BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

8
2001

SỐ 290 - NĂM THỨ 38 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Kết quả cuộc thi Toán quốc tế lần thứ 42

Hội đồng giáo viên trường THCS Trần Đăng Ninh - Nam Định

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

ĐƯỜNG XOẮN ỐC ACSIMET

Trong số báo trước đã giới thiệu đường xoắn ốc vàng, mời các bạn tiếp tục làm quen với một số dạng đường xoắn ốc.

Cho đoạn thẳng $OA = r$, xuất phát từ tia Ox cố định, quay nhiều vòng quanh điểm gốc O, đồng thời r tăng dần (hay giảm dần) khi quay ngược chiều (hay cùng chiều) kim đồng hồ thì điểm A vạch nên một đường xoắn ốc (h.1). Chính xác hơn đường xoắn ốc được biểu thị bởi phương trình $r = f(\varphi)$ với φ là số đo góc AOx bằng rađian ($-\infty < \varphi < +\infty$) còn f là hàm đơn điệu.

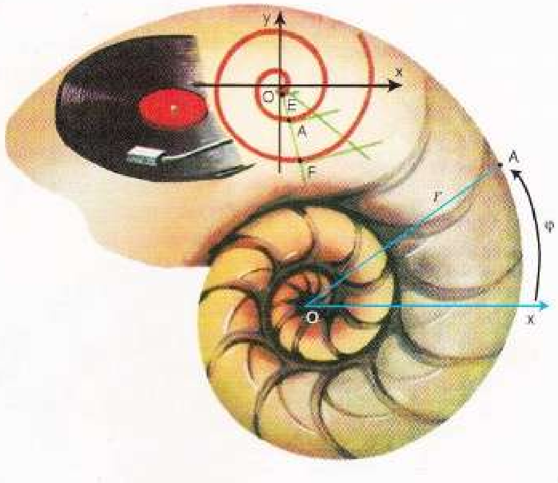
Đường xoắn ốc Acsimet ($\mathscr{A}$) biểu thị bởi phương trình $r = k\varphi$ (k gọi là hệ số tỉ lệ) và có 2 nhánh đối xứng nhau qua Oy ứng với $0 \le \varphi < \infty$ (hình 1 phía trên) và $-\infty < \varphi \le 0$.

Đường rãnh của đĩa hát là hình ảnh của đường xoắn ốc Acsimet.

Tính chất. $\mathscr{A}$ chia tia Ot bất kì thành các đoạn thẳng bằng nhau (không kể đoạn ứng với $-2\pi < \varphi < 2\pi$) với *khoảng cách* $a = EA = AF = 2\pi k$ (vì $AF = OF - OA = k(\varphi+2\pi) - k\varphi = 2\pi k$).

Cách dựng $\mathscr{A}$ với $0 \le \varphi < \infty$:

- Trên Ox lấy $OA = a = 2\pi k$
- Dựng n tia Ot_i ($i = 1, 2, ..., n$; coi Ot_n trùng Ox) tạo thành n góc bằng nhau chung đỉnh O.
- Trên các tia Ot_i lấy $OA_i = \dfrac{ia}{n}$ (coi $A_n \equiv A$) được các điểm $O, A_1, A_2, ..., A_n$ nằm trên $\mathscr{A}$ của vòng quay thứ nhất ($0 \le \varphi \le 2\pi$)
- Trên các tia Ot_i lấy các điểm B_i sao cho $OB_i = OA_i + a$ được các điểm $B_1, B_2, ..., B_n$ nằm trên $\mathscr{A}$ của vòng quay thứ hai. Tiếp tục như thế.

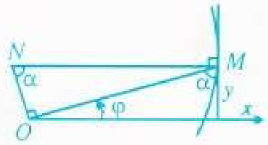


Hình 1

Cách dựng tiếp tuyến My tại điểm M của $\mathscr{A}$ ứng với $OM = k\varphi$:

- Dựng tam giác vuông OMN sao cho $\angle NOx = \varphi + \pi/2$ và $ON = k$.
- Kẻ $My \perp MN$ sao cho $\angle OMy = \angle MNO = \alpha < \pi/2$ ta có $\text{tg}\alpha = OM/k = \varphi$

Khi φ khá lớn thì $\mathscr{A}$ gần thành đường tròn.



Dành cho bạn đọc

Dựng hai đường xoắn ốc Acsimet $\mathscr{A}_1$ và $\mathscr{A}_2$ ($\varphi \ge 0$) ứng với các khoảng cách: OA=1,2cm và OB = 2,4cm (lấy n=12). Tính góc (theo độ) α_1 giữa tiếp tuyến My_1 với $\mathscr{A}_1$ ứng với φ_1=4π, tính góc α_2 giữa tiếp tuyến My_2 với $\mathscr{A}_2$ ứng với $\varphi_2 = 2\pi$.

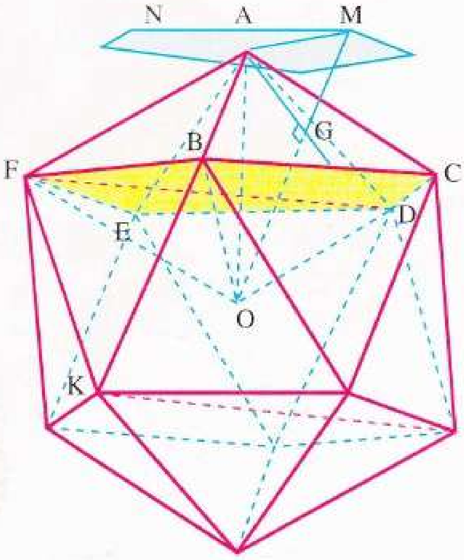
GIẢI ĐÁP : HÌNH CHỮ NHẬT VÀNG TRONG KHÔNG GIAN

Gọi A, B, C, D, E, F, K... là các đỉnh của khối đa diện (N) 20 mặt tâm O. Gọi M, N... là các đỉnh của khối đa diện (T) 12 mặt tâm O. Gọi G là tâm ΔABC đều cạnh $c = AB = AC = BC = KF$. Đặt $OA = OD = R$, $OM = R_o$, $OG = r$, $AG = k$, $AM = k_o$, $MN = c_o$. Chú ý rằng O, G, M thẳng hàng.

a) Xét ngũ giác đều $BCDEF$ có $\dfrac{FK}{FD} = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (1) .

Trong ΔFDK vuông có $4R^2 = FK^2 + FD^2$ (2).

(Xem tiếp trang 7)



Hình 2

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 38
Số 290 (8-2001)
Tòa soạn : Ngõ 187, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648 – 04.5142650. FAX : 04.5142648
Email : toantt@hotmail.com

TRONG SỐ NÀY

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐƯỜNG THẲNG OLE TRONG TAM GIÁC VÀ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ TRONG TỨ GIÁC NỘI TIẾP

VŨ HỮU CHÍN
(GV. THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

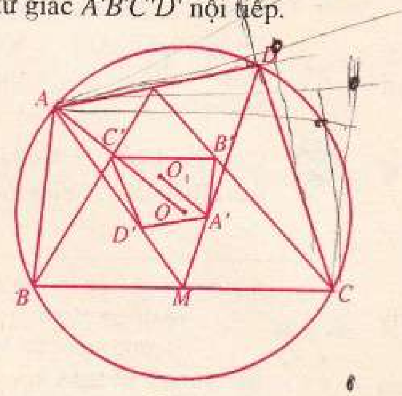
Ta đã biết *định lí Ơle* : Trong một tam giác trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp cùng nằm trên một đường thẳng (G nằm giữa O và H, $GH = 2GO$). Đường thẳng này gọi là *đường thẳng Ơle*.

Ta thử xét xem đối với tứ giác nội tiếp thì có những điểm nào cùng nằm trên một đường thẳng đi qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

Bài toán 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ nội tiếp.

Chứng minh: Gọi M là trung điểm BC $\Rightarrow \dfrac{MA'}{MD} = \dfrac{MD'}{MA} = \dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow A'D'//AD$, $A'D' = \dfrac{1}{3}AD$

Chứng minh tương tự $B'C'//BC$, $C'D'//CD$, $A'B'//AB$. (h.1)



Hình 1

Suy ra :

$\angle B'C'D' = \angle B'CD$, $\angle B'A'D' = \angle BAD$

Do đó $\angle B'C'D' = \angle B'A'D' = 180^o$

Suy ra tứ giác $A'B'C'D'$ nội tiếp đường tròn tâm O_1 (đpcm).

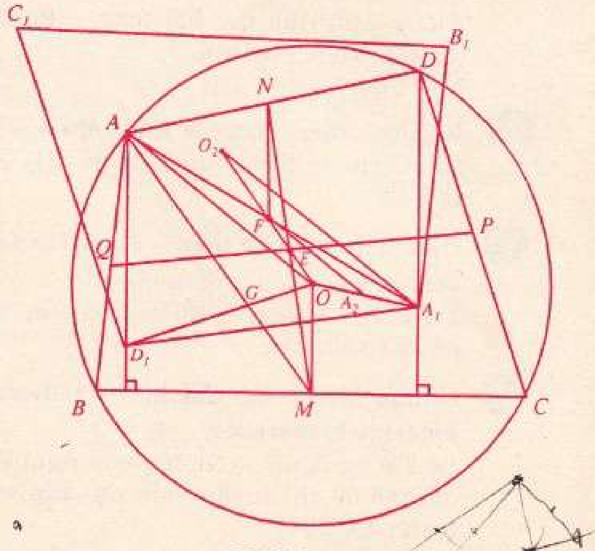
Như vậy tứ giác $A'B'C'D'$ đồng dạng với tứ giác $ABCD$ với tỉ số đồng dạng là $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{O_1A'}{OA} = \dfrac{1}{3}$, hơn nữa chúng có các cạnh tương ứng song song. Từ đó suy ra $\angle O_1A'D' = \angle OAD$ nên $O_1A'//OA$.

Bài toán 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng tứ giác $A'_1B'_1C'_1D'_1$ nội tiếp.

Chứng minh : Cách 1 : Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow OM \perp BC$. Khi chứng minh định lí Ơle, ta có $AD_1 = 2OM = DA_1$, $AD_1//OM//DA_1$.

$\Rightarrow AD//A_1D_1$, $AD = A_1D_1$ (h.2)

Chứng minh tương tự $A_1B_1//AB$, $B_1C_1//BC$, $C_1D_1//CD$.



Hình 2

Suy ra $\angle D_1A_1B_1 = \angle DAB$, $\angle D_1C_1B_1 = \angle DCB$

Do đó $\angle D_1A_1B_1 + \angle D_1C_1B_1 = 180^o$.

Vậy tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp đường tròn tâm O_2 (đpcm).

Từ đó suy ra $\angle O_2A_1D_1 = \angle OAD$ nên $O_2A_1//OA$.

Cách chứng minh sau sẽ xác định vị trí tâm O_2 của đường tròn ngoại tiếp $A_1B_1C_1D_1$.

Cách 2 : Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, AD, CD, AB. Vì $MPNQ$ là hình bình hành nên giao điểm E của MN và PQ là trung điểm của mỗi đoạn thẳng này.

Gọi F là điểm đối xứng của O qua E, A_1 là điểm đối xứng của A qua F. Ta chứng minh A_1 là trực tâm của ΔBCD.

Ta có $NF//OM$, mà $OM \perp BC \Rightarrow NF \perp BC$. Vì NF là đường trung bình của ΔADA_1 nên $NF//DA_1 \Rightarrow DA_1 \perp BC$ mà $DA_1 = 2NF = 2OM$ $\Rightarrow A_1$ là trực tâm ΔBCD.

Gọi O_2 là điểm đối xứng của O qua F. Suy ra AO_2A_1O là hình bình hành $\Rightarrow O_2A_1 = OA = R$

Chứng minh tương tự có $O_2B_1 = O_2C_1 = O_2D_1 = R$. Vậy A_1, B_1, C_1, D_1 cùng nằm trên đường tròn tâm O_2 bán kính R.

Khi $ABCD$ là hình chữ nhật thì kết luận vẫn đúng (đpcm).

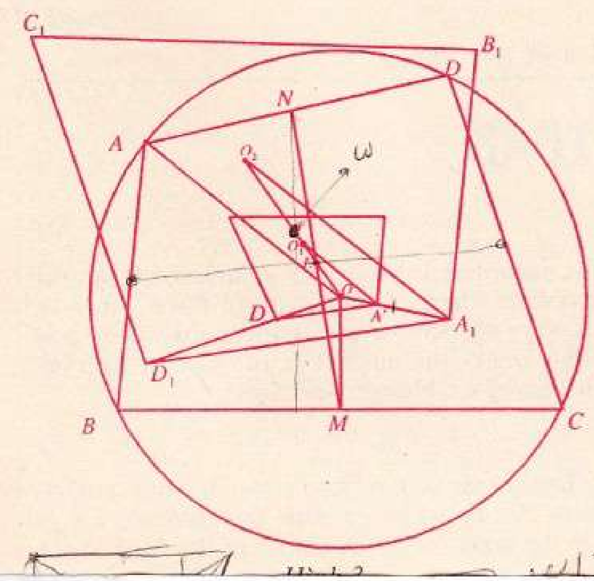
Cũng từ chứng minh trên suy ra hai tứ giác $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$ có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau, đồng thời $O_2A_1//OA$ và

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{O_2A_1}{OA} = 1$$

Bài toán 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi O_1 và O_2 lần lượt là tâm các đường tròn đi qua 4 trọng tâm và đi qua 4 trực tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng O, O_1, O_2 thẳng hàng.

Chứng minh. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm và A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. (h.3).

Theo định lí Ơle trong tam giác BCD thì O, A', A_1 thẳng hàng và $A'A_1 = 2OA'$ (1).



Theo kết luận của bài toán 1 và bài toán 2 có :

Tứ giác $A'B'C'D'$ nội tiếp đường tròn tâm O_1, tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp đường tròn tâm O_2 và $\frac{OA'}{OA_1} = \frac{O_1A'}{O_2A_1} = \frac{1}{3}$. Mặt khác do $A'D'//AD//A_1D_1$ và $O_1A'//OA//O_2A'$ nên $\angle OA'O_1 = \angle OA_1O_2$, suy ra hai tam giác $OA'O_1$ và OA_1O_2 đồng dạng (2). Từ (1) và (2) rút ra O, O_1, O_2 thẳng hàng (đpcm).

Ta cũng biết : đường tròn Ơle đi qua 3 chân các đường cao, qua 3 trung điểm các cạnh của tam giác và tâm của đường tròn Ơle là trung điểm đoạn thẳng nối tâm đường tròn ngoại tiếp với trực tâm của tam giác. Đối với tứ giác nội tiếp ta có bài toán sau :

Bài toán 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $OA = R$. Gọi A_2, B_2, C_2, D_2 lần lượt là tâm đường tròn Ơle của mỗi tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng tứ giác $A_2B_2C_2D_2$ nội tiếp.

Chứng minh: Tâm A_2 của đường tròn Ơle của ΔBCD là trung điểm của OA_1. Gọi F là trung điểm của OO_2 (h.2). Vì FA_2 là đường trung bình của ΔOA_1O_2 nên $FA_2 = \frac{1}{2}A_1O_2 = \frac{R}{2}$. Tương tự $FB_2 = FC_2 = FD_2 = \frac{R}{2}$. Vậy tứ giác $A_2B_2C_2D_2$ nội tiếp đường tròn tâm F (đpcm).

Tóm lại, cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O ta có các điểm O, E, O_1, F, O_2 thẳng hàng (h.3) trong đó :

- E là giao điểm hai đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối diện của tứ giác $ABCD$.
- O_1 là tâm của đường tròn đi qua 4 trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC.
- O_2 là tâm của đường tròn đi qua 4 trực tâm của các tam giác kể trên
- F là tâm của đường tròn đi qua 4 tâm đường tròn Ơle của các tam giác kể trên.

Đường thẳng đi qua các điểm O, E, O_1, F, O_2 liệu có thể gọi là *đường thẳng Ơle của tứ giác nội tiếp* $ABCD$ với vị trí các điểm được xác định theo thứ tự O, E, O_1, F, O_2 và $OO_2 = 2OF = 3OO_1 = 4OE$?

Khi $ABCD$ là hình chữ nhật thì 5 điểm trên trùng với tâm của hình chữ nhật đó.

Mời các bạn phát hiện thêm các tính chất lí thú khác của tứ giác nội tiếp./.

Nhìn ra thế giới

MỘT SỐ BÀI HÌNH HỌC TRONG CUỘC THI PUTNAM Ở MỸ

NGUYỄN VĂN NHO
(NXB Giáo dục)

Cuộc thi toán mang tên William Lowell Putnam được tiến hành từ năm 1938 nhằm kích thích sự ganh đua lành mạnh trong học tập toán học của các sinh viên cao đẳng và đại học tại Mỹ và Canađa. Ông Putnam, sinh viên cũ của Đại học Harvard khóa 1882 đã đăng một bài báo trong tờ Harvard Graduates' Magazine số tháng 12 năm 1921 nêu rõ những ích lợi khi tổ chức cuộc thi về kiến thức cho liên trường Cao đẳng và Đại học. Và để chuẩn bị một kì thi như thế, vào năm 1927, bà vợ góa của ông, Elizabeth Lowell Putnam đã đứng ra thành lập một ngân quỹ hỗ trợ mang tên ông. Cuộc thi đầu tiên được sự tài trợ của ngân quỹ này là về tiếng Anh và sau đó vài năm là cuộc thi thứ hai về Toán giữa các trường. Mãi đến sau khi bà Putnam mất vào năm 1935, Hội Toán học Mỹ mới xem xét đứng ra tổ chức cuộc thi dưới dạng như hiện nay và từ năm 1938 cuộc thi Toán này được Hội tổ chức mỗi năm một lần vào đầu tháng 12 cho sinh viên các trường Đại học và Cao đẳng ở Mỹ và Canađa. Mỗi trường cử đội dự thi gồm 3 người, ngoài ra cá nhân có thể đăng kí tham dự. Hàng năm có khoảng gần 3000 thí sinh dự thi. Mỗi thí sinh phải giải 6 bài toán trong hai buổi. Ban tổ chức trao giải đồng đội (giải nhất 5000 USD) và giải cá nhân.

Trong khuôn khổ bài này, chúng tôi trích giới thiệu một số bài Hình học từ năm 1997 đến năm 2000 trong cuộc thi trên mà học sinh giỏi phổ thông ở nước ta có thể giải hoặc hiểu được lời giải. Những bài Giải tích và Lí thuyết số phải cần đến những kiến thức Toán cao cấp nên chúng tôi không nêu ra ở đây.

Bài 1. (1997) Một hình chữ nhật *HOMF* có các cạnh $HO=11$ và $OM=5$. Một tam giác *ABC* nhận điểm *H* làm trực tâm, *O* làm tâm đường tròn ngoại tiếp, *M* là trung điểm *BC* và *F* là chân đường cao kẻ từ *A*. Tính độ dài đoạn *BC*.

Bài 2. (1998) Một hình nón tròn xoay có chiều cao bằng 3, đáy là hình tròn có bán kính bằng 1. Một hình lập phương nội tiếp trong hình nón sao cho một mặt của nó nằm trên mặt phẳng đáy của hình nón, 4 đỉnh của mặt đối diện của hình lập phương tựa trên mặt nón. Hãy tìm chiều dài của cạnh hình lập phương.

Bài 3. (1999) Cho tam giác *ABC* có $AC = 1$, $\angle ACB = 90°$, và $\angle BAC = \alpha$. Gọi *D* là điểm nằm giữa *A* và *B* sao cho $AD = 1$; *E* là điểm nằm giữa *B* và *C* sao cho $\angle EDC = \alpha$. Đường vuông góc với *BC* tại *E* cắt *AB* tại *F*. Hãy tính $\lim\limits_{\alpha \to 0} EF$.

Bài 4. (2000) Cho *A*, *B*, *C* là ba điểm phân biệt có tọa độ nguyên và nằm trên một đường tròn bán kính *R* trong một hệ trục tọa độ Descartes vuông góc. Chứng tỏ rằng có ít nhất một trong các khoảng cách *AB*, *BC*, *CA* lớn hơn $R^{\frac{1}{3}}$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 44

Problem. A house with n floors has to be painted under the following restrictions:

each floor of the house has to be painted either white or blue;

no two blue floors can be directly on top of one another.

Find out: In how many different ways can the n-floored house be painted?

Solution. Denote by p_n the number of different ways of painting a house with n floors, in accordance with the restrictions of the problem. Then p_n is the sum of the number w_n of ways of painting that involve a white ground floor and of the number b_n of ways of painting that involve a blue ground floor:

$$p_n = w_n + b_n.$$

The colour of the floor above a white ground floor can be white or blue; therefore $w_n = p_{n-1}$. On the other hand, the colour of the floor above a blue ground floor must be white ;

KÌ THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ (IMO) LẦN THỨ 42

VŨ ĐÌNH HÒA – NGUYỄN KHẮC MINH

IMO lần thứ 42 được tổ chức từ ngày 01/7 đến ngày 14/7/2001 tại Washington D.C. – Thủ đô Hợp chủng quốc Hoa Kỳ. Dự thi kì này có 473 thí sinh của 83 nước. Đoàn Việt Nam có 6 thí sinh: *Nguyễn Hoàng Dũng* (lớp 12 THPT Hà Nội–Amsterdam, Hà Nội); *Lê Đình Hùng* (lớp 12 THPT Lam Sơn, Thanh Hoá); *Vũ Ngọc Minh, Trần Khánh Toàn* (lớp 11 Khối PTCT–Tin ĐHSP Hà Nội); *Nguyễn Anh Quân* (lớp 12 THPT Trần Phú, Hải Phòng) và *Lê Anh Vinh* (lớp 12 Khối PTCT–Tin ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội). Đi cùng đoàn, trong tư cách quan sát viên, có : NGND Phạm Ngọc Quang, hiệu trưởng trường THPT Lam Sơn–Thanh Hoá, và thày giáo Đoàn Quang Mạnh, trường THPT Trần Phú–Hải Phòng.

IMO lần thứ 42 được chính thức khai mạc vào ngày 04/7 tại Hội trường lớn của trường ĐHTH George Mason. Từ ngày 01/7 đến ngày 07/7 là khoảng thời gian dành cho các trưởng đoàn cùng Ban tổ chức (BTC) kì thi soạn thảo đề thi. Như tại các IMO trước, đề thi của IMO lần này được hình thành theo qui trình sau: từ các bài toán đề xuất của 34 nước (không có Hoa Kỳ, vì là nước chủ nhà), Tiểu ban đề thi của BTC chọn ra 28 bài thuộc 4 phân môn: đại số, hình học, tổ hợp và số học; 28 bài toán đó (không kèm theo tên nước đề xuất) được đưa ra cho tất cả các trưởng đoàn xem xét, thảo luận và phân chia thành 3 loại: dễ, trung bình và khó; trên cơ sở đó, thông qua biểu quyết dân chủ, các trưởng đoàn chọn ra 6 bài toán (gồm 2 bài dễ : bài 1 và 4, 2 bài trung bình: bài 2 và 5, 2 bài khó : bài 3 và 6) thuộc đủ 4 phân môn, để làm đề thi.

Theo qui định của các kỳ thi IMO, thời gian làm bài của mỗi ngày thi là 4 tiếng rưỡi và điểm tối đa cho mỗi bài toán thi là 7. Dưới đây là *Đề thi của IMO lần thứ 42*:

NGÀY THI THỨ NHẤT. 08/7/2001.

Bài 1 *(hình học, Hàn Quốc)*: Cho ABC là một tam giác nhọn với tâm đường tròn ngoại tiếp O. Điểm P là chân đường cao hạ từ A xuống BC.

Giả sử rằng $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^0$.

Hãy chứng minh rằng $\angle CAB + \angle COP < 90^0$.

Bài 2 *(đại số, Hàn Quốc)*: Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

cho mọi số thực dương a, b và c.

Bài 3 *(tổ hợp, CHLB Đức)*: Có hai mươi mốt thí sinh nữ và hai mươi mốt thí sinh nam tham gia một kỳ thi toán.

Mỗi thí sinh đã giải được nhiều nhất là sáu bài toán.

Với mỗi thí sinh nữ và mỗi thí sinh nam, có ít nhất một bài toán được giải bởi cả hai thí sinh này.

Chứng minh rằng có một bài toán được giải bởi ít nhất ba thí sinh nữ và bởi ít nhất ba thí sinh nam.

NGÀY THI THỨ HAI. 09/7/2001.

Bài 4 *(tổ hợp, Canada)*: Cho trước một số nguyên lẻ n lớn hơn 1 và các số nguyên $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Với mỗi hoán vị $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ trong số $n!$ hoán vị của $1, 2, \ldots, n$, ta đặt

(Xem tiếp trang 11)

hence $b_n = p_{n-2}$. Thus p_n satisfies the recurrence relation

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$$

for $n \geq 3$. Direct inspection shows $p_1 = 2$ and $p_2 = 3$. This implies that the numbers p_n form part of the Fibonacci sequence. By the Binet's formula we have

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right].$$

Từ mới:

floor	= tầng, gác
paint	= sơn (động từ)
restriction	= điều kiện, hạn chế
top	= phía trên
find out	= tìm, phát hiện (động từ)
floored	= tầng, gác (tính từ)
accordance	= sự phù hợp
involve	= liên quan, dính líu, kéo theo (động từ)
ground floor	= tầng một, tầng trệt
colour	= màu
satisfy	= thỏa mãn (động từ)
recurrence	= hồi quy
relation	= mối quan hệ
direct	= trực tiếp (tính từ)
inspection	= sự kiểm tra, sự thanh tra
sequence	= dãy

NGÔ VIỆT TRUNG

Diễn đàn

DẠY VÀ HỌC TOÁN

VỀ LỜI GIẢI CỦA MỘT BÀI TOÁN CƠ BẢN

TRẦN TỬ QUẢNG
(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, Nghệ An)

Trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học, ta thường gặp các bài toán có dạng xét phương trình bậc hai có ít nhất 1 nghiệm trong một khoảng hoặc một đoạn, chẳng hạn :

Xác định a để phương trình :

$(a+1)x^2-(8a+1)x+6a=0$

có đúng một nghiệm thuộc khoảng (0; 1)

(Đề 18 câu II, Bộ đề thi tuyển sinh vào Đại học)

Lời giải bài này trong cuốn *Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào Đại học* quá vắn tắt nên học sinh không rõ muốn giải trọn vẹn thì phải xét những trường hợp nào với điều kiện gì.

Lời giải thứ hai của bài này trong cuốn *Giải đề thi tuyển sinh đại học – chuyên đề Đại số* (NXB Tp. Hồ Chí minh) viết :

Phương trình

$f(x)=(a+1)x^2-(8a+1)x+6a=0$

có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(0\,;\,1) \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+1=0 & \text{có một nghiệm} \\ -(8a+1)x+6a=0 & \text{thuộc } (0;\,1) \end{cases} \\ \begin{cases} a+1\neq 0 \\ \Delta=0 \\ x=\dfrac{8a+1}{2(a+1)}\in(0;1) \end{cases} \\ \begin{cases} (a+1)\neq 0 \\ f(0).f(1)<0 \end{cases} \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Cả hai lời giải trên đều dẫn tới đáp số đúng là: *mọi* $a\neq 0$, tuy nhiên việc ghi điều kiện cần và đủ ở lời giải thứ hai là chưa chuẩn xác.

Về vấn đề này, khi xét trường hợp tam thức bậc hai $f(x)$ có 2 nghiệm, một số sách có nêu *định lí:*

Điều kiện để tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm, trong đó có một nghiệm nằm trong $(\alpha,\ \beta)$, còn nghiệm kia nằm ngoài, là $f(\alpha)f(\beta)<0$.

(Cuốn 1 : *Một số phương pháp chọn lọc để giải các bài toán sơ cấp*, tập I, của khối PTCT–ĐHTH HN 1983, cuốn 2 : *Phương trình, bất phương trình và hệ phương trình* của Đ.H.T 1997)

Thực ra điều kiện $f(\alpha).f(\beta)<0$ là điều kiện cần và đủ để $f(x)$ có một nghiệm thuộc $(\alpha;\ \beta)$ và *một nghiệm nằm ngoài* $[\alpha\,;\,\beta]$.

Như vậy ngoài các điều kiện ở lời giải thứ hai nói trên, ta cần xét thêm 2 trường hợp sau (trong trường hợp tam thức bậc hai $f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt)

$$\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ af(\beta)>0 \\ \dfrac{S}{2}>\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} f(\beta)=0 \\ af(\alpha)>0 \\ \dfrac{S}{2}<\beta \end{cases}$$

trong đó S là tổng hai nghiệm.

Như vậy :

Điều kiện cần và đủ để phương trình $ax^2+bx+c=0$, trong đó $f(x)=ax^2+bx+c$, chỉ có một nghiệm thuộc khoảng (α,β) là :

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} a=0 \\ x=\dfrac{-c}{a}\in(\alpha,\beta) \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ f(\alpha).f(\beta)<0 \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ f(\alpha)=0 \\ af(\beta)>0;\dfrac{S}{2}>\alpha \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ f(\beta)=0 \\ af(\alpha)>0;\dfrac{S}{2}<\beta \end{cases} & (4) \\ \begin{cases} a\neq 0,\Delta=0 \\ x=\dfrac{-b}{2a}\in(\alpha,\beta) \end{cases} & (5) \end{array}\right.$$

Trong thực hành giải hai loại toán này, ta nên xử lí các trường hợp (3), (4) bằng cách giải $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 0$ để tìm giá trị cụ thể của tham số, rồi thay giá trị này vào phương trình ban đầu sẽ được phương trình bậc hai với hệ số thực, sau đó giải phương trình này và kiểm tra xem có 1 nghiệm nằm trong khoảng (α, β) còn nghiệm kia nằm ngoài khoảng đó hay không.

Chẳng hạn hãy áp dụng điều kiện cần và đủ nêu trên vào ví dụ sau :

Tìm m để phương trình

$mx^2 + (7 - 8m)x + 6(m - 1) = 0$

có đúng một nghiệm thuộc khoảng (0; 2).

(Đề thi vào Học viện quân sự 1995)

Lời giải. Gọi $f(x) = mx^2 + (7 - 8m)x + 6(m-1)$

1) Xét với $m = 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có dạng $7x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{7} \in (0\,;\,2)$. Vậy $m = 0$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

2) Với $m \neq 0$, phương trình $f(x) = 0$ có $\Delta(x) = 40m^2 - 88m + 49$, tam thức này có $\Delta(m) = 7740 - 7840 < 0$ nên $\Delta(x) > 0$ do đó phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(0\,;\,2)$ khi và chỉ khi :

$$\left[\begin{array}{ll} f(0).f(2) < 0 & (1) \\ \begin{cases} f(0) = 0 \\ mf(2) > 0 \\ \dfrac{8m-7}{2m} > 0 \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} f(2) = 0 \\ mf(0) > 0 \\ \dfrac{8m-7}{2m} < 2 \end{cases} & (3) \end{array}\right.$$

* Giải (1) : $6(m - 1)(8 - 6m) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

* Giải (2) : $f(0) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ nên $f(x) = 0$ có dạng $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$ thỏa mãn điều kiện bài toán có đúng 1 nghiệm $1 \in (0; 2)$ còn nghiệm kia $0 \notin (0; 2)$

* Giải (3) : $f(2) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$ nên $f(x) = 0$ có dạng $4x^2 - 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{4} \\ x = 2 \end{array}\right.$ thỏa mãn điều kiện bài toán có đúng một nghiệm $\frac{3}{4} \in (0; 2)$ còn nghiệm kia $2 \notin (0\,;\,2)$.

