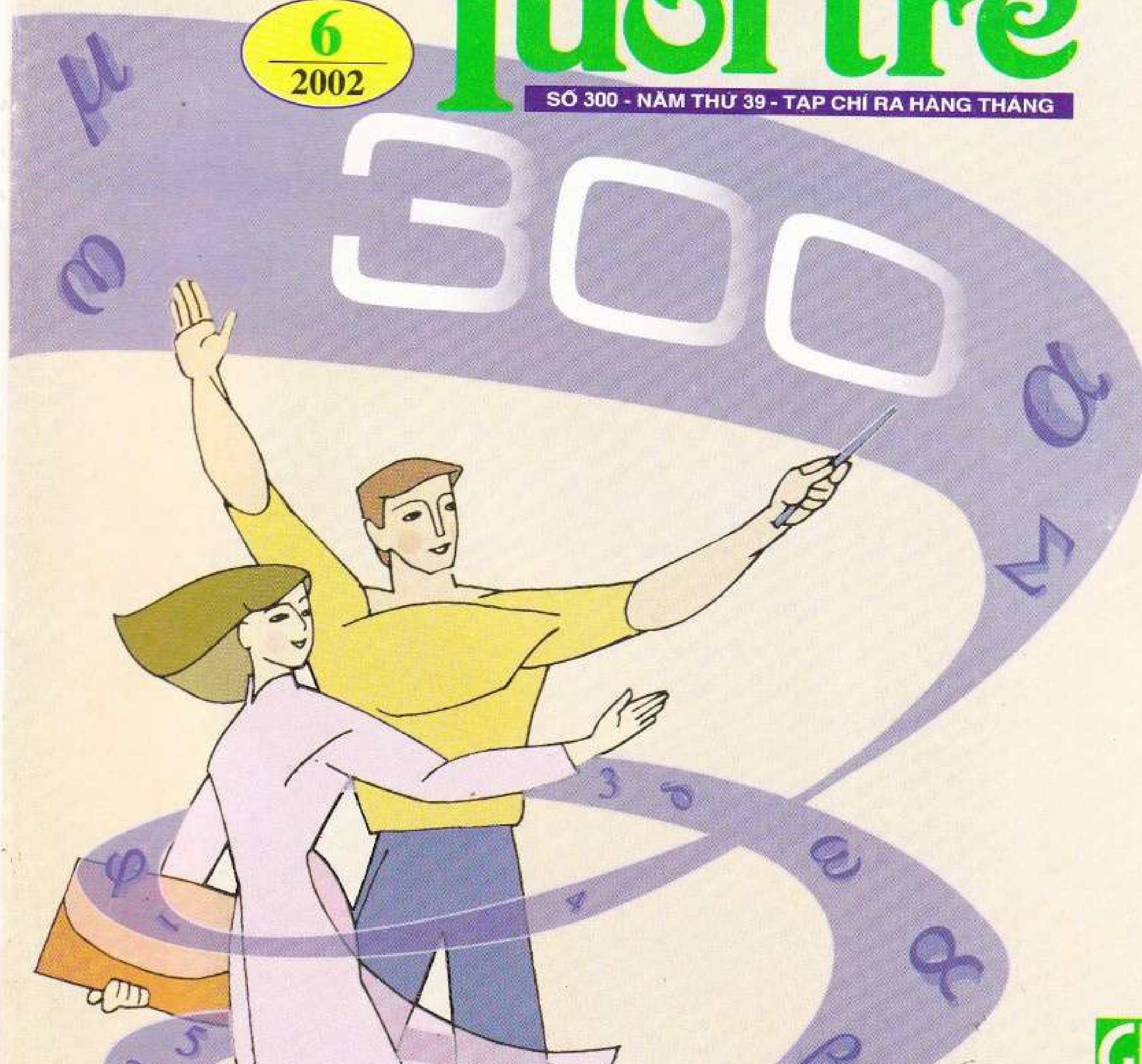
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

6
2002

SỐ 300 - NĂM THỨ 39 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG



1/6/1957
1/6/2002

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

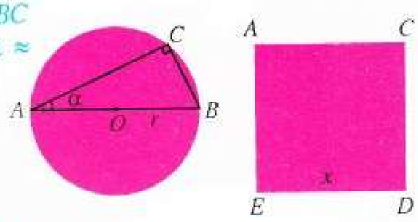
TOÁN HỌC MUÔN MÀU

BÀI TOÁN CẦU PHƯƠNG HÌNH TRÒN

Phép cầu phương hình tròn là dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn đã cho (h.1). Từ $S_t = \pi r^2$ và $S_v = x^2$ suy ra $x = \sqrt{\pi}\, r \approx 1{,}772454r$ và $r = \dfrac{x}{\sqrt{\pi}} \approx 0{,}564190x$. Bằng thước và compa thì không thể dựng hình như thế vì π là số siêu việt.

Có thể giải gần đúng như sau. Từ thời cổ Hy Lạp đã biết $x \approx 16r/9 \approx 1{,}777r$ với sai số $\Delta x = 0{,}006r$.

Kĩ sư người Nga Bing năm 1836 đã làm thước tam giác vuông ABC (h.1) có $\mathrm{tg}\alpha = BC/AC = 23/44 \Rightarrow \alpha \approx 27°36' \Rightarrow AC = AB\cos\alpha \approx 1{,}772451r$ với sai số $\Delta x = 0{,}000004r$.



$S_t = S_v$

Hình 1

DÀNH CHO BẠN ĐỌC. Sử dụng thước và compa hãy dựng :

- Hình vuông có $S_v \approx S_t$ với r cho trước.
- Hình tròn có $S_t \approx S_v$ với x cho trước.

Tặng phẩm đang chờ bạn nào có cách dựng ít thao tác với sai số nhỏ.

Giải đáp : GẤP GIẤY ĐỂ TẠO ĐA GIÁC ĐỀU

Mỗi thao tác gấp giấy được kí hiệu $AB \xrightarrow{d} A'B'$, nghĩa là gấp giấy theo đường thẳng d để A trùng với A' và B trùng với B'.

Các quy tắc gấp giấy : (1) Biết AB và d thì xác định được $A'B'$.

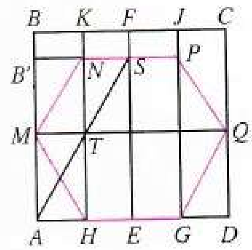
(2) Biết A và A' (phân biệt) thì xác định được d.

(3) Biết A, biết D (sẽ thuộc d) và đường thẳng a' (sẽ chứa A') thì xác định được A' và d khi a' có điểm chung A' với đường tròn tâm D bán kính DA và $d \perp AA'$.

Gấp giấy tạo lục giác đều có 4 đỉnh thuộc các cạnh hình vuông ABCD.

Trường hợp 1. *Cách 1.* (h. 2). (1) $AB \xrightarrow{EF} DC$ có EF; (2) $AB \xrightarrow{HK} EF$ có HK (3) $DC \xrightarrow{GJ} EF$ có GJ ; (4) $HG \xrightarrow{HP} HM$ có M, P (5) $GH \xrightarrow{GN} GQ$ có Q, N

Ta có $HM = HG = 2AH \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{DGQ} = 60° = \widehat{MHP} = \widehat{PHG}$ suy ra $HMNPQG$ là lục giác đều.



Hình 2

Cách 2. (h. 2) Thực hiện (1) (2) (3) như cách 1, sau đó :

(4') $AB \to AS$ có $S \in EF$; (5') $B \xrightarrow{NS} B'$ có N, S, P ; (6') $NP \xrightarrow{MQ} HG$ có M, Q

Ta có $AB = AS = 2AT = AD = SD$ suy ra $HMNPQG$ là lục giác đều.

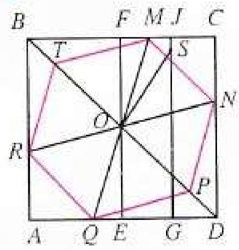
Trường hợp 2. (h. 3)

(1) $A \xrightarrow{BD} C$ có BD ; (2) $AB \xrightarrow{EF} DC$ có EF và O

(3) $DC \xrightarrow{GJ} EF$ có GJ ; (4) $OF \xrightarrow{QM} OS$ có QM với $S \in GJ$

(5) $QM \xrightarrow{BD} NR$ có N, R ; (6) $RN \xrightarrow{QM} PT$ có P, T

Từ OMN là tam giác đều suy ra $MNPQRT$ là lục giác đều.



Hình 3

Gấp giấy tạo ngũ giác đều có 4 đỉnh thuộc các cạnh hình vuông ABCD.

Trường hợp 1. (h. 4)

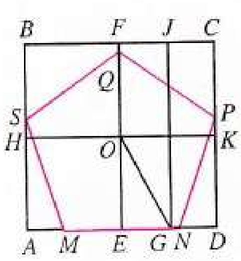
(1) $AB \xrightarrow{EF} DC$ có EF ; (2) $AD \xrightarrow{HK} BC$ có HK và O (3) $DC \xrightarrow{GJ} EF$ có GJ ;

(4) $GO \to GM$ có $M \in AD$. (5) $M \xrightarrow{EF} N$ có $N \in AD$; (6) $MN \to MS$ có $S \in AB$

(7) $NMS \to NPQ$ có $P \in CD$, $Q \in EF$

Đặt $AB=AD=a$ thì $GM=GO= a\sqrt{5}/4 \Rightarrow MS=MN = 2ME = a(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0{,}6180a$

$\Rightarrow AM = AE - ME = a(3-\sqrt{5})/4$.



Hình 4

(Xem tiếp bìa 3)

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

FIBONACCI VÀ SỐ ĐỒNG DƯ

HOÀNG CHÚNG

Phi–bô–na–xi (Fibonacci) (1180 – 1250) là nhà toán học Ý. Năm 22 tuổi, ông cho công bố một tài liệu, trong đó có "*bài toán về đàn thỏ*", đưa đến dãy số 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., đó là dãy số *Fibonacci* rất nổi tiếng.

Năm 27 tuổi, *Fibonacci* tham gia một cuộc thi tài về giải toán, do vua Phê–đê–ric II (Frederic II) tổ chức, và đã thắng một cách dễ dàng. Một trong các bài toán đặt ra là :

Tìm số hữu tỉ sao cho $x^2 \pm 5$ đều là bình phương của một số hữu tỉ.

Fibonacci đã cho đáp số đúng : $x = \dfrac{41}{12}$.

Không rõ *Fibonacci* đã tìm ra số đó bằng cách nào, có người đoán lời giải như sau. Giả sử $x^2 + 5 = u^2, x^2 - 5 = v^2$. Thế thì $u^2 - v^2 = 10$. Mà $10 = \dfrac{80.18}{12^2}$, nên $(u+v)(u-v) = \dfrac{80.18}{12^2}$.

Do đó, có thể chọn $u + v = \dfrac{80}{12}$ và $u - v = \dfrac{18}{12}$. Suy ra $u = \dfrac{49}{12}$ và có $x = \dfrac{41}{12}$. Nếu quả *Fibonacci* đã giải như trên thì thật là tài tình, vì trong thời gian ngắn đã nghĩ ra được rằng $10 = \dfrac{80.18}{12^2}$! Nhưng cũng thật khó học tập được gì qua lời giải đó, ngoài sự thán phục !

Có thể mở rộng bài trên nhờ một đẳng thức của Đi–ô–phăng (Diophante) từ gần 1000 năm trước *Fibonacci*.

Ta gọi *số nguyên dương d là một số đồng dư, nếu có số hữu tỉ x sao cho $x^2 \pm d$ đều là bình phương của một số hữu tỉ.*

Ví dụ : 5 là một số đồng dư.

Định lí 1. *Nếu d và y^2 là các số nguyên dương, thì d là số đồng dư khi và chỉ khi dy^2 là số đồng dư.*

Thực vậy, $x^2 + dy^2 = A^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + d = \left(\dfrac{A}{y}\right)^2$ và $x^2 - dy^2 = B^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - d = \left(\dfrac{B}{y}\right)^2$

Diophante (thế kỉ thứ 3) đã nhận xét rằng, trong một tam giác vuông có cạnh huyền c và hai cạnh góc vuông a, b, ta có :

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 \pm \frac{ab}{2} = \left(\frac{b \pm a}{2}\right)^2$$

($\dfrac{ab}{2}$ là diện tích của tam giác vuông).

Một tam giác vuông có ba cạnh a, b, c đều là số nguyên (c là cạnh huyền) được gọi là một tam giác Pi–ta–go và bộ ba số (a, b, c) được gọi là một bộ ba Pi–ta–go. Chú ý rằng, trong hai số a, b (cạnh góc vuông) luôn có ít nhất một số chẵn. Ta có :

Định lí 2. *Nếu có bộ ba Pi–ta–go (a, b, c) thì $\dfrac{ab}{2}$ là một số đồng dư. Hơn nữa, nếu $\dfrac{ab}{2} = dy^2$ thì d là số đồng dư.*

Bộ ba Pi–ta–go (a, b, c) được xác định bởi $a = p^2 - q^2$; $b = 2pq$ và $c = p^2 + q^2$ (*) (bạn đọc tự giải khi đặt $\dfrac{c+a}{b} = \dfrac{b}{c-a}$ bằng $\dfrac{p}{q}$) trong đó p, q là hai số nguyên tố cùng nhau và chẵn lẻ khác nhau (a, b có thể đổi chỗ cho nhau). Nếu (a, b, c) là một bộ ba Pi–ta–go , thì (ka, kb, kc) cũng là một bộ ba *Pi–ta–go*, với k là số nguyên dương bất kì.

Cho (p, q) một số giá trị, chẳng hạn (2, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 4) ... ta có một số bộ ba Pi-ta-go (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (21, 20, 29), (9, 40, 41), ...

Từ bộ (3, 4, 5), có 3.2 = 6 là số đồng dư :

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 \pm 6 = \left(\frac{4 \pm 3}{2}\right)^2$$

Từ bộ (5, 12, 13), có 5.6 = 30 là số đồng dư.

Từ (8, 15, 17) có 15.4 = 60 là số đồng dư. Ngoài ra $15.4 = 15.2^2$, nên 15 là số đồng dư :

$$\left(\frac{17}{4}\right)^2 \pm 15 = \left(\frac{15 \pm 8}{4}\right)^2$$

Từ bộ (9, 40, 41) có $9.20 = 3^2.2^2.5 = 5.6^2$ là số đồng dư, do đó 5 là số đồng dư

$$\left(\frac{41}{2.6}\right)^2 \pm 5 = \left(\frac{40 \pm 9}{2.6}\right)^2$$

Có thể chứng minh được **định lí đảo của định lí 1 :**

Nếu d là một đồng dư thì tồn tại một tam giác Pi–ta–go có diện tích dy^2, với y là một số nguyên nào đó.

Như vậy, ta có *điều kiện cần và đủ để một số d cho trước là đồng dư.* Tuy nhiên, việc sử dụng tiêu chuẩn này nói chung là rất khó khăn. Để thấy điều này, bạn chỉ cần xét xem trong các số 1, 2, 3, 4, 14, 21, số nào là số đồng dư, số nào không.

Fibonacci đã chứng minh rằng :

Mọi số có dạng

$mn(m+n)(m-n)$ nếu $m+n$ chẵn,

$4mn(m+n)(m-n)$ nếu $m+n$ lẻ,

đều là số đồng dư

Thực ra, kết quả này có thể suy dễ dàng từ các đẳng thức (*) xác định các bộ ba Pi–ta–go và các định lí 1, 2 ở trên :

Mọi số có dạng $mn(m+n)(m-n)$ với m, n nguyên dương và $m \neq n$, đều là số đồng dư.

Đẳng thức của Diophante sẽ được viết dưới dạng :

$$\left(\frac{m^2+n^2}{2}\right)^2 \pm mn(m^2-n^2) = \left(\frac{m^2-n^2 \pm 2mn}{2}\right)^2$$

Năm 1983, nhà toán học *J. B. Tunnell* đã chứng minh một điều kiện cần khác để một số *d* là đồng dư :

Nếu d là một số đồng dư lẻ thì số cách viết d dưới dạng $2x^2 + y^2 + 8z^2$ trong đó x, y, z là số nguyên và z là số lẻ, bằng số cách viết d dưới dạng đó với z là số chẵn.

Ví dụ : Xét số 19. Có thể viết 19 dưới dạng trên theo 8 cách khác nhau với *z* lẻ

$$2(\pm1)^2 + (\pm3)^2 + 8(\pm1)^2,$$

còn với *z* chẵn thì chỉ viết được theo 4 cách khác nhau :

$$2(\pm3)^2 + (\pm1)^2 + 8(0)^2,$$

do đó 19 không phải là số đồng dư.

Định lí đảo của định lí Tunnell chưa được chứng minh hay bác bỏ (1994).

Nhờ các bạn giải tiếp các bài toán sau đây:

1) Chứng minh định lí đảo của định lí 2.

2) Trong các số 11, 14, 17, 21, số nào là số đồng dư, số nào không ?

3) Chứng minh rằng một số chính phương không thể là số đồng dư./.

SÁCH TOÁN 6

(theo chương trình Toán THCS năm 2002)

TRẦN PHƯƠNG DUNG

SGK Toán 6 tập 1 gồm 3 chương: Số tự nhiên ; Số nguyên ; Đoạn thẳng.

SGK Toán 6 tập 2 gồm 2 chương : Phân số ; Góc.

So với chương trình và SGK Toán 6 từ năm 2001 trở về trước, SGK Toán 6 năm 2002 có những nét mới như sau :

1) Chương Số nguyên trước đây dạy ở lớp 7 nay đưa vào lớp 6.

2) Xét cả phân số dương và phân số âm.

Như vậy, về mặt nội dung, SGK Toán 6 năm 2002 có nhiều hơn sách cũ. Tuy nhiên, các chương đại số được viết nhẹ nhàng hơn. Các phép toán về số tự nhiên và phân số dương được đặt vấn đề như bài tổng kết ; các quy tắc phép toán được phát biểu thành lời, tránh đưa ra các công thức tổng quát khó hiểu ; phép toán với phân số nói chung được xét trên cơ sở phép toán của số nguyên, chưa xét đến số hữu tỉ. Hai chương hình học không giới thiệu bằng phương pháp tiên đề mà được tiếp cận bằng các hoạt động hình học như vẽ hình, gấp hình, đo đạc... ; các khái niệm được giới thiệu thông qua mô tả, hình vẽ, tránh đưa ra những định nghĩa tổng quát. Đặc biệt, các bài tập trong SGK Toán 6 năm 2002 là những bài tập cơ bản, những bài tập mang nội dung thực tế và những bài đố vui.

Về hình thức thể hiện, trong từng bài đều có những câu hỏi "giữa chừng" để tăng cường hoạt động tự học của học sinh trong việc nắm bắt kiến thức. Sách có nhiều hình vẽ, có cả những hình vẽ vui mắt, ngộ nghĩnh giúp cho việc học của học sinh được trực giác và đôi khi được thư giãn ngay trong giờ học. Sách còn có mục "Có thể em chưa biết" nhằm giới thiệu lịch sử Toán, các kiến thức liên quan để mở rộng kiến thức một cách nhẹ nhàng.

Có thể nói SGK Toán 6 tập 1, tập 2 là những cuốn SGK hấp dẫn đối với học sinh bước đầu vào cấp THCS, đồng thời cũng giúp các giáo viên tổ chức hoạt động học tập tốt hơn.

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRƯỜNG THPT NĂNG KHIẾU ĐHQG TP. HỒ CHÍ MINH
NĂM 2001

VÒNG 1 : MÔN TOÁN AB

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1. a) Giải bất phương trình

$$\sqrt{x+1} > 2x - 1$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{2} \\ y + \dfrac{1}{x} = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Bài 2. Cho a, b, c là các số thực phân biệt sao cho các phương trình $x^2 + ax + 1 = 0$ và $x^2 + bx + c = 0$ có nghiệm chung, đồng thời các phương trình $x^2 + x + a = 0$ và $x^2 + cx + b = 0$ cũng có nghiệm chung. Hãy tìm tổng $a + b + c$.

Bài 3. a) Trên các cạnh AB và CD của hình vuông $ABCD$ lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = CN = \dfrac{AB}{3}$. Gọi K là giao điểm của AN và DM. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác ADK nằm trên cạnh BC.

b) Cho hình vuông $ABCD$ với giao điểm hai đường chéo là O. Một đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại O. Lấy một điểm S trên d. Chứng minh rằng $(AC) \perp (SBD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

Bài 4. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có AB vuông góc với CD và $AB = 2$, $BC = 13$, $CD = 8$, $DA = 5$.

a) Đường (BA) cắt đường (DC) tại E. Hãy tính AE.

b) Tính diện tích của tứ giác $ABCD$.

Bài 5. Trong một giải cờ Vua có 8 kì thủ tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt, thắng được 1 điểm, hòa được 1/2 điểm, thua được 0 điểm. Biết rằng sau khi tất cả các trận đấu kết thúc thì cả 8 kì thủ nhận được các số điểm khác nhau và kì thủ xếp thứ hai có số điểm bằng tổng điểm của 4 kì thủ xếp xuối cùng. Hỏi ván đấu giữa kì thủ xếp thứ tư và kì thủ xếp thứ năm đã kết thúc với kết quả như thế nào?

VÒNG 2 : MÔN TOÁN CHUYÊN

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 6. a) Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho a chia hết cho 6 và $2000a$ là số chính phương.

b) Tìm số nguyên dương b nhỏ nhất sao cho $(b-1)$ không là bội của 9, b là bội của bốn số nguyên tố liên tiếp và $2002b$ là số chính phương.

Bài 7. Cho x, y là các số thực sao cho $x + \dfrac{1}{y}$ và $y + \dfrac{1}{x}$ đều là các số nguyên.

a) Chứng minh $x^2y^2 + \dfrac{1}{x^2y^2}$ là số nguyên

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $x^ny^n + \dfrac{1}{x^ny^n}$ là số nguyên.

Bài 8. a) Cho a, b là các số dương thỏa $ab = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (a+b+1)(a^2+b^2) + \dfrac{4}{a+b}$

b) Cho m, n là các số nguyên thỏa $\dfrac{1}{2m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của $B = m.n$.

Bài 9. Cho 2 đường tròn C_1 (O_1, R_1) và C_2 (O_2, R_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm A. Hai điểm B, C lần lượt di động trên C_1, C_2 sao cho góc $BAC = 90^o$.

a) Chứng minh trung điểm của M của BC luôn thuộc một đường tròn cố định.

b) Hạ AH vuông góc với BC, tìm tập hợp các điểm H. Chứng minh rằng độ dài đoạn AH không lớn hơn $\dfrac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}$

c) Phát biểu và chứng minh các kết quả tương tự như câu a) và câu b) trong trường hợp C_1 và C_2 tiếp xúc trong với nhau tại điểm A.

Bài 10. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5} \\ x + y + x^2 + y^2 = 80 \end{cases}$$

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

ỨNG DỤNG TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA ĐỒ THỊ HÀM BẬC BỐN VÀO GIẢI TOÁN

NGUYỄN QUANG MINH – ĐỖ BÁ CHỦ
(GV THPT Đông Hưng Hà, Hưng Hà, Thái Bình)

LTS : *Trên tạp chí THTT số 250 (4/1998) đã đăng bài "Một phương pháp giải một số phương trình bậc bốn" của tác giả Trần Xuân Bang (Quảng Bình). Gần đây chúng tôi nhận được bài viết với nội dung phong phú hơn. Xin giới thiệu cùng bạn đọc.*

Tìm trục đối xứng của đồ thị hàm bậc bốn là câu hỏi thường gặp trong các bài toán về hàm bậc bốn. Ngoài ra sử dụng tính chất này còn giải được nhiều bài toán lí thú khác về hàm bậc bốn.

I. Xét hàm bậc bốn

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \ (a \neq 0) \qquad (1)$$

Gọi $f(x)$ là vế phải của (1). Dễ thấy rằng : đồ thị (C) của hàm số bậc bốn $y = f(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng khi và chỉ khi $f(x)$ là một hàm chẵn ($b = d = 0$). Ta tìm điều kiện để hàm số bậc bốn trên nhận đường thẳng $x = \alpha$ làm trục đối xứng.

Mệnh đề 1: Đồ thị (C) của hàm số bậc bốn $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = \alpha$ làm trục đối xứng khi và chỉ khi $\begin{cases} f'(\alpha) = 0 \\ f'''(\alpha) = 0 \end{cases}$ (*)

Chứng minh: Tịnh tiến hệ trục Oxy sang hệ trục TXY theo vectơ $\overrightarrow{OT}$, với $T(\alpha, 0)$. Công thức đổi trục là $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y \end{cases}$

Hàm $y = f(x)$ trở thành

$$Y = a(X+\alpha)^4 + b(X+\alpha)^3 + c(X+\alpha)^2 + d(X+\alpha) + e$$
$$= aX^4 + (4a\alpha + b)X^3 + (6a\alpha^2 + 3b\alpha + c)X^2 + (4a\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 2c\alpha + d)X + (a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + d\alpha + e)$$

Từ đó suy ra đồ thị hàm $Y = g(X)$ nhận đường thẳng $x = \alpha$ làm trục đối xứng khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 4a\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 2c\alpha + d = 0 \\ 4a\alpha + b = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(\alpha) = 0 \\ f'''(\alpha) = 0 \end{cases} \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét. a) Từ (**) ta thấy đồ thị hàm bậc bốn $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = \alpha$ làm trục đối xứng khi và chỉ khi :

$$8a^2d - 4abc + b^3 = 0 \qquad (***)$$

b) Có thể chứng minh MĐ1 nhờ Bổ đề : Điều kiện cần và đủ để hàm $y = f(x)$ (1) xác định trên **R** có trục đối xứng $x = \alpha$ là $f(x) = f(2\alpha - x)$

c) Nếu có điều kiện (***) thì hàm số bậc bốn đưa về được hàm số trùng phương bằng cách đặt ẩn phụ $t = x^2 + \dfrac{bx}{2a}$

Kết quả 1: *Từ mệnh đề 1 ta suy ra cách giải một dạng phương trình (PT) bậc bốn $f(x) = 0$ thỏa mãn điều kiện (***) như sau : Tìm nghiệm của hệ (*), nếu hệ này có nghiệm $x = \alpha$, đặt $x = X + \alpha$ thì việc giải PT bậc bốn $f(x) = 0$ chuyển về việc giải PT trùng phương*

$$aX^4 + (6a\alpha^2 + 3b\alpha + c)X^2 + f(\alpha) = 0$$

Từ đó tính được nghiệm $x = X + \alpha$ của PT $f(x) = 0$

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 1 = 0 \qquad (2)$$

Lời giải. Đặt $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 1$.

Xét hệ

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'''(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 24x^2 + 32x = 0 \\ 24x - 48 = 0 \end{cases}$$

Rõ ràng $x = 2$ là nghiệm của hệ, nghĩa là đồ thị hàm số $y = f(x)$ có trục đối xứng $x = 2$. Đặt $x = X + 2$, PT (2) trở thành

$$(X+2)^4 - 8(X+2)^3 + 16(X+2)^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow X^4 - 8X^2 + 15 = 0 \Rightarrow X_1 = -\sqrt{5}, X_2 = -\sqrt{3}, X_3 = \sqrt{3}, X_4 = \sqrt{5}$$

Vậy PT (2) có 4 nghiệm là $x_1 = 2 - \sqrt{5}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$, $x_3 = 2 + \sqrt{3}$, $x_4 = 2 + \sqrt{5}$

Ví dụ 2. Giải PT nghiệm thực

$$(x+a)^4 + (x+b)^4 = c \qquad (3)$$

Để giải bài toán này nhiều sách tham khảo đã nêu cách giải quyết như sau :

Đặt $x = X - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, thay vào (3) được PT

$$2X^4 + 3(a-b)^2X^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 - c = 0 \quad (4)$$

Vì sao chọn được ẩn phụ như thế ? chúng ta có thể giải thích như sau :

Đặt $f(x) = (x+a)^4 + (x+b)^4 - c$. Xét hệ

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'''(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+a)^3 + 4(x+b)^3 = 0 \\ 24(x+a) + 24(x+b) = 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x = -\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, từ đó dẫn đến việc giải PT (4).

II. Ta xét thêm một tính chất đặc biệt của đồ thị hàm bậc bốn có trục đối xứng

Mệnh đề 2. Nếu PT

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \; (a \neq 0) \quad (5)$$

có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có trục đối xứng trong đó $f(x)$ là vế trái của (5)

Chứng minh: Giả sử PT $f(x) = 0$ có 4 nghiệm $x_o, x_o + \gamma, x_o + 2\gamma, x_o + 3\gamma$ $(\gamma \neq 0)$ lập thành một cấp số cộng. Khi đó

$$f(x) = a(x-x_o)(x-x_o-\gamma)(x-x_o-2\gamma)(x-x_o-3\gamma)$$

Đặt $x = X + x_o + \dfrac{3\gamma}{2}$ ta được

$$f\left(X + x_o + \frac{3\gamma}{2}\right) = a\left[X^2 - \left(\frac{3\gamma}{2}\right)^2\right]\left[X^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]$$

là hàm số chẵn đối với X nên có trục đối xứng là $X = 0$. Suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = x_o + \dfrac{3\gamma}{2}$ (đpcm).

Kết quả 2. *Nếu PT bậc bốn có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì đồ thị hàm số bậc bốn có trục đối xứng. Nếu tìm được trục đối xứng $x = \alpha$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì bằng cách đặt $x = X + \alpha$ ta sẽ đưa PT bậc bốn về PT trùng phương $a_1X^4 + b_1X^2 + c_1 = 0$. Hơn nữa, PT này có 4 nghiệm $X_o, X_o + \gamma, X_o + 2\gamma, X_o + 3\gamma$ $(\gamma \neq 0)$ lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow$ PT $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $x_1 = X_o+\alpha$, $x_2 = X_o+\alpha+\gamma$, $x_3 = X_o+\alpha+2\gamma$, $x_4 = X_o + \alpha + 3\gamma$ cũng lập thành một cấp số cộng. Từ đó ta có thể giải được bài toán tìm điều kiện để PT bậc bốn có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.*

Ví dụ 3. Tìm m để PT

$$x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + (m+1)x^2 + 12\sqrt{2}x + m^3 - 8 = 0 \; (6)$$

có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

Lời giải. Giả sử PT (6) có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng, thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có trục đối xứng. Xét hệ PT

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'''(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 12\sqrt{3}x^2 + 2(m+1)x + 12\sqrt{2} = 0 \\ 24x - 24\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ m = 1 \end{cases}$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có trục đối xứng là $x = \sqrt{2}$

Với $m = 1$, PT (6) có dạng $x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 2x^2 + 12\sqrt{2}x - 7 = 0$. Đặt $x = X + \sqrt{2}$, PT trên trở thành $X^4 - 10X^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow X_1 = -3, X_2 = -1, X_3 = 1, X_4 = 3$. Bốn nghiệm này lập thành một cấp số cộng (công sai $\gamma = 2$). Do đó 4 nghiệm của PT (6) cũng lập thành một cấp số cộng $x_1 = -3+\sqrt{2}$, $x_2 = -1+\sqrt{2}$, $x_3 = 1+\sqrt{2}$, $x_4 = 3+\sqrt{2}$. Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = 2x + 3$ cắt đồ thị hàm số

$$y = x^4 + 4x^3 + (1-3m)x^2 - 2(3m+2)x + m^2 - m$$

tại 4 điểm phân biệt sao cho các khoảng cách giữa hai điểm gần nhất đều bằng nhau

Lời giải. Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm m để PT

$$x^4 + 4x^3 + (1-3m)x^2 - 6(m+1)x + m^2 - m - 3 = 0 \quad (7)$$

có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng. Gọi vế trái của (7) là $f(x)$.

Xét hệ $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'''(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{mọi } m \in R \end{cases}$

Đặt $x = X - 1$, PT (7) trở thành

$$X^4 - (3m+5)X^2 + (m+1)^2 = 0 \quad (8)$$

Đặt $t = X^2$ $(t \geq 0)$ PT (8) trở thành

$$t^2 - (3m+5)t + (m+1)^2 = 0 \quad (9)$$

PT (8) có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng $-3X_o, -X_o, X_o, 3X_o$ (theo yêu cầu của đề bài) khi và chỉ khi PT (9) có 2 nghiệm dương phân biệt $t_1 < t_2$ và $t_2 = 9t_1$. Điều này tương đương với

(Xem tiếp trang 13)

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

BÀN VỀ SỰ TIẾP XÚC CỦA HAI ĐỒ THỊ

NGUYỄN VIỆT HẢI

Gần đây, Tòa soạn THTT nhận được rất nhiều thư của độc giả, trong đó có các giảng viên ĐH, cán bộ chỉ đạo môn Toán ở các Sở GD–ĐT, các giáo viên toán THPT và các bạn học sinh, sinh viên... với nội dung liên quan đến bài toán về sự tiếp xúc của hai đồ thị trên mặt phẳng – một vấn đề quan trọng thường gặp khi khảo sát hàm số và trong các đề thi tốt nghiệp THPT, thi tuyển sinh vào ĐH, Cao đẳng.

Bài này nhằm phản ánh các thắc mắc, các giải pháp và ý kiến đề xuất của bạn đọc, đồng thời người viết cũng xin trao đổi thêm vài điều.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị (E) trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Để tìm sự tiếp xúc giữa hai đồ thị (C) và (E) ta thường sử dụng hai cách giải :

Cách giải 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x)=g(x) & (1) \\ f'(x)=g'(x) & (2) \end{cases}$$

được nghiệm x_o là hoành độ của tiếp điểm.

Cách giải 2. Tìm điều kiện để $f(x) - g(x)$ hoặc tử thức của nó có nghiệm x_o bội $k \geq 2$ (nghiệm bội 2 gọi là nghiệm kép), nghĩa là có dạng $(x - x_o)^k Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức.

Có bạn hỏi : Tại sao trong các sách báo có các định nghĩa khác nhau về sự tiếp xúc ? Định nghĩa nào chính xác ?

Định nghĩa tiếp xúc theo quan điểm hình học coi tiếp tuyến tại M_o là vị trí giới hạn của cát tuyến MM_o của *đường cong* khi M dần tới M_o (từ hai phía).

Định nghĩa dựa vào vị trí tương đối của các hình là điều bắt buộc nếu muốn giữ được *tính chất hình học* của khái niệm tiếp tuyến, đồng thời do mô tả trực quan nên học sinh dễ nhận thức. Định nghĩa đúng cho cả tiếp tuyến của đường cong có phương trình (PT) dạng tổng quát $F(x, y) = 0$, mang tính chất *định tính*, được sử dụng trong khi chứng minh, dựng hình.

Không ít học sinh đã ngộ nhận rằng định nghĩa này là cơ sở của phương pháp nghiệm kép (giao điểm M dần trùng đến tiếp điểm M_o).

Các bạn Lê Hữu Tâm (GV THPT Tùng Thiện, Sơn Tây, Hà Tây), Hồ Văn Tiếp (GV THPT Đức Trọng, Lâm Đồng), Lê Anh Tuấn (GV THPT chuyên Vĩnh Phúc), Đoàn Như Triệu (GV THPT Hồng Quang, Hải Dương), Phạm Quốc Phong (GV THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh), Nguyễn Đoài (GV THPT Thống Nhất A, Đồng Nai) và nhiều bạn khác đều cho rằng : Lâu nay trong các tài liệu ôn thi tốt nghiệp THPT và tuyển sinh ĐH đã sử dụng phương pháp nghiệm kép mà chưa có cơ sở lí luận chính xác, do đó có lúc lạm dụng phương pháp này dẫn đến sai lầm trong lập luận, có lúc lẫn lộn khái niệm tiếp xúc với điều kiện có nghiệm kép...

Trong các bài báo của tác giả Nguyễn Anh Dũng (THTT số 297 tháng 3/2002), Đặng Hùng Thắng (THTT số 298 tháng 4/2002) đã trình bày cơ sở lí luận của phương pháp nghiệm bội để giải bài toán về sự tiếp xúc của 2 đồ thị, trong đó lưu ý rằng :

- Chỉ xét khái niệm x_o là nghiệm bội $k \geq 2$ đối với *đa thức* $F(x) = (x - x_o)^k Q(x)$.

- Đồ thị hàm số $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ và $y = \dfrac{U(x)}{V(x)}$, trong đó $P(x)$, $Q(x)$, $U(x)$, $V(x)$ là các đa thức, tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $x = x_o$ (thuộc tập xác định của chúng) $\Leftrightarrow$ $P(x)V(x) - Q(x)U(x) = 0$ có nghiệm bội $x = x_o$ với $Q(x_o) \neq 0$, $V(x_o) \neq 0$.

Các bạn : My Duy Thọ (GV Hà Nội), Hồ Văn Tiếp, Lê Anh Tuấn cũng chứng minh các mệnh đề tương tự.

Định nghĩa tiếp xúc theo quan điểm đại số, giải tích có điều kiện như cách giải 1, trong đó PT (1) có nghiệm $x = x_0$ nghĩa là (C) và (E) có điểm chung $M_o(x_o, y_o)$, còn PT (2) có nghiệm $x = x_o$ biểu thị tiếp tuyến của (C) và (E) tại $M_o(x_o, y_o)$ trùng nhau.

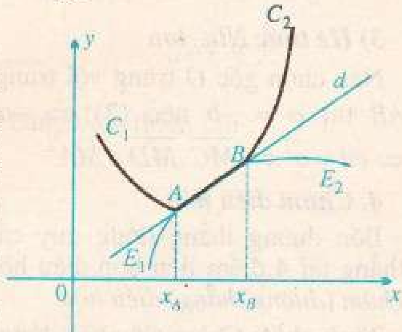
Định nghĩa này mang tính chất *định lượng*, cho phép giải các bài toán tính toán tọa độ tiếp điểm, tìm phương trình tiếp tuyến...

Nếu xuất phát từ định nghĩa theo quan điểm hình học thì cách giải 1 coi là mệnh đề.

Định nghĩa theo quan điểm giải tích chỉ xét hệ số góc $k = \text{tg}\alpha$ xác định, do đó bỏ qua trường hợp tiếp tuyến vuông góc với trục hoành, chẳng hạn hàm số $y = \sqrt[3]{x-1}$ có tiếp tuyến $x = 1$.

Bạn Nguyễn Minh Anh, 12A1, THPT Tĩnh Gia I, Thanh Hóa đưa ra giải pháp : Xét tiếp tuyến dạng $y = b$ (b là hằng số) của hàm số ngược $x = \sqrt[3]{y-1} \Leftrightarrow y = x^3 + 1$ rồi lấy đồ thị đối xứng qua đường $y = x$.

Xin hỏi:
Ở hình bên ta có coi đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C) gồm (C_1), AB, (C_2) hay không, có coi hai đồ thị (E) (gồm (E_1), AB, (E_2)) và (C) là tiếp xúc với nhau hay không, mặc dù hệ PT (1), (2) ở cách giải 1 có nghiệm trong đoạn $[x_A, x_B]$?



Do vậy ở cách giải 1 cần chú ý thêm : trong lân cận của tiếp điểm thì 2 đồ thị (C) và (E) phải có ít nhất 1 đường cong, nghĩa là không thể 2 đường đều là đồ thị hàm số bậc nhất.

Cách giải 1 dùng cho các hàm số bất kì (trừ trường hợp cả hai đều là hàm số bậc nhất tại lân cận tiếp điểm), còn cách 2 chỉ áp dụng cho trường hợp $f(x)$ và $g(x)$ đều là phân thức hữu tỉ (nói riêng là đa thức)

Dùng cách giải 1 ta tìm ngay được hoành độ tiếp điểm, sau đó mới tính hệ số góc tiếp tuyến, còn cách giải 2 cho phép nhanh chóng tìm hệ số góc để suy ra PT tiếp tuyến, tìm điều kiện của tham số để có tiếp tuyến.

Khi phải tìm tiếp tuyến dạng $g(x) = mx + n$ của đồ thị hàm $y = f(x)$ dạng $ax^2 + bx + c$, $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\dfrac{ax^2+bx+e}{cx+d}$ thì $f(x) - g(x)$ hoặc tử thức của nó đều là hàm số bậc 2 nên sử dụng được cả 2 cách giải. Nhiều bạn đọc hỏi rằng sử dụng phương pháp nghiệm kép trong trường hợp này có vi phạm yêu cầu của Bộ không khi hệ thức điều kiện vẫn là hàm số bậc 2 ?

Khi phải tìm tiếp tuyến của đồ thị hàm $y = f(x)$ mà $f(x)$ có dạng hàm số bậc 3, bậc 4 thì dẫn đến giải phương trình bậc 3, bậc 4 lúc đó sử dụng cách giải 1 rất khó khăn. Nếu biết một nghiệm nào đó của PT (1) thì sử dụng phương pháp nghiệm bội rất thuận lợi.

Có bạn hỏi : Phép biến đổi tương đương $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ có bảo toàn tính chất nghiệm bội của phương trình ? Xin trả lời : Hai phương trình trên là tương đương, nhưng phép biến đổi không là tương đương vì phải nhân, chia với $h(x) = x - 1$ mà $x = 1$ thuộc tập xác định và $h(1) = 0$.

Rất nhiều bạn : Hồ Công Dũng (GV THPT Trần Hưng Đạo, Bình Thuận), Nguyễn Danh Cẩm (Ứng Hòa, Hà Tây), TS Nguyễn Cam (khoa Toán, ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh), Lê Hữu Tâm, Hồ Văn Tiếp, Lê Anh Tuấn, Phạm Quốc Phong, Nguyễn Anh Dũng, PGS Đặng Hùng Thắng... đã nêu ra cơ sở lí luận của phương pháp nghiệm bội, phân tích ưu thế của cách giải này trong nhiều bài toán và đã đề nghị cho sử dụng phương pháp nghiệm bội khi giải toán về sự tiếp xúc giữa 2 đồ thị hàm số vì nhiều định lí ở THPT cũng chỉ công nhận, không chứng minh ; vấn đề là cần chỉ rõ điều kiện sử dụng phương pháp này sao cho chính xác, mặt khác trình bày ngắn gọn để không quá nặng nề.

Cũng xin đề nghị : do thói quen các giáo viên THPT vẫn dạy cho học sinh phương pháp nghiệm bội nên các bài làm đúng của học sinh theo phương pháp này nên có điểm số thỏa đáng trong các kì thi tốt nghiệp THPT và thi tuyển sinh ĐH sắp tới.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

MỘT SỐ HỆ THỨC LIÊN HỆ giữa ĐƯỜNG THẲNG và ĐƯỜNG TRÒN

LÊ HÀO
(GV trường CĐSP Phú Yên)

Trong hình học phẳng khi xét các vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn ta tìm thấy nhiều kết quả liên quan với nhau rất thú vị và có nhiều ứng dụng trong khi giải toán. Một số hệ thức như thế đã được trình bày trong bài "Một số dạng khác của bài toán con bướm" của bạn Phan Nam Hùng trên THTT số 216 (6/1995). Trong bài này xin nêu ra cách chứng minh khác với một cách nhìn tổng quát hơn về các bài toán con bướm.

I. Hệ thức giữa 4 điểm trên đường thẳng

1) Hàng điểm điều hòa

Bốn điểm A, B, C, D trên đường thẳng có hướng δ gọi là *hàng điểm điều hòa* $(ABCD)$ nếu

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad (1)$$

Hình 1

Khi đó ta gọi là các điểm C, D chia điều hòa đoạn AB (h. 1). Ta thấy (1) $\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ nghĩa là lúc đó các điểm A, B cũng chia điều hòa đoạn CD. Chú ý rằng nếu ba điểm A, B, C xác định và C không là trung điểm của AB thì tồn tại duy nhất điểm D thỏa mãn (1).

Chọn điểm gốc O nào đó trên đường thẳng δ, đặt các số đo đại số $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$, $\overline{OD} = d$ thì (1) được viết thành $\frac{a-c}{b-c} = -\frac{a-d}{b-d}$

$$\Leftrightarrow (a+b)(c+d) = 2(ab + cd) \qquad (2)$$

2) Hệ thức Đề–các

Nếu chọn gốc O trùng với điểm A thì $a = 0$ và

$$(2) \Leftrightarrow b(c+d) = 2cd \Leftrightarrow \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{2}{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}} \qquad (3)$$

3) Hệ thức Niu–tơn

Nếu chọn gốc O trùng với trung điểm M của AB thì $a = -b$ nên (2) $\Leftrightarrow -a^2 + cd = 0$

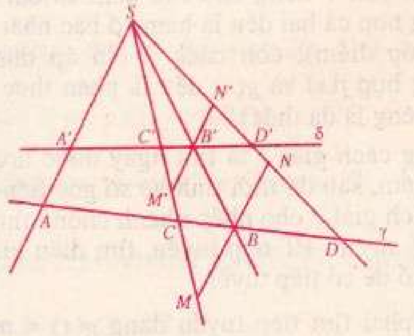
$$\Leftrightarrow cd = a^2 \Leftrightarrow \overline{MC}.\overline{MD} = MA^2 \qquad (4)$$

4. Chùm điều hòa

Bốn đường thẳng đồng quy cắt một đường thẳng tại 4 điểm liên hợp điều hòa được gọi là *chùm (đường thẳng) điều hòa*

Tính chất: Chùm điều hòa đồng quy ở điểm S và cắt đường thẳng γ nào đó tại các điểm A, B, C, D thì A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hòa.

Chứng minh. Theo định nghĩa các đường thẳng SA, SB, SC, SD cắt 1 đường thẳng δ tại A', B', C', D' lập thành hàng điểm điều hòa. Qua B và, B' kẻ các đường thẳng song song với SA được các giao điểm như ở hình 2.



Hình 2

Theo (1) và ĐL Ta–lét có

$$0 = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{C'A'}} + \frac{\overline{D'B'}}{\overline{D'A'}} = \frac{\overline{M'B'}}{\overline{SA'}} + \frac{\overline{N'B'}}{\overline{SA'}}$$

$\Rightarrow \overline{M'B'} + \overline{N'B'} = 0$ nghĩa là B' là trung điểm của $M'N'$. Suy ra $\overline{MB} + \overline{NB} = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\overline{MB}}{\overline{SA}} + \frac{\overline{NB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}.$$

Từ đó A, B, C, D là hàng điểm điều hòa.

(Kỳ sau đăng tiếp)

VỀ ĐẠI HỘI TOÁN HỌC THẾ GIỚI 2002

Từ cuối thế kỉ 19, Đại hội toán học thế giới - International Congress of Mathematicians (ICM) là sự kiện lớn nhất của giới toán học. Cứ 4 năm đại hội lại diễn ra một lần. Tại đại hội các kết quả nghiên cứu và nơi làm việc của những nhà toán học sẽ đem đến thông tin chính về hướng đi và thành tựu toán học của thời gian đó. Mọi người đều quan tâm đến việc ai được đọc báo cáo mời toàn thể, ai được mời báo cáo ở tiểu ban. Đặc biệt, việc trao giải thưởng Fields hoặc Nevanlinna là sự kiện chính của mỗi đại hội. Năm nay ICM sẽ diễn ra vào các ngày từ 20 đến 28.8.2002 tại Bắc Kinh (Trung Quốc). Danh sách các báo cáo mời lần này được xác định sớm hơn mọi năm. Ngược lại, thời hạn để giới thiệu các ứng cử viên cho các giải thưởng lớn nêu trên được giới hạn là 1.5.2002. Năm nay các báo cáo mời toàn thể dự kiến sẽ mang nội dung đại chúng và mỗi báo cáo dài 60 phút. Hai mươi nhà toán học được mời đọc báo cáo toàn thể là : Noga Alon, Douglas N. Arnold, Alberto Bressan, Luis Angles Carffarelli, Sun-Yung Alice Chang, David Leigh Donoho, Ludwig D. Faddeev, Shafi Goldwasser, Uffe Haagerup, Michael Jerome Hopkins, Victor G. Kac, Harry Kesten, Frances Clare Kirwan, Laurent Lafforgue, David Mumford, Hiraku Nakajima, Yum-Tong Siu, Richard Lawrence Taylor, Gang Tian, Edward Witten. Trong số đó, hơn 10 người đang làm việc tại Hoa Kỳ, còn lại là Nga, Italia, Đan Mạch, Anh, Pháp, Nhật, Trung Quốc và Ixraen. 169 nhà toán học được mời đọc báo cáo ở các tiểu ban. Xác suất và thống kê, Hình học vi phân, Phương trình vi phân, Vật lí toán, Ứng dụng của toán học, Lý thuyết số... là các lĩnh vực có nhiều người báo cáo.

Chương trình nghiên cứu cơ bản ĐaHiTô (Một số vấn đề chọn lọc của Đại số - Hình học - Tôpô) của Việt Nam sẽ xét và trích một phần kinh phí để hỗ trợ tiền đi lại cho các cán bộ nghiên cứu, giảng dạy trong 3 chuyên ngành trên dự Đại hội ICM 2002.

Hồ sơ xin tài trợ cần gửi về địa chỉ sau trước ngày 30.6.2002 :

GS. TSKH Ngô Việt Trung
Viện Toán học
Box 631, Bưu điện Bờ Hồ, Hà Nội
Tel : (04) 7563474, Fax : (04) 7564303
email : nvtrung@thevinh.ncst.ac.vn

(Nội dung hồ sơ xin liên hệ theo địa chỉ trên để biết cụ thể)

Cũng có thể coi Hội nghị quốc tế về Giải tích trừu tượng và ứng dụng 2002 ICAAA diễn ra từ 13 đến 17.8.2002 tại Hà Nội là Hội nghị vệ tinh của Đại hội toán học thế giới ICM 2002. Nhiều nhà toán học từ hơn 20 nước đã đăng kí tham dự Hội nghị này.

VKT
(Theo Thông tin Toán học)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN - BÀI SỐ 54

Problem. Without using long multiplication, a computer or a pocket calculator, verify that

$$240^4 + 340^4 + 430^4 + 599^4 = 651^4.$$

Solution. The equation suggests that we should try to pull a factor 10^4 out of the difference $651^4 - 599^4$. So we calculate

$$651^4 - 599^4 = (651^2 - 599^2)(651^2 + 599^2)$$
$$= 52.1250[(625+26)^2 + (625-26)^2]$$
$$= 10^4.13(625^2 + 26^2),$$

Now we may write

$$651^4 - 599^4 - 430^4 - 340^4 - 240^4 = 10^4A \text{ with}$$

$$A = 13(25^4 + 26^2) - (43^4 + 34^4 + 24^4)$$
$$= 12\times25^4 + 4\times13^3 - (34^2 + 24^4) - (43^4 - 25^4)$$
$$= 12\times25^4 + 4\times13^3 - 16\times(17^2 + 12^4) -$$
$$- 18\times68\times2(34^2 + 9^2)$$
$$= 4[3\times25^4 + 13^3 - 4(17^2 + 12^4) - 18\times36(34^2 + 9^2)].$$

It is easy to check that A is divisible by the numbers $64 = 2^6$, $27 = 3^3$, $25 = 5^2$, 7, 11, 13, 17 and hence by $64\times27\times25\times7\times11\times13\times17$. Note that

$$64\times27\times25\times7\times11\times13\times17 > 1600\times27\times1001\times17 >$$
$$> 10^6(\tfrac{3}{2})27\times17 > 10^6\times40\times17 > 6\times10^8.$$

On the other hand, we have

$$|A| < \max\{13(25^4 + 26^2), 43^4 + 34^4 + 24^4\}$$
$$< \max\{13\times26^2(26^2 + 1), 3\times50^4\} <$$
$$< 13\times50^4 = 13\times625\times10^4 < 13\times10^7 < 6\times10^8.$$

Thus, A is divisible by a number exceeding itself. Hence A must be zero.

Deduce $240^4 + 340^4 + 430^4 + 599^4 = 651^4$

Từ mới:

multiplication	= phép nhân
computer	= máy tính
pocket calculator	= máy tính bỏ túi
suggest	= gợi ý (động từ)
try	= thử, thử xem (động từ)
pull (out)	= kéo ra, lôi ra (động từ)
calculate	= tính, tính toán (động từ)
check	= kiểm tra, kiểm soát (động từ)
divisible	= chia hết cho (tính từ)
on the other hand	= mặt khác (thành ngữ)
thus	= do đó, theo đó, vì vậy (phó từ)
exceed	= vượt quá (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

THI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH BỎ TÚI

(Tiếp theo kì trước)

TẠ DUY PHƯỢNG
(Viện Toán học)

Bài 7. Tìm phân số $\frac{m}{n}$ với m và n là số tự nhiên có hai chữ số sao cho $\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|$ là nhỏ nhất (tức là tìm phân số xấp xỉ số vô tỉ $\sqrt{2}$ tốt nhất).

Giải: Với n cố định tồn tại số m_0 sao cho $\sqrt{2}$ nằm giữa hai phân số cạnh nhau: $\frac{m_0}{n}<\sqrt{2}<\frac{m_0+1}{n}$. Suy ra $m_0=\left[n\sqrt{2}\right]$ (phần nguyên của $n\sqrt{2}$), vậy tử số tốt nhất $m(n)$ là một trong hai số $\left[n\sqrt{2}\right]$ và $\left[n\sqrt{2}\right]+1$ (chọn số nào cho $\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|$ nhỏ hơn).

Tính trên máy các phân số $\frac{m(n)}{n}$ với $n=10,11,...,69,70$ (vì (***tính trên máy***) $71\sqrt{2}\approx 100.4$ nên với $n\geq 71$ thì $m(n)\geq 100$ là số có ba chữ số) và so sánh chúng với nhau ta được phân số xấp xỉ $\sqrt{2}$ tốt nhất là $\frac{99}{70}$, sai số $\frac{99}{70}-\sqrt{2}\approx 0{,}000072152....$

Lời bình 1: Phân số $\frac{99}{70}$ có thể nhận được bằng cách chọn số thập phân vô hạn tuần hoàn 1,(41) và chuyển nó về dạng phân số : $1,(41)=\frac{140}{99}$. Phân số $\frac{140}{99}$ xấp xỉ khá tốt số $\sqrt{2}$ ($\frac{140}{99}-\sqrt{2}\approx -0{,}000072148$), tuy nhiên nó có tử là số có ba chữ số. Nhận xét rằng, nếu $x\approx\sqrt{2}$ thì $x\approx\frac{2}{x}$, tức là $\frac{2}{x}$ cũng xấp xỉ $\sqrt{2}$.

Chọn $x=\frac{140}{99}$ thì $\frac{2}{x}=\frac{99}{70}$.

Lời bình 2: Nếu $\frac{m}{n}\approx\sqrt{2}$ thì $\frac{m^2}{n^2}\approx 2$ hay $m^2\approx 2n^2$. Hai số tự nhiên m^2 và $2n^2$ "xấp xỉ nhau", tức là chúng bằng nhau hoặc hơn kém nhau 1 đơn vị. Suy ra m và n phải thỏa mãn phương trình Pen (Pell): $m^2-2n^2=\pm 1$.

Xét phương trình $m^2-2n^2=1$. Nhận xét rằng: nếu $(m_0;n_0)$ là nghiệm thì $m=3m_0+4n_0$; $n=2m_0+3n_0$ cũng là nghiệm. Từ đây ta có các phân số:

$\frac{3}{2};\frac{17}{12};\frac{99}{70};\frac{577}{408};\frac{3363}{2378};\frac{19601}{13860};\frac{114243}{80782}$ xấp xỉ khá tốt $\sqrt{2}$ (***thử trên máy***). Thí dụ: $\frac{114243}{80782}-\sqrt{2}\approx 0.000000000$. Tương tự cho phương trình $m^2-2n^2=-1$.

Lời bình 3: Có thể xấp xỉ số $\sqrt{2}$ bằng liên phân số: $\sqrt{2}\approx\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}$. Bằng cách "cắt cụt" liên phân số trên ta cũng được nhiều phân số xấp xỉ tốt $\sqrt{2}$. Thí dụ: $\sqrt{2}=1+1/(2+1/(2+1/(2+1/(2+1/2))))=\frac{99}{70}$ (hãy "cắt cụt" và ***sử dụng phím*** $\boxed{a^{b/c}}$ ***tính trên máy*** để được các ***phân số đúng*** khác xấp xỉ tốt $\sqrt{2}$).

Bài 8. Hãy tìm phân số $\frac{m}{n}$, trong đó m và n là các số tự nhiên có ba chữ số sao cho phân số $\frac{m}{n}$ gần với số π nhất. ***Đáp số***: $\frac{355}{113}$; $\frac{355}{113}-\pi\approx 0{,}000000267$.

Lời bình 1: Một thời gian dài, phân số xấp xỉ số π tốt nhất là $\frac{22}{7}$ (do Ac-si-met tìm ra). Số $\frac{355}{113}$ xấp xỉ số π tốt hơn.

Phân số xấp xỉ số π tốt hơn tiếp theo là:

$\frac{103993}{33102}$ $\left(\frac{103993}{33102}-\pi\approx -0,000000001\right)$ và $\frac{104348}{33215}\left(\frac{104348}{33215}-\pi\approx 0,000000000\right)$.

Lời bình 2: "Cắt cụt" liên phân số

$\pi = 3 + 1/(7+1/(15+1/(1+1/(292+1/(1+...)))))$ ta cũng được nhiều phân số xấp xỉ tốt số π, thí dụ: $3+1/(7+1/(15+1))=\frac{355}{113}$;

$$3+1/(7+1/(15+1/(1+1/292)))=\frac{103993}{33102} \text{ và}$$

$$3+1/(7+1/(15+1/(1+1/(292+1))))=\frac{104348}{33215}$$

Bài 9 (Bài toán cầu phương gần đúng hình tròn): Tìm số hữu tỉ $R=\frac{m}{n}$, trong đó m và n là các số tự nhiên có không quá hai chữ số, sao cho hình vuông nội tiếp hình tròn bán kính $R=\frac{m}{n}$ có diện tích gần với diện tích hình tròn bán kính bằng 1 nhất.

Bài 10. Với giá trị tự nhiên nào của n thì $1,01^{n-1}<n-1$ và $1,01^{n}>n$.

Giải: Dùng $\boxed{\times}$ $\boxed{M+}$ để tính $1,01^n$ theo quy tắc "gấp đôi luỹ thừa":

1.01 $\boxed{\times}$ $\boxed{M+}$ $(1,01^2\approx 1.02<2)$; $\boxed{\times}$ $\boxed{M+}$ $(1,01^4\approx 1.04<4)$; ...;

$\boxed{\times}$ $\boxed{M+}$ $(1,01^{512}=163.1<512)$; $\boxed{\times}$ $\boxed{M+}$ $(1,01^{1024}=26612.5>1024)$.

Như vậy $512<n<1024$. Thu hẹp khoảng chứa n bằng "phương pháp chia đôi":

Chia đôi đoạn [512;1024] có : $1,01^{\frac{1024+512}{2}}$ $=1,01^{768}=2083.603436>768$.

Vậy $512<n<768$. Sau một số bước "chia đôi" như trên ta đi đến: $650<n<652$. Cuối cùng ta có: $1,01^{651}=650.4506207<651$ và $1,01^{652}=656.9551269>652$.

Đáp số: $n=651$.

Bài 11. Tìm tất cả các số tự nhiên n có ba chữ số sao cho số n^{69} bắt đầu bằng số 1986, còn số n^{121} bắt đầu bởi số 3333.

Giải: Giả sử số n thoả mãn điều kiện đầu bài. Do $1=4\times 121-7\times 69$ nên

$$n^1=n^{4\times 121-7\times 69} \text{ hay } n=\frac{n^{4\times 121}}{n^{7\times 69}}=\frac{(n^{121})^4}{(n^{69})^7}.$$

Theo đầu bài, số n^{69} bắt đầu bằng 1986, còn n^{121} bắt đầu bằng 3333 nên

$$n=\frac{(n^{121})^4}{(n^{69})^7}=\frac{(3333....)^4}{(1986....)^7}. \text{ Suy ra:}$$

$$\frac{(33330...0)^4}{(19870...0)^7}<n=\frac{(3333...)^4}{(1986..)^7}<\frac{(33340...0)^4}{(19860...0)^7}$$

$$\text{hay } \frac{(3333)^4}{(1987)^7}.10^M<n=\frac{(3333...)^4}{(1986..)^7}<\frac{(3334)^4}{(1986)^7}.10^M.$$

Vì ***tính trên máy*** ta được:

$\frac{3333^4}{1987^7}=0.000000001=\frac{3334^4}{1986^7}$ nên để so sánh được hai phân số phải và trái ta viết bất đẳng thức trên dưới dạng sau ($m=M-9$):

$$\frac{3,333^4}{1,987^7}.10^m<n=\frac{(3333...)^4}{(1986..)^7}<\frac{3,334^4}{1,986^7}.10^m.$$

Tính trên máy:

$$\frac{3,333^4}{1,987^7}.10^m\approx 1,009151070.10^m<n.10^m$$

$$<\frac{3,334^4}{1,986^7}.10^m=1,013929299.10^m.$$

Vì n là số có ba chữ số nên chỉ có thể $m=2$ và $n=101$.

Đáp số: $n=101$.

Kết luận: Các bài thi trên (một số được chọn từ các đề thi của nước ngoài) thể hiện:

1) Tính sáng tạo và độc đáo (tiêu chuẩn của đề thi học sinh giỏi Toán).

2) Tư duy thuật toán và phát huy hiệu năng của máy tính điện tử (tiêu chuẩn của thi học sinh giỏi Tin học).

3) Kết hợp hữu cơ và hỗ trợ lẫn nhau giữa tư duy toán học và công cụ máy tính: thiếu một trong hai yếu tố đó sẽ không giải được hoặc giải rất khó khăn (tiêu chuẩn của thi học sinh giỏi Giải toán trên máy tính).

Hy vọng rằng các bài toán thỏa mãn ba yêu cầu trên của các đề thi học sinh giỏi sẽ ngày càng có mặt nhiều hơn trong các cuộc thi "Giải toán trên máy tính", thay cho các bài chỉ áp dụng tính toán thuần túy.

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/300. Giả sử phương trình $x^{2003} + ax^2 + bx + c = 0$ với các hệ số nguyên a, b, c có 3 nghiệm nguyên x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng :

$$(a+b+c+1)(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$$

chia hết cho 2003.

NGUYỄN SONG MINH
(Hà Nội)

Bài T2/300. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5} \geq \sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5} + \frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2+(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3})^2+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4})^2+(\sqrt{a_4}-\sqrt{a_5})^2}{20}$$

trong đó a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 là các số không âm. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

VÕ GIANG GIAI, MẠNH TÚ
(Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T3/300. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$, trong đó x, y là hai số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$.

VŨ TRÍ ĐỨC
(Ninh Bình)

Bài T4/300. Cho tam giác ABC và một điểm P nằm bên trong nó. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn nội tiếp ΔPBC tiếp xúc với các cạnh BC, CP, PB lần lượt tại K, M, N. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng EM và FN. Chứng minh rằng ba điểm A, P, Q thẳng hàng khi và chỉ khi K trùng với D.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T5/300. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi M là điểm đối xứng của O qua A. Một cát tuyến qua M (không đi qua O) cắt đường tròn tại C và D. Tìm quỹ tích giao điểm P của các đường thẳng AC và BD khi cát tuyến chuyển động nhưng luôn đi qua M.

LƯƠNG ANH VĂN
(GV Tp. Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/300. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương m, n sao cho $\dfrac{n}{m} = \dfrac{(m^2-n^2)^{n/m}-1}{(m^2-n^2)^{n/m}+1}$

HUỲNH TẤN CHÂU
(GV THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Bài T7/300. Giải phương trình

$$2^x + 6^x = 3^x + 5^x$$

TRẦN TUẤN ANH
(SV Toán ĐHKHTN – ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T8/300. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c+ab}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$

TRƯƠNG NGỌC ĐẮC
(GV THPT Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài T9/300. Chứng minh rằng tam giác ABC là đều khi và chỉ khi $108Rr = 7p^2 + 27r^2$, trong đó p, R, r tương ứng là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC.

HOÀNG THỊ TUYẾT
(Hoằng Hóa, Thanh Hóa)

Bài T10/300. Cho hình tứ diện $SABC$ có các cạnh SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi (P), (Q), (T) lần lượt là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh BC, CA, AB. (P) cắt SA tại A_1, (Q) cắt SB tại B_1, (T) cắt SC tại C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A_1, B_1, C_1 lên mặt phẳng (ABC). (P) cắt SA_2 tại M, (Q) cắt SB_2 tại N, (T) cắt SC_2 tại R. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (MNR) và (ABC) song song với nhau.

BÙI VĂN ANH
(SV Toán K33A ĐHSP Thái Nguyên)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/300. Một trái đạn pháo đang bay với vận tốc v = 500m/s thì nổ thành ba mảnh có cùng khối lượng sao cho động năng của hệ tăng gấp n = 1,5 lần. Hãy tìm vận tốc cực đại v_{max} mà một trong các mảnh có thể có được.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội) st

Bài L2/300. Một quả bóng bàn rơi xuống một máng nghiêng 45^o, khoảng cách từ điểm bóng chạm máng đến chân máng là 15m và vận tốc của bóng lúc rơi xuống máng là 0,5m/s. Hãy tính số lần va chạm tiếp theo khả dĩ lớn nhất của quả bóng với máng. Coi va chạm là tuyệt đối đàn hồi, bỏ qua sức cản của không khí. Lấy g=10m/s^2.

NGUYỄN THANH NHÀN
(GV THPT Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/300. Suppose that the equation

$$x^{2003} + ax^2 + bx + c = 0$$

with integer–coefficients a, b, c, has three integer roots x_1, x_2, x_3. Prove that

$$(a + b + c + 1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

is divisible by 2003.

T2/300. Prove the inequality

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} \geq \sqrt[5]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} + \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 + (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3})^2 + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_4})^2 + (\sqrt{a_4} - \sqrt{a_5})^2}{20}$$

where a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 are non negative numbers. When does equality occur ?

T3/300. Find the greatest value, the least value of the expression

$$x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$$

where x, y are non negative numbers satisfying the condition $x + y = 1$.

T4/300. Let P be a point inside the triangle ABC. The incircle of ΔABC touches the sides BC, CA, AB respectively at D, E, F. The incircle of ΔPBC touches the sides BC, CP, PB respectively at K, M, N. Let Q be the point of intersection of the lines EM and FN. Prove that the points A, P, Q are collinear when and only when K coincides with D.

T5/300. Let AB be a diameter of a circle with center O and M be the point symmetric to O with respect to A. A secant passing through M (but not through O) cuts the circle at C and D. Find the locus of the point of intersection of the lines AC and BD when the secant varies but passes through M.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/300. Find all couples of positive integers m, n satisfying the condition

$$\frac{n}{m} = \frac{(m^2 - n^2)^{n/m} - 1}{(m^2 - n^2)^{n/m} + 1}$$

T7/300. Solve the equation

$$2^x + 6^x = 3^x + 5^x$$

T8/300. Find the greatest value of the expression

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c+ab}$$

where a, b, c are positive numbers satisfying the condition $a + b + c = 1$

T9/300. Prove that a tringle ABC is equalateral when and only when $108Rr = 7p^2 + 27r^2$, where p, R, r are respectively the semi–perimeter, the circumradius, the inradius of ΔABC.

T10/300. Let $SABC$ be a tetrahedron such that the lines SA, SB, SC are at right angles each to others. Let (P), (Q), (R) be respectively the angled–bisector–planes of the dihedra with sides BC, CA, AB. (P) cuts SA at A_1, (Q) cuts SB at B_1, (R) cuts SC at C_1. Let A_2, B_2, C_2 be respectively the orthogonal projections of A_1, B_1, C_1 on the plane (ABC). (P) cuts SA_2 at M, (Q) cuts SB_2 at N, (T) cuts SC_2 at R. Prove that the planes (MNR) and (ABC) are parallel each to other.

ỨNG DỤNG TÍNH ĐỐI XỨNG.... *(Tiếp theo trang 5)*

$$\begin{cases} \Delta_t = (3m+5)^2 - 4(m+1)^2 > 0 \\ S = t_1 + t_2 = 10t_1 = 3m + 5 > 0 \\ P = t_1 t_2 = 9t_1^2 = (m+1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -\dfrac{25}{19} \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy $m = 5$ và $m = -\dfrac{25}{19}$ là hai giá trị của m cần tìm.

Mời các bạn hãy sử dụng các kết quả 1 và 2 để giải các bài tập sau nhằm mục đích củng cố phần lí thuyết :

Bài 1. Giải các PT

a) $9x^4 - 36x^3 + 17x^2 + 38x - 24 = 0$

b) $(x-3)^4 + (x-5)^4 = 96$

Bài 2. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = x^4 + 4mx^3 - x^2 + 3(1-4m)x + 4$ cắt parabol $y = x^2 + 3x + 4$ tại 4 điểm A, B, C, D sao cho $AB = BC = CD$

Bài 3. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2(m-1)x^3 - (m+1)x^2 + 2mx + 2m - 5$ cắt đồ thị hàm số $y = 2mx^3 - mx^2 + 2m - 5$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ tương ứng lập thành một cấp số cộng.

Bài T1/296. *Cho số nguyên a lớn hơn 32. Hỏi tồn tại hay không số tự nhiên k thỏa mãn $a^{40} < k < a^{41}$ mà có ít nhất 61 chữ số 0 ở tận cùng ?*

Lời giải. Ta thấy có $m = a^{41} - a^{40} - 1$ số tự nhiên k nằm giữa a^{40} và a^{41}. Vì số tự nhiên a > 32 nên a ≥ 33, từ đó $m+1 > a^{40}(a-1) \geq 33^{40}.32$

$\Rightarrow m > 33^{40}.30 = \left(33^2\right)^{20}.30 = (1089)^{20}.30 > 10^{60}.30 = 3.10^{61}$

Trong n số tự nhiên liên tiếp thì có n số dư khác nhau nên tồn tại số chia hết cho n, do đó trong 3.10^{61} số tự nhiên liên tiếp có ít nhất 3 số chia hết cho 10^{61}, ba số này nằm giữa a^{40} và a^{41} mà có ít nhất 61 chữ số 0 ở tận cùng.

Nhận xét. 1) Bài toán vẫn đúng khi số a không nguyên, còn nếu a nguyên thì chỉ cần $a > 31$ là đủ. Các bạn : *Phạm Kim Hùng*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Nguyễn Đức Tâm*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, **Nam Định** đã xác định giá trị m chặt chẽ hơn. Từ $1185.10^3 < 33^4 < 1186.10^3$ có $140.10^4 < 33^8 < 141.10^{10}$, dẫn đến $17.10^{61} < 33^{40}.32 < 18.10^{61}$ và kết luận được : giữa a^{40} và a^{41} có ít nhất 17 số chia hết cho 10^{61}, có ít nhất một số có 62 chữ số 0 ở tận cùng.

2) Các bạn sau cũng có lời giải đúng, gọn :

Phú Thọ: *Nguyễn Bá Gia*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Vĩnh Phúc :** *Trương Ngọc Cương*, 6B, *Bùi Hữu Đức*, 9A, THCS Vĩnh Yên ; **Sơn La:** *Nguyễn Viết Hoàng*, 9, THCS Võ Thị Sáu, Phù Yên ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Đức Duy*, THCS Yên Phong ; **Hải Dương:** *Trần Quốc Hoàn*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, *Hoàng Đình Phương*, 7/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Hải Phòng:** *Nguyễn Vũ Lân, Đinh Khang, Bùi Ngọc Khôi*, 8A, *Phạm Anh Minh, Vương Anh Quyền*, 9A, TH NK Trần Phú ; **Nam Định :** *Phạm Duy Hiển, Vũ Khắc Kỳ*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, *Phạm Văn Hải*, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh ; **Thanh Hóa :** *Trần Mạnh Tuấn*, 9C, THCS Triệu Thị Trinh, Triệu Sơn, *Nguyễn Tuấn Nam*, 8A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa ; **Đà Nẵng:** *Trương Minh Tiến*, 9/3, THCS Nguyễn Khuyến ; **Đồng Nai:** *Võ Sỹ Bắc*, 8/4 THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa.

VIỆT HẢI

Bài T2/296. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{6} < \frac{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}} < \frac{5}{27}$$

trong đó biểu thức chứa căn có n dấu căn ở tử số và n–1 dấu căn ở mẫu số.

Lời giải. của *Nguyễn Viết Hoàng*, 9, THCS Võ Thị Sáu, Phù Yên, **Sơn La.**

Đặt $A = \dfrac{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}$

(biểu thức chứa căn có n dấu căn trên tử và n–1 dấu căn ở mẫu)

$a = \sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}$ (có n dấu căn)

Ta có $A = \dfrac{3-a}{3-(a^2-6)} = \dfrac{1}{3+a}$ (1)

Mặt khác ta có

$2,4 < \sqrt{6} < a < \sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+3}}}$ (có n dấu căn) hay $2,4 < a < 3$

Từ đó và (1) suy ra

$$\frac{1}{3+3} < \frac{1}{3+a} < \frac{1}{3+2,4}$$

hay $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{3+a} < \dfrac{5}{27}$

Ta có bất đẳng thức kép cần chứng minh.

Nhận xét. 1. Các bạn có lời giải tốt : **Hà Tây:** *Cấn Văn Bằng*, 9A, THCS Thạch Thất ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Trường Thọ*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, *Trần Thành Đức*, 9A, THCS Lâm Thao, h. Lâm Thao; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Phú Cường*, 9B, THCS Yên Lạc ; **Hải Phòng :** *Bùi Tuấn Anh, Phạm Anh Minh*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định:** *Phạm Tường Linh, Nguyễn Hải Long*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** *Bùi Khắc Kiên*, 8A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa; **Nghệ An :** *Hoàng Xuân Trung*, 9A, THCS Nghi Hương, Tx. Cửa Lò ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thiện Huy*, 9D, THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức.

2. Bạn *Nguyễn Thế Tiên*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định** đã phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát sau :

Với số tự nhiên $k > 1$ ta có bất đẳng thức kép :

$$\frac{1}{2k} < \frac{k-\sqrt{k(k-1)+\sqrt{k(k-1)+\ldots+\sqrt{k(k-1)}}}}{k-\sqrt{k(k-1)+\sqrt{k(k-1)+\ldots+\sqrt{k(k-1)}}}} < \frac{2k-1}{k(4k-3)}$$

trong đó biểu thức chứa căn có n dấu căn ở tử số và n–1 dấu căn ở mẫu số.

Cho $k = 3$ ta có BĐT cần chứng minh.

3. Các bạn *Bùi Hữu Đức*, 9A, THCS Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc** ; *Lê Đình Huy*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, **Hải Dương** cũng đã đưa ra hai bài toán tổng quát, nhưng trong đó đã phải sử dụng tới hai biến tổng quát.

TỐ NGUYÊN

Bài T3/296. *Giả sử phương trình $x^5 - x^3 + x - 2 = 0$ có nghiệm thực x_o. Chứng minh rằng $\sqrt[6]{3} < x_o < \sqrt[6]{4}$.*

Lời giải. Vì x_o là nghiệm của phương trình đã cho nên $x_o \neq 0, x \neq 1$ và $x_o^5 - x_o^3 + x_o = 2$ (*)

Nhân cả hai vế của (*) với $x_o + \dfrac{1}{x_o}$ thu được $x_o^6 + 1 = 2\left(x_o + \dfrac{1}{x_o}\right)$. Vì vế trái luôn dương, cho nên từ vế phải có $x_o > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si có $x_o^6 + 1 = 2\left(x_o + \dfrac{1}{x_o}\right) \geq 4$. Lưu ý rằng $x_o \neq 1$ nên có bất đẳng thức thật sự. Do đó $x_o^6 > 3$ và vì $x_o > 0$, ta có $x_o > \sqrt[6]{3}$.

Chia cả hai vế của (*) cho x_o^3 dẫn đến :

$\dfrac{2}{x_o^3} + 1 = x_o^2 + \dfrac{1}{x_o^2} > 2$ và do đó $x_o < \sqrt[6]{4}$

Tóm lại $\sqrt[6]{3} < x_o < \sqrt[6]{4}$

Nhận xét: Đây là một phương trình bậc cao, không có công thức nghiệm tổng quát. Tuy nhiên phương trình cụ thể trong bài có thể phân tích thành thừa số

$$(x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - x - 2) = 0$$

và hạ bậc của phương trình được, như bạn *Phạm Văn Hải*, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh, **Nam Định** nhận xét. Bạn *Nguyễn Chí Linh*, 8A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, Thanh Hóa phát hiện bài toán được giải trong lời giải bài T3/246 (khẳng định (2) và (3)) trên số THTT 250 tháng 4/1998. Bạn *Nguyễn Trung Kiên* cho biết bài T3/296 này thực chất là một bài trong đề thi học sinh giỏi Mônđavia được in lại trong cuốn "Chuyên đề toán tổng hợp" của NXB Giáo dục. Cũng bạn *Nguyễn Chí Linh* cho biết bài toán này được in trong cuốn "Bài tập toán chọn lọc cấp II" NXB Hà Bắc, 1992-1993.

Ngoài các bạn kể trên, các bạn sau đây có lời giải chính xác, trình bày sáng sủa đẹp và sạch :

Nam Định : *Nguyễn Thị Hồng Hạnh*, 9A7, (8A6 cũ), THCS Lương Thế Vinh, Tp. Nam Định, *Trương Văn Hiếu*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Sơn Tây:** *Nguyễn Vũ Hải*, 9E, THCS Sơn Tây ; **Đà Nẵng:** *Thái Thanh Hải*, 9/2, Nguyễn Khuyến, Hải Châu ; **Sơn La:** *Nguyễn Viết Hoàng*, 9, THCS Võ Thị Sáu, Phú Yên ; **Cần Thơ:** *Nguyễn Minh Luân*, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng, Tp. Cần Thơ ; **Trà Vinh :** *Nguyễn Anh Tuấn*, 91 THCS Cầu Ngang ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 9B, THCS Vĩnh Tường, *Đỗ Hoàng Tùng*, 6E, *Bùi Hữu Đức*, 9A, THCS Vĩnh Yên.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T4/296. *Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng với bất kì số nguyên $n > 1$ thì*

$$a^n b(a-b) + b^n c(b-c) + c^n a(c-a) \geq 0$$

Lời giải. Chúng ta chứng minh BĐT ở đầu bài bằng phương pháp quy nạp toán học

Với $n = 2$, đặt $2x = b + c - a > 0$, $2y = a - b + c > 0$, $2z = a + b - c > 0 \Rightarrow a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, BĐT cần chứng minh trở thành :

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 - xyz(x + y + z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow xyz\left[\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - (x + y + z)\right] \geq 0 \quad (*)$$

Áp dụng BĐT Cô–si cho các số dương ta có

$$y + \frac{x^2}{y} \geq 2\sqrt{y\left(\frac{x^2}{y}\right)} = 2x;$$

tương tự $x + \dfrac{z^2}{x} \geq 2z$; $z + \dfrac{y^2}{z} \geq 2y$

Từ đó BĐT (*) được chứng minh, hay BĐT $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$ được chứng minh.

Giả sử BĐT đúng tới n. Không mất tính tổng quát giả sử $c \leq b \leq a$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$b^n c(b-c) \geq -a^n b(a-b) - c^n a(c-a)$$

$$\Rightarrow b^{n+1}c(b-c) \geq -a^n b^2(a-b) - c^n ab(c-a).$$

Do đó

$$a^{n+1}b(a-b) + b^{n+1}c(b-c) + c^{n+1}a(c-a) \geq$$

$$\geq a^{n+1}b(a-b) - a^n b^2(a-b) - c^n ab(c-a) + c^{n+1}a(c-a)$$

$$= a^n b(a-b)^2 + c^n a(c-a)(c-b) \geq 0$$

Vậy BĐT đúng với $n + 1$. Theo nguyên lí quy nạp BĐT đã cho đúng với mọi $n > 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hay ΔABC đều.

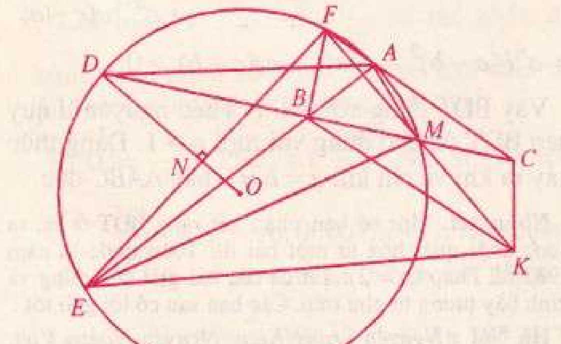
Nhận xét. Một số bạn nhận xét rằng BĐT ở bài ra được khái quát hóa từ một bài thi Toán quốc tế năm 1983 tại Pháp ($n = 2$). Tất cả các bài giải đều đúng và trình bày tương tự như trên. Các bạn sau có lời giải tốt :

Hà Nội : *Nguyễn Trung Kiên, Nguyễn Hoàng Việt*, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Quận Cầu Giấy ; **Hải Phòng :** *Bùi Tuấn Anh*, 9A, *Trần Hương Giang, Đặng Ngọc Chiến*, 8B, THPT NK Trần Phú ; **Sơn La :** *Nguyễn Viết Hoàng*, 9 THCS Võ Thị Sáu, Phú Yên ; **Bắc Ninh :** *Lê Vân Chi*, 8A, THCS Yên Phong, *Phan Đình Công*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình ; **Vĩnh Phúc :** *Bùi Thị Thu Hiền*, 9B, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Mạnh Hùng*, 9C, *Nguyễn Hữu Hoàn*, 9B, THCS Vĩnh Tường ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Bá Gia*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, *Nguyễn Trường Thọ*, *Nguyễn Quang Huy*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh ; *Trần Thành Đức*, 9A1, THCS Lâm Thao, *Nguyễn Quang Huy*, 8G, THCS Việt Trì ; **Hà Tây :** *Cấn Văn Bằng*, *Nguyễn Khắc Dũng*, 9A, THCS Thạch Thất ; **Hưng Yên :** *Doãn Thị Kim Huế*, 8C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi ; **Hà Nam :** *Trần Phan Bình*, 9B, THCS Trần Phú, Tx. Phủ Lý ; **Nam Định :** *Vũ Khắc Kỷ*, *Nguyễn Đức Tâm*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, *Trương Văn Hiếu*, *Nguyễn Phạm Tuyến*, 9A2, *Đinh Xuân Tuyên*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** *Hoàng Quốc Hoan*, 9B, THCS Trần Mai Ninh ; **Quảng Trị:** *Phan Hoàng Phương Trang*, 6/2, THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà ; **Đà Nẵng:** *Thái Thanh Hải*, 9/2, *Trương Minh Tiến*, 9/3, THCS Nguyễn Khuyến, Quận Hải Châu; **Bình Định :** *Nguyễn Phúc Thọ*, 9D, THCS Ngô Mây, Phù Cát ; **Khánh Hòa:** *Võ Thông Thái*, 9^3, Trường cấp 2–3 Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

HỒ QUANG VINH

Bài T5/296. *Cho tam giác ABC với M là trung điểm của BC. Đường phân giác ngoài của góc A cắt đường thẳng BC tại điểm D. Đường tròn ngoại tiếp ΔADM cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt ở E và F. Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh rằng MN//AD.*

Lời giải. Gọi K là điểm đối xứng với F qua M. Do M là trung điểm BC nên suy ra FBKC là hình bình hành. Từ đó FC//BK. Suy ra $\widehat{BKM} = \widehat{MFA}$. Mà $\widehat{MFA} = \widehat{AEM}$. Nên $\widehat{BKM} = \widehat{BEM}$. Do đó BMKE là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{BEK} = \widehat{FMD} = \widehat{FAD} = \widehat{DAE}$.



Vậy $\widehat{BEK} = \widehat{DAE}$ hay $AD//EK$ (1)

Do $FN = NE$; $FM = MK$ nên $MN // EK$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $MN // AD$.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Phú Thọ : *Nguyễn Trung Kiên* A, 8A, THCS Giấy Phong Châu ; **Hà Tây :** *Khuất Văn Sơn*, 9A, THCS Thạch Thất ; **Hải Phòng:** *Bùi Tuấn Anh*, *Vương Anh Quyền*, 9A, PTNK Trần Phú ; **Nam Định :** *Vũ Khắc Kỷ*, *Phạm Duy Hiển*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, *Phạm Văn Hải*, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh ; **Quảng Ngãi:** *Bùi Lê Trọng Thanh*, 901, THCS Nguyễn Nghiêm.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/296. *Kí hiệu p_k là số nguyên tố thứ k. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n phương trình*

$$2nx^2 + 9n(p_{n+1} + p_{n+2})x + 1945n^3 = 2001x^3$$

luôn có nghiệm dương không nhỏ hơn n.

Lời giải : (của bạn *Nguyễn Văn Tiến*, 10A2, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**). Trước hết ta chứng minh $p_{n+1} + p_{n+2} \geq 6n$.

Thật vậy với $n = 1, 2$, ta kiểm tra thấy đúng. Giả sử $p_{k+1} + p_{k+2} \geq 6$ với $k \geq 2$. Ta phải chứng minh $p_{k+2} + p_{k+3} \geq 6(k+1) = 6k + 6$. Muốn vậy chỉ cần chứng minh $p_{k+3} - p_{k+1} \geq 6$.

Thật vậy nếu $p_{k+3} - p_{k+1} < 6$ mà p_{k+3}, p_{k+1} lẻ nên $p_{k+3} = p_{k+1} + 4 \Rightarrow p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}$ là 3 số lẻ liên tiếp $\Leftrightarrow$ một trong ba số phải chia hết cho 3. Điều này vô lí vì $p_{k+1} > 3$ $(k \geq 2)$

Đặt $f(x) = 2001x^3 - 2nx^2 - 9n(p_{n+1} + p_{n+2})x - 1945n^3$.

Ta có $f(n) = 54n^3 - 9n^2(p_{n+1} + p_{n+2}) \leq 0$ do $p_{n+1} + p_{n+2} \geq 6n$.

Mà $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \to \exists x_0 \in [n, \infty)$ sao cho $f(x_0) = 0$

Nhận xét. Các bạn sau đây giải tốt : *Phạm Lê Thịnh*, *Phạm Tấn Độ*, THPT Lê Khiết, **Quảng Ngãi**, *Đặng Trọng Nam*, 11T2, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Bùi Quang Hảo*, 11, THPT **Thái Nguyên**, *Nguyễn Ngọc Sáng*, 11C, THPT NK **Hà Tĩnh** ; *Hoàng Ngọc Minh*, 17A1, THPT Hùng Vương, **Phú Thọ** ; *Phùng Văn Bình*, 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Trần Nhật Thu*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An** ; *Phan Thành Nam*, 11T2, THPT Lương Văn Chánh, **Phú Yên**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/296. *Giả sử $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dãy số (u_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ được xác định bởi : $u_1 > 0$ và $u_{n+1} = u_n \sin^2\alpha + \dfrac{2002.\cos^2\alpha}{u_n^{\operatorname{tg}^2\alpha}}$ với $n = 1, 2, 3,...$.*

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn khi $n \to +\infty$ và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Xét hàm số liên tục

$$f(u) = u\sin^2\alpha + \frac{2002.\cos^2\alpha}{u^{\mathrm{tg}^2\alpha}} \text{ với } u > 0.$$

Ta có $f'(u) = \sin^2\alpha\left(1 - \dfrac{2002}{u^{\frac{1}{\cos^2\alpha}}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow u = 2002^{\cos^2\alpha}$

Do đó ta có bảng biến thiên sau :

x	0		$2002^{\cos^2\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2002^{\cos^2\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$

Như vậy $f(u) > 2002^{\cos^2\alpha}$ với mọi $u > 0$, $u \neq 2002^{\cos^2\alpha}$ (1) và

$$f\left(2002^{\cos^2\alpha}\right) = 2002^{\cos^2\alpha}$$

Tức là phương trình giới hạn $f(u) = u$ chỉ có một nghiệm $u = 2002^{\cos^2\alpha}$. Lại chú ý nếu $u > 2002^{\cos^2\alpha}$ thì

$$u - f(u) = \cos^2\alpha\left(u - \frac{2002}{u^{\mathrm{tg}^2\alpha}}\right) > 0 \qquad (2)$$

vì $u.u^{\mathrm{tg}^2\alpha} = u^{\frac{1}{\cos^2\alpha}} > 2002$

Do đó ta có $u_1 = 2002^{\cos^2\alpha} \Rightarrow u_1 = u_2 = u_3 = \ldots = 2002^{\cos^2\alpha}$

$u_1 \neq 2002^{\cos^2\alpha} \Rightarrow u_2 > u_3 > u_4 > \ldots$

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2002^{\cos^2\alpha}$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dạng cơ bản, có ý hay. Tòa soạn nhận được lời giải của hơn 70 bạn, hầu hết các bạn có cách giải theo nội dung như trên. Một số ít bạn chứng minh các BĐT (1) và (2) bằng bất đẳng thức Côsi suy rộng. Một vài bạn, do không xem xét cẩn thận nên đã không nêu ra được trường hợp $u_1 < 2002^{\cos^2\alpha}$, $u_2 > u_3 > u_4 > \ldots \to 2002^{\cos^2\alpha}$

2) Các bạn sau có lời giải tốt : **Phú Thọ :** *Nguyễn Thế Tùng*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Quốc Khánh*, 10T, THPT Hàn Thuyên ; **Nam Định :** *Vũ Khắc Kỷ, Nguyễn Đức Tâm*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh ; **Nghệ An :** *Đào Xuân Hoàng, Phan Đăng Học*, PTCT, ĐH Vinh ; **Bến Tre :** *Nguyễn Tiến Dũng*, 10T, THPT Bến Tre ; ...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/296. *Cho các số nguyên dương k, n sao cho k < n. Chứng minh rằng*

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(k+1)^{k+1}(n-k+1)^{n-k+1}} < \frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n^n}{k^k(n-k+1)^{n-k}}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số $1 + \frac{1}{n}$ và 1 số 1 ta được :

$$n\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 > (n+1)\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$\Rightarrow \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \Rightarrow$ Dãy số $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ là một dãy tăng và $x_1 \ldots x_k = \dfrac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}$. Vậy với $k > 1$ ta có :

$$(x_1.x_2 \ldots x_{k-1})(x_1x_2\ldots x_{n-k}) < x_1x_2\ldots x_{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{k^k}{k!}\,\frac{(n-k+1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!} < \frac{n^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{k!(n-k)} < \frac{n^n}{k^k(n-k+1)^{n-k}} \quad (1)$$

Tương tự, áp dụng BĐT Côsi cho n số $1 - \frac{1}{n}$ và 1 số 1 ta được :

$$n\left(1-\frac{1}{n}\right) + 1 > (n+1)\sqrt[n+1]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

$\Rightarrow$ Dãy số $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ là dãy giảm và

$$y_1 \ldots y_k = \frac{(k+1)^{k+1}}{k!}$$

Suy ra $(y_1y_2\ldots y_k)(y_1y_2\ldots y_{n-k}) > y_1y_2\ldots y_n$

$$\Rightarrow \frac{(k+1)^{k+1}}{k!} \cdot \frac{(n-k+1)^{n-k+1}}{(n-k)!} > \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(k+1)^{k+1}(n-k+1)^{n-k+1}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Nhận xét. Từ chứng minh trên ta thấy (1) đúng với $k > 1$ $\forall n > k$. Trường hợp $k = 1$, $n = 2$ thì (1) không đúng.

2) Các bạn đều giải đúng theo phương pháp quy nạp và dựa vào hai nhận xét về tính đơn điệu của dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$.

Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hòa Bình: *Ngô Thất Sơn*, 10T, *Hà Hữu Cao Trình*, *Vũ Hữu Phương*, 11T, *Nguyễn Lâm Tuyền*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Phú Thọ :** *Hoàng Ngọc Minh*, 11A, THPT chuyên Hùng Vương ; **Bắc Ninh :** *Phạm Thái Sơn*, 10T, THPT Hàn Thuyên ; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 11T, THPT Sa Đéc ; **Đồng Nai:** *Lê Phương*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh ; **Vĩnh Phúc :** *Đỗ Anh Đông*, 10A1, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Phú Yên :** *Phan Thành Nam*, 11T2, THPT Lương Văn Chánh ; **Hà Nội :** *Vũ Đình Thế*, 11AT, *Trần Thái Sơn*, *Trần Hải Sơn*, 10B Tin, *Lê Hùng Việt Bảo*, 10AT, ĐHKHTN – ĐHQG, *Nguyễn Chí Hiệp*, 11A1, ĐHSP Hà Nội ; **Hải Dương :** *Phạm Huy Hoàng*, *Phạm Thành Trung*, *Nguyễn Thành Nam*, 11T, *Nguyễn Tiến Thành*, 11L, THPT Nguyễn Trãi ; **Bình Định :** *Nguyễn Hoài Phương*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Bến Tre :** *Nguyễn Tiến Dũng*, 10T, THPT chuyên Bến Tre ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Trần Võ Huy*, 11T, ĐHKHTN Tp. HCM ; **Nam Định:** *Nguyễn Đức Tâm*, *Vũ Khắc Kỳ*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh ; **Quảng Trị:** *Lê Nhật Tân*, 11T, *Trần Tiến Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Phan Quốc Hưng*, 12B, THPT Hải Lăng ; **Nghệ An :** *Trần Nhật Thu*, 11A1, *Nguyễn Thị Quỳnh Trang*, 10A2, THPT Phan Bội Châu, **Thanh Hóa :** *Lê Mạnh Trung*, 11I, *Mai Quang Thành*, *Bùi Hồng Quân*, 11T1, *Nguyễn Minh Công*, 12T, THPT chuyên Lam Sơn.

NGUYỄN VĂN MẬU

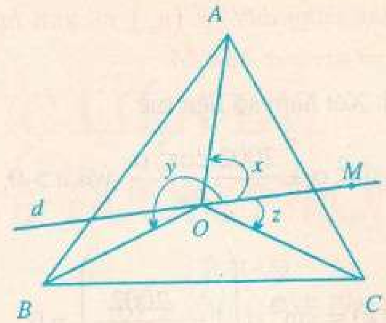
Bài T9/296. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Một đường thẳng d đi qua điểm O lần lượt tạo với các đường thẳng OA, OB, OC các góc nhọn α, β, γ. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức*

$$\sin 4A.\sin^2\alpha + \sin 4B.\sin^2\beta + \sin 4C.\sin^2\gamma$$

là không đổi khi đường thẳng d quay quanh điểm O.

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn *Đỗ Hoàng Huy*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**)

Lấy M thuộc d ($M \neq 0$).



Đặt $\begin{cases} (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = x \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) = y \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC}) = z \end{cases}$

Ta thấy : $4A \equiv 2(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \pmod{2\pi}$

$\equiv 2\left((\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})\right) \pmod{2\pi}$

$\equiv 2(z - y) \pmod{2\pi}$

Tương tự như vậy :

$4B \equiv 2(x - z) \pmod{2\pi}$

$4C \equiv 2(y - x) \pmod{2\pi}$

Từ đó, ta có :

$\sin 4A.\sin^2\alpha + \sin 4B.\sin^2\beta + \sin 4C.\sin^2\gamma$

$= \sin 2(z - y)\sin^2 x + \sin 2(x - z)\sin^2 y + \sin 2(y-x)\sin^2 z$

$= \frac{1}{2}(\sin 2(z-y)(1-\cos 2x) + \sin 2(x-z)(1-\cos 2y)$

$+ \sin 2(y - x)(1 - \cos 2z))$

$= \frac{1}{2}\left(\sin 2(z - y) + \sin 2(x - z) + \sin 2(y - x)\right)$

$-\frac{1}{2}\left(\sin 2(z - y)\cos 2x + \sin 2(x - z)\cos 2y +\right.$

$\left.+ \sin 2(y - x)\cos 2z\right) \quad (1)$

Ta có :

$\sin 2(z - y)\cos 2x + \sin 2(x - z)\cos 2y +$

$+ \sin 2(y - x)\cos 2z$

$= \frac{1}{2}\left(\sin(z - y + x) + \sin(z - y - x) +\right.$

$+ \sin(x - z + y) + \sin(x - z - y) +$

$\left.+ \sin(y - x + z) + \sin(y - x - z)\right)$

$= \frac{1}{2}\left((\sin(z - y + x) + \sin(y - x - z)\right) +$

$$+\left(\sin(z-y-x)+\sin(x-z+y)\right)+$$
$$+\left(\sin(x-z-y)+\sin(y-x+z)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(0+0+0)=0 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$\sin 4A\sin^2\alpha+\sin 4B\sin^2\beta+\sin 4C\sin^2\gamma$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sin 2(z-y)+\sin 2(x-z)+\sin 2(y-x)\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C)$$
$$=2\sin A\sin B\sin C \text{ (không đổi)}$$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán hay. Tuy nhiên nó sẽ hay hơn nếu được phát biểu ở dạng tổng quát hơn.

Cho tam giác ABC và điểm O khác A, B, C. Với mọi điểm M khác O, chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào vị trí của M :

$$\sin 2(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})\sin^2(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})+\sin 2(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})\sin^2(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM})$$
$$+\sin 2(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\sin^2(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OM})$$

Chú ý : Tam giác ABC không buộc phải nhọn. Điểm O không buộc phải là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

2) Nhờ bài toán tổng quát trên, có thể giải ngay được các bài toán chung sau đây.

Bài toán 1. Cho tam giác đều ABC, tâm O. Đường thẳng d đi qua O. Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B, C trên d. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức

$$AA'^2+BB'^2+CC'^2$$

là không đổi khi d quay quanh điểm O.

Bài toán 2. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Đường thẳng d đi qua H. Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B, C trên d. Chứng minh rằng :

$$AA'^2\,\mathrm{tg}A+BB'^2\,\mathrm{tg}B+CC'^2\,\mathrm{tg}C=2S(ABC)$$

3) Nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Tuy nhiên, vì không biết sử dụng góc định hướng giữa hai véctơ nên đa số các lời giải đều phụ thuộc vào hình vẽ.

4) Ngoài bạn *Đỗ Hoàng Huy*, các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt : **Lâm Đồng :** *Phạm Hoàng Duy Thái*, 12T, THPT Thăng Long; **Nghệ An :** *Nguyễn Thị Quỳnh Trang*, 10A2, *Lê Thủy Ngân*, 10A1, THPT Phan Bội Châu ; **Đà Nẵng :** *Phan Anh Tuấn*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn ; **Hòa Bình :** *Vũ Hữu Phương*, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ ; **Hải Dương :** *Lê Quang Đạo*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Hà Nam:** *Trần Quốc Sơn*, THPT chuyên Hà Nam ; **Quảng Trị:** *Phan Quốc Hưng*, 12B, THPT Hải Lăng ; **Hà Tây :** *Nghiêm Duy Trung*, 12A1, THPT Đồng Quan ; **Hà Nội :** *Nguyễn Phương Nhung*, 11AT, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/296. *Cho tứ diện gần đều ABCD (nghĩa là BC = DA, CA = DB, AB = DC). Chứng minh rằng nếu M là một điểm tùy ý nằm trong tứ diện thì :*

$$MA+MB+MC+MD\ge$$
$$\ge 3(MA'+MB'+MC'+MD') \qquad (*)$$

trong đó A', B', C', D' lần lượt là hình chiếu của M trên các mặt BCD, CDA, DAB, ABC.

Lời giải. Trước hết, để cho tiện trình bày ta hãy thay đổi kí hiệu : A, B, C, D lần lượt được thay bởi A_1, A_2, A_3, A_4, cũng vậy, A', B', C', D' lần lượt được thay bởi A'_1, A'_2, A'_3, A'_4. Thế thì BĐT (*) cần chứng minh bây giờ được viết dưới dạng : $\sum_{i=1}^{4}MA_i\ge 3\sum_{i=1}^{4}MA'_i$

($\forall M\in$ miền tứ diện $[A_1A_2A_3A_4]$)

Vì tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là gần đều nên các mặt là những tam giác bằng nhau, và do đó có diện tích bằng nhau. Sử dụng công thức thể tích, dễ dàng chứng minh được :

– Các đường cao A_iH_i bằng nhau, ta đặt : $A_iH_i=h$ ($i=1,2,3,4$) (1)

– Tổng các khoảng cách từ mọi điểm M nằm trong tứ diện đến các mặt là không đổi :

$$\sum_{i=1}^{4}MA'_i=h \qquad (2)$$

Mặt khác, sử dụng BĐT tam giác và BĐT về đường vuông góc và đường xiên, ta lại có :

$$A_iM+MA'_i\ge A_iA'_i\ge A_iH_i=h$$
$$(i=1,2,3,4) \qquad (3)$$

Từ đó ta được :

$$\sum_{i=1}^{4}(MA_i+MA'_i)\ge 4h$$

và do đó :

$$\sum_{i=1}^{4}MA_i\ge 4h-\sum_{i=1}^{4}MA'_i \qquad (4)$$

Cuối cùng, từ (2) và (4) ta thu được BĐT (*) cần tìm.

Đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi $M\in A_iH_i$ ($\forall i$), nghĩa là các đường cao của tứ diện đồng quy và điểm M trùng với điểm đồng quy đó, là trực tâm H của tứ diện. Nói khác đi, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi và tứ diện gần đều $A_1A_2A_3A_4$ cũng là một tứ diện trực tâm, và do đó, ta phải có thêm các điều kiện sau:

$$A_2A_3^2+A_1A_4^2=A_3A_1^2+A_2A_4^2=A_1A_2^2+A_3A_4^2$$

Từ đó suy ra : $A_2A_3=A_1A_4=A_3A_1=A_2A_4=A_1A_2=A_3A_4$ và tứ diện là đều, và điểm M trùng với trọng tâm G, trực tâm H và tâm O các mặt cầu nội, ngoại tiếp của tứ diện đều.

Nhận xét. 1) BĐT (*) cần tìm có thể được suy ra rất nhanh chóng nhờ sử dụng ba kết quả (tính chất) sau đây về tính chất của tứ diện liên quan đến "điểm cực tiểu" (điểm Fermat) và BĐT giữa các bán kính r, R của các mặt cầu nội, ngoại tiếp một tứ diện.

– Trong một tứ diện gần đều $ABCD$, ta có BĐT sau :

$MA + MB + MC + MD \geq OA + OB + OC + OD = 4R$ ($\forall M$) và tâm O của mặt cầu ngoại tiếp là "điểm cực tiểu" hay điểm Fermat của tứ diện gần đều.

– Với mọi tứ diện, ta có BĐT : $R \geq 3r$

Đẳng thức xảy ra ($R = 3r$) khi và chỉ khi tứ diện là đều.

– Tổng các khoảng cách từ một điểm nằm trong một tứ diện gần đều đến các mặt của nó là không đổi, và bằng chiều cao của tứ diện, hay 4 lần bán kính r mặt cầu nội tiếp. Bạn nào chưa biết các kết quả này, hãy tự chứng minh lấy.

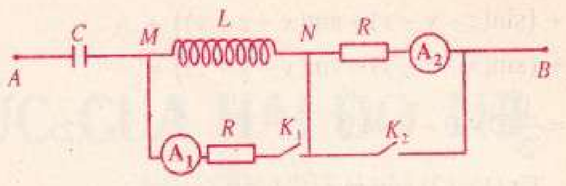
2) Lời giải của bài toán như đã nêu ra ở trên chỉ đòi hỏi vận dụng kiến thức tối thiểu, đơn giản nhất. Một số bạn, ngoài phương pháp thể tích cũng còn sử dụng phương pháp véctơ (tích vô hướng) và lời giải đưa ra còn rườm rà, không gọn. Rất đáng tiếc, cũng còn nhiều bạn chưa chỉ ra được dấu đẳng thức xảy ra khi nào hoặc chỉ nói được khi bốn đường cao đồng quy và M trùng với điểm đồng quy đó. Có bạn vội vàng khẳng định đẳng thức không thể xảy ra vì tứ diện đã cho là gần đều, không phải là tứ diện trực tâm ! Các bạn này không hiểu rõ thực chất vấn đề là tìm điều kiện cần và đủ về tứ diện được xét và vị trí hình học của điểm M đối với tứ diện đó để đẳng thức xảy ra.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt, tương đối gọn gàng :

Hà Nội : *Đỗ Xuân Diễn*, 11A1, *Văn Anh Tuấn*, 11A2, PTCTT–ĐHSP, *Lê Hùng Việt Bảo*, 10A CT ĐHKHTN ; **Hải Dương :** *Phan Tuấn Thành*, 10T, *Nguyễn Thế Lộc, Phạm Thành Trung*, 11T, THPT Nguyễn Trãi ; **Phú Thọ :** *Lê Việt Hà, Nguyễn Thế Tùng*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Thái Nguyên :** *Nguyễn Minh Giang*, 11A2, THPT Lương Ngọc Quyến ; **Nam Định :** *Nguyễn Anh Thái*, 11T, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Ninh Bình:** *Lê Văn Nghĩa, Lê Xuân Quân*, 11T, THPT chuyên Lương Văn Tụy, *Vũ Văn Phin*, 12C1, THPT B Yên Mô ; **Thanh Hóa :** *Mai Xuân Tráng*, 11A, THPT Lê Lợi, Thọ Xuân ; **Nghệ An :** *Phan Công Mạnh, Lê Duy Thứ*, 11A1, THPT Nghi Lộc 1 ; **Quảng Trị :** *Phan Quốc Hưng*, 12B, THPT Hải Lăng ; **Bình Định :** *Nguyễn Hoài Phương*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Phú Yên :** *Phan Thành Nam*, 11T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh ; **Lâm Đồng :** *Phan Hoàng Duy Thái*, 12T, THPT Thăng Long, Tp. Đà Lạt ; **Bình Thuận:** *Nguyễn Phước Tài*, 11A2, THPT Trần Hưng Đạo, Phan Thiết; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Trần Võ Huy*, 11T, PTNK ĐHQG Tp. HCM ; **Bà Rịa – Vũng Tàu :** *Bùi Hoàng Giang*, 11A1, THPT Vũng Tàu.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

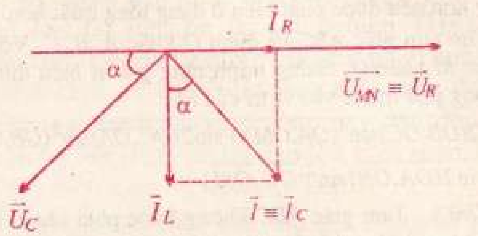
Bài L1/296. *Cho mạch điện như hình vẽ. $u_{AB} = 250\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V), $C = 20\mu F$, cuộn dây thuần cảm. Khi K_1, K_2 đều đóng, ampe kế*



A_1 chỉ 1,57A. Khi K_1, K_2 đều mở ampe kế A_2 chỉ 1,57A. Bỏ qua điện trở của dây nối, các khóa K_1, K_2 và các ampe kế. Tìm R, L. Viết biểu thức dòng điện mạch chính khi K_1, K_2 đều đóng.

Lời giải.

• Khi K_1, K_2 đều đóng, ta có $u_{AB} \equiv u_{AN}$ và giản đồ vectơ như hình vẽ ;



$$I_R = \frac{U_R}{R}\ ;\ I_L = \frac{U_R}{Z_L}\ ;\ \cos\alpha = \frac{I_L}{I} = \frac{U_R}{IZ_L};$$

$$\sin\alpha = \frac{I_R}{I} = \frac{U_R}{I.R}\ ;\ U_C = IZ_C\ ;\ \vec{U} = \overrightarrow{U_C} + \overrightarrow{U_R}$$

$$\Rightarrow U = \sqrt{(U_C\sin\alpha)^2 + (U_C\cos\alpha - U_R)^2}$$

$$\Rightarrow U = U_R\sqrt{\frac{Z_C^2}{R^2} + \left(\frac{Z_C}{Z_L} - 1\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{U_R}{R} = \frac{U}{\sqrt{R^2\left(\frac{Z_C}{Z_L} - 1\right)^2 + Z_C^2}} \quad (1)$$

Theo đề bài $I_R = \frac{U_R}{R} = 1{,}57$A. Ta có nhận xét : $\frac{U}{Z_C} = \frac{250}{500/\pi} = 1{,}57\text{A} = \frac{U_R}{R}$ nên từ (1) suy ra : $Z_L = Z_C = \frac{500}{\pi}\ (\Omega) \Rightarrow L = 0{,}51H$.

• Khi K_1, K_2 đều mở, với $Z_L = Z_C$, ampe kế A_2 sẽ chỉ $I = \frac{U}{R} = 1{,}57\text{A} \Rightarrow R = \frac{250}{1{,}57} \approx 159\ (\Omega)$

• Khi K_1, K_2 đều đóng, theo trên $Z_C = Z_L = R$ $\Rightarrow I_R = I_L \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ và $I = I_R\sqrt{2}$; ngoài ra :

$U_R = I_R.R = 250$ (V) ; $U_C = IZ_C = \sqrt{2}.I_RZ_C = 250\sqrt{2}$ (V), mà $U = 250$ (V), nghĩa là : $U_C^2 = U_R^2 + U^2 \Rightarrow \vec{U} \perp \vec{U_R}$, hay $\vec{U}$ trễ pha góc $\alpha = \frac{\pi}{4}$ so với $\vec{I}$. Do đó biểu thức của i là :

$$i = (1,57\sqrt{2})\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

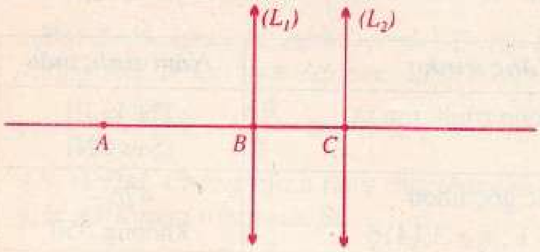
$$= 3,14\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (A)}$$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn :

Bắc Giang : *Lê Nho Thủy*, 10B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Nghệ An :** *Nguyễn Mạnh Hùng*, 12A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Thị Thu Hằng*, 11 Toán, NK Hàn Thuyên ; **Thanh Hóa :** *Lê Đông Hải*, 12G, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa ; **Vĩnh Phúc :** *Hoàng Vĩnh Hưng, Đào Đặng Hòa*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Yên Bái :** *Ngọc Anh*, 11A2, THPT chyên Nguyễn Tất Thành.

MAI ANH

Bài L2/296. *Cho hệ hai thấu kính đồng trục L_1, L_2 với $BC = 1m$. Vật sáng MN vuông góc với trục chính của hệ.*



Thấu kính L đặt tại A có thể thay thế hệ (L_1, L_2) sao cho với bất kì vị trí nào của MN đặt trước L đều cho độ phóng đại như của hệ.

Đặt MN tại A :

+ L_1, L_2 vẫn ở B, C ; sau đó đảo vị trí cho nhau ta được ảnh qua hệ sau khi đảo bằng 4 lần ảnh qua hệ khi chưa đảo. Hai ảnh ngược chiều nhau.

+ Chỉ dùng L_2 đặt tại B thì cho ảnh của MN tại C.

Tìm f, f_1, f_2 và AB.

Lời giải. Ta có các sơ đồ tạo ảnh :

$$MN \xrightarrow[d\ \ d']{L} M'N' \text{ và } MN \xrightarrow[d_1\ \ d'_1]{L_1} M_1N_1 \xrightarrow[d_2\ \ d'_2]{L_2} M_2N_2$$

• Khi đặt MN tại A ta có $d = d' = 0 \Rightarrow M'N' \equiv MN \equiv L \Rightarrow k = 1$ (1). Theo đề bài, chỉ dùng L_2 đặt tại B cho ảnh ở C, ta thấy ảnh này cũng chính là ảnh của MN qua hệ (L_1, L_2) sau khi đảo vị trí của L_1, L_2 cho nhau. Độ phóng đại khi đó là : $k_1 = -\frac{BC}{AB} = -\frac{100}{AB}$ (2).

Mặt khác độ phóng đại qua hệ (L_1, L_2) là :

$$k' = \frac{f_1}{f_1 - d_1}.\frac{f_2}{f_2 - d_2} \quad (3)$$

Theo đề bài ta có : $k' = k = 1$ và $k_1 = -4k'$, suy ra : $-\frac{100}{AB} = -4.1 \Rightarrow AB = 25$cm, và do đó $f_2 = \frac{AB.BC}{AB + BC} = 20$cm. Hơn nữa : $d_1 = d + AB = AB = 25$cm ; $d_2 = BC - d'_1 = 100 - \frac{25f_1}{25 - f_1}$.

Thay vào (3) ta được : $k' = \frac{20f_1}{2000 - 105f_1} = 1$ $\Rightarrow f_1 = 16$cm. Ngoài ra, với vị trí bất kì của MN trước L thì : $d_1 = d + 25 \Rightarrow d_2 = BC - d'_1 = \frac{84d + 500}{d + 9}$. Nhưng theo đề bài, với d bất kì ta luôn có $k = k' \Rightarrow \frac{f}{f - d} = \frac{f_1}{f_1 - d_1}.\frac{f_2}{f_2 - d_2}$ suy ra $\frac{f}{f - d} = \frac{320}{64d - 320} = \frac{-5}{-5 - d} \Rightarrow f = -5$cm

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn :

Yên Bái : *Phan Thị Kim Hoa*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành ; **Quảng Ngãi :** *Trần Duy Khiêm*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết ; **Hà Tĩnh :** *Lê Hữu Hà*, *Lê Đức Đạt*, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh ; **Vĩnh Phúc :** *Trần Bá Bách*, 12A2, *Chu Anh Dũng*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Nguyễn Duy Bình*, 12A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch ; **Hải Dương :** *Vũ Xuân Thắng*, 11 Lí, THPT Nguyễn Trãi ; **Nghệ An :** *Trần Quang Vũ*, 11A7, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Hội*, 11A1, THPT Thuận Thành số 1 ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Văn Thiện*, 11K, THPT Hậu Lộc 2 ; **Bắc Giang :** *Lê Nho Thủy*, 10B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Quảng Bình :** *Dương Đức Anh*, 12 Lí, THPT chuyên Quảng Bình, Đồng Hới.

MAI ANH

Nhắn tin :

Các bạn được nhận tặng phẩm trên báo THTT từ tháng 5 năm 2002 hãy gửi địa chỉ mới nhất về Tòa soạn để tiện liên hệ.

THTT

Cuộc chơi 2002 : AI BIẾT NHIỀU HƠN ?

Tìm hiểu

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Đến nay Toán học và Tuổi trẻ đã ra mắt bạn đọc được 300 số. Nhân dịp này CLB thử tài của các bạn thông qua các câu hỏi sau :

1) Số báo THTT đầu tiên xuất bản vào tháng, năm nào ? **Báo TH&TT** đổi thành **Tạp chí TH&TT** từ tháng, năm nào ?

2) Từ số tháng 1/2001 đến số tháng 6/2002 đã có bao nhiêu bài viết cho chuyên mục **Toán học và đời sống** và cho chuyên mục **Lịch sử toán học** ?

3) Bạn có biết các chuyên mục cho ở bảng dưới đây xuất hiện lần đầu tiên từ tháng, năm nào không ? Hãy điền vào các ô trống của bảng cho đúng nhé !.

Chuyên mục	*Tháng, năm xuất hiện*
Dành cho các bạn THCS	
Diễn đàn dạy học Toán	
Dành cho các bạn chuẩn bị thi Đại học	
Toán học muôn màu	
Nhìn ra thế giới	

Tặng phẩm đang chờ các bạn giải đáp đúng và nhanh !

THANH HOA

Kết quả : MỘT SỐ PHÁT MINH TOÁN HỌC

CLB xin giới thiệu một số công trình tiêu biểu của các nhà toán học thời xưa thông qua bảng thống kê chính xác sau :

Nhà toán học	*Quê hương*	*Công trình*	*Năm sinh, mất*
Lưu Huy	Trung Hoa	Giải các hệ phương trình, tìm ra $\pi \approx 3,141$	Thế kỉ III (Sau CN)
A–ri–ap–ha–ta 1 (Aryabhata 1)	Ấn Độ	Bảng tính sin các góc nhọn $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\pi \approx 3,1416$	476 – khoảng 550
Ô–ma Khai–am (Omar Khayam)	Iran	Phân loại, giải phương trình bậc 2, bậc 3 với ý nghĩa hình học	khoảng 1048 – 1131
Ê–ra–tô–xten (Ératosthène)	Hy Lạp	Phương pháp tìm số nguyên tố (PP sàng Ê–ra–tô–xten)	Khoảng 276–194 (Trước CN)
Ptô–lê–mê C. (Ptolémée C.)	Hy Lạp	Bảng tính sin. Công thức cộng cung. $\pi \approx \frac{377}{120}$	Khoảng 100–178
Tổ Xung Chi (Zu Chong Zhi)	Trung Hoa	$\pi \approx \frac{22}{7}$, $\pi \approx \frac{355}{113}$. Ma phương bậc 3	430 – 501

Những bạn sau đã điều chỉnh đúng bảng thống kê, đồng thời trình bày thêm về các nhà toán học đó, và được nhận tặng phẩm kì này :

Dương Hồng Huệ, Số nhà 48, tổ 51, khu 6, phường Hòn Gai, Tp Hạ Long, **Quảng Ninh** ; *Phạm Tùng Dương*, 97 Văn Cao, Quận Ngô Quyền ; *Đường Hải Long*, 8B, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng** ; *Cao Phương Huy*, THCS Nghi Diên, Nghi Lộc, **Nghệ An** ; *Võ Thị Thúy Nga*, 10C, THPT Ba Tơ, Ba Tơ, **Quảng Ngãi** ; *Trần Thanh Giang*, 467/72 Nơ Trang Long, P13, Quận Bình Thạnh, **Tp Hồ Chí Minh**.

CLB

Giải đáp bài : NGỤY BIỆN

"Nhà toán học nhí" đã lập luận sai lầm ở chỗ : *Giả sử p là một hợp số. Khi đó p phải chia hết cho một số nguyên tố nào đó thuộc dãy $p_1, p_2, ..., p_n$.* Thí dụ sau đây cho thấy $p = p_1p_2...p_n + 1$ có thể chia hết cho một số nguyên tố lớn hơn p_n :

$$p = 2.3.7.11.13.17 + 1 = 510511 = 19 \times 26869$$

Đó chính là phản thí dụ bác bỏ "phát minh" trên. Sở dĩ có ngụy biện trên vì tác giả của "định lí" đã phỏng theo phép chứng minh của Ơ-clit về tính vô hạn của dãy số nguyên tố (một kết quả hết sức đẹp đẽ của Số học) mà hẳn các bạn còn nhớ !

Các bạn thấy đấy, phép chứng minh của Ơ-clit và "nhà toán học nhí" chỉ khác nhau đúng một từ "hữu hạn". Tiếc thay ! từ này lại là mấu chốt của vấn đề dẫn đến chỗ sai của "định lí" ấy đấy !

Nhận xét : Những bạn sau đây đã chỉ rõ sai lầm trong phép chứng minh "định lí", đồng thời đưa được các phản thí dụ đúng để bác bỏ "phát minh" của "nhà toán học nhí" được nhận tặng phẩm là :

Hà Nội : *Văn Anh Tuấn*, 11A2, khối PTCT–Tin ĐHSP Hà Nội ; *Tô Xuân Nam*, 6F, THCS Giảng Võ, Quận Ba Đình ; **Bắc Ninh :** *Lưu Thị Thu Trang*, 8A, THCS Yên Phong ; **Nam Định :** *Phạm Thị Linh Quyên*, T21C, trường CĐSP Nam Định ; **Hải Dương :** *Trần Quốc Hoàn*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà.

Khen thêm các bạn : Đường Hải Long, 8B, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng** ; *Bùi Văn Nghĩa*, 9A, THCS Trần Mai Ninh, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Lê Minh Hoàng*, và *Nguyễn Quang Huy*, 10 Chuyên Toán ĐH Vinh, **Nghệ An** ; *Nguyễn Hà Phương*, 10 Toán, THPT chuyên **Thái Nguyên** ; *Phạm Thái Sơn*, 10T, THPT NK Hàn Thuyên, **Bắc Ninh.**

NGỌC HIỂN

CHO MẤY ĐIỂM ?

Trong một đề thi tuyển sinh ĐH năm 1997 có bài: *Hãy xác định a để đường cong $y = 3^x(3^x - a + 2) + a^2 - 3a$ tiếp xúc với đường cong $y = 3^x + 1$.*

Một thí sinh đã làm bài như sau :

Hai đường cong nói trong đề bài tiếp xúc nhau khi và chỉ khi PT sau có nghiệm kép :

$$3^x(3^x - a + 2) + a^2 - 3a = 3^x + 1 \quad (1)$$

Đặt ẩn phụ $t = 3^x$ $(t > 0)$ thì PT (1) có nghiệm kép khi và chỉ khi PT sau có nghiệm kép :

$$t^2 + (1 - a)t + a^2 - 3a - 1 = 0$$

Điều này xảy ra $\Leftrightarrow$ Biệt thức

$$\Delta = (1-a)^2 - 4(a^2-3a-1) = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 10a - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{1,2} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{3}$$

Vì $t = 3^x > 0$ nên chỉ có giá trị $a = \dfrac{5 + 2\sqrt{10}}{3}$ thỏa mãn đề bài .

Nếu bạn là giám khảo thì bạn cho bài làm này mấy điểm ? Vì sao ?

HOÀNG NGUYỄN
(Thái Nguyên)

Giải đáp: BAO NHIÊU HỌC SINH?

Gọi số học sinh không đạt giải là $\overline{abcd}$ $(0 < a, b, c, d \leq 9$ (1)). Từ giả thiết bài ra ta có :

$1000a + 100b + 10c + d + a + b + c + d = 2392$

hay $1001a + 101b + 11c + 2d = 2392$ (2)

Từ (2) suy ra $0 < a \leq 2$; $0 < b \leq 3$ (3)

Từ (1), (2) ta có

$1001a \geq 2392 - 909 - 99 - 18 = 1366$, suy ra $a \geq 2$ (4)

Từ (3), (4) ta được $a = 2$

$\Rightarrow 101b + 11c + 2d = 390$ (5)

Từ (1), (5) có $101b \geq 390 - 99 - 18 = 273 \Rightarrow b \geq 3$

Từ đó và (3) ta được $b = 3 \Rightarrow 11c + 2d = 87$ (6)

Từ (1), (6) có $11c \geq 87 - 18 = 69 \Rightarrow c \geq 7$

Từ đó và (6) chỉ xảy ra $c = 7$, do đó $d = 5$.

Số học sinh không đạt giải là 2375 và $2375 + (2 + 3 + 7 + 5) = 2392$

Vậy số học sinh đạt giải quốc tế là 2, đạt giải quốc gia là 3, đạt giải tỉnh là 5, đạt giải của trường là 7.

Nhận xét. Hơn 100 bài giải gửi về tòa soạn đều giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt và gửi bài đến sớm hơn được nhận tặng phẩm :

Hà Nội : *Bùi Văn Đại*, 11 Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Bắc Ninh :** *Trần Bính Tùng*, 10 Toán, THPT NK Hàn Thuyên ; **Nam Định :** *Nguyễn Minh Đức*, 11A1, THPT Xuân Trường B; **Nghệ An :** *Nguyễn Thế Anh*, 12Q, THPT Lê Viết Thuật, Tp. Vinh ; **Thanh Hóa :** *Trần Hoài Thu*, 9A, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa.

Các bạn sau cũng có lời giải tốt : *Nguyễn Hoàng Việt*, 8H, THCS Lê Quý Đôn, *Nguyễn Quỳnh Hoa*, 14C, X3, tổ 72 Dịch Vọng, Cầu Giấy, **Hà Nội :** *Vũ Hồng Lụa*, 9B, THCS TT Tế Tiêu, Mỹ Đức, **Hà Tây** ; *Hoàng Đức Quang*, 11A, THPT Đào Duy Từ, Đồng Hới, **Quảng Bình** ; *Nguyễn Thị Cẩm Nhung*, lớp 8^3, THCS Nguyễn Cư Trinh, Hương Sơ, **Tp. Huế**

NGỌC HIỂN

SÁU LẦN DÙNG THƯỚC VÀ COMPA

Hiền đố Hà : *Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng và điểm D cách đều ba điểm đó. Muốn dựng tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC bạn cần phải mấy lần dùng thước kẻ và mấy lần dùng compa ?*

Hà : *Tôi chỉ cần dùng thước kẻ và compa cả thảy 6 lần thôi.*

Bạn Hà đã làm như thế nào nhỉ ?

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Tp. Hồ Chí Minh)

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 39
Số 300 (6-2002)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

TÌM MUA TOÁN HỌC TUỔI TRẺ Ở ĐÂU ?

Hà Nội : 81 Trần Hưng Đạo, 187 B Giảng Võ, 25 Hàn Thuyên, 23 Tràng Tiền, 232 Tây Sơn ...
Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh, ... ***Tp. Hồ Chí Minh :*** 231 Nguyễn Văn Cừ và 240 Trần Bình Trọng, Q. 5,... Các hiệu sách lớn trong cả nước. Bạn có thể đặt mua cả năm hoặc từng quý ở các Bưu điện địa phương. Các đại lí sách báo muốn phát hành tạp chí THTT xin liên hệ với :

Trung tâm Phát hành sách tham khảo, NXB Giáo dục,
57 Giảng Võ, Hà Nội, ĐT : 04.5141253

TOÁN HỌC MUÔN MÀU *(Tiếp theo bìa 2)*

Tính sin $\widehat{ASM} = \frac{AM}{SM} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ mà $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (xét ΔABC có $\hat{B} = \hat{C} = 72^\circ$ và phân giác BE) nên $\widehat{ASM} = 18^\circ \Rightarrow \widehat{AMS} = 72^\circ$, $\widehat{SMN} = 108^\circ$, suy ra $MNPQS$ là ngũ giác đều.

Có các cách gấp khác nhưng nhiều thao tác hơn.

Trường hợp 2. (h. 5) Giả sử hình vuông $ABCD$ với $AB = a$ có ngũ giác đều "nội tiếp" $MNPQR$ với $MN = b$. Từ tính chất ngũ giác đều có :

$$\frac{YJ}{RJ} = \frac{XN}{RN} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow YJ = \frac{(\sqrt{5}-1)RJ}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}\sqrt{RN^2 - NJ^2}$$

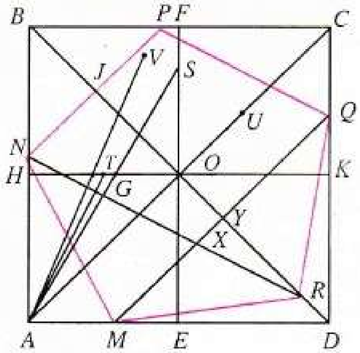
$$= \frac{b}{4}(\sqrt{5}-1)\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2 - 1} = \frac{b}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Từ đó $a\sqrt{2} = BD = BJ + DY + YJ =$

$$= \frac{b}{2} + \frac{b(\sqrt{5}+1)}{4} + \frac{b}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{2}a = (3 + \sqrt{5} + \sqrt{10+2\sqrt{5}})b \quad (*)$$

Từ (*) có $b \approx 0{,}6257a$, $AN = a - NB \approx 0{,}5575a$, $AM = a - MD \approx 0{,}2840a$



Hình 5

Cách dựng chính xác khá phức tạp nên ta có thể gấp giấy tạo hình gần đúng $MNPQR$ như sau :

(1) $AB \xrightarrow{EF} DC$ có EF ; (2) $AD \xrightarrow{HK} BC$ có HK và O ; (3) $AB \xrightarrow{AC} AD$ có AC ;

(4) $AB \rightarrow AS$ có $S \in EF$ và G. (5) $AB \xrightarrow{AV} AU$ có AV ; (6) $AV \xrightarrow{AT} AS$ có AT

(7) $AT \rightarrow AN$ có $N \in AB$; (8) $HG \rightarrow AM$ có $M \in AD$ (9) $BNM \xrightarrow{BD} BPQ$ có P, Q

(10) $MNP \rightarrow MRQ$ có $R \in BD$

Theo cách dựng ta có :

$$AM = HG = \frac{a\,\mathrm{tg}30^o}{2} \approx 0{,}2886a \text{ (sai số } 0{,}005a) ; AN = AT = \frac{a}{2\cos 26^o15'} \approx 0{,}5575a \text{ (sai số } 0{,}0001a)$$

Các bạn sau có lời giải tốt được nhận tặng phẩm :

1) *Bùi Văn Đại*, 11T, PTCTT ĐH KHTN - ĐHQG **Hà Nội**

2) *Phan Đức Thiện*, 11T, THPT NK **Hà Tĩnh**

PHI PHI

45 NĂM 1957-2002 NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Thi Vui Hè 2002

Bạn thân mến !

Bạn sẽ làm gì trong kì nghỉ hè thú vị này. Là người yêu toán chắc bạn không quên môn thể thao trí tuệ bằng những bài toán vui.

*Mục Thi Vui hè 2002 sẽ đem đến cho bạn 6 bài toán trong 2 số báo **300** (6/2002) và **301** (7/2002). Bạn hãy ghi lời giải mỗi bài trên một tờ giấy riêng (chỉ viết một mặt giấy) với địa chỉ đầy đủ. Bỏ 3 bài mỗi đợt vào chung một phong bì và ghi rõ ở ngoài là **Dự thi Vui hè**. Địa chỉ gửi bài là :*

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B Giảng Võ, Hà Nội

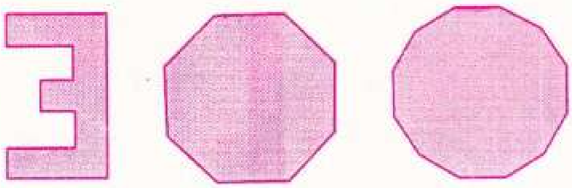
Thời hạn cuối để nhận bài đợt 1 là ngày 31.7.2002, đợt 2 là 31.8.2002 tính theo dấu bưu điện. Trên số báo 304 (10.2002) sẽ đăng lời giải và danh sách các bạn đoạt giải. Chúc các bạn may mắn trong mùa hè Vui mà học, học mà vui. Nào mời các bạn bắt đầu.

ĐỀ THI VUI HÈ 2002

ĐỢT 1

Bài 1. BIẾN 300 THÀNH 3 HÌNH VUÔNG

Hãy cắt mỗi hình sau thành các mảnh rời nhau sao cho càng ít mảnh càng tốt, rồi ghép đủ các mảnh của mỗi hình đó thành một hình vuông.



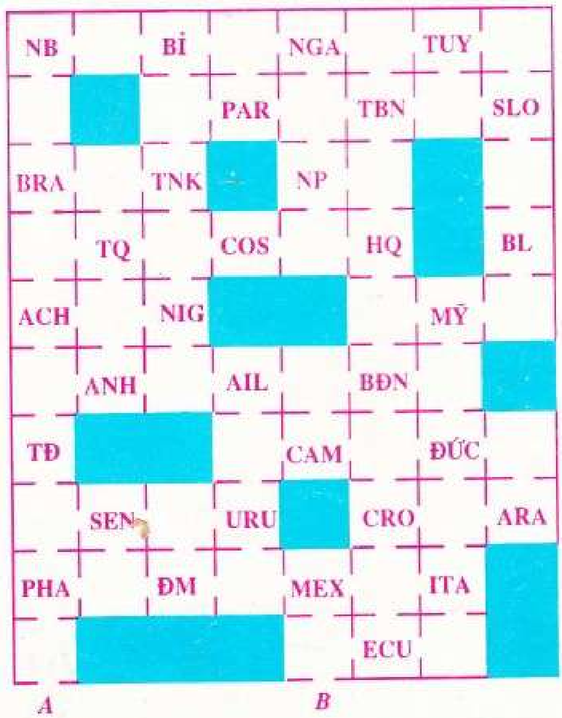
Bài 2. BAO NHIÊU CÁCH

Bảng dưới đây thể hiện số sản phẩm của các công nhân A, B, C, D, E, F, G, H làm được sau 1 giờ tương ứng với các máy $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \varepsilon$. Người ta cần chọn 5 công nhân đứng 5 máy khác nhau để làm ra 40 sản phẩm trong 1 giờ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
α	2	8	9	2	4	7	9	3
β	5	8	5	5	5	2	8	8
γ	7	8	8	2	8	2	9	7
λ	4	6	3	8	7	5	8	4
ε	4	5	3	6	3	2	7	6

Bài 3. ĐI TÌM TIN WORLD CUP

Hình dưới đây là sơ đồ một trung tâm thông tin về vòng chung kết cúp bóng đá thế giới. Mỗi phòng có chữ (viết tắt tên nước bằng tiếng Việt) có thông tin riêng về đội bóng nước đó. Các phòng trống có thể đi qua dùng để trao đổi, giải trí, ăn uống. Các phòng tô màu đóng cửa. Bạn hãy tìm đường đi từ cửa A đến cửa B qua các phòng để lấy thông tin đủ 32 đội bóng, mà mỗi phòng của trung tâm không được đi qua hơn 1 lần.



ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT02M2
Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2002
Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng