số cũ

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

8 (242)
1997
NĂM THỨ 34

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

- **VỀ MỘT BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC**
- VẬN DỤNG ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BỐN ĐIỂM ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN
- **KẾT QUẢ CUỘC THI OLYMPIC TOÁN PTTH**
- **TRÊN ĐƯỜNG ĐI TÌM BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC**
- **VỀ BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH TRONG ĐẠI SỐ 10**
- *MỞ RỘNG BÀI TOÁN CON BƯỚM CHO CÁC ĐƯỜNG CONIC*

Thầy trò trường Phổ thông năng khiếu Lai Châu

Ảnh : Châu Sơn

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội ĐT : 8.220073
231 NGuyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT : 8.356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trình bày : HOÀNG LÊ BÁCH

VỀ MỘT BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

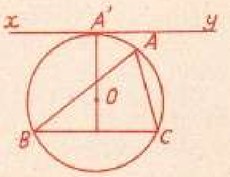
NGUYỄN ĐỨC TẤN
(T.P Hồ Chí Minh)

CỰC TRỊ HÌNH HỌC là một đề tài luôn hấp dẫn những người yêu toán.

Bài viết này nhằm trao đổi cùng bạn đọc chung quanh một bài toán đơn giản về CỰC TRỊ HÌNH HỌC, giúp ta giải một số bài toán khác khá hay.

Bài toán S

Cho đường tròn (O, R) dây cung BC và A là điểm chuyển động trên cung lớn (cung nhỏ) BC. Xác định vị trí của điểm A để diện tích tam giác ABC lớn nhất.



Bài toán có viết nhiều cách giải. Sau đây là một cách giải điển hình. Gọi A' là điểm chính giữa của cung lớn (cung nhỏ) BC. Vẽ xy là tiếp tuyến của đường tròn $(O ; R)$ tại A'.

Suy ra mọi điểm A thuộc cung lớn (cung nhỏ) BC đều nằm giữa hai đường thẳng song song xy và BC, $A \neq A'$ thì khoảng cách từ A đến BC nhỏ hơn khoảng cách từ A' đến BC, do đó $S_{(ABC)} < S_{(A'BC)}$. Dùng kí hiệu $S_{(ABC)_{\max}}$ thay cho "diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất", ta có $S_{(ABC)\max} \Leftrightarrow A \equiv A'$

Bài toán **S** có thể phát biểu dưới dạng khác.

Bài toán 1 : Trong tất cả các tam giác ABC có độ dài cạnh BC và góc A không đổi, tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

Và hơn nữa nếu hai điểm D, E cố định ($D \in BC, E \in BC$) thì $S_{(ADE)_{\max}} \Leftrightarrow A \equiv A'$.

Ta có bài toán 2.

Bài toán 2 : Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O ; R) ; D và E là hai điểm cố định thuộc đường thẳng BC, A là điểm chuyển động trên cung lớn (cung nhỏ) BC. Xác định vị trí của điểm A để $S_{(ADE)}$ đạt giá trị lớn nhất và như vậy chúng ta cũng có bài toán 3 sau.

Bài toán 3 : Cho đường tròn (O ; R) và đoạn thẳng BC cố định, A là điểm chuyển động trên đường tròn. Xác định vị trí của điểm A để $S_{(ABC)}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta lại biết khi A chuyển động trên cung lớn (cung nhỏ) BC thì tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC chuyển động trên cung chứa góc $\alpha = 90^0 + \frac{A}{2}$ dựng trên đoạn BC.

Do đó $S_{(IBC)_{\max}} \Leftrightarrow I \equiv I' \Leftrightarrow A \equiv A'$ (I' là điểm chính giữa của cung chứa góc α)

Ta có bài toán 4.

Bài toán 4 : Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O ; R), A là điểm chuyển động trên cung lớn (cung nhỏ) BC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Xác định vị trí của điểm A để diện tích tam giác IBC đạt giá trị lớn nhất.

Và nếu chú ý rằng khi A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn thì trực tâm H thuộc cung chứa góc $\beta = 180^0 - \hat{A}$ dựng trên đoạn BC.

Do đó $S_{(HBC)_{\max}} \Leftrightarrow H \equiv H' \Leftrightarrow A \equiv A'$.

(H là điểm chính giữa của cung chứa góc β). Ta có bài toán 5.

Bài toán 5 : Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O ; R) , A là điểm chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Xác định vị trí của điểm A để diện tích tam giác HBC đạt giá trị lớn nhất.

Và nếu gọi K là trung điểm của BC thì dễ dàng chứng minh được $AH = 2 \times OK$ (không đổi), AD là đường cao của tam giác ABC thì $AD_{\max} \Leftrightarrow HD_{\max}$. Ta lại có bài toán mới.

Bài toán 6 : Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O ; R) A là điểm chuyển động trên cung lớn BC. Gọi H là trực tâm và AD là đường cao của tam giác nhọn ABC. Xác định vị trí của điểm A để đoạn thẳng HD có độ dài lớn nhất.

Mặt khác, vẽ AD, BF, CG lần lượt là các đường cao của tam giác ABC. Dựa vào kiến thức về tâm giác đồng dạng, ta chứng minh được $S_{(ABC)} = \frac{R}{2}(DE\ EG + GD) = \frac{R}{2}P_{(DEG)}$ với $P_{(DEG)}$ là chu vi tam giác DEG.

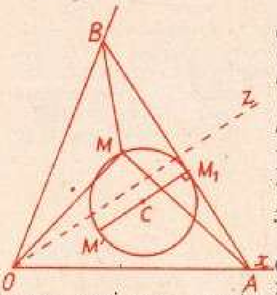
Ta có $P_{(DEG)_{\max}} \Leftrightarrow S_{(ABC)_{\max}} \Leftrightarrow A \equiv A'$. Ta đến với bài toán.

Bài toán 7 : Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O ; R), A là điểm chuyển động trên cung lớn BC, AD, BE, CG là các đường cao của tam giác ABC. Xác định vị trí của điểm A để tam giác DEG có chu vi lớn nhất.

Bài toán sau đây (bài 4, thi học sinh giỏi toán quốc gia lớp 9, 1995 – 1996) Có thể đưa về bài 3 ở trên .

Bài toán 8 : Cho đường tròn (C) nằm trong góc xOy. (đường tròn (C) không có điểm chung với các cạnh của góc xOy). Hãy tìm trên đường tròn (C) một điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai đường thẳng chứa các cạnh của góc xOy là nhỏ nhất.

Dựng $A \in Ox$, $B \in Oy$ sao cho $OA = OB$, AB tiếp xúc với (C) tại M_1 và (C) nằm trong tam giác OAB.



Gọi h_1, h_2 là khoảng cách từ điểm M đến Ox, Oy. Ta có OA , OB, AB, $S(OAB)$ không đổi. Do đó $(h_1 + h_2)_{\min} \Leftrightarrow S(MAB)_{\max} \Leftrightarrow M \equiv M'$.

Dễ thấy $CM' // Oz$ (Oz là tia phân giác của góc xOy)

Liệu thay "nhỏ nhất" ở bài toán này bởi "lớn nhất", có thể sử dụng cách giải trên giải được bài toán chăng ?

"Gia công" bài toán **S**, ta có bài toán hay sau.

Bài toán 9 : Trong tất cả các tứ giác nội tiếp trong đường tròn (O ; R), tìm tứ giác có diện tích lớn nhất.

"Họ hàng" với bài toán **S** là bài toán.

Bài toán P : Cho đường tròn (O ; R), dây cung BC và A là điểm chuyển động trên cung lớn (cung nhỏ) BC. Xác định vị trí của điểm A để chu vi tam giac ABC lớn nhất.

Các bạn hãy tìm nhiều lời giải cho bài toán P và tìm các bài toán mà khi sử dụng kết quả bài toán P có thể cho lời giải đẹp.

Bài T1/238. *A và B là hai số có bảy chữ số khác nhau từ 1 đến 7. Giả sử $A > B$, hỏi có thể xảy ra trường hợp A chia hết cho B hay không, tại sao ?*

Lời giải. Tổng các chữ số của A cũng như B đều bằng $1 + 2 + 3 + .. + 7 = 28$, hay là A, B đều đồng dư 1 (mod9) (1). Giả sử A chia hết cho B, ta có A, ta có $A = B.\ n$ với n nguyên. Mà $A > B$ nên $n > 1$. Hơn nữa, A, B đều có 7 chữ số và trong các chữ số A, B, chữ số lớn nhất là 7, bé nhất là l nên A, $< 8.\ 10^6$ và $B > 10^6$. do đó $n = A : B < 8$, suy ra $l < n < 8$ *(2)*. Từ *(1)*, ta có thể đặt $B = 9\ m + 1$ với m nguyên, suy ra $A = B.\ n = 9\ mn + n \equiv (mod9)$; nên $n \equiv l$ (mod9), mâu thuẫn với (2). Vậy, không thể xẩy ra A chia hết cho B.

Nhận xét. Có 235 bài giải, tất cả đều giải đúng, tuy nhiên cách trình bầy thường dài dòng hoặc quá vắn tắt. Lời giải tốt gồm có : **Ninh bình :** *Lê Hồng Linh* (9TNK thị xã Ninh Bình). **Thái Bình :** *Đinh Thị Thêu* (6 Toán PTCS Chuyên Tx Thái Bình) ; *Đặng Ngọc Tuấn* (9TPTCS NK Tiền Hải). **Hải Dương** : *Vũ Thanh Long* (7 Toán NK Nam sách) ; *Trần Quang Đại* (9TL PTNK Tx Hải Dương) ; *Tô Minh Hoàng* (8T PTCSNK Tx Hải dương). **Đắt lắk :** *Phạm Đình Bách* (7 Toán chuyên Nguyễn Du) ; *Ngô Quốc Anh* (8 Toán chuyên Nguyễn Du). **Nam Định** : *Bùi Hoàng Hiệp* (9A PTTHCS Xuân Bắc, Xuân Trường) ; *Hoàng Đình Tuấn* (8 Toán NK Ý Yên). **Thanh Hóa :** *Đỗ Mạnh Cường* (7T NK Bình Sơn) *Lê Minh Hải* (9A THCS Cù Chính Lan Tp Thanh Hóa) ; *Lưu Đức Chi, Lương Ngọc Giáp* (7A NK Hoằng Hóa) ; *Lê Hải Bằng* (7A PTCSNK Hoằng Hóa). **Vĩnh long :** *Nguyễn Hoàng Quân* (9[1] PTCS Tx Vĩnh Long). **Vĩnh Phúc :** *Trần Nhật Tân* (9CT chuyên C2 Tam Đảo) ; *Trần Hương Xuân* (A[N] Chuyên Mê Linh) ; *Nguyễn Hoàng Gia* (7B Chuyên Văn – Toán Vĩnh Tường) . **Bắc Ninh :** : *Trương Thị Thảo* 9 NK Tiên Sơn ; *Hoàng Tùng* (9 Chuyên Toán NK Tiên Sơn). **Nghệ An** : *Phan Thanh Minh* (8 Toán NK Tp Vinh) ; *Nguyễn Như Phong* (6A PTCS Đông Vĩnh) ; *Nguyễn Xuân Giao* (9B NK Nghĩa Đàn) ; *Phan Thành Trung* (9 Toán A PTTH Phan Bội Châu). **Tp Hồ Chí Minh :** *Lưu Đoan Vinh* (9A1 THCS Chánh Hưng). **Hà Nội :** *Lê Anh Vinh* (8[Al] PTCS Giảng Võ) ; *Nguyễn Hoài Anh* (7 Toán Chuyên Từ Liêm) ; *Nguyễn Đức Tiến* (9[A] PTCS Chu văn An). **Quảng Ninh :** *Đặng Thị Tố Như* (9T THCS NK Hải Linh). **Bạc liêu :** *Trần Anh Khoa, Lương Thế Nhân* (8A Chuyên Bạc Liêu). **Quảng Ngãi :** *Trần Phú Khanh* (8T Chuyên Lê Khiết) ; *Nguyễn Văn Khải* (9 Toán Chuyên Nghĩa Hành) ; *Trần thị Bích Thủy* (6 Toán Chuyên Lê Khiết). **An Giang :** *Hoàng Thanh Lâm* (9T Chuyên Thoại Ngọc Hầu Long Xuyên).

DẶNG VIỄN

Bài T2/138 : *Giả sử a, b, c và d là các số nguyên dương thỏa mãn hai hệ thức $b^2 + 1 = ac$ và $c^2 + 1 = bd$.*

Chứng minh rằng : $a + c = 3b$ và $b + + d = 3c$

Lời giải : Giả sử phương trình $x^2 + y^2 + 1 = pxy$ (1) với $p \in N^*$ có nghiệm $(\overline{x}, \overline{y})$ với $x, y \in N^*$.

Gọi tập hợp tất cả các nghiệm này là M . Giả sử $(x_o, y_o) \in M$ thỏa mãn $x_o + y_o \leq \overline{x} + \overline{y}$ với mọi $(\overline{x}, \overline{y}) \in M$.

* Nếu $x_o = y_o$ thì thay vào (1) ta có

$$2x_o^2 + 1 = px_o^2 \Rightarrow 1 = (p-2)x_o^2 \Rightarrow p = 3$$

* Nếu $x_o \neq y_o$ thì do vai trò bình đẳng của x và y ở (1) nên có thể giả sử $x_o < y_o$.

Xét phương trình : $y^2 - px_oy + x_o^2 + 1 = 0$ (2) với ẩn y thì y_o là một nghiệm của (2).

Gọi y_1 là nghiệm còn lại của (2) thì theo định lí Vi-et ta có :

$y_o + y_1 = px_o$ và $y_oy_1 = x_o^2 + 1$. Ta có (x_o ; y_1) $\in M \Rightarrow y_o \leq y_1$. Từ hai hệ thức trên lại có :

$$x_o^2 + 1 - px_o = y_1y_o - y_o - y_1 =$$
$$= (y_1 - 1)(y_o - 1) - 1 \geq x_o^2 - 1$$

(Vì $y_1 \geq y_o > x_o$) $\Rightarrow px_o \leq 2 \Rightarrow p = 1$ hoặc $p = 2$ Nhưng $x^2 + y^2 + 1 > 2xy > xy$ với $x, y \in N^*$ nên (1) không có nghiệm nguyên dương khi $p = 1$ hoặc $p = 2$

Chứng tỏ : Nếu (1) có nghiệm nguyên dương với $p \in N^*$ thì $p = 3$.

Áp dụng kết quả trên vào bài toán ta thấy : Từ $b^2 + 1 = ac \Rightarrow b^2 + 1 \vdots c \Rightarrow b^2 + c^2 + 1 \vdots c$ (3). Tương tự thì cũng có $c^2 + b^2 + 1 \vdots b$ (4). Vì $b^2 + 1 \vdots c \Rightarrow (b, c) = 1$

Do đó từ (3,), (4) dẫn đến $b^2 + c^2 + 1 \vdots bc \Rightarrow b^2 + c^2 + 1 = pbc$ với $p \in N^*$. Do b, c $\in N^*$ và kết quả đã chứng minh ở trên thì $p = 3 \Rightarrow b^2 + c^2 + 1 = 3abc \Rightarrow ac + c^2 = 3abc \Rightarrow a + c = 3b$ (vì $c \in N^*$). Tương tự như trên cũng có $b + d = 3c$.

Nhận xét :

1. Bài toán trên có thể giải theo những cách khác, nhưng nói chung đều đi đến chứng minh : "Nếu (1) có nghiệm nguyên dương thì $p = 3$. (với $p \in N^*$) ". Chẳng hạn có thể dựa vào (x_o y_o) $\in M$, nhưng $x_o \leq \overline{y}$; $\forall (\overline{x} ; \overline{y}) \in M$ (chứ không xét $x_o + y_o \leq \overline{x} + \overline{y}$ như lời giải trên). Khi đó (2) có các nghiệm $y_o, y_1 \geq x_o \Rightarrow 2x_o^2 + 1 - px_o^2 = 0 \Rightarrow Px_o^2 \leq 2x_o^2 + 1 \leq 3x_o^2 \Rightarrow p \leq 3$. Nhưng $Px_oy = x_o^2 + y_o^2 + 1 > 2x_oy_o \Rightarrow$ $\Rightarrow p > 2$. Từ đó $p = 3$

2. Một số bạn làm quá gọn nhưng lại mắc sai lầm. Chẳng hạn, trừ từng vế của hai hệ thức ở giả thiết dẫn đến $3b\ (b + d) = 3\ c\ (a + c)$. Sau đó "dễ thấy" $b \neq c$ nên $3b = a + c$ và $b + d = 3c$ (2).

Hoặc là xét phương trình $X^2 - 3\ bX + b^2 + 1 = 0$

có 2 nghiệm phân biệt X_1, X_2 thỏa mãn : $X_1 + X_2 = 3\ b$ và $X_1\ X_2 = b^2 + 1$, mà $a.c = b^2 + 1$ "nên" $a + c = 3b$ (2)

3. Các bạn có lời giải đúng và trình bày mạch lạc hơn là : *Nguyễn Sơn Hải*, 9T, Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Hoàng Tùng*, 9T Tiên Sơn **Bắc Ninh** ; *Lưu Tiến Đức*, 8B ; Chuyên ứng Hòa, **Hà Tây** ; *Phạm Ngọc Huy*, 9T, Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Đồng Nai** ; *Nguyễn Thị Minh Thoa*, 9C, Ngọc Lâm, **Hà Nội** ; *Nguyễn Ngọc Ân Phương*, 8T, Cai Lậy, **Tiền Giang** ; *Trần Quốc Hùng*, 9TA, Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An** ; *Trần Vĩnh Trung*, 9s, Lý Tự Trọng, **Trà Vinh** ; *Trần Nguyễn Thọ*, 9T1, **Hà Tĩnh** ; *Trần Tuấn Anh*, 9T, Lê Quý Đôn, **Khánh Hòa** ; *Đặng Ngọc Tuấn* 9T, Tiền Hải **Thái Bình**.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/238 : *Giải phương trình*

$$x^3 + 2\sqrt{7}x^2 + 7x + \sqrt{7} - 1 = 0$$

Lời giải : $x^3 + 2\sqrt{7}x^2 + 7x + \sqrt{7} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x(x + \sqrt{7})^2 + \sqrt{7} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x((x + \sqrt{7})^2 - 1) + x + \sqrt{7} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x[(x + \sqrt{7} + 1)(x + \sqrt{7} - 1)] + x + \sqrt{7} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x + \sqrt{7} - 1)[x^2 + (\sqrt{7} + 1)x + 1] = 0$

– Nếu $x + \sqrt{7} - 1 = 0$ thì ta có $x_1 = 1 - \sqrt{7}$ (1)

– Nếu $x^2 + (\sqrt{7} + 1)x + 1 = 0$ thì ta có :

$$\Delta = (\sqrt{7} + 1)^2 - 4 = 4 + 2\sqrt{7} > 0$$

Vậy có $x_2 = \dfrac{-(\sqrt{7} + 1) + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}}{2}$ (2)

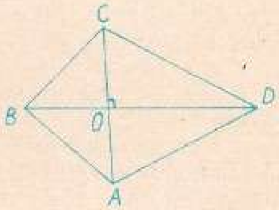
$x_3 = \dfrac{-(\sqrt{7} + 1) - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}}{2}$ (3)

Tóm lại phương trình có 3 nghiệm (1), (2), (3) như trên.

Nhận xét : Có *rất nhiều* bạn gửi lời giải. Hầu hết các lời giải đều giải đúng như lời giải trên.

TÔ NGUYÊN

Bài T4/238 : *Cho tứ giác ABCD với hai đường chéo vuông góc và AB > CD. Chứng minh rằng ABCD không phải là tứ giác ngoại tiếp.*



Lời giải :

Điều kiện $AB > CD$ phải thay bằng $AB < BC < CD$ thì đề bài mới đúng (hoặc $AB \neq BC \neq CD$).

Theo định lí Pitago ta có :

$BC^2 - AB^2 = (CO^2 + BO^2) - (BO^2 + OA^2)$
$= (CO^2 + DO^2) - (OA^2 + DO^2)$
$= CD^2 - AD^2$

Dẫn đến $(BC + AB)(BC - AB) = (CD + AD)(CD - AD)$ (1)

Nhưng do $BC < CD$ nên $BO < OD$. Do đó :

$AB < AD$ và từ đó ta có $BC + AB < CD + AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $BC + AD > CD + AB$. (đpcm)

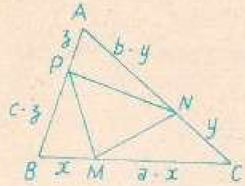
Nhận xét :

Các bạn sau đây đã nhận xét đúng về sơ xuất của đề bài và đã giải sau khi thay đổi lại giả thiết :

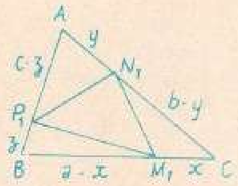
Bắc Ninh : *Trương Thị Thao*, 9NK Tiên Sơn, *Hoàng Tùng*, 9CT Tiên Sơn, *Nguyễn Thạc Hiếu*, 7A NK Tiên Sơn. **Hải Dương :** *Trần Quang Đại*, 9T, PTNK tỉnh, *Nguyễn Thị Hường*, 9B NK Thanh Hà ; **Hà Nội :** *Nguyễn Trung Kiên* 8CT Từ Liêm, *Nguyễn Đình Hà*, 8A1 Nguyễn Trường Tộ, *Nguyễn Thị Minh Thoa*, 9C Ngọc Lâm, Gia Lâm, *Lê Cường*, 9M Mari Quyri ; *Lê Anh Vinh*, 8A1 Giảng Võ ; **Nam Định :** *Trần Quang Vinh*, 8T NK Ý Yên, *Phùng Văn Huân* 8 NK Giao Thủy, *Nguyễn Công Tuấn*, 8T Trần Đăng Ninh ; **Thanh Hóa :** *Đàm Mạnh Tuấn*, *Lê Tiến Trung*, 9T Lam Sơn, *Tống Thành Vũ*, 9B, NK Tĩnh Gia, *Mai Việt Hưng*, 9TN NK Bỉm Sơn, *Hoàng Trung Phương*, 9B Hà Châu, Hà Trung, *Đàm Thị Hà*, 8T Triệu Sơn, *Lê Ngọc Giang* 9T NK Hoằng Hóa ; **Nghệ An :** *Nguyễn Văn Vinh*, 9A, Hưng Lộc, Vinh, *Phan Việt Bắc*, 9TA Phan Bội Châu ; **Hà Tĩnh :** *Phan Công Đức*, 9T1, NK Hà Tĩnh ; **Quảng Bình :** *Lê Quang Trung*, 8 Lý, *Phạm Xuân Tiến*, 8T, NK Hải Đình, Đồng Hới ; **Thừa Thiên – Huế :** *Huỳnh Công Phước*, 9', Nguyễn Tri Phương ; **Khánh Hòa :** *Trần Tuấn Anh*, 9T, Lê Quý Đôn ; **Đồng Nai :** *Võ Hữu Danh*, 8T Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Biên Hòa ; HCM :** *Chung Nhân Phú*, 9T1 Nguyễn An Khương, Hóc Môn ; **An Giang :** *Hoàng Thanh Lâm*, 9T Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên ; **Bạc Liêu :** *Trương Yến Nhi*, 8A Chuyên Bạc Liêu, *Trần Anh Khoa*, 8A, Chuyên Bạc Liêu ; *Trần Thế Minh*, 8A Chuyên Bạc Liêu.

VŨ KIM THỦY

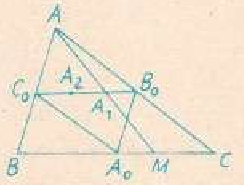
Bài T5/238. *Cho tam giác ABC với các điểm M (nằm giữa B, C) ; N (nằm giữa C, A) ; P (nằm giữa A, B). Gọi A_1, B_1, C_1 là các trung điểm tương ứng của AM, BN, CP. Chứng minh rằng tỉ số diện tích các tam giác $A_1B_1C_1$, MNP không phụ thuộc vào vị trí của các điểm M, N, P.*



(H. 1)



(H. 2)



(H. 3)

Lời giải. Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau đây : "Nếu lấy trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC các điểm tương ứng M, N, P và các điểm M_1, N_1, P_1 lần lượt đối xứng với M, N, P qua các trung điểm tương ứng của BC, CA, AB thì diện tích các tam giác $M_1N_1P_1$ và MNP bằng nhau". Đặt a, b, c và x, y, z là các độ dài của BC, CA, AB và BM, CN, AP, ta có các số đo ghi trong hình 1 và hình 2. Coi $S(ABC)$ là đơn vị, ta có chẳng hạn trong h.1 : $S(BMP) = x(c - z) : ac$, ... Do đó, từ ΔABC, ta có thể so sánh hai tam giác đang xét bằng các so sánh tổng diện tích của ba tam giác còn lại trong hai trường hợp tương ứng như sau :

A_2, B_2, C_2 cũng tương ứng thuộc B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0. Áp dụng bổ đề trên, ta có $S(A_2B_2C_2) = S(A_1B_1C_1)$. Ta có $\Delta ABC \backsim A_0B_0C_0$ (cạnh tương ứng song song). Trên hai cạnh tương ứng BC và B_0C_0 ta có $A_2B_0 : A_2C_0 = A_1C_0 : A_1B_0 = MB : MC$ (vì $A_1B_0 \parallel MC$), suy ra A_2 và M là hai phần tử tương ứng trong hai tam giác đồng dạng đó. Tương tự, ta cũng có các phần tử tương ứng : B_2 với N, C_2 với P. Vậy $\Delta A_2B_2C_2$ tương ứng với ΔMNP và do đó chúng đồng dạng, và ta có $S(A_2B_2C_2) : S(MNP) = 0{,}5^2 = 0{,}25 =$ kđ. Mà $S(A_1B_1C_1) = S(A_2B_2C_2)$ nên ta có đpcm.

Nhận xét. Có 74 bài giải, tất cả đều giải đúng với các cách giải khác nhau. Trong số đó, có thể nêu cách giải đặc sắc sau đây (tiếc rằng người giải không ghi tên và địa chỉ) : Gọi I, J, K là các trung điểm tương ứng của MN, NP, PM, ta có chẳng hạn $B_1J \parallel A_1K$ (vì cùng $\parallel AB$), suy ra $S(B_1A_1K) = S(JA_1K)$, ... sau đó dựa vào lục giác lồi $A_1KB_1IC_1J$ để chứng minh $S(A_1B_1C_1) = S(IJK) = 0{,}5S(MNP)$ bằng cách so sánh tổng diện tích ba tam giác còn lại tương ứng. Lời giải tốt gồm có : **Hải Dương :** *Tô Minh Hoàng* (8T PTNK Tỉnh) ; *Mai Huy Kiên* (9T1, PTNK Tỉnh). **Thanh Hóa :** *Lê Ngọc Giang* (9T NK Hoằng Hóa). **Nam Định :** *Trần Quang Vinh, Hoàng Đình Tuấn* (8 Toán NK Ý Yên). **Nghệ An :** *Nguyễn Hồng*

Đức (9A₁ NK Yên Thành) ; *Hoàng Minh Phúc* (9B Nghi Liên, Nghi Lộc). **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thanh Tú* (9B Chuyên Toán Yên Lạc). **Hà Tĩnh :** *Nguyễn Anh Tú* (9T₁ PTTHNK Tỉnh). **Thái Bình :** *Đặng Ngọc Tuấn* (9T PTCSNK Tiền Hải).

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/238 : *Cho dãy số thực* $\{x_n\}$ *thỏa mãn các điều kiện :* $x_1 = 2$; $x_{n+1} = \dfrac{x_n^4+1}{5x_n}$ $\forall n \geq 1$.

Chứng minh các bất đẳng thức sau :

$$\frac{1}{5} < x_{n+1} < 2 \ \forall n \geq 1.$$

Lời giải (của *Trần Tuấn Anh* – 9 Toán Trường Lê Quí Đôn, Nha Trang) : Vì $x_1 = 2 > 0$ nên từ công thức xác định dãy $\{x_n\}$ suy ra $x_n > 0$ $\forall n \geq 1$. Do đó, $\forall n \geq 1$ ta có :

$$x_{n+1} = \frac{1}{5x_n}\left(x_n^4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) \geq$$

$$\geq \frac{4}{5x_4}\sqrt[4]{x_n^4 \cdot \frac{1}{27}} = \frac{4\sqrt[4]{3}}{15}$$

Hơn nữa, dễ thấy, x_n là số hữu tỉ $\forall n \geq 1$. Vì thế, $x_n \neq \sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}$ $\forall n \geq 1$. Suy ra, dấu "=" trong bất đẳng thức trên không thể xảy ra, nghĩa là ta có :

$$x_{n+1} > \frac{4\sqrt[4]{3}}{15} \qquad \forall n \geq 1 \qquad (1)$$

Tiếp theo, bằng phương pháp quy nạp theo n, ta sẽ chứng minh :

$$x_{n+1} \leq 1{,}7 \ (2) \qquad \forall n \geq 1.$$

Với $n = 1$ ta có : $x_2 = \dfrac{2^4+1}{10} = 1{,}7$

Giả sử, đã có (2) với $n = k$ ($k \geq 1$). Khi đó :

$x_{k+1}^3 \leq (1{,}7)^3 = 4{,}913 < 5 \Rightarrow x_{k+1}^4 < 5x_{k+1}$ (do $x_{k+1} > 0$) (3)

Hơn thế, từ (1) ta còn có :

$$x_{k+1} > \frac{2}{7}\left(do\ \frac{4\sqrt[4]{3}}{15} > \frac{2}{7}\right) \Rightarrow 3{,}5x_{k+1} > 1 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra :

$x_{k+1}^4 + 1 < 8{,}5x_{k+1} \Leftrightarrow \dfrac{x_{k+1}^4+1}{5x_{k+1}} < 1{,}7$, hay $x_{k+2} < 1{,}7$. Điều này cho thấy, ta cũng có (2) với $n = k+1$.

Theo nguyên lí quy nạp, (2) được chứng minh $\forall n \geq 1$.

Vậy, tóm lại :

$$\frac{4\sqrt[4]{3}}{15} < x_{n+1} \leq 1{,}7 \ \forall n \geq 1 \qquad (*)$$

Do $\dfrac{4\sqrt[4]{3}}{15} > \dfrac{1}{5}$ và $1{,}7 < 2$ nên từ các bất đẳng thức trên ta có các bất đẳng thức cần chứng minh trong đề bài.

Nhận xét : 1°/ Bằng phương pháp khảo sát hàm số, các bạn *Trần Nam Dũng* (11T PTTH Phan Bội Châu, Vinh) và *Phùng Đức Tuấn* (11CT PTNK Hải Hưng) cũng đã chứng minh được các bđt (*).

2°/ Bằng phương pháp của Lời giải nêu trên, các bạn *Hoàng Tùng* (lớp 9 Trường NK Tiên Sơn, Bắc Ninh) và *Lê Hồng Hà* (11A PTCT ĐHSP Vinh) đã chứng minh được rằng :

$$\frac{4\sqrt[4]{3}}{15} < x_n < \frac{3}{2} \ \forall n \geq 3.$$

Tuy nhiên, cũng bằng phương pháp đó, ta còn có thể chứng minh được bđt chặt hơn :

$$\frac{4\sqrt[4]{3}}{15} < x_n < \frac{5}{4} \ \forall n \geq 3.$$

3°/ Đại đa số các bạn gửi Lời giải tới Tòa soạn đều chứng minh bài toán bằng phương pháp khảo sát hàm số. Nhiều bạn đã cố gắng chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ là dãy giảm thực sự. Tuy nhiên, tất cả các chứng minh của các bạn đều sai, do các bạn đã mắc phải một trong các sai lầm sau :

- Nhầm lẫn trong so sánh các số.
- Không thuộc các tính chất cơ bản của bất đẳng thức.
- Không nắm vững các suy luận lôgic cơ bản. Chẳng hạn, không ít bạn đã cho rằng : "Nếu không có $x_{n+1} > x_n$ $\forall n \geq 1$ thì *phải có* $x_n < x_{n+1}$ $\forall n \geq 1$" (? !).

4°/ Do sơ suất, đề bài đã được in ra không chính xác (x_n đã thế chỗ x_{n+1} trong dãy bđt cần chứng minh). Sơ suất này đã được tất cả các bạn gửi lời giải mở lòng khoan dung mà lượng thứ cho.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/238 : *Hãy xác định tất cả các bộ ba số thực (a, b, c) sao cho hàm :*

$$f(x) = ax^3 + 6x^2 + cx + 1$$

có tính chất : $|f(x)| \leq 1$ *với mọi* $x \in [-1\ ;\ 1]$.

Lời giải : Từ $f(x) \leq 1$ $\forall x \in [-1\ ;\ 1]$ suy ra :

$$x(ax^2 + bx + c) \leq 0 \ \forall x \in [-1\ ;\ 1].$$

Từ đó ta còn có : $-x(ax^2 - bx + c) \leq 0$ $\forall x \in [-1\ ;\ 1]$

Suy ra : $-x^2[(ax^2+c)^2 - b^2x^2] \geq 0$ $\forall x \in [-1\ ;\ 1]$ Dẫn tới : $(ax^2+c)^2 \leq b^2x^2$ $\forall x \in [-1\ ;\ 1]$ (*)

Cho $x = 0$, từ (*) ta được $c = 0$. Khi đó $f(x)$ là hàm :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$$

Do $-1 \leq f(x) \leq 1$ $\forall x \in [-1\ ;\ 1]$ nên $-1 \leq f(1) \leq 1$ và $-1 \leq f(-1) \leq 1$, hay :

$$\begin{cases} -1 \leq a+b+1 \leq 1 \\ -1 \leq -a+b+1 \leq 1 \end{cases}$$

Suy ra : $-2 \leq b \leq 0$ (1) và

$$\begin{cases} -(b+2) \leq a \leq -b \\ -(b+2) \leq -a \leq -b \end{cases}$$

$\Rightarrow |a| \leq \min\{-b, b+2\}$ (2).

Ngược lại, với $c = 0$ và a, b thỏa (1), (2) ta có : với $x \in [-1\ ;\ 1]$ thì : $ax \leq |ax| \leq |a| \leq -b \Rightarrow ax + b \leq 0$

$ax \geq -|ax| \geq -|a| \geq -(b+2) \Rightarrow ax + b \geq -2$

Như vậy : $-2 \leq ax + b \leq 0$ $\forall x \in [-1\ ;\ 1]$. Suy ra :

$$-2 \leq -2x^2 \leq ax^3 + bx^2 \leq 0 \ \forall x \in [-1\ ;\ 1]$$

hay :

$|f(x)| \leq 1 \; \forall x \in [-1 ; 1]$

Vậy, tất cả các bộ ba số cần tìm là tất cả các bộ $(a, b, 0)$ với a, b thỏa (1) và (2).

Nhận xét : Có rất nhiều bạn gửi lời giải tới Tòa soạn. Tuy nhiên, trong số các lời giải mà chúng tôi nhận được có rất ít lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải đúng : *Vũ Duy Tuấn* (12A PTTH Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**) ; *Lê Xuân Thành* (PTTH Hạ Long, **Quảng Ninh**) ; *Lê Tuấn Anh* (12B PTCT ĐHKHTN ĐHQG **Hà Nội**) ; *Trần Nam Dũng* (11CT PTTH Phan Bội Châu, Vinh) ; *Hồ Sỹ Ngọc* (10A PTCT ĐHSP Vinh **Nghệ An**) ; *Trần Chí Hòa* (PTTHNK **Quảng Bình**) ; *Trần Thanh Tùng* (12A6 PTTH Lê Hồng Phong **TP HCM**) và *Mai Thanh Dũng* (11T Trường Nguyễn Du, **ĐakLak**).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/238. *Xác định các góc của tam giác ABC biết rằng*

$$A + C = 120^\circ \text{ và } \frac{b+c}{b+a} = 2\cos C - 1$$

Lời giải. Các bài giải gửi đến được chia thành ba nhóm. Nhóm 1 giải theo phương pháp chủ yếu dựa vào biến đổi lượng giác. Nhóm 2 giải theo phương pháp chủ yếu dựa vào biến đổi đại số và nhóm 3, kết hợp giữa hình học, lượng giác và đại số.

Cách 1 : Từ giả thiết, suy ra ngay $B = 60^\circ$ và :

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin B + \sin A} = 2\cos C - 1$$

(dùng định lý hàm số sin)

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(120^\circ - A)}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin A} = 2\cos(120^\circ - A) - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A - \frac{1}{2}\sin A}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin A} =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2}\cos A + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right) - 1$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos^2 A + 2\sqrt{3}\cos A = -2\sin A\cos A$

$\Leftrightarrow \cos A[\sqrt{3}(1 + \cos A) + \sin A] = 0 \; (*)$

Do $0 < A < 180^\circ$ nên

$$\sqrt{3}(1 + \cos A) + \sin A > 0.$$

Vì vậy $(*) \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow A = 90^\circ$.

Kết luận : $A = 90^\circ$; $B = 60^\circ$; $C = 30^\circ$.

Cách 2. Ta có $B = 60^\circ$. Sử dụng định lí hàm số cos, ta có :

$$\frac{b+c}{b+a} = 2\cos C - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{b+a} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - ab}{ab} \qquad (1)$$

$\frac{1}{2} = \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = ac \Leftrightarrow b^2 - c^2 = a^2 - ac$ (2.) Thế (2) vào (1), ta được :

$$\frac{b+c}{b+a} = \frac{a^2 + a^2 - ac - ab}{ab}$$

$\Leftrightarrow \frac{b+c}{b+a} = \frac{2a - b - c}{b} \Leftrightarrow (a - 2c)(b + c) = 0 \Leftrightarrow a = 2c.$

Do vậy $\cos A = 0$, hay $A = 90^\circ$ và $C = 30^\circ$.

Cách 3. Từ điều kiện $A + C = 120^\circ$, suy ra $B = 60^\circ$. Hạ $AH \perp BC$. Ta có : $\widehat{HAB} = 30^\circ$, $HB = \frac{c}{2}$; $HC = a - \frac{c}{2}$. Trong tam giác vuông AHC : $\cos C = \frac{HC}{AC} = \frac{2a - c}{2b}$.

Suy ra : $\frac{b+c}{b+a} = 2\cos C - 1 \Leftrightarrow \frac{b+c}{b+a} = 2\frac{2a-c}{2b} - 1$

$\Leftrightarrow b^2 = a^2 - bc + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ac \Leftrightarrow a^2 + c^2 - ac = a^2 - bc + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ac \Leftrightarrow (b + c)(a - 2c) = 0 \Leftrightarrow a = 2c.$

Do đó : $b = c\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow C = 30^\circ$.

Suy ra $A = 90^\circ$.

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Trà Vinh : *Trần Huỳnh Thế Khanh, Trần Quang Khải, Phạm Thế Nhị Trường,* **Lâm Đồng :** *Trương Anh Tuấn, Nguyễn Quốc Duy,* **Bến Tre :** *Nguyễn Phương Như, Nguyễn Nhật Nam,* **Bạc Liêu :** *Lương Thế Nhân,* **Quảng Bình :** *Nguyễn Trung Kiên, Nguyễn Văn Bình, Đỗ Hải Phú, Dương Lê Nam, Nguyễn Việt Đức, Trần Hữu Lực, Trương Vĩnh Lâm, Trần Chí Hòa.* **Thái Bình :** *Nguyễn Văn Thanh, Nguyễn Nam Hà, Bùi Thanh Hùng,* **Ninh Bình :** *Vũ Hải Châu,* **Mỹ Tho :** *Châu Công Điền,* **Tiền Giang :** *Nguyễn Phan Thành,* **Hà Tây :** *Nguyễn Trung Phương, Nguyễn Mạnh Thắng, Lưu Tiến Đức, Nguyễn Quang Huy, Nguyễn Hà Duy, Phan Thanh Hồng, Nguyễn Trung Thành, Tô Ngọc Phong, Lê Thành Nam,* **Thái Nguyên :** *Vũ Tuấn Anh, Đàm Công Dũng, Lê Quang Huy,* **Bình Định :** *Nguyễn Đình Tuân, Trần Hoàng Đạo,* **Vĩnh Long :** *Nguyễn Minh Trường, Cao Minh Quang,* **Bắc Ninh :** *Nguyễn Thị Hảo, Ngô Quang Hiển, Hoàng Tùng, Nguyễn Xuân Sang, Trương Thị Thao, Trần Việt Phương, Phạm Huy Đức.* **TP HCM :** *Lê Anh Minh, Nguyễn Lê Lực, Nguyễn Duy Kiệt, Trịnh Lê Tuấn, Lê Quang Nẫm,* **Nghệ An :** *Nguyễn Văn Tăng, Ngô Anh Tuấn, Hồ Sỹ Ngọc, Nguyễn Ngọc Hà, Đặng Đức Hạnh, Trần Nam Dũng, Phan Huy Hoàng, Trần Thanh Hùng, Nguyễn Quang Minh, Phan Văn Anh, Nguyễn Thanh Hải, Nguyễn Tài Tuấn, Phan Thế Anh, Nguyễn Cảnh Khánh, Hoàng Minh Phúc, Nguyễn Đình Quân, Nguyễn Khải Lâm, Nguyễn Trung Hòa, Lê Hồng Hà, Phạm Ngọc Huy, Nguyễn Văn Đức, Dương Thông Sắc, Đặng Xuân Thành, Huy Ngọc, Phan Viết Tiến, Lê Văn Dũng, Nguyễn Thịnh, Tôn Bích Hoài, Nguyễn Xuân Khoa, Nguyễn Huy Vũ.* **Thừa Thiên – Huế :** *Lê Văn Hóa, Đinh Trung Hoàng, Hoàng Trung Hiếu, Trần Như Quang, Phạm Tiến Đạt, Lê Chí Thành, Đặng Nguyễn Nhật Nam, Huỳnh Công Phước, Đinh Trung Hiếu.* **Hà Tĩnh :** *Nguyễn Thành Trung, Dương Tuấn Anh, Nguyễn Viết Tú, Đặng Văn Cảnh.* **Bắc Giang :** *Lương Hùng Quang, Phạm Việt Ngọc, Nguyễn Tiến Mạnh, Đặng Hoàng Việt Hà, Vũ Duy Tuấn.* **Hưng Yên :** *Nguyễn Việt Anh, Vũ Tuấn Long,* **Phú Thọ :** *Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Ngọc Thắng, Nguyễn Kim Số, Hà Hoàng Vương, Nguyễn Minh Phương, Trần Thị Hoa Mai, Trần Anh Tuấn, Tạ Đức Dũng, Hoàng Kim Dung.* **Nam Định :** *Ngô Mạnh Cường, Phùng Văn Huân, Nguyễn Thu Thủy, Nguyễn Công Tuấn, Vũ Thùy Như, Nguyễn Văn Quang, Hoàng Kim.* **Hải Phòng,** *Đặng Anh Tuấn :* *Vũ Trọng Nghĩa, Phạm Văn Tập, Phạm Dương Hiếu, Nguyễn Bắc Hải, Hà Duy Hưng, Đoàn Mạnh Hà.* **Đắc Lắc :** *Lê Đình Bình, Lê Mạnh Quý, Nguyễn Thiên Bình, Hoàng Phương, Lê Thế Tân, Trương Xuân Nghiên, Trần Nguyên Ny, Mai Thanh Dũng, Lê Trọng Vĩnh, Nguyễn Hiếu Thảo.* **Yên Bái :** *Hoàng Tiến Thông, Lê Minh Đức, Nguyễn Trọng Tuấn, Trần Anh Quang, Bùi Văn Sỹ, Lê Hồng Hải, Nguyễn Tiến Dũng, Nguyễn Xuân Kiên, Tạ Xuân Hưng, Nguyễn Hùng Cường, Nguyễn Trường Phái, Lê Minh Đức, Hoàng Tiến Thông.* **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Tiến Tân, Nguyễn Duy Tân, Nguyễn Trung Lập, Hoàng Minh Tuấn, Lê Thế Thành, Lê Hồng Phương, Nguyễn Thanh Tú, Đào Xuân Thân, Cao Thế Thu, Nguyễn Đức Toàn, Lưu Tiến Dũng, Lê Hoàng Linh.* **Hải Dương :** *Nguyễn Đình Sơn, Hoàng Xuân Quý, Đào Thu Mai, Lê Văn, Bùi Thu Thái, Nguyễn Văn Luật, Phùng Đức Tuấn, Vũ Xuân Vinh, Trần Đại Nghĩa, Nguyễn Hồng Thái.* **Đà Nẵng :** *Nguyễn Thế Dung, Nguyễn Anh Tuấn, Lê Tự Duy Phong, Nguyễn Tấn Phong, Nguyễn Chí Cường, Huỳnh Trần Quốc, Nguyễn Văn Đấu, Đinh Thành Trung, Nguyễn*

Ngọc Hải, Nguyễn Tùng Lâm, Trần Việt Dũng, Nguyễn Tấn Hải, Huỳnh Quốc Việt, Nguyễn Hoàng Thành. **Phú Yên :** *Nguyễn Thanh Tuấn, Đặng Thế Mĩ, Trần Đình Lâm.* **Quảng Trị :** Nguyễn Việt Tiến. **Quảng Ninh :** *Lê Xuân Thành.* **Hòa Bình :** *Phạm Phi Long, Nguyễn Quang Hưng.* **Long An :** *Nguyễn Thanh Nhân.* **Khánh Hòa :** *Trần Tuấn Anh.* **Gia Lai :** *Nguyễn Hoàng Lương.* **Quảng Ngãi :** *Lê Hoàng Đức Khánh.* **Tây Ninh :** *Nguyễn Tấn Duy Nhã.* **Đồng Tháp :** *Nguyễn Đăng Triển.* **Đồng Nai :** *Võ Hữu Danh, Lê Khắc Huỳnh, Phan Anh Tuấn.* **Hà Nội :** *Hoàng Tùng, Mai Xuân Trường, Dương Việt Hùng, Nguyễn Đức Mạnh, Nguyễn Văn Hân, Lê Anh Vinh, Nguyễn Xuân Long, Lê Tuấn Anh, Đỗ Anh Tuấn, Ngô Thanh Tùng, Hoàng Văn, Nguyễn Đức Thọ, Nguyễn Quang Lộc, Nguyễn Đình Vinh, Nguyễn Mạnh Hà, Phạm Hải Trung, Lê Trọng Tuấn, Phạm Công Định, Nguyễn Sĩ Phong, Vũ Nhật Linh.* **Thanh Hóa :** *Lê Xuân Dũng, Nguyễn Hải Sơn, Lưu Văn Mạnh, Nguyễn Thanh Hải, Lưu Thạch Lâm, Cao Thị Phương Loan, Đàm Mạnh Tuấn, Lê Xuân Quyền, Hoàng Trung Tuyến, Đỗ Duy Phong, Lê Hoàng Anh, Cao Xuân Sinh, Vũ Đức Nghĩa, Mai Thị Thu, Nguyễn Duy Hà, Mai Anh Thắng, Mai Đỗ Thị Loan, Nguyễn Trung Phong, Nguyễn Văn Quang, Lê Việt Hùng, Lê Đình Tân, Trương Minh Tuấn, Lê Ngọc Tính, Đỗ Văn Chiến, Lê Cát Vương, Trương Ngọc Tuyên, Tấn Thành Vũ, Lê Xuân Lâm, Trần Hùng Việt.*

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/238. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có :*

$$\sqrt{3}\cos A + 2\cos B + 2\sqrt{3}\cos C \le 4.$$

Khi nào xảy ra dấu "=" ?