Vậy các giá trị của tham số m thỏa mãn đề bài là : $\left[\begin{array}{l} m \leq 1 \\ m \geq \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

Lưu ý : Nếu sử dụng điều kiện $f(\alpha).f(\beta) < 0$ ta chỉ tìm được các giá trị $\left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

Rất mong các bạn tiếp tục trao đổi thêm về vấn này.

TOÁN HỌC MUÔN MÀU *(Tiếp bìa 2)*

Từ (1) (2) có $c = \sqrt{\dfrac{10 - 2\sqrt{5}}{5}}R$; $k = AG = \dfrac{c}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{10 - 2\sqrt{5}}{15}}R$. Từ $r^2 = R^2 - k^2 \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}R$.

b) Vì $\angle OAM = \angle OGA = 90^\circ$ nên $\Delta OAM \backsim \Delta OGA$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OG}{OA} \Rightarrow rR_o = R^2$. Từ đó $R = \dfrac{r}{R}R_o = \sqrt{\dfrac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}R_o$, $r = \sqrt{\dfrac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}R = \dfrac{5 + 2\sqrt{5}}{15}R_o$. Từ $k_o^2 = R_o^2 - R^2$ có $k_o = \sqrt{\dfrac{10 - 2\sqrt{5}}{15}}R_o$

Cạnh $MN = c_0$ của ngũ giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $AM = k_o$ (xem Toán học muôn màu THTT số 289 tháng 7/2001) là : $c_o = \dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}k_o}{2} = \dfrac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}R_o$

Xin gửi tặng phẩm cho bạn : *Đỗ Văn Hà*, 11E, THPT Giao Thủy B, Giao Thủy, Nam Định đã tính đúng nhưng chưa gọn.

PHI PHI

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

Những suy nghĩ ban đầu VỀ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC MÔN TOÁN - NĂM 2001

LÊ THỐNG NHẤT

Mùa thi tuyển sinh vào đại học năm 2001 vừa khép lại. Đây là mùa thi đầu tiên thực hiện quy định về giảm tải của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Tuy nhiên ở một số đề thi chưa thấy sự giảm tải chút nào. Một số trường vẫn bị áp lực của số lượng thí sinh thi vào rất lớn nên vẫn sợ : đề nhẹ đi thì tuyển chọn ra sao ?

Ở đây chỉ xin điểm một vài suy nghĩ ban đầu :

1. MỘT SỐ BÀI TOÁN HAY

Thí dụ 1. (Câu V_2–ĐHGT–VT Hà Nội)

Tìm a để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x+y \le 2 \\ x+y+\sqrt{2x(y-1)+a} = 2 \end{cases}$$

Nhận xét. Để bài ra "hơi thừa" bất phương trình $x+y \le 2$.

Ta có

$$x+y+\sqrt{2x(y-1)+a} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x(y-1)+a} = 2-(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-(x+y) \ge 0 \\ 2x(y-1)+a = [2-(x+y)]^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \le 2 & (1) \\ (x-1)^2+(y-2)^2 = a+1 & (2) \end{cases}$$

* Nếu $a+1<0$ thì (2) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm

* Nếu $a+1=0$ thì (2) $\Leftrightarrow x=1$ và $y=2$ không thỏa mãn (1) nên hệ vô nghiệm.

* Nếu $a+1>0$ thì các điểm M $(x; y)$ thỏa mãn (2) thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm I $(1; 2)$ bán kính $R=\sqrt{a+1}$; mặt khác M $(x; y)$ thỏa mãn (1) thuộc nửa mặt phẳng $(\mathscr{P})$. Điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm là $(\mathscr{C})$ có điểm chung với $(\mathscr{P})$

$$\Leftrightarrow R \ge d\ (I;\ x+y=2) \Leftrightarrow \sqrt{a+1} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow a \ge -\frac{1}{2}.$$

Thí dụ 2. (Câu II_2 – ĐH Ngoại thương Hà Nội, khối A)

Giải và biện luận phương trình :

$$5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = x^2+2mx+m$$

trong đó m là tham số.

Nhận xét. Đặt $\begin{cases} u = 2x^2+4mx+m+2 \\ v = x^2+2mx+2 \end{cases}$

thì $u-v = x^2+2mx+m$ nên phương trình có dạng : $5^v - 5^u = u - v \Leftrightarrow 5^v + v = 5^u + u$.

Xét $f(t) = 5^t + t$ hiển nhiên đồng biến trên R nên $f(v) = f(u) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x^2+2mx+m = 0$ (*)

Bài toán đưa về giải và biện luận phương trình (*) thật dễ dàng.

Thí dụ 3. (Câu V – ĐHQG Hà Nội – Khối D)

Biết rằng a, b, c là các số dương.

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \ge \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Nhận xét. Trong Bộ đề thi tuyển sinh trước đây đã có bài toán yêu cầu chứng minh

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{d^2} \ge \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

với $a, b, c > 0$.

Trên tạp chí TH&TT số 6 năm 2001 đã có bài viết "Một dạng bất đẳng thức về tổng các lũy thừa" trong đó có nêu bài toán trong Đề thi ĐHQG Hà Nội – Khối A – năm 2000 : "Với a, b, c là ba số thực bất kì thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

$$8^a + 8^b + 8^c \ge 2^a + 2^b + 2^c$$

Tất nhiên bất đẳng thức (*) ở bài viết trên không áp dụng được cho thí dụ 3. Xin đưa ra một hướng giải cho lớp các bất đẳng thức này.

Đối với thí dụ 3 : Ta áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương thì

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + 1 \ge 3\frac{a}{b} \quad ; \quad \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + 1 \ge 3\frac{b}{c}$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{a^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} + 1 \ge 3\frac{c}{a}.$$

Từ đó ta có

$$2\left(\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}}\right) + 3 \ge$$

$$\ge 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

Mặt khác $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$ nên từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Với con đường trên ta làm được bài bất đẳng thức đã nêu trên : áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $8^a+1+1\geq 3.2^a$; $8^b+1+1\geq 3.2^b$

$8^c+1+1\geq 3.2^c$

Từ đó :

$8^a+8^b+8^c+6\geq 2^a+2^b+2^c+2(2^a+2^b+2^c)$

Mà : $2^a+2^b+2^c\geq 3$ nên sẽ có điều phải chứng minh

Câu hỏi đặt ra là : "Phải chẳng với $\alpha > 1$ thì :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}+\left(\frac{b}{c}\right)^{\alpha}+\left(\frac{c}{a}\right)^{\alpha}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ ?"$$

Thí dụ 4. (Câu 8 – ĐH Xây dựng, Hà Nội)

Cho các số x, y, z thay đổi trên [0; 1] và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=\frac{3}{2}$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của* $A=\cos(x^2+y^2+z^2)$

Nhận xét. Các bạn đều thấy ngay

$$0<x^2+y^2+z^2\leq x+y+z=\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}$$

nên để tìm giá trị nhỏ nhất của A ta đi tìm giá trị lớn nhất của $F=x^2+y^2+z^2$

Vì $x+y+z=\frac{3}{2}$ và $x, y, z\in[0\,;1]$ nên ít nhất có một trong ba số x, y, z thuộc $\left[\frac{1}{2};1\right]$; giả sử đó là z. Khi đó $x+y=\frac{3}{2}-z$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy=\frac{9}{4}-3z+z^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=2z^2-3z+\frac{9}{4}-2xy$

$\leq 2z^2-3z+\frac{9}{4}=t(z)$

Xét $t(z)$ với $z\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ thì $t(z)\leq\frac{5}{4}$ (đẳng thức xảy ra khi $z=\frac{1}{2}$ hoặc $z=1$)

Từ đó : $x^2+y^2+z^2\leq\frac{5}{4}$.

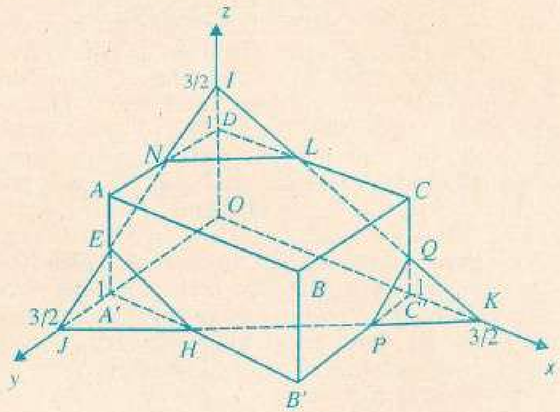
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\{x, y, z\}=\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$

Vậy A nhỏ nhất bằng $\cos\frac{5}{4}$.

Nếu nhìn bằng "con mắt hình học" thì trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, các điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn giả thiết sẽ thuộc hình lập phương (vì $x, y, z\in[0;1]$) đồng thời thuộc mặt phẳng $x+y+z=\frac{3}{2}$ trong đó các đỉnh của hình lập phương là

$A(0\,;1\,;1)$; $B(1\,;1\,;1)$; $C(1\,;0\,;1)$;
$D(0\,;0\,;1)$; $A'(0\,;1\,;0)$; $B'(1\,;1\,;0)$;
$C'(1\,;0\,;0)$ và $O(0\,;0\,;0)$

Từ đó M thuộc thiết diện lục giác đều $ENLQPH$ (xem hình vẽ)



Ta có : $F=x^2+y^2+z^2=OM^2$ nên F lớn nhất $\Leftrightarrow M\in\{E\,;N\,;L\,;Q\,;P;\ H\}$. Khi đó $F=\frac{5}{4}$ suy ra giá trị nhỏ nhất của A là $\cos\frac{5}{4}$.

Kỳ sau : **2.** Những tranh luận về đề thi và đáp án.

HỘI THI
TIN HỌC TRẺ KHÔNG CHUYÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ VII

Từ ngày 27.7.2001 đến 30.7.2001 tại Đại học Quốc gia Hà Nội đã diễn ra Hội thi Tin học trẻ không chuyên toàn quốc lần thứ VII. 48 tỉnh, thành, ngành đã cử 51 đội tuyển với 146 thí sinh dự thi, chia làm 3 khối : Tiểu học (43 học sinh), Trung học cơ sở (44 học sinh), Trung học phổ thông (46 học sinh) và khối D thi phần mềm sáng tạo. Khác với các kì thi trước, năm nay có 9 học sinh dự thi ở Khối Chuyên với các sản phẩm phần mềm sáng tạo. Có 10 thí sinh là người dân tộc thiểu số. Ban tổ chức đã trao giải Đặc biệt cho Trần Đình Phương Ngôn (Tp. Hồ Chí Minh) đoạt 100/100 điểm (khối A), 5 giải Nhất, 11 giải Nhì, 18 giải Ba, 45 giải Khuyến khích cho 3 khối, 4 giải Nhất, 3 giải Nhì, 6 giải Ba, 10 giải khuyến khích cho học sinh thi phần mềm sáng tạo. Trong 5 giải Nhất, đoàn Hà Nội có 3 giải. Thí sinh nhỏ tuổi nhất đoạt giải là Võ Đức Huy, 10 tuổi, lớp 4, trường TH Kiên Lương 1, Thị trấn Kiên Lương, Kiên Giang. Giải đồng đội thuộc về đoàn Hà Nội. Các học sinh được giải Đặc biệt, giải Nhất được tặng Huy chương *Tuổi trẻ sáng tạo*, các học sinh giải Nhì, Ba được Bằng khen của Trung ương Đoàn. Nhân dịp này 17 thầy cô và chuyên gia Tin học được tặng huy chương *Vì thế hệ trẻ*. Bộ Giáo dục và Đào tạo dành 2 suất học bổng cho 2 thí sinh của Hội thi dự thi du học Phổ thông Trung học tại Singapore.

Qua cuộc thi vẫn thấy các thành phố, tỉnh Hà Nội, Hồ Chí Minh, Hải Phòng, Bình Định, Thừa Thiên - Huế, Khánh Hòa, Nam Định, Cần Thơ... có phong trào Tin học phát triển.

VŨ KIM THỦY

CÂU LẠC BỘ THTT

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ MỚI

Mời các bạn tham gia cuộc chơi hàng tháng

ĐOÁN TUỔI VÀ BIẾT AI QUA ẢNH

Bạn hãy cắt phiếu cuộc chơi và *dán ở bên ngoài phong bì* gửi Tòa soạn THTT sau khi đã điền câu trả lời. Bên trong phong bì bạn có thể viết cảm tưởng về cuộc chơi nhưng không gửi bài khác. Nhớ ghi địa chỉ của bạn !

THAM GIA CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ

Người trong ảnh ?

Họ và tên :

. . . .

Ảnh chụp khi . . . . tuổi.

HỘI THẢO
DẠY HỌC TOÁN TIỂU HỌC VÀ CÔNG TÁC XUẤT BẢN

Từ ngày 23.7.2001 đến 25.7.2001 tại Đồ Sơn, Hải Phòng đã diễn ra cuộc Hội thảo *Dạy học toán Tiểu học và Công tác xuất bản* do Vụ Tiểu học và NXB Giáo dục đồng tổ chức. Dự Hội thảo có các chuyên viên của Vụ Tiểu học, đại diện lãnh đạo NXB Giáo dục, cán bộ tạp chí Toán học Tuổi trẻ, lãnh đạo các Sở Giáo dục và Đào tạo : Hà Nội, Hải Phòng, Bắc Ninh, Hưng Yên, Vĩnh Phúc, các công ty Sách - Thiết bị trường học Phú Thọ, Quảng Ninh, Hải Phòng, Trưởng phó phòng Giáo dục Tiểu học các Sở GD-ĐT Hà Nội, Bắc Giang, Bắc Ninh, Hải Dương, Hưng Yên, Vĩnh Phúc, Phó TBT báo Thiếu niên tiền phong, trưởng ban Tiểu học NXB Giáo dục, các cộng tác viên của số chuyên đề Toán Tuổi thơ.

Trong phần thứ nhất của Hội thảo các đại biểu đã trình bày tham luận. Các tham luận đề cập đến vấn đề sức sáng tạo và nội lực ở học sinh tiểu học, sách giáo khoa Tiểu học cần có nhiều bài toán do cuộc sống đặt ra, xây dựng tốt cái nền *tính* để lên lớp cao hơn các em học tốt *toán*. Vai trò toán tiểu học ở các nước. Cần xem xét lại vấn đề giảm tải. Nên làm sớm công tác bồi dưỡng giáo viên. Sớm cho giáo viên tiếp xúc với các bài toán trắc nghiệm.

Phần thứ hai của Hội thảo là các ý kiến phát biểu. Các đại biểu cho rằng Toán Tuổi thơ (TTT) là nơi đưa vào các kiến thức bổ trợ cho SGK một cách tốt nhất. TTT còn giới thiệu việc dạy - học toán của các nước, góp phần định hướng giáo dục tiểu học.

Đối tượng đọc TTT không chỉ là học sinh mà còn là thầy cô, phụ huynh. Nên tuyên truyền TTT trên báo Giáo dục và Thời đại, trên VTV. Vụ Tiểu học nên hướng dẫn để các địa phương phát triển sâu rộng TTT trong các nhà trường. Nên coi nền tảng giáo dục tiểu học là *Học để biết - để làm việc - để hòa nhập - để làm người* là nội dung cơ bản của TTT...

Tổng kết Hội thảo, PGS. TS Vũ Dương Thụy, Phó Giám đốc, Tổng Biên tập NXB Giáo dục đã nhấn mạnh : Mục tiêu phát triển của Toán Tuổi thơ là càng ngày càng đa dạng về đối tượng độc giả với mục tiêu là phát triển tư duy toán học cho học sinh Việt Nam. Xây dựng một văn hóa toán học cho các em. Đưa vào TTT những bài toán do cuộc sống đặt ra, những bài toán ứng dụng vào cuộc sống, các bài toán trắc nghiệm. Tăng cường bài viết giới thiệu nội dung, phương pháp của sách cải cách. Kiến nghị với Bộ để có sự chỉ đạo phát hành TTT. Tăng cường các hoạt động xã hội, tiếp thị, tuyên truyền, giao lưu, đặc biệt là trên VTV để việc phát hành TTT ngày càng sâu rộng hơn, chú ý đến địa bàn Trung du Miền núi.

BÍNH NAM HÀ

KÌ THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ ... (Tiếp trang 5)

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Chứng minh rằng tồn tại hai hoán vị b và c, $b \neq c$, sao cho $n!$ là một ước số của $S(b) - S(c)$.

Bài 5 *(hình học, Israel)*: Trong một tam giác ABC có AP là phân giác trong của góc $\angle BAC$ (điểm P nằm trên cạnh BC) và BQ là phân giác trong của góc $\angle ABC$ (điểm Q nằm trên CA).

Biết rằng $\angle BAC=60^0$ và $AB+BP=AQ+QB$.

Các góc của tam giác ABC có thể nhận những giá trị nào?

Bài 6 *(số học, Bungari)*: Cho a, b, c, d là các số nguyên với $a > b > c > d > 0$. Giả sử rằng

$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$.

Chứng minh rằng $ab + cd$ không phải là số nguyên tố.

Trong kì thi lần này có 4 thí sinh đạt điểm tối đa (42/42); đó là các em: Liang Xiao, Zhiquiang Zhang (Trung Quốc), Reid Barton và Gabriel Caroll (Hoa Kỳ). Mỗi thí sinh đạt điểm tối đa được BTC tặng một máy vi tính xách tay IBM. Đây là phần thưởng vật chất duy nhất mà BTC kì thi dành cho các thí sinh dự thi lần này.

Căn cứ kết quả thi và Điều lệ của các kì IMO, BTC kì thi năm nay đã quyết định trao:

– Huy chương vàng (HCV) cho 39 thí sinh đạt từ 30 đến 42 điểm;

– Huy chương bạc (HCB) cho 81 thí sinh đạt từ 20 đến 29 điểm;

– Huy chương đồng (HCĐ) cho 122 thí sinh đạt từ 11 đến 19 điểm.

– Bằng khen (BK) cho tất cả các thí sinh đạt từ 7 đến 10 điểm và đồng thời giải được trọn vẹn một bài toán thi.

Kết quả của các thí sinh Việt Nam như sau:

STT	*Họ và tên*	*B1*	*B2*	*B3*	*B4*	*B5*	*B6*	*Tổng số*	*Giải*
01	Nguyễn Hoàng Dũng	7	0	0	0	0	0	7	BK
02	Lê Đình Hùng	7	5	0	7	3	4	26	HCB
03	Vũ Ngọc Minh	7	4	1	7	7	7	33	HCV
04	Nguyễn Anh Quân	7	7	0	7	1	0	22	HCB
05	Trần Khánh Toàn	7	7	0	7	2	0	23	HCB
06	Lê Anh Vinh	7	7	1	7	3	3	28	HCB

Trong bảng xếp hạng không chính thức (tính theo tổng số điểm), Đoàn Việt Nam, với tổng số 139 điểm, đứng ở vị trí thứ 10 sau các Đoàn: Trung Quốc (225 điểm), Nga (196 điểm), Hoa Kỳ (196 điểm), Bungari (185 điểm), Hàn Quốc (185 điểm), Kazakhxtan (168 điểm), Ấn Độ (148 điểm), Ukraina (143 điểm) và Đài Loan (141 điểm). Đoàn Trung Quốc là Đoàn có nhiều HCV nhất (6 HCV), tiếp theo là các Đoàn: Nga (5 HCV); Hoa Kỳ, Kazakhxtan (mỗi đoàn có 4 HCV); Bungari, Hàn Quốc (mỗi đoàn có 3 HCV); Ấn Độ (2 HCV); Ukraina, Đài Loan, Việt Nam, Thổ Nhĩ Kì, Rumani, Bêlarus, Đức, Cu Ba, Canađa, Ôxtralia, Israel và Nhật Bản (mỗi đoàn có 1 HCV).

Khác với IMO của các năm trước, IMO năm nay do Hội Toán học Hoa Kỳ –một tổ chức phi chính phủ– đứng ra tổ chức. BTC đã làm hết sức mình để các Đoàn tham dự cảm thấy thoải mái và được quan tâm chu đáo. Tất cả những người tham dự IMO lần này đã có cơ hội được gặp mặt nhà toán học lớn Andrew Wiles – người đã chứng minh được Định lí Fermat lớn– và một số nhà toán học có tên tuổi khác. Tuy nhiên, do có dấu hiệu gian lận thi cử của một số đoàn, nên niềm vui chung của IMO lần này không được trọn vẹn. Có những Đoàn mà các thí sinh làm bài thi giống hệt nhau, cũng như có Đoàn mà tất cả các thí sinh đều đạt điểm tối đa ở những bài toán thi do nước mình đề xuất, trong khi tất cả các Đoàn khác đều không đạt được kết quả như vậy ở các bài toán thi này, ... BTC đã phải cùng các trưởng, phó đoàn của các nước thảo luận việc xử lý các hành vi gian lận xảy ra trong kì thi. Cuộc họp kéo dài từ 20h ngày 11/7 đến 03h ngày 12/7/2001, nhưng đã không đưa ra được một hình thức kỷ luật nào, do không đủ số phiếu thuận cần thiết ... .

Lễ bế mạc IMO lần thứ 42 đã được tổ chức trọng thể vào chiều ngày 13/7/2001 tại Hội trường lớn của Trung tâm Kennơdi. Các Đoàn ra về trong một tâm trạng không thật vui vì nhiều chuyện, và trong những chuyện ấy có việc chưa được nhận Bằng khen và Giấy chứng nhận kết quả thi của các thí sinh đoàn mình ...

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/290. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b sao cho $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$.

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T2/290. Cho n ($n \geq 2$) số $a_1, a_2, ..., a_n$ sao cho $0 \leq a_i \leq 1$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{a_2a_3...a_n+1}+\frac{a_2}{a_1a_3...a_n+1}+...+\frac{a_n}{a_1a_2...a_{n-1}+1}$$
$$\leq n-1.$$

PHAN HOÀNG NINH
(K33B khoa Toán ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T3/290. Xét đa thức biến số thực

$$F(x, y, z, t) = 9(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2x^2) +$$
$$+ 6xz(y^2 + t^2) - 6yt(x^2 + z^2) - 4xyzt.$$

a) Hãy phân tích đa thức F thành tích của hai đa thức bậc hai.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức F khi $xy + zt = 1$.

NGUYỄN SONG MINH
(Khoa Toán ĐH KHTN – ĐHQG Hà Nội)

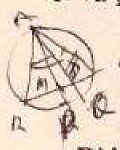
Bài T4/290. Gọi M là điểm nằm trên phân giác trong AD của tam giác ABC (M khác A, D). Tia BM cắt cạnh AC tại E, tia CM cắt cạnh AB tại F. Chứng minh rằng nếu

$$\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AF^2} \text{ thì } \Delta ABC \text{ cân.}$$

PHẠM HOÀNG HÀ
(CLC K49, khoa Toán Tin ĐHSP Hà Nội)

Bài T5/290. Cho tam giác ABC nội tiếp một đường tròn. Đường phân giác trong AD và trung tuyến AM theo thứ tự cắt đường tròn lần nữa tại P và Q. Hãy so sánh DP và MQ.

ĐỖ ÁNH
(HT 2AN – 584 Lương Sơn, Hòa Bình)



CÁC LỚP THPT

Bài T6/290. Cho số nguyên dương n. Tính số các số nguyên dương không lớn hơn $n(n+1)(n+2)$ mà không chia hết cho các số n, $n+1$, $n+2$.

ĐOÀN KIM SANG
(GV THPT chuyên Yên Bái)

Bài T7/290. Tìm tất cả các số thực a sao cho hệ phương trình sau có nghiệm thực x, y, z :

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}=a-1\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}=a+1\end{cases}$$

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Viện Công nghệ Thông tin)

Bài T8/290. Tìm tất cả các hàm số thực $f(x)$, $g(x)$ thỏa mãn $f(x) - f(y) = \cos(x+y).g(x-y)$ với mọi số thực x, y.

ĐINH THÀNH TRUNG
(Khoa Toán Tin ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/290. Gọi I và r là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{IA}+\frac{1}{IB}+\frac{1}{IC}\geq\frac{1}{3R}+\frac{4}{3r}$$

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

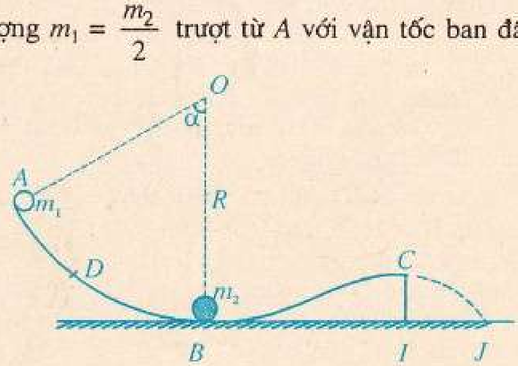
Bài T10/290. Xét tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi r, r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp và mặt cầu bàng tiếp các góc tam diện đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4 tương ứng. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=\frac{2}{r}$$

NGUYỄN THẾ BÌNH
(GV THPT chuyên Hà Giang)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

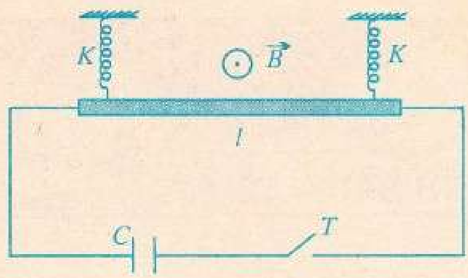
Bài L1/290. Một máng $ABCI$ nằm trong mặt phẳng thẳng đứng có cấu tạo như hình vẽ : B và I ở trên mặt đất nằm ngang ; phần AB có dạng cung tròn tâm O, bán kính $OA = OB = R = 2$m, và OB vuông góc với mặt đất tại B ; $\angle AOB = \alpha = 60°$, tiếp tuyến tại C với phần BC có phương song song với mặt đất ; $CI = h = 0{,}4$m và có phương vuông góc với mặt đất. Hòn bi 2 khối lượng m_2 ban đầu nằm yên tại B. Hòn bi 1 khối lượng $m_1 = \dfrac{m_2}{2}$ trượt từ A với vận tốc ban đầu



v_o theo máng AB tới va chạm đàn hồi xuyên tâm với hòn bi 2. Sau va chạm, m_1 giật lùi lại đến vị trí D ở chính giữa AB, sau đó trượt xuống đến B rồi dừng lại tại B, còn m_2 thì đi lên theo máng BC, sau đó rời máng tại C với tầm xa lớn nhất bằng IJ. Cho biết : trên phần AB hệ số ma sát giữa hòn bi và máng là k, còn trên phần BC không có ma sát. Hãy tính v_o và k. Lấy $g = 10m/s^2$.

TRẦN MẠNH HÙNG
(GV khối PTCTT - ĐH Vinh, Nghệ An)

Bài L2/290. Một vật dẫn thẳng, mảnh, độ dài l, khối lượng m được treo nằm ngang vào giá cách điện nhờ 2 lò xo giống nhau có độ cứng K, trong một từ trường đều có cảm ứng từ $\vec{B}$ hướng theo phương ngang như trên hình vẽ. Đóng khóa T, tụ điện có điện dung C (ban đầu đã được tích điện đến hiệu điện thế U) phóng điện qua vật dẫn. Sau đó xuất hiện sự dao động của vật dẫn. Tính biên độ dao động của vật dẫn. Giả thiết thời gian phóng điện của tụ điện rất nhỏ so với chu kì dao động của vật dẫn. Bỏ qua khối lượng các lò xo và mọi lực cản vật dẫn.



NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/290. Find all pairs of positive integers a, b such that $a + b^2$ is divisible by $a^2b - 1$.

T2/290. Let be given n ($n \geq 2$) numbers $a_1, a_2, ..., a_n$ such that $0 \leq a_i \leq 1$ for every $i = 1, 2, ..., n$. Prove that

$$\frac{a_1}{a_2a_3...a_n+1}+\frac{a_2}{a_1a_3...a_n+1}+...+\frac{a_n}{a_1a_2...a_{n-1}+1} \leq n-1.$$

T3/290. Consider the polynomial on the variables x, y, z, t:

$$F(x, y, z, t) = 9(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2x^2) + 6xz(y^2 + t^2) - 6yt(x^2 + z^2) - 4xyzt.$$

a) Write the polynomial F as the product of two polynomials of 2^d degree.

b) Find the least value of F when $xy + zt = 1$.

T4/290. Let M be a point on the inner angled-bisector AD of triangle ABC (M distinct from A and D). The ray BM cuts the side AC at E, the ray CM cuts the side AB at F. Prove that if

$$\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AF^2}$$

then the triangle ABC is isosceles.

T5/290. Let ABC be a triangle inscribed in a circle. The angled-bisector AD and the median AM cut again the circle respectively at P and Q. Compare DP with MQ.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/290. Let n be a positive integer. Find the number of positive integers, not greater than $n(n+1)(n+2)$, which are not divisible by n, $n+1$, $n+2$.

T7/290. Find all real numbers a such that the following system of equations has real solutions (x, y, z):

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}=a-1\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}=a+1\end{cases}$$

T8/290. Find all real functions $f(x)$, $g(x)$ satisfying the condition

$$f(x) - f(y) = \cos(x + y).g(x-y)$$

for all real numbers x, y.

T9/290. Let I and r be the center and the radius of the incircle of a triangle ABC and let R be its circumradius. Prove that

$$\frac{1}{IA}+\frac{1}{IB}+\frac{1}{IC}\geq\frac{1}{3R}+\frac{4}{3r}$$

T10/290. Let $A_1A_2A_3A_4$ be a tetrahedron and let r, r_1, r_2, r_3, r_4 be respectively the radii of its inscribed sphere and its escribed spheres in the trihedra with vertices $A_1A_2A_3A_4$.

Prove that

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=\frac{2}{r}$$

Bài T1/286. *Dãy số $u_1, u_2, ..., u_k$ được xác định như sau :*

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ với } n = 1, 2, ..., k.$$

Đặt $S = u_1 + u_2 + ... + u_k$.

Chứng minh rằng : $18 < \frac{1}{S} \leq 24$.

Lời giải. Dễ thấy rằng $u_n > 0$ với $n = 1, 2, 3, ...$ nên với $k \geq 1$ thì $S \geq u_1 = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{1}{S} \leq 24$ (1)

Với bất kì $n \geq 1$ ta có :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{1}{3} . \frac{(n+3) - n}{n(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

Từ đó $3S = u_1 + u_2 + ... + u_k =$

$$= \left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4}\right) + \left(\frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5}\right) + ... +$$

$$+ \left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} < \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow S < \frac{1}{18} \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra $18 < \frac{1}{S} \leq 24$

Nhận xét. Rất nhiều bạn đã giải đúng, trong đó một số bạn biến đổi dài dòng. Bài toán tổng quát là :

Dãy số $u_1, u_2, ..., u_k$ được xác định bởi :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)...(n+t)} \text{ với } n = 1, 2, ..., k \text{ và } t \geq 1.$$

Đặt $S = u_1 + u_2 + ... + u_k$. Chứng minh rằng :

$$t!t < \frac{1}{S} \leq (t+1)!$$

trong đó $t! = 1.2.3...t$.

Các bạn có tên dưới đây đã giải đúng và nêu được bài toán tổng quát :

Yên Bái: *Phạm Ngọc Dương*, 9D, THCS Yên Thịnh, Tx. Yên Bái; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thế Tùng*, 9C, THCS Việt Trì; **Bắc Ninh:** *Lưu Thị Thu Trang*, 7A, THCS Yên Phong; **Thái Bình:** *Tạ Duy Long*, 9E, THCS Diêm Điền, Thái Thuỵ; **Ninh Bình:** *Đinh Hữu Công*, 9A, THCS Trương Hán Siêu, Tx. Ninh Bình, *Lê Hiển Vinh*, 9E, THCS TT. Yên Ninh, Yên Khánh; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Chí Linh*, 7A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Đặng Thành Dũng*, 9B, THCS Bạch Liên, Yên Thành; **Hà Tĩnh:** *Trần Bùi Khánh Toàn*, 9/1, THCS Lê Văn Thiêm, Tx. Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Hoàng Tiến Trung*, 9/1, THCS Nguyễn Trãi, Tx. Đông Hà; **Quảng Nam:** *Nguyễn Hữu Hiệp*, 9/3, THCS Nguyễn Huệ, Tam Kỳ.

VIỆT HẢI

Bài T2/286. *Giải phương trình*

$$18x^2 - 18x\sqrt{x} - 17x - 8\sqrt{x} - 2 = 0$$

Lời giải. của *Doãn Thị Kim Huế*, 7C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi, **Hưng Yên**.

Đặt $\sqrt{x} = t$ $(t \geq 0)$ thì phương trình

$$18x^2 - 18x\sqrt{x} - 17x - 8\sqrt{x} - 2 = 0 \qquad (1)$$

trở thành $\quad 18t^4 - 18t^3 - 17t^2 - 8t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (3t^2 - 4t - 2)(6t^2 + 2t + 1) = 0 \quad (2)$$

Do $t \geq 0$ suy ra $6t^2 + 2t + 1 > 0$ nên từ (2) ta có $\quad 3t^2 - 4t - 2 = 0 \qquad (3)$

Phương trình (3) có hai nghiệm

$$t_1 = \frac{2+\sqrt{10}}{3} \ ; \quad t_2 = \frac{2-\sqrt{10}}{3} \ (t_2 < 0 \text{ loại})$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = \left(\frac{2+\sqrt{10}}{3}\right)^2 = \frac{14+4\sqrt{10}}{9}$

Nhận xét. Có rất nhiều bạn giải tốt bài này.

TỐ NGUYÊN

Bài T3/286. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq$$

$$\geq 2\left(\sqrt{\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}}\right)$$

trong đó a, b, c là các số dương. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Không làm mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0 \qquad (1)$

Khi đó ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{c(a+b)}} \geq \frac{1}{\sqrt{b(a+c)}} \geq \frac{1}{\sqrt{a(b+c)}} > 0 \quad (2)$$

và $a + b - 2c \geq a + c - 2b \geq b + c - 2a$ (3)

Từ (1) và (2) ta có :

$$(a-b)\left(\frac{1}{\sqrt{b(a+c)}}-\frac{1}{\sqrt{a(b+c)}}\right)\geq 0 \quad (4)$$

$$(a-c)\left(\frac{1}{\sqrt{c(a+b)}}-\frac{1}{\sqrt{a(b+c)}}\right)\geq 0 \quad (5)$$

$$(b-c)\left(\frac{1}{\sqrt{c(a+b)}}-\frac{1}{\sqrt{b(a+c)}}\right)\geq 0 \quad (6)$$

Cộng từng vế của 3 bất đẳng thức (4), (5) và (6) ta có :

$$\frac{a+b-2c}{\sqrt{c(a+b)}}+\frac{b+c-2a}{\sqrt{a(b+c)}}+\frac{a+c-2b}{\sqrt{b(a+c)}}\geq 0 \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}-2\sqrt{\frac{c}{a+b}}\right)+\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}-2\sqrt{\frac{a}{b+c}}\right)$$

$$+\left(\sqrt{\frac{a+c}{b}}-2\sqrt{\frac{b}{a+c}}\right)\geq 0.$$ Suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. 1) Khá đông bạn tham gia giải bài này và đưa nhiều cách giải. Xin nêu ra đây một số cách :

* Bạn *Phạm Hữu Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Du, Quảng Xương, **Thanh Hóa** đã áp dụng BĐT Trêbưsép cho 2 dãy số ngược chiều (1) và (2) để được BĐT :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{a(b+c)}}+\frac{1}{\sqrt{b(a+c)}}+\frac{1}{\sqrt{c(a+b)}}\right)\geq$$

$$\geq 3\left(\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{a}{b+c}}\right)$$

Từ BĐT này dễ dàng suy ra BĐT cần chứng minh.

* Bạn *Nguyễn Văn Khiết* áp dụng BĐT Trêbưsép cho 2 dãy số cùng chiều (2) và (3) được BĐT (7).

* Bạn *Lương Hữu Long*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định** sử dụng các BĐT phụ:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq\sqrt{2(x+y)} \text{ và } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y} \ (\forall x, y>0)$$

Ta có :

$$\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}+\sqrt{\frac{c}{b}+\frac{a}{b}}\geq$$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\geq$$

$$\geq\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\geq$$

$$\geq\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{2(b+c)}}+\frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{2(a+c)}}+\frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{2(a+b)}}=$$

$$=2\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\right)$$ suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2) Bạn *Huỳnh Thị Thùy Lam*, 8C1, THCS Phú Lâm, Tuy Hòa, **Phú Yên** đã chứng minh được bài toán tổng quát :

Cho n số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ($n \geq 2$) và $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$, ta có bất đẳng thức $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{S-a_i}{a_i}}\geq(n-1)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{S-a_i}}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i = a_j$ ($\forall i, j = 1, 2, ..., n$).

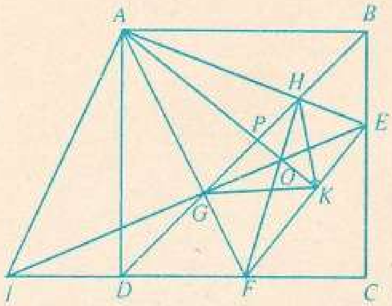
3) Các bạn có lời giải tốt là :

Phú Thọ: *Nguyễn Trường Thọ*, 8A2, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh; **Hưng Yên:** *Doãn Thị Kim Huế*, 7C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Bắc Ninh:** *Lê Duy Cường*, 9B, THCS Yên Phong ; **Hà Nội:** *Lê Hùng Việt Bảo*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; **Hà Nam:** *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên; **Nam Định:** *Bùi Văn Khương*, 9A, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Nam Trực, *Phạm Kim Hùng*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Nguyễn Quốc Khánh*, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Cường*, 9A, THCS Trần Phú, Nông Cống; **Nghệ An:** *Bùi Đăng Lương*, 9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; **Hà Tĩnh:** *Đào Xuân Hoàng*, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Đức Phương*, 8C, THCS Trương Quang Trọng, Sơn Tịnh; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Trần Hải Đăng*, 6A9, THCS Trần Đại Nghĩa, Q.3 ; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 9^2, THCS Mỹ Hóa.

MAI THẾ DUY

Bài T4/286. *Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh CB và CD lần lượt lấy các điểm E và F sao cho* $\frac{BE}{BC}=k$ *và* $\frac{DF}{DC}=\frac{1-k}{1+k}$ *với* $0<k<1$. *Đoạn thẳng BD cắt AE và AF tại H và G tương ứng. Đường vuông góc với EF kẻ từ A cắt BD tại P. Chứng minh rằng* $\frac{PG}{PH}=\frac{DG}{BH}$.

Lời giải. Trên CD kéo dài lấy điểm I sao cho $DI = BE$. Ta có $\Delta ADI = \Delta ABE$. Từ đó suy ra $\angle IAE = 90^\circ$, $AI = AE$ hay ΔIAE vuông cân. Từ giả thiết suy ra $\frac{DE}{DC}=\frac{1-k}{1+k}=\frac{EC}{CI}$.



Do $DC = DA$ nên $\dfrac{DF}{DA} = \dfrac{EC}{CI}$. Từ đó $\Delta DAF \backsim \Delta CIE$. Nên $\angle AFD = \angle IEC$. Gọi giao điểm của EI và AF là G', ta có $G'ECF$ là tứ giác nội tiếp do kết quả trên. Từ đó $\angle EG'F = 90^\circ$ tức $AG' \perp EI$. Suy ra $AG' = \dfrac{1}{2}IE = G'C$. Điều này chứng tỏ $G' \in BD$. Vậy $G' \equiv G$.

Ta có $\angle EAF = 45^\circ = \angle BDC$ nên tứ giác $AHFD$ nội tiếp. Suy ra $\angle AHF = 90^\circ$ tức $FH \perp AE$ nên các đường cao AK, EG, FH đồng quy tại trực tâm O của ΔAFE.

Ta có các tứ giác $OGFK$, $OHEK$, $FGHE$ nội tiếp. Suy ra $\angle GKP = \angle GFH = \angle GEH = \angle PKH$ tức KP là phân giác của ΔGKH.

Vậy $\dfrac{PG}{PH} = \dfrac{KG}{KH}$ (1)

Lại có $\Delta AFI = \Delta AFE$ nên $IF = EF$, $\angle AFI = \angle AFE$ và $\angle AIF = \angle AEF = \angle AEB$.

Do $\angle AFD = \angle AFK$ suy ra $\Delta AFD = \Delta AFK$. Suy ra $DF = FK$.

Suy tiếp ra $BE = DI = EK$ và $DG = GK$ (2)

Mặt khác $\Delta HEK = \Delta HEB$ nên $HK = HB$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $\dfrac{PG}{PH} = \dfrac{DG}{BH}$

Nhận xét. 1. Nhiều bạn giải bằng cách biến đổi tỉ số nên lời giải giống như bài đại số.

2. Giải tốt bài này gồm các bạn

Phú Thọ: *Nguyễn Thế Tùng*, 9C, THCS Việt Trì; **Hà Tây:** *Dương Minh Sơn*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hải Dương:** *Lê Đình Huy*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Hải Phòng:** *Phạm Anh Minh*, 8A, THPT NK Trần Phú; **Nam Định:** *Nguyễn Đăng Hợp*, 9A2, *Phạm Kim Hùng*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Thanh Hóa:** *Lê Khắc Đức Tâm*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trần Mạnh Tiến*, 9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; **Quảng Bình:** *Lê Đức Anh*, 9', THCS Đồng Mỹ, Đồng Hới.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/286. *Ta gọi đường chéo chính của một lục giác lồi là đoạn thẳng nối hai đỉnh và chia lục giác thành hai tứ giác. Chứng minh rằng :*

a) Với bất kì lục giác lồi có độ dài các cạnh đều bằng 1 thì tồn tại đường chéo chính có độ dài không lớn hơn 2.

b) Với bất kì lục giác lồi có độ dài các cạnh đều bằng 1 thì tồn tại đường chéo chính có độ dài lớn hơn $\sqrt{3}$.

Lời giải. (dựa theo bài của *Lê Đình Huy*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, **Hải Dương**)

Xét lục giác lồi $ABCDEF$. Kẻ các đường chéo AC, AD, AE suy ra tổng các góc trong của lục giác bằng 720°. Dễ chứng minh rằng trong ba cặp góc $(\widehat{A}, \widehat{B})$, $(\widehat{C}, \widehat{D})$ và $(\widehat{E}, \widehat{F})$, tồn tại một cặp góc có tổng không lớn hơn 240° (nhưng lớn hơn 180°), và tồn tại một cặp góc có tổng không nhỏ hơn 240°.

a) Giả sử $\widehat{A} + \widehat{B} \le 240^\circ$. Ta sẽ chứng minh đường chéo chính $CF \le 2$ (hình 1).

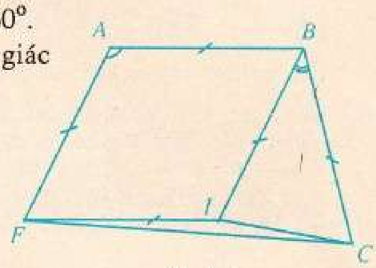
Muốn vậy, dựng hình thoi $ABIF$, ta có

$\widehat{IBC} = \widehat{B} - (180^\circ - \widehat{A}) = (\widehat{A} + \widehat{B}) - 180^\circ$
$\le 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$.

Từ đó, do tam giác IBC cân, suy ra $IC \le BC = 1$.

Cuối cùng :

$CF \le IC + IF$
$\le 1 + 1 = 2$



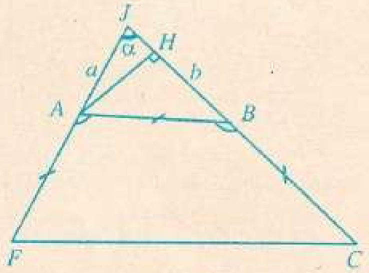
Hình 1

b) Giả sử $\widehat{A} + \widehat{B} \ge 240^\circ$, ta sẽ chứng minh đường chéo chính $CF > \sqrt{3}$ (hình 2).

Kéo dài FA và CB, cắt nhau tại J. Đặt $AJ = a$, $BJ = b$, $\widehat{AJB} = \alpha$.

Trong tam giác AJB ta có

$1 = AB^2 =$
$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.



Hình 2

Thực vậy

$AB^2 = AH^2 + HB^2 = AH^2 + (b - JH)^2 =$
$= AH^2 + b^2 + JH^2 - 2b.JH = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.

Từ giả thiết $\widehat{A} + \widehat{B} \ge 240^\circ$, suy ra $\alpha \ge 60^\circ$ và $\cos\alpha \le \dfrac{1}{2}$. Sử dụng hai kết quả trên khi xét ΔFJC, ta có :

$CF^2 = JF^2 + JC^2 - 2JF.JC.\cos\alpha$
$= (a+1)^2 + (b+1)^2 - 2(a+1))(b+1)\cos\alpha$
$= (a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha) + (2 + 2a + 2b) - 2(a + b + 1)\cos\alpha$
$\geq 3 + 2a + 2b - (a+b+1) = 3(a+b-1) > 3$

Vậy $CF > \sqrt{3}$.

Nhận xét. Trong số các bạn gửi lời giải, chỉ có một bạn giải đúng cả hai phần của bài toán. Phần lớn đều giải sai phần b). Các sai lầm tập trung vào hai loại :

– Ngộ nhận. Chẳng hạn, cho rằng lục giác đã cho là lục giác đều (!)

– Đưa thêm giả thiết không hợp lí. Chẳng hạn, cho rằng : trong mỗi tứ giác *ACDF*, *ABDE* và *BCEF* đều phải có một góc không nhọn nên có thể giả thiết $\angle EFB \geq 90^\circ$, $\angle ABD \geq 90^\circ$ và $\angle ACD \geq 90^\circ$ (đúng ra, chỉ nêu một bất đẳng thức, còn lại phải chia nhiều trường hợp để xét).

NGUYỄN HUY ĐOAN

Bài T6/286. *Xét dãy số (u_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ được xác định bởi : $u_1 = 2$,*

$u_n = 3u_{n-1} + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3$ với $n = 2, 3, ...$

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p thì $2000.\sum_{i-1}^{p-1} u_i$ chia hết cho p.

Lời giải. (của đa số các bạn)

Từ giả thiết ta có

$u_n + n^3 = 3(u_{n-1} + (n-1)^3) = 3^2(u_{n-2} + (n-2)^3)$
$= ... = 3^{n-1}(u_1 + 1^3) = 3^n$

Như vậy $u_n = 3^n - n^3$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

Với $p = 2$ có $u_1 \vdots 2$.

Với p là số nguyên tố lẻ

$$\sum_{i=1}^{p-1} u_i = 3 + 3^2 + ... + 3^{p-1} - 1^3 - 2^3 - ... - (p-1)^3$$

Do với mọi $i = 1, 2, ..., p-1$ có $(i^3 + (p-i)^3) \vdots p$ nên

$$1^3 + 2^3 + ... + (p-1)^3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1}(i^3 + (p-i)^3) \vdots p.$$

Trong khi đó $3 + 3^2 + ... + 3^{p-1} =$

$= 3.\frac{3^{p-1}-1}{3-1} = \frac{1}{2}(3^p - 3) \vdots p$ theo định lí nhỏ Phecma.

Vậy với mỗi số nguyên tố p thì $\sum_{i=1}^{p-1} u_i \vdots p$

Nói riêng $2000.\sum_{i=1}^{p-1} u_i \vdots p$ (đpcm).

Nhận xét. Tòa soạn nhận được lời giải của 155 bạn, tất cả các bạn đều giải đúng. Các bạn sau có lời giải gọn gàng :

Phú Thọ: *Nguyễn Trường Thọ*, 8A2, THCS Phong Châu; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Quang Chiến*, 9B, THCS Yên Lạc; **Hà Tây:** *Dương Minh Sơn*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền; **Hà Nội:** *Lê Hùng Việt Bảo*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ; **Nam Định:** *Lương Hữu Long*, *Nguyễn Đăng Hợp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn; **Hải Dương:** *Phạm Huy Hoàng*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn; **Hà Nam:** *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến; **Hải Phòng:** *Nguyễn Đức Phương*, 8A, THCS Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Lê Văn Bắc*, 8A, THCS Quảng Lĩnh

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/286. *Xét phương trình*

$$a\cos x + b\sin 2x + c\cos 3x = x$$

a) Chứng minh rằng với bất kì các số thực a, b, c thì phương trình trên có nghiệm trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

b) Chứng minh rằng có các số thực a, b, c mà phương trình trên không có nghiệm trong đoạn [u, v], trong đó các số u, v thỏa mãn

$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ nhưng $[u, v] \neq \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Lời giải. (Dựa theo *Đinh Ngọc Thắng*, 10A, ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội** và nhiều bạn khác)

a) Xét hàm số

$f(x) = a\cos x + b\sin 2x + c\cos 3x - x$ với bất kì $a, b, c \in \mathbf{R}$, liên tục trên **R** và $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm trong $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ theo định lí Bônxanô–Côsi.

b) Xét với $a > 0$, $b = c = 0$. Khi đó

$f(x) = a\cos x - x$ và $f'(x) = -a\sin x - 1$.

Ta có $f(x) > 0$ với $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$.

Vì $f'(x) < 0$ với $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ nên $f(x)$ là hàm nghịch biến trong $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Mặt khác $f(0) = a>0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trong $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\alpha \notin [u, v]$ (điều này thực hiện được do giả thiết) và đặt $a = \frac{\alpha}{\cos\alpha}$. Khi đó phương trình $a\cos x - x = 0$ trở thành $\frac{\alpha}{\cos\alpha}\cos x - x = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \alpha \notin [u, v]$ nên $f(x) = 0$ không có nghiệm trong $[u, v]$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng *Phạm Văn Hùng, Ngô Xuân Bách*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương;** *Kim Đình Thái*, 11A1, chuyên Toán–Tin, ĐHSP, *Nguyễn Tuấn Dương, Nguyễn Thu Trang*, 11A Toán, ĐHKHTN – ĐHQG, *Lê Hùng Việt Bảo*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, *Nguyễn An Huy*, 11D1, THPT Chu Van An, *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11T, Amsterdam, **Hà Nội ;** *Nguyễn Xuân Trường, Nguyễn Văn Giáp*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc ;** *Phạm Tuấn Anh, Trần Anh Hoàng*, 12T, ĐHKHTN – ĐHQG **Tp. HCM;** *Trần Thái An Nghĩa*, 11T2, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**; *Trần Văn Thái*, 11H, THPT Ân Thi, **Hưng Yên;** *Vũ Đình Đấu*, 11 THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**; *Hà Nhật Quang*, 11T, THPT chuyên **Quảng Bình.**

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/286. *Cho tam giác ABC không có góc tù. Chứng minh rằng :*

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} \ge \frac{10\sqrt{3}}{9}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (của bạn *Trần Anh Hoàng*, 11T, PTNK ĐHQG **Tp. HCM**)

Đặt $a = \mathrm{tg}\frac{A}{2}$, $b = \mathrm{tg}\frac{B}{2}$; $c = \mathrm{tg}\frac{C}{2}$. Vì A, B, C là các góc không tù nên $0 \le a, b, c \le 1$.

Ta có các đẳng thức và bất đẳng thức quen biết sau :

$$ab + bc + ca = 1 \text{ và } a + b + c \ge \sqrt{3}$$

(dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$).

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số $1 - a$, $1 - b$, $1 - c$ ta có

$$(1-a)(1-b)(1-c) \le$$

$$\le \left[1 - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\right]^3 \le \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$$

Lại có $(1-a)(1-b)(1-c) =$

$= 1 + ab + bc + ca - a - b - c - abc$

$= 2 - (a + b + c + abc)$

Suy ra

$$a + b + c + abc \ge 2 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{10\sqrt{3}}{9}$$

Từ đó có BĐT phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Nhận xét. Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Có nhiều cách giải nhưng cách giải nói trên là ngắn gọn nhất. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn : *Phạm Văn Trung*, 10T, THPT Lê Khiết, **Quảng Ngãi;** *Phạm Thị Huệ*, THPT Hậu Lộc, **Thanh Hóa**; *Đỗ Bích Lan*, 10A10, Tp. **Thái Nguyên**; *Lê Công Trung*, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**; *Cao Việt Dũng, Hoàng Anh Đức*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**; *Phạm Quang Nhật Minh*, 12A1, ĐHSP **Hà Nội**; *Đinh Thái Hoàng*, 11, THPT Ngô Quyền, *Lê Phương*, 10T, THPT Lương Thế Vinh **Đồng Nai;** *Hàn Ngọc Đức*, 11C, THPT Mỹ Hào, **Hưng Yên**; *Lê Quang Hòa*, 10T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Dương Thái Sơn*, 11T1, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Tây**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/286. *Cho tam giác ABC không có góc tù và mỗi góc không nhỏ hơn $\frac{\pi}{4}$. Chứng minh rằng :*

$\mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C + 3\mathrm{cotg}A.\mathrm{cotg}B.\mathrm{cotg}C \le$
$\le 4(2 - \sqrt{2})$

Lời giải. (của bạn *Phan Thành Nam*, 10T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, **Phú Yên**).

Giả sử $A = \min\{A, B, C\} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le A \le \frac{\pi}{3}$

Ta có : $S =$

$= \mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C + 3\mathrm{cotg}A.\mathrm{cotg}B.\mathrm{cotg}C$

$= \mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C + 3\mathrm{cotg}A(1 - \mathrm{cotg}A(\mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C))$

$= 4\mathrm{cotg}A + (1 - 3\mathrm{cotg}^2A)(\mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C)$

Vì $A \le \frac{\pi}{3} \Rightarrow 1 - 3\mathrm{cotg}^2A \le$

$$\le 1 - 3\cot g^2\frac{\pi}{3} = 1 - 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0$$

Vì $B, C \le \frac{\pi}{2}$ nên :

$$\cot gB + \cot gC \ge 2\cot g\frac{B+C}{2} = 2tg\frac{A}{2}$$

Vậy : $S \le 4\cot gA + (1 - 3\cot g^2 A).2tg\frac{A}{2}$

$$= 4\left(\frac{1-tg^2\frac{A}{2}}{2tg\frac{A}{2}}\right) + \left(1 - 3\left(\frac{1-tg^2\frac{A}{2}}{2tg\frac{A}{2}}\right)^2\right)2tg\frac{A}{2}$$

$$= \frac{4 - 3\left(1 - tg\frac{A}{2}\right)^2}{2tg\frac{A}{2}}$$

Xét hàm $f(x) = \frac{4 - 3(1-x)^2}{2x}$ xác định trên $\left[\sqrt{2} - 1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Ta thấy : $f'(x) = -\frac{(3x^2-1)^2}{2x^2} < 0 \Rightarrow f(x)$ đơn điệu giảm trên $\left[\sqrt{2} - 1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Vậy : $f(x) \le f(\sqrt{2} - 1)$, $\forall x \in \left[\sqrt{2} - 1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ (1)

Vì $\frac{\pi}{4} \le A \le \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{8} \le \frac{A}{2} \le \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \sqrt{2} - 1 \le tg\frac{A}{2} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra :

$$S = f\left(tg\frac{A}{2}\right) \le f(\sqrt{2} - 1) = 4(2 - \sqrt{2})$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow B = C = \frac{3\pi}{8}$ và $A = \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân và góc ở đỉnh bằng $\frac{\pi}{4}$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, có 77 bạn tham gia giải, 6 bạn giải sai, chủ yếu là do ước lượng sai và nhớ nhầm bất đẳng thức trong tam giác

$$\cot gA + \cot gB + \cot gC \le \sqrt{3} \ (?)$$

2) Đa số các bạn đều sử dụng khái niệm đạo hàm trong lời giải của mình, trong đó một số bạn có kĩ năng tốt và cho lời giải khá gọn. Một số ít bạn cố gắng tránh dùng khái niệm đạo hàm nhưng lời giải lại quá dài.

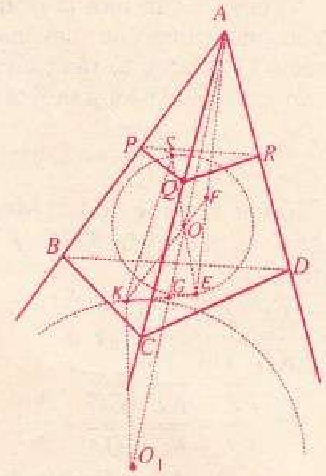
3) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt : **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Thích*, 11A1, THPT Yên Phong I; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Giáp*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Quảng Ngãi:** *Trần Thái An Nghĩa*, 11T2, THPT chuyên Lê Khiết; **Hải Dương:** *Nguyễn Trung Hoàn*, 10T, THPT Nguyễn Trãi; **Quảng Trị:** *Đoàn Quang Trí*, 10T, THPT Lê Quý Đôn; **Bạc Liêu:** *Nguyễn Văn Tâm*, 11T, THPT Giá Rai.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/286. *Cho tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối diện bằng nhau. Gọi E là tiếp điểm của mặt (BCD) và mặt cầu tâm O nội tiếp tứ diện. Gọi K là tiếp điểm của mặt (BCD) và mặt cầu bàng tiếp tứ diện ứng với đỉnh A. Chứng minh rằng :*

a) K là trực tâm của tam giác BCD

b) FA = 2EF trong đó F là giao điểm của AE và KO.



Lời giải. a) Theo giả thiết $ABCD$ là một tứ diện *gần đều*, vì vậy tâm O mặt cầu nội tiếp cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm của tứ diện. Từ đó suy ra tiếp điểm E của mặt cầu nội tiếp tứ diện trên mặt BCD là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD (vì $OE \perp$ mp(BCD))

Gọi O_1 là tâm mặt cầu bàng tiếp góc tam diện đỉnh A của tứ diện, thế thì dễ thấy rằng ba điểm A, O và O_1 thẳng hàng (trên giao tuyến chung của ba mặt phẳng phân giác của các góc nhị diện của góc tam diện $A(BCD)$). Hai đường thẳng song song OE và O_1K (vì cùng vuông góc với mp(BCD)) xác định một mặt phẳng chứa đường thẳng AOO_1 và vuông góc với mặt đáy BCD dọc theo giao tuyến EK. Gọi G là giao điểm của đường thẳng AO và mặt phẳng BCD thì G cũng là giao điểm của (AO) và (EK), và G là trọng tâm của tam giác BCD.

Bây giờ ta dựng thêm tiếp diện (PQR) của mặt cầu nội tiếp, song song với mp(BCD), tiếp xúc với mặt cầu ở điểm S. Thế thì SE là đường kính của mặt cầu nội tiếp, vuông góc với mặt đáy BCD.

Phép vị tự V_A^k tâm A, tỉ số $k = \dfrac{\overline{AK}}{\overline{AS}} = \dfrac{\overline{O_1K}}{\overline{OS}} = \dfrac{r_A}{r}$ (trong đó r và r_A lần lượt là bán kính các mặt cầu nội tiếp và bàng tiếp góc tam diện đỉnh A) biến mặt cầu nội tiếp (O, r) thành mặt cầu bàng tiếp (O_1, r_A), biến mp(PQR) thành mp(BCD) và biến S thành K.

Áp dụng định lí Mênêlauýt vào tam giác EGO và cát tuyến ASK, ta được :

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AO}}\cdot\frac{\overline{SO}}{\overline{SE}}\cdot\frac{\overline{KE}}{\overline{KG}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{KG}}{\overline{KE}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AO}}\cdot\frac{\overline{SO}}{\overline{SE}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

Suy ra : $\dfrac{\overline{EG}}{\overline{EK}}=\dfrac{1}{3}$ hay là : $\overrightarrow{EK}=3\overrightarrow{EG}$ (1)

Vì G và E lần lượt là trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác BCD nên hệ thức véctơ (1) chứng tỏ rằng điểm K là trực tâm của tam giác BCD (đồng thời ta cũng suy ra :

$\dfrac{r_A}{r}=\dfrac{O_1K}{OE}=\dfrac{KG}{GE}=2$, hay là : $r_A = 2r$)

b) Lại áp dụng định lí Mênêlauýt vào tam giác AEG và cát tuyến KOF ($F = (AE) \cap (OK)$), ta được :

$$\frac{\overline{KE}}{\overline{KG}}\cdot\frac{\overline{OG}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{FA}}{\overline{FE}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{FE}}{\overline{FA}}=\frac{\overline{KE}}{\overline{KG}}\cdot\frac{\overline{OG}}{\overline{OA}}=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

nghĩa là điểm F chia trong đoạn thẳng EA theo tỉ số số học $k = \dfrac{1}{2}$, hay là : $AF = 2EF$ (đpcm).

Lời giải 2. (*Ngô Xuân Bách*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương** và một số bạn khác).

Cũng kí hiệu như lời giải 1 và gọi V là thể tích tứ diện $ABCD$; S_a, S_b, S_c, S_d lần lượt là diện tích các mặt BCD, CDA, DAB, ABC đối diện với các đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$. Thế thì ta được các hệ thức :

$$3V = (S_a + S_b + S_c + S_d)r$$
$$= (S_b + S_c + S_d - S_a)r_A \qquad (2)$$

Vì $ABCD$ là một tứ diện gần đều nên các mặt bằng nhau và do đó tương đương với nhau (có cùng diện tích) ; từ hệ thức (2) suy ra

$$r_A = 2r \qquad (3)$$

Mặt khác, lại có hệ thức (nhờ định lí Talét) :

$$\frac{EG}{GK}=\frac{OE}{O_1K}=\frac{r}{r_A}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\overline{EG}}{\overline{EK}}=\frac{1}{3}$$

Từ đó thấy lại hệ thức (1) như đã chỉ ra trong lời giải 1.

Nhận xét. 1) Sở dĩ lời giải 2 (phần a) ngắn gọn hơn lời giải 1 vì ta đã dùng các công thức thể tích (2) thiết lập nhanh chóng hệ thức (3) giữa các bán kính r, r_A các mặt cầu nội tiếp và bàng tiếp góc tam diện đỉnh A; rồi từ đó suy ra ngay (1) đpcm. Phương pháp này gọi là *phương pháp thể tích*.

2) Bạn *Hồng Ngọc Bình*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị** và một số bạn khác sử dụng *phương pháp dựng hình hộp* ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, nhận trọng tâm của tứ diện làm tâm hình hộp rồi lập luận tương tự lời giải 1.

3) Ngoài các bạn kể trên, các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội: *Đinh Ngọc Thắng*, 10A, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Bắc Ninh:** *Ngô Quý Hoàng*, 10A, THPT Yên Phong I; **Hải Dương:** *Phạm Văn Hùng*, 11T, THPT Nguyễn Trãi; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Xuân Trường*, 11A1, *Võ Nhật Huy*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hòa Bình:** *Giang Sơn Đạt*, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ; **Nghệ An:** *Lưu Vũ Thanh Hương*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Tp. Vinh; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Văn Triết*, 11A3, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi:** *Trần Thái An Nghĩa*, *Hà Quang Đạt*, 11T2, THPT chuyên Lê Khiết ; **Đồng Nai:** *Lê Phương*, 10T1, *Hàn Ngọc Quỳnh Hương*, 11T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Tp. Biên Hòa; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 10T, THPT thị xã Sa Đéc; **Bạc Liêu:** *Nguyễn Văn Tâm*, 11_1, THPT Giá Rai.

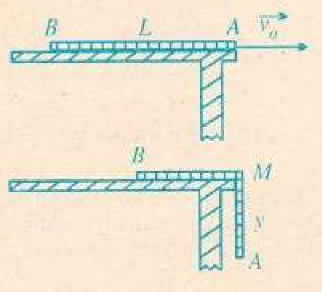
Ngoài ra, bạn *Hà Quang Đạt* còn có nhận xét rằng bài toán trên là hệ quả trực tiếp của một bài thi chọn học sinh giỏi quốc gia năm học 1995–1996 (bảng A).

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/286. *Một sợi dây xích dài $L = 1{,}09cm$ được đặt trên mặt bàn nằm ngang. Truyền cho xích vận tốc ban đầu $v_o = 6cm/s$ dọc theo chiều*

a) Lúc $t = 0$

b) Thời điểm t



dài của nó thì nó sẽ tuột dần khỏi mặt bàn. Hỏi sau bao lâu (kể từ lúc đầu A của xích rời khỏi mặt bàn) toàn bộ sợi dây xích sẽ rời khỏi mặt bàn và tính vận tốc v của xích lúc đó. Cho g = 9,81m/s^2 và bỏ qua mọi ma sát.

Hướng dẫn giải. Kí hiệu y là độ dài đoạn xích thõng xuống lúc t. Tổng các ngoại lực tác dụng lên dây xích chỉ là trọng lượng P của đoạn y (vì trọng lượng của phần xích còn nằm trên mặt bàn bị cân bằng bởi phản lực của mặt bàn).

Áp dụng định luật II Niutơn ta có : $a = \dfrac{F}{m} \Rightarrow$

$y'' = \dfrac{\mu y g}{\mu L} = \dfrac{g}{L}y$ (1) (với $y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$; μ là khối lượng ứng với một đơn vị độ dài của sợi xích).

Đặt $k^2 = \dfrac{g}{L} = 9 \Rightarrow k = \pm 3$ ta có nghiệm của (1) có dạng : $y = c_1e^{kt} + c_2e^{-kt}$.

Theo đề bài, lúc $t = 0$ thì $y_0 = 0$ và $y'_0 = v_0$ = 6cm/s = 0,06m/s ; suy ra $y = 10^{-2}(e^{3t} - e^{-3t})$ (2).

Đặt $Y = 50y$; $X = 3t$, từ (2) rút ra :

$$X = \ln(Y + \sqrt{Y^2 + 1}) \quad (3).$$

Khi toàn bộ dây xích rời khỏi mặt bàn thì $y = L = 1{,}09$m $\Rightarrow Y = 0{,}545$m $\Rightarrow X = 0{,}24$ (s) $\Rightarrow t = 0{,}08$(s).

Từ đó $v_c = y' = 3.10^{-2}(e^{0.24} + e^{-0{,}24}) \approx 0{,}332$ m/s.

Chú ý. – Thay cho việc áp dụng định luật II Niutơn, có thể áp dụng định luật bảo toàn năng lượng để tính v.

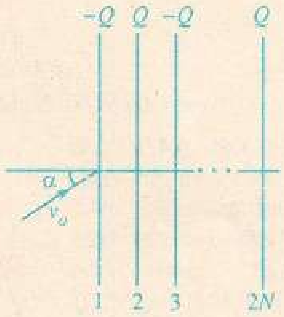
– Nếu $L = 1{,}09$m (hợp lí hơn) thì $t = 1{,}56$(s) và $v_c = 3{,}27$m/s.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Hải Phòng: *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Bích Ngọc*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Tp. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Lê Hồng Quốc Tiệp*, 11A, THPT Hồng Lĩnh; **Huế:** *Phùng Quốc Trí*, 12 C. Lý, Quốc học Huế; **Hòa Bình:** *Giang Sơn Đạt*, 11 Toán, THPT Hoàng Văn Thụ; **Thanh Hóa:** *Lê Văn Dương*, 11A1, THPT Hậu Lộc I; **Nam Định:** *Trần Đức Sinh*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Trọng Vượng*, 11 Lí, *Nguyễn Viết Trường*, 12 Lí, THPT NK Hàn Thuyên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Tuấn Linh*, *Nguyễn Ngọc Anh*, 11A3, *Nguyễn Minh Kiên*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Đồng Nai:** *Nguyễn Kim Huy*, *Ma Nam*, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa;

MAI ANH

Bài L2/286. *Một hệ thống gồm 2N lưới kim loại giống nhau được đặt song song với nhau, cách đều nhau. Khoảng cách giữa 2 lưới kề nhau là d (d rất nhỏ so với kích thước của mỗi lưới). Mỗi lưới có diện tích là S. Các lưới được tích điện theo thứ tự là : –Q, Q, –Q, ..., Q. Một êlectrôn e chui vào hệ thống từ tấm lưới thứ nhất với vận tốc ban đầu v_o theo phương hợp với pháp tuyến của lưới thứ nhất một góc α. Xác định độ lớn và hướng vận tốc của êlectrôn khi ra khỏi hệ thống. Bỏ qua tác dụng của trọng lực.*



Hướng dẫn giải.

Cường độ điện trường trong khoảng không gian giữa 2 lưới 1–2, 3–4... là $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_o S}$. Hiệu điện thế giữa lưới 1 và lưới 2N là : $U = N.Ed = \dfrac{NQd}{\varepsilon_o S}$. Kí hiệu $\vec{v}$ là vận tốc của êlectron khi ra khỏi hệ thống và β là góc giữa $\vec{v}$ và pháp tuyến của lưới 2N, áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có :

$$\frac{mv_o^2}{2} + eU = \frac{mv^2}{2}.$$

Suy ra : $v = \sqrt{v_o^2 + \dfrac{2NeQd}{m\varepsilon_o S}}$ (1)

Mặt khác, vì thành phần vuông góc với cường độ điện trường $\vec{E}$ có độ lớn không thay đổi, ta có : $v_o\sin\alpha = v\sin\beta$, từ đó $\sin\beta = \dfrac{v_o \sin\alpha}{v}$, với v có biểu thức (1)

Nhận xét. Các em có lời giải đúng :

Đồng Nai: *Ma Nam*, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Kiên*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hải Phòng:** *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú ; **Hà Tây:** *Nguyễn Minh Chính*, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông.

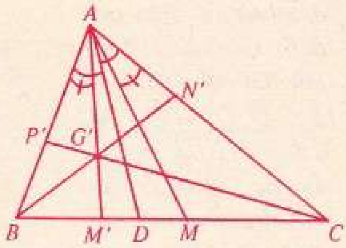
MAI ANH

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

VẬN DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PTÔLÊMÊ CÙNG VỚI ĐỊNH LÍ MÊNÊLAUYT

TRẦN TUẤN ANH
*(SV lớp Toán – Tin2000
ĐHKHTN–ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)*

Xét ΔABC có trung tuyến AM, phân giác AD. Lấy điểm M' trên BC sao cho $\angle BAM' = \angle MAC$ (AM' là đường đối trung) (h.1) Khi đó ta có : $\angle BAM = \angle CAM$



Hình 1

Tương tự kẻ các đường đối trung BN', CP'. Ta có

$$\frac{S_{BAM'}}{S_{CAM}} = \frac{\frac{1}{2}AB.AM'\sin\angle BAM'}{\frac{1}{2}AM.AC\sin\angle MAC} = \frac{AB.AM'}{AM.AC}$$

Tương tự : $\dfrac{S_{BAM}}{S_{CAM'}} = \dfrac{AB.AM}{AC.AM'}$

Từ đó suy ra : $\dfrac{S_{BAM'}}{S_{CAM}}.\dfrac{S_{BAM}}{S_{CAM'}} = \dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{c^2}{b^2}$

Thay $S_{BAM} = S_{CAM}$ và $\dfrac{S_{BAM'}}{S_{CAM'}} = \dfrac{BM'}{CM'}$ vào đẳng thức trên được : $\dfrac{BM'}{CM'} = \dfrac{c^2}{b^2}$

Tương tự $\dfrac{CN'}{AN'} = \dfrac{a^2}{c^2}$, $\dfrac{AP'}{BP'} = \dfrac{b^2}{a^2}$ (1)

Từ (1) có $\dfrac{M'B}{M'C}.\dfrac{N'C}{N'A}.\dfrac{P'A}{P'B} = 1.$

Theo định lí đảo Xêva thì AM', BN', CP' đồng quy (tại điểm đối trung G').

Biến đổi tỉ lệ thức $\dfrac{BM'}{CM'} = \dfrac{c^2}{b^2}$ với chú ý

$BM' + CM' = a$ ta được $BM' = \dfrac{ac^2}{b^2 + c^2}$ và

$CM' = \dfrac{ab^2}{b^2 + c^2}$. Tương tự

$$AP' = \frac{cb^2}{a^2 + b^2}\ ;\ AN' = \frac{bc^2}{a^2 + c^2}\ ;$$

$$BP' = \frac{ca^2}{a^2 + b^2}\ ,\ CN' = \frac{ba^2}{a^2 + c^2} \qquad (2)$$

Từ $\dfrac{BM'}{MC} = \dfrac{S_{BAM'}}{S_{MAC}} = \dfrac{AB.AM'}{AM.AC}$

$$\Rightarrow \frac{AM'}{AM} = \frac{AC}{AB}.\frac{BM'}{MC} = \frac{b}{c}.\frac{ac^2}{b^2 + c^2}.\frac{2}{a} = \frac{2bc}{b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow AM' = \frac{2bcm_a}{b^2 + c^2}\ ;\ BN' = \frac{2acm_b}{a^2 + c^2},$$

$$CP' = \frac{2abm_c}{a^2 + b^2} \qquad (3)$$

Áp dụng BĐT Ptôlêmê đối với tứ giác $BP'N'C$ ta có : $CP'.BN' \le BC.P'N' + BP'.CN'$ (*)

Từ (*) và (2), (3) có :

$$\frac{2abm_c}{a^2 + b^2}.\frac{2acm_b}{a^2 + c^2} \le a.P'N' + \frac{ca^2}{a^2 + b^2}.\frac{ba^2}{a^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow P'N' \ge \frac{abc}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}(4m_b m_c - a^2) \quad (4)$$

Áp dụng BĐT Ptôlêmê đối với tứ giác $AP'G'N'$ ta có :

$P'N'.G'A \le AP'.G'N' + AN'.P'G'$ (**)

Áp dụng định lí Mênêlauýt trong $\Delta AM'C$ với cát tuyến BN' và (1), (2) ta có :

$$\frac{G'A}{G'M'}.\frac{BM'}{BC}.\frac{N'C}{N'A} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{G'A}{G'M'} = \frac{BC}{BM'}.\frac{N'A}{N'C} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow G'A = \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + a^2}AM'$$

Từ đó và (3) có

$$G'A = \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + a^2}.\frac{2bcm_a}{b^2 + c^2} = \frac{2bcm_a}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (5)$$

Xét $\Delta AP'C$ với cát tuyến BN' và (3) có

$$P'G' = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.CP' =$$

$$= \frac{2abc^2 m_c}{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)} \quad (6)$$

Xét $\Delta BN'A$ với cát tuyến CP' và (3) có :

$$N'G' = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}.BN' =$$

$$= \frac{2acb^2 m_b}{(a^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)} \qquad (7)$$

Thay thế (2) (5) (6) (7) vào (**) ta có :

$$P'N'.\frac{2bcm_a}{a^2+b^2+c^2} \le$$

$$\le \frac{cb^2}{a^2+b^2}.\frac{2acb^2 m_b}{(a^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)} +$$

$$+ \frac{bc^2}{c^2+a^2}.\frac{2abc^2 m_c}{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\Rightarrow P'N' \le \frac{abc(b^2 m_b + c^2 m_c)}{m_a(a^2+b^2)(a^2+c^2)} \qquad (8)$$

Từ (4), (8) có

$b^2 m_b + c^2 m_c \ge m_a(4 m_b m_c - a^2)$

$\Rightarrow a^2 m_a + b^2 m_b + c^2 m_c \ge 4 m_a m_b m_c \qquad (9)$

Ta đã có (B3) (xem THTT số 289/7-2001 trang 5) :

$abm_c + bcm_a + cam_b \ge a^2 m_a + b^2 m_b + c^2 m_c$

$\Rightarrow abm_c + bcm_a + cam_b + \ge a^2 m_a + b^2 m_b + c^2 m_c$

$\ge 4 m_a m_b m_c$ (C1)

• Ta sẽ chứng minh :

$(a^2+b^2+c^2)(am_a + bm_b + cm_c) \ge$

$\ge (a+b+c)(a^2 m_a + b^2 m_b + c^2 m_c) \qquad (10)$

Thật vậy :

(10) $\Leftrightarrow am_a[b(b-a) + c(c-a)] + bm_b[a(a-b) + c(c-b)] + c\,m_c[a(a-c) + b(b-c)] \ge 0$

$\Leftrightarrow ab(a-b)(m_b - m_a) + bc(b-c)(m_c - m_b) + ac(a-c)(m_c - m_a) \ge 0$

Giả sử $a \ge b \ge c \Rightarrow m_a \le m_b \le m_c \Rightarrow$ (10) đúng.

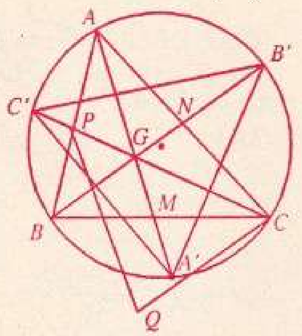
Từ (9) (10) suy ra :

$(a^2+b^2+c^2)(am_a + bm_b + cm_c) \ge$

$\ge (a+b+c)(a^2 m_a + b^2 m_b + c^2 m_c)$

$\ge (a+b+c).4\, m_a m_b m_c \qquad (11)$

BĐT (11) chính là điều cần chứng minh trong bài T9/282 THTT tháng 4 năm 2001 của thầy Nguyễn Minh Hà : *Các trung tuyến AM, BN, CP cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần nữa tại A', B', C' tương ứng. Ta cần chứng minh :*



Hình 2

$A'B' + B'C' + C'A' \ge AB + BC + CA.$

Thật vậy (h.2) ta có $\Delta AGB \backsim \Delta BGA'$

$$\Rightarrow \frac{B'A'}{BA} = \frac{B'G}{AG}.$$

Tính được $AG = \frac{2}{3}m_a$, $B'G = \frac{1}{3}m_b + \frac{b^2}{4m_b}$

$$= \frac{4m_b^2 + 3b^2}{12m_b} = \frac{a^2+b^2+c^2}{6m_b}$$

$$\Rightarrow B'A' = c.\frac{a^2+b^2+c^2}{6m_b.\frac{2}{3}m_a} = \frac{c(a^2+b^2+c^2)}{4m_a m_b}$$

Từ đó suy ra :

$A'B' + B'C' + C'A' \ge AB + BC + CA$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^2+b^2+c^2)}{4m_a m_b m_c}(am_a + bm_b + cm_c) \ge a+b+c$$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)(a\,m_a + b\,m_b + c\,m_c) \ge$

$\ge (a+b+c).4\, m_a m_b m_c$.

Theo trên BĐT (11) đúng, đó là điều phải chứng minh của bài T9/282.

• Áp dụng BĐT (9) : $a^2 m_a + b^2 m_b + c^2 m_c \ge$ $\ge 4m_a m_b m_c$ cho tam giác PQC (với $CQ = BN$, $CQ // BN$ (h.2) ta được :

$$am_a^2 + bm_b^2 + cm_c^2 \ge \frac{9}{4}abc$$

$\Rightarrow a(2b^2 + 2c^2 - a^2) + b(2a^2 + 2c^2 - b^2) + c(2a^2 + 2b^2 - c^2) \ge 9abc$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 9abc \le 2(ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + bc^2 + b^2c)$

$\Rightarrow 3(a^3 + b^3 + c^3) + 9abc \le 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

Tóm lại :

Tam giác có 3 cạnh là a, b, c và 3 trung tuyến tương ứng là m_a, m_b, m_c ta có các bất đẳng thức sau :

(C1) $abm_c + bcm_a + cam_b \ge$

$\ge a^2 m_a + b^2 m_b + c^2 m_c \ge 4m_a m_b m_c$

(C2) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \ge \dfrac{4m_a m_b m_c}{am_a + bm_b + cm_c}$

(C3) $3(a^3+b^3+c^3) + 9abc \le 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

Bài tập. Chứng minh rằng trong tam giác có 3 góc nhọn với các cạnh a, b, c có bất đẳng thức :

$a^4(a-b)(a-c) + b^4(b-a)(b-c) +$

$+ c^4(c-a)(c-b) \le$

$\le a^2b^2(a-b)^2 + b^2c^2(b-c)^2 + c^2a^2(c-a)^2$

Kết quả

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỶ

Rất nhiều bạn đoán đúng người trong ảnh là Nhà giáo nhân dân Phạm Ngọc Quang, Hiệu trưởng trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa. Nhưng chỉ có 10 bạn đoán đúng : ảnh thầy Quang chụp khi 50 tuổi. Chân dung này do TH&TT chụp khi vừa tặng hoa chúc mừng trường Lam Sơn có nhiều giải cao trong kì thi học sinh giỏi toàn quốc. (ảnh chụp này 1.6.2001). Rất tiếc nhiều học sinh trường Lam Sơn vẫn nhìn ảnh mà đoán sai tuổi, chắc là thầy trẻ hơn nhiều so với tuổi. Xin trao tặng phẩm cho các bạn không ở trường Lam Sơn :

1) *Ngô Ngọc Khiêm*, 10A9, THPT Bình Sơn, Quảng Ngãi.

2) *Nguyễn Văn Bằng*, thôn Bái Thượng, Nghĩa An, Nam Trực, Nam Định.

3) *Phạm Hoàng Cơ*, xóm Long Bàn, An Lộc, Bình Trị, Bình Sơn, Quảng Ngãi.

4) *Bùi Thái Hoàng*, đường phố II, Thạch Phú, Tx. Hà Tĩnh (039855200).

5) *Lê Trần Hoàn*, 11B, THPT Thống Nhất, Yên Định, Thanh Hóa.

6) *Nguyễn Trung Kiên*, 9B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn, Thanh Hóa (số nhà 97, tiểu khu Ba Đình, Nga Sơn).

7) *Phương Thảo*, số nhà 67/7, phố Nam Cao, phường Phú Sơn, Thanh Hóa.

Xin mời các bạn tiếp tục tham dự cuộc thi. Cảm ơn.

CLB

Kết quả : HAI CÁCH ĐÚNG CẢ HAY SAO ?

Ai cũng thấy cách 2 là có vấn đề ! Bác sĩ Nguyễn Văn Thắng, 10T, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi đã ghi đơn : "có một khối u lớn, hết đường cứu chữa !". Sai lầm ở chỗ :

Từ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \Rightarrow u_n \geq v_n$ $(\forall n \geq 2)$. Nên nhớ rằng chỉ có định lí "Nếu $u_n \leq v_n$ với $\forall n \in N^*$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$" mà thôi. Nhiều bạn đã cho phản thí dụ để chứng tỏ chiều ngược lại của định lí này là không đúng. Chẳng hạn, bạn Hải Yến, THPT chuyên Thái Bình đưa ra $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ với $u_n = 2-\dfrac{1}{n}$; $v_n = 1+\dfrac{10}{n}$ có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2 > \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ nhưng $u_n < v_n$ với $n < 9$.

Các bạn sau đây tham gia "hội chẩn" tốt : *Nguyễn Đức Duy*, 8B, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh** ; *Nguyễn Thị Tuyết Nga*, THPT Đào Duy Từ, **Thanh Hóa**; *Nguyễn An Huy*, 11D1, THPT Chu Văn An, **Hà Nội**

KIHIVI

VỀ MỘT BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI

Vẫn biết là có những bài toán, bắt đầu từ một giả định nào đó (giả định này thậm chí có thể không thể xảy ra), bằng suy luận hợp lí ta có thể dẫn đến một kết quả lí thú nào đó.Chẳng hạn "Giả sử rằng $a^2 + a + 1 = 0$, tính giá trị biểu thức $a^{1945} + \dfrac{1}{a^{1945}}$". Trong bài toán này không có $a \in \mathbf{R}$ để xảy ra điều có trong giả thiết, nhưng nếu điều đó xảy ra thì tính được giá trị của biểu thức trong kết luận. Sau đây là một bài toán tương tự :

Chứng tỏ rằng nếu ta có :

$$\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}$$

thì suy ra được :

$$\frac{a^2-bc}{x}=\frac{b^2-ca}{y}=\frac{c^2-ab}{z}$$

(Bài 2. Đề thi HSG cấp II miền Bắc 1971–1972)

Bây giờ xin nêu lại hai lời giải của bài toán trong các sách :

Cách 1.

Đặt $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}=k$

Suy ra : $a=\dfrac{x^2-yz}{k}$; $b=\dfrac{y^2-zx}{k}$; $c=\dfrac{z^2-xy}{k}$

Dẫn đến :

$$\frac{a^2-bc}{x}=\frac{\left(\dfrac{x-yz}{k}\right)^2-\dfrac{y^2-zx}{k}\,\dfrac{z^2-xy}{k}}{x}=$$

$$=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{k^2}$$

Tương tự ta có :

$$\frac{b^2-ca}{y}=\frac{c^2-ab}{z}=\frac{x^3+y^3-3xyz}{k^2}$$

Từ đó dẫn đến điều phải chứng minh.

Cách II. Từ giả thiết có :

$$\frac{a}{x^2-yz}=\frac{b}{y^2-zx}=\frac{c}{z^2-xy}$$

Suy ra :

$$\frac{a^2}{(x^2-yz)^2}=\frac{b^2}{(y^2-zx)^2}=\frac{c^2}{(z^2-xy)^2}=$$

$$=\frac{ab}{(x^2-yz)(y^2-zx)}=\frac{bc}{(y^2-zx)(z^2-xy)}=$$

$$=\frac{ac}{(x^2-yz)(z^2-xy)} \text{ nên}$$

$$\frac{a^2-bc}{(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)}$$

$$=\frac{b^2-ac}{(y^2-zx)^2-(x^2-yz)(z^2-xy)}$$

$$=\frac{c^2-ab}{(z^2-xy)^2-(x^2-yz)(y^2-zx)}$$

Suy ra :

$$\frac{a^2-bc}{x(x^3+y^3+z^3-3xyz)}=\frac{b^2-ac}{y(x^3+y^3+z^3-3xyz)}$$

$$=\frac{c^2-ab}{z(x^3+y^3+z^3-3xyz)}$$

Nhân cả 3 vế với $(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ ta có điều cần chứng minh ■

Nhưng chỉ cần cho x = y = z = 3 và a = 1, b = 2, c = 3 chẳng hạn thì giả thiết :

$$\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}$$

vẫn xảy ra mà ở kết luận :

$$\frac{a^2-bc}{x}=-\frac{5}{3};\ \frac{b^2-ca}{y}=\frac{1}{3};\ \frac{c^2-ab}{z}=\frac{7}{3}$$

là những phân số khác nhau.

Nào ! Các bạn có ý kiến gì về đề bài và các lời giải trên ?

HOÀNG HÙNG
(GV THCS Chu Văn An, Hải Phòng)

Kết quả

CÓ AI ĐƯỢC 10 TỈ ĐỒNG ?

"Ông ta" chắc phải có trình độ toán như chúng ta mới dám treo giải 10 tỉ đồng. Bởi chúng ta thừa biết : Chẳng có ai tìm được một số có 7 chữ số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ sao cho

$$\begin{array}{r} \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7} \\ + \ \overline{a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1} \\ \hline \overline{b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7} \end{array}$$

mà $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$ là các chữ số lẻ. Thật vậy : Giả sử $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$ là các chữ số lẻ thì $a_1+a_7<10 \Rightarrow a_1+a_7=b_7$ và a_2+a_6 là số lẻ vì có chữ số tận cùng là b_6.

Trường hợp 1 : a_2+a_6 là số lẻ không nhỏ hơn 10 thì $a_1+a_7+1=b_1 \Rightarrow b_7+1=b_1$, vô lí khi b_1 và b_7 cùng lẻ.

Trường hợp 2: a_2+a_6 là số lẻ nhỏ hơn 10 thì $a_2+a_6=b_6$ và a_3+a_5 là số lẻ vì tận cùng bởi b_5 lẻ.

1) Nếu a_3+a_5 là số lẻ không nhỏ hơn 10 thì $a_2+a_6+1=b_2 \Rightarrow b_6+1=b_2$, vô lí khi b_6 và b_2 cùng lẻ.

2) Nếu a_3+a_5 là số lẻ nhỏ hơn 10 thì a_4+a_4 tận cùng là b_4 mà b_4 là số lẻ nên vô lí.

Tóm lại : ông ta không mất 10 tỉ đồng.

Nhận xét. Nhiều bạn làm quá phức tạp. Ngược lại, nhiều bạn làm "quá tắt" nên chưa thật chặt chẽ.

NGỌC MAI

ANH EM SINH ĐÔI

Ở thành phố kia có một cặp sinh đôi rất đặc biệt. Tên hai bạn là Trí và Dũng. Có một điều rất lạ là Trí không có khả năng nói đúng vào những ngày thứ hai, thứ ba và thứ tư còn những ngày khác nói đúng. Dũng nói sai vào những ngày thứ ba, thứ năm và thứ bảy còn những ngày khác nói đúng.

Một lần bạn Toàn gặp hai bạn Trí, Dũng và hỏi một trong hai người :

– Bạn hãy cho biết trong hai bạn, bạn là ai ?

– Tôi là Trí

– Bạn hãy nói thêm, hôm nay thứ mấy ?

– Hôm qua chủ nhật.

Bạn kia bỗng nói xen vào

– Ngày mai là thứ sáu

Toàn sững sờ ngạc nhiên. Sao kì vậy ? Và quay sang bạn đó : Bạn cam đoan là bạn nói thật chứ ?

Ngày thứ tư tôi luôn nói thật, bạn ấy trả lời

Hai bạn đã làm Toàn lúng túng, nhưng sau một hồi suy nghĩ, Toàn đã xác định được ai là Trí, ai là Dũng và còn biết được ngày hôm đó là thứ mấy ?

Còn các bạn có biết được như Toàn không ?

NGUYỄN VĂN HIỂN *(Hungari)*

TRƯỜNG THCS TRẦN ĐĂNG NINH MỘT TRƯỜNG TIÊU BIỂU CỦA NAM ĐỊNH

Nhà giáo ưu tú
LƯƠNG QUÝ PHÁI
Hiệu trưởng nhà trường

Trường THCS Trần Đăng Ninh là lá cờ đầu của bậc học THCS tỉnh Nam Định. Trường đang được đề nghị tặng thưởng Huân chương Độc lập hạng Ba. Nhân dịp này xin giới thiệu các thành tích của trường trong 5 năm gần đây.

Từ năm 1996 đến 2001 trường liên tục đạt danh hiệu trường tiên tiến xuất sắc của tỉnh Nam Định ; liên tục được nhận bằng khen và cờ thưởng của UBND tỉnh. Năm 1996 trường vinh dự được nhận Huân chương Lao động hạng Nhất do Hội đồng Nhà nước tặng.

Năm học 1999-2000 trường được Thủ tướng Chính phủ tặng cờ Đơn vị dẫn đầu phong trào thi đua toàn quốc năm 1999 ; được nhận cờ Đơn vị xuất sắc do Công đoàn giáo dục Việt Nam tặng. Liên đội thiếu niên tiền phong Hồ Chí Minh được nhận bằng khen Liên đội xuất sắc của Trung ương Đoàn tặng ; UBND tỉnh Nam Định tặng bằng công nhận trường đạt chuẩn văn hóa của tỉnh Nam Định ; UBND thành phố Nam Định công nhận là đơn vị tiêu biểu hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ trong thời kì đổi mới 1991-2000.

Trong 5 năm qua :

107 học sinh đoạt giải thi học sinh giỏi quốc gia,

79 học sinh đoạt giải hóa học Ôstralia,

1796 học sinh đoạt giải học sinh giỏi của tỉnh,

32 huy chương vàng, huy chương bạc, huy chương đồng về điền kinh, cờ vua, bóng bàn, cầu lông.

Trường là nền móng cho việc đào tạo bồi dưỡng học sinh giỏi của tỉnh Nam Định, là nơi tạo nguồn quan trọng cho trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định. Học sinh của trường chăm, ngoan, học giỏi, hiếu thảo, nhân ái, không mắc tệ nạn xã hội, không vi phạm pháp luật.

Đội ngũ giáo viên nhà trường vững về chính trị, giỏi chuyên môn nghiệp vụ, tâm huyết, đoàn kết xây dựng tập thể vững mạnh, giúp nhau cùng vươn tới, hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ. Hàng năm 100% cán bộ giáo viên đạt lao động giỏi, có từ 45 đến 60 người đạt danh hiệu CSTĐ và giáo viên giỏi các cấp chiếm từ 56% đến 75% cán bộ giáo viên nhà trường. Đã có 1 giáo viên được thưởng Huân chương Lao động hạng Ba, 2 chiến sĩ thi đua và 1 giáo viên giỏi cấp quốc gia, 146 giáo viên giỏi, CSTĐ từ cấp cơ sở đến cấp ngành, tỉnh. Hàng năm có từ 5 đến 7 sáng kiến kinh nghiệm được xếp loại A của tỉnh và thành phố, 6 giáo viên hội giảng đạt loại giỏi và xếp nhất nhì tỉnh Nam Định (1998-2000), 7 giáo viên được nhận bằng khen của Bộ Giáo dục và Thủ tướng Chính phủ.

Trong 5 năm qua, trường THCS Trần Đăng Ninh đã hoàn thành xuất sắc nhiệm được giao, xứng đáng là đơn vị tiêu biểu của khối THCS trong tỉnh và trong cả nước..

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT92M1

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, ngõ 187 phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2001

Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng