TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

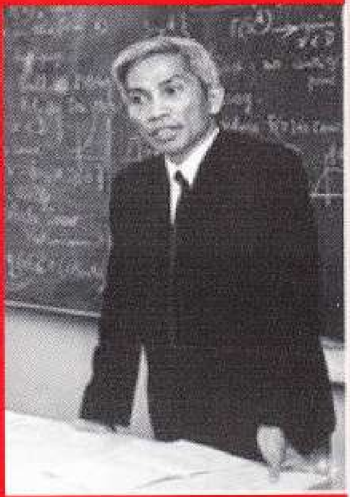
11 2011 Số 413

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 48

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Kết quả cuộc thi GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÍ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ năm học 2010-2011



Chúng tôi viết bài này để chúc mừng GS. *Hoàng Tụy* khi ông là người đầu tiên trên thế giới vừa được trao tặng *Giải thưởng Constantin Caratheodory* và để chúc mừng Khoa Toán-Cơ-Tin, Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, tròn 55 tuổi (1956 - 2011), mà GS. *Hoàng Tụy* là Chủ nhiệm khoa thứ hai. Mười một Chủ nhiệm khoa từ ngày được thành lập đến nay là các Giáo sư: *Lê Văn Thiêm, Hoàng Tụy, Phan Văn Hạp, Hoàng Hữu Như, Trần Văn Nhung, Nguyễn Duy Tiến, Phạm Trọng Quát, Đặng Huy Ruận, Phạm Kỳ Anh, Nguyễn Hữu Dư* và *Vũ Hoàng Linh*. Trong bài viết, chúng tôi muốn ôn lại những kỉ niệm sâu đậm không thể nào quên về GS. *Hoàng Tụy* một nhà toán học xuất sắc, nổi tiếng thế giới, một nhà sư phạm mẫu mực, người có nhiều ý tưởng ở tầm chiến lược trên quan điểm hệ thống về sáng tạo toán học, về chấn hưng khoa giáo và trên cả là xây dựng và phát triển đất nước.

Thầy tôi - GIÁO SƯ HOÀNG TỤY

TRẦN VĂN NHUNG
*(HS chuyên Toán khóa 1965 - 1967
Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội)*

I. Những kỉ niệm về GS. Hoàng Tụy

GS. *Hoàng Tụy* đã được tôn vinh ở trong nước và ngoài nước, đã được trao Giải thưởng Hồ Chí Minh đợt đầu (năm 1996) về khoa học công nghệ, Giải thưởng Phan Chu Trinh (năm 2010) và là người đầu tiên trên thế giới vừa được Hiệp hội Quốc tế về Tối ưu toàn cục trao Giải thưởng cao quý mang tên nhà toán học xuất sắc người Hy Lạp *Constantin Caratheodory* (1873-1950), do những đóng góp tiên phong và nền tảng của ông trong lĩnh vực này. Là tác giả của 170 công trình khoa học được công bố trên các Tạp chí toán học nổi tiếng thế giới, GS. *Hoàng Tụy* được thừa nhận là "cha đẻ" của Lí thuyết Tối ưu toàn cục (Global Optimization), trong đó có khái niệm quan trọng "Tuy's Cut" (Lát cắt Tụy) mang tên ông.

Khi GS. *Hoàng Tụy* đã trở thành nhà toán học Việt Nam nổi tiếng thế giới thì ngày càng có nhiều bài viết về ông ở trong nước và nước ngoài. Trong một số bài viết của mình, tác giả *Hàm Châu*, một chuyên gia viết về các nhà khoa học Việt Nam thành đạt, và nhiều người khác thường nhắc đến hai nhà toán học Việt Nam tiêu biểu, nổi tiếng thế giới, một già một trẻ, đó là GS. *Hoàng Tụy* và GS. *Ngô Bảo Châu* (người đầu tiên của thế giới thứ ba được trao Giải thưởng Fields cao quý nhất về Toán học trên thế giới). Đáng chú ý là cả hai nhà toán học xuất sắc và tiêu biểu này đều "xuất phát" từ Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội. GS. *Ngô Bảo Châu* nguyên là học sinh Khối chuyên Toán khóa XXII, GS. *Hoàng Tụy* nguyên là Chủ nhiệm khoa Toán - Cơ - Tin của Trường.

Ngay từ những năm 1963-1964, tôi đã được biết đến tên thầy *Hoàng Tụy* và thầy *Lê Hải Châu* qua các sách giáo khoa toán phổ thông, tên các nhà toán học *Tạ Quang Bửu, Lê Văn Thiêm, Hoàng Tụy, Nguyễn Cảnh Toàn, Phan Đình Diệu, Hoàng Xuân Sính, Hoàng Chúng* (em trai thầy *Hoàng Tụy*), ..., qua **Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.** Tôi còn nhớ những cuốn sách giáo khoa phổ thông Toán ngày ấy rất mỏng, rất cơ bản, súc tích và chắt lọc, nhưng vẫn cung cấp cho chúng tôi đủ các kiến thức cần thiết. Vì sao không cần nhiều nhưng vẫn đủ? Vì các tác giả là những nhà toán học và sư phạm uyên thâm, là những thầy giáo đã trực tiếp dạy toán ở bậc phổ thông và đại học, đã thực sự nghiên cứu toán học và sư phạm, đã tham khảo những sách giáo khoa của các nước có nền sư phạm chuẩn mực và tiên tiến trên thế giới như Nga, Pháp, ... Có thể nói thế này được không: Để viết sách giáo khoa chuẩn mực cần phải có những bậc thầy chuẩn mực!

Chuẩn mực ở đây được hiểu theo nghĩa có sự kết hợp hài hòa giữa lí thuyết với thực hành, giữa sơ cấp với cao cấp, giữa truyền thống với hiện đại, giữa quốc gia với quốc tế. Chúng tôi rất mừng khi thấy rằng hiện nay khi đổi mới chương trình và sách giáo khoa phổ thông, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam, Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam và các tác giả đã dày công nghiên cứu và tham khảo có chọn lọc các chương trình, sách giáo khoa phổ thông của nước ta từ trước đến nay và của các nước tiên tiến trên thế giới, theo đúng phương châm giáo dục của Đảng ta là "cơ bản, hiện đại và Việt Nam".

(Xem tiếp trang 4)

TRUNG HỌC CƠ SỞ

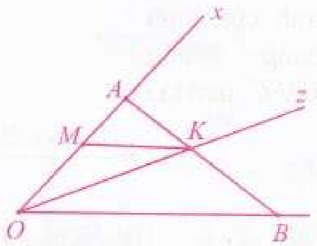
Để giải tốt một bài toán nói chung và bài toán hình học nói riêng, ngoài việc nắm vững kiến thức cơ bản, kiến thức nâng cao, chúng ta cần phải biết thêm một số kĩ năng, kĩ thuật khác như vẽ thêm đường phụ, sử dụng các phép biến hình,...Bài viết này chúng tôi muốn trao đổi cùng bạn đọc là việc sử dụng tính chất đối xứng để dự đoán vẽ thêm hình, từ đó tìm ra lời giải một số bài toán hình học.

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài toán 1. *Trên hai cạnh Ox và Oy của góc xOy lần lượt lấy các điểm A và B sao cho* $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{m}$, *với m là số dương cho trước. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.*

Phân tích. Nhận thấy trong hệ thức $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{m}$ OA và OB có vai trò như nhau. Nếu lấy các điểm A_1 và B_1 lần lượt đối xứng với các điểm A và B qua tia phân giác của góc xOy thì các điểm A_1 và B_1 cũng thoả mãn đề bài. Do đó nếu K là điểm cố định thì đường thẳng A_1B_1 cũng phải đi qua điểm cố định ấy. Vì hai đường thẳng AB và A_1B_1 đối xứng với nhau qua tia phân giác của góc xOy nên chúng phải cắt nhau trên tia phân giác đó. Từ đó ta có lời giải sau đây.



Hình 1

Lời giải. (h. 1). Vẽ tia phân giác Oz của góc xOy cắt đoạn AB tại K, kẻ $KM//OB$ ($M \in OA$). Ta có tam giác MOK cân tại M và

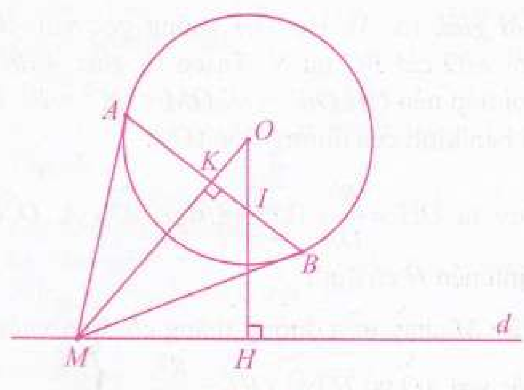
$$\frac{OM}{OA}+\frac{OM}{OB}=\frac{KB}{AB}+\frac{MK}{OB}=\frac{KB}{AB}+\frac{AK}{AB}=1.$$

Suy ra $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{OM}$, kết hợp với giả thiết ta có $OM = m$ (cho trước) nên M là điểm cố định, mà $MK//OB$ suy ra K là điểm cố định (đpcm). ❐

Qua bài toán trên các bạn thấy không phải ngẫu nhiên mà chúng ta lại vẽ thêm tia phân giác của góc xOy. Mọi đường kẻ thêm đều có lí do của nó!

Bài toán 2. *Cho đường tròn tâm O và đường thẳng d không có điểm chung với (O). Từ điểm M bất kì trên d vẽ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.*

Phân tích. Hạ OH vuông góc với đường thẳng d. Ta thấy bài toán có tính đối xứng qua đường thẳng OH. Do đó nếu tồn tại điểm cố định thì điểm cố định đó phải nằm trên đường thẳng OH. Ta có lời giải như sau.

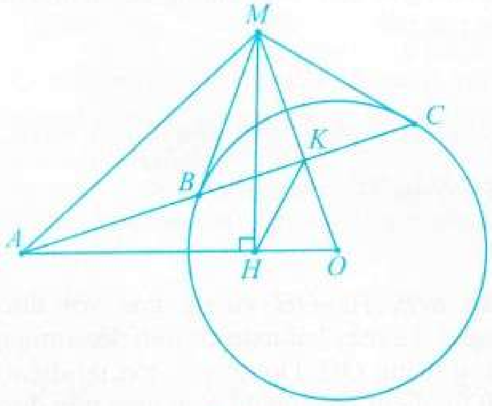


Hình 2

Lời giải. (h. 2). Hạ OH vuông góc với d, dễ thấy OH cố định. Gọi I là giao của OH với AB, nối OM cắt AB tại K. Do $OM \perp AB$ nên tứ giác $MKIH$ nội tiếp suy ra $OI.OH = OK.OM = OB^2 = R^2$ (R là bán kính của đường tròn (O))
$\Rightarrow OI = \dfrac{R^2}{OH} \Rightarrow I$ là điểm cố định (đpcm). ❒

✪Bài toán 3. *Cho một điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A vẽ cát tuyến ABC bất kì với đường tròn (B nằm giữa A và C). Tại B và C vẽ các tiếp tuyến với với đường tròn (O), cắt nhau tại M. Chứng minh rằng điểm M nằm trên một đường cố định.*

Phân tích. Ta thấy bài toán có tính chất đối xứng qua đường thẳng AO. Mặt khác, khi cát tuyến ABC trùng với đường thẳng AO thì các tiếp tuyến tại B và C song song với nhau, khi đó ta coi điểm M ở xa vô tận. Vì vậy nếu điểm M nằm trên một đường cố định thì đó phải là đường thẳng nhận AO làm trục đối xứng. Do đó ta có lời giải sau đây.



Hình 3

Lời giải. (h. 3). Hạ MH vuông góc với AO, nối MO cắt BC tại K. Ta có tứ giác $AMKH$ nội tiếp nên $OH.OA = OK.OM = OC^2 = R^2$ (R là bán kính của đường tròn (O)).

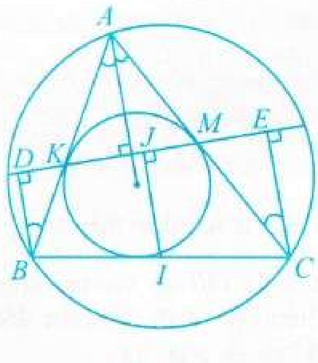
Suy ra $OH = \dfrac{R^2}{OA}$ (không đổi). Do A, O cố định nên H cố định.

Vậy M chạy trên đường thẳng cố định vuông góc với AO tại H với $OH = \dfrac{R^2}{OA}$. ❒

✪Bài toán 4. *Gọi A là một điểm di động trên cung tròn $\overset{\frown}{BC}$ cho trước. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC lần lượt tại K và M. Chứng minh rằng đường thẳng KM luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.*

Phân tích. Vì điểm A di động trên cung tròn $\overset{\frown}{BC}$ nên hình 4 có tính đối xứng qua đường trung trực của đoạn BC. Do đó nếu tồn tại đường tròn cố định thì tâm của nó phải nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC. Ta dự đoán đó là trung điểm I của đoạn thẳng BC. Từ đó, ta có lời giải sau đây.

Lời giải. (h. 4) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Từ B, I, C lần lượt hạ các đường vuông góc BD, IJ, CE xuống đường thẳng KM. Khi đó IJ là đường trung bình của hình thang vuông $BDEC$, nên ta có



Hình 4

$$IJ = \frac{BD + CE}{2} \quad (1)$$

Mặt khác, dễ thấy $\widehat{DBK} = \widehat{ECM} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ không đổi, mà

$$BD + CE = BK.\cos\widehat{DBK} + CM.\cos\widehat{ECM}$$
$$= (BK + CM)\cos\frac{\widehat{BAC}}{2} = BC\cos\frac{\widehat{BAC}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $IJ = \dfrac{1}{2}BC\cos\dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ là một đại lượng không đổi, mà I là điểm cố định nên đường thẳng KM luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm I, bán kính IJ không đổi.

Đề thi vào lớp 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA

NĂM HỌC 2011-2012

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (2 *điểm*) Rút gọn biểu thức

$$P=\frac{xy-\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}},$$

với $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$

và $a\geq 1, b\geq 1$.

Câu 2. (2 *điểm*) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^4-x^3y+x^2y^2=1\\ x^3y-x^2+xy=-1.\end{cases}$$

Câu 3. (2 *điểm*) Tìm các số nguyên x, y thoả mãn phương trình

$$x^2+xy+y^2=x^2y^2.$$

Câu 4. (3 *điểm*) Cho hai đường tròn ω_1, ω_2 cắt nhau tại hai điểm A, B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M; qua M kẻ các tiếp tuyến MD, MC với đường tròn ω_2 (D, C là các tiếp điểm, D nằm trong đường tròn ω_1). Đường thẳng CA cắt đường tròn ω_1 tại điểm thứ hai là P, đường thẳng AD cắt đường tròn ω_1 tại điểm thứ hai là Q ; tiếp tuyến của đường tròn ω_2 tại A cắt đường tròn ω_1 tại điểm thứ hai là K; giao điểm của các đường thẳng CD, BP là E; giao điểm của các đường thẳng BK, AD là F.

a) Chứng minh bốn điểm B, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn .

b) Chứng minh rằng $\frac{CP}{DQ}=\frac{BC}{BD}=\frac{CA}{DA}$.

c) Chứng minh rằng đường thẳng CD đi qua trung điểm của đoạn thẳng PQ.

Câu 5. (1 *điểm*) Cho tập hợp

$$A=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}.$$

Chứng minh rằng với mỗi tập con B gồm 5 phần tử của tập A, thì trong các tổng $x+y$ với $x, y\in B$ và $x\neq y$ luôn tồn tại ít nhất hai tổng có chữ số hàng đơn vị như nhau.

PHẠM NGỌC QUANG

(Sở GD&ĐT Thanh Hóa) *sưu tầm và* giới thiệu

Các bạn thân mến! Trên đây là một số bài toán hình học được định hướng giải nhờ sử dụng tính chất đối xứng. Rất mong các bạn vận dụng thành công phương pháp này trong việc giải một số dạng bài tập hình học khác. Sau đây là một số bài tập áp dụng.

1. Cho trước góc xOy, hai điểm A và B lần lượt chuyển động trên Ox và Oy sao cho $OA+OB=k$ cho trước. Chứng minh rằng

a) Trung trực của đoạn thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB luôn đi qua một điểm cố định.

2. Cho hai đường tròn $(O\,;R)$ và $(O'\,;R')$ tiếp xúc ngoài tại A ($R>R'$). Các điểm M và N lần lượt di động trên (O) và (O') sao cho $\widehat{MAN}=90^\circ$. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

3. Cho đường tròn $(O\,;R)$ và điểm A cố định ở trên đó. M là điểm chuyển động trên đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại A và M cắt nhau ở P. Một đường tròn $(O_1\,;R_1)$ biến thiên đi qua M và tiếp xúc với AP tại P. Chứng minh rằng đường tròn $(O_1\,;R_1)$ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Thầy tôi - GIÁO SƯ HOÀNG TỤY

(Tiếp bìa 2)

Năm 1965, Thầy *Hoàng Tụy* đã dạy cho lớp 9 chuyên toán A0 khóa I của chúng tôi những khái niệm đầu tiên về lôgic toán, toán học hữu hạn và lí thuyết đồ thị. Với cương vị Chủ nhiệm khoa rất bận, nhưng Thầy vẫn dành thời gian để dạy chúng tôi. Trong phòng học sơ sài thời sơ tán, cái bảng đen rất nhỏ, nhưng vẫn đủ để cả buổi học Thầy viết trên đó mà không cần xóa bảng. Thầy có nghệ thuật sử dụng và trình bày trên bảng một cách tối ưu! Đôi mắt sáng của Thầy luôn hướng về phía học trò khi nêu vấn đề, khi đặt câu hỏi, khi gợi ý và khi khuyến khích, động viên chúng tôi. Thầy chú ý dạy học trò hiểu được xuất xứ, bản chất và các mối liên quan của vấn đề. Cách dạy của Thầy độc đáo và cuốn hút, không sa vào các công thức và kĩ thuật, để tránh cho học trò "thấy cây mà không thấy rừng". Mỗi khi cần viết lên bảng thì Thầy lại viết rất nắn nót, cẩn thận, rõ ràng (ví dụ chữ cái c, t, …, còn có cả đuôi bên trái). Đến nay mặc dù những kiến thức cụ thể thu được từ bài giảng của Thầy có thể đã bị mai một nhiều, nhưng ấn tượng, kí ức về trình độ, tài năng, tâm huyết và lòng yêu nghề của thầy vẫn còn đọng lại mãi trong suốt cuộc đời chúng tôi như một chất men say. Đúng như *William A. Warrd* đã nói: "*Người thầy trung bình chỉ biết nói, người thầy giỏi biết giải thích, người thầy xuất chúng biết minh họa, người thầy vĩ đại biết cách truyền cảm hứng.*"

Vào một ngày cuối thu đầu đông năm 1967, khi bắt đầu vào học lớp toán năm thứ nhất của Khoa Toán, Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội, ở khu sơ tán tại tỉnh Thái Nguyên, chúng tôi được đón GS. Chủ nhiệm khoa *Hoàng Tụy* đến thăm và nói chuyện để khai giảng khóa học. Tất cả chúng tôi đã bị cuốn hút bởi câu chuyện hấp dẫn ông kể hôm đó. Ông đã cho chúng tôi biết nền toán học Nga đồ sộ sau này cũng được bắt đầu, phát triển và rẽ nhánh từ trường phái ban đầu về Lí thuyết hàm biến thực của *N.N. Ludin* (1883-1950). Càng ngày khi ngẫm lại câu chuyện của thầy *Tụy* tôi càng thấy trong hơn nửa thế kỉ vừa qua, nền Toán học Xô Viết đã có ảnh hưởng to lớn, tích cực đến nền Toán học Việt Nam và hình như quá trình xây dựng, phát triển và phân nhánh của Toán học nước nhà cũng theo một lộ trình gần tương tự như ở nước Nga.

Năm 1984, khi tôi đang học tập và nghiên cứu khoa học tại Trường Đại học Tổng hợp Bremen (CHLB Đức) theo Học bổng Nghiên cứu Humboldt (AvH), thì GS. *Hoàng Tụy* được GS. *D. Hinrichsen* mời đến làm việc và báo cáo trong seminar về kết quả nghiên cứu bài toán tối ưu của ông. Tôi đã được chứng kiến các bạn quốc tế tham dự hôm đó rất thán phục nội dung toán học và tính sư phạm cao trong bài giảng của ông. GS. *Hoàng Hữu Đường* cũng đã được GS. *L. Arnold* mời đến báo cáo khoa học tại trường này về số mũ Lyapunov. Sau hai báo cáo của hai ông Hoàng, *Hoàng Tụy* và *Hoàng Hữu Đường*, các bạn Đức cho rằng các giáo sư toán học Việt Nam đều là nhà sư phạm giỏi, đều viết bảng rất đẹp! Một số giáo sư khác như *Nguyễn Thế Hoàn, Vũ Quốc Phóng, Nguyễn Hữu Việt Hưng, Nguyễn Khoa Sơn, Nguyễn Đình Công, Hồ Sĩ Đàm*, …, cũng đã từng đến làm việc và báo cáo khoa học tại đây.

2. GS. *Hoàng Tụy*- một nhà khoa học có tư duy chiến lược và hệ thống

Về lịch sử hình thành của Khối chuyên Toán A0, sau này tôi được nghe một số thầy, trong đó có GS. *Nguyễn Duy Tiến*, kể lại rằng: Ý tưởng đầu tiên về việc mở lớp chuyên toán A0 ở Việt Nam thuộc về GS. *Hoàng Tụy*, nguyên là Chủ nhiệm Khoa Toán, Trường ĐHTH Hà Nội, có tham khảo cách làm của các nhà Toán học Xô Viết vĩ đại như *A. N. Kolmogorov, P. S. Alexandrov, I. M. Gelfand*, … Đề xuất của GS. *Hoàng Tụy* được sự ủng hộ mạnh mẽ của GS. *Lê Văn Thiêm*, Phó Hiệu trưởng; của GS. *Ngụy Như Kon Tum*, Hiệu trưởng; của GS. *Tạ Quang Bửu*, Bộ trưởng Bộ ĐH và THCN; đặc biệt của Thủ tướng *Phạm Văn Đồng*, người luôn quan tâm đến giáo dục, nói riêng là việc đào tạo học sinh giỏi.

GS. *Hoàng Tụy* cũng là một trong số những nhà toán học đầu tiên của ta đã tham khảo kinh nghiệm và nhờ sự giúp đỡ của Liên Xô, CHDC Đức và một số nước XHCN anh em, để phân tích, cân nhắc, đề xuất và cuối cùng năm 1974 Việt Nam đã cử đoàn gồm 5 học sinh giỏi đầu tiên đi dự thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO 1974) tại CHDC Đức và ngay lần đầu tiên đó *Hoàng Lê Minh* đã giành Huy chương Vàng, *Vũ Đình Hòa* giành Huy chương Bạc, *Đặng Hoàng Trung* và *Tạ Hồng Quảng* giành Huy chương Đồng.

GS. *Hoàng Tụy* và GS. *Phan Đình Diệu* là hai trong số các nhà toán học Việt Nam đầu tiên nhận thấy tầm quan trọng của Lí thuyết hệ thống và muốn ứng dụng lí thuyết đó vào khoa học, giáo dục, quản lí, kinh tế và nhiều lĩnh vực khác. Vì thế, khi nghiên cứu và bàn bạc về bất cứ lĩnh vực nào, nhất là giáo dục, GS. *Hoàng Tụy* cũng luôn khuyến cáo phải xem trọng tính hệ thống của nó. Bản thân lĩnh vực mà cả đời ông quan tâm nghiên cứu là *Lí thuyết tối ưu toàn cục* cũng mang tính hệ thống sâu sắc. Như chúng ta đều biết, những vấn đề toàn cục và hệ thống, không chỉ trong toán học, khoa học mà trong mọi lĩnh vực như kinh tế, xã hội, ..., bao giờ cũng khó khăn, phức tạp và quan trọng hơn nhiều so với những vấn đề địa phương, cục bộ. Tôi đã cố tìm hiểu xem ai là người đầu tiên đưa ra khái niệm này, lí thuyết này. Cuối cùng, theo thông tin mà tôi nhận được từ GS. *Nguyễn Khoa Sơn* , GS. *Phạm Kỳ Anh* và qua tài liệu tham khảo, thì người đầu tiên vào năm 1961 đã đặt nền móng cho *Lí thuyết hệ thống toán học* là *M. D. Mesarovic*, dựa trên ý tưởng từ năm 1950 của *von Bertalanffy, Norbert Wiener, John von Neumann* về lí thuyết hệ thống tổng quát. *R. E. Kálmán*, người Mỹ gốc Hungary, trong bài báo đăng trên SIAM J. v. 1, n. 1, năm 1963, đã đưa ra các khái niệm ban đầu và nêu một số bài toán đặt nền móng cho lí thuyết hệ thống hiện đại. Ở Việt Nam, năm 1983 GS. *Hoàng Tụy* đã cùng GS. *Nguyễn Khoa Sơn* xây dựng và điều hành Trung tâm phân tích hệ thống tại Viện Nghiên cứu quản lí kinh tế trung ương.

Tiếp tục tìm hiểu thêm, chúng tôi được biết nhà bác học người Scotland tên là *Patrick Geddes* (1854-1932) là người đầu tiên trên thế giới đã nêu ra ý tưởng về "hệ thống". Ngay từ đầu thế kỉ trước, *Geddes* đã khuyến cáo loài người khi công nghiệp hóa, khi đô thị hóa, phải luôn chú ý giữ gìn môi sinh, môi trường, phải luôn có cái nhìn hệ thống để quy hoạch tổng thể. Lời khuyến cáo đơn giản nhất, ngắn gọn nhất, nhưng cũng tổng hợp nhất của ông là: *"Suy nghĩ phải toàn diện, hành động phải cụ thể"* ("Think globally, act locally"). Gần đây, Liên hiệp quốc cũng đã dùng câu này làm khẩu hiệu hành động cho cả loài người khi bước sang thế kỉ XXI, không chỉ trong việc bảo vệ môi trường, khắc phục hậu quả của biến đổi khí hậu, mà trong cả việc giải quyết các xung đột sắc tộc, tôn giáo, quyền lợi, chính trị, chống khủng bố, ... Tóm lại, đây không chỉ là khẩu hiệu mà còn là nguyên tắc suy nghĩ và hành động của cả loài người khi bước sang thế kỉ mới này.

Từ cuối những năm 60 của thế kỉ trước, GS. *Hoàng Tụy* đã cùng các nhà toán học tiền bối khác như GS. *Tạ Quang Bửu*, GS. *Lê Văn Thiêm*, GS. *Nguyễn Cảnh Toàn*, GS. *Phan Đình Diệu*, ..., xây dựng chiến lược phát triển Toán học Việt Nam cho giai đoạn 1970-1990. Nhờ đó, chỉ trong vòng 10 đến 20 năm, Toán học Việt Nam đã có những tiến bộ đáng kể và một số lĩnh vực đã vươn lên có uy tín cao trên thế giới. Để tiếp nối và hiện đại hóa, sau hơn hai năm chuẩn bị, gần đây *Chương trình trọng điểm Quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2010- 2020 và Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán,* do GS. *Ngô Bảo Châu* và GS. *Lê Tuấn Hoa* đứng đầu, đã được Chính phủ phê duyệt. Trong suốt quá trình đó, Ban soạn thảo đã nhận được sự quan tâm và chỉ đạo sát sao của GS. *Nguyễn Thiện Nhân*, Phó Thủ tướng Chính phủ; GS. *Phạm Vũ Luận*, Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, ...

Chúng tôi đã được cùng đi với Phó Thủ tướng Chính phủ *Nguyễn Xuân Phúc* và Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo GS. *Bùi Văn Ga*, đến nhà riêng để chúc mừng GS. *Hoàng Tụy*, nhân dịp GS được trao Giải thưởng cao quý Constantin Caratheodory. Xin kính chúc Thầy khỏe mạnh, tiếp tục cống hiến nhiều hơn nữa cho toán học, khoa học, giáo dục và phát triển đất nước.

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Hệ phương trình mũ và lôgarit là một phần trong cấu trúc đề thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng. Đây là loại toán tương đối khó vì ngoài các thao tác chung của giải hệ phương trình, nó còn có phần riêng biệt của hàm số mũ và lôgarit. Do khuôn khổ bài viết có hạn nên tác giả bỏ qua các phép tính hoặc biến đổi đơn giản.

Một số phương pháp thường dùng KHI GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

1. Phương pháp thế

Lưu ý. Từ một phương trình (PT) trong hệ, ta tính một ẩn số theo ẩn số thứ hai. Thay kết quả đó vào PT còn lại, ta sẽ được PT một ẩn số. Từ đó có thể tìm được nghiệm của hệ đã cho.

★Thí dụ 1. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2-2y^2-xy-3y-1=0 & (1)\\ 2^{x+1}+2^{y+2}=5 & (2)\end{cases}$$

Lời giải. Ta có

PT (1) $\Leftrightarrow x^2-yx-2y^2-3y-1=0$.

Coi đây là PT bậc hai của x, giải ra, ta được $x=-y-1$ hoặc $x=2y+1$.

• Với $x=2y+1$, thay vào PT (2) được

$$4.2^{2y}+4.2^y-5=0.$$

Đặt $t=2^y\,(t>0)$, PT trở thành $4t^2+4t-5=0$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{-1+\sqrt{6}}{2}$; $t=\dfrac{-1-\sqrt{6}}{2}$ (loại).

Giải ra, ta được $y=\log_2\left(\sqrt{6}-1\right)-1$

$\Rightarrow x=2\log_2\left(\sqrt{6}-1\right)-1$.

• Với $x=-y-1$, thay vào PT (2) ta được $4.2^{2y}-5.2^y+1=0$. Tìm được $y=0\Rightarrow x=-1$. hoặc $y=-2\Rightarrow x=1$.

Hệ PT đã cho có ba nghiệm $(x;y)$ là $(-1;0)$, $(1;-2)$, $\left(2\log_2(\sqrt{6}-1)-1;\log_2(\sqrt{6}-1)-1\right)$. □

★Thí dụ 2. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 3\log^2_{\frac{1}{2}}x-\log^2_{\frac{1}{2}}y=\log_{\sqrt{2}}x.\log_2 y & (1)\\ 3^x+3^y=4 & (2)\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x>0, y>0$.

PT (1) $\Leftrightarrow 3\log_2^2 x-\log_2^2 y-2\log_2 x\log_2 y=0$

$\Leftrightarrow \left(\log_2 x-\log_2 y\right)\left(3\log_2 x+\log_2 y\right)=0$

$\Leftrightarrow y=x$ hoặc $y=\dfrac{1}{x^3}$.

• Với $y=x$, thay vào PT (2) được $x=y=\log_3 2$.

• Với $y=\dfrac{1}{x^3}$, thay vào PT (2): $3^x+3^{\frac{1}{x^3}}=4$ (3)

Ta có $x\geq 1\Rightarrow 3^x+3^{\frac{1}{x^3}}>3+1=4$ và

$$0<x<1\Rightarrow 3^x+3^{\frac{1}{x^3}}>1+3=4.$$

Do đó PT (3) vô nghiệm. Hệ PT có một nghiệm $(x;y)=\left(\log_3 2;\log_3 2\right)$. □

2. Phương pháp đặt ẩn số phụ

Lưu ý. Trong nhiều hệ phương trình, nếu đặt ẩn số phụ là các biểu thức có chứa $\log_a u(x)$ hoặc $a^{u(x)}$, ta sẽ thu được một hệ PT đại số thông thường với cách giải quen thuộc.

★Thí dụ 3. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=5\\ \sqrt{\log_x 2}+\sqrt{\log_y 2}=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x>1, y>1$.
Hệ PT có thể viết thành

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=5\\ \dfrac{1}{\sqrt{\log_2 x}}+\dfrac{1}{\sqrt{\log_2 y}}=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Đặt $a=\sqrt{\log_2 x}\,, b=\sqrt{\log_2 y}\ \ (a>0, b>0)$ ta được

$$\begin{cases}a^2+b^2=5\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2-2ab=5\\ \dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Lại đặt $S=a+b, P=ab(S>0, P>0)$ ta được

$$\begin{cases}S^2-2P=5 & (1)\\ P=\dfrac{2S}{3} & (2)\end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được $3S^2-4S-15=0$

$\Leftrightarrow S=3;\ \ S=-\dfrac{5}{3}$ (loại).

Với $S=3$ thì $P=2$ suy ra $(a\,;b)=(1\,;2)$ hoặc $(a\,;b)=(2\,;1)$.

Từ đó tính được $(x\,;y)=(2\,;16)$ hoặc $(x\,;y)=(16\,;2)$. ❐

★Thí dụ 4. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}2^{x+1}+\sqrt{3-2^y}=5\\ 2^{y+1}+\sqrt{3-2^x}=5.\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $2^x\le 3,\ 2^y\le 3$.
Đặt $a=\sqrt{3-2^x}\,, b=\sqrt{3-2^y}\,(a\ge 0, b\ge 0)$.

Ta được hệ $\begin{cases}2a^2-b-1=0 & (1)\\ 2b^2-a-1=0 & (2)\end{cases}$

Trừ theo vế của (1) cho (2) ta được
$2(a^2-b^2)+a-b=0\Leftrightarrow(a-b)(2a+2b+1)=0.$

Vì $a\ge 0, b\ge 0$ nên $2a+2b+1>0$, suy ra $a=b$.

Thay vào PT(1) ta được $2a^2-a-1=0$

$\Rightarrow a=1;\ \ a=-\dfrac{1}{2}$ (loại).

Do đó $a=b=1$. Hệ có nghiệm $(x\,;y)=(1;1)$.❐

3. Phương pháp lôgarit hóa và mũ hóa

Lưu ý. • Với PT dạng $a^{u(x,y)}b^{v(x,y)}=c$ (1) $(0<a\ne 1, b>0, c>0)$ ta biến đổi như sau

PT (1) $\Leftrightarrow \log_a\left(a^{u(x,y)}b^{v(x,y)}\right)=\log_a c$

$\Leftrightarrow u(x,y)+v(x,y)\log_a b=\log_a c.$

• Với PT dạng $\log_{u(x,y)}v(x,y)=n$ (2) ta biến đổi

PT(2) $\Leftrightarrow u^n(x,y)=v(x,y); u(x,y)>0; u(x,y)\ne 1;$

Ta sẽ thu được một PT đại số thông thường. ❐

★Thí dụ 5. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}3^{x-1}.4^{\frac{y+1}{y}}=24\\ 3^{y-1}.4^{\frac{x+1}{x}}=24.\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x\ne 0, y\ne 0$.

Hệ PT tương đương với $\begin{cases}3^x.4^{\frac{1}{y}}=18 & (1)\\ 3^y.4^{\frac{1}{x}}=18 & (2)\end{cases}$

Ta có PT (1) $\Leftrightarrow \log_3\left(3^x.4^{\frac{1}{y}}\right)=\log_3 18$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{2}{y}\log_3 2=2+\log_3 2$

$\Leftrightarrow xy-(2+\log_3 2)\,y+2\log_3 2=0$ (3)

PT(2) $\Leftrightarrow xy-(2+\log_3 2)\,x+2\log_3 2=0$ (4)

Trừ theo vế của PT (3) cho PT (4) ta được

$$(2+\log_3 2)(x-y)=0\Leftrightarrow x=y.$$

Thay vào (3) ta có

$$x^2-(2+\log_3 2)\,x+2\log_3 2=0$$

$\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=\log_3 2$.

Vậy hệ PT có hai nghiệm $(x\,;y)$ là $(2\,;2)$, $(\log_3 2\,;\log_3 2)$. ❐

★Thí dụ 6. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}\sqrt{y}=2+\log_{\frac{1}{2}}(x^2-y)\\ \log_{\sqrt{2}}\sqrt{x}=2+\log_{\frac{1}{2}}(y^2-x).\end{cases}$$

Lời giải. ĐK $x>0, y>0, x^2-y>0, y^2-x>0$.

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}\log_2 y+\log_2\left(x^2-y\right)=2\\ \log_2 x+\log_2\left(y^2-x\right)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2y-y^2=4 & (1)\\ y^2x-x^2=4 & (2)\end{cases}$$

Trừ theo vế của (1) cho (2) và biến đổi, ta được $(x-y)(xy+x+y)=0 \Leftrightarrow x=y\,(\text{do } xy+x+y>0)$.

Thay vào (1) ta được

$x^3-x^2-4=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+x+2\right)=0$.

Đáp số. Hệ có nghiệm $(x;y)=(2;2)$. ❐

4. Sử dụng sự biến thiên của hàm số

Lưu ý. • Nếu hàm số $f(t)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) và liên tục trong tập xác định thì

$$f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y.$$

• Hệ PT dạng $\begin{cases}f(x)=g(y)\\ f(y)=g(x)\end{cases}$, trong đó các hàm số $f(t), g(t)$ cùng đồng biến (hoặc cùng nghịch biến) và liên tục trong tập xác định thì có thể suy ra $x=y$.

★Thí dụ 7. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}e^x-e^y=x-y & (1)\\ \log_x 2+\log_{\sqrt{2}}(xy)=5 & (2)\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x>0,\ y>0,\ x\neq 1$.

PT (1) $\Leftrightarrow e^x-x=e^y-y$ (3)

Xét hàm số $f(t)=e^t-t$ có $t>0 \Rightarrow f'(t)=e^t-1>0$.

Hàm số $f(t)$ đồng biến khi $t>0$.

Từ PT (3) có $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay vào PT (2) ta được

$\log_x 2+\log_{\sqrt{2}} x^2=5 \Leftrightarrow \log_x 2+4\log_2 x=5$.

Đặt $t=\log_2 x$, ta được

$\dfrac{1}{t}+4t=5 \Leftrightarrow 4t^2-5t+1=0 \Leftrightarrow t=1;\quad t=\dfrac{1}{4}$.

Từ đó suy ra $x=y=2;\ x=y=\sqrt[4]{2}$. Hệ đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là $(2;2),\left(\sqrt[4]{2};\sqrt[4]{2}\right)$. ❐

★Thí dụ 8. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}x+\sqrt{x^2+1}=3^y & (1)\\ y+\sqrt{y^2+1}=3^x\end{cases}$$

Lời giải. Xét các hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$; $g(t)=3^t$.

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0;\ g'(t)=3^t\ln 3>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Vậy $f(t)$ và $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hệ PT có dạng $\begin{cases}f(x)=g(y)\\ f(y)=g(x).\end{cases}$

Nếu $x>y$ thì $f(x)>f(y)\Rightarrow g(y)>g(x)\Rightarrow y>x$ (mâu thuẫn).

Nếu $x<y$ thì $f(x)<f(y)\Rightarrow g(y)<g(x)\Rightarrow y<x$. (mâu thuẫn). Suy ra $x=y$.

Thay vào PT (1) ta được

$x+\sqrt{x^2+1}=3^x \Leftrightarrow 3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=1$.

Nhận thấy $x=0$ thỏa mãn PT.

Xét hàm số $q(x)=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Có $q'(x)=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\ln 3-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)>0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ nên hàm số $q(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy PT $q(x)=1$ có nghiệm duy nhất $x=0$.

Hệ đã cho có một nghiệm $(x;y)=(0;0)$. ❐

BÀI TẬP

Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases}3^x+2\sqrt{4-3^y}=5\\ 3^y+2\sqrt{4-3^x}=5.\end{cases}$

2. $\begin{cases}5^{x-2}8^{\frac{y-1}{y}}=20\\ 5^{y-2}8^{\frac{x-1}{x}}=20.\end{cases}$

3. $\begin{cases}e^x=1+y\\ e^y=1+x.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{2-y}=1\\ 3\log_9\left(9x^2\right)-\log_3 y^3=3.\end{cases}$ (Khối B – 2005)

5. $\begin{cases}\log_2\left(x^2+y^2\right)=1+\log_2(xy)\\ 3^{x^2-xy+y^2}=81.\end{cases}$ (Khối A – 2009)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 *điểm*) Cho hàm số

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2.$$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại tiếp điểm M, biết M cùng với hai điểm cực trị của đồ thị (C) tạo thành một tam giác có diện tích bằng 6.

Câu II. (2 *điểm*)

1) Giải phương trình

$$\frac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{(\sin x + \cos x)^2} = -1.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{y+3} = 4 \end{cases} \text{ (với } x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu III. (2 *điểm*)

1) Tính tích phân

$$I = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 1)} dx.$$

2) Giải bất phương trình sau trên tập số thực

$$5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4}\log_2 x > (x^2 - x)\log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2}.$$

Câu IV. (1 *điểm*)

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ (với $a > 0$); SA tạo với đáy (ABC) một góc bằng 60°. Tam giác ABC vuông tại B, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. G là trọng tâm của tam giác ABC. Hai mặt phẳng (SGB) và (SGC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích của hình chóp $S.ABC$ theo a.

Câu V. (1 *điểm*)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn

$$xy + yz + zx \le 3.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{2}{\sqrt{xyz}} + \frac{27}{(2x+y)(2y+z)(2z+x)} \ge 3.$$

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(-1;1)$, trực tâm $H(1;3)$, trung điểm của cạnh BC là $M(5;5)$. Xác định tọa độ các đỉnh B và C của tam giác ABC.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $B(-1;0;2)$, $C(-1;1;0)$, $D(2;1;-2)$, vectơ $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng với vectơ $\vec{u} = (0;1;1)$ và thể tích tứ diện $ABCD$ là $\frac{5}{6}$.

Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

B. Theo chương trình Nâng cao

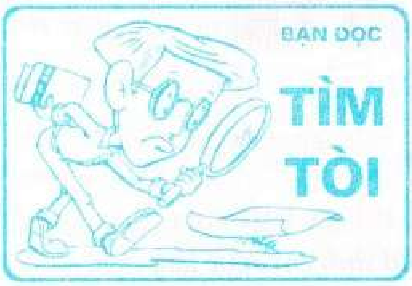
Câu VIb. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $M(2;1)$ và đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB ngắn nhất.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-3}$ và mặt phẳng $(P): 7x + 9y + 2z - 7 = 0$ cắt nhau.

Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), Δ vuông góc với d và cách d một khoảng là $\frac{3}{\sqrt{42}}$.

ĐOÀN VĂN SOẠN
(GV THPT Việt Yên, Bắc Giang)



SỬ DỤNG NGUYÊN LÍ DIRICHLET trong chứng minh bất đẳng thức

HUỲNH TẤN CHÂU - NGUYỄN ĐÌNH THI
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Nguyên lí Dirichlet được phát biểu như sau: ***Nếu nhốt vào n chiếc lồng một số chú thỏ mà số lượng lớn hơn n thì ta sẽ tìm được một chiếc lồng mà trong đó có nhiều hơn một chú thỏ.***

Từ nguyên lí Dirichlet ta có mệnh đề

Mệnh đề. ***Trong ba số thực bất kì x, y, z luôn tìm được hai số có tích không âm.***

Đây là một mệnh đề rất quan trọng trong việc chứng minh bất đẳng thức; bởi khi ta đã chọn được *"điểm rơi"* (tức là đẳng thức của bài toán), chẳng hạn đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=k$ thì ta có thể giả sử hai số $(a-k)$, $(b-k)$ có tích $(a-k)(b-k)\ge 0$; từ kết quả này để suy ra BĐT cần chứng minh.

Chúng ta sẽ cùng điểm qua một số thí dụ để thấy được ứng dụng của mệnh đề này trong các bài toán chứng minh BĐT.

★Thí dụ 1. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*
$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca).$$

Lời giải. *Dự đoán "điểm rơi" tại* $a=b=c=1$. Theo Mệnh đề thì hai trong ba số $a-1$, $b-1$, $c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0$ thì ta có
$$2c(a-1)(b-1)\ge 0 \Leftrightarrow 2abc\ge 2bc+2ca-2c.$$
Vậy chỉ cần chứng minh
$$a^2+b^2+c^2+1\ge 2c+2ab \Leftrightarrow (a-b)^2+(c-1)^2\ge 0.$$
BĐT trên luôn đúng. Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❐

Nhận xét. Ta có thể chứng minh được bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a, b, c
$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2\ge 2(ab+bc+ca).$$
Thật vậy, theo Mệnh đề thì hai trong ba số a^2-1, b^2-1, c^2-1 có tích không âm. Giả sử $(a^2-1)(b^2-1)\ge 0$ thì có
$$c^2(a^2-1)(b^2-1)\ge 0 \Rightarrow a^2b^2c^2+c^2\ge b^2c^2+c^2a^2.$$
Vậy chỉ cần chứng minh
$$a^2+b^2+2+b^2c^2+c^2a^2\ge 2(ab+bc+ca)$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2\ge 0.$$
BĐT này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\pm 1$.

★Thí dụ 2. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*
$$a^2+b^2+c^2+2abc+3\ge (a+1)(b+1)(c+1).$$

Lời giải. Sau khi nhân cả hai vế với 2 và biến đổi thì BĐT trên tương đương với
$$2(a^2+b^2+c^2)+2abc+4\ge 2(ab+bc+ca)+2(a+b+c).$$
Theo thí dụ 1, chỉ cần chứng minh
$$a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge 0 \text{ (BĐT này đúng)}.$$
Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❐

★Thí dụ 3. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*
$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2+(abc-1)^2.$$

Lời giải. BĐT trên tương đương với
$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4(a^2+b^2+c^2)+2abc+7$$
$$\ge 9(ab+bc+ca).$$ Theo BĐT Cauchy thì
$$2a^2b^2+2+2b^2c^2+2+2c^2a^2+2\ge 4ab+4bc+4ca$$
và $3a^2+3b^2+3c^2\ge 3ab+3bc+3ca$.

Kết hợp với kết quả thí dụ 1 ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❐

★Thí dụ 4. *Cho các số thực bất kì a, b, c. Chứng minh rằng*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3\left(a+b+c\right)^2.$$

Lời giải. BĐT đã cho tương đương với

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+8 \ge 6(ab+bc+ca).$$

Từ nhận xét ở Thí dụ 1, chỉ cần chứng minh

$$2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+6\ge 4\left(ab+bc+ca\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(ab-1\right)^2+\left(bc-1\right)^2+\left(ca-1\right)^2\ge 0 \text{ (đúng)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\pm 1$. ❐

Nhận xét. Các kết quả Thí dụ 3 và Thí dụ 4 là những BĐT làm chặt cho kết quả sau:
Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca).$$

(APMO 2004)

★Thí dụ 5. **(USA 2001)** *Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng $ab+bc+ca-abc\le 2$.*

Lời giải. Theo Mệnh đề thì hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0$ thì $c(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow abc\ge bc+ca-c.$

Nên $ab+bc+ca-abc\le ab+c.$

Mà $4=a^2+b^2+c^2+abc\ge 2ab+c^2+abc$

$\Rightarrow 4-c^2\ge ab(c+2)\Rightarrow 2-c\ge ab\Rightarrow ab+c\le 2.$

Từ hai BĐT trên suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❐

★Thí dụ 6. *Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right)\left(c^2-c+1\right)\ge 1.$$

Lời giải. Theo Mệnh đề, hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát giả sử $(b-1)(c-1)\ge 0$. Khi đó

$$\left(b^2-b+1\right)\left(c^2-c+1\right)$$
$$=bc\left(b-1\right)\left(c-1\right)+b^2+c^2-b-c+1$$
$$\ge b^2+c^2-b-c+1\ge \frac{1}{2}\left(b+c\right)^2-\left(b+c\right)+1>0.$$

Do đó $\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right)\left(c^2-c+1\right)$

$$\ge\left(a^2-a+1\right)\left(\frac{1}{2}\left(b+c\right)^2-\left(b+c\right)+1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(a^2-a+1\right)\left(a^2-4a+5\right).$$

Nên chỉ cần chứng minh

$$\left(a^2-a+1\right)\left(a^2-4a+5\right)\ge 2.$$

Sử dụng phương pháp đạo hàm ta thấy BĐT này luôn đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❐

Nhận xét. Bất đẳng thức trên vẫn đúng với nhiều biến. Các bạn hãy thử chứng minh hai mở rộng sau:

Mở rộng 1. *Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực dương thỏa mãn $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}=r\ge 1$. Chứng minh rằng nếu $n\le 13$ thì*

$$(x_1^2-x_1+1)(x_2^2-x_2+1)\dots(x_n^2-x_n+1)\ge(r^2-r+1)^2.$$

Mở rộng 2. *Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$(a^p-a+1)(b^p-b+1)(c^p-c+1)\ge 1, \text{ với mọi } p>1.$$

★Thí dụ 7. **(UK TST 2005).** *Cho các số thực dương a, b, c sao cho abc = 1. Chứng minh*

$$\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\ge 3.$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh hai BĐT sau:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{2}{1+a+b+c}+1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\ge 1 \quad (2)$$

Thật vậy

$$\text{BĐT (1)}\Leftrightarrow \frac{3+ab+bc+ca+2(a+b+c)}{2+ab+bc+ca+a+b+c}$$
$$\ge\frac{3+a+b+c}{1+a+b+c}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3.$$

Theo BĐT Cauchy và $abc=1$ thì

$$a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3.$$

Vậy BĐT (1) được chứng minh.

Theo Mệnh đề thì hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm, không mất tính tổng quát giả sử

$$(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow \frac{c+1}{c}=ab+1\ge a+b.$$

Ta có $(ab-1)^2+(a-b)^2\ge 0$ (đúng).

Từ đó $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}\ge \dfrac{1}{1+ab}=\dfrac{c}{c+1}$.

Do đó $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}+\dfrac{1}{(1+c)^2}+\dfrac{1}{a+b+c+1}$

$$\ge \frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{\frac{c+1}{c}+c+1}=1.$$

BĐT (2) được chứng minh. *Trở lại bài toán.* BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(c+1)^2}\ge 3.$$

Theo (1) và (2) ta có

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(c+1)^2}$$

$$\ge \frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(c+1)^2}+\frac{2}{a+b+c+1}+1$$

$\ge 2+1=3.$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

★**Thí dụ 8.** *Cho các số thực không âm bất kì a, b, c. Chứng minh rằng*

$$abc+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right)$$

$$\ge a+b+c.$$

Lời giải. Theo Mệnh đề thì hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$(a-1)(b-1)\ge 0\Rightarrow ab\ge a+b-1.$$

Vậy để hoàn tất bài toán chỉ cần chứng minh

$$c(a+b-1)+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right)$$

$$\ge a+b+c$$

hay $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right)\ge (a+b-2)(1-c)$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge \frac{(a+b-2)^2}{2}+(c-1)^2$$

$$\ge \sqrt{2}\left|(a+b-2)(1-c)\right|\ge \sqrt{2}(a+b-2)(1-c).$$ □

BÀI TẬP

1. **(IRAN 2002)** *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c\le 3.$$

2. **(MOSKVA 2000)** *Cho các số thực dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge 2(ab+bc+ca).$$

3. *Cho các số thực dương a, b, c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{ab+bc+ca+1}\ge 1.$$

4. **(VMO 2006)** *Cho các số thực dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\ge 2(a+b+c).$$

5. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{6abc}{ab^2+bc^2+ca^2}\ge 5.$$

6. *Cho các số thực dương x,y,z sao cho $x+y+z+1=4xyz$. Chứng minh rằng $xy+yz+zx\ge x+y+z$.*

7. **(VMO 1996).** *Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng $a+b+c\ge ab+bc+ca$.*

8. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-2}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2.$$

9. *Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c+\frac{1}{4}\min\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}\le 3.$$

10. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{2a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{2b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{2c+a}\right)^3\ge\frac{1}{9}.$$

11. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\ge 3.$$

Nhìn ra thế giới

PISA là chữ viết tắt của "Programme for International Student Assessment - Chương trình đánh giá học sinh Quốc tế". Mục tiêu của PISA nhằm kiểm tra, đánh giá kiến thức, kĩ năng của học sinh ở độ tuổi 15, độ tuổi kết thúc giáo dục bắt buộc ở hầu hết các quốc gia, học sinh đã được chuẩn bị để đáp ứng các thách thức của cuộc sống sau này ở mức độ nào. PISA nổi bật do quy mô toàn cầu và tính chu kì: đã có 70 quốc gia tham gia, chu kì 3 năm 1 lần.

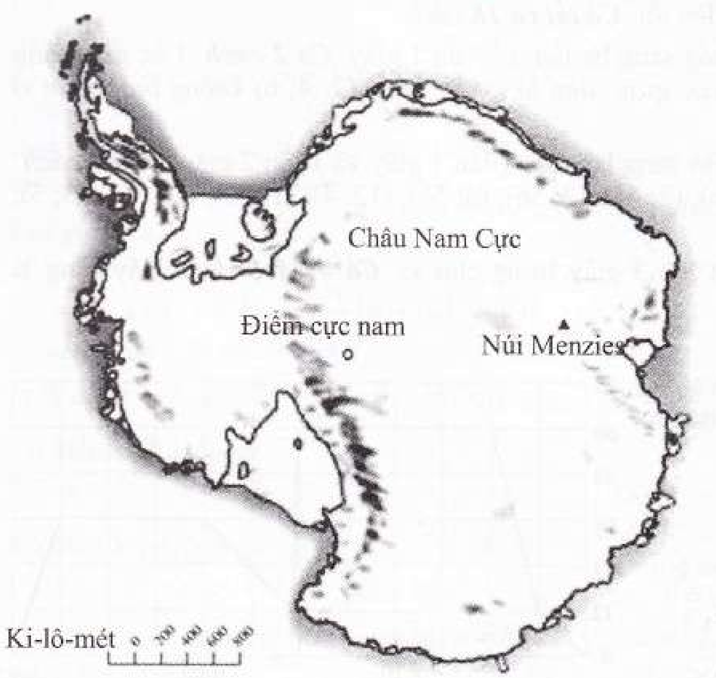
GIỚI THIỆU MỘT SỐ BÀI TOÁN
CỦA CHƯƠNG TRÌNH ĐÁNH GIÁ HỌC SINH QUỐC TẾ (PISA)

NGUYỄN HẢI CHÂU
(Phó Vụ trưởng Vụ Giáo dục Trung học, Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Nội dung đánh giá của PISA hoàn toàn được xác định dựa trên các kiến thức, kĩ năng cần thiết cho cuộc sống tương lai, không chỉ dựa vào nội dung các chương trình giáo dục quốc gia. Đây chính là điều mà PISA gọi là "năng lực phổ thông" (literacy).

Những bài toán PISA rất đa dạng; Bài toán đặt ra nhằm giải quyết một tình huống thực tiễn, gồm 3 phần: Tiêu đề bài toán (chủ đề của tình huống thực tiễn); Phần mở đầu là phần đề dẫn mô tả tình huống thực tiễn; Các câu hỏi của bài toán giải quyết tình huống thực tiễn. Điều kiện để giải bài toán vừa "ẩn náu" vừa tản mạn cả trong phần đề dẫn và phần các câu hỏi, đòi hỏi năng lực tư duy phân tích, suy luận để lọc ra điều kiện giải bài toán. Do khuôn khổ hạn hẹp, bài viết giới thiệu 4 dạng bài toán PISA.

Bản đồ Châu Nam Cực



★ Thí dụ 1. DIỆN TÍCH LỤC ĐỊA

Hình bên là bản đồ Châu Nam Cực.

Câu hỏi. *Ước tính diện tích của châu Nam Cực bằng cách sử dụng tỉ lệ bản đồ. Trình bày cách tính và giải thích cách ước tính của bạn. (Bạn có thể vẽ trên bản đồ nếu điều đó giúp cho việc ước tính của bạn).*

Gợi ý và lược giải. Ước lượng diện tích của một hình "không tiêu chuẩn" bằng cách chọn ra một hoặc nhiều hình "tiêu chuẩn" có thể tính được diện tích (như hình tròn, hình chữ nhật hoặc hình tam giác) có thể "phủ" được toàn bộ hình đã cho; sau đó tính diện tích của những hình này để từ đó suy ra diện tích hình cần phải tìm.

Kết quả. Chấp nhận vào khoảng từ 12 000 000km^2 đến 18 000 000km^2.

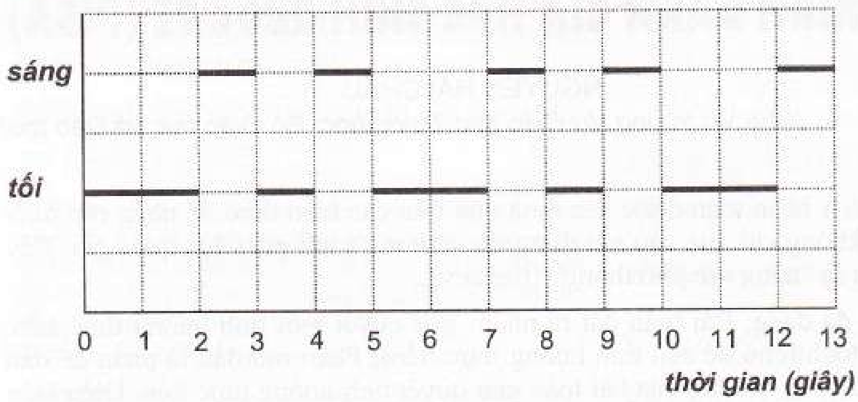
★Thí dụ 2. NGỌN ĐÈN HẢI ĐĂNG

Đèn hải đăng là những ngọn tháp có lắp đèn hiệu trên đỉnh. Đèn hải đăng hỗ trợ tàu biển tìm đường trong đêm khi họ đang ở gần bờ.

Đèn hiệu của ngọn đèn hải đăng phát ra ánh sáng với các tín hiệu không đổi. Mỗi ngọn đèn hải đăng có tín hiệu riêng của mình.

Trong biểu đồ dưới đây, có thể quan sát thấy tín hiệu của một ngọn đèn hải đăng. Khoảng sáng xen kẽ với những khoảng tối.

Đây là một tín hiệu đều. Sau một khoảng thời gian nó sẽ lặp lại. Thời gian để kết thúc một vòng phát tín hiệu trước khi nó bắt đầu lặp lại được gọi là chu kì. Khi bạn tìm được chu kì phát tín hiệu, việc mở rộng sơ đồ trong các giây, phút hoặc thậm chí các giờ tiếp theo sẽ trở nên dễ dàng.




Đèn hải đăng

Câu hỏi. *Hãy vẽ biểu đồ biểu diễn tín hiệu sáng của ngọn đèn hải đăng được phát ra trong 30 giây trên mỗi phút và chu kì của tín hiệu này là 6 giây.*

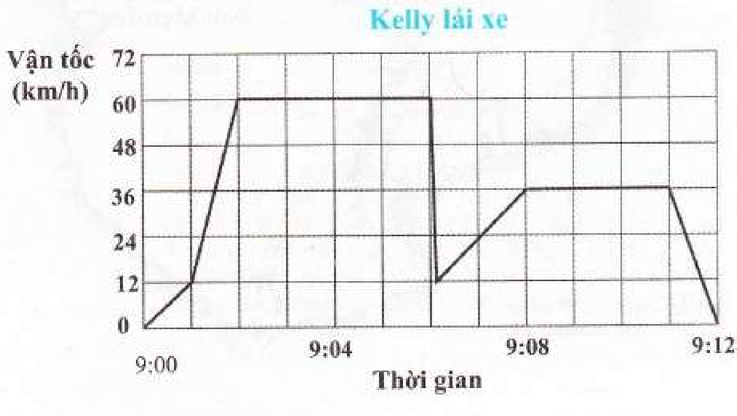
Gợi ý và lược giải. Đèn sáng 3 giây và tối 3 giây trong một chu kì 6 giây. Kí hiệu các giây của một chu kỳ 6 giây là: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Khi nói đèn sáng k giây (k = 1; 2; 3), nghĩa là sau k giây đèn sáng phải là 1 giây hoặc vài giây đèn tối. ***Có tất cả 18 cách.***

- Trường hợp 1: Trong chu kì, đèn nháy sáng ba lần mỗi lần 1 giây. ***Có 2 cách:*** Các giây sáng là (1; 3; 6) và (1; 4; 6). *Trường hợp các giây sáng là* (1; 3; 5) *và* (2; 4; 6) *không thỏa mãn vì khi đó chu kì phát tín hiệu là 2 giây.*
- Trường hợp 2: Trong chu kì, đèn nháy sáng hai lần: 1 lần 1 giây và 1 lần 2 giây. ***Có 12 cách:*** Các giây sáng là (1; 34); (1; 45); (1; 56); (2; 45); (2; 56); (3; 56); (12; 4); (12; 5); (12; 6); (23; 5); (23; 6); (34; 6).
- Trường hợp 3: Đèn nháy sáng một lần 3 giây trong chu kì. ***Có 4 cách:*** Các giây sáng là (123); (234); (345); (456).

★Thí dụ 3. LÁI XE

Kelly lái xe đi chơi. Trên đường đi, bất ngờ có một con chó chạy phía trước đầu xe khiến cô phải đạp mạnh vào chân phanh để tránh. Trong lòng lo lắng, Kelly quyết định quay về nhà.

Đồ thị bên là bản ghi đơn giản biểu diễn vận tốc của chiếc xe theo thời gian.



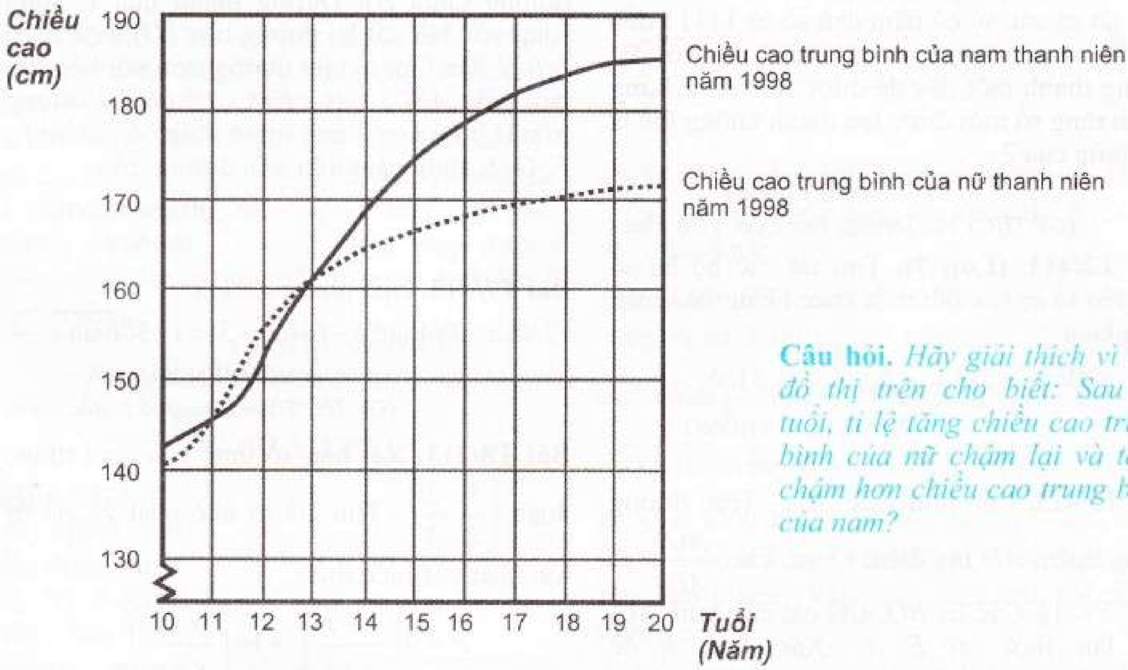
Câu hỏi. *Từ đồ thị em hãy cho biết đoạn đường về nhà của Kelly có ngắn hơn quãng đường cô đã đi từ nhà đến nơi xảy ra sự cố với con chó hay không? Hãy giải thích câu trả lời của em.*

Gợi ý và lược giải

- Thời gian Kelly đi từ nhà đến nơi xảy ra sự cố và từ đó về nhà đều là 6 phút.
- Vận tốc trung bình đi từ nhà đến nơi xảy ra sự cố lớn hơn từ đó về nhà.
- Mỗi ô ứng với quãng đường 0,2 km. Quãng đường từ nhà đến nơi xảy ra sự cố là 4,7 km và từ đó về nhà là 2,9 km.

★ Thí dụ 4. PHÁT TRIỂN CHIỀU CAO

Năm 1998 chiều cao trung bình của nam và nữ tuổi thanh niên ở Hà Lan được biểu diễn bởi đồ thị dưới đây.



Câu hỏi. *Hãy giải thích vì sao đồ thị trên cho biết: Sau 12 tuổi, tỉ lệ tăng chiều cao trung bình của nữ chậm lại và tăng chậm hơn chiều cao trung bình của nam?*

Gợi ý và lược giải

- **Khái niệm về hàm số tăng nhanh và tăng chậm**

Xét các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $D = [a\,;\,b]$, có đạo hàm trên $(a\,;\,b)$ và là các hàm số tăng trên $[a\,;\,b]$, kí hiệu $M = [c\,;\,d]$ là tập con của D.

a) Hàm số $f(x)$ gọi là tăng nhanh (hoặc tăng chậm) trên tập M nếu:

Với mọi $u < v$, $t > 0$, (u, v, $u + t$, $v + t$ đều thuộc M), ta có

$$f(u+t) - f(u) < f(v+t) - f(v) \text{ (hoặc } f(u+t) - f(u) > f(v+t) - f(v)\text{)}.$$

Mệnh đề. $f(x)$ tăng nhanh (hoặc tăng chậm) trên M khi và chỉ khi $f'(x)$ tăng (hoặc giảm) trên M.

Ý nghĩa hình học. Hàm số tăng nhanh (hoặc tăng chậm) khi và chỉ khi độ dốc (hệ số góc tiếp tuyến) của đồ thị hàm số tăng lên (hoặc giảm xuống).

b) Hàm số $f(x)$ gọi là tăng nhanh hơn hàm số $g(x)$ trên M (khi đó ta cũng nói hàm số $g(x)$ tăng chậm hơn hàm số $f(x)$ trên M) nếu:

Với mọi u, $t > 0$ (u, $u + t$ đều thuộc M), ta có $f(u+t) - f(u) > g(u+t) - g(u)$.

(Xem tiếp trang 28)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/413. (Lớp 6). Trên các mảnh bìa ta viết tất cả các số có năm chữ số từ 11111 đến 99999 sau đó xáo trộn các mảnh bìa rồi đặt chúng thành một dãy để được một số. Chứng minh rằng số mới được tạo thành không thể là lũy thừa của 2.

VŨ HỒNG LƯỢNG
(GV THCS Yên Dương, Tam Đảo, Vĩnh Phúc)

Bài T2/413. (Lớp 7). Tìm tất các bộ ba số nguyên tố a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện

$$20abc < 30(ab+bc+ca) < 21abc.$$

PHẠM HUY THÔNG
(Hà Nội)

Bài T3/413. Cho tam giác ABC. Trên đường trung tuyến AD lấy điểm O sao cho $\frac{AO}{AD}=k$ $(0<k<1)$. Các tia BO, CO cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại E, F. Xác định k để $S_{AEOF}=\frac{1}{15}S_{ABC}$.

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lê Lợi, Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T4/413. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+x+19}+\sqrt{7x^2+22x+28}+\sqrt{13x^2+43x+37}=3\sqrt{3}(x+3).$$

NGUYỄN ĐỨC TRUNG
(GV THPT Nam Giang, Quảng Nam)

Bài T5/413. Cho tam giác ABC vuông tại A. D là một điểm nằm trong tam giác đó sao cho $CD = CA$; M là một điểm trên cạnh AB sao cho $\widehat{BDM}=\frac{1}{2}\widehat{ACD}$; N là giao điểm của MD và đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh rằng $DM = DN$.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/413. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). F là một điểm bất kì thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ (không chứa C) (F khác A và B). M là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A); N là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{AC}$ (không chứa B). Đường thẳng qua C song song với MN cắt lại đường tròn (O) tại P. Gọi I, I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, FAC, FBC. PI cắt lại đường tròn (O) tại G. Chứng minh rằng bốn điểm I_1, F, G, I_2 cùng nằm trên một đường tròn.

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

Bài T7/413. Giải phương trình

$$(2\sin x-3)(4\sin^2 x-6\sin x+3)=1+3\sqrt[3]{6\sin x-4}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Bài T8/413. Xét bốn số thực x, y, z, t thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=9\left(\frac{x+z}{x+t}\right)^2+16\left(\frac{x+t}{x+y}\right)^2.$$

TRẦN VĂN THƯƠNG
(GV THPT Phú Mỹ, Tân Thành, Bà Rịa - Vũng Tàu)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/413. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố cho trước p thì tồn tại những số tự nhiên x, y, z, t thỏa mãn $x^2+y^2+z^2-tp=0$ và $0<t<p$.

MAI TUẤN ANH
(GV THCS Nga Điền, Nga Sơn, Thanh Hóa)

Bài T10/413. Xét dãy số (u_n) được cho bởi

$$u_1=a;\ u_{n+1}=\frac{(\sqrt{2}+1)u_n-1}{\sqrt{2}+1+u_n},\ (n\ge 1).$$

a) Tìm điều kiện của a để mọi số hạng của dãy số đều xác định.

b) Tìm a để $u_{2011} = 2011$.

LÊ THỊ HÒA
(GV THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, Hà Nội)

Bài T11/413. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{f(x+y)+f(x)}{2x+f(y)} = \frac{2y+f(x)}{f(x+y)+f(y)},\ \forall x, y \in \mathbb{N}^*.$$

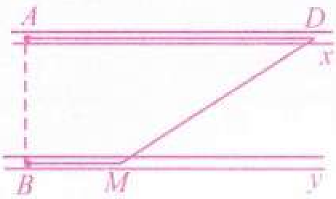
LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T12/413. Cho tam giác ABC, $\widehat{BAC} \neq 90^\circ$. D là điểm cố định trên cạnh BC. P là điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của P lên AC, AB. DB_1 cắt AB tại C_2, DC_1 cắt AC tại B_2. Q là giao điểm khác A của các đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1 và AB_2C_2. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

TRẦN QUANG HÙNG
(GV Trường chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/413. Có hai người ban đầu đứng ở các vị trí A và B trên hai con đường thẳng song song Ax và By,

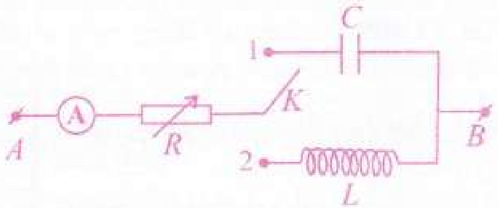


cách nhau đoạn $AB = L = 540$m; AB vuông góc với Ax và By, giữa Ax và By là một cánh đồng. Người thứ nhất chuyển động trên đường từ A tới D với vận tốc $v_1 = 4$m/s. Người thứ hai khởi hành từ B cùng lúc với người thứ nhất và muốn chuyển động đến gặp người thứ nhất theo đường BMD (hình vẽ). Vận tốc chuyển động của người thứ hai trên đường BM là $v'_2 = 13$m/s và trên cánh đồng MD là $v_2 = 5$m/s. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất từ lúc khởi hành tới lúc hai người gặp nhau và tính các khoảng cách BM, AD.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/413. Cho mạch điện như hình vẽ

$$u_{AB} = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t(\text{V}).$$



Cuộn dây thuần cảm có hệ số tự cảm L. Điện trở ampe kế không đáng kể. Điện trở R có thể thay đổi được.

1) Khi $R = 60\Omega$, cho khóa K chuyển từ vị trí 1 sang vị trí 2 thì số chỉ ampe kế không thay đổi, nhưng hai dòng điện lệch pha nhau $\frac{\pi}{2}$.

a) Xác định hệ số tự cảm L và điện dung C.

b) Cho điện dung C tăng lên $\sqrt{3}$ lần. Khi khóa K để ở 1 hay ở 2 thì hai dòng điện lệch pha bao nhiêu? Viết biểu thức của hai dòng điện đó.

2) Để khóa K ở vị trí 2, cho tần số dòng điện tăng lên hai lần nhưng giữ nguyên giá trị hiệu dụng của $U_{AB} = 120$V, sau đó thay đổi R để công suất tiêu thụ trong mạch đạt cực đại. Xác định giá trị điện trở và công suất cực đại lúc đó.

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV ĐHSP Hà Nội)

★Bài T1/409. *Không quy đồng mẫu số biểu thức trong ngoặc, tìm số nguyên x biết rằng*

$$\left(\frac{2009}{2010}+\frac{2010}{2011}+\frac{2011}{2009}\right).(x-2011)>3x-6033.$$

Lời giải. Đặt $A=\frac{2009}{2010}+\frac{2010}{2011}+\frac{2011}{2009}$

$=1-\frac{1}{2010}+1-\frac{1}{2011}+1+\frac{2}{2009}$

$=3+\left(\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}\right)+\left(\frac{1}{2009}-\frac{1}{2011}\right).$

Suy ra $A>3$ hay $A-3>0$ (1). Từ giả thiết có

$A(x-2011)>3(x-2011)$

$\Leftrightarrow A(x-2011)-3(x-2011)>0$

$\Leftrightarrow (A-3)(x-2011)>0$

$\Leftrightarrow x-2011>0$ (theo (1)) $\Leftrightarrow x>2011.$

Vậy ta tìm được các số nguyên $x \geq 2012$ thoả mãn đề bài. ❐

➤**Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn cho được kết quả $x \geq 2012$ nhưng chỉ dùng kí hiệu nên lời giải chưa chặt chẽ. Để lời giải chuẩn xác thì phải biến đổi tương đương (dùng kí hiệu $\Leftrightarrow$) còn nếu dùng kí hiệu $\Rightarrow$ thì sau khi đến kết quả phải thử lại.

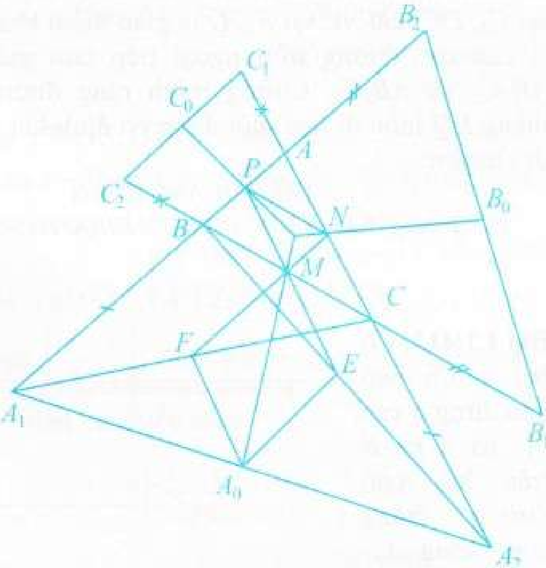
2) Các bạn sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Nguyễn Thùy Quỳnh*, 6A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Kiều Thế Hưng*, 6C, THCS TTr. Sông Thao, Cẩm Khê; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Thanh Hương, Nguyễn Văn Huy*, 6A, THCS Yên Phong; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng, Đỗ Minh Thắng*, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Quân*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Lê Thị Ngọc Mai, Đặng Thị Thanh Thảo, Cao Thị Thu Hiền, Nguyễn Huy Hoàng, Cao Thị Mai Lâm*, 6C, *Phan Thế Anh, Dương Thị Ngọc Hân*, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Hạnh, Cao Thị Thúy Điểm, Vũ Thi Thi, Nguyễn Thúy Phượng*, 6A, THCS Hành Phước, *Đỗ Thị Thanh Truyền, Nguyễn Thị Hồng Uyên, Lương Thị Thắm*, 5A, TH số 1 Hành Phước, *Lê Thị Quỳnh Anh, Phan Kiều Chinh*, 5C, TH số 2 Hành Phước, *Nguyễn Tấn Trung*, 5A, TH số 2 Hành Đức, Nghĩa Hành, *Trần Thị Mỹ Ninh, Võ Nguyên Hải, Trần Văn Hiền*, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

VIỆT HẢI

★Bài T2/409. *Cho tam giác ABC có M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Trên tia đối của các tia BA, CA, CB, AB, AC, BC theo thứ tự lấy các điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sao cho $BA_1=CA_2$, $CB_1=AB_2$, $AC_1=BC_2$. Gọi A_0, B_0, C_0 thứ tự là trung điểm của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Chứng minh rằng các đường thẳng A_0M, B_0N, C_0P đồng quy.*

Lời giải. Trước hết, dễ dàng chứng minh được tính chất "*Trong tam giác, đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh thì song song với cạnh còn lại và bằng nửa độ dài cạnh ấy*".



Bây giờ ta chứng minh tia đối của tia MA_0 là tia phân giác của góc PMN. Thật vậy, gọi E, F lần lượt là trung điểm của BA_2 và CA_1. Ta có P, M, E thẳng hàng; N, M, F thẳng hàng.

Hơn nữa, theo tính chất nêu trên ta có

$ME=\frac{1}{2}CA_2$, $EA_0=\frac{1}{2}BA_1$, mà $BA_1=CA_2$ (gt)

nên $ME=EA_0=\frac{1}{2}BA_1$.

Tương tự, $MF=FA_0=\frac{1}{2}BA_1$. Suy ra

$\Delta EMA_0=\Delta FMA_0$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{EMA_0}=\widehat{FMA_0}$.

Vậy MA_0 là tia phân giác của góc EMF, mà $\widehat{PMN}$ và $\widehat{EMF}$ là hai góc đối đỉnh nên tia đối của tia MA_0 là tia phân giác của góc PMN. Tương tự ta có tia đối của tia NB_0 là tia phân giác của góc PNM, tia đối của tia PC_0 là tia phân giác của góc MPN. Trong tam giác PMN, ba tia phân giác của các góc M, N, P phải đồng quy. Vậy các đường thẳng A_0M, B_0N, C_0P đồng quy. ❒

➢**Nhận xét.** 1) Bài toán này xuất phát từ một bài toán quen thuộc: *"Trên các cạnh của góc xOy lấy lần lượt các điểm A, B và A', B' sao cho AB = A'B' (O nằm ngoài các đoạn AB và A'B'). Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn AA' và BB'. Chứng minh rằng MN song song (hoặc trùng) với tia phân giác của góc xOy".*

2) Tất cả các bạn tham gia gửi bài đều có lời giải đúng. Một số bạn sử dụng đến khái niệm hình bình hành, hình thoi (không thuộc chương trình lớp 7). Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Trung Hiếu*, 7A, THCS Phương Khoan, Sông Lô; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Quân*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Bùi Diễm Hương, Nguyễn Thị Hạ Vy, Vũ Thị Chi*, 6A, *Cao Thị Thúy Điểm; Nguyễn Thúy Điểm, Nguyễn Thị Hạnh*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, *Trần Thị Mỹ Ninh*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Bình Định:** *Nguyễn Trọng Khiêm*, 7A1, THCS Võ Xán, Tây Sơn.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★**Bài T3/409.** *Cho b là một số nguyên dương thoả mãn hai điều kiện sau:*

i) b là tổng của ba số chính phương.

ii) b có một ước nguyên dương dạng

$$a = 3k^2 + 3k + 1\ (k \in \mathbb{N}).$$

Chứng minh rằng b^n luôn biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số chính phương với mỗi số n nguyên dương.

Lời giải. Ta có

$$a^2 = (3k^2+3k+1)^2 = 9k^4+18k^3+15k^2+6k+1$$
$$= (k^2+k)^2 + (2k^2+3k+1)^2 + (2k^2+k)^2$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

(với $a_1 = k^2+k,\ a_2 = 2k^2+3k+1,\ a_3 = 2k^2+k$).

Từ điều kiện i) ta có

$b = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\ (b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N})$.

Từ điều kiện ii) ta có $b = ta\ (t \in \mathbb{N}^*)$. Do đó

$$b^2 = t^2a^2 = t^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

• Với n là số nguyên dương chẵn, $n = 2m+2$ $(m \in \mathbb{N})$, ta có

$$b^n = (b^m)^2.b^2 = (b^m)^2.t^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$$
$$= (b^m ta_1)^2 + (b^m.t.a_2)^2 + (b^m.t.a_3)^3$$

• Với n là số nguyên dương lẻ, $n = 2m+1 (m \in \mathbb{N})$, ta có

$$b^n = (b^m)^2.b = (b^m)^2.(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$
$$= (b^m.b_1)^2 + (b^m.b_2)^2 + (b^m.b_3)^2.$$

Vậy với mỗi n nguyên dương, b^n luôn biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số chính phương. ❒

➢**Nhận xét.** 1) Chú ý rằng với b nguyên dương tùy ý thì điều kiện ii) của bài toán luôn được thỏa mãn (vì với $k = 0$ thì $a = 1$ luôn là ước của b). Do đó bài toán có thể phát biểu dưới dạng "mạnh" hơn : *Chứng minh rằng nếu số nguyên dương b là tổng của ba số chính phương thì $b^n (n \in \mathbb{N}^*)$ cũng là tổng của ba số chính phương.*

Thật vậy, từ giả thiết ta có $b = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{N})$.

• Với $n = 2m\ (m \in \mathbb{N}^*)$ thì $b^n = b^{2m} = (b^m)^2 + 0^2 + 0^2$.

• Với $n = 2m-1\ (m \in \mathbb{N}^*)$ thì

$$b^n = b^{2m-1} = (b^{m-1})^2.b = (b^{m-1})^2.(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$
$$= (b^{m-1}.b_1)^2 + (b^{m-1}.b_2)^2 + (b^{m-1}.b_3)^2.$$

Vậy b^n là tổng của ba số chính phương.

2) Có ít các bạn tham gia giải bài này. Các bạn có lời giải tốt là:

Phú Thọ: *Nguyễn Nhật Phương*, 9B, THCS Phong Châu; **Thanh Hóa:** *Hoàng Bảo Long, Lê Quang Dũng*, 6D, *Đỗ Minh Thùng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Lương Đình Ân*, 7B, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên.

TRẦN HỮU NAM

★**Bài T4/409.** *Cho a, b, c là các số không âm, chứng minh rằng*

$$a+b+c \geq \frac{a-b}{b+2} + \frac{b-c}{c+2} + \frac{c-a}{a+2} \qquad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. *Cách 1.* Xét hiệu.

$$A = (a+b+c) - \left(\frac{a-b}{b+2} + \frac{b-c}{c+2} + \frac{c-a}{a+2}\right)$$
$$= \left(a - \frac{a-b}{b+2}\right) + \left(b - \frac{b-c}{c+2}\right) + \left(c - \frac{c-a}{a+2}\right)$$
$$= \frac{ab+a+b}{b+2} + \frac{bc+b+c}{c+2} + \frac{ca+c+a}{a+2}.$$

Do a, b, c là các số không âm nên $A \geq 0$ và $A = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$. Suy ra BĐT (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 0$.

Cách 2. Đặt $a+2 = x,\ b+2 = y,\ c+2 = z$ với $x \geq 2, y \geq 2, z \geq 2$ thì BĐT (1) trở thành

$$x+y+z-6\ge\frac{x-y}{y}+\frac{y-z}{z}+\frac{z-x}{x}$$

$$\Leftrightarrow x+y+z\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+3 \qquad (2)$$

Vì $x\ge 2, y\ge 2, z\ge 2$ nên $x+y+z\ge 6$, suy ra

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+3\le\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}+3$$

$$=\frac{x+y+z}{2}+\frac{x+y+z}{2}=x+y+z.$$

Điều này chứng tỏ BĐT (2) đúng. Vì vậy BĐT (1) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$ $\Leftrightarrow a=b=c=0$. ❐

➤**Nhận xét.** 1) Đây là bài toán cơ bản nên có nhiều bạn tham gia giải và đa số làm theo hai cách trên. Tuy nhiên có bạn đã quan niệm nhầm coi vai trò *a*, *b*, *c* như nhau để giả sử $a\ge b\ge c$ (!); có bạn đã sử dụng BĐT Cauchy cho ba số không âm vượt quá phạm vi bậc THCS.

b) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt:

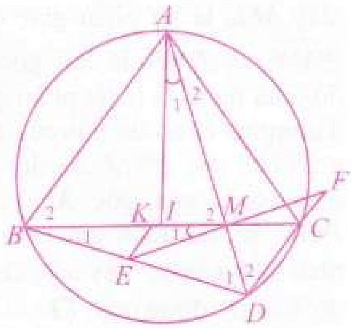
Hà Nội: *Nguyễn Tùng Sơn*, 8A10, *Nguyễn Chí Tùng*, 9A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Hải Phòng:** *Lương Thế Sơn*, 8A1, THCS Hồng Bàng; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Khánh Huyền*, 7A, *Trần Mạch Cường*, 8A, THCS Yên Lạc, *Hoàng Thu Uyên*, 9B, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Nhật Phương*, 8B, THCS Phong Châu, TX. Phú Thọ, *Bùi Đức Thịnh*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Lê Thị Hải Linh*, 9A, THCS Yên Phong; **Thanh Hóa:** *Hoàng Bảo Long*, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Quân*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Thị Hồng Vân*, 8A, THCS Quỳnh Trang, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Đức Nguyên*, 9C, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Lê*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Trị:** *Trần Hữu Dũng*, 9D, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Đông Hà; **Quảng Ngãi:** *Trần Thị Mỹ Ninh*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ; **Bình Định:** *Võ Thế Duy*, 8A1, THCS TTr. Phù Mỹ.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★**Bài T5/409.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là trung điểm của cạnh BC. Trên đoạn IC lấy điểm M bất kì (M khác C và I). AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Trên đoạn BD lấy điểm E sao cho* $\widehat{BME}=\widehat{MAI}$. *Hai đường thẳng EM và DC cắt nhau tại F. Chứng minh rằng*

$$\frac{CF}{CD}=\frac{BE}{BD}.$$

Lời giải



Theo giả thiết, ta có $\widehat{A_1}=\widehat{M_1}$, suy ra

$\widehat{BIA}=\widehat{A_1}+\widehat{M_2}$
$=\widehat{M_1}+\widehat{M_2}$
$=\widehat{AME}=\widehat{FMD}.$

Kết hợp với $\widehat{B_2}=\widehat{D_2}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung), suy ra $\Delta ABI \backsim \Delta FDM$ (g.g)

$$\Rightarrow\frac{AI}{FM}=\frac{BI}{DM} \qquad (1)$$

Tương tự, $\widehat{MED}=\widehat{M_1}+\widehat{B_1}=\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=\widehat{IAC}.$

Kết hợp với $\widehat{D_1}=\widehat{ICA}$, suy ra

$$\Delta MDE \backsim \Delta ICA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AI}{EM}=\frac{CI}{DM} \qquad (2)$$

Vì $IB=IC$ nên từ (1) và (2) suy ra $EM=FM$.

Kẻ $EK//CD$ cắt BC tại K thì dễ thấy $EK=CF$, theo định lí Thales, ta có

$$\frac{CF}{CD}=\frac{EK}{CD}=\frac{BE}{BD} \text{ (đpcm). ❐}$$

➤**Nhận xét.** 1) Đa số các bạn đều sử dụng các tam giác đồng dạng để đi đến kết quả $EM=FM$. Từ đây có thể bằng nhiều cách để chứng minh $\frac{CF}{CD}=\frac{BE}{BD}$, trong đó có cách sử dụng định lí Menelaus.

2) Hai bạn *Đỗ Nguyễn Hoàng Anh*, 9A$_1$, THCS Hắc Dịch, Tân Thành, **Bà Rịa - Vũng Tàu** và *Nguyễn Văn Cao*, 9A, THCS Phương Khoan, Sông Lô, **Vĩnh Phúc** cùng tổng quát hóa bài toán bằng cách thay giả thiết *I* là trung điểm của *BC* thành giả thiết $\frac{IB}{IC}=m\,(m>0)$, khi đó kết luận sẽ là $\frac{BE}{BD}=m.\frac{CF}{CD}$. Cách giải hoàn toàn tương tự.

3) Ngoài hai bạn trên, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt:

Nghệ An: *Nguyễn Văn Quân*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương. **Hà Tĩnh**: *Trần Thị Minh Thủy*, 9A$_4$, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; *Đậu Văn Tuấn*, 9T, THCS TTr. Cẩm Xuyên; **Quảng Ngãi**: *Tống Thành Nguyện*, *Huỳnh Tiến Vỹ*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; *Huỳnh Đặng Hiếu*, 9B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa. **Đồng Nai**: *Lê Huỳnh Quốc Bảo*, 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Biên Hòa; **Bắc Ninh**: *Lê Thị Hải Linh*, 9A, THCS Yên Phong;**Thái Bình**: *Bùi Tuấn*

Hưng, 6A, THCS TTr. Đông Hưng; **Thanh Hóa**: *Lê Tuấn Linh*, 9B, THCS Trần Mai Ninh. **Gia Lai**: *Trần Nguyên Trụ*, 9[1], THCS Phạm Hồng Thái, TP. Pleiku, Gia Lai. **Hà Nam**: *Lê Thanh Hải*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm. **Bình Định**: *Nguyễn Anh Thắng*, $9A_{10}$, THCS Nguyễn Trường Tộ, TP. Quy Nhơn.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★Bài T6/409. *Giải phương trình*

$$\sqrt{\frac{x+2}{2}}-1=\sqrt[3]{3(x-3)^2}+\sqrt[3]{9(x-3)}.$$

Lời giải. Điều kiện $x\ge -2$.

Đặt $t=\sqrt[3]{9(x-3)}$ thì ta có

$$x=\frac{t^3+27}{9};\ \sqrt{\frac{x+2}{2}}=\sqrt{\frac{t^3+45}{18}};\ \sqrt[3]{3(x-3)^2}=\frac{t^2}{3}.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{\frac{t^3+45}{18}}-1=\frac{t^2}{3}+t\Leftrightarrow\sqrt{\frac{t^3+45}{2}}=t^2+3t+3\quad(1)$$

Ta có $t^2+3t+3=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, nên phương trình (1) tương đương với

$$\frac{t^3+45}{2}=(t^2+3t+3)^2$$

$$\Leftrightarrow 2t^4+11t^3+30t^2+36t-27=0$$

$$\Leftrightarrow(2t-1)(t+3)(t^2+3t+9)=0$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\text{ hoặc } t=-3.$$

• Với $t=\frac{1}{2}$ thì $x=\frac{t^3+27}{9}=\frac{217}{72}$.

• Với $t=-3$ thì $x=\frac{t^3+27}{9}=0$.

Các nghiệm trên thỏa mãn điều kiện của bài toán. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0; x=\frac{217}{72}$. □

➤**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Đỗ Quang Khải*, 10T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Văn Cao*, 9A, THCS Phương Khoan, Sông Lô; **Thái Bình**: *Trần Hồng Quân*, 10 Toán I, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa**: *Lê Thị Khanh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An**: *Nguyễn Thị Hương Giang*, 10T1, THPT Đô Lương I, *Cao Thanh Linh*, 9A1, THCS Hạnh Thiết, Quỳ Châu; **Quảng Trị**: *Trần Đức Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai**: *Hà Văn Trường*, 10A1, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

NGUYỄN ANH DŨNG

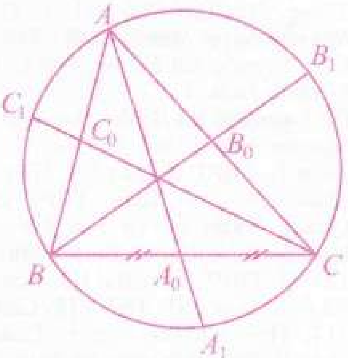
★Bài T7/409. *Xét các tam giác ABC nội tiếp một đường tròn (O) cho trước. Các trung tuyến xuất phát từ A, B, C cắt đường tròn (O) tương ứng tại A_1, B_1, C_1. Hỏi trong số những tam giác đó, tam giác nào làm cho biểu thức* $p=\frac{AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2}{AB^2+BC^2+CA^2}$ *có giá trị nhỏ nhất?*

Lời giải. Giả sử A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là trung điểm các cạnh *BC, CA, AB*. Khi đó

$$AA_0.A_1A_0=A_0B.A_0C=\frac{BC^2}{4}.$$

Từ công thức tính độ dài đường trung tuyến trong tam giác, ta có

$$AB^2+AC^2=2AA_0^2+\frac{BC^2}{2}=2AA_0.AA_1.$$



Tương tự ta cũng có

$$BC^2+BA^2=2BB_1.BB_0;$$

$$CA^2+CB^2=2CC_1.CC_0.$$

Từ đó, theo bất đẳng thức Bunyakovsky

$$AB^2+BC^2+CA^2=AA_0.AA_1+BB_0.BB_1+CC_0.CC_1$$
$$\le\sqrt{(AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2)(AA_0^2+BB_0^2+CC_0^2)}.$$

Suy ra $(AB^2+BC^2+CA^2)^2$

$$\le\frac{3}{4}(AB^2+BC^2+CA^2)(AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2).$$

Do đó $p\ge\frac{4}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác *ABC* đều.

Tóm lại, với tam giác ABC đều thì biểu thức p có giá trị nhỏ nhất là $\frac{4}{3}$. □

➤**Nhận xét.** 1) Một số bạn sử dụng khái niệm *phương tích của một điểm đối với một đường tròn* kết hợp với *công thức Leibnitz* $AB^2+BC^2+CA^2=9(R^2-OG)^2$, trong đó G là trọng tâm tam giác ABC, R là bán kính đường tròn (O) cũng đi đến kết quả như trên.

2) Số lời giải gửi về Tòa soạn rất nhiều. Tất cả các lời giải đều đúng. Xin nêu tên những bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Hải Phòng:** *Lương Thế Sơn*, 8A1, THCS Hồng Bàng, *Phan Đức Minh*, 12A15, THPT Thái Phiên; **Yên Bái:** *Nguyễn Hải Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Vĩnh Phúc:** *Đặng Quang Tuấn*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** *La Văn Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Bắc Ninh:** *Đỗ Quang Khải*, 10T, THPT chuyên Bắc Ninh, *Trương Giang Khang*, 11A1, THPT Thuận Thành Số 1; **Hưng Yên:** *Dương Mạnh Cường*, 10 Toán 1, *Đỗ Thanh Tùng*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** *Phạm Đức Vượng*, 11A1, THPT Thanh Miện I, *Trần Quang Thanh*, *Nguyễn Thị Thanh Yên*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Vũ Xuân Trường*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Trần Hồng Quân*, 10 Toán 1, *Trần Trung Hiếu*, 10 Toán 2, *Trần Quang Đại*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Lan Anh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Vương Nhật Quân*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Hiền Trang*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Hoàng Danh Thắng*, *Hồ Diên Phúc*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III, *Nguyễn Ngọc Minh*, 10A2, THPT Thái Hòa, Nghĩa Đàn, *Nguyễn Tất Khánh*, 10A1, THPT Đô Lương III, *Lê Đình Tuấn*, 11T7, *Nguyễn Văn Hoàng*, 12T7, THPT Đô Lương I; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Dũng*, 10 Toán 1, *Nguyễn Mậu Thành*, 11 Toán 1, *Trần Võ Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Trần Thanh Tiến*, 10 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Quảng Nam:** *Lê Vũ Văn Phi*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bình Định:** *Trần Quang Khanh*, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Đồng Tháp:** *Võ Hoài Bảo*, 10T, THPT TP. Cao Lãnh, *Âu Anh Minh*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Đồng Nai:** *Trần Hoàng Nhật Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, *Dương Quốc Khánh*, 11B1, THPT Lê Hồng Phong, Biên Hòa; **Bến Tre:** *Lê Thị Minh Thảo*, *Phạm Xuân Bách*, 11 Toán 1, *Đào Bá Khả*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

★Bài T8/409. *Cho tam giác ABC, chứng minh rằng*

$$\frac{\sin A.\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin B.\sin C}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin C.\sin A}{\sin^2\frac{B}{2}}\geq 9.$$

Lời giải. (*Theo đa số các bạn*). Sử dụng định lí sin và định lí côsin trong tam giác ta có

$$\frac{\sin A.\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{4\sin A.\sin B.\cos^2\frac{C}{2}}{\sin^2 C}$$

$$=\frac{2ab\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}{c^2}=\left(\frac{a+b}{c}\right)^2-1.$$

Tương tự ta có $\frac{\sin B.\sin C}{\sin^2\frac{A}{2}}=\left(\frac{b+c}{a}\right)^2-1;$

$$\frac{\sin C.\sin A}{\sin^2\frac{B}{2}}=\left(\frac{c+a}{b}\right)^2-1.$$

Vậy BĐT cần chứng minh tương đương với

$$T=\left(\frac{a+b}{c}\right)^2+\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+\left(\frac{c+a}{b}\right)^2\geq 12.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho các số dương ta có

$$T\geq 4\left(\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\right)\geq 4.3\sqrt[3]{\frac{ab}{c^2}.\frac{bc}{a^2}.\frac{ca}{b^2}}=12.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay ABC là tam giác đều. □

➤**Nhận xét.** Có khá đông bạn tham gia giải bài toán trên và đa số cho lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải gọn:

Hà Nội: *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; *Ngô Việt Hải*, 11A1 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thái Bình:** *Trần Trung Hiếu*, 11 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình; **Bắc Ninh:** *Ngô Hữu Trị*, 10A5, THPT Yên Phong 2; *Cao Trần Đình*, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Hưng Yên:** *Dương Mạnh Cường*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** *Mạc Văn Tình*, 10A1, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn; **Nghệ An:** *Trương Tuấn Anh*, 11A12, THPT Diễn Châu II; **Bến Tre:** *Đào Bá Khả*, *Khưu Thành Quý*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre; *Nguyễn Hải Linh*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bình Định:** *Nguyễn Danh Nhân*, 12A1, THPT Phù Cát II; **Yên Bái:** *Vũ Thị Minh Thu*, 12T4, THPT Nguyễn Huệ.

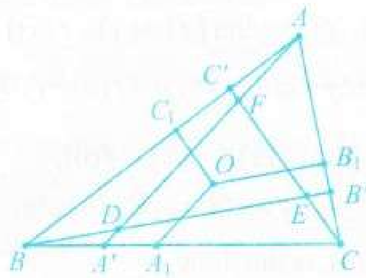
NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T9/409. *Cho tam giác ABC có các điểm A', B', C' thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho* $\frac{A'B}{A'C}=\frac{B'C}{B'A}=\frac{C'A}{C'B}$. *Gọi D là giao điểm của AA' và BB', E là giao điểm của BB' và CC', F là giao điểm của CC' và AA'. Các đường thẳng qua điểm O nằm trong tam giác và song song với AA', BB', CC' tương ứng cắt*

BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng với điểm M bất kì, ta có

$$AD(MA_1-OA_1)+BE(MB_1-OB_1)+CF(MC_1-OC_1)\geq 0.$$

Lời giải. Dễ thấy $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ theo thứ tự cùng hướng với $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OC_1}$ (1)



Đặt $\dfrac{A'B}{A'C}=\dfrac{B'C}{B'A}=\dfrac{C'A}{C'B}=k.$

Khi đó, ta có $\dfrac{A'B}{BC}=\dfrac{B'C}{CA}=\dfrac{C'A}{AB}=\dfrac{k}{k+1}.$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác $AA'C$ và cát tuyến BDB', ta có

$$\frac{DA}{DA'}\cdot\frac{BA'}{BC}\cdot\frac{B'C}{B'A}=1.$$

Từ các đẳng thức trên, sau một vài biến đổi đại số đơn giản ta được

$$\frac{DA}{AA'}=\frac{k+1}{k^2+k+1}.$$

Tương tự $\dfrac{BE}{BB'}=\dfrac{CF}{CC'}=\dfrac{k+1}{k^2+k+1}.$

Vậy $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\dfrac{k+1}{k^2+k+1}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)$

$$=\frac{k+1}{k^2+k+1}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{AC'}\right)$$

$$=\frac{k+1}{k^2+k+1}\left(\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{AC'}\right)$$

$$=\frac{k(k+1)}{k^2+k+1}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0} \quad (2)$$

Tóm lại, với mọi điểm M ta có

$$AD(MA_1-OA_1)+BE(MB_1-OB_1)+CF(MC_1-OC_1)$$

$$\geq \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{MC_1}-AD.OA_1-BE.OB_1-CF.OC_1$$

$$=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{MC_1}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{OC_1}\ (\text{do }(1))$$

$$=\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{MA_1}-\overrightarrow{OA_1})+\overrightarrow{BE}(\overrightarrow{MB_1}-\overrightarrow{OB_1})+\overrightarrow{CF}(\overrightarrow{MC_1}-\overrightarrow{OC_1})$$

$$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF})\overrightarrow{MO}=0\ (\text{theo}(2)).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MB_1}, \overrightarrow{MC_1}$ theo thứ tự cùng hướng với $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$. Nói cách khác, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng O. ❐

➢**Nhận xét.** Đây là bài toán cơ bản về biểu diễn vectơ và tích vô hướng, khá nhiều bạn tham gia và đều cho lời giải đúng. Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Hoàng Đỗ Kiên*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Viết Thủy*, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nam Định:** *Trần Quang Huy*, THPT A Hải Hậu; **Hà Nội:** *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Thái Bình:** *Trần Trung Hiếu*, 11T2, *Phạm Hoàng Giang*, 11T1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** *Hồ Diên Phúc*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III, *Lê Hoàng Hiệp*, THPT Thái Hoà; **Quảng Nam:** *Lê Vũ Văn Phi*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Nai:** *Dương Quốc Khánh*, 11B1, THPT Lê Hồng Phong, TP. Biên Hoà.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T10/409. *Cho $P=(n+1)^7-n^7-1$ ($n\in\mathbb{N}$). Chứng minh rằng có vô hạn số tự nhiên n để P là một số chính phương.*

Lời giải. (Theo bạn *Phan Đức Minh*, 12A15, THPT Thái Phiên, **Hải Phòng**).

Ta có $P=(n+1)^7-n^7-1=7n(n+1)(n^2+n+1)^2$

Thành thử ta chỉ cần chỉ ra có vô hạn số tự nhiên n để $7n(n+1)$ là số chính phương hay để $n(n+1)=7y^2$ $(y\in\mathbb{N}^*)$.

Ta có $n(n+1)=7y^2 \Leftrightarrow (2n+1)^2-28y^2=1$ (1)

Đặt $x=2n+1$ ta được $x^2-28y^2=1$ (2)

Ta đã biết phương trình (2) (gọi là *phương trình Pell*) có vô số nghiệm nguyên dương.

Ngược lại, nếu $(x\,;y)$ là nghiệm của PT (2) thì x lẻ, do đó $n=\dfrac{x-1}{2}$ thỏa mãn (1). Do đó với mỗi nghiệm nguyên dương của (2) thì ứng với một giá trị $n=\dfrac{x-1}{2}$ để $n(n+1)=7y^2$ $\Leftrightarrow P$ là số chính phương. Vậy bài toán được giải xong. ❐

➤**Nhận xét.** 1) Bạn *Minh* còn có thêm nhận xét: *Tất cả các số tự nhiên n cần tìm là các số hạng của dãy* $n_1 = 0$, $n_2 = 63$, $n_{k+1} = 254n_k - n_{k-1} + 126\,(k \ge 2)$.

2) Ngoài bạn *Minh*, Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Chí Tùng*, 9A10, THCS GiảngVõ, Ba Đình; **Hưng Yên:** *Dương Mạnh Tường*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Lan Anh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Hồ Diên Phúc*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III; **Quảng Trị:** *Trần Đức Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** *Lê Vũ Văn Phi*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Nai:** *Dương Quốc Khánh*, 11B1, THPT Lê Hồng Phong, Biên Hòa, *Nguyễn Quang Vũ*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Quảng Ngãi:** *Võ Văn Tiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Khiết.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T11/409.** *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện*

$$f(xy)+f(x+y)=f(xy+x)+f(y), \forall x, y\in\mathbb{R} \quad (1)$$

Lời giải. (*Theo đa số các bạn*).

Viết lại PT (1) dưới dạng

$$f(xy+x)-f(xy)=f(x+y)-f(y), \forall x, y\in\mathbb{R} \quad (2)$$

Trong (2) thay y bởi xy, ta thu được

$$f(x^2y+x)-f(x^2y)=f(x+xy)-f(xy), \forall x, y\in\mathbb{R} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$f(x^2y+x)-f(x^2y)=f(x+y)-f(y), \forall x, y\in\mathbb{R} \quad (4)$$

Trong (4) tiếp tục thay y bởi xy, ta thu được

$$f(x^3y+x)-f(x^3y)=f(x+xy)-f(xy), \forall x, y\in\mathbb{R} \quad (5)$$

Từ (2) và (5) suy ra

$$f(x^3y+x)-f(x^3y)=f(x+y)-f(y), \forall x, y\in\mathbb{R}.$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được với mọi $n\in\mathbb{Z}$, có

$$f(x^ny+x)-f(x^ny)=f(x+y)-f(y), \forall x, y\in\mathbb{R} \quad (6)$$

• Xét $x\in(-1;1)\setminus\{0\}$. Từ giả thiết f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ (6), ta thu được

$$f(x+y)-f(x)=\lim_{n\to+\infty}\big(f(x+y)-f(x)\big)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\big(f(x^ny+x)-f(x^ny)\big)$$
$$=f\Big(\lim_{n\to+\infty}(x^ny+x)\Big)-f\Big(\lim_{n\to+\infty}(x^ny)\Big)=f(x)-f(0)$$

nên $f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0)$,

$$\forall y\in\mathbb{R}, x\in(-1;1)\setminus\{0\} \quad (7)$$

• Khi $x\in\mathbb{R}\setminus[-1;1]$. Từ giả thiết f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ (6), ta thu được

$$f(x+y)-f(x)=\lim_{n\to-\infty}\big(f(x+y)-f(x)\big)$$
$$=\lim_{n\to-\infty}\big(f(x^ny+x)-f(x^ny)\big)=f(x)-f(0)$$

nên $f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0)$,

$$\forall y\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}\setminus[-1;1] \quad (8)$$

Từ (7) và (8), ta thu được

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0),$$
$$\forall y\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}\setminus\{0;\pm1\} \quad (9)$$

Nhận xét rằng, với mỗi y cố định đều tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to\pm1} f(x+y)$ nên từ (9) suy ra

$$f(1+y)=f(1)+f(y)-f(0), \forall y\in\mathbb{R} \quad (10)$$

và $f(-1+y)=f(-1)+f(y)-f(0), \forall y\in\mathbb{R} \quad (11)$

Từ (9), (10) và (11) suy ra

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0), \forall x, y\in\mathbb{R} \quad (12)$$

Đặt $f(x)-f(0)=g(x)$ thì g cũng là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và (12) có dạng

$$g(x+y)=g(x)+g(y), \forall x, y\in\mathbb{R} \quad (13)$$

(13) là phương trình hàm Cauchy trong lớp hàm liên tục nên có nghiệm $g(x)=ax$, suy ra $f(x)=ax+b$.

Thử lại, ta thấy hàm $f(x)=ax+b$ thỏa mãn điều kiện (1) với mọi $a, b\in\mathbb{R}$. ❐

➤**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn gửi lời giải tìm nghiệm trong lớp hàm có đạo hàm bậc nhất nên lời giải tuy đơn giản nhưng không phù hợp với điều kiện bài ra.

Một số bạn đặt biến phụ $xy = z$ và coi đây là biến độc lập cũng không đúng vì khi xét $z = 0$ thì nhất thiết phải có điều kiện đi kèm là hoặc $x = 0$ hoặc $y = 0$.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Đỗ Kiên, Đặng Quang Tuấn*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Trương Giang Khang*, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Đồng Nai:** *Dương Quốc Khánh*, 11B1, THPT Lê Hồng Phong, TP. Biên Hòa.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T12/409. *Cho hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thoả mãn các điều kiện sau:*

(i) $f(1)=2011$.

(ii) $f(x+1).f(x)=(f(x))^2+f(x)-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $S_1=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f(i)-1}$, $S_2=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f(i)+1}$.

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_1+S_2)$.

Lời giải. Kí hiệu $a_n=f(n), n\in\mathbb{N}^*$.

Từ điều kiện của bài toán ta có $a_1=2011$, $a_{n+1}.a_n=a_n^2+a_n-1, \forall n\ge 1$.

Suy ra $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+a_n-1}{a_n}=a_n+1-\dfrac{1}{a_n}$.

Từ công thức trên, bằng quy nạp theo n, ta thấy ngay $2011=a_1<a_2<a_3<\ldots$ và $a_n\le 2010+n, \forall n\ge 1$.

Chú ý $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$, vì PT giới hạn $a=a+1-\dfrac{1}{a}$ không có nghiệm thực thuộc $(2011\ ;+\infty)$.

• Từ các nhận xét trên ta có

$$a_i-1\le 2009+i,\ \forall i\ge 1.$$

Do đó $S_1=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i-1}\ \ge\ \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2009+i}\to+\infty$ khi $n\to+\infty$ (vì như ta đã biết $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}\right)=+\infty$).

Tương tự $S_2\to+\infty$ khi $n\to+\infty$.

Như vậy $\lim\limits_{n\to\infty}(S_1+S_2)=+\infty$.

• Kết quả là hay hơn nếu ta xét $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_1-S_2)$.

Thật vậy $S_1-S_2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{a_i-1}-\dfrac{1}{a_i+1}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2}{a_i^2-1}$.

Chú ý $a_{i+1}=a_i+1-\dfrac{1}{a_i}\Rightarrow a_{i+1}-1=a_i-\dfrac{1}{a_i}=\dfrac{a_i^2-1}{a_i}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{i+1}-1}=\frac{a_i}{a_i^2-1}=\frac{a_i+1-1}{a_i^2-1}=\frac{a_i+1}{a_i^2-1}-\frac{1}{a_i^2-1}$$

$$=\frac{1}{a_i-1}-\frac{1}{a_i^2-1}$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a_i^2-1}=\dfrac{1}{a_i-1}-\dfrac{1}{a_{i+1}-1}$. Bởi vậy

$$S_1-S_2=2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2-1}=2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i-1}-\frac{1}{a_{i+1}-1}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right)$$

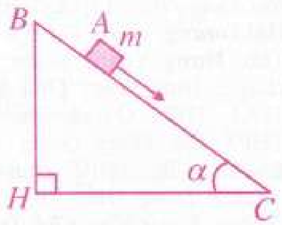
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(S_1-S_2)=\frac{2}{a_1-1}=\frac{2}{2010}=\frac{1}{1005}.\ \square$$

➢**Nhận xét.** Như đã thể hiện ở trên, bản chất của bài toán này là bài toán dãy số và đây là bài toán dãy số không khó, nhưng có nhiều lí luận rất cơ bản. Các bạn học sinh lớp10, lớp11 sau có lời giải đúng:

Yên Bái: *Nguyễn Hải Linh*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bắc Ninh:** *Trương Giang Khang*, 11A1, THPT Thuận Thành số 1; **Hưng Yên:** *Hoàng Văn Duy*, 10T1, *Đỗ Thanh Tùng*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** *Đặng Quang Tuấn*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** *Nguyễn Thị Thanh Yên*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nghệ An:** *Lê Hoàng Hiệp*, 10A1, THPT Thái Hòa; *Hoàng Danh Thắng*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Dũng*, 11T1; *Nguyễn Mậu Thành*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Hồ Phước Bảo*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đông Hà; **Quảng Nam:** *Lê Vũ Văn Phi*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài L1/409. *Một vật nhỏ A bắt đầu trượt từ đỉnh B của một khối hình nêm BHC có đáy HC = 2,1m và góc* $\widehat{BCH}=\alpha$ *(hình vẽ).*



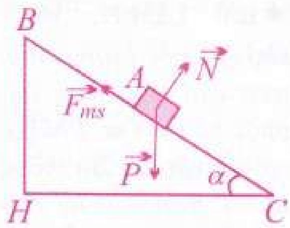
Hệ số ma sát giữa vật và mặt BC là k = 0,14. Tính giá trị của góc α ứng với thời gian đi xuống từ B đến C là nhỏ nhất. Hỏi thời gian ấy bằng bao nhiêu? Cho g = 9,8m/s².

Lời giải. Theo định luật II Newton ta có

$$\vec{P}+\vec{N}+\vec{F}_{ms}=m\vec{a} \qquad (1)$$

Trong đó $\vec{P}=m\vec{g}$,

$\vec{F}_{ms}=k\vec{N}$.



Chiếu phương trình (1) theo phương vuông góc và song song với mặt phẳng nghiêng, ta được

$$mg\cos\alpha-N=0 \qquad (2)$$

$$mg\sin\alpha-kN=ma \qquad (3)$$

Suy ra $a=g\left(\sin\alpha-k\cos\alpha\right)$ (4)

Thời gian đi xuống của vật từ B đến C là

$$t=\sqrt{\frac{2.BC}{a}}=\sqrt{\frac{2.HC}{\cos\alpha.g\left(\sin\alpha-k\cos\alpha\right)}} \quad (5)$$

α phải thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\\ \tan\alpha>k\end{cases}$ (6)

Đặt $y=\cos\alpha\left(\sin\alpha-k\cos\alpha\right)$. Để t nhỏ nhất thì y phải có giá trị lớn nhất. Sử dụng điều kiện (6) khi khảo sát hàm y theo α, ta tìm được $\alpha\approx 48,98^{\circ}$.

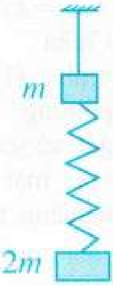
Thay $\alpha\approx 48,98^{\circ}$ vào (5) ta có $t_{\min}\approx 0,993$s. ❒

➢**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt

Phú Thọ: *Nguyễn Quý Dương*, 11 Lí, *Hà Thị Huyền Nhung*, 12K1, THPT chuyên Hùng Vương, *Trần Hữu Bằng*, 11A5, THPT Long Châu Sa; **Bắc Ninh:** *Lê Văn Mạnh*, 12 Hóa, THPT chuyên Bắc Ninh, *Nguyễn Văn Long*, 11A4, THPT Thuận Thành 1; **Hà Nam:** *Nguyễn Thị Hồng Đức*, 11A1, THPT A Duy Tiên, *Đinh Ngọc Hải*, 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lí; **Nam Định:** *Vũ Xuân Trường*, 11 Toán 1, *Đinh Việt Thắng*, *Bùi Xuân Hiển*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Dương:** *Phạm Thị Yến Nhi*, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Hoàng Đình Quang*, 11A1, THPT Quỳnh Côi, *Nguyễn Văn Minh*, 11A2, THPT Bắc Đông Quan; **Thanh Hóa:** *Đặng Duy Khánh*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 10A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, *Hoàng Văn Chân*, *Chu Tự Tài*, 11A12, THPT Diễn Châu II, *Hồ Diên Phúc*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III, *Trần Trung Hiếu*, *Trịnh An Bình*, 10A1, *Nguyễn Ngọc Minh*, 10A2, *Trần Tuấn Chung*, 11A1, *Nguyễn Ngọc Quân*, 11A2, *Trần Văn Bắc*, 12A6, THPT chuyên Đại học Vinh; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Thanh Dư*, 10 Lí, THPT TP. Cao Lãnh; **Bình Định:** *Trần Quang Khanh*, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn.

NGUYỄN VĂN THUẬN

★**Bài L2/409.** *Một sợi dây không khối lượng một đầu dây treo vào trần nhà, đầu còn lại buộc vào vật m. Phía dưới vật m có nối với vật 2m thông qua một lò xo. Ban đầu hệ ở trạng thái cân bằng, độ biến dạng của lò xo khi đó là 3cm. Người ta đem đốt sợi dây.*



a) *Tìm gia tốc của các vật ngay khi vừa đốt dây.*

b) *Sau bao lâu lò xo lại trở về trạng thái ban đầu? Tìm vận tốc của các vật khi đó.*

Lời giải. a) Khi chưa đốt dây, lò xo giãn Δl_0. Điều kiện cân bằng với vật $2m$ là $k\Delta l_0=2mg$.

Ngay sau khi đốt dây, vị trí các vật chưa thay đổi, gia tốc của các vật $2m$ và m lần lượt bằng

$$a_2=0;\, a_1=\frac{k\Delta l_0}{m}=\frac{2mg}{m}=2g.$$

b) Sau khi đốt dây, khối tâm G của hệ rơi tự do. Trong hệ quy chiếu gắn với G các vật sẽ dao động điều hòa như những con lắc lò xo mà đầu lò xo tương ứng gắn với G.

Khi chiều dài lò xo là l, vật m cách khối tâm G một khoảng $\frac{2l}{3}$, còn vật $2m$ cách khối tâm $\frac{l}{3}$. Độ cứng lò xo tương ứng của các con lắc m và $2m$ là k_1 và k_2. Ta có

$$k_1.\frac{2l}{3}=k_2.\frac{l}{3}=k.l \;\Rightarrow k_1=\frac{3k}{2};\, k_2=3k.$$

Tần số góc của hai con lắc lần lượt là

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m}}=\sqrt{\frac{3k}{2m}};\, \omega_2=\sqrt{\frac{k_2}{2m}}=\sqrt{\frac{3k}{2m}}.$$

Như vậy hai vật dao động cùng tần số góc và ngược pha nhau.

Lò xo sẽ trở về trạng thái ban đầu lần đầu tiên sau 1 chu kì dao động, tức là sau khoảng thời gian $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}=2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{\Delta l_0}{3g}}\approx 0,2$s.

Khi đó vận tốc của các vật đối với khối tâm G bằng 0, vận tốc của các đối với đất bằng vận tốc của khối tâm G: $v_1=v_2=gT=2$m/s. ❒

➢**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt

Hải Dương: *Phạm Thị Yến Nhi*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Đinh Việt Thắng*, *Bùi Xuân Hiển*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nam:** *Đinh Ngọc Hải*, 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa; **Nghệ An:** *Trần Văn Bắc*, 12A6, THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Ngãi:** *Kiều Văn Bảo*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** *Trần Quang Khanh*, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phạm Quang Dũng*, 11 Lí, PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEMS IN THIS ISUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/413. (For 6th grade). On the cardboards, Write each five-digit numbers, from 11111 to 99999, on a cardboard. After mixing the cardboards, place them in a sequence in certain order. Prove that the resulting number is not a power of 2.

T2/413. (For 7th grade). Find all triple of pairwise distinct prime numbers a, b, c such that

$$20abc < 30(ab+bc+ca) < 21abc.$$

T3/413. Point O on the median AD of triangle ABC is chosen such that $\dfrac{AO}{AD} = k$ $(0 < k < 1)$. The rays BO, CO cut AC, AB at E, F respectively. Determine the value of k so that $S_{AEOF} = \dfrac{1}{15} S_{ABC}$.

T4/413. Solve the equation

$$\sqrt{x^2+x+19}+\sqrt{7x^2+22x+28}+\sqrt{13x^2+43x+37}$$
$$=3\sqrt{3}(x+3).$$

T5/413. Let ABC be a right triangle with right angle at A. D is a point within the triangle so that $CD = CA$; Choose point M on the edge AB so that $\widehat{BDM} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACD}$; N is the intersection of MD and the altitude AH of triangle ABC. Prove that $DM = DN$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/413. Let ABC be a triangle inscribed the circle (O). F is an arbitrary point on the arc $\overset{\frown}{AB}$ (not containing C) (F differs from A and B). M is the midpoint of the arc $\overset{\frown}{BC}$ (not containing A); N is the midpoint of the arc $\overset{\frown}{AC}$ (not containing B). The line passing through C and parallel to MN cuts the circle (O) at another point P. Let I, I_1, I_2 be the incenters of triangles ABC, FAC, FBC. PI cuts the circle (O) at G. Prove that the four points I_1, F, G, I_2 are concyclic.

T7/413. Solve the equation

$$(2\sin x-3)(4\sin^2 x-6\sin x+3)=1+3\sqrt[3]{6\sin x-4}.$$

T8/413. x, y, z, and t are four real numbers longing to the interval $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right]$. Find the least and greatest values of the expression

$$P=9\left(\frac{x+z}{x+t}\right)^2+16\left(\frac{x+t}{x+y}\right)^2.$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/413. Prove that given any prime number p, there exist natural numbers x, y, z, t so that $x^2+y^2+z^2-tp=0$ and $0<t<p$.

T10/413. Let (u_n) be a sequence given by

$$u_1 = a;\ u_{n+1}=\frac{(\sqrt{2}+1)u_n-1}{\sqrt{2}+1+u_n},\ (n\geq 1).$$

a) Find the condition of a so that all terms in the sequence are well-defined.

b) Find the value of a such that $u_{2011} = 2011$.

T11/413. Find all functions $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ satisfying the following condition

$$\frac{f(x+y)+f(x)}{2x+f(y)}=\frac{2y+f(x)}{f(x+y)+f(y)},\ \forall x,y\in\mathbb{N}^*.$$

T12/413. Let ABC be a triangle, $\widehat{BAC}\neq 90^\circ$. D is a fixed point on the edge BC. P is a point inside the triangle ABC. Let B_1, C_1 be respectively the projections of P onto AC, AB. DB_1 cuts AB at C_2, DC_1 cut AC at B_2. Q is the intersection differs from A of the circumcircles of triangles AB_1C_1 and AB_2C_2. Prove that the line PQ always go through a fixed point when P is moving.

Translated by LE MINH HA

HỘI THẢO KHOA HỌC CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VỀ ĐÀO TẠO, BỒI DƯỠNG GIÁO VIÊN TRUNG HỌC CƠ SỞ tại Vĩnh Phúc

Trong các ngày 14,15,16/10, Trường Cao đẳng Vĩnh Phúc phối hợp với Hội Toán học Hà Nội đã tổ chức **Hội thảo khoa học các chuyên đề Toán học về đào tạo, bồi dưỡng giáo viên THCS.** Đến dự hội thảo có Bà *Dương Thị Tuyến*, Phó Chủ tịch UBND tỉnh Vĩnh Phúc; GS. TSKH. NGND *Nguyễn Văn Mậu*, Chủ tịch Hội đồng khoa học trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội kiêm Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội; ThS. *Hoàng Văn Bình*, Hiệu trưởng Trường CĐ Vĩnh Phúc; các thành viên của Hội Toán học Hà Nội, Hội Toán học Việt Nam, Trường ĐHKHTN, ĐHQGHN, Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Tạp chí Toán Tuổi thơ; Lãnh đạo các trường đại học, cao đẳng phía Bắc và miền Trung; Lãnh đạo các sở, ban, ngành tỉnh Vĩnh Phúc, các phòng giáo dục và đào tạo, huyện, thị, một số trường THCS trong tỉnh cùng toàn thể giáo viên, học sinh khoa Tự nhiên của Trường.

Hội thảo đã nghe báo cáo của các nhà trường về việc đổi mới công tác quản lí theo tinh thần chỉ thị 296/CT-TTg ngày 27/02/2010 của Thủ tướng Chính phủ và những định hướng mới phát triển nhà trường trong giai đoạn hiện nay; đánh giá thực trạng phương pháp dạy học Toán, những thuận lợi, khó khăn trong đổi mới phương pháp dạy học; đề xuất các giải pháp cụ thể, khả thi về đổi mới phương pháp dạy học bộ môn. Đặc biệt giới thiệu các chuyên đề đào tạo, bồi dưỡng học sinh, sinh viên giỏi, tham gia các Kì thi Olympic Toán học toàn quốc các trường đại học, cao đẳng, THPT hàng năm,... nhằm nâng cao chất lượng đào tạo. Nhân dịp này, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã giới thiệu những đổi mới về nội dung và tặng Tạp chí cho các đại biểu tham dự.

Với sự chuẩn bị chu đáo của Ban Tổ chức Hội thảo đã thành công và để lại nhiều ấn tượng tốt đẹp cho các đại biểu tham dự. Hi vọng trên cơ sở kết quả của Hội thảo này sẽ xây dựng một cơ chế hợp tác giữa các trường đại học, cao đẳng trong khu vực nhằm hỗ trợ lẫn nhau trong hoạt động và nghiên cứu khoa học.

PV

GIỚI THIỆU... *(Tiếp trang 15)*

Mệnh đề. $f(x)$ tăng nhanh hơn $g(x)$ trên M khi và chỉ khi $f'(x) > g'(x)$ trên M.

Ý nghĩa hình học. $f(x)$ tăng nhanh hơn $g(x)$ trên M khi và chỉ khi tại mỗi điểm thuộc M, độ dốc của đồ thị hàm số $f(x)$ lớn hơn độ dốc của đồ thị hàm số $g(x)$.

c) Xét hàm số $h(x)$ liên tục trên $D = [a\ ;\ b]$, có đạo hàm trên $(a\ ;\ b)$ và là hàm số tăng trên các tập $M = [c\ ;\ d]$; $K = [p\ ;\ q]$ (M, K là các tập con của D), với $p = c+r$; $q = d+r$; $r \neq 0$.

Hàm số $h(x)$ gọi là tăng trên M chậm hơn tăng trên K (khi đó ta cũng nói $h(x)$ tăng trên K nhanh hơn tăng trên M) nếu:

Với mọi $u, v, t > 0$ (u và $u+t$ thuộc M, $v = u+r$ và $v+t$ thuộc K), ta có
$h(u+t) - h(u) < h(v+t) - h(v)$.

Mệnh đề. $h(x)$ tăng trên M chậm hơn tăng trên K khi và chỉ khi $h'(x) < h'(x+r)$, với mọi x thuộc M, $x+r$ thuộc K.

Ý nghĩa hình học. Hàm số $h(x)$ tăng trên M chậm hơn tăng trên K khi và chỉ khi độ dốc của đồ thị hàm số $h(x)$ tại mỗi điểm x thuộc M nhỏ hơn độ dốc của nó tại mỗi điểm tương ứng $x+r$ thuộc K.

Chú ý. *Trường hợp M và K là hai đoạn có độ dài khác nhau, chẳng hạn K có độ dài lớn hơn M, khi đó xét tập con L (thích hợp) của K; xét sự tăng chậm hơn của h(x) trên M và L để suy ra sự tăng chậm hơn của h(x) trên M và K.*

- Sau 12 tuổi, tỉ lệ tăng chiều cao trung bình của nữ chậm lại: Vận dụng ý nghĩa hình học của hàm tăng chậm hơn trên hai đoạn khác nhau.
- Sau 12 tuổi, tỉ lệ tăng chiều cao trung bình của nữ chậm hơn nam: Vận dụng ý nghĩa hình học của hàm này tăng nhanh hơn hàm kia.

Chú thích. Như trên đã trình bày, **PISA không chỉ dựa vào nội dung các chương trình giáo dục Quốc gia**. Tác giả đưa ra khái niệm về hàm số tăng nhanh, tăng chậm để làm rõ bản chất vấn đề. Đối với học sinh, chỉ cần hiểu được (cảm nhận được) ý nghĩa hình học của hàm tăng nhanh, tăng chậm để trả lời.

Kết quả cuộc thi GIẢI TOÁN và VẬT LÍ trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm học 2010-2011

LTS. Cuộc thi giải Toán và Vật lí năm học 2010 - 2011 trên tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 9 năm 2010 đến tháng 8 năm 2011. Cuộc thi lần này được rất nhiều bạn trẻ yêu Toán cấp THCS và THPT trên cả nước hưởng ứng. Đặc biệt có nhiều bạn không học trường THPT chuyên đã tham gia giải bài và đoạt nhiều giải khá cao. **Nghệ An, Vĩnh Phúc, Quảng Ngãi** là các tỉnh có đông học sinh tham gia và đoạt nhiều giải hơn cả. Giải Xuất sắc môn Toán thuộc về bạn *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I, **Nghệ An**. Bạn *Hoàng* cũng đoạt giải Nhì môn Vật lí trong cuộc thi này. Giải Nhất môn Vật lí thuộc về *Mai Văn Tùng*, 12A1, THPT Hậu Lộc 4, **Thanh Hóa**. Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi, hẹn gặp lại các bạn ở cuộc thi tiếp theo trong năm học 2011 - 2012. Sau đây là danh sách **94** bạn đoạt giải Toán và **17** bạn đoạt giải Vật Lí năm học 2010 - 2011.

MÔN TOÁN

Giải Xuất sắc (1 giải)

Nguyễn Văn Hoàng, 11T7, THPT Đô Lương I, **Nghệ An**.

Giải Nhất (6 giải)

1. *Lê Hồng Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
2. *Đậu Hồng Quân*, 9D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**.
3. *Đỗ Xuân Việt*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
4. *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên, **Hà Nội**.
5. *Vũ Huy Hoàng*, 11A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy, **Thái Bình**.
6. *Võ Văn Huy*, 12A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, **Phú Yên**.

Giải Nhì (11 giải)

1. *Tống Thành Nguyện*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
2. *Trương Công Phú*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
3. *Nguyễn Tất Khánh*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
4. *Đinh Anh Hoàng*, 10A, THPT LCS, Lâm Thao, **Phú Thọ**.
5. *Lê Hoàng Hiệp*, 10A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, **Nghệ An**.
6. *Nguyễn Chí Linh*, 11T, THPT chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**.
7. *Hồ Diên Phúc*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III, **Nghệ An**.
8. *Nguyễn Ngọc Thiện*, 11A1, THPT Thanh Miện I, **Hải Dương**.
9. *Lê Văn Tuấn*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.
10. *Nguyễn Quang Hải*, 11TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, **Bình Định**.
11. *Phan Đức Minh*, 12A15, THPT Thái Phiên, **Hải Phòng**.

Giải Ba (22 giải)

1. *Nguyễn Trọng Khiêm*, 6A1, THCS Võ Hán, Tây Sơn, **Bình Định**.
2. *Trần Thị Mỹ Ninh*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Hành, **Quảng Ngãi**.
3. *Nguyễn Thúy Phượng*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
4. *Cao Thị Thúy Điểm*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

5. *Nguyễn Chí Tùng*, 8A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình, **Hà Nội**.
6. *Phạm Lan Hương*, 9A, THCS Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**.
7. *Đỗ Quang Long*, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh.**
8. *Ong Thế Phương*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa, **Đồng Nai**.
9. *Huỳnh Văn Thống*, 10 Tin, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**.
10. *Trương Giang Khang*, 10A1, THPT Thuận Thành Số 1, **Bắc Ninh**.
11. *Lê Thị Minh Thảo*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre**.
12. *Phạm Huy Hoàng*, 10A1, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
13. *Hoàng Danh Thắng*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III, **Nghệ An**.
14. *Trần Quang Thanh*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.
15. *Nguyễn Danh Nhân*, 11A1, THPT Phù Cát II, **Bình Định**.
16. *Phùng Mạnh Linh*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
17. *Nguyễn Mạnh Quân*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
18. *Lê Đình Tuấn*, 11T7, THPT Đô Lương I, **Nghệ An**.
19. *Khổng Hữu Hiệp*, 12T, THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre**.
20. *Nguyễn Hồng Sơn*, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam**.
21. *Nguyễn Anh Thắng*, 12T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.
22. *Trần Hoàng Ân*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre.**

Giải Khuyến khích (54 giải)

1. *Lê Huyền Trâm*, 6A1, THCS Hai Bà Trưng,TX. Phúc Yên, **Vĩnh Phúc**.
2. *Trần Xuân Yến*, 6A3, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vị Thanh, **Hậu Giang**.
3. *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 6A3, THPT Trần Đại Nghĩa, **TP. Hồ Chí Minh**.
4. *Lê Quang Dũng*, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.
5. *Vũ Trung Hoa*, 7A1, THCS & THPT Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên, **Vĩnh Phúc**.
6. *Trương Thị Hoài Thu*, 7A, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
7. *Nguyễn Thị Nga*, 7A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
8. *Nguyễn Minh Hoàng*, 7A4, THCS Đống Đa, **Hà Nội**.
9. *Nguyễn Hiền Linh*, 7A1, THCS & THPT Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên, **Vĩnh Phúc**.
10. *Nguyễn Thị Bích Ngọc*, 7A4, THCS Đống Đa, **Hà Nội**.
11. *Nguyễn Thanh Quang*, 7A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**.
12. *Huỳnh Tiến Vỹ*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
13. *Trần Hồng Quân*, 9A6, THCS Lương Thế Vinh, **TP. Thái Bình**.
14. *Phạm Tuấn Huy*, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, **TP. Hồ Chí Minh**.
15. *Phạm Đức Hiển*, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh.**
16. *Nguyễn Sơn Hải*, 9C, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**.
17. *Lê Bích Ngọc*, 9A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, **TP. Bắc Ninh**.
18. *Huỳnh Đặng Hiếu*, 9B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**.
19. *Vũ Thị Quỳnh Anh*, 9A, THCS Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**.
20. *Trần Minh Đức*, 9C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.
21. *Trần Bảo Trung*, 9C, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương, **Nghệ An**.
22. *Trần Đại Tân*, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh, **TP. Nam Định**.
23. *Phạm Thị Khánh Linh*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
24. *Nguyễn Văn Tiến*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
25. *Nguyễn Trọng Nhật*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.
26. *Nguyễn Thị Lan Hương*, 9C, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**.
27. *Nguyễn Mạnh Hải*, 9A2, THCS Trần Phú, TP. Phủ Lý, **Hà Nam**.
28. *Nguyễn Đức Nguyên*, 9C, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên, **Nghệ An**.

29. *Lê Phạm Kỳ Anh*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.
30. *Lê Kim Nhã*, 9B, THCS Diễn Lâm, Diễn Châu, **Nghệ An**.
31. *Hoàng Minh Phương*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
32. *Bùi Thị Ngọc Mai*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
33. *Vương Nhật Quân*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**.
34. *Trần Ngọc Tiến*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm, **Hưng Yên**.
35. *Lê Văn Tuấn Anh*, 10A1, THPT Nông Cống I, **Thanh Hóa**.
36. *Trần Trung Hiếu*, 10A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, **Nghệ An**.
37. *Phạm Đức Vượng*, 10A1, THPT Thanh Miện I, **Hải Dương**.
38. *Nguyễn Mậu Thành*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.
39. *Bùi Huy Hoàng*, 10A, THPT Kim Thành I, **Hải Dương**.
40. *Trần Đăng Phúc*, 10A1, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
41. *Lê Trần Nhạc Long*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**.
42. *Nguyễn Hiền Trang*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
43. *Trương Đình Đức*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
44. *Đào Văn Lập*, 10A1, THPT Thanh Thủy, **Phú Thọ**.
45. *Nguyễn Thị Huyền Trang*, 10T, THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**.
46. *Vũ Xuân Trường*, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
47. *Trương Hữu Vạn Lộc*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Rạch Giá, **Kiên Giang**.
48. *Trần Thị Hồng Nhung*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
49. *Nguyễn Phước Toàn*, 11/5, THPT Trần Văn Dư, **Quảng Nam**.
50. *Lê Văn Trọng*, 11A2, THPT Đội Cấn, **Vĩnh Phúc**.
51. *Đường Ngọc Lan*, 11H, THPT chuyên Vị Thanh, **Hậu Giang**.
52. *Nguyễn Thị Thanh Yên*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.
53. *Trần Quang Đại*, 11T, THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**.
54. *Phạm Tiến Dũng*, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

MÔN VẬT LÍ

Giải Nhất (1 giải)

Mai Văn Tùng, 12A1, THPT Hậu Lộc 4, **Thanh Hóa.**

Giải Nhì (7 giải)

1. *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I, **Nghệ An**.
2. *Đinh Ngọc Hải*, 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, Phủ Lý, **Hà Nam**.
3. *Bùi Hữu Vinh*, 11T7, THPT Đô Lương I, **Nghệ An**.
4. *Vũ Quang Minh*, 11 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên, **Thái Nguyên**.
5. *Bùi Xuân Hiển*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
6. *Lê Văn Mạnh*, 12 Hóa, THPT chuyên Bắc Ninh , **Bắc Ninh**.
7. *Bùi Thị Thúy*, 12A3, THPT Lê Hoàn, Thọ Xuân, **Thanh Hóa**.

Giải Ba (9 giải)

1. *Huỳnh Thanh Dư*, 10 Lí, THPT Cao Lãnh, TP. Cao Lãnh, **Đồng Tháp**.
2. *Liêu Khắc Vũ*, 11 Lí, THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre**.
3. *Trần Văn Bắc*, 11A5, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**.
4. *Phạm Quang Dũng*, 11 Lí, PTNK ĐHKHTN, **ĐHQG TP. Hồ Chí Minh**.
5. *Phạm Quốc Đô*, 12C1, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**.
6. *Nguyễn Long Phước Đường*, 12A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**.
7. *Nguyễn Văn Mạnh*, 12A1, THPT Hậu Lộc 4, **Thanh Hóa**.
8. *Vũ Toàn Thắng*, 12A1, THPT Phả Lại, TX. Chí Linh, **Hải Dương**.
9. *Lê Quang Trung*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

Các bạn đoạt giải nhớ gửi nhanh địa chỉ mới của mình về Tòa soạn để nhận Giấy Chứng nhận và tặng phẩm của Tạp chí.

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 413 (11.2011)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : MINH THƠ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI

VỚI YÊU CẦU ĐỔI MỚI PHƯƠNG PHÁP DẠY VÀ HỌC

Đổi mới phương pháp dạy học đang là vấn đề được ngành giáo dục rất quan tâm. Công nghệ thông tin đã trực tiếp góp phần vào quá trình đổi mới phương pháp dạy và học thông qua những thiết bị phần mềm hiện đại phục vụ giáo dục trong nhà trường.

Biên tập viên Nguyễn Thị Thanh Xuân đang thuyết trình bài giảng trên bảng tương tác.

Thực hiện các yêu cầu đổi mới phương pháp dạy và học Nhà xuất bản Giáo dục tại Hà Nội (NXBGDHN) đang triển khai nhiều biện pháp về công nghệ mới để tác động vào các phương pháp dạy và học.

Khai mạc Hội nghị tập huấn bồi dưỡng nghiệp vụ Thư viện Trường học do NXBGDHN và Sở GD&ĐT Quảng Ninh phối hợp tổ chức tại Hạ Long ngày 27 tháng 10 năm 2011.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã tổ chức các lớp tập huấn kĩ năng cho biên tập viên sử dụng bảng tương tác ActivBoard nhằm ứng dụng dạy học tương tác phục vụ đổi mới trong phương pháp sư phạm và kiểm tra đánh giá dạy học trong nhà trường. Ngày 13/9/2011, NXBGDHN đã tổ chức thí điểm thuyết trình bài giảng điện tử trên bảng tương tác. Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam *Ngô Trần Ái* đã tới dự và trực tiếp chỉ đạo buổi thuyết trình. Buổi thuyết trình thí điểm đã được sự quan tâm đặc biệt của các đồng chí trong Ban Tổng Giám đốc, Tổng biên tập ; Lãnh đạo, biên tập viên các đơn vị thành viên cũng tới dự và trao đổi kinh nghiệm để tiếp tục nhân rộng hình thức giảng dạy trên bảng tương tác tại các đơn vị khác.

NXBGDHN triển khai thí điểm làm sách điện tử và chuẩn bị khai trương Trang sách giáo dục điện tử tạo điều kiện cho giáo viên, học sinh và các độc giả tiếp cận các sản phẩm giáo dục của NXBGD Việt Nam trên mạng và trên website.

Cùng với các hoạt động trên, Phòng Thư viện và Thiết bị Giáo dục của NXBGDHN đang cử các cán bộ đến các địa phương hướng dẫn về nghiệp vụ Thư viện trường học, đặc biệt là cách khai thác các sản phẩm giáo dục phục vụ cho việc dạy và học trong nhà trường.

LÊ ĐỨC DUY
(NXBGD tại TP. Hà Nội)

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG HÀ NỘI
55 năm
XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên (ĐHKHTN), ĐHQG Hà Nội được thành lập theo Nghị định 97/CP ngày 10/12/1993 của Chính phủ và chính thức đi vào hoạt động với tư cách là trường đại học thành viên của ĐHQG Hà Nội từ tháng 9/1995. Sự ra đời của Trường ĐHKHTN là sự tiếp nối, kế thừa truyền thống 40 năm của Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội - một trường đại học khoa học cơ bản đầu tiên, có uy tín ở Việt Nam. Trường có cơ sở chính đặt tại 334 Nguyễn Trãi, quận Thanh Xuân, Hà Nội. Ngoài ra còn có khuôn viên ở 19 Lê Thánh Tông và 182 Lương Thế Vinh. Hiện nay, trường có 8 khoa, 1 trường THPT chuyên KHTN, 9 phòng chức năng, 12 trung tâm nghiên cứu, 4 Dự án Quốc tế với gần 10.000 sinh viên và gần 650 cán bộ giảng dạy, nghiên cứu và quản lí trong đó có 18 Giáo sư, 102 Phó Giáo sư, trên 250 Tiến sĩ và Tiến sĩ Khoa học, 3 Nhà giáo Nhân dân và 35 Nhà giáo Ưu tú.

Trải qua 55 năm xây dựng và phát triển (1956-2011), các thế hệ thầy và trò của Trường ĐHKHTN đã xây dựng nên bản sắc văn hóa và triết lí phát triển của riêng mình với một hệ những giá trị cốt lõi. Đó là: *Chất lượng xuất sắc, đổi mới và sáng tạo, trách nhiệm xã hội cao, hợp tác và thân thiện*. Cùng với lịch sử của dân tộc, Trường ĐHKHTN đã có nhiều đóng góp tích cực vào sự nghiệp bảo vệ và xây dựng Tổ quốc, luôn tiên phong trong công cuộc đổi mới giáo dục đại học nước nhà.

1. Công tác đào tạo

* **Hệ THPT chuyên:** Trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên hiện đào tạo 5 lĩnh vực chuyên: Toán học, Tin học, Vật lí, Hóa học, Sinh học. Nhà trường đã có 151 lượt học sinh đoạt Huy chương tại các kì thi Olympic Quốc tế, trong đó có 37 Huy chương Vàng, 55 Huy chương Bạc và 59 Huy chương Đồng.

* **Hệ đại học**: Trường là địa chỉ đào tạo khoa học cơ bản có uy tín trong và ngoài nước. Trường đã tiên phong thực hiện chương trình đào tạo nhiệm vụ chiến lược (*Chương trình đào tạo cử nhân khoa học tài năng* (từ năm 1997) các ngành Toán học, Vật lí, Hóa học và Sinh học; *Chương trình đào tạo cử nhân chất lượng cao* (từ năm 2002) các ngành khối Khoa học Trái Đất như: Địa lí, Địa chất, Khí tượng-Thủy văn-Hải dương học, Môi trường; *Chương trình tiên tiến và đạt trình độ quốc tế* (từ năm 2005)). Chất lượng của các hệ này được đánh giá cao, nhiều học sinh đã trở thành cán bộ giảng dạy, cán bộ nghiên cứu của những trường đại học, viện nghiên cứu nổi tiếng trong và ngoài nước.

* **Hệ Sau đại học:** Trường tự hào là cơ sở đào tạo có học viên sau đại học đầu tiên của cả nước. Số học viên cao học và nghiên cứu sinh bằng 33% số sinh viên đại học chính quy. Hiện nay, trường đã và đang hợp tác đào tạo sau đại học với nhiều trường, viện nghiên cứu trên thế giới như: ĐH Greifswald, ĐH Kĩ thuật Dresden (Đức); Viện JAIST (Nhật Bản); Viện GIST, KAIST (Hàn Quốc); ĐH Toulon, ĐH Bordeaux, ĐH Rennes I (Pháp); Viện ITC (Hà Lan), v.v... Phần lớn các chương trình học hoàn toàn bằng tiếng Anh, thời gian học tại trường và trường/viện đối tác có thể là 1/1, 2/1,... Một số chương trình, học viên bảo vệ luận văn và luận án trước hội đồng chấm quốc tế và do trường đối tác cấp bằng.

2. Công tác nghiên cứu khoa học.

Trường là đơn vị dẫn đầu cả nước về nghiên cứu khoa học cơ bản. Trường đã thực hiện nhiều đề tài nghiên cứu cấp Nhà nước, cấp Bộ ngành và địa phương. Một số đề tài đã có giá trị ứng dụng thực tiễn cao. Nhiều bài báo, công trình khoa học được công bố trên các tạp chí chuyên ngành trong nước và Quốc tế. Hàng chục công trình khoa học xuất sắc được tặng giải thưởng như: Giải thưởng Hồ Chí Minh của GS. *Lê Văn Thiêm*, GS. *Hoàng Tụy*, GS.*Nguyễn Văn Hiệu*, GS. *Đào Văn Tiến*,...; Giải thưởng Covalepxcaia của GS. *Phạm Thị Trân Châu*, GS. *Ngô Thị Thuận* và GS. *Lê Viết Kim Ba*, Giải thưởng sáng tạo khoa học công nghệ VIFOTEC;...

3. Các phần thưởng cao quý

- Huân chương Độc lập hạng Nhất.
- Anh hùng Lao động trong thời kì đổi mới.
- Anh hùng Lao động (cho Khối THPT chuyên Toán - Tin).
- Huân chương Hồ Chí Minh.

Khuôn viên của Nhà trường tại 19 Lê Thánh Tông, Hà Nội

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT11M1

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2011

Giá : 8000 đồng
Tám nghìn đồng