$

$B_2 = (0,b_2,0,...,0)$

... ...

$B_n = (0,...,0,b_n)$

Ta chứng minh hệ vectơ $\{\overline{B_1B_2}, \overline{B_1B_3}, ..., \overrightarrow{B_1B_n}\}$ độc lập tuyến tính và suy ra hệ n điểm $\{B_1,B_2,...,B_n\}$ độc lập. Phương trình của siêu phẳng P:

$$\frac{1}{b_1}x_1 + \frac{1}{b_2}x_2 + ... + \frac{1}{b_n}x_n = 1$$

b) Phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng d.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{b_1}t + 1 \\ x_2 = \dfrac{1}{b_2}t + 2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = \dfrac{1}{b_n}t + n \end{cases}$$ và $(x_1 - 1)b_1 = (x_2 - 2)b_2 = \dots = (x_n - n)b_n$

c) Siêu cầu tâm E_o tiếp xúc với P có phương trình :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i^2}}$$

d) Siêu cầu qua E_o, B_1, ... , B_n có phương trình :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$$

Câu 4: a) Áp dụng định lí Pascal cho lục giác AACBBD nội tiếp conic ta có I, H, K thẳng hàng.

b) Trong mặt phẳng afin tứ giác CHDI là một hình bình hành. Hình bình hành này có hai đỉnh đối diện C, D, thuộc một hypebol và có các cạnh song song với các đường tiệm cận của hypebol thì hai đỉnh còn lại của hình bình hành và tâm của hypebol cùng nằm trên 1 đường thẳng .

c) Xét hình 4 cạnh toàn phần ABCDHI ta có (ABMN) = –1.

Đề số 3

Câu 1: Xem giáo trình lí thuyết về phần mô hình xạ ảnh của không gian afin và vận dụng với n = 2.

Muốn xét vị trí tương đối của hai đường thẳng afin ta có thể

– hoặc chuyển về tọa độ afin (là tọa độ xạ ảnh không thuần nhất) và xét vị trí tương đối của hai đường thẳng afin đó.

– hoặc xét giao điểm của hai đường thẳng xạ ảnh rồi căn cứ vào tọa độ của giao điểm để xem giao điểm đó có thuộc đường thẳng vô tận d hay không để có kết luận về vị trí tương đối của hai đường thẳng afin.

Cả hai cách làm trên đây đều dẫn đến kết luận:

Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ta có hai đường thẳng afin cắt nhau.

Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ ta có hai đường thẳng afin song song với nhau.

Câu 2: a) Xét các vectơ $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ ta thấy 4 điểm A,B,C,D độc lập.

Phương trình tổng quát của P :

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = 1 - t_1 - 2t_2 - t_3 \\ x_4 = 1 + t_1 - t_2 - t_3 \end{cases}$$

Phương trình tổng quát của P :

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 1 = 0$$

b) Phương trình tham số của phẳng Q :

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 - t \\ x_3 = 3 - t \\ x_4 = 4 + t \end{cases}$$

c) Gọi H = P ∩ Q ta tính được $H = (\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \frac{17}{4})$

Khoảng cách từ M tới phẳng P là $|\overline{MH}|$:

$$d(M,P) = \frac{1}{2}$$

d) Phẳng P' có phương trình :

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

Câu 3: a) Tọa độ các điểm : $E_1 = (0,1,1)$, $E_2 = (1,1,0)$, $E_3 = (1,1,0)$.

b) Phương trình phép biến đổi xạ ảnh f :

$$\begin{cases} kx_1' = x_2 + x_3 \\ kx_2' = x_1 + x_3 \\ kx_3' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

c) Tìm điểm kép : $(k + 1)^2(2 - k) = 0$

Với $k = -1$ ta có tập hợp các điểm kép thỏa mãn phương trình đường thẳng

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Với $k = 2$ ta có điểm kép là điểm có tọa độ $(1,1,1)$.

d) Đường thẳng d qua f biến thành chính nó.

Câu 4: a) Xét lục giác ABBOMM' nội tiếp conic, áp dụng định lí Pascal ta chứng minh được 3 điểm I,P,N thẳng hàng.

b) Vì d là đường đối cực của P đối với (S) nên

$$(PEMM') = -1, \text{ do đó } (BP, BA, BM, BM') = -1$$

Mặt khác theo định lí Steiner đảo ta có:

$$(OB,OA,OM,OM') = (BB,BA,BM,BM')$$

Do đó $(OB,OA,OM,OM') = (BP,BA,BM,BM') = -1$

Cắt chùm (OB,OA,OM,OM') bởi d ta được hàng điểm B,A,N,N'.

Do đó ta suy ra $(BANN') = -1$.

Đề số 4

Câu 1: Xem giáo trình lí thuyết.

Câu 2: a) Ta có :

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,0,1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0,1,1,0)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1,2,2,1)$$

Ta nhận thấy $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ mà $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính nên ta lập được phương trình tham số của P:

$$X \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 \\ x_2 = 1 + t_2 \\ x_3 = 1 + t_2 \\ x_4 = 1 + t_1 \end{cases}$$

Ta có phương trình tổng quát của P :

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

b) Ta nhận thấy $\vec{a} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Vậy $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều thuộc phương của phẳng P nghĩa là Q cùng phương với P. Mặt khác điểm M không thuộc P vì tọa độ của M không thỏa mãn phương trình của P nên ta suy ra Q song song với P.

c) Vì Q song song với P nên Q và P không có điểm chung. Các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều thuộc phương của P, do đó phẳng tổng có các vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}$ (3 vectơ này độc lập tuyến tính).

$$X \in P + Q \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC} + t_3\overrightarrow{AM} \text{ với } \overrightarrow{AM} = (1,0,1,1)$$

Ta có phương trình tham số của phẳng tổng P + Q :

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + t_3 \\ x_2 = 1 + t_2 \\ x_3 = 1 + t_2 + t_3 \\ x_4 = 1 + t_1 + t_3 \end{cases}$$

Khử các tham số ta được phương trình tổng quát của phẳng tổng P + Q là : $x_1 - x_4 = 0$

Câu 3: a) Phương trình phép biến đổi xạ ảnh f:

$$\begin{cases} kx'_1 = 2x_1 - 2x_3 \\ kx'_2 = -4x_3 \\ kx'_3 = -x_2 \end{cases}$$

b) Tìm điểm kép : ta có $(k-2)(k^2-4)=0$

Với $k = 2$ ta có điểm kép : $(1,0,0)$

Với $k = -2$ ta có điểm kép : $(1,4,2)$.

c) Ảnh của đường thẳng d là d' có phương trình :

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

Câu 4: a) Hai tam giác $A_1E_3E_2$ và ECD có giao điểm của 3 cặp cạnh tương ứng là A_2,A_3,P thẳng hàng nên theo định lí Desargues A_1E,E_3C,E_2D đồng quy, trong đó A_1E chính là A_1E_1.

Chú ý : – Có thể dùng phương pháp tọa độ để chứng minh.

– Có thể dùng mô hình xạ ảnh của mặt phẳng afin để giải bài toán này.

b) Giả sử $M = (x_1,x_2,x_3)$ với $M = A_1M_1 \cap A_2M_2$. Ta tính được tọa độ điểm $M_1 = (0,x_2,x_3)$ và $M_2 = (x_1,0,x_3)$. Ta có :

$$(A_2A_3E_1M_1) = x_2 : x_3$$

$$(A_3A_1E_2M_2) = x_3 : x_1$$

Theo giả thiết ta có : $x_2 : x_3 = x_3 : x_1$

hay $x_3^2 - x_1x_2^2 = 0$ là phương trình của quỹ tích. Quỹ tích này là một đường conic.

Chú ý : Có thể áp dụng công thức $(A_iA_{n+1}E_iX_i) = \dfrac{x_i}{x_{n+1}}$ để tìm các tỉ số nói trên.

Đề số 5

Câu 1: Xem giáo trình lí thuyết trong mô hình $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \backslash \mathbf{P}^1$ này hình bình hành là hình 4 cạnh toàn phần có hai đỉnh đối diện thuộc đường thẳng vô tận $\mathbf{P}^1$.

Sự liên hệ giữa tỉ số đơn và tỉ số kép : chứng minh các hệ thức:

$$(ABCD) = (CAB) : (DAB)$$

$$(ABCD) = (CAB) \text{ nếu D thuộc đường thẳng vô tận.}$$

Đặc biệt nếu $(ABCD) = -1$ và D là điểm vô tận thì C là trung điểm của đoạn AB.

Câu 2: a) Chứng minh các hệ vectơ $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$, $\{\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}\}$ độc lập tuyến tính và suy ra {A,B,C,D} và {E,D,F,G} là các bộ 4 điểm độc lập.

b) Gọi (x_1,x_2,x_3) là tọa độ của điểm X đối với mục tiêu đã chọn.

Gọi (x_1', x_2', x_3') là tọa độ của điểm X đối với mục tiêu {A;B,C,D}.

Gọi (x_1'', x_2'', x_3'') là tọa độ của điểm X đối với mục tiêu {E;D,F,G}.

Ta có công thức đổi mục tiêu từ mục tiêu đã chọn sang mục tiêu {A;B,C,D} là :

$$\begin{cases} x_1 = x_2' + 1 \\ x_2 = -x_1' - x_2' + 1 \\ x_3 = -x_1' - x_2' - x_3' + 1 \end{cases}$$

Sau khi tìm công thức đổi mục tiêu đã chọn sang mục tiêu {E;D,F,G} và dựa vào công thức đổi mục tiêu từ mục tiêu đã chọn sang mục tiêu {A;B,C,D} ta tìm được công thức đổi mục tiêu từ mục tiêu {A;B,C,D} sang mục tiêu {E;D,F,G}

$$\begin{cases} x_1' = x_1'' + 2x_2'' + x_3'' - 1 \\ x_2' = -2x_1'' - 2x_2'' - x_3'' + 2 \\ x_3' = x_1'' - x_2'' - x_3'' \end{cases}$$

Chú ý : Có thể giả sử

$$\overrightarrow{ED} = a_1\overrightarrow{AB} + a_2\overrightarrow{AC} + a_3\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{EF} = b_1\overrightarrow{AB} + b_2\overrightarrow{AC} + b_3\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{EG} = c_1\overrightarrow{AB} + c_2\overrightarrow{AC} + c_3\overrightarrow{AD}$$

rồi tìm ma trận chuyển A bằng cách thay tọa độ các vectơ vào hệ thức trên và giải hệ phương trình để tìm $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3$. Sau đó ta có công thức

$$[x'] = A^*[x''] + [b]$$

trong đó [b] là tọa độ của điểm E đối với mục tiêu {A;B,C,D}

c) Ta có phương trình của phép afin f đối với mục tiêu đã chọn:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_2 - x_3 + 3 \\ x_2' = x_1 - 1 \\ x_3' = -x_1 - x_3 + 2 \end{cases}$$

Câu 3 : a) Phương trình tổng quát của phẳng P :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

b) Phương trình tổng quát của phẳng Q :

$$x_1 - 1 = x_2 - 2 = x_3 - 3$$

c) Ta tính được giao điểm $H = P \cap Q = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0)$

khoảng cách $d(M,P) = |\overline{MH}| = \frac{\sqrt{219}}{3}$

d) Phương trình phép afin f :

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

f không phải là phép dời vì f không bảo tồn khoảng cách .

Ta có : $d(E_o,E_1) \neq d(E_1,E_2)$

Chú ý : Gọi A là ma trận của f và thấy rằng $A.A^* \neq I$ (ma trận đơn vị) nghĩa là A là ma trận không trực giao nên f không phải là phép dời.

Câu 4 : a) Ta có $I = BD \cap EC$ là một điểm cố định.

Áp dụng định lí Pascal cho lục giác ADBMCE nội tiếp conic ta có ba điểm P,N,I thẳng hàng hay đường thẳng NP luôn luôn đi qua điểm I cố định.

b) Áp dụng định lí Pascal cho lục giác AEBMCD nội tiếp conic ta có ba điểm X,Y,Z thuộc một đường thẳng.

Đề số 6

Câu 1: Xem giáo trình lí thuyết và cho thí dụ bằng một hệ phương trình tuyến tính có hạng bằng 3.

Câu 2: a) Ta có $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ nên 4 điểm A, B, C, D không độc lập. Ta lập phương trình tổng quát của phẳng P đi qua A nhận $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ là hai vectơ độc lập tuyến tính làm các vectơ chỉ phương.

$$P : \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 + 1 = 0 \\ x_2 - x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$

b) Ta nhận thấy $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thuộc phương của phẳng P (tọa độ các vectơ này nghiệm phương trình xác định phương của P). Mặt khác điểm M(0,1,0,2) thuộc Q, nhưng không thuộc P. Ta suy ra Q song song với P và có cùng số chiều với P.

c) Ta lập phương trình phẳng R đi qua M và bù vuông góc với P. R có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = 1 + t_2 \\ x_3 = -t_1 \\ x_4 = 2 - 2t_1 - t_2 \end{cases}$$

Gọi H là giao điểm của R với P ta tính được $H = (\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

$$d(M,P) = |\overline{MH}| = \frac{3}{2}$$

Khoảng cách này đồng thời cũng là khoảng cách của hai cái phẳng Q và P song song với nhau.

Câu 3: a) Phương trình phép biến đổi xạ ảnh f:

$$\begin{cases} kx'_1 = x_2 - x_3 \\ kx'_2 = x_1 - x_3 \\ kx'_3 = \quad -x_3 \end{cases}$$

b) Điểm kép : $(k-1)^2(k+1) = 0$

Với $k = 1$ ta có điểm kép : $(1,1,0)$

Với $k = -1$, tập hợp các điểm kép thỏa mãn phương trình đường thẳng :

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

c) Phép f^{-1} có phương trình :

$$\begin{cases} gx_1 = x'_2 - x'_3 \\ gx_2 = x'_1 - x'_3 \\ gx_3 = \quad -x'_3 \end{cases}$$

Nhận xét : Ma trận của f^{-1} giống như ma trận của f và do đó f^{-1} có các tính chất giống như f.

Câu 4: a) Theo giả thiết vì (PQAC) = –1 nên ta suy ra BC là đường đối cực của điểm A đối với (S) và ABC là tam giác tự đối cực. Vì đường thẳng MN luôn luôn đi qua điểm A nên cực điểm của MN luôn luôn thuộc đường thẳng PC cố định.

b) Xét hình 4 cạnh toàn phần có các cặp đỉnh đối diện là (A,I); (Q,M); (P,M) và các đỉnh M,N,P,Q nằm trên (S) ta suy ra IO là đường đối cực của điểm A đối với (S). Vậy 4 điểm B,C,I,O đều thuộc đường đối cực của điểm A nên chúng thẳng hàng.

c) Xét lục giác PPNBMQ có giao điểm của các cặp cạnh đối diện nằm trên một đường thẳng nên lục giác đó nội tiếp một conic nghĩa là điểm $R = NC \cap BM$ thuộc conic xác định bởi 4 điểm M,N,P,Q và tiếp xúc với đường thẳng BP tại P và đó chính là conic (S).

Đề số 7

Câu 1 : xem giáo trình lí thuyết .

Các phép dời trong $\mathbf{E}^2$: phép tịnh tiến, phép quay, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép đồng dạng và phép vị tự với tỉ số bằng 1.

Câu 2 :a) Ta có : [R] = a[P] + b[Q]

Thay tọa độ của P và Q vào phương trình trên ta thấy phương trình của R có dạng $bx_1 + 2bx_2 + ax_3 + 2bx_4 = 0$

Vì R đi qua điểm M(1,0,2, –1) nên ta có :

$$b + 2a - 2b = 0 \text{ hay } 2a - b = 0$$

Chọn a = 1 ta tính được b = 2. Do đó phương trình của R là :

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$$

b) Ta có :

$$\begin{matrix}[R] = a[P] + b[Q] \\ [S] = c[P] + d[Q]\end{matrix} \Leftrightarrow (PQRS) = \frac{b}{a} : \frac{d}{c}$$

Ta có R = [2,4,1,4], ta tính được a = 1, b = 2. Theo giả thiết (PQRS) =–1 nên ta có $\frac{b}{a} : \frac{d}{c}$ =–1. Chọn c =–1 ta tính được d = 2.

Giả sử $S = [u_1,u_2,u_3,u_4]$

Ta tính được $[u_1,u_2,u_3,u_4] = [2,4, -1,2]$.

Vậy S có phương trình $2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$

c) Đường thẳng A_1A_4 có phương trình : $x_2 = x_4 = 0$.

Gọi A,B,C,D lần lượt là giao điểm của đường thẳng với P,Q,R,S

A = (1,0,0,0)

B = (0,0,1,0)

C = (1,0, –2,0)

D = (1,0,2,0)

Ta có (ABCD) = (PQRS) = –1 nên ta suy ra A,B,C,D là một hàng điểm điều hòa.

Câu 3: a) Phương trình phép biến đổi xạ ảnh f:

$$\begin{cases} kx'_1 = x_1 \\ kx'_2 = x_2 \\ kx'_3 = -x_3 \\ kx'_4 = -x_4 \end{cases}$$

b) Tìm điểm kép : Ta có $(k-1)^2(k+1)^2 = 0$

Với $k = 1$ ta có tập hợp các điểm kép là đường thẳng d có phương trình $x_3 = x_4 = 0$.

Với $k = -1$ ta có tập hợp các điểm kép là đường thẳng d' có phương trình $x_1 = x_2 = 0$.

Ta dễ dàng thấy rằng hai đường thẳng này chéo nhau vì hệ phương trình tìm giao điểm có nghiệm tầm thường (0,0,0,0).

c) Lấy một điểm M không thuộc d và d'. Giả sử M = (p,q,r,s) trong đó các số p,q,r,s đều khác 0 (để M không thuộc d và d'). Ta có f(M) = (p,q, –r, –s) và như vậy f(M) ≠ M.

Đường thẳng MM' có phương trình $\lambda[M] + \mu[M'] = 0$.

Ta có :

$$\lambda\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} p \\ q \\ -r \\ -s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda p + \mu p \\ \lambda q + \mu q \\ \lambda r - \mu r \\ \lambda s - \mu s \end{bmatrix}$$

Do đó $U = MM' \cap d = ((\lambda+\mu)p, (\lambda+\mu)q, 0, 0) = (p, q, 0, 0)$

$V = MM' \cap d' = (0, 0, (\lambda-\mu)r, (\lambda-\mu)s) = (0, 0, r, s)$

Giả sử $[U] = \lambda_1[M] + \mu_1[M']$

$[V] = \lambda_2[M] + \mu_2[M']$

Thay tọa độ của U và V vào hệ thức trên ta tính được :

$$(MM'UV) = \frac{1}{-1} : \frac{1}{1} = -1$$

d) Gọi A' là ma trận của f ta có :

$A' \circ A' = I$ (ma trận đơn vị)

Do đó $f \circ f$ là phép đồng nhất.

Câu 4: Ta chuyển bài toán afin đã cho về bài toán xạ ảnh trong $\mathbf{P}^2$: Cho conic (S) và một đường thẳng cắt (S) tại 2 điểm I,J (đường thẳng IJ này đóng vai trò đường thẳng vô tận). Hai tiếp tuyến của conic tại I và J cắt nhau tại O (hai tiếp tuyến này đóng vai trò hai đường tiệm cận).

a) Một tiếp tuyến bất kì tiếp xúc với conic tại C cắt hai tiếp tuyến tại hai điểm A, B và cắt đường thẳng IJ tại D. Chứng minh rằng (ABCD) =−1.

b) Một đường thẳng chứa dây cung MN của conic cắt hai tiếp tuyến tại hai điểm P,Q và cắt đường thẳng IJ tại K. Nếu gọi H là điểm mà (MNHK) =−1 thì khi đó (PQHK) =−1. Ta giải bài toán xạ ảnh trên đây như sau :

α) Áp dụng định lí Brianchon vào lục giác OIACBJ ta có các đường thẳng OC,IB,AJ đồng quy tại E. Dựa vào tính chất của hình 4 cạnh toàn phần ta có (ABCD) =−1.

β) Gọi $S = PJ \cap IQ$ và $R = OS \cap IJ$. Theo tính chất của hình 4 cạnh toàn phần OSPQIJ ta có (IJRK) =−1 và do đó R thuộc đường đối cực của điểm K. Mặt khác đường đối cực của O là IJ đi qua K nên đường đối cực của K phải đi qua O. Vậy OR là đường đối cực của K nên OR phải đi qua H là điểm mà (MNHK) =−1. Mặt khác do tính chất của hình 4 cạnh toàn phần nói trên ta lại có (PQHK) =−1. Trở về bài toán afin ta có điểm K vô tận cùng với trung điểm của một đoạn thẳng chia điều hòa hai đầu mút của đoạn thẳng đó. Vậy trung điểm của đoạn MN và đoạn PQ trùng nhau.

Đề số 8

Câu 1: Xem giáo trình lí thuyết.

Tính được toạ độ điểm $E' = (1,...,1,0)$ và chỉ cần chứng minh rằng mỗi bộ n điểm trong n+1 điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n, E'\}$ là một hệ điểm độc lập bằng cách xét hạng ma trận tọa độ của chúng .

Câu 2 : a) Các điểm B_i độc lập, ta có phương trình tổng quát của siêu phẳng P :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{b_i} = 1$$

b) Theo ý nghĩa hình học của tỉ số đơn ta có :

$$x_i = (E_0 M_i E_i),\ b_i = (E_0 B_i E_i) \text{ với } i = 1, 2, ..., n.$$

Vậy $(E_oM_iB_i) = \dfrac{(E_oM_iE_i)}{(E_oB_iE_i)} = \dfrac{x_i}{b_i}$

Do đó $\sum_{i=1}^{n}(E_oM_iB_i) = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{b_i} = k$

Vì điểm M thuộc siêu phẳng P nên tọa độ của M phải thỏa mãn phương trình của P. Vậy k = 1 và như vậy k không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên P và ta có :

$$\sum_{i=1}^{n}(E_oM_iB_i) = 1$$

c) Ta có phương trình của siêu phẳng P là:

$$\frac{x_1}{b_1} + \frac{x_2}{b_2} + \dots + \frac{x_n}{b_n} = 1 \qquad (1)$$

trong đó các b_i (với i = 1,2,...,n) theo giả thiết phải thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{b_i} = n+1$ hay là :

$$\frac{1}{(n+1)b_1} + \frac{1}{(n+1)b_2} + \dots + \frac{1}{(n+1)b_n} = 1 \qquad (2)$$

Lấy (1) trừ đi (2) ta có :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}(x_i - \frac{1}{n+1}) = 0 \qquad (3)$$

Khi các điểm B_i thay đổi hệ thức (3) vẫn đúng khi và chỉ khi $x_i = \dfrac{1}{n+1}$ với i = 1,2,...,n. Vậy siêu phẳng P đi qua điểm cố định C có tọa độ $(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1}, \dots, \dfrac{1}{n+1})$.

Câu 3: a) Chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ sao cho các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ thuộc siêu phẳng P^{n-1}. Khi đó P^{n-1} có phương trình $x_{n+1} = 0$. Giả sử phép thấu xạ f được cảm sinh bởi phép biến đổi tuyến tính

$\varphi : \mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{V}^{n+1}$. Gọi $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_{n+1}}$ là các vectơ đại diện cho các điểm $A_1, \ldots, A_{n+1}$ của mục tiêu xạ ảnh. Vì $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các điểm kép (vì thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$) nên ta có :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_1'} &= k_1 \overrightarrow{e_1} \\
\overrightarrow{e_2'} &= k_2 \overrightarrow{e_2} \\
\ldots & \quad \ldots \\
\overrightarrow{e_n'} &= k_n \overrightarrow{e_n} \\
\overrightarrow{e_{n+1}'} &= b_1 \overrightarrow{e_1} + b_2 \overrightarrow{e_2} + \ldots + b_{n+1} \overrightarrow{e_{n+1}}
\end{aligned}$$

Trong $\mathbf{P}^{n-1}$ ta lấy một điểm $E' = (1,1,\ldots,1,0)$. Vì E' thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ nên $f(E') = E'$. (Điểm E' đóng vai trò điểm đơn vị đối với mục tiêu $\{E'; A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ của P^{n-1}).

$$\text{Ta có : } \vec{e} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e_i} \text{ và } \varphi(\vec{e}) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{e_i} \quad (1)$$

$$\text{mặt khác } \varphi(\vec{e}) = a\vec{e} = a(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} a\overrightarrow{e_i} \quad (2)$$

$$\text{So sánh (1) và (2) ta có : } \sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{e_i} - \sum_{i=1}^{n} a\overrightarrow{e_i} = \vec{0}$$

$$\text{hay } \sum_{i=1}^{n} (k_i - a)\overrightarrow{e_i} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad k_i = a \text{ với } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Đặt $b_i = a_i$ với $i = 1, 2, \ldots, n$ và $b_{n+1} = a_{n+1} + a$ ta có ma trận chuyển A :

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & \ldots & 0 & 0 \\ .. & & \ldots & & .. \\ 0 & 0 & \ldots & a & 0 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a + a_{n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} a & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & a & \ldots & 0 & a_2 \\ .. & & \ldots & & .. \\ 0 & 0 & \ldots & a & a_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a + a_{n+1} \end{bmatrix}$$

phương trình của f có dạng $k[x'] = A^*[x]$

b) Tìm điểm kép (xem bài tập 3.35 của phần không gian xạ ảnh)

–Nếu mọi $a_i = 0$ ta có f là phép đồng nhất .

–Nếu có một $a_i \neq 0$ và $a_{n+1} = 0$ ta có siêu phẳng $x_{n+1} = 0$ chứa toàn điểm kép.

–Nếu $a_{n+1} \neq 0$ siêu phẳng $x_{n+1} = 0$ chứa toàn điểm kép đồng thời lại có thêm 1 điểm kép có tọa độ $(a_1, a_2, ..., a_{n+1})$ không thuộc siêu phẳng đó.

Câu 4 : Ta biết rằng đường parabol trong mô hình xạ ảnh của mặt phẳng afin là đường conic tiếp xúc với đường thẳng vô tận d. Ta chuyển bài toán đã cho về bài toán xạ ảnh sau đây :

Một conic (S) biến thiên luôn tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC cho trước lần lượt tại A',B',C' và tiếp xúc với đường thẳng d tại D (đường thẳng d này không đi qua các đỉnh A,B,C của tam giác). Gọi E,F,G lần lượt là giao điểm của d với BC,CA,AB. Gọi $H = BF \cap CG$, $I = AE \cap CG$, $K = AE \cap BF$.

a) Chứng minh các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

b) Chứng minh các điểm H,I,K theo thứ tự thuộc các đường thẳng B'C', C'A', A'B'.

Ta giải bài toán xạ ảnh trên đây như sau :

a) Áp dụng định lí Brianchon vào lục giác C'BA'CB' ngoại tiếp conic ta có AA', BB', CC' đồng quy.

b) Áp dụng định lí Brianchon vào :

– lục giác BCB'FGC' ngoại tiếp conic ta có B'C', BF, CG đồng quy tại H.

– lục giác ACA'EGC' ngoại tiếp conic ta có A'C', AE, CG đồng quy tại I.

– lục giác ABA'EFB' ngoại tiếp conic ta có A'B', AE, BF đồng quy tại K.

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu	3
CHƯƠNG I. **BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN AFIN VÀ HÌNH HỌC AFIN**	
A. Tóm tắt lí thuyết	5
B. Đề bài tập	24
C. Hướng dẫn và giải	37
CHƯƠNG II. **BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN ƠCLIT VÀ HÌNH HỌC ƠCLIT**	
A. Tóm tắt lí thuyết	112
B. Đề bài tập	130
C. Hướng dẫn và giải	142
CHƯƠNG III. **BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN XẠ ẢNH VÀ HÌNH HỌC XẠ ẢNH**	
A. Tóm tắt lí thuyết	204
B. Đề bài tập	247
C. Hướng dẫn và giải	264
CHƯƠNG IV. **ÔN TẬP**	
A. Các dạng bài tập	328
B. 8 đề toán ôn tập	344

BÀI TẬP HÌNH HỌC CAO CẤP

In 1000 cuốn, khổ 14,5 x 20,5 cm. Tại Công ty CP in Anh Việt.
Số đăng ký KHXB: 11 - 2007/ CXB/269 - 2119/GĐ.
In xong nộp lưu chiểu Quý I năm 2007.

SÁCH ĐẠI HỌC MÔN TOÁN NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN	Đặng Đình Áng
ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (chương trình A3)	Nguyễn Cao Thắng
GIẢI TÍCH HÀM	Đậu Thế Cấp
HÀM MỘT BIẾN PHỨC	Đậu Thế Cấp
BÀI TẬP HÀM BIẾN PHỨC	Đậu Thế Cấp
HÌNH HỌC CAO CẤP	Nguyễn Mộng Hy
BÀI TẬP HÌNH HỌC CAO CẤP	Nguyễn Mộng Hy
LÍ THUYẾT TÍCH PHÂN	Đặng Đình Áng
LÍ THUYẾT XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ	Đinh Văn Gắng
BÀI TẬP XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ	Đinh Văn Gắng
NHẬP MÔN GIẢI TÍCH	Đặng Đình Áng
PHÉP TÍNH VI TÍCH PHÂN T1, T2	Phan Quốc Khánh
QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH	Phan Quốc Khánh- Trần Huệ Nương
TOÁN CAO CẤP T1: *Phép tính vi tích phân hàm một biến và lí thuyết chuỗi*	Lê Thị Thiên Hương-
TOÁN CAO CẤP T2: *Đại số tuyến tính*	Nguyễn Viết Đông- Nguyễn Anh Tuấn- Lê Anh Vũ
BÀI TẬP TOÁN CAO CẤP T1, T2	
NHỮNG BẤT NGỜ LÍ THÚ VỚI CƠ HỌC LÍ THUYẾT	Trịnh Phôi
TOÁN OLYMPIC CHO SINH VIÊN T1	Trần Lưu Cường
TOÁN OLYMPIC CHO SINH VIÊN T2	Trần Lưu Cường
VẬN TRÙ HỌC	Phan Quốc Khánh

cuu duong than cong . com

Bạn đọc có thể mua sách tại các Công ti Sách – Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục :

- **Tại TP. Hà Nội** : 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ; 25 Hàn Thuyên.
- **Tại TP. Đà Nẵng** : 15 và 62 Nguyễn Chí Thanh.
- **Tại TP. Hồ Chí Minh** : 104 Mai Thị Lựu, Quận 1 ; 451 B – 453, Hai Bà Trưng, Quận 3 ; 240 Trần Bình Trọng, Quận 5.
- **Tại TP. Cần Thơ** : 5/5, đường 30/4.

Website : www.nxbgd.com.vn

8934980759677

Giá : 26.700đ