Lời giải

Lời giải 1. Có rất nhiều cách giải bài toán này, sau đây xin giới thiệu lời giải của tác giả đề toán. B.Đ.T cần chứng minh tương đương với $\cos A + \frac{2}{\sqrt{3}}\cos B + 2\cos C < \frac{4}{\sqrt{3}}$,

hay là

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos A + 1\cdot\frac{1}{2}\cos B + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C \le 1; \quad (1)$$

Gọi $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{BC}}{BC}$, $\vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\overrightarrow{CA}}{CA}$ và $\vec{c} = \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$; thế thì dễ thấy : (1) $\Leftrightarrow -(\vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} + \vec{a}\vec{b}) \le 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2] \le 1$$

B.Đ.T này đúng. Thật vậy, vì $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 \ge 0$ nên

$$\frac{1}{2}[\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2] \le$$
$$\le \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, nghĩa là : $\vec{a} = \overrightarrow{B'C'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{C'A'}$, $\vec{c} = \overrightarrow{A'B'}$, trong đó $B'C' = 1$, $C'A' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A'B' = \frac{1}{2}$ và tam giác $A'B'C'$ vuông ở A' có cạnh huyền $B'C' = 1$. Dễ thấy rằng $A'B'C'$ là một nửa tam giác đều, có : $\hat{A'} = 90^0$, $\hat{B'} = 60^0$, $\hat{C'} = 30^0$.

Vậy, dấu "đẳng thức" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông ở $\hat{A}$ và là một nửa tam giác đều có $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 30^0$.

Sau đây là mấy lời giải nữa.

Lời giải 2. (của Trần Hùng Việt, 11A, TH. chuyên ban Ba Đình, Nga Sơn, Thanh Hóa và Vũ Hải Châu, trường Lương Văn Tụy, Ninh Bình).

B.Đ.T cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2 + \sqrt{3}\cos(B + C) - 2\cos B - 2\sqrt{3}\cos C \ge 0,$$

hay là

$$\left(\frac{1}{2}\sin^2 B + \frac{3}{2}\sin^2 C - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\sin C\right) + \left(\frac{1}{2}\cos^2 B + \frac{3}{2}\cos^2 C + 2 + \sqrt{3}\cos B\cos C - 2\cos B - 2\cos B - 2\sqrt{3}\cos C\right) \ge 0,$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin B - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin C\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos B + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cos C - \sqrt{2}\right)^2 \ge 0$$

B.Đ.T. luôn đúng và đó là đ.p.c.m.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin B - \sqrt{3}\sin C = 0, & (i) \\ \cos B + \sqrt{3}\cos C = 2; & (ii) \end{cases}$$

Bình phương hai vế (i) và (ii) rồi cộng vế đối vế, ta được :

$$(\sin^2 B + \cos^2 B) + 3(\sin^2 C + \cos^2 C) + 2\sqrt{3}\cos(B + C) = 4;$$

Từ đó suy ra : $-\cos A = 0$ hay $A = 90^0$.

Từ (i) ta được :

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin(C + A)}{\sin C} = \frac{\cos C}{\sin C} = \sqrt{3}$$

hay $\cot g C = \sqrt{3}$. Suy ra : $\hat{C} = 30^0$ và do đó $\hat{B} = 60^0$

Tóm lại, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\hat{A} = 90^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 30^0$.

Lời giải 3 (Lời giải vectơ của Trần Nam Dũng, 11T, PTTH Phan Bội Châu Nghệ An và một số bạn khác). Gọi $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ lần lượt là các véctơ đơn vị của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, nghĩa là :

$$\vec{e_1} = \frac{\overrightarrow{BC}}{Bc}, \vec{e_2} = \frac{\overrightarrow{CA}}{CA}, \vec{e_3} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$$

Thế thì ta có :

$$0 \le (2\vec{e_1} + \sqrt{3}\vec{e_2} + \vec{e_3})^2 =$$
$$= 4 + 3 + 1 - 2(\sqrt{3}\cos A + 2\cos B + 2\sqrt{3}\cos C).$$

Từ đó ta được :

$$\sqrt{3}\cos A + 2\cos B + 2\sqrt{3}\cos C \le 4, \text{ đ.p.c.m.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $2\vec{e_1} + \sqrt{3}\vec{e_2} + \vec{e_3} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}\vec{e_2} + \vec{e_3})^2 = (2\vec{e_1})^2 \\ (2\vec{e_1} + \vec{e_3})^2 = (\sqrt{3}\vec{e_2})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e_2}\vec{e_3} = 0 \\ \vec{e_1}\vec{e_3} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = 90^0 \\ \hat{B} = 60^0 \end{cases}$$

Như vậy, dấu đẳng thức xảy ra khi ABC vuông ở A và có $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 30^0$.

Nhận xét : 1°) Rất đông các bạn tham gia giải bài toán trên đây và đa số cho lời giải véctơ, có đến 278 bạn gửi lời giải đến tòa soạn.

2°) Một số bạn có nhận xét rằng bài toán T9/238 này là một trường hợp đặc biệt của B.Đ.T :

$$2yz\cos A + 2xz\cos B + 2xy\cos C \le x^2 + y^2 + z^2 \quad (1)$$

mà các tác giả *Trần Tuấn Điệp* và *Đỗ Mạnh Môn* đã đưa ra trong "Toán học và tuổi trẻ" số 238, tháng 4/1997. Nhiều bạn chứng minh lại B.Đ. T này bằng phương pháp véctơ hoặc bằng những phương pháp khác, đưa đến chẳng hạn :

$$(1) \Leftrightarrow (x\sin B - y\sin A)^2 + (x\cos B + y\cos A - z)^2 \geq 0. \quad (1')$$

Thay $x = 2$, $y = \sqrt{3}$ *và* $z = 1$ thì được B.Đ.T. cần tìm. Để ý rằng B.Đ.T. (1') đúng với mọi bộ ba số thực x, y, z và A, B, C là các góc của một tam giác.

3°) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả : **Hà Nội :** *Nguyễn Hoàng Minh*, 10A, ĐHKHTN ; *Nguyễn Quang Lộc* và *Nguyễn Đức Thọ, 10A ĐHSP – ĐHQG* **Hà Nội ; Yên Bái :** *Nguyễn Trọng Tuấn*, 11A PTTH chuyên **Yên Bái** ; **Hải Dương :** *Trần Đại Nghĩa*, 11T và *Đào Thu Mai*, 10T PTTH năng khiếu **Hải Dương. Hải Phòng :** *Nguyễn Bắc Hải*, 11 chuyên Tin, PTTH năng khiếu Trần Phú ; **Ninh Bình :** *Vũ Hải Châu, trường Lương Văn Tụy, Trần Hùng Việt*, 11A1 Ba Đình, Nga Sơn ; *Lê Xuân Lâm*, trường Lương Đắc Bằng. **Nghệ An :** *Phạm Trung Thành*, 10I, *Trần Nam Dũng* 11T, PTTH Phan Bội Châu ; *Nguyễn Cảnh Khánh*, 11A1, PTTH chuyên ban Huỳnh Thúc Kháng ; **Quảng Bình :** *Nguyễn Trung Kiên*, 11A2 TH chuyên ban Lệ Thủy, **Quảng Nam :** *Nguyễn Văn Doan*, 12A3, TH chuyên ban Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn ; **Đắc Lắc :** *Lê Trọng Vinh*, 11T, PTTH chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/238. *Hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' sắp đặt ở trong không gian sao cho :* $BC \perp D'A'$, $CA \perp D'B'$, $AB \perp D'C'$, $DA \perp B'C'$, $DB \perp C'A'$. *Chứng minh rằng có một điểm O duy nhất sao cho các đường thẳng OA, OB, OC và OD theo thứ tự vuông góc với các mặt phẳng (B'C'D'), (C'D'A'), (D'A'B') và (A'B'C').*

Lời giải

Lời giải. a) Chứng minh tồn tại điểm O. Nếu có điểm O như vậy thì O là điểm chung (điểm đồng quy) của bốn đường thẳng Ax, By, Cz và Dt lần lượt vuông góc với các mặt phẳng $(B'C'D')$, $(C'D'A')$, $(D'A'B')$ và $(A'B'C')$. Ta chứng minh điều đó.

Vì $Ax \perp (B'C'D')$ nên $Ax \perp C'D'$, $By \perp (C'D'A')$ nên $By \perp C'D'$. Lại theo giả thiết, $AB \perp C'D'$, bởi vậy suy ra Ax và By đồng phẳng (vì cùng thuộc mặt phẳng α đi qua AB và vuông góc với $C'D'$). Nhưng trong α, $Ax // By$. Thật vậy, giả sử $Ax // By$ thế thì mp $(B'C'D')$ trùng với mp $(C'D'A')$ và do đó A', B', C' và D' đồng phẳng, trái với giả thiết. Vậy Ax phải cắt By, gọi $Ax \cap By = O$.

Chứng minh tương tự, ta được : Ax cắt Cz, Ax cắt Dt, By D cắt Cz, By cắt Dt. Nhưng Ax, By và Cz không đồng phẳng. Thật vậy, nếu chúng đồng phẳng, giả sử cùng thuộc mặt phẳng α thì A', B', C' và D' thẳng hàng vì cùng nằm trên một đường thẳng $\Delta = (C'D') = (D'A') = (D'B')$ vuông góc với α, mâu thuẫn với giả thiết. Ba đường thẳng Ax, By, Cz không đồng phẳng mà đôi một cắt nhau, vậy chúng đồng quy ở một điểm O.

$$Ax \cap By = O \in Cz$$

Chứng minh tương tự :

$$Ax \cap By = O \in Dt$$

suy ra : Ax, By, Cz và Dt đồng quy ở một điểm O.

b) Chứng minh duy nhất. Giả sử ngoài O còn có O' cũng thỏa mãn điều kiện nêu trên. Thế thì đường thẳng OO' vuông góc với cả bốn mặt phẳng $(B'C'D')$, $(C'D'A')$, $(D'A'B')$ và $(A'B'C')$, nên bốn điểm A', B', C' và D' đồng phẳng, mâu thuẫn với giả thiết. Ta được đ.p.c.m.

Nhận xét : 1°) Số bạn tham gia giải bài toán này không nhiều và nói chung, lời giải còn dài dòng, không sáng sủa, đặc biệt là thiếu chính xác. Chẳng hạn, hai đường thẳng mới đồng phẳng đã vội vàng kết luận chúng cắt nhau, hoặc ba đường thẳng cắt nhau đôi một đã kết luận chúng đồng quy !

2°) Nhìn chung, đa số các bạn còn khá lúng túng trong việc giải toán hình học không gian khi sử dụng phương pháp tổng hợp, phương pháp thông thường như đối với bài toán này chẳng hạn.

3°) Tuy nhiên, có bạn đã chỉ ra rằng, thực chất đây là một bài toán dựng hình, song không chỉ rõ thực chất dựng hình là ở chỗ nào. Cũng có bạn băn khoăn về sự tồn tại của hai tứ diện thỏa mãn các điều kiện nêu ra, nhưng lại yên tâm ngay vì sau đã chỉ ra hai tứ diện nội tiếp một hình hộp thoi (hay đặc biệt là hình lập phương) thỏa mãn các điều kiện của bài toán đặt ra. Mặc dầu có những nhận xét như trên, song các bạn này cũng như hầu hết các bạn tham gia giải bài toán trên, không thấy rằng sự tồn tại của hai tứ diện thỏa mãn các điều kiện đặt ra nằm ngay trong phần kết luận của bài toán. Chính phần này hướng dẫn cách phân tích, đồng thời phát biểu kết quả phần biện luận của bài toán dựng hình. Thật vậy, có thể phát biểu bài toán "chứng minh" trên đây dưới dạng một bài toán "dựng hình" như sau :

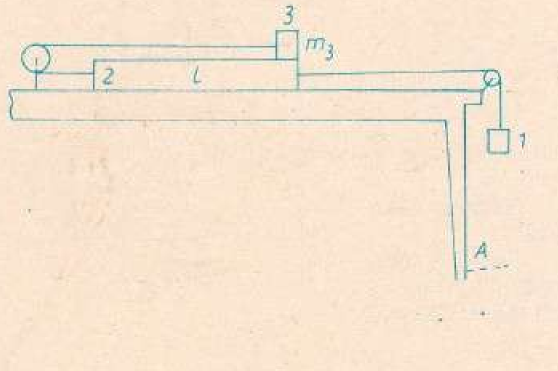
Cho một tứ diện $ABCD$. Hỏi có thể tồn tại (cũng tức là có thể dựng được) một tứ diện $A'B'C'D'$ sao cho : $BC \perp D'A'$, $CA \perp D'B'$, $AB \perp D'C'$, $DA \perp B'C'$ và $DB \perp C'A'$ hay không ?

4°) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả : *Nguyễn Sỹ Phong*, 11A PTCT, ĐHSP – ĐHQG **Hà Nội** ; *Mai Thanh Dũng*, 11T, trường Nguyễn Du, **Đắc Lắc** ; *Nguyễn Minh Phương* và *Trần Anh Tuấn, 11A PTTH chuyên Hùng Vương*, **Phú Thọ**.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/238

Hệ vật được bố trí như hình vẽ. Ba vật 1, 2, 3 khối lượng đều bằng 1 kg. Dây nối các vật không dãn. Hệ số ma sát ở mọi mặt tiếp xúc đều bằng k. (Ma sát ở các ròng rọc không đáng kể). Thả tay cho hệ vật chuyển động thì sau $\sqrt{0{,}75}$ *s vật 3 trượt hết chiều dài 0,5m của vật 2. Tính k.*



Hướng dẫn giải. Có thể giải bằng 2 cách : phương pháp động lực học và phương pháp định luật bảo toàn. Dưới đây là cách giải bằng phương pháp định luật bảo toàn.

Vì các vật nối với nhau bằng sợi dây không giãn nên gia tốc các vật đối với mặt đất bằng nhau và bằng a ; vật 2 và vật 3 chuyển động ngược chiều nhau với cùng gia tốc a, từ đó quãng đường thực tế mà vật 2, vật 3 đi được là $s = \frac{l}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25m$ (1). Mặt khác $s = \frac{at^2}{2}$, suy ra $a = \frac{2s}{t^2} = 2/3\ m/s^2$ (2). Khi vật 3 trượt hết trên vật 2, thế năng của hệ giảm $\Delta W_t = m_1gs$ (3). Vận tốc các vật khi đó $v = at$. Động năng của hệ

$$W_d = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)v^2}{2} \qquad (4)$$

Công của lực ma sát

$$A = F_{ms3} \cdot l + F_{ms2} \cdot s =$$
$$= km_3g \cdot l + k(m_3 + m_1)g \cdot s \qquad (5)$$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng $\Delta W_t = W_d + A$ từ (1) – (5) rút ra $k = 0,2$.

Nhận xét. Hai em có lời giải xuất sắc : *Nguyễn Đức Hải*, (11CL, PTTH Lê Hồng Phong, **Nam Định**) và *Vũ xuân Hoàng Trí* (10A1, PTTH Tân Phú, Định quán, **Đồng Nai**). Các em có lời giải đúng và gọn : *Vũ Tiến Tinh*, 10A2, THCB Uông Bí, **Quảng Ninh** ; *Trần Thiên Giang*, 10A chuyên Toán, ĐHSP Vinh ; *Lương Thu Ngân*, *10A2*, PTTH Ngô Quyền, **Hải Phòng** ; *Ngô Đắc Việt*, 11CL Quốc học, **Thừa Thiên Huế** ; *Lê Thành Công*, 10A0 THCB Mỹ Đức A, **Hà Tây** ; *Lê Hoài Ân*, 11L, trường Lương Văn Chánh, **Phú Yên** ; *Nguyễn Văn San*, 9 Lí NK **Hà Tĩnh** ; *Trần Anh Tuấn*, *10* PTTH chuyên Hùng Vương **Phú Thọ** ; *Lê Hải Thành*, 10 Lí, TH năng khiếu **Quảng Bình** ; *Trương Quang Ngọc*, 10A1, THCB Đào Duy Từ, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Quốc Khánh*, 10A4, trường Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Nguyễn Hùng Cường* 10A1, THCB Trần Cao Vân, Tam Kì, **Quảng Nam** ; *Lê Đình Sơn*, 10A2, PTNK **Hải Dương** ; *Bùi Văn Thành* 11A2, PTTH chuyên Yên Bái ; *Dương Minh Ngọc* 11A2, PTTH Nguyễn Trân, Hoài Nhơn, **Bình Định** ; *Thi Trần Anh Tuấn*, 11A2, PTTH chuyên **Trà Vinh** ; *Lê Trần Thế Duy*, 11L, chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Dương Thị Mộng Thảo*, 12A4, PTTH Nguyễn Thông, **Long An**.

MAI ANH

Bài L2/238

Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ.

$$U_{AB} = 200\sin 100\pi t\ (V) ;$$
$$R_1 = R_2 = R ;$$
$$R^5 + Z_L^5 \leq 625 \cdot 10^6 \qquad (1)$$
$$Z_LZ_C = \frac{3R^2 + Z_L^2}{2} \qquad (2)$$

1) Khi K mở, ampe kế A_1 chỉ 2 A.

Tính C.

2) Khi K đóng hãy tìm số chỉ A_2.

Hướng dẫn giải.

Trong từng trường hợp vẽ lại mạch điện và dùng phương pháp giản đồ véctơ để giải.

1) Khi K mở, ta có đoạn mạch song song AB gồm 2 nhánh : nhánh 1 gồm R_1 và L mắc nối tiếp ; nhánh 2 gồm R_2 và C mắc nối tiếp. Ta có

$$z = \frac{U_{AB}}{I} = 50\sqrt{2}\ \Omega \qquad (3)$$

Xét nhánh 1 :

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R^2 + Z_L}} \qquad (4)$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}} \qquad (5)$$

Với nhánh 2 :

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}} \qquad (6)$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + Z_c^2}} \qquad (7)$$

Vẽ giản đồ véctơ với $\vec{U}_{AB}$ trên trục gốc (pha), vẽ $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$, suy ra

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2\ hay\ I^2 =$$
$$= I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \qquad (8)$$

Từ (1) – (8), rút ra

$R^5 + Z_L^5 = 625 \cdot 10^6$, $R = Z_L$

và $R = Z_L = 50\,\Omega$, $Z_c = 100\Omega$

hay $C = 31,8\ \mu F$.

2) Khi K đóng, ta có sơ đồ

$[R_1 // C]$ nt $[R_2 // L]$.

Dùng phương pháp giản đồ véctơ cho các đoạn mạch AM, MB rồi AB.

Ta có

$$\vec{I} = \vec{I}_c + \vec{I}_{R_1} = \vec{I}_L + \vec{I}_{R_2} ; \vec{I}_{A_2} =$$
$$= \vec{I}_C - \vec{I}_{R_2} ; \vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MB}$$

Từ đó

$$I_{A_2}^2 = I_{R_2}^2 + I_C^2 - 2I_{R_2}I_C\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$
$$U_{AB}^2 = U_{AM}^2 + U_{MB}^2 + 2U_{AM}U_{AB}\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

với $\cos\varphi_1 = \frac{Z_c}{\sqrt{Z_c^2 + R^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$$\cos\varphi_2 = \frac{Z_L}{\sqrt{Z_L^2 + R^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$U_{AB} = 100\sqrt{2}\ V$. Xét tỉ số

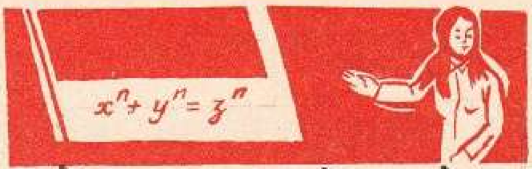
$$\frac{U_{AM}}{U_{MB}} = \frac{Z_{AB}}{Z_{MB}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

Từ đó suy ra $U_{AM} \approx 97V$; $U_{MB} \approx 77V$; $I_{R_2} \approx 1,54\ A$;

$I_c = 0,97\ A$. Và cuối cùng $I_{A_2} \approx 0,69\ A$.

Nhận xét. Em *Nguyễn Văn Thuấn*, 12B, PTTH Năng khiếu Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang** đã có lời giải gọn và đúng.

MAI ANH



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/242 : *Cho dãy số : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ... (liên tiếp một số 1, hai số 2, ba số 3, ...). Hỏi số hạng thứ 500000 là số nào ?*

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

Bài T2/242 :
Cho a, b, c là 3 số tùy ý thuộc đoạn $[\alpha ; \beta]$ $(\alpha < \beta)$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma$ với $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$. Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

PHẠM HỮU HOÀI
(T.P. Hồ Chí Minh)

Bài T3/242 : *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2} \\ 4x(x^3 - x^2 + x - 1) = y^2 + 2xy - 2 \end{cases}$$

ĐỖ THANH HÂN
(Minh Hải)

Bài T4/242 : *Cho hình chữ nhật có chu vi là P và diện tích S. Hãy chứng minh :*

$$P \geqslant \frac{32S}{2S + P + 2}$$

LÊ VĂN BẢO
(Hà Tĩnh)

Bài T5/242 : *Trong mặt phẳng cho đường tròn (O ; R) và điểm P cố định không nằm trên đường tròn ($OP = d \neq R$). Một dây cung MN thay đổi của đường tròn sao cho luôn được nhìn từ P dưới một góc vuông : $\widehat{MPN} = 90^\circ$.*

Tìm quỹ tích điểm Q, đối xứng với P qua MN. Biện luận.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
(Hà Nội)

CÁC LỚP PTTH

Bài T6/242 : *Giả sử x và y là các số nguyên dương sao cho $x^2 + y^2 + 6$ chia hết cho xy.*

Chứng minh rằng : $\dfrac{x^2 + y^2 + 6}{xy}$ là *lập phương của một số tự nhiên.*

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(Nam Định)

Bài T7/242 : *Chứng minh rằng với đa thức tùy ý P(x) bậc $n \geqslant 1$ có n nghiệm thực khác nhau* $x_1, x_2, ..., x_n$ ta có đẳng thức :

$$\frac{P''(x_1)}{[P'(x_1)]^3} + \frac{P''(x_2)}{[P'(x_2)]^3} + ... + \frac{P''(x_n)}{[P'(x_n)]^3} = 0$$

TRẦN NAM DŨNG
(T.P. Hồ Chí Minh)

Bài T8/242 : *Tam giác ABC có một góc không nhỏ hơn $\dfrac{2\pi}{3}$. Chứng minh rằng :*

$$tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \geqslant 4 - \sqrt{3}.$$

TÔ XUÂN HẢI
(Hải Dương)

Bài T9/242 : *Giả sử M là một điểm thuộc miền tam giác ABC. Chứng minh rằng :*

$$MA + MB + MC \geqslant 6r$$

với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

NGUYỄN NGỌC BÌNH PHƯƠNG
(Tiền Giang)

Bài T10/242 : *Giả sử M là một điểm chuyển động trong miền tam giác ABC, là đáy của tứ diện đều ABCD. Gọi A', B' và C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các mặt BCD, CDA và DAB. Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác A'B'C' chuyển động trong một miền tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trong tứ diện và song song với đáy ABC.*

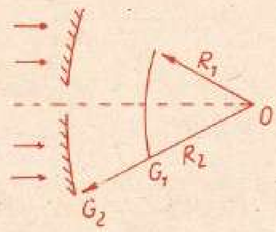
HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/242 : *Khi quả bóng tennis rơi từ độ cao H xuống va chạm vào chiếc vợt tennis đứng yên thì nó nảy lên đến độ cao nhỏ hơn, chỉ bằng 0,9H. Hỏi phải cho chiếc vợt tennis chuyển động lên phía trên với vận tốc lúc sắp va chạm bằng bao nhiêu để quả bóng lại nảy lên đến độ cao H như trước ?*

TÔ GIANG
(Hà Nội)

Bài L2/242 : *Nhờ hệ gương cầu đồng tâm, người ta nhận được ảnh của mặt trời trên màn (xem hình vẽ). Có thể thay hệ bằng một thấu kính hội tụ mỏng có tiêu cự f bằng bao nhiêu để cũng cho ảnh cùng kích thước ? Biết rằng bán kính của các gương $R_1 = 12cm$, $R_2 = 30cm$.*



ĐỖ VĂN TOÀN
(Nghệ An)

problems in this issue

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T2/242. *Consider the sequence*
$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$
(one number 1, then two consecutive numbers 2, then three consecutive numbers 3, ...).
What number is the 500.000th term of this sequence ?

T2/242. *a, b, c are three arbitrary numbers belonging to the segment $[\alpha ; \beta]$ and satisfying the condition $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma$ where $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$. Prove that*
$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

T3/242. *Solve the system of equations :*
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2} \\ 4x(x^3 - x^2 + x - 1) = y^2 + 2xy - 2 \end{cases}$$

T4/242. *Let be given a rectangle with perimeter P and with area S. Prove that*
$$P \geqslant \frac{32S}{2S + P + 2}.$$

T5/242. *In the plane, let be given a circle $(O ; R)$ and a fixed point P, $OP = d \neq R$. A chord MN of the circle moves so that the angle $MPN = 90^\circ$. Find the locus of the point Q, symmetric of P about the line MN. Discuss the problem.*

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/242. *x, y are two positive integers such that $x^2 + y^2 + 6$ is divisible by xy. Prove that*
$$\frac{x^2 + y^2 + 6}{xy}$$ *is a cube of a whole number.*

T7/242 : *Prove that for every polynomial of degree $n \geqslant 1$, having n real distinct roots $x_1, x_2, \ldots, x_n$, holds the following equality :*
$$\frac{P''(x_1)}{(P'(x_1))^3} + \frac{P''(x_2)}{(P'(x_2))^3} + \ldots + \frac{P''(x_n)}{(P'(x_n))^3} = 0.$$

T8/242 : *The triangle ABC has an angle not exceeding $\dfrac{2\pi}{3}$. Prove that*
$$tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \geqslant 4 - \sqrt{3}.$$

T9/242 : *M is a point in the interior of a triangle ABC. Prove that $MA + MB + MC \geqslant 6r$, where r is the radius of the incircle of ABC.*

T10/242 : *A point moves in the interior of a triangle ABC, which is the base of a regular tetrahedron $ABCD$. Let A', B' and C' be respectively the orthogonal projections of M on the faces BCD, CDA and DAB. Prove that the center of gravity G of the triangle $A'B'C'$ moves in the interior of a fixed triangle $A_1B_1C_1$ which lies in the interior of the tetrahedron and in a plane parallel to the base ABC.*

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

Vận dụng điều kiện đồng phẳng của bốn điểm để giải bài toán HÌNH KHÔNG GIAN

CHỬ XUÂN DŨNG
(Hà Nội)

Vận dụng vectơ để giải quyết một bài toán hình học không gian là một vấn đề không đơn giản với học sinh lớp 12 PTTH. Để làm tốt các bài tập loại này thì học sinh phải biết chuyển những yếu tố hình hình học sang một dạng ngôn ngữ của vectơ. Trong bài viết nhỏ này tôi chỉ xin đưa ra một vấn đề : "Vận dụng điều kiện đồng phẳng của bốn điểm để giải một bài toán hình không gian".

Để chuẩn bị, chúng ta cùng nhau nhắc lại các vấn đề lý thuyết sau :

a) Một bộ gồm 3 vectơ khác vectơ không, không đồng phẳng gọi là một cơ sở của không gian.

b) Một vectơ $\vec{x}$ bất kì của không gian luôn biểu diễn được một cách duy nhất qua 1 cơ sở là $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$
$\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ bộ $(m ; n ; p)$ là duy nhất.

c) Với $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ là một cơ sở của không gian, ta có :
$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = p = 0.$

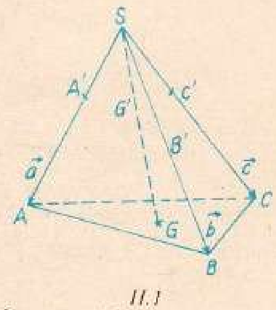
d) Cho 4 điểm A, B, C, D trong không gian. Bốn điểm này là đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{DA} = \alpha\overrightarrow{DB} + \beta\overrightarrow{DC}$ $\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \alpha(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) + \beta(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OC} + (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OD}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OC} + \gamma\overrightarrow{OD}$ (với O bất kì và $\alpha + \beta + \gamma = 1$)

e) Tùy thuộc yêu cầu của bài toán chúng ta phải biết chuyển những yêu cầu đó sang ngôn ngữ vectơ ; biết cách chọn 1 cơ sở hợp lí, biết cách biểu diễn một vectơ qua 1 cơ sở.

Sau đây là 1 số ví dụ minh họa (lấy trong Bộ đề thi trước đây)

Ví dụ 1 :

Cho chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi B', D' là điểm chính giữa các cạnh SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Chứng minh rằng :
$SC = 3SC'$.



H.1

Lời giải :

Một cơ sở $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ với $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$; $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$; $\vec{c} = \overrightarrow{SD}$ (H. 1)

Đặt : $\dfrac{SC'}{SC} = m$. Ta cần chứng minh :

$m = \frac{1}{3}$. Ta có : $\overrightarrow{SB'} = \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{SD'} = \frac{1}{2}\vec{c}$

$$\overrightarrow{SC'} = m\overrightarrow{SC} = m(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC}) = m(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})$$

Theo giả thiết A, B', C', D' đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $\exists(\alpha ; \beta ; \gamma)$ với $\alpha + \beta + \gamma = 1$ thỏa mãn $\overrightarrow{SC'} = \alpha\overrightarrow{SA} + \beta\overrightarrow{SB'} + \gamma\overrightarrow{SD'}$

$$\Leftrightarrow -m\vec{a} + m\vec{b} + m\vec{c} = \alpha\vec{a} + \frac{\beta}{2}\vec{b} + \frac{\gamma}{2}\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -m \\ \frac{\beta}{2} = m \\ \frac{\gamma}{2} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -m \\ \beta = 2m \\ \gamma = 2m \end{cases} \Rightarrow$$

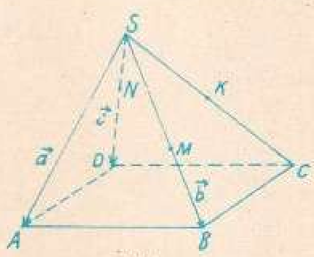
$\Rightarrow -m + 2m + 2m = 1$

(vì $\alpha + \beta + \gamma = 1$) $\Rightarrow m = \frac{1}{3}$ (đpcm).

Ví dụ 2 :

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi K là điểm chính giữa của cạnh SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng :

$$\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3.$$



H.2

Lời giải : (H. 2)

Chọn cơ sở $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ với $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{SD} = \vec{c}$.

Đặt : $\frac{SB}{SM} = m$; $\frac{SD}{SN} = n$

Ta cần chứng minh : $m + n = 3$

Ta có :

$$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{m}\overrightarrow{SB} = \frac{1}{m}\vec{b} \text{ ; } \overrightarrow{SN} = \frac{1}{n}\overrightarrow{SO} = \frac{1}{n}\vec{c} \text{ ;}$$

$$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{a})$$

Theo giả thiết có : A, M, K, N đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma)$ với $\alpha + \beta + \gamma = 1$ thỏa mãn : $\overrightarrow{SK} = \alpha\overrightarrow{SA} + \beta\overrightarrow{SM} + \gamma\overrightarrow{SN} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \alpha\vec{a} + \frac{\beta}{m}\vec{b} + \frac{\gamma}{n}\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \frac{\beta}{m} = \frac{1}{2} \\ \frac{\gamma}{n} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \beta = m/2 \\ \gamma = n/2 \end{cases}$$

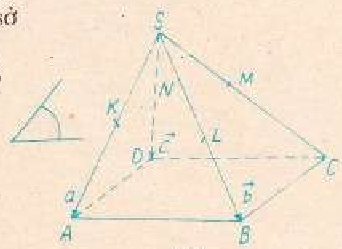
Vì $\alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \frac{m}{2} + \frac{n}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m + n = 3$ (đpcm)

Ví dụ 3 :

Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N. Chứng minh rằng :

$$\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$$

Lời giải : (H. 3)



H.3

Chọn một cơ sở $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ với $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{SD}$

Đặt : $\frac{SA}{SK} = x$; $\frac{SC}{SM} = y$; $\frac{SB}{SL} = m$; $\frac{SD}{SN} = n$

Ta cần chứng minh : $x + y = m + n$. Thật vậy, ta có :

$$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{x}\vec{a} \text{ ;}$$

$$\overrightarrow{SL} = \frac{1}{m}\vec{b} \text{ ;}$$

$$\overrightarrow{SN} = \frac{1}{n}\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{y}\overrightarrow{SC} = \frac{1}{y}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

Theo giả thiết thì : K, L, M, N đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma)$ với $\alpha + \beta + \gamma = 1$ và thỏa mãn : $\overrightarrow{SM} = \alpha\overrightarrow{SK} + \beta\overrightarrow{SL} + \gamma\overrightarrow{SN}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y}\vec{a} + \frac{1}{y}\vec{b} + \frac{1}{y}\vec{c} = \frac{\alpha}{x}\vec{a} + \frac{\beta}{m}\vec{b} + \frac{\gamma}{n}\vec{c}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{x} = \frac{-1}{y} \\ \frac{\beta}{m} = \frac{1}{y} \\ \frac{\gamma}{n} = \frac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{x}{y} \\ \beta = \frac{m}{y} \\ \gamma = \frac{n}{y} \end{cases} \text{ Vì } \alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{y} + \frac{m}{y} + \frac{n}{y} = 1$$

$\Leftrightarrow -x + m + n = y \Leftrightarrow x + y = m + n$ (đpcm)

Ví dụ 4 :

Cho hình chóp S.ABC ; G là trọng tâm tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SG theo thứ tự tại A', B', C', G'. Chứng minh rằng :

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3\frac{SG}{SG'}$$

Giải : (H. 4)

Chọn một cơ sở : $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ với $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$ $\vec{c} = \overrightarrow{SC}$.

Đặt : $\frac{SA}{SA'} = x$; $\frac{SB}{SB'} = y$ $\frac{SC}{SC'} = 2$; $\frac{SG}{SG'} = m$

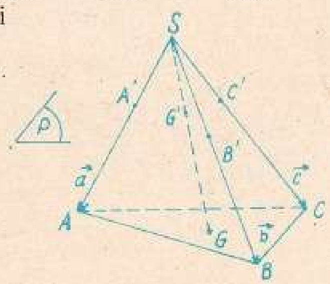
Ta cần phải chứng minh : $x + y + z = 3m$.

Ta có :

$$\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{x}\vec{a} \text{ ;}$$

$$SB' = \frac{1}{y}\vec{b} \text{ ;}$$

$$\overrightarrow{SC'} = \frac{1}{z}\vec{c}$$



$$\overrightarrow{SG'} = \frac{1}{m}\overrightarrow{SG} = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})\right] =$$
$$= \frac{1}{3m}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

(Vì G là trọng tâm ΔABC nên ta có : $3\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$)

Theo giả thiết thì ta có : A', B', C', G' đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma)$ với $\alpha + \beta + \gamma = 1$ và $\overrightarrow{SG'} = \alpha\overrightarrow{SA'} + \beta\overrightarrow{SB'} + \gamma\overrightarrow{SC'}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3m}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{\alpha}{x}\vec{a} + \frac{\beta}{y}\vec{b} + \frac{\gamma}{z}\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{1}{3m} \\ \dfrac{\beta}{y} = \dfrac{1}{3m} \\ \dfrac{\gamma}{z} = \dfrac{1}{3m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x}{3m} \\ \beta = \dfrac{y}{3m} \\ \gamma = \dfrac{z}{3m} \end{cases}$$

Vì $\alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{3m} + \dfrac{y}{3m} + \dfrac{z}{3m} = 1 \Leftrightarrow$

$$x + y + z = 3m \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét :

+) Trong 4 ví dụ này chúng ta đã sử dụng một điều kiện đồng phẳng của 4 điểm A, B, C, D là :

A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma)$ với $\beta + \alpha + \gamma = 1$ và $\overrightarrow{OA} = \alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OC} + \gamma\overrightarrow{OD}$ (O bất kì). Ở đây ta sử dụng điều kiện $\alpha + \beta + \gamma = 1$ rồi từ đó suy ra một điều cần chứng minh mà không cần chỉ rõ α, β, γ bằng bao nhiêu, các bạn hãy tự giải thích điều này !

+) Phải chăng những bài toán này có cùng phương pháp giải chung. Xin đề nghị các bạn hãy tự rút ra phương pháp giải cho bài toán nhỏ này. Sau đây là một số bài tập đề nghị để các bạn áp dụng :

Bài 1 :

Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi A', B', C', D' là các điểm lần lượt chia các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA theo tỉ số k, tức là :

$$\frac{\overrightarrow{A'A}}{\overrightarrow{A'B}} = \frac{\overrightarrow{B'B}}{\overrightarrow{B'C}} = \frac{\overrightarrow{C'C}}{\overrightarrow{C'D}} = \frac{\overrightarrow{D'D}}{\overrightarrow{D'A}} = k$$

Với giá trị nào của k thì 4 điểm A', B', C', D' là đồng phẳng ?

Bài 2 :

Cho hình chóp tam giác $D.ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M, song song với AD, BD, CD, theo thứ tự cắt các mặt (BCD), (ACD), (ABD) tại A', B', C'. Chứng minh rằng tổng : $\dfrac{MA'}{AD} + \dfrac{MB'}{BD} + \dfrac{MC'}{CD}$ không phụ thuộc vào vị trí của M trong tam giác ABC. (Gợi ý : Hãy chứng minh $\dfrac{MA'}{AD} + \dfrac{MB'}{BD} + \dfrac{MC'}{CD} = 1$).

Kì thi chọn học sinh giỏi Toán toàn quốc năm học 1996 – 1997 cấp phổ thông trung học được tiến hành trong hai ngày 14 và 15 tháng 3 năm 1997. Các đơn vị dự thi được chia thành hai bảng A và B với mức độ đề toán của bảng A khó hơn bảng B. Tham dự cuộc thi có 61 đơn vị với tổng số 441 thí sinh, trong đó bảng A gồm 34 đội với 263 thí sinh, bảng B gồm 27 đội với 178 thí sinh. Điểm tối đa là : 20 điểm × 2 ngày = 40 điểm.

Kết quả như sau : Ở bảng A có 2 giải nhất (từ 35 đến 36 điểm), 16 giải nhì (từ 29 đến 34 điểm), 30 giải ba (từ 23 đến 27 điểm) và 28 giải khuyến khích (từ 20 đến 21 điểm) ; tổng cộng là 76 giải, chiếm tỉ lệ 28,9% so với số thí sinh.

Ở bảng B có 1 giải nhất (34 điểm), 3 giải nhì (từ 28 đến 28,5 điểm), 16 giải ba (từ 23 đến 26 điểm) và 14 giải khuyến khích (từ 20 đến 21,5 điểm) ; tổng cộng là 34 giải, đạt tỉ lệ 19,1% so với số thí sinh.

Dưới đây là danh sách các học sinh đạt giải :

BẢNG A

Giải Nhất : *Hoàng Minh Đức* (**Thanh Hóa**), *Nguyễn Cảnh Hào* (**Nghệ An**).

Giải Nhì : *Đỗ Quốc Anh, Phạm Lê Hùng, Nguyễn Anh Tú, Vũ Quang Đông* (ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội**), *Nguyễn Hữu Quỳnh* (ĐHSP – ĐHQG **Hà Nội**), *Lê Quốc, Trần Tiến Dũng* (**Hà Nội**), *Trịnh Thị Kim Chi* (**Hà Tĩnh**) *Vũ Hải Sâm* (**Nam Định**), *Phạm Hồng Linh* (**Nghệ An**), *Trịnh Hữu Trung, Nguyễn Ngọc Hưng, Đỗ Quang Thơ* (**Thanh Hóa**), *Hà Anh Tuấn* (**Phú Thọ**), *Tô Trần Tùng* (**Hải Phòng**), *Đoàn Nhật Dương* (**Thái Bình**)

Giải Ba : *Trần Minh Anh, Vũ Tất Tảng, Ngô Văn Sáng* (**Hà Nội**), *Phạm Thái Hà, Trần Văn Hoàng, Đinh Tiến Hoàng, Đinh Thị Thúy Nga* (**Thái Bình**), *Phạm Văn Quốc, Đặng Việt Cường, Đỗ Ngọc Anh* (**Nam Định**) *Hà Minh Lam, Hà Huy Thái, Vũ Việt Anh, Trần Trung Thành* (ĐHSP – ĐHQG **Hà Nội**) *Vũ Đình Phương, Phạm Minh Đức* (**Thanh Hóa**) *Đặng Anh Tuấn* (**Hải Phòng**), *Mai Tùng Long, Đặng Thị Hồng Minh, Phạm Văn Hùng* (**Hà Tĩnh**), *Đào Thị Thu Hà, Tạ Duy Thắng, Ngô Đức Thành, Nguyễn Bá Hùng, Phạm Huy Tùng, Nguyễn Lưu Sơn* (ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội**), *Võ Thị Như Quỳnh* (**Nghệ An**), *Nguyễn Tiến Dũng* (**Đà Nẵng**), *Nguyễn Ngọc Tân* (**Phú Thọ**), *Thái Thành Hải* (TP **Hồ Chí Minh**).

Giải khuyến khích : *Phạm Đức Tùng, Lưu Văn Thành* (**Hải Phòng**), *Trương Thanh Chương* (**Hà Tây**), *Phạm Thị Thanh Hải, Dương Thu Phương* (**Hà Tĩnh**), *Đinh Thị Nhung, Đoàn Tiến Dũng* (**Thanh Hóa**), *Lê Anh Tuấn, Vũ Xuân Dũng, Nguyễn Quang Nghĩa* (ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội**), *Trần Nam Dũng, Lê Văn An, Dương Văn Yên* (**Nghệ An**), *Nguyễn Hoài Nam* (ĐHSP – ĐHQG **Hà Nội**), *Nguyễn Xuân Tương* (ĐHSP **Vinh**) *Lê Long Triều* (ĐHQG TP **Hồ Chí Minh**) *Phan Linh* (**Hà Nội**), *Trần Thanh Phương* (TP **Hồ Chí Minh**), *Nguyễn Minh Phương* (**Phú Thọ**), *Hoàng Hữu Hiệp* (**Vĩnh Phúc**), *Hoàng Sĩ Nguyên* (**Thái Nguyên**), *Vũ Thu Hường* (**Hải Dương**), *Trần Đức Quyên, Nguyễn Anh Hoa* (**Nam Định**), *Trịnh Hồng Mai, Nguyễn Trường Thanh* (**Thái Bình**), *Võ Hoàng Hải, Võ Thanh Tùng* (**Thừa Thiên – Huế**).

KẾT QUẢ CUỘC THI OLYMPIC TOÁN PHỔ THÔNG TRUNG HỌC TOÀN QUỐC
Năm học 1996 - 1997

BẢNG B

Giải Nhất : *Đào Duy Chung* (**Gia Lai**)

Giải Nhì : *Phan Thanh Hải* (**Lâm Đồng**), *Hồ Tấn Thụa* (**Kon Tum**) *Trương Vĩnh Lân* (**Quảng Bình**)

Giải Ba : *Phạm Khánh Toàn, Nguyễn Quốc Hưng, Nguyễn Thị Minh Tâm* (**Hòa Bình**), *Lê Minh Hào* (**Cà Mau**), *Nguyễn Đặng Hoàng Tuấn* (**Lạng Sơn**), *Lương Vũ Nam* (**Yên Bái**), *Hồ Thiên Sơn* (**Gia Lai**), *Đặng Hoàng Khải* (**Bến Tre**), *Tô Hiền Sỹ, Hoàng Công Chức* (**Lâm Đồng**), *Nguyễn Ngọc Phụng* (**Vĩnh Long**), *Tô Anh Dũng, Mai Đức Thanh, Lê Hoành Sử* (**Đắc Lắc**), *Phạm Thị Minh Nguyệt* (**Quảng Bình**) *Bùi Đăng Hoàn* (**Đồng Tháp**).

Giải khuyến khích :

Trần Thị Huyền Thảo (**Bạc Liêu**), *Nguyễn Đình Vũ* (**Gia Lai**), *Nguyễn Tiến Hằng, Lương Thanh Huy, Trần Nguyên Trung* (**Lâm Đồng**), *Trần Minh Quân* (**Sơn La**), *Võ Trung Dũng, Nguyễn Đăng Triển* (**Đồng Tháp**), *Trần Anh Tuấn* (**Hòa Bình**), *Hoàng Mạnh Cường* (**Quảng Bình**), *Hoàng Tùng* (**Đắc Lắc**), *Phạm Hồng Hòa* (**Tây Ninh**), *Bùi Minh Thiệu* (**Trà Vinh**), *Lê Chí Nguyễn* (**Cà Mau**)

Sau đây là các đề thi (14, 15/3/1997) mỗi ngày làm 3 bài trong 180 phút.

BẢNG A

Bài 1 :

Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm O bán kính R là một điểm P nằm trong đường tròn (OP = d < R). Trong các tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại P, hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các chu vi đó theo R và d.

Bài 2 :

Cho số tự nhiên $n > 1$ không chia hết cho 1997. Xét hai dãy số (a_i) và (b_j) được xác định như sau :

$$a_i = i + \frac{ni}{1997} \text{ với } i = 1, 2, 3, \dots, 1996,$$

$$b_j = j + \frac{1997j}{n} \text{ với } j = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

Xét tất cả các số của hai dãy trên và sắp thứ tự không giảm ta được $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{1995+n}$.

Chứng minh rằng $c_{k+1} - c_k < 2$ với mọi $k = 1, 2, \dots, 1994 + n$.

Bài 3 :

Hỏi có bao nhiêu hàm số $f : N^* \to N^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau :

1) $f(1) = 1$

2) $f(n).f(n+2) = (f(n+1))^2 + 1997$ *với mọi $n \in N^*$? (Kí hiệu N^* là tập hợp số nguyên dương).*

Bài 4 :

a) Tìm tất cả các đa thức f(x) với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất mà $f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3}$.

b) Tồn tại hay không đa thức f(x) với hệ số nguyên mà

$$f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3} \text{ ?}$$

Bài 5 :

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n đều chọn được số nguyên dương k để $19^k - 97$ *chia hết cho* 2^n.

Bài 6 :

Cho 75 điểm thuộc khối lập phương với cạnh dài 1 đơn vị, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại tam giác với diện tích không lớn hơn $\frac{7}{72}$ mà ba đỉnh là ba trong số 75 điểm đã cho.

BẢNG B

Bài 1 :

Cho hàm số $f(x) = a\sin ux + b\cos vx$ xác định trên tập số thực, trong đó a, b, u, v là các hằng số thực khác không.

Chứng minh rằng f(x) là hàm số tuần hoàn khi và chỉ khi $\frac{u}{v}$ là số hữu tỉ.

Bài 2 :

Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm P nằm trong đường tròn (OP = d < R).

Xét các tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại P.

a) Chứng minh rằng AB.CD + BC.AD = AC.BD.

b) Trong các tứ giác ABCD như trên hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tính chu vi đó theo R và d.

Bài 3 :

Cho dãy số nguyên (a_n) ($n \in N$) được xác định như sau : $a_0 = 1$, $a_1 = 45$

$a_{n+2} = 45a_{n+1} - 7a_n$ *với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$*

a) Tính số các ước dương của $a_{n+1}^2 - a_na_{n+2}$ theo n.

b) Chứng minh rằng $1997a_n^2 + 7^{n+1}.4$ là số chính phương với mỗi n.

Bài 4 :

Tìm tất cả các đa thức f(x) với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất mà

$$f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{9}.$$

Bài 5 :

Cho n và k là các số nguyên dương với $n \geq 7$ và $2 \leq k < n$. Chứng minh rằng $k^n > 2n^k$.

Bài 6 :

Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c. Xét diện tích các tam giác có ba đỉnh nằm bên trong hoặc trên mặt của hình hộp đã cho, tìm giá trị lớn nhất của các diện tích đó theo a, b, c.

NGUYỄN VIỆT HẢI
(Vụ THPT)

TRÊN ĐƯỜNG ĐI TÌM

"BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC"

TRẦN VIẾT KÍNH
(ĐHSP Vinh)

Trong quá trình học môn lượng giác lớp 11, cũng như trong thời gian ôn thi đại học, chắc hẳn không ai có thể quên hàng loạt bất đẳng thức trong tam giác mà ta đã chứng minh được. Chẳng hạn : với mọi tam giác thì

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$2 < \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$1 < \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Vấn đề đặt ra là : Trong tam giác còn có những bất đẳng thức lượng giác nào nữa ?

Một trong nhiều hướng để tìm đó là : Trong các bất đẳng thức đã gặp, gọi vế chứa các biến A, B, C là :

$f_i\,(A, B, C)$ $i = \overline{1, n}$. Khi đó xảy ra trường hợp : với $i \neq j$, f_i và f_j có cùng giá trị lớn nhất hoặc cùng giá trị bé nhất, xảy ra khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$. Từ đây nảy ra suy nghĩ : hãy so sánh f_i và f_j.

Ví dụ : $\sin A + \sin B + \sin C$ với $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$

$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$ với $\cos A + \cos B + \cos C$

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ với $(\cos A + \cos B + \cos C)^2$

. . . . . .

Việc so sánh f_i và f_j trong những điều kiện nhất định xảy ra của ΔABC sẽ dẫn đến các bất đẳng thức mới.

Công việc đặt ra ở đây là : sẽ đặt vào ô vuông trong kí hiệu $f_i \,\square\, f_j$ dấu quan hệ thứ tự "$\leq$" hay "$\geq$" ? ?

Để làm được điều đó, ta xét một điều kiện "cần" để có dấu quan hệ "$\leq$" hay "$\geq$" như sau :

Đặt $C = x$ $(0 < x < \pi)$, xét $A = B = \frac{\pi - x}{2}$, khi đó $f_i = f_i(x)$, $f_j = f_j(x)$.

Xét hàm $y = f_i(x) - f_j(x)$, ở đây $y = 0$ khi $x = \frac{\pi}{3}$. Bằng quy tắc khảo sát hàm số, hoặc bằng việc chứng minh bất đẳng thức, ta tìm được $y \leq 0$ hoặc $y \geq 0$. Khi đó ta sẽ cho được dấu bất đẳng thức thích hợp. Tất nhiên, việc tìm ra dấu "$\leq$" hoặc "$\geq$" cũng mới chỉ là dự đoán, để khẳng định, ta phải tìm ra chứng minh tính đúng đắn của bất đẳng thức, đôi khi để xảy ra bất đẳng thức, còn phải bổ sung thêm một số điều kiện cần thiết (chẳng hạn : tam giác không tù, tam giác nhọn).

Ví dụ : so sánh $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ với $(\cos A + \cos B + \cos C)^2$, gọi biểu thức thứ nhất, thứ hai là f_1 và f_2. Chúng ta đã có kết quả f_1, f_2 đều có giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{4}$ đạt được khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$

Khi đó :

$$f_1 = 2\sin^2\frac{\pi - x}{2} + \sin^2 x,$$

$$f_2 = \left(2\cos\frac{\pi - x}{2} + \cos x\right)^2$$

$$y = f_1 - f_2 = 2\sin^2\frac{\pi - x}{2} + \sin^2 x - \left(2\cos\frac{\pi - x}{2} + \cos x\right)^2$$

$$y' = -3\sin x + 2\sin 2x + \cos\frac{x}{2} - 3\cos\frac{3x}{2}$$

$$y'' = -3\cos x + 4\cos 2x - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{9}{2}\sin\frac{3x}{2}$$

với $x = \frac{\pi}{3}$: $y' = 0$, $y'' = \frac{3}{4} > 0$, $y = 0 \Rightarrow$ dự đoán $y \geq 0$

Tức là : $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq (\cos A + \cos B + \cos C)^2$ (*)

Vì $0 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} < \pi$

Khi $x \to 0$: $y' \to -2 < 0$, $y \to 1 > 0$.

$x \to \frac{\pi}{2}$: $y' \to 2\sqrt{2} - 3 < 0$, $y \to 2 - \sqrt{2} > 0$

$x \to \pi$: $y' \to 0$, $y \to -1 < 0$

nên bất đẳng thức (*) chỉ xét với các tam giác không tù

Thật vậy : (*) $\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq (\cos A + \cos B + \cos C) \Leftrightarrow -(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) - 2\cos A\cos B - 2\cos B\cos C - 2\cos C\cos A \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 4\cos A\cos B\cos C + \cos C - \cos(A - B) - 2\cos B\cos C - 2\cos C\cos A \geq 0$

Trong ΔABC bao giờ cũng chọn được 2 góc cùng lớn hơn, hoặc cùng bé hơn 60°, giả sử là A, B, biến đổi :

(*) $\Leftrightarrow [1 - \cos(A - B)] + \cos C(1 - 2\cos A)(1 - 2\cos B) \geq 0$ vì ΔABC không tù, bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Vậy ta có : $\forall \Delta ABC$ không tù thì :

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq (\cos A + \cos B + \cos C)^2$ dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi ΔABC vuông cân hoặc là tam giác đều. Bằng con đường đó, chúng ta sẽ tìm ra được một loạt bất đẳng thức lượng giác trong tam giác :

(Xem tiếp trang 15)

Về bài toán quy hoạch tuyến tính trong đại số lớp 10

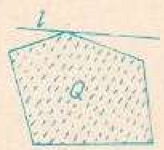
NGUYỄN ĐÌNH NGUYÊN
(Đà Nẵng)

Trong hai cuốn sách Đại số 10 của NXBGD 1990 có đề cập đến bài toán "Quy hoạch tuyến tính" (Ngô Thúc Lanh, tr. 118 ; Trần Văn Hạo, tr. 64). Trong cả hai cuốn đều chỉ ra thuật toán để tìm lời giải tối ưu mà không có phần lý giải.

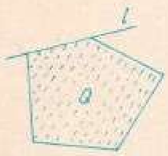
Mục đích của bài báo này là nêu ra một cách lý giải ngắn, gọn dễ hiểu đối với đại đa số học sinh. Chúng ta bắt đầu.

1. ĐƯỜNG TỰA

Định nghĩa : *Cho Q là một đa giác lồi, đường thẳng l được gọi là đường tựa nếu nó chứa ít nhất một điểm biên của đa giác này mà không chứa một điểm trong nào của đa giác ấy.*



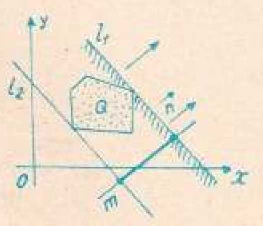
H. 1



H. 2

Giao $l \cap Q$ hoặc là một đỉnh hoặc là một cạnh của đa giác Q. Trong mọi trường hợp, Q chứa trong một nửa mặt phẳng có bờ là l.

Định lí 1. *Gọi Q là một đa giác lồi, $\vec{n}$ là một vectơ khác $\vec{0}$. Khi đó tồn tại một và chỉ một đường tựa l của Q có tính chất là : nửa mặt phẳng bờ l chứa Q có $\vec{n}$ là pháp vectơ hướng ra ngoài.*



Chứng minh. Gọi m là đường thẳng có $\vec{n}$ là vectơ chỉ phương. Chiếu đa giác Q lên m, thì hình chiếu là một đoạn thẳng. Các đường thẳng l_1, l_2 vuông góc với m và đi qua hai đầu mút của đoạn này là đường tựa của đa giác Q, và mỗi đường thẳng ấy có $\vec{n}$ là pháp vectơ. Có một trong hai đường thẳng ấy mà nửa mặt phẳng chứa Q có $\vec{n}$ là pháp vectơ hướng ra ngoài. Đpcm.

2. CỰC TRỊ HÀM TUYẾN TÍNH TRÊN ĐA GIÁC LỒI

Định lí 2 : *Cho đa giác lồi Q. Một hàm tuyến tính $f(M) = Ax + By$ xác định trên Q, đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) hoặc tại một đỉnh, hoặc trên một đỉnh, hoặc trên một cạnh của Q, tức là, tồn tại một đỉnh của Q tại đó hàm f(M) đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).*

Chứng minh. Xét vectơ $\vec{n} = (A, B)$. Theo định lí 1, tồn tại một đường tựa l của đa giác Q, để nửa mặt phẳng P, có bờ l chứa Q, và, có $\vec{n}$ là pháp vectơ hướng ra ngoài.

Gọi $M_0\ (x_0, y_0)$ là điểm chung của Q và l. Vì $\vec{n}$ là pháp vectơ hướng ra ngoài của nửa mặt phẳng P, nên

$\forall M(x, y) \in P : \vec{n} . \overrightarrow{M_0M} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A, B)(x - x_0, y - y_0) \leqslant 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(M) = Ax + By \leqslant Ax_0 + By_0 = f(M_0)$

Tức là $f(M)$ đạt giá trị lớn nhất tại M_0.

Sau cùng để ý rằng $Q \cap l$ hoặc là một đỉnh hoặc là một cạnh của Q thì suy ra đpcm. Lập luận tương tự cho trường hợp nhỏ nhất.

Như vậy ta đã lý giải được thuật toán đã trình bày trong hai cuốn sách đã nêu.

TRÊN ĐƯỜNG ĐI TÌM ...

(Tiếp theo trang 14)

Chứng minh rằng :

1) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geqslant$
$\geqslant 2\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C \ \forall \Delta ABC$

2) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geqslant$
$\geqslant 2\sqrt{3} \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \ \forall \Delta ABC$

3) $\sin\frac{A}{2} . \sin\frac{B}{2} . \sin\frac{C}{2} \geqslant$
$\geqslant \cos A . \cos B . \cos C \ \forall \Delta ABC$

4) $8\sin^2\frac{A}{2} \sin^2\frac{B}{2} \sin^2\frac{C}{2} \geqslant$
$\geqslant \cos A \cos B \cos C \ \forall \Delta ABC$

5) $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geqslant$
$\geqslant \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2 \ \forall \Delta ABC$

6) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \geqslant$
$\geqslant \sqrt{3}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) \ \forall \Delta ABC$

7) $\cot g A + \cot g B + \cot g C \geqslant$
$\geqslant tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \ \forall \Delta ABC$ nhọn

8) $\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2} \geqslant$
$\geqslant 3\left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}\right) \ \forall \Delta ABC$

9) $tgA + tgB + tgC \geqslant$
$\geqslant 3\left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}\right) \forall \Delta ABC$ nhọn

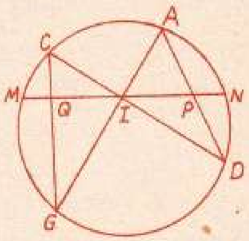
10) $tgA + tgB + tgC \geqslant$
$\geqslant \cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2} \ \forall \Delta ABC$ nhọn

MỞ RỘNG BÀI TOÁN "con bướm" CHO CÁC ĐƯỜNG CÔNIC

LÊ HÀO
(Phú Yên)

Có lẽ các bạn trẻ yêu toán đều biết đến bài toán "com bướm". Bài toán đó như sau :

Bài toán 1 : Cho một đường tròn và dây cung MN ; gọi I là trung điểm của dây đó. Qua I ta kẻ hai dây cung khác nhau AB và CD. AD và BC lần lượt cắt MN tại P và Q. Chứng minh : $IP = IQ$ (Hình H1)



H.1

Trong bài báo : "Một số dạng khác của bài toán con bướm (THTT- 06 - 1995) bạn Phan Nam Hùng cũng đã có một số tìm tòi mở rộng bài toán "con bướm". Trong bài báo này tôi xin bàn đến vấn đề sau : Nếu thay cho đường tròn trong bài toán "con bướm", ta xét một đường Cônic thì ta sẽ có kết quả gì tương tự kết quả của bài toán "con bướm" ? Những kết quả đó có thể mở rộng ra như thế nào ?

Để cho tiện tôi xin nêu một số qui ước như sau :

– Hai đường thẳng song song xem như chúng cắt nhau tại một điểm gọi là điểm vô tận

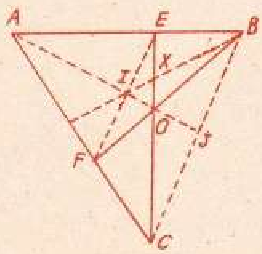
– Hai đường thẳng phân biệt cùng đi qua điểm vô tận thì song song.

Như vậy trong bài viết này ta luôn có thể nói đến "giao" của hai đường thẳng phân biệt.

Trước tiên tôi xin giới thiệu một số kiến thức về tứ giác toàn phần.

I. THẾ NÀO LÀ TỨ GIÁC TOÀN PHẦN ?

Trong mặt phẳng tập hợp gồm bốn đường thẳng trong đó không có ba đường nào cùng đi qua một điểm gọi là tứ giác toàn phần. Mỗi một đường thẳng đó gọi là một cạnh. Giao điểm của hai cạnh gọi là đỉnh. Hai đỉnh không cùng nằm trên một cạnh gọi là hai đỉnh đối diện. Mỗi đường thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo. Ta có :



H.2

Mệnh đề 1 : Trong hình tứ giác toàn phần, cặp đỉnh đối diện nằm trên một đường chéo và cặp giao điểm của đường chéo đó với hai đường chéo còn lại liên hiệp điều hòa với nhau (Hình H2)

Trong hình vẽ H.2 tứ giác toàn phần tạo bởi các đường thẳng BA, BF, CA, CB có các đường chéo EF, BC cắt đường chéo AD tại I, J. Mệnh đề 1 nói trên khẳng định rằng : $(ADJJ) = -1$; vậy chùm BA, BF, BI, BC là chùm điều hòa do đó : nếu gọi X, Y lần lượt là giao điểm của BI với EC, AC thì $(EDCX) = (AFCY) = -1$.

Để chứng minh mệnh đề 1 ta có thể sử dụng kiến thức về chùm đường thẳng hoặc dùng phương pháp tọa độ. Xin dành việc chứng minh cho các bạn.

II. MỞ RỘNG BÀI TOÁN CON BƯỚM CHO ĐƯỜNG ELLIP

Trong bài báo của mình bạn Phan Nam Hùng đã nêu bài toán tổng quát hơn bài toán "con bướm". Nếu trong bài toán đó ta thay đường tròn bằng một Ellip thì ta có :

Bài toán 2 : Cho Ellip (E) và một đường thẳng (d) tùy ý. Một tiếp tuyến song song với (d) tiếp xúc với (E) tại J. Đường thẳng nối J với tâm đối xứng của (E) cắt (d) tại I. Qua I kẻ 2 đường thẳng phân biệt cắt (E) lần lượt tại A, B và C, D. AD và BC cắt (d) lần lượt tại P,Q. Chứng minh rằng : I là trung điểm của PQ (Hình H 3)

Trước khi trình bày lời giải bài toán này ta có :

Định nghĩa : Cho (S) là một đường conic, đường thẳng qua 2 điểm phân biệt M, N cắt (S) tại X, Y. Ta nói M, N liên hợp với nhau đối với conic (S) nếu : $(MNXY) = -1$.

Bổ đề : Cho Ellip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và điểm $M(x_o, y_o)$; khi đó mọi điểm liên hợp với M đối với (E) đều thuộc đường thẳng $\frac{x_o x}{a_2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1$.

Chứng minh

Gọi $N(x, y)$ là điểm liên hợp với M đối với (E). MN cắt (E) tại hai điểm phân biệt X, Y

X $x_o + t_1(x - x_o)$, $x_o + t_1(y - y_o)$) ;

Y $x_o + t_2(x - x_o)$, $y_o + t_2(y - y_o)$).

Với $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{MY}} = \frac{t_1}{t_2}$$

$$\frac{\overline{NX}}{\overline{NY}} = \frac{t_1 - 1}{t_2 - 1}$$

$$(MNXY) = -1 \Leftrightarrow \frac{\overline{MX}}{\overline{MY}} : \frac{\overline{NX}}{\overline{NY}} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} : \frac{t_1 - 1}{t_2 - 1} = -1 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 2t_1t_2$$

$X, Y \in (E)$ nên t_1, t_2 nghiệm của phương trình : $\frac{[x_o + t(x - x_o)]^2}{a_2} + \frac{[y_o + t(y + y_o)]^2}{b^2} = 1$

Phương trình này viết lại

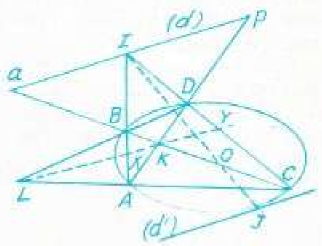
$$\left[\frac{(x-x_o)^2}{a^2} + \frac{(y-y_o)^2}{b^2}\right] t^2 + 2\left(\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} - \frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) t + \frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} - 1 = 0$$

Áp dụng định lí Viét ta có :

$$t_1 + t_2 = 2t_1 t_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

(đpcm)



Dựa vào bổ đề trên ta có thể giải bài toán 2 như sau :

Lời giải bài toán 2 : Chọn hệ trục tọa độ để *(E)* có phương trình : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Xét K là giao điểm *AD* và *BC*. *L* là giao điểm *BD* và *AC*. Gọi *X, Y* lần lượt là giao điểm của *KL* với *AB, CD*. Xét tứ giác toàn phần tạo bởi *IA, IC, LD, LC* ; từ mệnh đề 1 suy ra *(IXAB) = (IYCD) =* −1. Vậy *I* liên hợp với *X* và *Y* đối với *(E)*. Giả sử $I(x_o, y_o)$ do bổ đề *KL* có phương trình $\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1 (1)$.

Vì *J* thuộc *OI* nên $J\ (kx_o, ky_o)$ với $k \neq 0$. Gọi (d') là tiếp tuyến với (E) tại *J* ; (d') có phương trình : $\frac{kx_o x}{a^2} + \frac{ky_o y}{b^2} = 1$ (2). Từ (1) và (2) suy ra *KL // d'* do đó *KL // d*.

Vì *(IXAB) =* −1 nên chùm xác định bởi *KI, KA, KB* là chùm điều hòa. d // *KL* nên *d* bị *KA, KB, KI* chắn thành 2 đoạn bằng nhau : *IP = IQ* (đpcm).

Mệnh đề 2 " : cho (*E*) là một Ellip và *(d)* là đường thẳng cố định. Giả sử (*m*) là đường thẳng thay đổi cùng phương với *(d)* cắt *(P)* tại *M, N*. Khi đó trung điểm *I* của *MN* luôn thuộc một đường thẳng (Δ) cố định, đi qua tâm đối xứng của *(E)*.(Hình H4)

Chứng minh : Chọn hệ trục tọa độ để (E) có phương trình : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Giả sử *(d)* có phương trình $kx + ly = c$, suy ra (m) có phương trình $kx + ly = d$.

Nếu $l = 0$ thì *I* thuộc đườngthẳng $y = 0$.

Nếu $l \neq 0$: Phương trình xác định hoành độ giao điểm của *(m)* và *(E)* là :

$$l^2b^2x^2 + a^2(d - kx)^2 = l^2a^2b^2$$

hay : $(l^2b^2 + a^2k^2)\,x^2 - 2a^2\,dkx + a^2d^2 - l^2a^2b^2 = 0$

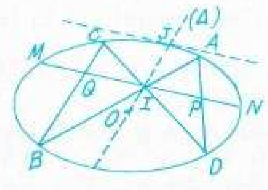
$$x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{a^2dk}{l^2b^2 + a^2k^2} = \frac{a^2(ky_I + ly_I)k}{l^2b^2 + a^2k^2} \Rightarrow lb^2 x_I - a^2ky_I = 0$$

vậy *I* thuộc đường thẳng (Δ) : $lb^2\,x - a^2\,ky = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét : Nếu tiếp tuyến song song với *(d)* tiếp xúc với *(E)* tại *J* thì *J* thuộc (Δ).

Từ nhận xét trên ta có bài toán 3 tương tự với bài toán "con bướm". Đây là trường hợp riêng của bài toán 2 :

Bài toán 3 : (Bài toán con bướm Ellip) Cho một đường Ellip *(E)* và hai điểm phân biệt *M, N* thuộc *(E)*. Qua trung điểm *I* của *MN* kẻ 2 đường thẳng phân biệt cắt *(E)* tại lần lượt tại *A, B* và *C, D*. *AD* và *BC* cắt *MN* lần lượt tại *P, Q*. Chứng minh rằng : *I* là trung điểm của *PQ*. (Hình H4)

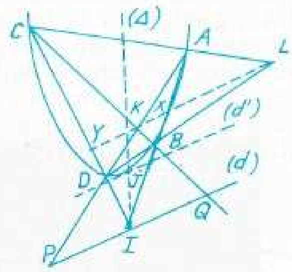


H.4

III. MỞ RỘNG BÀI TOÁN CON BƯỚM CHO PARABOL

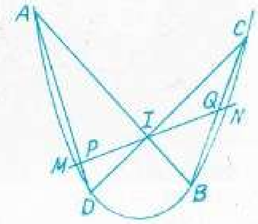
Tương tự Mệnh đề 2 bạn dễ dàng kiểm tra mệnh đề sau :

Mệnh đề 3 : Cho *(P)* là một parabol và *(d)* là đường thẳng cố định. Giả sử *(m)* là đường thẳng thay đổi cùng phương với *(d)* cắt *(P)* tại M, N. Khi đó trung điểm *I* của *MN* luôn thuộc một đường thẳng (Δ) cố định, cùng phương với trục đối xứng của *(P)*.



Đường thẳng (Δ) trong mệnh đề 3 gọi là đường kính của Parabol *(P)* liên hợp với phương *(d)*.

Bài toán 4 : cho *(P)* là Parabol và *(d)* là đường thẳng cố định. (Δ) là đường kính của Parabol *(P)* liên hợp với phương *(d)* ; (Δ) cắt *(d)* tại *I*. Qua *I* kẻ 2 đường thẳng phân biệt lần lượt cắt *(P)* tại *A, B* và *C, D*. *AD* và *BC* cắt *(d)* lần lượt tại



P, Q. Chứng minh rằng : I là trung điểm của PQ (Hình H5)

Tương tự như bổ đề của bài toán 2 bạn dễ dàng kiểm tra bổ đề sau :

Bổ đề : Cho Parabol (P) : $y^2 = 2px$ và điểm I (x_o, y_o) ; khi đó mọi điểm liên hợp với I đối với (P) đều thuộc đường thẳng :

$$y_o y = p(x + x_o).$$

Áp dụng mệnh đề 3 và bổ đề trên bạn có thể giải bài toán 4 bằng cách lập luận hoàn toàn tương tự như lời giải bài toán 2. Khi (d) cắt (P) ta có bài toán tương tự bài toán "con bướm" là trường hợp riêng của bài toán 4 :

Bài toán 5 : (bài toán con bướm Parabol) Cho Parabol (P) và hai điểm phân biệt M, N thuộc (P). Qua trung điểm I của MN kẻ 2 đường thẳng phân biệt cắt (P) lần lượt tại A, B và C, D. AD và BC cắt MN lầ lượt tại P, Q. Chứng minh : I là trung điểm của PQ.

IV. MỞ RỘNG BÀI TOÁN CON BƯỚM CHO HYPERBOL

Bằng cách hoàn toàn tương tự như đối với Ellip bạn có thể giải bài toán sau :

Bài toán 6 : Cho Hypecbol (H) và đường thẳng (d) tùy ý. Một tiếp tuyến song song với (d) tiếp xúc với (H) tại J. Đường thẳng nối J với tâm đối xứng của (H) cắt d tại I. Qua I kẻ 2 đường thẳng phân biệt cắt (H) lần lượt tại A, B và C, D.AD và BC cắt (d) lần lượt tại P, Q. Chứng minh : I là trung điểm của PQ

Bài toán 7 : (bài toán con bướm Hyperbol) Cho Hyperbol (H) và hai điểm phân biệt M, N thuộc (H). Qua trung điểm I của MN kẻ 2 đường thẳng phân biệt cắt (H) lần lượt tại A, B và C, D.AD và BC cắt MN lần lượt tại P, Q. Chứng minh : I là trung điểm của PQ

Trong các bài toán trên nếu thay các đường Conic bằng một cặp đường thẳng ta cũng có những bài toán tương tự. Mời các bạn tiếp tục tìm hiểu. Cuối cùng chúc các bạn có nhiều thành công trong học tập.

Giải đáp bài

Nhận được bao nhiêu quà ?

Số đại biểu của 12 lớp là 24. Lan đã hỏi 23 đại biểu khác và tất cả các câu trả lời đều khác nhau nên số quà tương ứng cho từng người là 0, 1, 2,... , 20, 21, 22. Ta kí hiệu a_i là đại biểu nhận được i quà (i = 0, 1,.., 22) (và tất nhiên a_i sẽ tặng quà cho i đại biểu khác.)

Xét a_0 và a_{22}. Vì a_{22} tặng quà cho 22 người, trừ ra hai người là a_0 và chính a_{22}. Vậy a_0 phải là đại biểu cùng lớp với a_{22} và tất nhiên lớp đó không phải là lớp của Lan và Mai.

Xét a_1 và a_{21}. Vì a_{21} tặng quà cho 21 người và không tặng quà cho a_0, chính a_{21} và đại biểu cùng lớp với a_{21}. Nhưng a_1 đã tặng và nhận quà của a_{22} rồi vậy a_1 là người đại biểu cùng lớp với a_{21}. Và lớp này cũng không thể là lớp của Lan và Mai được.

Cứ lập luận tương tự như vậy ta sẽ thấy các đại biểu a_i và a_{22-i} là các đại biểu của cùng một lớp và lớp đó không phải là lớp của Lan và Mai :

a_0 cùng lớp với a_{22}

a_1 cùng lớp với a_{21}

. . . .

a_{10} cùng lớp với a_{12}

Còn lại a_{11} phải là đại biểu cùng lớp chuyên toán với Lan. Đó chính là Mai. Vậy Mai nhận được 11 quà tặng (Theo Vương Gia Vũ, 7H, THCS Trưng Vương, Hà Nội)

Các bạn sau đây cũng có đáp án tốt : *Phan Vũ Toàn*, 7I,Từ Liêm, Hà Nội ; *Đào Đức Cường* 8A, THCS Đoàn Lập, Tiên Lãng, Hải Phòng. *Nguyễn Tuấn Thiện*, Thị trấn Nghĩa Tân, Từ Liêm, Hà Nội.

BÌNH PHƯƠNG

HỎI AI, CÂU GÌ ĐỂ ĐƯỢC TỰ DO ?

Câu chuyện sau đây được kể trong nhiều cuốn sách giải trí và không ít bạn đã biết :

Ngày xưa, trong cuộc giao tranh giữa hai xứ THÔNG và MINH, hoàng tử xứ THÔNG không may bị bắt. Thấy chàng trai trẻ khôi ngô, công chúa xứ MINH, ban cho hoàng tử một ân huệ là được chọn cái chết : "Người được nói một câu, nếu là câu đúng thì người bị chặt đầu, còn nếu là câu sai thì người bị treo cổ."

Suy nghĩ trong giây lát, hoàng tử nói một câu và công chúa phải tha cho chàng, vì không thể treo cổ mà cũng chẳng thể chặt đầu chàng được. Câu chuyện này còn có phần kế tiếp mà có thể nhiều bạn chưa biết.

Một thời gian sau đó, rủi ro thế nào mà công chúa xứ MINH bị bắt, và hoàng tử xứ THÔNG có cơ hội trả thù. Hoàng tử dẫn hai tên lính vào nhà giam công chúa và bảo : "Nhà giam này có hai cửa thoát ra ngoài, một *cửa tự do* (bước ra được cửa này thì nàng được tự do), và một *cửa chết* (bước ra cửa này thì nàng bị giết ngay lập tức). Hai tên lính này mỗi tên gác một cửa, *một tên luôn nói thật và vui khi nàng được tự do, buồn nếu nàng bị giết ; còn tên kia thì ngược lại, luôn nói dối và buồn khi nàng được tự do, vui nếu nàng bị giết.* Nàng được hỏi một tên lính gác chỉ một câu để chọn cửa ra khỏi nhà giam này."

Công chúa mỉm cười, từ từ bước đến trước mặt một tên lính gác, hỏi anh ta một câu, và vừa nghe xong câu trả lời thì nàng ung dung bước ra... đúng cửa tự do !

Bạn hãy thử sức mình : *bước từ từ hết mười bước* bạn có tìm ra câu hỏi của công chúa không ?

H.C

ISSN : 0866 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT43M7

Sắp chữ tại TTCBDH NXBGD
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8/1997

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng