TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
12 2009
Số 390

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 46
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

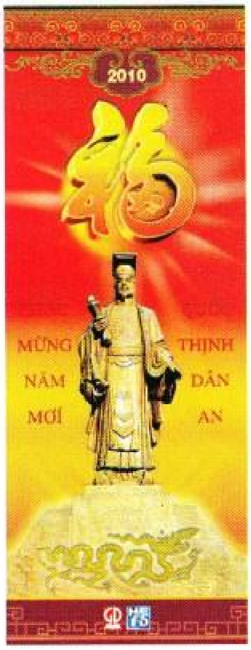
45 năm
1964 - 2009

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Chào mừng Lễ kỉ niệm 45 năm
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

LỊCH GIÁO DỤC

MỘT KÊNH THÔNG TIN THIẾT THỰC VỚI HỌC SINH



Xác định mục đích xuất bản các ấn phẩm phục vụ hoạt động dạy - học trong nhà trường là quan trọng hàng đầu, NXB Giáo dục Việt Nam đã thực hiện những cuốn lịch mang đậm chất "giáo dục" ngay từ cách lựa chọn hình ảnh, màu sắc sao cho hiệu quả thẩm mĩ đạt cao nhất. Nhưng quan trọng hơn là sự lựa chọn những câu danh ngôn, châm ngôn, những câu ca dao, tục ngữ, những câu nói nổi tiếng trên thế giới... nhằm mục đích giáo dục thẩm mĩ và nhân cách cho học sinh. Thông tin đưa vào lịch thiết thực với các em ở lứa tuổi phổ thông, mang đến những bài học luân lí giúp các em trở thành người có ích cho xã hội. Như: *Sách là vốn phải mang luôn, Nhân tài quý báu nước non cần dùng* (Lễ Kí); *Nhà ta coi chữ hơn vàng, Coi tài hơn cả giàu sang trên đời* (Nguyễn Bính)...

Không chỉ dừng lại ở đó, lịch giáo dục còn lựa chọn những danh nhân văn hóa, những nhà giáo ưu tú cùng những thành tựu nổi bật của họ để giới thiệu với học sinh. Mỗi ngày trước khi đi học, các em xem lịch để chuẩn bị sách vở theo thời khóa biểu. Cũng nhân đó, các em có dịp tìm hiểu thêm những thông tin bổ ích rất gần với những bài học trong SGK. Như thông tin về nhà giáo Chu Văn An, về cố Bộ trưởng Bộ Giáo dục Nguyễn Văn Huyên, hoặc vua Lý Thái Tổ đã dời đô về thành Thăng Long – Hà Nội ngày nay như thế nào... Ví dụ: *Nhà sử học Phan Huy Chú (1782 – 1840) là tác giả của công trình biên khảo lớn một tập bách khoa thư đương thời: bộ* ***Lịch triều hiến chương loại chí*** *gồm 49 quyển. Đây là một kho tài liệu sử học, là công trình nghiên cứu tiêu biểu đánh dấu thành tựu khoa học của nước ta đầu thế kỷ XIX.* Hay cho biết những thông tin về địa danh nổi tiếng ở Hà Nội: *Quảng trường Ba Đình là trái tim của Hà Nội. Tại đây, ngày 2/9/1945 nửa triệu đồng bào Hà Nội và phụ cận đã đổ về Quảng trường, lắng nghe Bác Hồ đọc Tuyên ngôn độc lập khai sinh nước Việt Nam Dân chủ Cộng hòa. Ngày 9/9/1969, cũng tại đây, mười vạn đồng bào thủ đô và các địa phương cùng 34 đoàn quốc tế đã dự lễ truy điệu Người...*

Mưa dầm thấm lâu, những câu nói, những thông tin ngắn gọn nhưng cô đọng, súc tích và dễ nhớ sẽ giúp các em ghi sâu trong lòng những kiến thức về văn học, về lịch sử đã được nhắc đến trong sách giáo khoa, mở rộng thêm những kiến thức mà sách giáo khoa chưa đề cập.

Ngay đối với các giáo viên, lịch giáo dục cũng được coi là kênh thông tin bổ ích hỗ trợ hoạt động dạy học. Cô giáo trẻ Phan Hồng Hạnh, giáo viên Văn trường THPT Quốc gia Chu Văn An đã nói ngay rằng, cô có thể sử dụng những thông tin đó làm thành những đề văn nghị luận xã hội cho học sinh,như: *Học hỏi là một việc phải tiếp tục suốt đời; Không ai có thể tự cho mình biết đủ rồi, biết hết rồi (Hồ Chí Minh); Học chữ nghĩa thì dễ, học cho nên người thì khó* (Sevigne)...

Các cụ ta xưa có câu TIÊN HỌC LỄ HẬU HỌC VĂN. Điều đó cho thấy, giáo dục các em trở thành người có ích cho gia đình và xã hội là yêu cầu trước tiên đối với các trường học. N.Mandela đã nói "*Giáo dục là thứ vũ khí mạnh nhất mà người ta có thể sử dụng để thay đổi cả thế giới*". Những sản phẩm của NXB Giáo dục Việt Nam chưa đạt tới mục đích lớn lao như vậy, nhưng mong muốn góp phần giáo dục tri thức, giáo dục nhân cách, giáo dục thẩm mĩ cho học sinh, sinh viên là mục tiêu cao nhất mà NXB Giáo dục Việt Nam theo đuổi.

BẠCH KIM

LỊCH GIÁO DỤC CÓ BÁN TẠI:

Hà Nội: 187B Giảng Võ, 67B Cửa Bắc, 32E Kim Mã, 23 Tràng Tiền, 232 Tây Sơn;
Đà Nẵng: 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng;
TP. Hồ Chí Minh: 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5;
Công ty Sách - TBTH các tỉnh, các đại lý trên toàn quốc.

Thư từ BAN BIÊN TẬP

Các bạn đọc *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* thân mến!

Tờ *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* được thành lập vào ngày 15/10/1964 theo sáng kiến của Ban Vận động thành lập Hội Toán học Việt Nam và công sức của các Giáo sư *Tạ Quang Bửu, Lê Văn Thiêm, Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng Tụy, Hoàng Chúng,...* và nhiều thầy cô giáo khác.

Sự trưởng thành của tạp chí mang một ý nghĩa rất lớn trong sự nghiệp giáo dục và đào tạo Thế hệ trẻ Việt Nam, góp phần nâng cao dân trí, đào tạo tài năng cho đất nước. Ngoài tôn chỉ mục đích đó, tạp chí còn có nhiều đóng góp cho các phong trào hoạt động liên quan đến giáo dục, điển hình là Phong trào thi đua *Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực* trong các trường phổ thông giai đoạn 2008 - 2013 do Bộ Giáo dục và Đào tạo phát động.

Nhiều bạn đọc của tạp chí nay đã trở thành những nhà Toán học, các nhà Khoa học có uy tín, các nhà Quản lí giỏi, các nhà Kinh doanh có tài. Nhiều em học sinh đoạt giải của báo cũng đoạt giải cao trong các Kì thi Olympic Quốc gia, Quốc tế, Khu vực. Các tỉnh, thành có nhiều học sinh giải bài của tạp chí cũng là những tỉnh có thành tích cao trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng trên toàn quốc.

Thông qua các chuyên mục của tạp chí các bạn học sinh được phát triển tư duy nhạy bén, chính xác, rèn luyện trí tuệ minh mẫn, đó là một trong những *điều kiện cần* để các bạn trở thành những công dân có ích cho xã hội. Cùng với sự thương yêu giáo dục của cha mẹ, sự tận tâm dạy dỗ của các thầy cô giáo; hình thành trong các bạn học sinh một trái tim nhân ái, đó là một trong những điều kiện đủ để các bạn trở thành nhân tài của đất nước.

Từ những ý nghĩa đó, *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* thực sự là người bạn đồng hành của các thầy cô giáo và các em học sinh trong việc giáo dục con em mình ở trường và ở nhà. Tờ báo như một món ăn tinh thần không thể thiếu được trong tủ sách của mọi gia đình, trong tài liệu tham khảo của các thầy cô giáo, trong đời sống hàng ngày của các bạn học sinh.

Mong rằng các trường phổ thông tích cực động viên, khích lệ bằng nhiều hình thức để ngày càng có nhiều em học sinh yêu thích và say mê đọc *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*.

Nhân dịp *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* tròn 45 tuổi, Ban biên tập Tòa soạn chúc các Ủy viên Hội đồng Biên tập, các cộng tác viên, các bạn đọc gần xa dồi dào sức khoẻ, tiếp tục cộng tác chặt chẽ với tạp chí để phát hiện và bồi dưỡng nhiều nhân tài cho đất nước.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

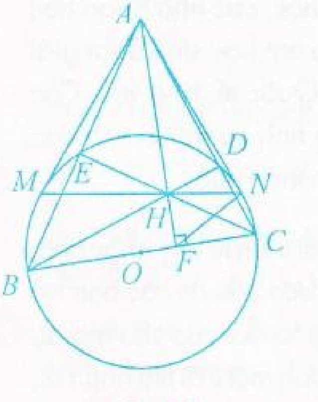
DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT TÍNH CHẤT CỦA TRỰC TÂM TAM GIÁC

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hoà)

Trong bài viết này ta sẽ sử dụng một tính chất khá thú vị của trực tâm tam giác để giải một số bài toán. Tính chất thú vị đó như sau:

Bài toán 1. *Trực tâm của một tam giác luôn nằm trên đường thẳng nối hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến kẻ từ một đỉnh đến đường tròn đường kính là cạnh nối hai đỉnh còn lại của tam giác đó.*



Hình 1

Lời giải. (h. 1) Giả sử ΔABC có ba đường cao AF, BD, CE cắt nhau tại H. AM và AN là hai tiếp tuyến (M, N là tiếp điểm) của đường tròn (O) đường kính BC. Ta có M, A, N, F, O cùng thuộc đường tròn đường kính OA nên $\widehat{ANM} = \widehat{AFN}$ (1)

Mặt khác, vì $\Delta ADH \backsim \Delta AFC$, $\Delta ADN \backsim \Delta ANC$
$\Rightarrow AH.AF = AD.AC = AN^2 \Rightarrow \dfrac{AH}{AN} = \dfrac{AN}{AF}$. Suy ra $\Delta ANH \backsim \Delta AFN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ANH} = \widehat{AFN}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{ANH} \Rightarrow H \in MN$.

Nếu ΔABC vuông tại B hoặc C thì $H \equiv M$ hoặc $H \equiv N$, ta có điều phải chứng minh. ❐

Bây giờ ta sẽ sử dụng Bài toán 1 để giải một số bài toán khác

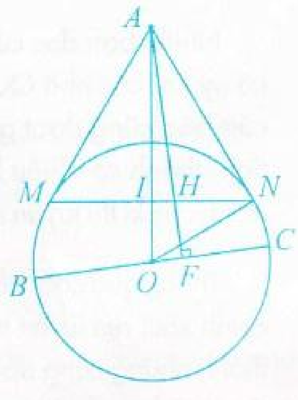
Bài toán 2. *Từ một điểm A ở ngoài đường tròn $(O\ ;\ R)$ kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M và N là hai tiếp điểm). Kẻ đường kính BC không cắt dây cung MN. Gọi H là trực tâm tam giác ABC.*

a) Chứng minh rằng $AH < \sqrt{OA^2 - \dfrac{MN^2}{4}}$.

b) Gọi AF là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng $HA.HF = R^2 - OH^2$.

c) Xác định vị trí của BC để OH ngắn nhất.

Lời giải. (h. 2)



Hình 2

a) Theo Bài toán 1 và do BC không cắt MN nên H nằm giữa M và N. Ta có $\widehat{AHN} > \widehat{AMN} = \widehat{ANM}$, suy ra

$AH < AN$
$= \sqrt{OA^2 - ON^2}$
$= \sqrt{OA^2 - \dfrac{BC^2}{4}}$
$< \sqrt{OA^2 - \dfrac{MN^2}{4}} \Rightarrow AH < \sqrt{OA^2 - \dfrac{MN^2}{4}}$.

b) Vì các điểm M, A, N, F, O cùng thuộc đường tròn đường kính OA nên

$HM.HN = HA.HF$ (1)

Gọi I là giao điểm của OA và MN thì có

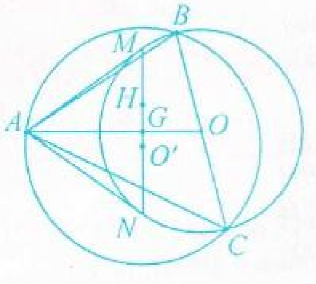
$HM.HN = (IM + IH)(IM - IH) = IM^2 - IH^2$
$= OM^2 - OI^2 - (OH^2 - OI^2) = R^2 - OH^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HA.HF = R^2 - OH^2$.

c) Ta có $OH \geq OI$. Do đó OH ngắn nhất $\Leftrightarrow OH = OI \Leftrightarrow H \equiv I \Leftrightarrow A, H, O$ thẳng hàng $\Leftrightarrow BC \perp OA$. ❐

✪Bài toán 3. *Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O đường kính BC = 2R kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M và N là tiếp điểm). Xác định vị trí điểm A để tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trên đường thẳng MN.*

Lời giải. (h. 3) Gọi O', G, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm và trực tâm của tam giác ABC. Khi đó ba điểm O', G, H thẳng hàng (đường thẳng Euler) và theo Bài toán 1 ta có $H \in MN$. Do đó $O' \in MN \Leftrightarrow G \in MN$.

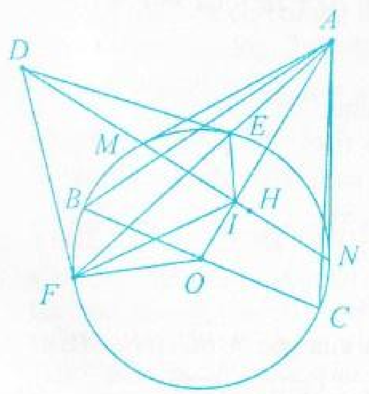


Hình 3

Từ hệ thức lượng trong tam giác vuông AOM ta có $OM^2 = OG.OA = \frac{1}{3}OA^2 \Leftrightarrow OA = R\sqrt{3}$.

Vậy A thuộc đường tròn $(O, R\sqrt{3})$. ❐

✪Bài toán 4. *Từ một điểm D ở ngoài đường tròn (O) đường kính BC kẻ hai tiếp tuyến DE và DF với đường tròn (E, F là tiếp điểm). Trên đường thẳng EF lấy điểm A ở phía ngoài (O). Kẻ tiếp tuyến AN với đường tròn (O) (N là tiếp điểm). Chứng minh rằng DN đi qua trực tâm H của tam giác ABC.*



Hình 4

Lời giải. (h. 4) Kẻ tiếp tuyến thứ hai AM ($M \in (O)$). Gọi $I = AO \cap MN$. Ta có $AE.AF = AN^2$ và $AI.AO = AN^2$. Suy ra $AE.AF = AI.AO$ $\Rightarrow \frac{AE}{AO} = \frac{AI}{AF}$.

Từ đó $\Delta AIE \backsim \Delta AFO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AIE} = \widehat{AFO}$. Vậy tứ giác $EIOF$ nội tiếp. Suy ra các điểm D, E, I, O, F cùng thuộc đường tròn đường kính DO.

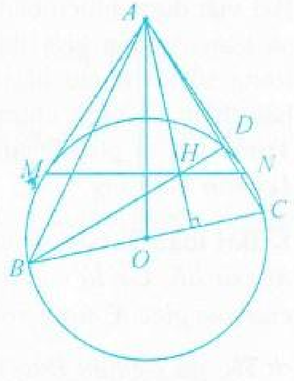
Do đó $\widehat{DIO} = \widehat{MIO} = 90° \Rightarrow D, M, I, N$ thẳng hàng. Áp dụng Bài toán 1 suy ra $H \in MN$, do đó DN đi qua H. ❐

✪Bài toán 5. *Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O). BC là một đường kính của đường tròn (O). Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác ABC khi BC thay đổi.*

Lời giải. (h. 5)

Thuận. Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN của đường tròn (O). Theo Bài toán 1 suy ra H thuộc đường MN cố định.

Đảo. Lấy điểm H bất kì thuộc MN. Kẻ đường kính $BC \perp AH$. Gọi D là giao điểm thứ hai của AC với (O) và $H' = AH \cap BD$. Khi đó H' là trực tâm ΔABC. Theo phần thuận thì $H' \in MN \Rightarrow H' \equiv H$. Vậy H là trực tâm ΔABC.



Hình 5

Do đó quỹ tích trực tâm H của ΔABC là đường thẳng MN. ❐

Cuối cùng, mời bạn đọc sử dụng tính chất thú vị trên để giải các bài tập sau.

1. Từ điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O) đường kính BC, kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M, $N \in (O)$). Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Xác định vị trí của BC để $HM = 2HN$.

2. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M, $N \in (O)$). H là điểm nằm giữa M và N. Kẻ đường kính BC vuông góc với AH tại F. BH và CH lần lượt cắt (O) tại giao điểm thứ hai D, E. Chứng minh rằng $\widehat{MFE} = \widehat{NFD}$.

Ý kiến bạn đọc

VỀ BÀI TOÁN STEINER-LEHMUS MỞ RỘNG

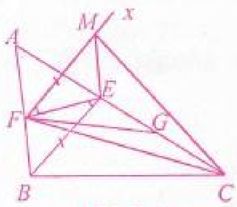
LTS. *Trên THTT số 388, tháng 10/2009, tác giả Nguyễn Minh Hà đã chứng minh Bài toán Steiner-Lehmus mở rộng bằng kiến thức lớp 7, trong đó sử dụng bài toán thú vị sau:*

✪**Bài toán 1.** *Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và BE, CF thứ tự là các đường phân giác trong của tam giác. Chứng minh rằng $BF < CE$.*

Bài viết được nhiều bạn đọc yêu thích. Trong số báo này xin giới thiệu cùng bạn đọc hai trong số rất nhiều bài viết gửi về Toà soạn bàn thêm về cách chứng minh cho bài toán. Trước hết ta phát biểu lại Bài toán *Steiner-Lehmus mở rộng.*

✪**Bài toán 2.** *Giả sử tam giác ABC có $AB \le AC$ và BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác. Chứng minh rằng $BE \le CF$.*

★Tác giả *Nguyễn Đức Tấn* (TP. Hồ Chí Minh) đóng góp thêm một cách chứng minh Bài toán 2:



Hình 1

• Nếu $AB < AC$, trên nửa mặt phẳng bờ EF không chứa B vẽ tia Fx sao cho $\widehat{EFx} = \widehat{BEF}$ h.1). Trên tia Fx lấy điểm M sao cho $FM = BE$.

Từ $\Delta EFM = \Delta FEB$ (c.g.c) suy ra $BF = EM$ và $\widehat{EBF} = \widehat{EMF}$. Theo Bài toán 1 có $BF < CE \Rightarrow EM < CE$, suy ra $\widehat{ECM} < \widehat{EMC}$ (1)

Từ $\widehat{ACB} < \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ACF} < \widehat{EBF} = \widehat{EMF}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{MCF} < \widehat{CMF} \Rightarrow BE = FM < CF$.

• Nếu $AB = AC$ thì dễ thấy $BE = CF$.

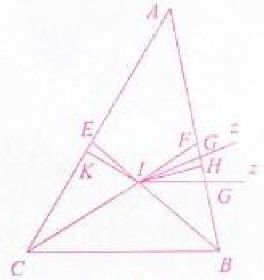
Vậy $BE \le CF$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AB = AC$. ❐

★Tác giả *Nguyễn Sang* (Hà Nội) sưu tầm được một chứng minh khác của Bài toán 2 của *Roger Cooke* chỉ sử dụng kiến thức lớp 7:

Chỉ cần xét trường hợp $AB < AC \Leftrightarrow \widehat{ABC} > \widehat{ACB}$.

• Nếu $\widehat{CEB} < 90°$ (h. 2) thì

$\widehat{CEB} - \widehat{CFB} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} - \widehat{ACB}) \Rightarrow \widehat{CFB} < \widehat{CEB} < 90°$.



Hình 2

Gọi $I = BE \cap CF$, kẻ $IH \perp AB$, $IK \perp AC$. Suy ra $IH = IK$ và H thuộc đoạn FB.

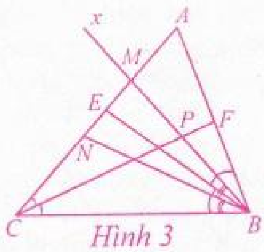
Thật vậy, nếu trái lại F thuộc đoạn BH hoặc B thuộc đoạn FH thì $\widehat{IFB} > \widehat{IHF} = 90°$ hoặc $\widehat{IBF} > \widehat{IHB} = 90°$, mâu thuẫn với các góc $\widehat{IBF}$, $\widehat{IFB}$ đều nhọn. Tương tự ta có K thuộc đoạn EC. Vì ΔIHF và ΔIKE vuông có $\widehat{CFB} < \widehat{CEB}$ nên $\widehat{KIE} < \widehat{HIF}$.

Kẻ tia Iz cắt AB tại G sao cho $\widehat{zIH} = \widehat{KIE}$, suy ra G thuộc đoạn FH hoặc đoạn HB. Do đó $\Delta IKE = \Delta IHG$ (g.c.g) $\Rightarrow IG = IE$ và $\widehat{IGH} = \widehat{IEK}$.

Nếu G thuộc đoạn FH thì $\widehat{IGF} > 90° > \widehat{IFG} \Rightarrow IF > IG = IE$. Nếu G thuộc đoạn HB thì trong ΔIGF có $\widehat{IGF} > \widehat{IFG} \Rightarrow IF > IG = IE$ (1)

Mặt khác từ $\widehat{ICB} < \widehat{IBC} \Rightarrow IB < IC$ (2). Kết hợp (1) và (2) ta có $BE = BI + IE < CI + IF = CF$.

• Với $\widehat{CEB} \ge 90°$.



Hình 3

Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A, kẻ tia Bx cắt AC tại M sao cho $\widehat{xBC} = \widehat{ACB}$ (h.3). Suy ra $\widehat{CBx} < \widehat{CBA}$. Do đó M thuộc đoạn AC.

Kẻ tia phân giác BN của góc $\widehat{MBC}$ ($N \in AC$), ta có $\widehat{CBN} = \frac{1}{2}\widehat{CBM} < \frac{1}{2}\widehat{CBA} = \widehat{CBE}$,

suy ra N thuộc đoạn $EC \Rightarrow BN > BE$ (3)

Gọi $P = BM \cap CF \Rightarrow BN = CP$ và $CP < CF$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $BE < BN = CP < CF$. ❐

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI
Năm học 2009 - 2010

(Đề thi đã đăng trên THHH số 389, tháng 11 năm 2009)

Câu 1. 1) Ta có $P=\sqrt{15a^2-8a\sqrt{15}+16}$

$=\sqrt{\left(a\sqrt{15}-4\right)^2}=\left|a\sqrt{15}-4\right|$.

Thay $a=\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{8}{\sqrt{15}}$ vào ta được $P = 4$.

2) ĐK $-\sqrt{10} \le x \le \sqrt{10}$. Đặt $u=\sqrt{25-x^2}$, $v=\sqrt{10-x^2}$ ($u \ge 0$, $v \ge 0$). Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} u-v=3 \\ u^2-v^2=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=3 \\ u+v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=1. \end{cases}$$

Suy ra $\sqrt{25-x^2}=4 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow$ hoặc $x = 3$ hoặc $x = -3$ (thoả mãn ĐK).

Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x = 3$ hoặc $x = -3$.

3) ĐK $\Delta = m^2 - 4n \ge 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của PT. Ta có $x_1 + x_2 = -m$ và $x_1x_2 = n$. Ngoài ra, theo giả thiết, ta có

$$25 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = m^2 - 4n \quad (1)$$

$$35 = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)((x_1 + x_2)^2 - x_1x_2) = 5(m^2 - n) \quad (2)$$

Giải hệ gồm hai PT (1), (2) tìm được hai giá trị $(m\,;n)$ là $(1\,;-6)$ và $(-1\,;-6)$.

Câu 2. 1) Vì $b \ne 3$ và b là số nguyên tố nên $b^2 - 1 \,\vdots\, 3 \Rightarrow A = 3(n + 1 + 669b^2) + 2(b^2 - 1) \,\vdots\, 3$.

Dễ thấy $A > 3$, suy ra A là hợp số.

2) Giả sử $n^2 + 18n + 2020$ là số chính phương, suy ra tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho

$n^2 + 18n + 2020 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n + 9)^2 = 1939$

$\Leftrightarrow (m - n - 9)(m + n + 9) = 1939 = 1939.1 = 277.7$

$\Leftrightarrow$ hoặc $\begin{cases} m+n+9=1939 \\ m-n-9=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m+n+9=277 \\ m-n-9=7. \end{cases}$

Từ đó tìm được 2 giá trị của n là 960 và 126.

Câu 3. Ta có $(x + 2010)^2 \ge 4.2010.x$. Suy ra

$$N=\frac{x}{(x+2010)^2} \le \frac{1}{8040}.$$

Vậy $\max N = \frac{1}{8040}$, đạt được khi $x = 2010$.

Câu 4. (h. 1)

1) Ta có

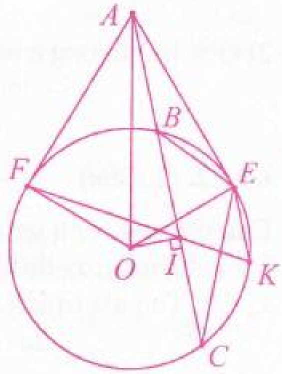
$\widehat{AEB}=\widehat{ACE}$

$\Rightarrow \Delta AEB \backsim \Delta ACE$

$\Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{AB}{AE}$

$\Rightarrow AF^2=AE^2=AB.AC$ (không đổi).

Vậy E và F luôn nằm trên đường tròn cố định tâm A bán kính $\sqrt{AB.AC}$.



Hình 1

2) Ta có $\widehat{AIO}=\widehat{AEO}=\widehat{AFO}=90°$ nên các điểm A, E, I, O, F cùng thuộc đường tròn đường kính AO. Suy ra $\widehat{AEF}=\widehat{AIF}$. Mà $\widehat{AEF}=\widehat{EKF}$, suy ra $\widehat{EKF}=\widehat{AIF}$ (vị trí đồng vị). Do đó $EK \,//\, AB$.

Câu 5. 1) Gọi R là bán kính đường tròn (O).

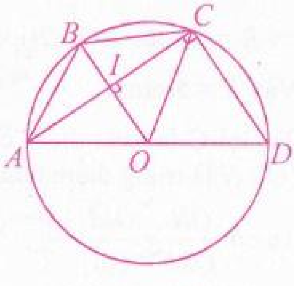
Vì $AB = BC$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$

$\Rightarrow OB \perp AC$ tại I và $IA = IC$ (h. 2).

Vậy $OB \,//\, CD$

$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}CD = 3$.



Hình 2

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA
Năm học 2009 - 2010

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (2 *điểm*)

1) Cho x ($x \in \mathbb{R}$; $x > 0$) thỏa mãn điều kiện $x^2+\frac{1}{x^2}=7$. Tính giá trị các biểu thức

$A=x^3+\frac{1}{x^3}$ và $B=x^5+\frac{1}{x^5}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{y}}=2 \\ \frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}=2. \end{cases}$

Câu 2. (2 *điểm*)

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $0 \le x_1 \le x_2 \le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q=\frac{2a^2-3ab+b^2}{2a^2-ab+ac}.$$

Câu 3. (2 *điểm*)

1) Giải phương trình

$\sqrt{x-2}+\sqrt{y+2009}+\sqrt{z-2010}=\frac{1}{2}(x+y+z)$.

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p^2+1$ và $6p^2+1$ cũng là số nguyên tố.

Câu 4. (3 *điểm*)

1) Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Một đường thẳng qua A, cắt cạnh BC tại M và cắt đường thẳng CD tại N. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng EM và BN. Chứng minh rằng $CK \perp BN$.

2) Cho đường tròn (O) bán kính $R = 1$ và một điểm A sao cho $OA = \sqrt{2}$. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Một góc xOy có số đo bằng $45°$ có cạnh Ox cắt đoạn thẳng AB tại D và cạnh Oy cắt đoạn thẳng AC tại E. Chứng minh rằng

$$2\sqrt{2}-2 \le DE < 1.$$

Câu 5. (1 *điểm*)

Cho biểu thức $P=a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd$, trong đó $ad-bc=1$. Chứng minh rằng $P \ge \sqrt{3}$.

PHẠM NGỌC QUANG
(*Sở GD-ĐT Thanh Hóa*) giới thiệu

Áp dụng định lí Pythagore ta có

$IC^2=OC^2-OI^2=BC^2-BI^2$. Suy ra

$R^2-9=20-(R-3)^2 \Leftrightarrow R^2-3R-10=0$

$\Leftrightarrow R=5$ hoặc $R=-2$(loại).

Vậy $R=5$(cm).

2) Gọi C là giao điểm của OA và đường tròn (O), N là trung điểm của OC (h. 3).

Ta có $\frac{ON}{OM}=\frac{OM}{OA}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \Delta ONM \backsim \Delta OMA \Rightarrow AM=2MN$.

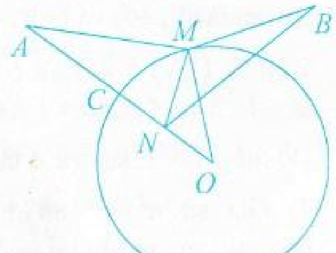
Vậy theo BĐT trong tam giác MNB ta có

$MA+2MB$

$=2MN+2MB$

$\ge 2BN$ (không đổi).

Vậy $MA+2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2BN$ khi M là giao điểm của BN và (O).



Hình 3

TRẦN VĂN HẠNH
(*GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi*) giới thiệu

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ, MŨ VÀ LÔGARIT

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Trong các đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng thường xuyên có bài về phương trình (PT), bất phương trình (BPT) vô tỉ hoặc mũ, lôgarit. Những bài toán thuộc loại này có thể ở dạng cơ bản dành cho học sinh trung bình nhưng cũng có thể là một câu khó để phân loại học sinh. Bài viết này giúp các bạn hệ thống lại các dạng toán thường gặp và những lưu ý cần thiết khi giải chúng. Trong các thí dụ, bạn đọc tự tính ra đáp số khi cách giải đã rõ ràng.

I. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

1. Phương pháp biến đổi tương đương

Lưu ý 1. *Khi giải BPT có chứa căn bậc hai, sau khi biến đổi, ta thường đưa về một trong hai dạng sau:*

• BPT $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$

• BPT $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$

★***Thí dụ 1.*** *Giải bất phương trình*

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} > \sqrt{x-3}.$$

Cách giải. ĐK $x \ge 3$. BPT tương đương với

$\sqrt{x-1} > \sqrt{x-3} + \sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-3)(x-2)} < 4 - x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x < 4 \\ 4(x-3)(x-2) < (4-x)^2 \end{cases}$

Giải hệ trên, ta tìm được nghiệm của BPT đã cho.

2. Phương pháp đặt ẩn số phụ

Lưu ý 2. *Khi giải PT* $\sqrt[3]{ax+b} + \sqrt{cx+d} = m$.

Ta đặt $u = \sqrt[3]{ax+b}$; $v = \sqrt{cx+d} \ge 0$.

Ta được hệ PT $\begin{cases} u + v = m \\ \dfrac{u^3 - b}{a} = \dfrac{v^2 - d}{c}. \end{cases}$

★***Thí dụ 2.*** *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{x+5} + \sqrt{4-x} = 3.$$

Cách giải. Đặt $u = \sqrt[3]{x+5}$; $v = \sqrt{4-x} \ge 0$.

Ta được $\begin{cases} u + v = 3 \\ u^3 + v^2 = 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ u^3 + (3-u)^3 = 9 \end{cases}$

Tìm được u, v. Từ đó suy ra x.

II. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1. Phương pháp lôgarit hóa

Lưu ý 3. *Khi giải PT dạng $a^u b^v = c$, trong đó $a, b, c > 0$; còn u, v là các biểu thức có chứa ẩn số ta thường lôgarit đưa về $u + v\log_a b = \log_a c$.*

★***Thí dụ 3.*** *Giải phương trình* $3^{x^2-2}.4^{\frac{2x-3}{x}} = 18$.

Lời giải. ĐK $x \ne 0$. PT đã cho tương đương với

$$\log_3\left(3^{x^2-2}.4^{\frac{2x-3}{x}}\right) = \log_3 18$$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 + \dfrac{4x-6}{x}.\log_3 2 = 2 + \log_3 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 + \dfrac{3(x-2)}{x}.\log_3 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+3\log_3 2)=0.$

Tìm được $x=2$. ❐

2. Sử dụng công thức biến đổi lôgarit để đưa về cùng cơ số

***Lưu ý 4**. Trong PT lôgarit mà cơ số và biểu thức dưới dấu lôgarit đều có dạng $a^\alpha x^\beta$ thì ta sử dụng công thức biến đổi lôgarit để đưa tất cả các số hạng về cùng cơ số a. Sau đó đặt $t=\log_a x$.*

★ ***Thí dụ 4**. Giải phương trình*

$$\log_{2x}\left(\frac{x^3}{2}\right)+\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=2.$$

***Lời giải**.* ĐK $x>0$; $x\neq\frac{1}{2}$. Ta có

$$\frac{\log_2\left(\frac{x^3}{2}\right)}{\log_2 2x}+2\log_2\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\log_2 x-1}{1+\log_2 x}+2\left(1-\frac{1}{2}\log_2 x\right)=2.$$

Đặt $t=\log_2 x\,(t\neq -1)$. Ta được PT $\frac{3t-1}{t+1}-t=0$. Tìm được $t=1$ nên $x=2$. ❐

3. Phương trình có chứa các căn thức liên hợp

***Lưu ý 5**. Khi giải PT (BPT) mũ mà cơ số có căn thức là liên hợp của nhau, ta tìm cách đưa về trường hợp tích các cơ số bằng 1. Đặt ẩn số phụ để đưa về một PT bậc hai.*

★ ***Thí dụ 5**. Giải bất phương trình*

$$\left(\sqrt{10}+1\right)^{\log_3 x}-\left(\sqrt{10}-1\right)^{\log_3 x}\geq\frac{2x}{3}.$$

***Lời giải**.* ĐK $x>0$.

$$\text{BPT}\Leftrightarrow\left(\sqrt{10}+1\right)^{\log_3 x}-\left(\sqrt{10}-1\right)^{\log_3 x}\geq\frac{2}{3}.3^{\log_3 x}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{\log_3 x}-\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{\log_3 x}\geq\frac{2}{3}.$$

Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{\log_3 x}$ $(t>0)$, ta được

$$t-\frac{1}{t}\geq\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3t^2-2t-1\geq 0$$

$$\Leftrightarrow(3t+1)(t-1)\geq 0\Leftrightarrow t\geq 1.$$

Do đó tìm được $x\geq 1$. ❐

4. Chuyển BPT lôgarit về BPT mũ

***Lưu ý 6**. Khi giải BPT lôgarit mà hai vế cơ số khác nhau, sau khi biến đổi, rút gọn ta đặt một vế bằng t, sau đó biến đổi về một BPT mũ. Đối với PT ta cũng làm tương tự.*

★ ***Thí dụ 6**. Giải bất phương trình*

$$\log_4\left(x^2-x-8\right)\leq 1+\log_3 x.$$

***Lời giải**.* ĐK $x>4$. Đặt $t=\log_3 x\Leftrightarrow x=3^t$. BPT trở thành

$$\log_4\left(9^t-3^t-8\right)\leq 1+t\Leftrightarrow 9^t\leq 4.4^t+3^t+8.$$

$$\Leftrightarrow 1\leq 4\left(\frac{4}{9}\right)^t+\left(\frac{1}{3}\right)^t+8\left(\frac{1}{9}\right)^t.$$

Hàm số $f(t)=4\left(\frac{4}{9}\right)^t+\left(\frac{1}{3}\right)^t+8\left(\frac{1}{9}\right)^t$ nghịch biến và $f(2)=1$. BPT trở thành $f(2)\leq f(t)$ $\Leftrightarrow t\leq 2$. Tìm được $4<x\leq 8$. ❐

5. Phương trình hỗn hợp

***Lưu ý 7**. Nếu trong PT có chứa $\log_a x$ trên số mũ và các số hạng dạng x^α thì ta có thể đặt $t=\log_a x\Leftrightarrow x=a^t$ để chuyển về PT mũ.*

★ ***Thí dụ 7**. Giải bất phương trình*

$$3^{2\log_2 x}-2x^{1+\log_2 3}-8x^2\leq 0.$$

***Lời giải**.* ĐK $x>0$.

$$\text{BPT}\Leftrightarrow 9^{\log_2 x}-2.6^{\log_2 x}-8x^2\leq 0.$$

Đặt $t=\log_2 x\Leftrightarrow x=2^t$.

Ta được BPT $9^t-2.6^t-8.4^t\leq 0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{9}{4}\right)^t-2\left(\frac{3}{2}\right)^t-8\leq 0.$$

· Đặt $u=\left(\frac{3}{2}\right)^t$ (với $u>0$) ta được $u^2-2u-8\leq 0$.

Từ đó tìm được nghiệm của BPT đã cho. ❐

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN SỬ DỤNG ĐẠO HÀM

1. Giải phương trình, bất phương trình

Lưu ý 8. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trong khoảng $(a;b)$ và $f(x_0)=0$; $x_0 \in (a;b)$ thì trong khoảng $(a;b)$:

PT $f(x)=0$ có một nghiệm $x=x_0$;
BPT $f(x)>0 \Leftrightarrow x_0<x<b$ (hoặc $a<x<x_0$). ❐

★ ***Thí dụ 8.*** *Giải bất phương trình*

$$2^{\log_3 x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_x 3} \ge \frac{5}{2}.$$

Lời giải. ĐK $x>0;\ x\neq 1$.

Đặt $t=\log_3 x \Rightarrow \log_x 3=\frac{1}{t}$. BPT trở thành $2^t+2^{-\frac{1}{t}} \ge \frac{5}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=2^t+2^{-\frac{1}{t}};\ t\neq 0$. Dễ thấy $f(-1)=f(1)=\frac{5}{2}$.

Ta có $f'(t)=\left(2^t+\frac{2^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\right)\ln 2>0$; hàm số $f(t)$ đồng biến trong mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Do đó BPT $f(t)\ge\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le t<0\\ t\ge 1.\end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{3}\le x<1\\ x\ge 3.\end{array}\right.$ ❐

2. Biện luận phương trình

Lưu ý 9. *Giả sử một PT phụ thuộc tham số m, việc tìm điều kiện để PT có nghiệm hoặc biện luận số nghiệm của PT, có thể làm như sau : biến đổi PT về dạng $m=f(x)$; khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$; suy ra kết quả bài toán.*

★ ***Thí dụ 9.*** *Tìm m để phương trình sau có nghiệm :*

$$2\sqrt{-x^2-2x+3}-(m-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}\right)+m+1=0.$$

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x};\ x\in[-3;1]$.

Ta có $t^2=4+2\sqrt{(x+3)(1-x)}$
$\Rightarrow 2\sqrt{-x^2-2x+3}=t^2-4$.

Mà $2\sqrt{(x+3)(1-x)}\le(x+3)+(1-x)=4$
$\Rightarrow 2\le t\le 2\sqrt{2}$.

PT trở thành $t^2-(m-1)t+m-3=0$

$\Rightarrow m=\frac{t^2+t-3}{t-1}=f(t);\ t\neq 1$.

$f'(t)=\frac{t^2-2t+2}{t-1}>0$ (với $2\le t\le 2\sqrt{2}$).

Hàm số $f(t)$ đồng biến trong các khoảng mà nó xác định. Vậy PT có nghiệm khi

$f(2)\le m\le f\left(2\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow 3\le m\le\frac{-6+16\sqrt{2}}{7}$. ❐

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải phương trình $3^x=2\log_3(2x+1)+1$.

2. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt $e^x+\cos x=m+x-\frac{x^2}{2}$.

3. Giải bất phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\ge\frac{3}{2}$.

4. Giải bất phương trình $x^2-5\le\sqrt{5-x}$.

5. Giải bất phương trình $\log_7\left(1+\sqrt{x}+x\right)\le\log_4 x$.

6. Giải phương trình $\log_2\sin x=2\log_3\tan x$.

Phương pháp DỒN BIẾN "THỪA - TRỪ"

VÕ QUỐC BÁ CẨN
(SV ĐH Y Dược Cần Thơ)

Trong bài viết nhỏ này, chúng tôi xin được chia sẻ cùng bạn đọc một cách dồn biến giúp chúng ta giải quyết được khá nhiều bài toán về bất đẳng thức (BĐT) ba biến (mảnh đất màu mỡ nhất của BĐT hiện nay). Phương pháp này đã giúp chúng tôi giải được khá nhiều bài toán khó mà một vài trong số đó đã từng là những bài toán mở. Chúng tôi xin được gọi đó là phương pháp "dồn biến thừa - trừ".

★**Thí dụ 1.** *Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} \ge 4+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Lời giải. Để ý rằng BĐT đã cho xảy ra đẳng thức tại $a=b=\frac{1}{2}$, $c=0$ nên nếu dùng dồn biến để giải thì ý tưởng của ta là dồn biến về trung bình cộng. Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$ và đặt vế trái của BĐT trên là $P(a;b;c)$. Ta sẽ chứng minh

$$P(a;b;c) \ge P\left(\frac{a+b}{2};\ \frac{a+b}{2};\ c\right) \ge 4+\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Chúng ta biết rằng

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} \ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+ac+bc+2c^2}} \quad (*)$$

và việc tách bình phương từ

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+ac+bc+2c^2}}-\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{c(a+b)}{2}+c^2}}$$

là dễ dàng (chỉ cần một bước trục căn là xong), nên ta nghĩ rằng việc dùng BĐT (*) chắc sẽ có giúp ích cho việc dồn biến của ta. Nhưng tiếc rằng, BĐT (*) không đủ mạnh để thực hiện nhiệm vụ này, vì vậy ý tưởng của ta sẽ là thiết lập một đánh giá chặt hơn rất nhiều để sử dụng

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ac+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}} \ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+ac+bc+2c^2-k(a-b)^2}}$$

tương đương với

$$2\left(\frac{1}{a^2+ac+c^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}-\frac{4}{a^2+b^2+ac+bc+2c^2-k(a-b)^2}\right) \ge \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+ac+c^2}}-\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}\right)^2.$$

BĐT này có thể được thu gọn thành

$$\frac{2(a-b)^2\left((a+b+c)^2-k(a^2+b^2+2c^2+ac+bc)\right)}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)\left(a^2+b^2+ac+bc+2c^2-k(a-b)^2\right)} \ge \frac{(a-b)^2(a+b+c)^2}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)\left(\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\right)^2}$$

hay là

$$\frac{2\left((a+b+c)^2-k(a^2+b^2+2c^2+ac+bc)\right)}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)\left(a^2+b^2+ac+bc+2c^2-k(a-b)^2\right)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)\left(\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\right)^2}$$

Cho $a=b=c$ tìm được $k \leq \frac{9}{8}$. Cho $k=1$, BĐT trên trở thành

$$\frac{2(2ab+ac+bc-c^2)}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)(2ab+ac+bc+2c^2)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)\left(\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\right)^2}$$

tương đương với

$$\frac{2(2ab+ac+bc-c^2)}{2ab+ac+bc+2c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\left(\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\right)^2}$$

Ta đánh giá được

$$\frac{2(2ab+ac+bc-c^2)}{2ab+ac+bc+2c^2} \geq 1 \text{ và}$$

$$\sqrt{a^2+ac+c^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2} \geq a+b+c$$

nên BĐT trên hiển nhiên đúng. Như vậy, ta đã thiết lập được BĐT

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2ab+ac+bc+2c^2}}$$

Ta đi đến việc chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2ab+ac+bc+2c^2}}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{\frac{3(a+b)^2}{4}}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}+ac+bc+2c^2}}$$

để hoàn thành bước dồn biến.

Đặt $t=ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ và xét hàm số

$f(t)=\frac{1}{\sqrt{(1-c)^2-t}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2t+c+c^2}}$, ta dễ thấy

$$f'(t)=\frac{1}{2\left((1-c)^2-t\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2\sqrt{2}}{\left(2t+c+c^2\right)^{\frac{3}{2}}}<0$$

bởi vì ta có

$$2\left((1-c)^2-t\right)-(2t+c+c^2)$$

$$=2(a^2+ab+b^2)-(2ab+ac+bc+2c^2) \geq 0$$

và $\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{2^{\frac{3}{2}}}<0$. Điều này chứng tỏ rằng $f(t)$ là hàm nghịch biến, chúng ta thu được $f(t) \geq f\left(\frac{(a+b)^2}{4}\right)$. Bước dồn biến đã được hoàn tất, tức là có

$$P(a;b;c) \geq P\left(\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2};c\right).$$

Việc còn lại của ta là chứng minh

$$P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right) \geq 4+\frac{2}{\sqrt{3}},$$

một công việc khá nhẹ nhàng với phép chọn tham số trong BĐT $AM-GM$, xin được dành lại cho bạn đọc phần này. ❒

★Thí dụ 2. *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{5(a^2+b^2)+8}+\frac{1}{5(b^2+c^2)+8}+\frac{1}{5(c^2+a^2)+8} \leq \frac{1}{6}.$$

Lời giải. Để ý rằng BĐT trên trở thành đẳng thức chẳng hạn khi $a=b=c=1$ hoặc $a=\frac{13}{5}, b=c=\frac{1}{5}$ nên ý tưởng của ta sẽ là dồn biến về trung bình cộng (dựa trên giả thiết của bài toán).

Giả sử $a \geq b \geq c$, đặt $k=\frac{8}{5}$ và

$$P(a;b;c)=\frac{1}{a^2+b^2+k}+\frac{1}{b^2+c^2+k}+\frac{1}{c^2+a^2+k},$$

ta phải chứng minh

$$P(a;b;c) \leq P\left(a;\frac{b+c}{2};\frac{b+c}{2}\right) \leq \frac{3}{k+2}.$$

Để chứng minh nó, ta sẽ sử dụng ý tưởng sau: Tìm m nhỏ nhất để BĐT sau đúng

$$\frac{1}{a^2+b^2+k}+\frac{1}{a^2+c^2+k} \leq \frac{4}{2a^2+b^2+c^2+2k-m(b-c)^2}$$

Nhân cả hai vế của BĐT này với $(a^2+b^2+k)+(a^2+c^2+k)$ và sử dụng đẳng thức quen thuộc $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-4=\frac{(x-y)^2}{xy}$, ta có thể viết lại BĐT trên như sau

$$\frac{(b^2-c^2)^2}{(a^2+b^2+k)(a^2+c^2+k)}\le\frac{4m(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2+2k-m(b-c)^2}$$

tương đương với

$$\frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2+k)(a^2+c^2+k)}\le\frac{4m}{2a^2+b^2+c^2+2k-m(b-c)^2}.$$

Cho $a=b=c=1$, tìm được $m\ge\frac{2}{k+2}$. Như vậy, ta sẽ thử chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2+k)(a^2+c^2+k)}$$

$$\le\frac{8}{(k+2)\left(2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2\right)}.$$

Ta có $2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2$

$$\le 2a^2+b^2+c^2+2k\le 2(a^2+b^2+k),$$

và $4(a^2+c^2+k)-(k+2)(b+c)^2$

$$\ge 4(b^2+c^2)+k(b+c)^2-(k+2)(b+c)^2$$

$$=4(b^2+c^2)-2(b+c)^2=2(b-c)^2\ge 0$$

nên BĐT trên hiển nhiên đúng. Do đó, ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+k}+\frac{1}{a^2+c^2+k}$$

$$\le\frac{4}{2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2}.$$

Để hoàn tất bước dồn biến, ta phải chứng minh

$$\frac{1}{b^2+c^2+k}+\frac{4}{2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2}$$

$$\le\frac{1}{\frac{(b+c)^2}{2}+k}+\frac{4}{2a^2+\frac{(b+c)^2}{2}+2k}$$

tương đương với

$$\frac{(b-c)^2}{(b^2+c^2+k)\left((b+c)^2+2k\right)}\ge$$

$$\frac{2(2-k)(b-c)^2}{(k+2)\left(2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2\right)\left(2a^2+\frac{(b+c)^2}{2}+2k\right)}$$

hay là

$$\frac{\left(2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2\right)\left(2a^2+\frac{(b+c)^2}{2}+2k\right)}{(b^2+c^2+k)\left((b+c)^2+2k\right)}$$

$\ge\frac{2(2-k)}{k+2}$. Ta có

$$2a^2+b^2+c^2+2k-\frac{2}{k+2}(b-c)^2-\left((b+c)^2+2k\right)$$

$$=2a^2-2bc-\frac{2}{k+2}(b-c)^2$$

$\ge 2b^2-2bc-(b-c)^2=b^2-c^2\ge 0$, và

$$2a^2+\frac{(b+c)^2}{2}+2k-2(b^2+c^2+k)$$

$=2(a^2-b^2)+\left(\frac{(b+c)^2}{2}-2c^2\right)\ge 0$, nên

$$\text{VT}\ge 2=\frac{2(2-k)}{k+2}+\frac{4k}{k+2}\ge\frac{2(2-k)}{k+2}=\text{VP}.$$

Phép dồn biến được hoàn tất. Và việc còn lại của ta chỉ là chứng minh $P(3-2t;t;t)\le\frac{3}{k+2}$ với $t=\frac{b+c}{2}$ và $k=\frac{8}{5}$. Bằng cách khai triển và biến đổi tương đương, ta thấy BĐT này tương đương với $\frac{25(5t-1)^2(t-1)^2}{6(5t^2+4)(25t^2-60t+53)}\ge 0$ (đúng).

Bài toán được chứng minh xong. ❒

◄**Nhận xét 1.** Qua lời giải này, ta có thể thấy tập hợp tất cả các giá trị của k để bất đẳng thức

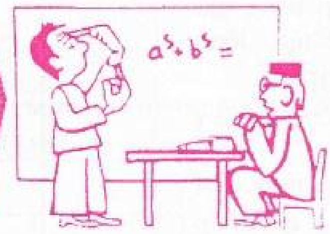
$$\frac{1}{a^2+b^2+k}+\frac{1}{b^2+c^2+k}+\frac{1}{c^2+a^2+k}\le\frac{3}{k+2}$$

đúng với $a, b, c>0$, $a+b+c=3$ là $k\ge\frac{8}{5}$.

Ngoài ra, trường hợp $k=2$ chính là bài toán thi chọn đội tuyển Iran năm 2009.

(Kì sau đăng tiếp)

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN



Trong chương trình sách giáo khoa mới có giới thiệu cách sử dụng máy tính cầm tay vào giải toán. Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng hiệu quả máy tính cầm tay CASIO fx-570ES vào dạy và học toán nhằm tiết kiệm thời gian tính toán, rèn luyện khả năng dự đoán, phản ứng linh hoạt, đặc biệt vào giải các bài toán dạng trắc nghiệm khách quan. Đây là một hướng đổi mới dạy và học toán xin mạnh dạn đưa ra để các bạn đồng nghiệp cùng tham khảo và góp ý kiến.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY trong việc DẠY và HỌC TOÁN

NGUYỄN HỒNG TRUNG
(GV THPT Hàm Thuận Bắc, Bình Thuận)

1. Tiết kiệm thời gian giải toán khi sử dụng máy tính CASIO *fx-570ES*

★**Thí dụ 1.** (Đề thi HSG MTCT lớp 11 và 12)

Tìm một cặp số (x ; y) nguyên dương với x nhỏ nhất thỏa mãn phương trình

$$\sqrt[3]{156x^2+807}+(12x)^2=20y^2+52x+59.$$

Hướng dẫn giải. Rút y theo x, ta có

$$y=\sqrt{\frac{\sqrt[3]{156x^2+807}+(12x)^2-52x-59}{20}}=f(x)$$

■ *Dùng máy tính*

* Dùng lệnh $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ xuất hiện $f(x)$; nhập toàn bộ hàm số trên vào máy.

* Bấm $\boxed{=}$ xuất hiện Start? Khi đó ta nhập điểm đầu 1 ; bấm $\boxed{=}$ xuất hiện End? Khi đó ta nhập điểm cuối 30; bấm $\boxed{=}$ xuất hiện Step? Khi đó ta nhập khoảng cách giữa hai điểm liên tiếp (bước nhảy) 1 đơn vị. (vì khoảng cách giữa hai số nguyên dương liên tiếp là 1 đơn vị).

* Cuối cùng bấm $\boxed{=}$ máy sẽ hiển thị như sau: (Dùng phím $\boxed{\text{REPLAY}}$ để tìm các giá trị chưa hiển thị).

D Math ▲

	X	F(X)
11	11	29
12	12	31.687
13	13	34.373

11

Kết quả. $x = 11$ ứng với $y = 29$. □

★**Thí dụ 2.** (Đề thi HSG MT CT Lớp 11)

Viết 10 số hạng đầu tiên của dãy (u_n) rồi tính tích (P_{10}) của 10 số hạng đó, biết rằng $u_n=\frac{3^n}{n^3},\ n\in\mathbb{N}^*$.

Hướng dẫn giải. ■ *Dùng máy tính*

* Ghi vào máy $X=X+1:B=\frac{3^X}{X^3}:D=BD$

* Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ xuất hiện X? Ta gán $X = 0$ (biến đếm); bấm $\boxed{=}$ xuất hiện D? Ta gán $D = 1$ (tích P) ; bấm $\boxed{=}$ xuất hiện $X = X + 1$.

* Lặp lại dãy phím $\boxed{=}$ liên tiếp cho đến khi máy xuất hiện $X = 10$ (đếm $n = 10$) ta sẽ nhận được các kết quả sau:

$u_1=3,\ u_2=\frac{9}{8},\ u_3=1,\ u_4=\frac{81}{64},\ u_5=\frac{243}{125},$

$u_6=\frac{27}{8},\ u_7=\frac{2187}{343},\ u_8=\frac{6561}{512},\ u_9=27,$

$u_{10} = \dfrac{59049}{1000}$, $P_{10} \approx 3650731{,}65$. ❒

★Thí dụ 3. (Lớp 11). *Cho dãy số* (u_n) *với*

$$u_n = \frac{\left(3+\sqrt{2}\right)^n - \left(3-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) *Tính 5 số hạng đầu tiên của dãy số.*

b) *Tìm hệ thức truy hồi của dãy số.*

Hướng dẫn giải

a) ■ *Dùng máy tính*

* Ghi vào máy $X{=}X{+}1$: $B{=}\dfrac{\left(3{+}\sqrt{2}\right)^x + \left(3{-}\sqrt{2}\right)^x}{2\sqrt{2}}$

* Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$ xuất hiện X?

* Gán cho $X = 0$ rồi bấm phím

$\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ nhận được $u_1 = 1$,

$\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ nhận được $u_2 = 6$,

$\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ nhận được $u_3 = 29$,

$\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ nhận được $u_4 = 132$

$\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ nhận được $u_5 = 589$.

b) Giả sử $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c,\ n \in \mathbb{N}^*$. Theo câu a) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6a + b + c = 29 \\ 29a + 6b + c = 132 \\ 132a + 29b + c = 589. \end{cases}$$

Sử dụng máy tính CASIO *fx-570ES* bằng cách

* Bấm phím $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{2}$ rồi nhập các hệ số của từng phương trình vào máy. Ta tìm được $a = 6,\ b = -7,\ c = 0$.

Do đó $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 7u_n,\ n \in \mathbb{N}^*$ chứng minh hệ thức này bằng phương pháp quy nạp toán học. ❒

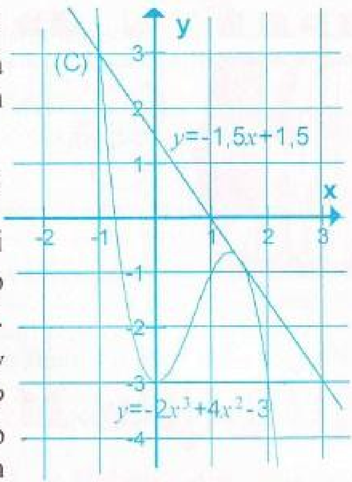
★Thí dụ 4. (Lớp 12). *Cho hàm số* $y = f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 3$ *có đồ thị* (C).

a) *Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.*

b) *Tìm tọa độ giao điểm của (C) với trục hoành.*

c) *Viết phương trình tiếp tuyến của (C) khi biết hoành độ tiếp điểm bằng 1,5.*

Hướng dẫn giải



a) Lập bảng giá trị bằng lệnh $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$

$f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 3$

Bấm $\boxed{=}$ máy hỏi Start?, ta nhập điểm đầu -1. Bấm $\boxed{=}$, máy tiếp tục hỏi End? Khi đó ta nhập điểm cuối 3. Bấm $\boxed{=}$ máy lại hỏi Step? Khi đó ta nhập khoảng cách giữa hai điểm liên tiếp (bước nhảy) 1 đơn vị

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	-3	-1	-3	-21

b) Giải phương trình hoành độ giao điểm $-2x^3 + 4x^2 - 3 = 0$ bằng cách dùng lệnh $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{4}$ rồi nhập các hệ số vào máy, tìm được ba nghiệm

$x_1 \approx -0{,}74$; $x_2 \approx 1{,}67$; $x_3 \approx 1{,}07$.

Vậy tọa độ ba giao điểm $(x_1;0), (x_2;0), (x_3;0)$.

c) * Bấm liên tiếp $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\int_\square^\square \square}$ xuất hiện $\dfrac{d}{dx}(\square)\Big|_{x=\square}$, rồi nhập dữ liệu để tìm hệ số góc $f'(1{,}5) = -1{,}5$.

* Thay $x_0 = 1{,}5$ vào (C) tìm $y_0 = -\dfrac{3}{4}$.

* Vậy phương trình tiếp tuyến có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 = -1{,}5(x - 1{,}5) - \frac{3}{4}.$$ ❒

★Thí dụ 5. (Đề thi HSG MTCT Lớp 11)

Tìm số nguyên n sao cho

$1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \cdots + \sqrt[n]{n} \approx 13{,}15116473$.

Hướng dẫn giải

* Xóa hết các bộ nhớ tạm A, B, C, … bằng cách bấm $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{CLR}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ (Yes).

* Ghi vào màn hình biểu thức

$$A = A + 1 : B = \sqrt[A]{A} : C = C + B.$$

* Dùng lệnh $\boxed{\text{CALC}}$ bấm dấu $\boxed{=}$ liên tục đến khi nào màn hình xuất hiện 13,15116473 thì giá trị của A kế tiếp là kết quả cần tìm. Kết quả $n=10$. ❒

2. Giải toán nhanh trên máy tính CASIO *fx-570ES* rèn luyện khả năng dự đoán, phản ứng linh hoạt

★Thí dụ 6. (Lớp 12)

Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD biết: $A(6;-2;3)$, $B(0;1;6)$, $C(2;0;-1)$ và $D(4;1;0)$.

Hướng dẫn giải. Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cx+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$

$$A,B,C,D\in(S)\Leftrightarrow\begin{cases}12a-4b+6c+d=-49\\2b+12c+d=-37\\4a-2c+d=-5\\8a+2b+d=-17.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}12a-6b-6c=-12\\-4a+2b+14c=-32\\-4a-2b-2c=12\end{cases}$$

* Bấm $\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{5}\ \boxed{2}$ rồi nhập các hệ số vào. Tìm được kết quả $a=-2, b=1, c=-3, d=-3$.

* Học sinh cũng có thể sử dụng MTCT để tính các hệ số của thương và số dư trong phép chia một đa thức cho $(x-a)$ để tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số, hay giải một phương trình, bất phương trình bậc ba một cách nhanh chóng chính xác.

3. Hiệu quả của việc sử dụng máy tính CASIO *fx-570ES* giải các bài toán ở dạng trắc nghiệm khách quan

★Thí dụ 7. (Lớp 10). *Phương trình đường tròn đi qua ba điểm:* $M(1;2)$, $N(5;2)$, và $P(1;-3)$ là

A. $x^2+y^2+6x+y-1=0$

B. $x^2+y^2-6x+y-1=0$

C. $x^2+y^2+6x+y=1$

D. $x^2+y^2-6x-y=1=0$

Hướng dẫn giải. Phương trình đường tròn có dạng $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$.

Thay tọa độ ba điểm M, N, P vào ta có hệ

$$\begin{cases}2a+4b+c=-5\\10a+4b+c=-29\\2a-6b+c=-10.\end{cases}$$

* Dùng lệnh $\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{5}\ \boxed{2}$ và nhập các hệ số vào, tìm được $a=-3$, $b=\dfrac{1}{2}$ và $c=-1$. Chọn B. ❒

★Thí dụ 8. (Lớp 12). *Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường* $y=5x^4+3x^2+3$; $y=0$; $x=0$; $x=1$ là

A. 4 B.5 C.6 D.7.

Hướng dẫn giải. Diện tích hình phẳng là $S=\int_0^1(5x^4+3x^2+3)\mathrm{d}x$ được tính trực tiếp bằng lệnh $\boxed{\int_{\square}^{\square}\square}$ và nhập dữ liệu, $S=5$. Chọn B. ❒

★Thí dụ 9. (Lớp 11). *Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số* $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ *tại điểm có hoành độ* $x_0=\dfrac{5}{2}$ là

A. $y=-\dfrac{5}{9}x+\dfrac{7}{6}$ B. $y=\dfrac{5}{9}x-\dfrac{2}{9}$

C. $y=\dfrac{5}{9}x+\dfrac{7}{6}$ D. $y=-\dfrac{5}{9}x+\dfrac{2}{9}$

Dùng MTCT tính $y_0=\dfrac{7}{6}, y'(x_0)=\dfrac{5}{9}$.

* Tiếp tuyến tại điểm $(\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{6})$ là

$$y=\frac{5}{9}\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{7}{6}=\frac{5}{9}x-\frac{2}{9}.$$ Chọn B. ❒

Việc sử dụng có hiệu quả máy tính **CASIO *fx-570ES*** trong việc dạy học toán phụ thuộc vào giáo viên. Tuy nhiên, MTCT không thể thay thế được vị trí của con người, những suy luận của con người khi giải toán. Vì vậy giáo viên nên hướng dẫn học sinh chỉ sử dụng MTCT nhằm nâng cao hiệu quả trong việc giải toán, tránh việc ỷ lại hoàn toàn.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/390. (Lớp 6) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c) sao cho
$(a + b + c)^2 - 2a + 2b$ là số chính phương.

NGUYỄN HỒNG THANH
(GV THCS Minh Hải, Văn Lâm, Hưng Yên)

Bài T2/390. (Lớp 7) Cho tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 80^o$. Lấy điểm I ở trong tam giác sao cho $\widehat{IAC} = 10^o$, $\widehat{ICA} = 20^o$. Tìm số đo của góc $\widehat{CBI}$.

BÙI VĂN KHẮC
(GV THCS Kim Giang, Cẩm Giàng, Hải Dương)

Bài T3/390. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và I là giao điểm ba đường phân giác trong. Chứng minh rằng nếu $AB^2 - AC^2 = 2(IB^2 - IC^2)$ thì GI song song với BC.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T4/390. Giải phương trình
$$(x^2 + 1)|x^2 + 2x - 1| + 6x(1 - x^2) = (x^2 + 1)^2$$

VŨ ĐỨC CẢNH
(Hà Nội)

Bài T5/390. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 = 1$;
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n(a_n + 1)(a_n + 2)(a_n + 3)} + 2$$
với $n \in \mathbb{N}^*$. So sánh tổng
$$S = \frac{1}{a_1 + 2} + \frac{1}{a_2 + 2} + \frac{1}{a_3 + 2} + \ldots + \frac{1}{a_{2009} + 2}$$
với $\frac{1}{2}$.

ĐOÀN CÁT NHƠN
(GV THCS Nhơn Lộc, An Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/390. Cho a, b, c là các số thực dương và $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{\sqrt{b^3 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{c^3 + 1}} + \frac{c}{\sqrt{a^3 + 1}} \geq 2.$$

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T7/390. Tìm tất cả các tam giác có độ dài ba cạnh là ba số nguyên đầu tiên của một cấp số cộng có công sai d khác 0 và bán kính đường tròn nội tiếp của nó bằng 3.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T8/390. Cho tam giác ABC có $AB = 3R$, $BC = R\sqrt{7}$, $CA = 2R$. M là điểm nào đó trên mặt cầu $(C ; R)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MB$.

LÊ HOÀI BẮC
(GV THPT Nguyễn Văn Cừ, Xuân Sơn, Châu Đốc, Bà Rịa - Vũng Tàu)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/390. Trong một buổi gặp mặt có 294 người tham gia. Những người quen nhau bắt tay nhau. Biết rằng nếu A bắt tay B thì một trong hai người A và B bắt tay không quá 6 lần. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu cái bắt tay?

TRẦN NAM DŨNG
(GV ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T10/390. Với số nguyên dương cho trước, tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{N}$ ta có

1) Nếu $f(x) = f(y)$ thì $x = y$;

2) $f\Big(f\Big(f\Big(\ldots\Big(f\big(f(x) + f(y)\big)\Big)\ldots\Big)\Big)\Big) = x + y$

(gồm m lần f).

VŨ NAM TRƯỜNG
(GV THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/390. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0\ ;\ 1]$, có đạo hàm trên khoảng $(0\ ;\ 1)$ và thoả mãn điều kiện $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Chứng minh rằng với hai số thực k_1, k_2 bất kì, luôn tồn tại các số a, b phân biệt thuộc khoảng $(0\ ;\ 1)$ sao cho

$$\frac{k_1}{f(a)} + \frac{k_2}{f(b)} = k_1 + k_2.$$

DƯƠNG VĂN SƠN

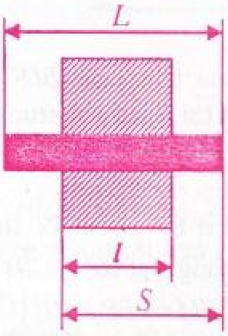
(Cao học Khoá XV - Đại học Vinh)

Bài T12/390. Cho tam giác ABC với trực tâm H. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác AH của hai đường tròn nội tiếp các tam giác ABH và ACH đi qua trung điểm cạnh BC.

TẠ HỒNG SƠN

(SV Lớp 50A, khoa Ngân hàng-Tài chính, ĐH Kinh tế Quốc dân Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ



Bài L1/390. Một xe trượt dài $L = 4$m, khối lượng phân bố đều theo chiều dài, đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 2$m/s trên mặt phẳng nằm ngang thì lao vuông góc vào dải đường nhám rộng $l = 2$m. Xe dừng lại sau khi đã đi thêm được quãng đường $S = 3$m (hình vẽ). Lấy $g = 10\ \text{m/s}^2$. Hãy tính

a) Hệ số ma sát μ giữa bề mặt xe trượt với dải đường nhám.

b) Thời gian hãm của xe.

TRẦN KHÁNH HẢI

(TP. Huế) Sưu tầm

Bài L2/390. Cho hệ thấu kính hội tụ O_1 ($f_1 = 50$ cm) và thấu kính phân kì O_2 ($f_2 = -20$ cm) đặt đồng trục, cách nhau $O_1O_2 = l$. Vật sáng AB được đặt trước hệ thấu kính và vuông góc với trục chính. Tìm l để ảnh của vật AB cho bởi hệ thấu kính có độ lớn không đổi dù AB ở bất cứ vị trí nào trước quang hệ. Hãy vẽ ảnh.

NGUYỄN VĂN THUẬN

(GV Đại học sư phạm Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/390. (For 6th grade) Find all triples (a, b, c) of positive integers such that

$(a + b + c)^2 - 2a + 2b$ is a perfect square.

T2/390. (For 7th grade) Given a triangle ABC with $AB = AC$ and $\widehat{BAC} = 80^\circ$. Choose a point I inside the triangle so that $\widehat{IAC} = 10^\circ$, $\widehat{ICA} = 20^\circ$. Find the measure of the angle $\widehat{CBI}$.

T3/390. Let G and I be respectively the centroid and the incenter of a given triangle ABC. Prove that if $AB^2 - AC^2 = 2(IB^2 - IC^2)$ then GI is parallel to BC.

T4/390. Solve the equation

$(x^2 + 1)|x^2 + 2x - 1| + 6x(1 - x^2) = (x^2 + 1)^2$.

T5/390. Let (a_n) be a sequence given by

$a_1 = 1$;

$a_{n+1} = \sqrt{a_n(a_n+1)(a_n+2)(a_n+3)+2}$

for every $n \in \mathbb{N}^*$.

Compare the sum

$$S = \frac{1}{a_1+2} + \frac{1}{a_2+2} + \frac{1}{a_3+2} + \ldots + \frac{1}{a_{2009}+2}$$

with $\frac{1}{2}$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/390. Let a, b, c be positive real numbers such that $a + b + c = 6$. Prove that

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{b}{\sqrt{c^3+1}} + \frac{c}{\sqrt{a^3+1}} \geq 2.$$

T7/390. Find all triangles whose inradius equal 3 and the side lengths form the first three terms of an arithmetic progression with common difference d distinct from 0.

(Xem tiếp trang 28)

★Bài T1/386. *Tìm hai chữ số tận cùng của tổng* $2008^{2009}+2009^{2008}$.

Lời giải. Đặt $A=2008^{2009}+2009^{2008}$
$=(2000+8)^{2009}+(2000+9)^{2008}$
(các chữ kí hiệu dưới đây đều là các số tự nhiên và $n>0$).

Chú ý $(100a+x)(100b+y)$
$=10000ab+100(ay+bx)+xy=100c+xy$.

Từ chú ý trên ta có $(100a+x)^n=100d+x^n$.

Từ đó $A=100k+8^{2009}+9^{2008}$.

• Ta thấy $8^{2009}=2^{6027}=(2^{20})^{301}.2^7$. Do $2^{20}=(2^{10})^2=1024^2=(25u-1)^2=25v+1$ và $2^7=128=25t+3$ nên
$8^{2009}=(25v+1)^{301}.(25t+3)=25r+3.$

Mặt khác 8^{2009} chia hết cho 4, do đó
$$8^{2009}=100s+28 \qquad (1)$$

• Ta thấy $9^{2008}=3^{4016}=(3^{20})^{200}.(3^3)^5.3$

Do $3^{20}=(3^{10})^2=59049^2=(25p-1)^2=25q+1$ và $(3^3)^5.3=(25+2)^5.3=(25m+32).3=25h+21$ nên $9^{2008}=(25q+1)^{200}(25h+21)=25e+21.$

Mặt khác 9^{2008} chia cho 4 dư 1, do đó
$$9^{2008}=100i+21 \qquad (2)$$

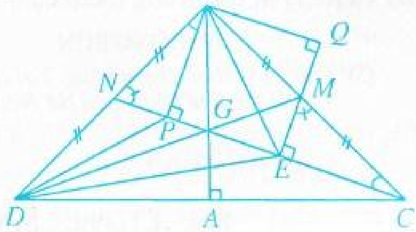
Từ (1) và (2) suy ra $A=2008^{2009}+2009^{2008}$ có hai chữ số tận cùng là 28 + 21 = 49. ❒

⮜Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng và trình bày rõ ràng:
Vĩnh Phúc: *Phạm Văn Tuyến*, 6A, *Nguyễn Hữu Cương, Phạm Vũ Việt Thắng, Tạ Đức Chính, Nguyễn Thị Lan Oanh, Nguyễn Văn Long, Đại Thị Hoàng Yến, Phạm Thị Vân Anh, Nguyễn Tú Anh, Nguyễn Ngọc Mai, Nguyễn Thành Công, Nguyễn Đức Đại, Nguyễn Minh Tuấn*, 6A1, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Trần Ngọc Linh, Đặng Mỹ Linh, Đào Mỹ Linh, Nguyễn Hoàng Thảo Hiền, Đinh Thị Hồng Ngọc, Trương Như Uyên, Nguyễn Anh Tuấn*, 6A, *Hồ Thị Thúy, Nguyễn Anh Tuấn*, 6B, *Nguyễn Thị An Quỳnh*, 6C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Võ Duy Khánh, Nguyễn Viết Nhật Hoàng, Nguyễn Duy Khánh, Phan Thế Anh*, 6C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Kiều Duyên*, 6A, THCS Hành Đức, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

★Bài T2/386. *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi G là điểm thuộc cạnh AB sao cho* $AG=\frac{1}{3}AB$, *M là trung điểm cạnh BC, E là chân đường vuông góc hạ từ M xuống CG. Hai đường thẳng MG và AC cắt nhau tại D. Chứng minh rằng DE = BC.*

Lời giải



Ta thấy G là trọng tâm của tam giác BDC, đồng thời ΔBDC vuông cân tại B, có các trung tuyến BA, DM, CN (N là giao điểm của CG và BD).

Kẻ $BP\perp CN$, $BQ\perp EM$ ($P\in CN$, Q thuộc tia EM). Ta có $\widehat{BNP}=\widehat{CME}$ (cùng phụ với $\widehat{NCB}$); $BN=CM$, suy ra $\Delta BPN=\Delta CEM\Rightarrow BP=CE$ (1). Lại có $\Delta BQM=\Delta CEM$ (g.c.g) $\Rightarrow BQ=CE$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $BP=BQ$, do đó EB là tia phân giác của góc $PEQ\Rightarrow\widehat{BEC}=45^o+90^o=135^o$. Từ đó $\Delta BPD=\Delta CEB$ (c.g.c) $\Rightarrow\widehat{BPD}=\widehat{BEC}=135^o$ $\Rightarrow\widehat{EPD}=135^o$. Do đó $\Delta BPD=\Delta EPD$ (c.g.c) $\Rightarrow DB=DE$. Từ đó $DE=BC$ (đpcm). ❒

⮜Nhận xét. 1) Đây là bài toán quen thuộc, tuy nhiên có ít bạn tham gia gửi bài. Một số bạn dùng kiến thức về đường trung bình của tam giác (lớp 8).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:
Phú Thọ: *Dương Mạnh Tùng, Lê Minh Hoàng*, 7A1, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Phan Thị Thảo Nguyên*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Kiều Duyên*, 6A, THCS Hành Đức, Nghĩa Hành, *Huỳnh Tiến Vỹ, Bùi Thị Hàn Ny, Nguyễn Thị Thu Hiền, Tống Thành Nguyên*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/386. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$4x^4 + 2(x^2 + y^2)^2 + xy(x + y)^2 = 132 \quad (1)$$

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$$(2x^2+xy+y^2)(3x^2-xy+2y^2)=132 \quad (2)$$

Ta có $2x^2+xy+y^2=\left(\frac{x}{2}+y\right)^2+\frac{7x^2}{4}\geq 0;$

$(3x^2-xy+2y^2)-(2x^2+xy+y^2)$

$=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geq 0 \quad (3)$

$\Rightarrow 0\leq 2x^2+xy+y^2\leq 3x^2-xy+2y^2 \quad (4)$

Để ý rằng $132=1.132=2.66=3.44=4.33$ $=6.22=11.12$.

Ta cần tìm những cặp số nguyên thỏa mãn (2) và (3) đồng thời hiệu của chúng là số chính phương (do (3)). Chỉ có một cặp số như vậy là (11; 12).

Vậy $\begin{cases}2x^2+xy+y^2=11 & (5)\\ 3x^2-xy+2y^2=12.\end{cases}$

Suy ra $(x-y)^2=1$.

• Nếu $x-y=1$, ta có $x=y+1$, thay vào (5) ta được $4y^2+5y-9=0$ mà y nguyên nên $y=1$. Do đó $x=2$.

• Nếu $x-y=-1$, ta có $x=y-1$, thay vào (5) ta được $4y^2-5y-9=0$ mà y nguyên nên $y=-1$. Do đó $x=-2$.

Vậy PT (1) có hai nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(2; 1)$ và $(-2; -1)$. ☐

Nhận xét. 1) Có thể đánh giá trực tiếp được x và y, chẳng hạn:

$(1)\Leftrightarrow 5x^4+y^4+6x^2y^2+(x+y)^2(x^2-xy+y^2)\leq 132$

$\Rightarrow\begin{cases}5x^4\leq 132\\ y^4\leq 132\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leq x\leq 2\\ -2\leq y\leq 2.\end{cases}$

sau đó xét các trường hợp cụ thể của x, y.

Một số bạn đã sử dụng nhận xét: "Nếu (x_0, y_0) là nghiệm của (1) thì $(-x_0; y_0)$ cũng là nghiệm của (1)", để hạn chế các trường hợp cần xét.

2) Các bạn có lời giải tốt là:

Phú Thọ: *Trịnh Hồng Ngọc*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa:** *Lê Lan Hương*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Thế Tiến*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Bình Định:** *Võ Nhật Nam*, 9A1, THCS Ngô Mây, Phù Cát.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/386. *Cho các số a, b, c thoả mãn* $a\leq b\leq c$ *và* $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=ab^2c^3$.

Lời giải. Nếu $a>1$ thì $1<a\leq b\leq c$. Khi đó

$$a+b+c-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{a^2-1}{a}+\frac{b^2-1}{b}+\frac{c^2-1}{c}>0,$$

trái với giả thiết. Do đó $0<a\leq 1$.

Từ giả thiết suy ra

$a-\frac{1}{a}=(b+c)\left(\frac{1}{bc}-1\right)\leq 0$ nên $bc\geq 1$.

Chứng minh tương tự được $c\geq 1$ và $ab\leq 1$.

Ta có $c-\frac{1}{c}=(a+b)\left(\frac{1}{ab}-1\right)$

$\geq 2\sqrt{ab}\left(\frac{1}{ab}-1\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}-\sqrt{ab}\right)$

$\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}-\sqrt{ab}$ (do $ab\leq 1$).

Suy ra $c-\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{ab}\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(c-\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\left(1+\frac{\sqrt{ab}}{c}\right)\geq 0.$

Do đó $c\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}\Rightarrow abc^2\geq 1$. Lại có $bc\geq 1$, ta được $ab^2c^3\geq 1$.

$ab^2c=1$ khi và chỉ khi $\begin{cases}abc^2=1\\ bc=1\\ a\leq 1, c\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=1.\end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=ab^2c^3$ bằng 1 khi $a=b=c=1$. ☐

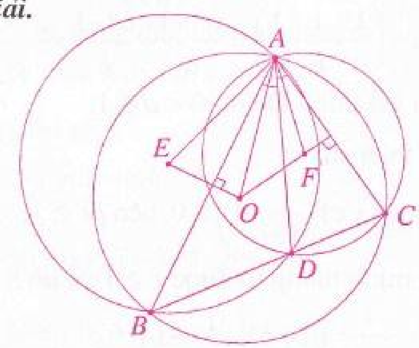
Nhận xét. 1) Đây là bài toán tìm cực trị của biểu thức có điều kiện đòi hỏi phải có kĩ năng vận dụng thành thạo các tính chất của bất đẳng thức. Hơn nữa, do sơ suất đề bài còn thiếu điều kiện a, b, c là các số thực dương. Vì vậy số lời giải gửi về tòa soạn không nhiều và ít bạn cho lời giải chính xác.

2) Hai bạn *Lê Văn Tú*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** và *Nguyễn Thị Hương Lý*, 7A1,THCS Đông Thọ, Yên Phong, **Bắc Ninh** đã nhận xét được bài toán còn thiếu điều kiện a, b, c là các số thực dương và cho lời giải tốt.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T5/386. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và đường phân giác trong AD. Gọi E, F thứ tự là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ACD. Cho BC = a. Hãy tính diện tích tứ giác AEOF.*

Lời giải.



Từ giả thiết suy ra $OE \perp AB, OF \perp AC$, do đó

$$S_{AEOF} = S_{AEO} + S_{AFO} = \frac{1}{4}(OE.AB + OF.AC) \quad (1)$$

Trong đường tròn (E), ta có

$$\widehat{AEO} = \frac{1}{2}\widehat{AEB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{ADB}$$

$$= \frac{1}{2}\left(360^o - 2\widehat{ADB}\right) = \widehat{ADC}$$

Trong đường tròn (O) có $\widehat{AOE} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \widehat{ACB}$.

Từ đó $\Delta AEO \backsim \Delta ADC$ nên $\dfrac{OE}{CD} = \dfrac{AO}{AC}$ (2)

Tương tự, cũng có $\Delta AFO \backsim \Delta ADB$, nên

$$\frac{OF}{BD} = \frac{AO}{AB} \quad (3)$$

Vì AD là phân giác của ΔABC nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra

$$4S_{AEOF} = OE.AB + OF.AC$$
$$= \frac{AO.CD}{AC}.AB + \frac{AO.BD}{AB}.AC$$
$$= AO\left(CD.\frac{BD}{CD} + BD.\frac{CD}{BD}\right)$$
$$= AO(BD + CD) = AO.BC = R.a$$

Vậy $S_{AEOF} = \frac{1}{4}R.a.$ □

∢Nhận xét. 1) Trong quá trình giải, các bạn đã tìm thêm một số kết quả đẹp đối với bốn điểm A, E, O, F :

- $AEOF$ là tứ giác nội tiếp
- AO là tia phân giác của góc EAF
- $OE = OF$.

2) Bài toán này tương đối khó, chỉ có các bạn sau cho lời giải đúng:

Phú Thọ: *Đinh Anh Hoàng*, 9A$_3$, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** *Đặng Thắng Lợi*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Thái Bình:** *Nguyễn Thị Minh Thu*, 9A, Tân Lập, Vũ Thư; **Bình Định:** *Võ Nhật Nam*, 9A$_1$, THCS Ngô Mây, Phù Cát.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★Bài T6/386. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I, có trọng tâm G nằm trong hình tròn (I). Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Lời giải. • *Giá trị nhỏ nhất*

Từ BĐT $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Từ đó

$$P = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Do đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 1, đạt được khi và chỉ khi ΔABC đều.

• *Giá trị lớn nhất.* Gọi p và r theo thứ tự là nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Từ định lí Pythagore ta có

$$IA^2 + IB^2 + IC^2$$
$$= (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + 3r^2 \quad (1)$$

Lại có $IA^2 + IB^2 + IC^2$

$$= \left(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$= 3IG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$\text{(do } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) và để ý rằng

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

(theo công thức đường trung tuyến), ta thấy

$$(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+3r^2$$

$$=3IG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \quad (3)$$

Vì I nằm trong hình tròn (I) nên $IG \le r$.
Từ (3) suy ra

$$(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2 \le \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}(a+b+c)^2-(a+b+c)^2+(a^2+b^2+c^2) \le \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 5(a^2+b^2+c^2) \le 6(ab+bc+ca).$$

Do đó $P \le \frac{6}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $IG = r$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\frac{6}{5}$ đạt được khi G nằm trên đường tròn (I), chẳng hạn đối với tam giác ABC có độ dài ba cạnh là 5, 10, 13. ❐

Nhận xét. 1) Để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P hầu hết các bạn đều sử dụng *định lí Leibnitz* hoặc *định lí Stewart* để đi đến hệ thức (2). Một số bạn nhận xét đúng rằng trong đề bài phải sửa giả thiết trọng tâm G nằm trong *đường tròn* (I) thành trọng tâm G nằm trong *hình tròn* (I).

2) Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều cho đáp số đúng. Những bạn sau có lời giải gọn hơn cả:
Hà Nội: *Mai Anh Bằng*, 11T, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Văn Quý*, 11A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Quý*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, 11A1, *Nguyễn Minh Thuận*, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hóa:** *Trịnh Đăng Sơn*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Quyền Linh*, 10A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Văn Minh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Lê Trọng Hiển*, 12A2, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Trần Thị Tú Tâm*, 11 Toán 1, *Thiều Đăng Ba*, 12 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** *Nguyễn Hùng Cường*, 10A2, THPT An Nhơn II; **Phú Yên:** *Võ Văn Huy*, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Quảng Ngãi:** *Lê Nguyên Khánh*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Bến Tre:** *Huỳnh Công Bằng*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

★Bài T7/386. *Các số dương x, y, z thoả mãn điều kiện* $x^2+y^2+z^2=\frac{1-16xyz}{4}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{x+y+z+4xyz}{1+4xy+4yz+4zx}.$$

Lời giải. *Cách* 1. (Theo bạn *Nguyễn Tuấn Vũ*, 11A1, THPT Hương Sơn, **Hà Tĩnh**).

Sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương và BĐT quen thuộc $xy+yz+zx \le x^2+y^2+z^2$, ta có

$$S \ge \frac{3\sqrt[3]{xyz}+4xyz}{1+4(x^2+y^2+z^2)}=\frac{3\sqrt[3]{xyz}+4xyz}{2(1-8xyz)} \quad (1)$$

Mặt khác, theo giả thiết và áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có

$$1-16xyz=4(x^2+y^2+z^2) \ge 12.\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \quad (2)$$

Đặt $t=\sqrt[3]{xyz}$ $(t>0)$, từ (2) suy ra

$$16t^3+12t^2-1 \le 0 \Leftrightarrow \left(t-\frac{1}{4}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 \le 0$$

$\Leftrightarrow t \le \frac{1}{4}$ (vì $t>0$). Vậy $t \in \left(0;\ \frac{1}{4}\right]$.

Theo (1) ta có $S \ge f(t)=\frac{3t+4t^3}{2(1-8t)}$, $t \in \left(0;\ \frac{1}{4}\right]$.

Suy ra $S \ge \max f(t)$, $t \in \left(0;\ \frac{1}{4}\right]$. Ta có

$$f'(t)=\frac{3(2t+1)(8t^2-2t+1)}{2(1-8t^3)}>0,\ \forall t \in \left(0;\ \frac{1}{4}\right].$$

Vậy $f(t)$ đồng biến trong khoảng $\left(0;\ \frac{1}{4}\right]$.

Suy ra $S \ge \max\limits_{0\le t\le \frac{1}{4}} f(t)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{28}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{13}{28}$, đạt được khi $x=y=z=\frac{1}{4}$.

Cách 2. (Theo bạn *Thiều Đăng Ba*, 12 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**).

Từ giả thiết suy ra

$$0<2x<1,\ 0<2y<1,\ 0<2z<1.$$

Đặt $2x=a=\cos A$; $2y=b=\cos B$; $2z=c$, $A, B \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó ĐK đã cho trở thành

$$\cos^2 A+\cos^2 B+c^2+2c\cos A\cos B=1$$
$$\Leftrightarrow (c+\cos A\cos B)^2-(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)=0$$
$$\Leftrightarrow (c+\cos A\cos B)^2-\sin^2 A\sin^2 B=0$$
$$\Leftrightarrow (c+\cos(A+B))(c+\cos(A-B))=0$$

$\Leftrightarrow c = -\cos(A+B)$ (vì $\cos(A-B) > 0$)
$\Leftrightarrow c = \cos C$, trong đó A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn. Mặt khác

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$,

suy ra $\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2} \le \frac{1}{27}$

$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} \ge 27\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow (1+a)(1+b)(1+c) \ge 27(1-a)(1-b)(1-c)$

$\Leftrightarrow 28(a+b+c+abc) \ge 26(1+ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow 28(x+y+z+4xyz) \ge 13(1+4xy+4yz+4zx)$.

Suy ra $S \ge \frac{13}{28}$. Vậy $\min S = \frac{13}{28}$, đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{4}$. ☐

Nhận xét. Đa số các bạn tham gia đều cho lời giải đúng theo một trong hai cách trên. Ngoài bạn *Vũ* và bạn *Ba*, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt:
Hải Dương: *Dương Đức Hữu*, 12A, THPT Kim Thành; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Ninh Bình:** *Vũ Thanh Tùng*, 12 Toán, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Quảng Ngãi:** *Tô Đình Dương*, 12A3, THPT Số I Đức Phổ; **Bến Tre:** *Huỳnh Công Bằng*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T8/386. *Giải phương trình*

$$2^x + 5^x = 2 - \frac{x}{3} + 44\log_2\left(2 + \frac{131x}{3} - 5^x\right).$$

Lời giải. ĐK $2 + \frac{131x}{3} - 5^x > 0$.

Đặt $y = \log_2\left(2 + \frac{131x}{3} - 5^x\right)$

$\Leftrightarrow 2^y = 2 + \frac{131x}{3} - 5^x$.

Kết hợp với PT trong đầu bài, ta được

$$\begin{cases} 2^x + 5^x = 2 - \frac{x}{3} + 44y & (1) \\ 2^y + 5^x = 2 + \frac{131x}{3} & (2) \end{cases}$$

Trừ theo vế của (1) cho (2) được

$$2^x - 2^y = 44(y - x) \qquad (3)$$

Trong (3), nếu $x \ne y$ thì hai vế trái dấu nhau, suy ra $x = y$.

Khi đó PT (2) trở thành $2^x + 5^x - \frac{131x}{3} - 2 = 0$ (4)

Xét hàm số $f(x) = 2^x + 5^x - \frac{131x}{3} - 2$, $f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 2^x\ln 2 + 5^x\ln 5 - \frac{131}{3}$

$f''(x) = 2^x\ln^2 2 + 5^x\ln^2 5 > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$.

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra PT $f(x) = 0$ có không quá hai nghiệm. Mặt khác, dễ thấy $f(0) = f(3) = 0$.

Vậy PT có đúng hai nghiệm là $x = 0$; $x = 3$ (các nghiệm này thoả mãn điều kiện của bài toán). ☐

Nhận xét. 1) Có thể giải bài toán bằng cách khác : PT đã cho có thể viết thành

$$2^x + 44x = 2^{\log_2\left(2+\frac{131x}{3}-5^x\right)} + 44\log_2\left(2 + \frac{131x}{3} - 5^x\right).$$

Hàm số $f(t) = 2^t + 44t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên từ PT trên suy ra $x = \log_2\left(2 + \frac{131x}{3} - 5^x\right) \Leftrightarrow$ (4).

2) Các bạn sau đây có bài giải tốt:
Quảng Ngãi: *Nguyễn Huỳnh Bảo Anh, Phan Cao Thanh Bình*, 11T, THPT chuyên Lê Khiết ; **Quảng Nam:** *Nguyễn Hồng Sơn*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP Tam Kỳ; **Bình Định:** *Nguyễn An Kim Thịnh*, 11TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Bà Rịa– Vũng Tàu:** *Phạm Xuân Tuấn Anh*, 11 CT, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Phạm Minh Trí*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, *Võ Văn Huy*, 11A1, THPT Lê Hồng Phong; **Cần Thơ:** *Lê Đại Thành*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bến Tre:** *Ngô Mỹ Tiên, Khổng Hữu Hiệp*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

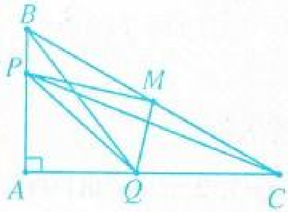
NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T9/386. *Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của cạnh BC. Vẽ góc vuông PMQ với P thuộc cạnh AB, Q thuộc cạnh AC. Chứng minh rằng*

$$PQ^2 \ge AP.CQ + AQ.BP.$$

Lời giải. (Theo bạn *Khổng Hữu Hiệp*, 11Toán, THPT chuyên **Bến Tre**).

Trong lời giải này, kí hiệu S_{XYZ} chỉ diện tích tam giác *XYZ*.



Vì $\widehat{BAC} = 90°$ nên $AP.CQ = 2S_{CQP}$ và $AQ.BP = 2S_{BPQ}$.

Suy ra $AP.CQ + AQ.BP = 2S_{CQP} + 2S_{BPQ}$ (1)

Vì M là trung điểm của BC nên tổng các khoảng cách từ B và C tới PQ bằng hai lần khoảng cách từ M tới PQ.

Do đó $S_{CQP} + S_{BPQ} = 2S_{MPQ}$ (2)

Từ (1) và (2), chú ý rằng $\widehat{PMQ} = 90°$, theo BĐT Cauchy và định lí Pythagore, ta có

$AP.CQ + AQ.BP = 4S_{MPQ} = 2PM.QM$

$\le PM^2 + QM^2 = PQ^2$.

Tóm lại $AP.CQ + AQ.BP \le PQ^2$.

Khi $AB \ne AC$, đẳng thức không xảy ra.

Khi $AB = AC$, đẳng thức luôn xảy ra. ❒

Nhận xét. 1) Nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng, tuy nhiên, nhiều bạn cho lời giải quá dài.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Lào Cai: *Phạm Ngọc Điệp*, 12T, THPT chuyên Lào Cai; **Bắc Ninh**: *Trần Anh Tuấn*, 12A1, THPT Thuận Thành 1; **Hà Nội:** *Mai Anh Bằng*, 11T1, Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Nam Định:** *Nguyễn Quang Nhân*, 10T$_2$, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Ninh**: *Hoàn Minh Tuấn*, 11T, THPT chuyên Hạ Long; **Thanh Hóa:** *Hoàng Tiến Dũng*, 11B$_{1C}$, THPT Hậu Lộc II; **Nghệ An:** *Nguyễn Quyền Linh*, 10A$_1$, Khối THPT chuyên ĐH Vinh; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Huệ Đăng*, 11T, THPT Cao Lãnh; **Vĩnh Long**: *Trần Bình Minh*, 11T$_1$, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bến Tre:** *Huỳnh Công Bằng*, 12T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH HÀ

★ Bài T10/386. *Ta gọi a_n là chữ số khác 0 cuối cùng (tính từ trái sang phải) khi biểu diễn n! trong hệ thập phân. Hỏi dãy số (a_n) với n = 1, 2, 3,... có phải là một dãy số tuần hoàn kể từ một lúc nào đó hay không? (Dãy số (a_n) gọi là tuần hoàn kể từ một lúc nào đó nếu tồn tại các số nguyên dương T và N sao cho $a_{i+T} = a_i\ \forall i \ge N$).*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Thành Khang*, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**).

Trước hết ta có nhận xét $a_n \ne 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Thật vậy ta có $a_1 = 1$. Với $n \ge 2$ thì $n! = 2^{\alpha_2}.3^{\alpha_3}...p_s^{\alpha_s}$ với $\alpha_i \in \mathbb{N}$ và p_s là số nguyên tố (thứ s).

Ta có

$$\alpha_2 = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + ...$$

$$> \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + ... = \alpha_5.$$

Do đó $n! = 10^{\alpha_5}.2^{\alpha_2 - \alpha_5}z$, $(z, 10) = 1$.

Thành thử $a_n \vdots 2 \Rightarrow a_n \ne 5$.

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại $T, N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a_{i+T} = a_i$. $\forall i \ge N$ (1)

Dễ thấy tồn tại $k, l \in \mathbb{N}^*$ đủ lớn sao cho $k > l > N$ và $10^k \equiv 10^l \pmod{T}$.

(Vì trong dãy $10^{N+1}, 10^{N+2},...$ phải có hai số hạng có cùng số dư khi chia cho T).

Do đó $a_{i+10^k-10^l} = a_i$, $\forall i \ge N$ (2)

Ta có $a_{10^k-1} = a_{10^k}$ (vì $10^k! = (10^k-1)!10^k$), do đó từ (2) với $i = 10^k - 1$, suy ra

$a_{10^k-1+10^k-10^l} = a_{10^k+10^k-10^l}$

$\Leftrightarrow a_{2.10^k-10^l-1} = a_{2.10^k-10^l}$, nên

$(2.10^k - 10^l)! = (2.10^k - 10^l - 1)!(2.10^k - 10^l)$

và chữ số khác 0 cuối cùng (tính từ trái sang) của $2.10^k - 10^l$ là 9. Thành thử ta phải có $a_{2.10^k-10^l-1} = 5$. Điều này mâu thuẫn với nhận xét ban đầu. Vậy dãy số (a_n) không là dãy số tuần hoàn kể từ một lúc nào đó. ❒

Nhận xét. Đây là một bài toán hay và tương đối khó nhưng vẫn có nhiều bạn tham gia giải và giải đúng (có một số lời giải hơi dài). Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nam: *Đinh Hữu Anh Khoa*, 10 chuyên, THPT chuyên Biên Hòa; **Hà Nội:** *Mai Anh Bằng*, 11T, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Anh Thắng*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Nam Anh*, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh; **Quảng Ngãi:** *Tô Đình Dương*, 12A1, THPT Đức Phổ; **Cần Thơ:** *Lê Đại Thành*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ Bài T11/386. *Cho n số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \ge 3)$ thoả mãn $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1$.*

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(a_1+a_2+...+a_n) \geq a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Đặt $u = a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1$.

Từ BĐT Cauchy cho hai số thực, ta có

$$u \leq \frac{a_1^2+a_2^2}{2} + \frac{a_2^2+a_3^2}{2} + ... + \frac{a_n^2+a_1^2}{2}$$

$= a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1$. Do đó

$$(a_1+a_2+...+a_n)^2$$
$$= (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2) + 2(a_1a_2+a_1a_3+...+a_{n-1}a_n)$$
$$\geq 1+2u = 3u^2 + (1+2u-3u^2)$$
$$= 3u^2 + (1-u)(1+3u) \geq 3u^2.$$

Bởi vậy $\frac{1}{\sqrt{3}}(a_1+a_2+...+a_n) \geq u.$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_{n-1}a_n = u \\ u = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow n = 3$ và $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. □

Nhận xét. Đây là bài toán bất đẳng thức đơn giản. Các bạn học sinh lớp 9, lớp 10 sau có lời giải đúng:

Bắc Ninh: *Nguyễn Văn Kỳ*, 10 Hóa, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hưng Yên:** *Vũ Nhật Khánh*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Lê Đức Cảnh*, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Trần Quang Đại*, 10T, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** *Cao Xuân Bang*, 10A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu, *Nguyễn Quyền Linh*, 10A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Văn Hoàng*, 10/7, THPT Đô Lương I; *Nguyễn Văn Quang*, 10A1, THPT Quỳnh Lưu 3; **Bình Định:** *Nguyễn Hùng Cường*, 10A2, THPT An Nhơn II, *Nguyễn Quang Hải*, 9A1, THCS Hoài Tân, Hoài Nhơn, *Võ Nhật Nam*, 9A1, THCS Ngô Mây, Phù Cát.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T12/386. *Cho dãy số (x_n) với n = 1, 2, ... được xác định bởi*

$$x_1 = a\ (a > 1),\ x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_n - \ln x_n\ (n \in \mathbb{N}^*).$$

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\ln\sqrt{x_{2k-1}}$ $(n \geq 2)$.

Tìm $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

Lời giải. (*Theo đa số các bạn*).

Nhận xét rằng $x_{2n} = 1, n = 1, 2, ...$ do $\ln 1 = 0$, suy ra $\lim_{n\to+\infty} x_{2n} = 1$.

Tiếp theo, ta chứng minh dãy (x_{2n+1}) cũng có giới hạn là 1.

Xét hàm số $f(x) = x - \ln x$ liên tục và đồng biến trong $(0;+\infty)$, vì $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$ ứng với $x > 1$.

Trước hết ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp, dãy (x_{2n+1}) bị chặn dưới bởi 1. Theo giả thiết thì $x_1 = a > 1$. Giả sử $x_{2k+1} > 1$ thì $f(x_{2k+1}) > f(1) > 1$ nên hiển nhiên $x_{2k+3} > 1$, tức dãy (x_{2n+1}) bị chặn dưới bởi 1.

Tiếp theo, ta chứng minh dãy (x_{2n+1}) là dãy giảm. Thật vậy, do $x_{2n+1} > 1$ nên $\ln x_{2n+1} > 0$ và vì vậy $x_{2n+3} - x_{2n+1} = -\ln x_{2n+1} < 0$, tức (x_{2n+1}) là dãy giảm. Từ đó suy ra (x_{2n+1}) có giới hạn $c = \lim_{n\to+\infty} x_{2n+1}$.

Chuyển qua giới hạn dãy sinh bởi hàm $f(x) = x - \ln x$, ta thu được $c = c - \ln c \Leftrightarrow c = 1$.

Vậy dãy (x_n) có giới hạn là 1.

Theo Định lí Cessaro, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n}}{2n}\right) = 1, \text{ hay}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(x_1+x_3+\cdots+x_{2n-1})+(x_2+x_4+\cdots+x_{2n})}{2n}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(nx_1-(n-1)\ln x_1-(n-2)\ln x_3-\cdots-\ln x_{2n-3}+n}{2n}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{2} - \frac{S_n}{n} + \frac{1}{2}\right) = 1$$

hay $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{a-1}{2}$. □

Nhận xét. Ngoài cách giải trên, một số bạn còn sử dụng Định lí Stolz để tính giới hạn.

Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Minh Thuận*, 11T, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Quý*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hải Dương:** *Dương Đức Hữu*, 12A, THPT Kim Thành, *Nguyễn Tuấn Dũng*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Hoàng Hồng Quân*, 11T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Ninh Bình:** *Vũ Thanh Tùng*, 12T, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Quảng Ninh:** *Nguyễn Xuân Hồng*, 11T, THPT Chuyên Hạ Long; **Thanh Hóa:** *Trịnh Đăng Sơn*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Minh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Huy*, 10T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Nam Anh*, *Bùi Đăng Khoa*, 11A1 THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** *Trần Đỗ Hữu Toàn*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Cà Mau:** *Nguyễn Thu Hiền*, 12T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Phú Yên:** *Phan Minh Trí*, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh, *Vũ Văn Huy*, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Bến Tre:** *Nguyễn Hữu Tiệp*, *Võ Minh Trí*, 11T THPT chuyên Bến Tre; **Quảng Ngãi:** *Tô Đình Dương*, 12A3 THPT Đức Phổ, Quảng Ngãi.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài L1/386. *Một khối bán cầu tâm O, khối lượng m được đặt sao cho mặt phẳng của khối nằm trên một mặt phẳng nằm ngang. Một vật nhỏ có khối lượng m bay theo phương ngang với vận tốc u tới va chạm với bán cầu tại điểm A sao cho bán kính OA tạo với phương ngang một góc α. Coi va chạm là hoàn toàn đàn hồi. Bỏ qua mọi ma sát.*

Hãy xác định vận tốc của khối bán cầu sau khi va chạm.

Lời giải. Kí hiệu v_1 và v_2 lần lượt là vận tốc của vật và bán cầu sau va chạm, $\vec{v}_1$ hợp với phương ngang một góc β. Do không có ma sát nên động lượng của hệ theo phương ngang được bảo toàn, ta có

$$mu = mv_1\cos\beta + mv_2 \Leftrightarrow u = v_1\cos\beta + v_2 \quad (1)$$

Theo định luật bảo toàn cơ năng ta có

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \Leftrightarrow u^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad (2)$$

Do không có ma sát giữa vật và bán cầu nên thành phần vận tốc theo phương tiếp tuyến với bán cầu trước và sau va chạm không đổi, tức là $v_1\sin(\alpha+\beta) = u.\sin\alpha$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta tìm được $v_2 = \dfrac{2u}{2+\tan^2\alpha}$. □

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng:

Nghệ An: *Mạnh Đạt*, *Hồ Trọng Hùng*, A3K37, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Đông*, *Tạ Việt Ý*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Cần Thơ:** *Trần Thế Tấn*, *Nguyễn Vũ Hải Hà*, 12A3, *Nguyễn Long Phước Đường*, 11A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/386. *Có bốn linh kiện: điện trở R, cuộn dây có độ tự cảm L còn điện trở thuần không đáng kể, hai tụ điện có điện dung tương ứng là C_1 và C_2. Ghép từng linh kiện lần lượt vào nguồn xoay chiều có hiệu điện thế hiệu dụng U, tần số f thì ta thấy cường độ dòng điện hiệu dụng qua các linh kiện L, C_1, C_2 có độ lớn theo thứ tự là $I_{C_1} > I_L > I_{C_2}$.*

Tìm điều kiện về độ lớn và sự liên hệ giữa C_1, C_2, L để khi ghép nối tiếp R, L, C_1 và khi ghép nối tiếp R, L, C_2, rồi lần lượt đặt vào hai đoạn mạch ghép nối tiếp này nguồn xoay chiều có hiệu điện thế hiệu dụng U, tần số f sao cho

a) $\cos\varphi$ bằng nhau.

b) $\cos\varphi$ lớn nhất (khi $\varphi \neq k\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$, nghĩa là khi hai mạch chưa có cộng hưởng).

Lời giải. Ta có $I_{C_1} > I_L > I_{C_2}$, suy ra $Z_{C_1} < Z_L < Z_{C_2}$ và $C_1 > C_2$.

a) $$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(Z_L - Z_{C_1}\right)^2} \quad (1)$$

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + \left(Z_{C_2} - Z_L\right)^2} \quad (2)$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{R}{Z_1} \quad (3) \qquad \cos\varphi_2 = \frac{R}{Z_2} \quad (4)$$

Để $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$ thì $Z_L - Z_{C_1} = Z_{C_2} - Z_L$, suy ra $2Z_L = Z_{C_2} + Z_{C_1}$

hay $$2L\omega = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) = \frac{1}{\omega}.\frac{1}{C} \quad (5)$$

với C là điện dung tương đương của C_1 và C_2 ghép nối tiếp.

Từ (5) ta có $\dfrac{1}{\omega^2} = 2L\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}$.

Vậy khi $\dfrac{1}{\omega^2} = 2L\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ thì $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$.

TIN TỨC

HỘI THẢO KHOA HỌC
CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN VÀ ỨNG DỤNG

Trong hai ngày 28 và 29 tháng 11 năm 2009, tại TP. Bắc Giang, Hội Toán học Hà Nội, trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội và Sở GD-ĐT Bắc Giang đồng tổ chức Hội thảo khoa học "*Các chuyên đề chuyên Toán và ứng dụng*". Hội thảo khoa học này nhằm kỉ niệm 20 năm semina liên trường, viện về các chuyên đề và phương pháp toán sơ cấp, thông báo các kết quả nghiên cứu mới về các chuyên đề học sinh giỏi bậc phổ thông - Các chuyên đề toán trong chương trình trọng điểm QGTĐ08.09 của ĐHQG Hà Nội. GS.TSKH. NGND. *Nguyễn Văn Mậu*, Chủ tịch Hội đồng khoa học trường ĐHKHTN kiêm Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội chủ trì Hội thảo. Tham dự Hội thảo có nhiều nhà khoa học, các chuyên gia toán học của các trường ĐHKHTN Hà Nội, ĐHBK Hà Nội, ĐHSP Hà Nội, Viện Toán học Việt Nam, Hội Toán học Hà Nội, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Tạp chí Toán Tuổi Thơ; các cán bộ chỉ đạo chuyên môn, các thầy cô giáo đang trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi toán của các tỉnh Bắc Giang, Thái Bình, Điện Biên, Cao Bằng, Thái Nguyên, Tuyên Quang, Bắc Kạn, Lạng Sơn, Hà Giang,... và đặc biệt có đông đảo học sinh chuyên Toán Bắc Giang. Với sự chuẩn bị chu đáo của Ban Tổ chức và giúp đỡ nhiệt tình của Sở GD - ĐT tỉnh, trường chuyên Bắc Giang Hội nghị đã thành công tốt đẹp để lại ấn tượng sâu sắc cho tỉnh Bắc Giang và các đại biểu tham dự.

THANH LOAN

---

b) Ta biết rằng $(\cos\varphi)_{max} = 1$. Từ (1), (2), (3), (4) thì $\cos\varphi$ lớn nhất khi $L\omega = \dfrac{1}{C_1\omega} = \dfrac{1}{C_2\omega}$.

Nhưng theo đề bài $\varphi \neq k\pi$ và $I_{C_1} > I_{C_2}$, suy ra $C_1 > C_2$.

Nếu $L\omega = \dfrac{1}{C_1\omega} \Rightarrow C_1 = C_2 + \Delta C$, với ΔC rất nhỏ để $LC_1 \approx \dfrac{1}{\omega^2}$, $LC_2 \approx \dfrac{1}{\omega^2}$ thì $L(C_1+C_2) = \dfrac{2}{\omega^2}$.

Do đó $L(C_2 + C_2 + \Delta C) = \dfrac{2}{\omega^2}$;

$$2L\left(C_2 + \frac{\Delta C}{2}\right) = \frac{2}{\omega^2}.$$

Suy ra $C_2 + \dfrac{\Delta C}{2} = \dfrac{C_1 + C_2}{2}$.

Vậy $L\left(\dfrac{C_1 + C_2}{2}\right) = \dfrac{2}{\omega^2} \Rightarrow L(C_1 + C_2) = \dfrac{4}{\omega^2}$.

Điều kiện cần và đủ để $\cos\varphi$ lớn nhất khi hai mạch chưa có cộng hưởng là $L(C_1+C_2) = \dfrac{4}{\omega^2}$. □

Nhận xét. Bài toán này khá khó nên không có bạn nào có lời giải đúng.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Nhìn ra thế giới

KÌ THI OLYMPIC BOSNIA và HERCEGOVINA NĂM 2009

Các Kì thi Toán ở Bosnia và Herzegovina (thuộc Liên Bang Nam Tư cũ) được tổ chức từ năm 1956. Trong số này THTT giới thiệu với bạn đọc đề thi Olympic Bosnia và Hercegovina tổ chức vào tháng 5 - 2009 vừa qua.

NGÀY 1

Câu 1. Cho M và N thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường phân giác ngoài đỉnh B và C của tam giác ABC. Chứng minh rằng độ dài đoạn thẳng MN bằng nửa chu vi của tam giác ABC.

Câu 2. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(a\ ,\ b)$ sao cho $\dfrac{a^2(b-a)}{b+a}$ là bình phương của một số nguyên tố.

Câu 3. Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_{100}$ sao cho:
$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{100} \geq 0;\quad a_1^2+a_2^2 \geq 100;$
$a_3^2+a_4^2+\cdots+a_{100}^2 \geq 100.$
Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của tổng

$$a_1 + a_2 + ... + a_{100}.$$

NGÀY 2

Câu 4. Cho một bảng $1 \times n$ $(n \geq 2)$, hai người chơi lần lượt điền các dấu + và − vào các ô của bảng. Người chơi thứ nhất chỉ điền dấu +, người chơi thứ hai chỉ điền dấu −. Hai ô liền nhau không được phép điền dấu giống nhau. Người chơi nào không thể tiếp tục thực hiện lượt chơi của mình sẽ thua cuộc. Hỏi người chơi nào trong hai người chơi có chiến thuật để luôn thắng cuộc?

Câu 5. Một đường thẳng cắt hai cạnh AB và BC của tam giác ABC lần lượt tại M và N. Giả sử diện tích tam giác MBK bằng diện tích của tứ giác $AMKC$. Chứng minh rằng

$$\frac{|MB|+|BK|}{|AM|+|CA|+|KC|} \geq \frac{1}{3}.$$

Câu 6. Cho một số tự nhiên n và một số thực $x > 0$ sao cho không có số nào trong các số x, $2x$, ..., nx, $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{2}{x}$, ..., $\dfrac{[nx]}{x}$ là số nguyên. Chứng minh rằng

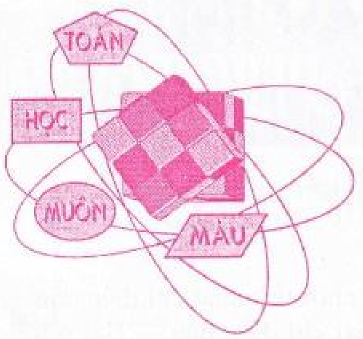
$$[x]+[2x]+\cdots+[nx]+\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+\cdots+\left[\frac{nx}{x}\right]=n[nx]$$

THANH HỒNG (sưu tầm)

THÔNG BÁO

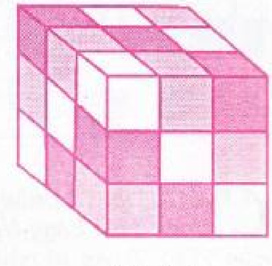
- Tạp chí THTT phát hành cuốn *ĐÓNG TẬP TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ NĂM 2009*. Tất cả 12 số tạp chí THTT trong năm được đóng thành tập bìa cứng, mạ chữ vàng. Đây là cách để lưu giữ tạp chí tốt nhất, có hệ thống và tiện tra cứu đối với các thư viện, các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán. Số lượng sách có hạn, bạn muốn có trọn bộ THTT năm 2009 hãy liên hệ ngay với Tòa soạn. Giá bán lẻ 88.000 đồng.
- Mời các bạn đặt mua Tạp chí THTT cho quý I năm 2010 tại các cơ sở Bưu điện nơi gần nhất. Mọi chi tiết xin các bạn vui lòng liên hệ tại các cơ sở Bưu điện nơi đặt mua.

THTT



HÌNH HỘP NHIỀU MÀU

Cho một hình lập phương gồm 27 lập phương nhỏ, ta có thể tô các mặt của nó bằng ba màu sao cho các mặt của mỗi hình lập phương nhỏ được tô bởi cùng một màu và bất kì ba hình vuông nhỏ liên tiếp theo chiều dọc, theo chiều ngang của mỗi mặt được tô bởi ba màu khác nhau (h.1).



Hình 1

Dành cho bạn đọc

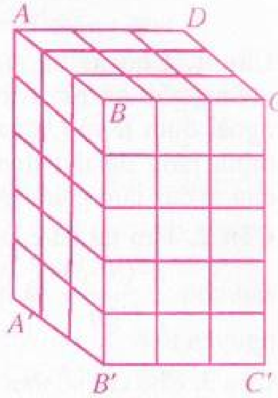
Nhân *kỉ niệm 45 năm xuất bản tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, các bạn hãy thử tô màu các mặt của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ gồm 45 hình lập phương nhỏ (h. 2) sao cho các mặt của mỗi hình lập phương nhỏ được tô bởi cùng một màu với yêu cầu dưới đây.

1) Tô bằng 6 màu các mặt của hình hộp thỏa mãn hai điều kiện sau:

a) Bất kì ba hình vuông nhỏ liên tiếp theo chiều dọc, theo chiều ngang của mặt đáy hoặc theo chiều ngang, theo cột đứng của mặt bên được tô bởi 3 màu khác nhau.

b) Bất kì bốn hình vuông nhỏ có chung một đỉnh được tô bởi 4 màu khác nhau.

2) Tìm quy luật sắp xếp màu của mặt đáy hình hộp khi tô chỉ bằng 5 màu, từ đó chứng minh rằng không thể tô các mặt của hình hộp bằng 5 màu mà thỏa mãn cả hai điều kiện trên.



Hình 2

PHI PHI

PROBLEMS.... (*Tiếp trang 17*)

T8/390. Let ABC be a triangle with $AB = 3R$, $BC = R\sqrt{7}$, $CA = 2R$. Let M be an arbitrary point on the spherical surface $(C\ ;\ R)$. Find the least value of $MA + 2MB$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/390. There are 294 people in a meeting. Those who are acquainted shake hands with each other. Knowing that if A shakes hands with B then one of them shakes hands at most 6 times. What is the greatest number of possible handshakes?

T10/390. Given a positive integer m, find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that for every $x, y \in \mathbb{N}$ we have

1) If $f(x) = f(y)$ then $x = y$;

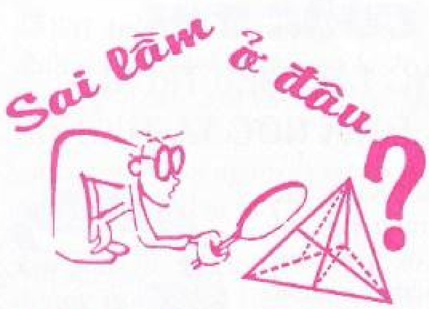
2) $f\left(f\left(f\left(\dots\left(f\left(f(x)+f(y)\right)\right)\dots\right)\right)\right) = x + y.$

Here, f appears m times on the left hand side.

T11/390. Let $f(x)$ be a continuous function on the closed interval $[0\ ;\ 1]$, and differentiable on the open interval $(0\ ;\ 1)$ such that $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Prove that for two arbitrary real numbers k_1, k_2, there exist two distinct numbers a, b in the open interval $(0\ ;\ 1)$ such that $\dfrac{k_1}{f(a)} + \dfrac{k_2}{f(b)} = k_1 + k_2$.

T12/390. Let ABC be a triangle with orthocenter H. Prove that the common tangent, distinct from AH, of the incircles of the triangles ABH and ACH passes through the midpoint of BC.

Translated by LE MINH HA



Giải đáp bài:

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT VÔ NGHIỆM?

(Đề đăng trên THTT số 386, tháng 8 năm 2009)

• *Chỗ sai lầm* của bạn học sinh nằm ở bước biến đổi sau:

$$\log_2\frac{x}{2} = -\log_3\frac{x}{2} = \frac{1}{\log_{\frac{x}{2}} 2} = -\frac{1}{\log_{\frac{x}{2}} 3}$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{x}{2}} = -\log_{\frac{x}{2}} 2.$$

Phép biến đổi này chỉ đúng khi $\frac{x}{2} \neq 1$, tức là $x \neq 2$. Chính vì ngầm hiểu $\frac{x}{2} \neq 1$ trong phép biến đổi trên mà bạn học sinh đó vô tình làm mất nghiệm $x = 2$ của bài toán.

• *Một lời giải đúng cho bài toán trên.*
Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2 x + \log_3 x = \log_3 2 + \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_3 2.\log_2 x = \log_3 2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x(1 + \log_3 2) = 1 + \log_3 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

• Những bạn sau có đáp án tốt hơn cả:
Hà Nội: *Nguyễn Văn Quý*, 11A1 Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, *Nguyễn Việt Dũng*, 12 Toán, THPT Sơn Tây, *Nguyễn Khả Minh*, 11A2, THPT Trần Đăng Ninh, Ứng Hòa; **Cần Thơ:** *Lê Đại Thành*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **Bến Tre:** *Cao Thành Chương*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGỌC HIỂN

THẬT TUYỆT VỜI!

Bắc và **Trung** đang tranh luận thì **Nam** bước vào.

Nam: Các cậu làm gì mà ồn ào vậy?

Bắc: Bọn tớ đang loay hoay mà vẫn chưa tìm được lời giải bài toán:

Tìm các giá trị của m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 3y^2 \le 6 \\ x^2 + xy - 2y^2 = m \end{cases} \quad (*)$$

Nam: Bài này quen quen, hình như tớ đã gặp thì phải? Các cậu cứ để tớ!

Nói rồi, **Nam** đặt bút và chỉ một lát sau đưa ra lời giải bài toán.

Điều kiện cần. Giả sử hệ (*) có nghiệm $(x\,;\,y)$, *suy ra*

$$\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 3y^2 \le 6 \\ -3x^2 - 3xy + 6y^2 = -3m \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow (x - 3y)^2 \le 6 - 3m \Rightarrow 6 - 3m \ge 0 \Rightarrow m \le 2.$$

Điều kiện đủ. Với $m \le 2$, *xét hệ PT*

$$\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 3y^2 = 6 \\ x^2 + xy - 2y^2 = 2 \end{cases} \quad (**)$$

Nếu hệ (**) có nghiệm thì hệ (*) có nghiệm.

$$Hệ\ (**) \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3y)^2 = 0 \\ x^2 + xy - 2y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 10y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x;y) \in \left\{ \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5} \right); \left(\frac{-3\sqrt{5}}{5}; \frac{-\sqrt{5}}{5} \right) \right\}.$$

Vậy hệ (**) có nghiệm.

Tóm lại các giá trị cần tìm là $m \le 2$.

Xem xong, **Bắc** và **Trung** cùng vỗ tay reo lên: "Hoan hô **Nam**, một lời giải tuyệt vời!".

Còn các bạn, các bạn cũng tán thưởng cho **Nam** chứ?

ĐỖ BÁ CHỦ
(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

CUỘC THI
GIẢI TOÁN KỈ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

LTS. *Cuộc thi giải toán đặc biệt kỉ niệm 45 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ được bắt đầu từ số 381, (tháng 3/2009 đến số 385 (tháng 7/2009). Cuộc thi này được nhiều bạn ở khắp cả nước tham gia. Đặc biệt có một số bạn ở bậc THCS đã giải lời giải hay, độc đáo với những phương pháp mới cho nhiều bài toán ở bậc THPT. Một số bạn đoạt giải cao ở cuộc thi giải toán trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm học 2008-2009 cũng đoạt giải cao ở cuộc thi này. Sau đây là danh sách các bạn đoạt giải cuộc thi.*

Giải Nhất (2 giải)

1) *Bùi Thế Bưn*, 9A2, THCS Phú Thái, Kim Thành, **Hải Dương**.
2) *Mai Anh Bằng*, 10T, Trường THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội**.

Giải Nhì (4 giải)

1) *Nguyễn Danh Nhân*, 9A2, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ, **Bình Định**.
2) *Nguyễn Việt Hoàng Phú*, 9B, THCS Gia Khánh, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**.
3) *Võ Văn Huy*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, **Phú Yên**.
4) *Vũ Minh Thắng*, 12A1, Trường THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội**.

Giải Ba (9 giải)

1) *Hà Nhật Cương*, 9A, THCS Anh Sơn, **Nghệ An**.
2) *Nguyễn Thế Bảo*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
3) *Phạm Quốc Việt*, 9A, THCS Nguyễn Tự Tân, Bỉm Sơn, **Quảng Ngãi**.
4) *Nguyễn Văn Cương*, 9A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong, **Bắc Ninh**.
5) *Hồ Phạm Thiều*, 10A1, THPT Lê Hữu Trác 1, Hương Sơn, **Hà Tĩnh**.
6) *Nguyễn Thị Thanh Hòa*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**.
7) *Đặng Cảnh Thiện*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An**.
8) *Lê Phúc Lữ*, 12 Toán, THPT chuyên **Bến Tre**.
9) *Lê Văn Huỳnh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.

THTT

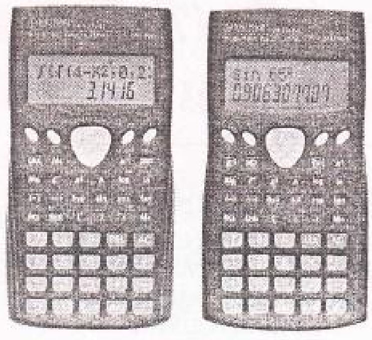
CUỘC THI
SÁNG TÁC BIỂU TRƯNG TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Cuộc thi Sáng tác Biểu trưng Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ nhân Kỉ niệm 45 năm (1964 – 2009) do TS. *Nguyễn Quý Thao*, Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam phát động từ tháng 4 đến tháng 6 năm 2009 với yêu cầu Biểu trưng của Tạp chí phải thể hiện được hai mặt Toán học và Tuổi trẻ đi liền nhau, bổ sung cho nhau, có chữ Toán học và Tuổi trẻ, mang tính chất tạp chí phổ biến khoa học, có tính mĩ thuật với 1 màu hoặc 2 màu. Ban Tổ chức cuộc thi đã nhận được 21 tác phẩm dự thi của nhiều hoạ sĩ ở các công ty: Công ty CP Mĩ thuật và Truyền thông, Công ty CP Thiết kế và Phát hành sách giáo dục, Công ty CP Thương mại Vietcom, Công ty TNHH Cánh đồng vàng. Sau khi trưng bày các tác phẩm trong buổi Lễ Kỉ niệm *Ngày báo chí Cách mạng Việt Nam 21/6* để lấy ý kiến Hội đồng biên tập và các cộng tác viên của tạp chí kết hợp với yêu cầu đề ra, Ban Giám khảo do Hoạ sĩ *Phạm Ngọc Tới* (Phó Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam chủ trì đã quyết định tác phẩm của Hoạ sĩ *Tạ Thanh Tùng*, Công ty CP Mĩ thuật và Truyền thông đoạt giải Nhất và được chọn làm Biểu trưng của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Logo được thiết kế 1màu xanh côban, có chữ THTT được thể hiện bởi hình tượng chữ π (một số quen thuộc trong toán học), hai chữ T vươn cao cùng với đường ngang lượn sóng cho thấy những nét hiện đại, khỏe khoắn và trẻ trung. Toàn bộ khối chữ THTT viết tắt và viết đầy đủ được đặt trong một khối hình tròn thể hiện theo Thuyết âm dương ngũ hành, mang tính triết học Phương Đông. Toàn bộ tổng thể khối logo thể hiện được đường nét vững chắc, hiện đại, tính khoa học của Toán học và Tuổi trẻ.

Toà soạn xin chân thành cám ơn Lãnh đạo NXBGD Việt Nam đã tổ chức cuộc thi này và cám ơn các hoạ sĩ đã nhiệt tình tham gia cuộc thi.

THANH LOAN

VIETNAM® CALCULATOR



VN-570RS VN-500RS

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CẦM TAY VIETNAM CALCULATOR THÁNG 12/2009

Trưởng ban tổ chức: Trần Minh Thế
Chuyên viên Toán học sinh giỏi máy tính cầm tay
VIETNAM CALCULATOR

Bài 1. Dùng phương pháp lặp trên máy **VIETNAM CALCULATOR *VN-570RS*** để tìm số tự nhiên n, nếu biết giá trị gần đúng sau:

$$(1+1)(2+\sqrt{2})(3+\sqrt[3]{3})\ldots(n+\sqrt[n]{n})=1{,}1162\times 10^{10}.$$

Bài 2. Hãy cho biết số chữ số của số $B=25^{2009}+12^{9002}$.

Bài 3. Tìm x, y là số tự nhiên thỏa: $(\overline{5y})^{x^2}=\overline{541y1y(x^2)441448y(x^2)}$.

Bài 4. Tìm chữ số thập phân thứ 15 sau dấu phẩy của $\sqrt{12}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có $BC=8{,}876$; $AC=7{,}765$; $AB=6{,}654$.

a) Tính số đo.(độ, phút, giây) của góc BAC.

b) Gọi G, H lần lượt là trọng tâm và trực tâm của tam giác ABC. Tính gần đúng với 5 chữ số thập phân độ dài các đoạn GA và GH.

Thời gian gửi bài dự thi: Từ ngày 15 đến 30 hàng tháng.

Công bố kết quả: Ngày 8 hàng tháng.

Cơ cấu giải thưởng:

- 1 Giải Nhất mỗi giải gồm 01 máy tính *VN-570RS* + 150.000 đồng + Giấy khen.
- 2 Giải Nhì mỗi giải gồm 01 máy tính *VN-570RS* + 50.000 đồng + Giấy khen.
- 3 Giải Ba mỗi giải gồm 01 máy tính *VN-500RS* + 50.000 đồng + Giấy khen.
- 3 Giải triển vọng mỗi giải là 01 máy tính *VN-500RS* + Giấy khen.

Nội dung bài dự thi bao gồm:

- Tên, ngày, tháng, năm sinh, địa chỉ; Lớp; Trường.
- Lời giải chi tiết, trình bày các quy trình ấn phím rõ ràng.

Bài dự thi xin gửi về:

- Bằng thư xin gửi: CÔNG TY CỔ PHẦN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ VIỆT NAM.
  Địa chỉ: 63/117, Thái Hà, Quận Đống Đa, Hà Nội. Điện thoại: 04.35378736.
- Bằng email xin gửi: btc_hocsinhgioitoan@maytinhdientu.com.vn

Mọi thông tin về cuộc thi và danh sách người trúng thưởng sẽ được đăng tại website: www.maytinhdientu.com.vn

Thí sinh tham dự cuộc thi lưu ý:

Được phép dùng máy CASIO *fx-500MS* và *fx-570MS* để tham dự cuộc thi vì 2 loại máy này có cách sử dụng và chức năng tương đương với *VN-500RS* và *VN-570RS*. Không được dùng máy *fx-500ES* và *fx-570ES*, vì trình tự bấm phím của dòng máy này khác với *VN-500RS* và *VN-570RS*.

* **Thông báo từ Ban tổ chức:** *Nhằm đáp ứng tốt hơn yêu cầu của thí sinh và để công bố lời giải của đề thi mà trên 1 trang báo chúng tôi không thể đăng tải hết được. Vậy Ban tổ chức xin thông báo tới toàn thể các bạn học sinh tham gia dự thi cuộc thi "Học sinh giỏi giải toán trên máy tính cầm tay VIETNAM CALCULATOR". Bắt đầu từ tháng 1 năm 2010, cuộc thi sẽ chỉ tổ chức trên* ***website: www.maytinhdientu.com.vn****. Đây sẽ là nơi các bạn có thể trao đổi với nhau các bài toán hay, các cách giải hay và các thủ thuật máy tính, để chúng ta có thể khai thác tối đa hiệu quả của chiếc máy tính cầm tay thân yêu.*

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 390(12.2009)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35144272, 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : MINH THƠ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

DỰ ÁN PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC TRUNG HỌC PHỔ THÔNG -

Mục tiêu và Tiến độ

I. MỤC TIÊU

Dự án Phát triển Giáo dục Trung học phổ thông (THPT) của Bộ GD&ĐT nhằm góp phần xoá đói giảm nghèo ở Việt Nam thông qua phát triển và cải thiện chất lượng giáo dục THPT.

Mục tiêu cụ thể là:

*) Cải thiện chất lượng và hiệu quả của giáo dục THPT.

*) Tăng cường khả năng tiếp cận, tính công bằng và sự tham gia vào giáo dục THPT ở các vùng khó khăn.

*) Tăng cường năng lực quản lí giáo dục THPT từ Bộ GD&ĐT đến các cấp quản lí giáo dục ở địa phương.

Trường THPT Đăk Hring tỉnh Kon Tum do Dự án xây dựng

Tổng nguồn vốn của Dự án khi kí kết là 80 triệu USD, trong đó vốn vay của ADB là 55 triệu và vốn đối ứng là 25 triệu. Dự án khởi động ngày 5/5/2004 và kết thúc ngày 30/6/2011.

II. TIẾN ĐỘ THỰC HIỆN CÁC MỤC TIÊU CHỦ YẾU ĐẾN 30/11/2009

1. Hoàn thành, đưa vào sử dụng 1675/2441 phòng đạt 68,6% , trong đó có 1030 phòng học, 111 phòng thư viện, 280 phòng thí nghiệm, 145 phòng vi tính, 109 phòng nội trú.

2. Trang thiết bị cho trường xây mới được 148/203 trường đạt 72,9 %, trang bị đồ gỗ được 146/206 trường đạt 70,9%.

3. Cung cấp thiết bị cho 4 trường Thực hành sư phạm, 128 trường chuẩn Quốc gia, 3 trường chuẩn Quốc tế, 22 trường Dân tộc nội trú, 38 Trung tâm giáo dục Kĩ thuật tổng hợp hướng nghiệp, 4 trường THPT Kĩ thuật thí điểm. Trang bị thiết bị phòng đa phương tiện ở TW và thiết bị EMIS cho 64 Sở GD-ĐT.

4. Đào tạo ngắn ở nước ngoài cho 101 chuyên gia là Tổng Chủ biên, Chủ biên, tác giả chương trình và sách giáo khoa mới; 88 cán bộ quản lí giáo dục THPT.

5. Bồi dưỡng trong nước cho 66 354 cán bộ, giáo viên là giảng viên các trường đại học, cán bộ quản lí và giáo viên cốt cán các tỉnh để thực hiện thí điểm và triển khai đại trà chương trình và sách giáo khoa mới các bộ môn Văn hoá, Quốc phòng - An ninh, GDTX trong toàn quốc và tăng cường năng lực về phương pháp dạy học cho giáo viên THPT 22 tỉnh tham gia Dự án.

6. Cung cấp 45 vạn bản SGK, SBT, SGV, 134 đầu tài liệu, 72 loại băng đĩa hình để bồi dưỡng giáo viên phục vụ thí điểm và triển khai đại trà; 95 đầu tài liệu và 27 780 bản về bồi dưỡng tăng cường năng lực phương pháp dạy học; sách và tài liệu tham khảo cho thư viện 662 trường THPT ở 22 tỉnh tham gia Dự án.

7. Xây dựng, cung cấp cho 22 tỉnh tham gia Dự án tài liệu về tư vấn hướng nghiệp, phần mềm dạy học một số bộ môn, phần mềm Thời khóa biểu, giáo dục kĩ năng sống và giới cho 10 000 học sinh THPT ở 22 tỉnh.

8. Nghiên cứu thử nghiệm 6 sáng kiến về quản lí giáo dục THPT và xây dựng, thử nghiệm và cung cấp phần mềm bản đồ trường học cho các trường THPT 22 tỉnh tham gia Dự án .

9. Nguồn vốn vay, đã trao thầu 53 355 630 USD đạt 82,5% nguồn vốn, giải ngân 45 314 518 USD đạt 70% nguồn vốn.

Trưởng ban điều hành Dự án
TRẦN NHƯ TỈNH

TRƯỜNG THPT ĐOÀN THƯỢNG, TỈNH HẢI DƯƠNG

30 NĂM XÂY DỰNG VÀ TRƯỞNG THÀNH

NGƯT TRƯƠNG TIẾN SỰ
Hiệu trưởng nhà trường

Tập thể cán bộ, giáo viên nhà trường

Trường THPT Đoàn Thượng được thành lập ngày 15/8/1979 theo Quyết định số 53 của UBND tỉnh Hải Hưng (nay là tỉnh Hải Dương). Năm đầu thành lập trường chỉ có 4 lớp 10 với gần 160 học sinh, 18 cán bộ, giáo viên do thầy *Vũ Công Kha* làm Hiệu trưởng.

Đến năm học 1993-1994, trường được Sở GD-ĐT và UBND tỉnh đầu tư, cải tạo nâng cấp 4 phòng học cấp bốn thành phòng học kiên cố, xây mới 1 nhà ba tầng gồm 12 phòng học, trồng nhiều cây xanh. Từ đó, trường trở thành một trong số không nhiều các trường khu vực của tỉnh có cơ sở vật chất khang trang. Năm học 1995-1996, Sở GD-ĐT đã chọn trường là địa điểm để phát động phong trào xây dựng trường xanh - sạch - đẹp ở tất cả các trường trong tỉnh. Từ năm học 2009-2010 Trường được mở rộng thêm 7.600 m^2, nâng tổng diện tích nhà trường lên hơn 23.000 m^2. Mục tiêu của trường là phấn đấu trở thành một trong những trường có quy hoạch cảnh quan xanh - sạch - đẹp nhất tỉnh, đáp ứng ngày một tốt hơn nhu cầu dạy, học và hoạt động ngoại khoá. Về mặt hoạt động này, trường đã vinh dự được nhận 2 Bằng khen của UBND tỉnh, 3 Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Là một trường ở xa các trung tâm kinh tế chính trị lớn; khu vực trường tuyển sinh trước đây là những xã thuần nông, phong trào học tập chưa cao, chất lượng học sinh đầu vào thấp nên kết quả còn hạn chế, chưa tạo được niềm tin và uy tín trong nhân dân và trong ngành. Cũng như việc xây dựng cơ sở vật chất, không thể chỉ trông chờ vào ngân sách nhà nước, phải biết tự vượt lên, đi bằng chính đôi chân, nghĩ bằng chính khối óc của mình, bằng lao động đường lối, phương châm chiến lược của Chi uỷ, Ban Giám hiệu nhà trường được cán bộ, giáo viên và học sinh trong trường và các cấp lãnh đạo đồng tình ủng hộ. Muốn có trò giỏi trước hết phải có thày giỏi. Nhà trường rất chú trọng công tác xây dựng đội ngũ từ khâu tuyển dụng đến bồi dưỡng, từ đề bạt đến đánh giá, từ động viên khen thưởng kịp thời đến xử phạt nghiêm minh. Kết quả, sau nhiều năm kiên trì thực hiện, đến nay trường đã có một đội ngũ giáo viên tuy tuổi đời còn trẻ nhưng trình độ tay nghề khá giỏi đạt 80% trở lên, phân bố đều ở các môn. Đến nay trường có 54 cán bộ, giáo viên đều đạt chuẩn trong đó có 8 Thạc sĩ, 2 người có trình độ Sau Đại học, có 2 giáo viên đạt giải Nhất trong các kì thi Giáo viên giỏi cấp tỉnh, gần 100 lượt người đạt danh hiệu Giáo viên giỏi, Chiến sĩ thi đua các cấp; có 10 giáo viên được tặng Huy chương và Kỉ niệm chương Vì sự nghiệp Giáo dục; 3 giáo viên được tặng Kỉ niệm chương Vì thế hệ trẻ, 2 giáo viên được tặng Kỉ niệm chương Vì sự nghiệp Công đoàn, 8 giáo viên được tặng Bằng khen cấp tỉnh và trung ương. Trong 10 năm trở lại đây, tỉ lệ đỗ tốt nghiệp của nhà trường luôn đạt từ 98% đến 100%, đồng đội thi học sinh giỏi Tỉnh luôn đứng ở vị trí từ thứ 3-14, riêng đồng đội các môn Toán, Lí, Sinh, Địa đã có 6 lần đứng thứ Nhất tỉnh. Năm học 2007-2008 tỉ lệ đỗ vào các trường Đại học, Cao đẳng là 64,5%. Đặc biệt, năm học 2008-2009 trường vinh dự lọt vào tốp 200 trường THPT có điểm thi Đại học cao nhất cả nước.

Với thành tích đó, năm 2008 trường được Nhà nước trao tặng Huân chương Lao động hạng Ba, thầy *Trương Tiến Sự* Bí thư Chi bộ, Hiệu trưởng nhà trường được phong tặng là *Nhà giáo Ưu tú*. Đề án xây dựng trường THPT Đoàn Thượng tiến tới là "Trường chuẩn Quốc gia" đã được UBND tỉnh phê duyệt.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT12M9

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2009

Giá : 6000 đồng
Sáu nghìn đồng