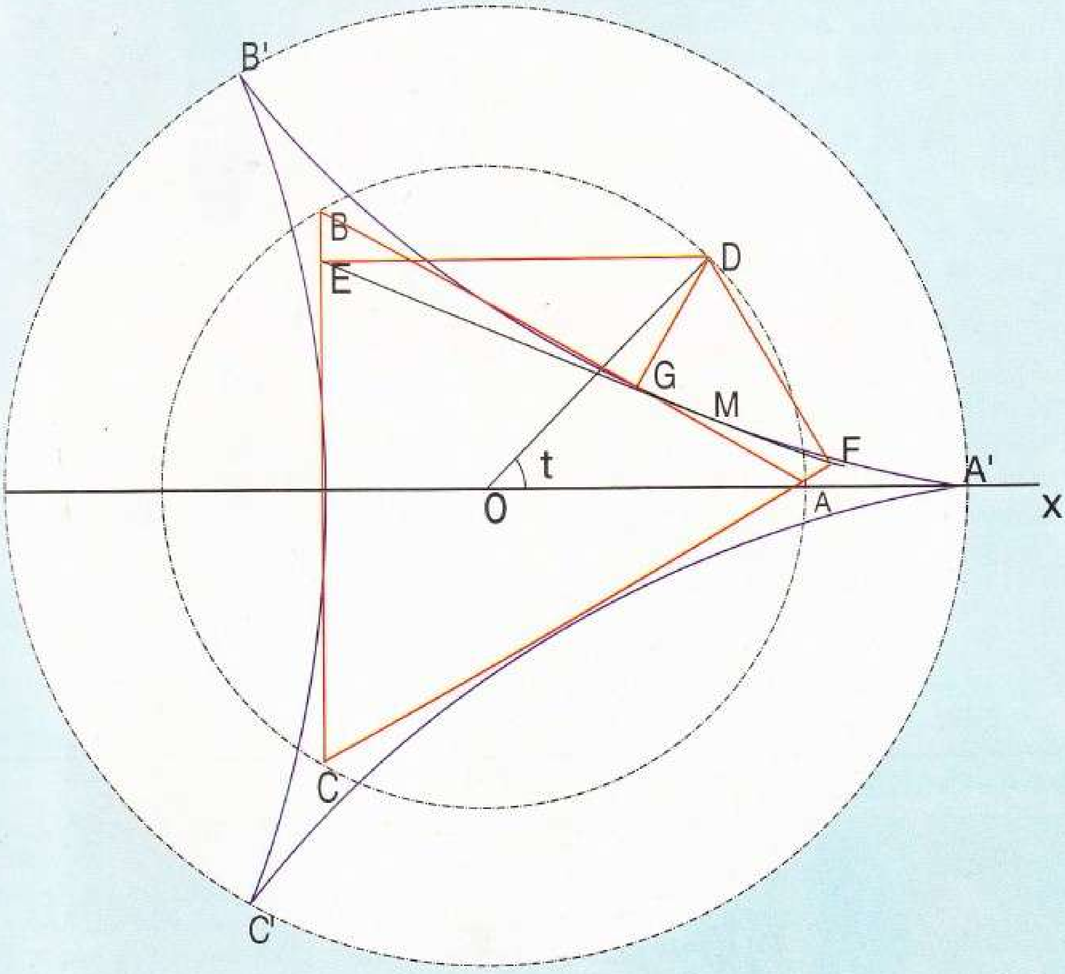
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

6 2004

SỐ 324 - NĂM THỨ 41 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ



- Đường cong Hypocycloid Steiner và họ đường thẳng Simson
- Phương pháp giải bài toán về tạo số.
- Sau 137 năm hình lập phương magic hoàn toàn bậc nhỏ nhất đã được xây dựng.
- Một số đặc điểm của sách giáo khoa toán 8
- Du lịch hè.

HỘI NGHỊ GIÁO DỤC TOÁN HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ 10 TẠI ĐAN MẠCH

Hội nghị Giáo dục Toán học Quốc tế (The International Congress on Mathematical Education) (viết tắt ICME) tổ chức 4 năm một lần dưới sự bảo trợ của Tổ chức Quốc tế truyền bá Toán học. Kế hoạch và tổ chức của hội nghị tuy vậy vẫn độc lập với tổ chức nói trên. Hội nghị sẽ trình bày các bản báo cáo và xu hướng của giáo dục toán học và nghiên cứu giáo dục toán học trong thực tế giảng dạy ở mọi cấp học. Hội nghị là nơi quy tụ các nhà sư phạm, các thầy cô giáo, các nhà toán học và những ai quan tâm đến lĩnh vực này. Hội nghị lần này đặt ở Đan Mạch nhưng dựa trên sự đồng tổ chức của Đan Mạch, Phần Lan, Ai-xơ-len, Na Uy và Thụy Điển, diễn ra từ ngày 4.7.2004 đến 11.7.2004. Ban chương trình gồm các nhà sư phạm và nhà toán học của Nam Phi, I-sra-en, Pháp, Niu Di-lân, Mỹ, Thụy Điển, Phần Lan, Đan Mạch, Bra-xin, I-ta-li-a, Nga, Nhật, Na Uy, Ca-na-đa, Sin-ga-po, Hàn Quốc, Mê-hi-cô và Trung Quốc.

Dự kiến sẽ có 29 chủ đề được bàn tới.

Địa chỉ liên hệ là :

ICME-10, Congress Consultants,
Martensens Allé 8,
DK - 1828
Frederiksberg C
Denmark

Chi phí tham dự hội nghị cho một đại biểu khoảng 340 đôla Mỹ. Bạn có thể tìm thông tin chi tiết tại địa chỉ.

http://www.icme_10.dk

VKT

Nhà giáo NGUYỄN PHƯỚC sinh ngày 08 tháng 02 năm 1959 tại Phong Bình, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế. Tốt nghiệp Đại học Sư phạm Huế khoa Toán Tin. Vào ngành năm 1978, đã công tác tại trường THCS Hương Phong, trường THCS Kim Long, THCS Hương Long và hiện nay là Phó hiệu trưởng trường THCS Kim Long - Huế. Liên tục nhiều năm ông đã tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi và hội đồng giám khảo trong các kì thi học sinh giỏi Toán THCS, học sinh giỏi giải toán nhanh bằng máy tính bỏ túi cấp thành phố và cấp tỉnh. Những năm gần đây là CTV của tạp chí Toán học và Tuổi trẻ và đã có nhiều bài viết và đề toán xuất hiện trên tạp chí ; viết sách : Bồi dưỡng HSG Hình 7, 8, 9, Bồi dưỡng học sinh giỏi toán nhanh bằng máy tính bỏ túi. Ông coi THTT là tài liệu không thể thiếu trong quá trình bồi dưỡng học sinh giỏi các cấp.

XÉT CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

NGUYỄN PHƯỚC

Trong bài toán chứng minh các đường thẳng đi qua một điểm cố định có những yếu tố thay đổi nên trước hết cần xác định rõ ba loại yếu tố: *cố định, không đổi* và *thay đổi*.

Để giải dạng toán này ta thường tiến hành theo ba bước :

• *Bước 1.* Xác định vị trí điểm cố định. Để làm điều này nên vẽ ba đường thẳng cần xét, nếu chúng đồng quy thì tìm cách xác định giao điểm chung, nếu chúng không đồng quy thì mọi đường thẳng đang xét cũng không đồng quy.

Hơn nữa nếu vẽ đường thẳng tại các vị trí tới hạn (khi điểm động di chuyển đến đầu mút của đường) nhiều khi giúp ta xác định vị trí điểm cố định dễ dàng hơn.

• *Bước 2.* Dựa vào giả thiết để tìm mối quan hệ giữa điểm cố định (dự đoán) và các yếu tố khác của đề bài.

• *Bước 3.* Trình bày lời giải, trong đó chứng tỏ tính cố định của giao điểm của các đường thẳng đang xét.

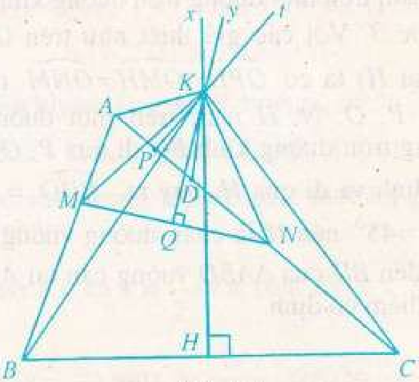
Các bước giải sẽ được thấy rõ hơn qua các ví dụ dưới đây.

Ví dụ 1. *Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm M và trên cạnh AC lấy điểm N sao cho BM = CN. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi M, N thay đổi.*

Cách giải. *Bước 1.* Không giảm tính tổng quát giả sử $AB \le AC$. Lấy hai điểm M, N sao cho $BM = CN$ (h. 1). Đường trung trực Qy của MN cắt đường trung trực Hx của BC (khi cho M trùng B và N trùng C) tại K. Cho M trùng với A thì N đến vị trí điểm D trên AC mà $CD = AB$. Trung trực Pt của AD cần đi qua K.

Bước 2. Theo giả thiết có $BM = CN$, $KM = KN$ và $KB = KC$, suy ra $\Delta BMK = \Delta CNK$. Để chứng tỏ ba đường trung trực đồng quy tại điểm K cần chứng minh $AK = DK$.

Bước 3. Với giả thiết như trên, $BM = CN$, $BK = CK$, $MK = NK$ ta có $\Delta BMK = \Delta CNK$. Suy ra $\widehat{BMK} = \widehat{CNK}$. Trên AC lấy điểm D sao cho $CD = BA$. Nối KA và KD. Ta thấy $MK = NK$, $\widehat{AMK} = \widehat{DNK}$, $AM = DN$ nên $\Delta AMK = \Delta DNK$,



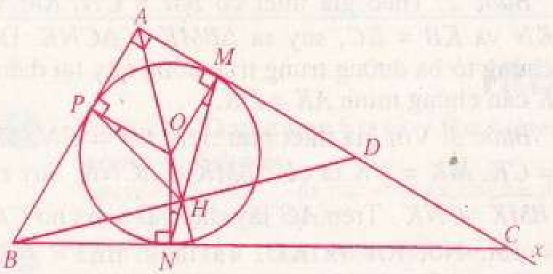
Hình 1

suy ra $AK = DK$ hay điểm K nằm trên đường trung trực Pt của AD. Vì K giao điểm của hai đường trung trực cố định Hx và Pt nên K cố định. Chú ý rằng vì $\widehat{ABK} = \widehat{ACK}$ nên K là giao điểm của tia Hx với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ví dụ 2. *Cho góc vuông BAx có AB cố định và điểm C chuyển động trên Ax. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AC và CB lần lượt tại M và N. Chứng minh MN đi qua một điểm cố định.*

Cách giải. *Bước 1.* Đường tròn tâm O tiếp xúc với AC, BC, AB lần lượt tại M, N, P (h. 2). Xét ΔABD vuông cân tại A, lúc đó tiếp điểm của BD với đường tròn nội tiếp ΔABD là trung điểm của BD và là chân đường vuông góc kẻ từ AO xuống BD. Thử một số trường hợp thấy MN đi qua trung điểm của BD.

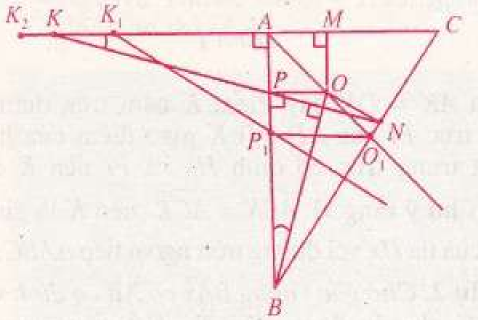
Bước 2. Các tia AB, Ax cố định nên tâm các đường tròn nội tiếp ΔABC nằm trên tia phân giác AO của góc BAx.



Hình 2

Giả sử MN cắt tia AO tại H. Do M và P đối xứng nhau qua AO nên $\widehat{OPH}=\widehat{OMH}$. Mặt khác $OM = ON$ nên $\widehat{OMN}=\widehat{ONM}$. Ta cần chứng minh $AH \perp BH$, hay là các điểm P, O, H, N, B đều nằm trên một đường tròn đường kính BO.

Bước 3. Với các giả thiết như trên (MN cắt AO tại H) ta có $\widehat{OPH}=\widehat{OMH}=\widehat{ONM}$ nên bốn điểm P, O, N, H nằm trên một đường tròn. Đường tròn đường kính BO đi qua P, O, N nên xác định và đi qua H. Suy ra $\widehat{BHO} = 90^o$. Vì $\widehat{BAH}=45^o$ nên H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BD của ΔABD vuông cân tại A. Do đó H là điểm cố định.



Hình 3

Từ *ví dụ 2* xuất hiện câu hỏi : Các đường thẳng PN có thể đi qua một điểm cố định hay không ? Hãy thử xét một số trường hợp trên *hình 3*. Ta có $PN \perp OB$ nên $\widehat{APK}=\widehat{POB}$ mà $AP = MO = PO$ nên $\Delta AKP = \Delta PBO$, suy ra $AK = BP$. Khi cho điểm C đến trùng với điểm A thì các điểm P, N đều trùng với A và điểm K đến vị trí K_2 sao cho $AK_2 = BA$, lúc đó đường thẳng PN trùng với đường thẳng K_2A. Khi cho tâm O đến vị trí O_1 thì K đến vị trí K_1 với $AK_1 = BP_1$. Ta thấy ba đường thẳng K_2A, KP và K_1P_1 không đồng quy. Như vậy qua việc xét 3 đường thẳng trên ta có câu trả lời phủ định : *các đường thẳng đi qua hai tiếp điểm P, N không cùng đi qua một điểm.*

Mời các bạn làm một số bài tập tự luyện sau :

Bài 1. Cho điểm A chạy trên nửa đường tròn đường kính BC cố định và $AD \perp BC$ tại D. Gọi M, N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và ACD. Chứng minh rằng đường vuông góc với MN kẻ từ A luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2. Cho tam giác ABC với BC cố định. A chuyển động. Về phía ngoài tam giácABC dựng tam giác ADB vuông cân tại D và tam giác AEC vuông cân tại E. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng đường thẳng AM luôn luôn đi qua một điểm cố định.

PROBLEMS ... *(Tiếp trang 15)*

T5/324. Let ABC be a triangle right at A. For every point K on the side AC, construct the circle (K) with center K, touching the line BC at E. Draw the line BD touching the circle (K) at D (distinct from E). Let M, N, P and Q be the midpoints of AB, AD, BD and MP respectively. Let S be the point of intersection of QN and BD. Find the line on which moves the point S when K moves on the side AC ?

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/324. Let $f(x)$ be a polynomial of degree 2003 with $f(k)=\dfrac{k^2}{k+1}$ for $k = 1, 2, 3, \ldots 2004$. Calculate $f(2005)$.

T7/324. Prove that $4x^2+4y^2 \le xy+yz+zx + 5z^2$ where x, y, z are positive real numbers satisfying the conditions $x \le y \le z$.

When does equality occur ?

T8/234. Let r_a, r_b, r_c be the radii of the escribed circles in angles A, B, C of the triangle ABC respectively. Prove that :

$$r_a\sin(A/2)+r_b\sin(B/2)+r_c\sin(C/2)$$

$$\le \frac{r_a^3+r_b^3+r_c^3}{6}\left(\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\right)$$

Đọc lại cho đúng

Trong THTT số 323 (5.2004) trong mục Đề ra kì này, bài T2/323 đã in nhầm dấu ≥, xin sửa lại thành dấu ≤. Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

Đường cong HYPOCYCLOID STEINER và họ đường thẳng SIMSON của một tam giác

TRẦN ĐÌNH VIỆN
(Hà Nội)

Bạn đọc Lê Đức Anh, học sinh lớp 11T, THPT Lam Sơn Thanh Hóa viết thư hỏi tôi cách chứng minh một định lí được nêu trong bài "Jacob Steiner – nhà toán học lớn" của tác giả Nguyễn Văn Thiêm đang trong THTT số tháng 2-2002.

Đường cong Hy–pô–xy–clô–it Stây–ne ($\mathscr{H}$) *là quỹ tích của điểm M xác định trên đường tròn bán kính r khi đường tròn này lăn không trượt mà luôn luôn tiếp xúc trong với đường tròn cố định tâm O bán kính* $R = 3r$.

Định lí: *Đường cong Hy–pô–xy–clô–it Stây–ne tiếp xúc với tất cả các đường thẳng Sim–sơn của một tam giác đều nội tiếp trong đường tròn bán kính* $R_1 = 2r$.

Dưới đây xin trình bày chứng minh định lí nêu trên. Hình minh họa ở bìa 1.

1. Phương trình đường cong ($\mathscr{H}$)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Đề–các vuông góc Oxy kí hiệu ($\mathscr{C}$) là đường tròn tâm O bán kính $2r$. ($\mathscr{C}$) cắt Ox tại A. Tam giác đều ABC nội tiếp trong ($\mathscr{C}$) có các đỉnh $A\ (2r\ ;\ 0)$, $B\ (-r;\ r\sqrt{3})$, $C\ (-r,\ -r\sqrt{3})$. Điểm $D\ (x_1, y_1)$ trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tọa độ

$$\begin{cases} x_1 = 2r\cos t \\ y_1 = 2r\sin t \end{cases} \qquad (1)$$

với $t \in R$ là số đo (bằng rad) của góc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$. Gọi E, F, G theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của D lên các cạnh BC, CA, AB thì E, F, G thẳng hàng. Khi đó đường thẳng qua E, F, G là đường thẳng Sim–sơn của tam giác ABC ứng với D. Khi D chạy trên ($\mathscr{C}$) ta được một họ đường thẳng Sim–sơn của tam giác với t là tham số, kí hiệu là (S_D). Kí hiệu ($\mathscr{C}$ ') là đường tròn tâm O bán kính $R = 3r$. ($\mathscr{C}$ ') cắt trục Ox tại $A'\ (3r;\ 0)$.

Đường cong Hy–pô–xy–clô–it Stây–ne ($\mathscr{H}$) đã định nghĩa ở trên nội tiếp trong ($\mathscr{C}$ ') có phương trình theo tham số $t \in R$ là (xem THTT số 320 tháng 2.2004)

$$\begin{cases} x = r(2\cos t + \cos 2t) \\ y = r(2\sin t - \sin 2t) \end{cases} \qquad (2)$$

Ba đỉnh của ($\mathscr{H}$) là

$$A'\ (3r;\ 0)\ ;\ B'\left(-\frac{3r}{2}; \frac{3r\sqrt{3}}{2}\right)\ ;\ C'\left(-\frac{3r}{2}; -\frac{3r\sqrt{3}}{2}\right).$$

Mỗi giá trị của tham số t xác định một điểm $M\ (x(t)\ ;\ y(t))$ thuộc đường cong ($\mathscr{H}$) và một điểm $D\ (x_1(t)\ ;\ y_1(t))$ trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC, nghĩa là mỗi điểm D tương ứng với một điểm M và ngược lại.

Khi $t = 2k\pi$ thì D trùng với điểm A, M trùng với điểm A' và lúc đó đường thẳng Sim–sơn là trục hoành OA, tiếp xúc với đường cong ($\mathscr{H}$). Sau đây ta xét $t \neq 2k\pi$.

2. Phương trình đường thẳng Sim–sơn của D đối với tam giác ABC.

Ta tìm được tọa độ của $E\ (e_1, e_2)$, $F(f_1, f_2)$, $G\ (g_1, g_2)$ là :

$$\begin{cases} e_1 = -r \\ e_2 = y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{2r + 3x_1 + \sqrt{3}y_1}{4} \\ f_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(f_1 - 2r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1 = \dfrac{2r + 3x_1 - \sqrt{3}y_1}{4} \\ g_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(g_1 - 2r) \end{cases}$$

Suy ra phương trình đường thẳng Sim–sơn (S_D) của D (D khác A) đối với tam giác ABC là :

$$(1-\cos t)(x+r) + \sin t(y-2r\sin t) = 0 \quad (3)$$

3. Phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{H})$ tại M

Nếu tại điểm M (x_t, y_t) ứng với giá trị t là điểm thuộc $(\mathscr{H})$ mà $x_t = x(t)$, $y_t = y(t)$ thỏa mãn (2) có đạo hàm $x'(t)$, $y'(t)$ và các giá trị đạo hàm này không đồng thời bằng không thì vectơ chỉ phương của tiếp tuyến với đường cong tại M là $\vec{v}$ $(x'(t) ; y'(t))$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{H})$ tại $M(t)$ với $t \neq 2k\pi$ là :

$$(\cos t-\cos 2t)(x-x_t) + (\sin t+\sin 2t)(y-y_t) = 0 \quad (4)$$

với $\begin{cases} x_t = x(t) \\ y_t = y(t) \end{cases}$ thỏa mãn (2).

Qua một số phép biến đổi lượng giác ta chứng minh được (với $t \neq 2k\pi$) :

$$\frac{1-\cos t}{\cos t-\cos 2t} = \frac{\sin t}{\sin t+\sin 2t} \quad (5)$$

Thay (5) vào (4) và biến đổi ta được (3).

Như vậy định lí nêu trên đã được chứng minh. Cách phát biểu khác của định lí :

Bao hình của họ đường thẳng Sim–sơn của tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính 2r là đường Hy–pô–xy–clô–it Stây–ne $(\mathscr{H})$ có phương trình (2).

Các trường hợp đặc biệt

• Khi $t = \dfrac{2k\pi}{3}$, điểm D trùng với đỉnh của tam giác, đường thẳng Sim–sơn của tam giác ABC ứng với D chính là các đường phân giác trong của góc ở đỉnh B, C ; các đường thẳng này tiếp xúc với $(\mathscr{H})$ tại các đỉnh B', C' tương ứng.

• Khi $t = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, các cạnh của tam giác ABC là các đường thẳng Sim–sơn của tam giác và tiếp xúc với $(\mathscr{H})$ tại trung điểm của mỗi cạnh.

Các bạn hãy tìm xem có tồn tại tam giác nào nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R mà tất cả các đường thẳng Sim–sơn của nó tiếp xúc với đường cong Hy–pô–xy–clô–it Stây–ne của điểm M chạy trên đường tròn bán kính r lăn không trượt và luôn tiếp xúc trong với đường tròn cố định tâm O bán kính $R = 3r$?

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN CANAĐA LẦN THỨ 35 NĂM 2003

1. Một đồng hồ tiêu chuẩn mười - hai - giờ đang có góc giữa kim giờ và kim phút là đúng 1^o. Thời gian từ 12 giờ trưa tính bằng phút là một số nguyên n $(0 < n < 720)$. Tìm các giá trị có thể có của n.

2. Tìm ba chữ số cuối cùng của số 2003^N, trong đó $N = 2002^{2001}$.

3. Tìm tất cả các nghiệm thực dương của hệ

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 = xyz \end{cases}$$

4. Cho ba đường tròn cố định đi qua hai điểm A và B. X là một điểm biến thiên trên đường tròn thứ nhất (khác A và B). Đường thẳng AX cắt hai đường tròn còn lại tại Y và Z (với Y nằm giữa X và Z). Chứng tỏ rằng tỉ số $\dfrac{XY}{YZ}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm X.

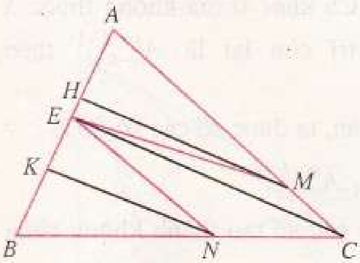
5. Gọi S là tập hợp nào đó gồm n điểm trong mặt phẳng. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm của S là d. Chứng tỏ rằng tồn tại một tập con không ít hơn $\dfrac{n}{7}$ điểm sao cho mỗi cặp điểm của tập con đó có khoảng cách không nhỏ hơn $d\sqrt{3}$.

NGUYỄN VŨ dịch.

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

Giải đáp : CHIA HÌNH THÀNH BA PHẦN BẰNG NHAU

(Câu hỏi đăng trong THTT số 320 tháng 2.2004)



Hình 1

1) Cách chia tam giác ABC thành ba phần bằng nhau xuất phát từ điểm E trên AB : Lấy các điểm H, K trên AB sao cho $AH = HK = KB$. Nối EC. Kẻ HM và KN song song (hoặc trùng) với EC, cắt đường gấp khúc ACB tại M và N. Trên hình 1 ta có :

$S_{EBN} = S_{KBN} + S_{KEN} = S_{KBN} + S_{KCN} = S_{KBC} = (1/3)S_{ABC}$

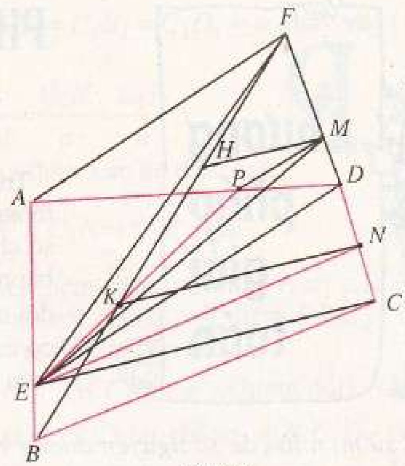
Chứng minh tương tự có $S_{EAM} = (1/3)S_{ABC}$, nên $S_{EMCN} = S_{ABC} - (S_{EBN} + S_{EAM}) = (1/3)S_{ABC}$. Vậy EM, EN chia ΔABC thành ba phần bằng nhau. Trường hợp E thuộc AH hoặc BK được chứng minh tương tự.

2) Cách chia tứ giác $ABCD$ thành ba phần bằng nhau xuất phát từ điểm E trên AB : Từ A kẻ AF song song (hoặc trùng) với ED, cắt tia CD ở F (h. 2)

Ta có $S_{ABCD} = S_{EBCD} + S_{EAD} =$

$= S_{EBCD} + S_{EFD} = S_{EBCF}$ (*)

Trên BF lấy các điểm H, K sao cho $FH = HK = KB$. Kẻ HM và KN song song (hoặc trùng) với EC. Xảy ra các trường hợp sau :



Hình 2

a) Nếu hai tia HM và KN cắt đường gấp khúc BCD tại M và N thì EM, EN chia $ABCD$ thành ba phần bằng nhau.

b) Nếu tia KN cắt đường gấp khúc BCD tại N, tia HM cắt đoạn FD tại M (khác D) thì từ M kẻ $MP // ED$, cắt đoạn AD ở P. Lúc đó EN, EP chia $ABCD$ thành ba phần bằng nhau.

c) Nếu hai tia HM và KN cắt đoạn FD tại M và N (khác D) thì kẻ MP và NQ song song với ED cắt đoạn AD lần lượt tại P và Q. Lúc đó EP, EQ chia $ABCD$ thành ba phần bằng nhau.

Dưới đây chứng minh trường hợp (b) ở hình 2, bạn đọc tự chứng minh các trường hợp còn lại.

$S_{EBCN} = S_{EBC} + S_{ECN} = S_{EBC} + S_{EKC} = S_{EKB} + S_{BKC} = (1/3)S_{BEF} + (1/3)S_{BCF} = (1/3)S_{EBCF} = (1/3)S_{ABCD}$ theo (*).

$S_{ENDP} = S_{END} + S_{EDP} = S_{END} + S_{EDM} = S_{ENM} = (1/2)S_{ENF} = (1/3)S_{ABCD}$.

$S_{EAP} = S_{ABCD} - (S_{EBCN} + S_{ENDP}) = (1/3)S_{ABCD}$.

Cách chia tam giác và tứ giác như trên có ưu điểm là không phụ thuộc vị trí điểm E trên AB và có thể mở rộng cho trường hợp chia tam giác, tứ giác thành n ($n \geq 2$) phần bằng nhau.

Nhiều bạn chưa xét đủ các trường hợp. Các bạn có lời giải tốt được nhận tặng phẩm là :

1) *Nguyễn Văn Linh*, 101, THPT chuyên Hà Nam, Phủ Lý, **Hà Nam**.

2) *Nguyễn Văn Ngọc*, 10 Lý, THPT chuyên **Bắc Ninh**.

3) *Vũ Ngọc Đào*, 9A4, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định**.

PHI PHI

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN VỀ TẠO SỐ

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Trong các kì thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng và tốt nghiệp phổ thông ta thường gặp các bài toán về tính số các số tạo thành từ một số chữ số (CS) cho trước và thỏa mãn một điều kiện nào đó. Trong bài này ta quy ước, khi nói cho tập hợp gồm n CS, thì đó là các CS đôi một khác nhau thuộc tập hợp $\{0, 1, ..., 9\}$ với $n \le 10$ và một số có m CS thì đó là số tự nhiên có CS đầu khác 0. Khi giải các bài toán loại này ta thường dùng các mệnh đề (MĐ) sau :

Giả sử m, n là các số nguyên dương với $m \le n$ thì

1) Số cách viết m trong n CS khác nhau vào m vị trí định trước là A_n^m.

2) Số cách viết m CS khác nhau trong n vị trí định trước là A_n^m (ở n-m vị trí còn lại không thay đổi chữ số).

3) Số cách viết m CS giống nhau trong n vị trí định trước là $C_n^{n-m} = C_n^m$.

4) Cho tập hợp gồm n CS, trong đó có CS 0, số các số có m CS tạo thành từ chúng là $(n-1)A_{n-1}^{m-1}$.

Thực vậy có $(n-1)$ cách chọn CS đứng đầu, sau đó áp dụng MĐ 2.

Sau đây là các dạng toán thường gặp.

Dạng 1. Số tạo thành chứa các chữ số định trước

Cho tập hợp gồm n CS, trong đó có CS 0, từ chúng viết được bao nhiêu số có m CS khác nhau sao cho trong đó có k CS định trước (thuộc n CS trên) với $k < m \le n$.

Cách giải. Số tạo thành gồm m vị trí $a_1a_2...a_m$. Gọi tập hợp k CS định trước là X. Ta xét hai bài toán nhỏ theo các khả năng của giả thiết về tập hợp X và chữ số 0 như sau :

1) Trong X chứa CS 0

Ta có $(m-1)$ cách chọn vị trí cho số 0 ; số cách chọn $(k-1)$ CS khác 0 thuộc X trong $(m-1)$ vị trí còn lại là A_{m-1}^{k-1} theo MĐ (2) ; số cách chọn $(m-k)$ trong số $(n-k)$ CS không thuộc X cho $(m-k)$ vị trí còn lại là A_{n-k}^{m-k} theo MĐ (1).

Theo quy tắc nhân, ta được số các số đó là $S = (m-1).A_{m-1}^{k-1}.A_{n-k}^{m-k}$.

2) Trong X không chứa CS 0

Ta tính theo các bước :

Bước 1. Tính số các số tạo thành chứa CS 0.

Lần lượt có $(m-1)$ cách chọn vị trí cho 0 ; số cách viết k CS thuộc X vào $(m-1)$ vị trí còn lại là A_{m-1}^{k} theo MĐ (2) ; số cách chọn $(m-k-1)$ trong số $(n-k-1)$ CS khác 0 mà không thuộc X vào $(m-k-1)$ vị trí còn lại là A_{n-k-1}^{m-k-1} theo MĐ (1).

Theo quy tắc nhân, ta được số các số đó là :

$S_1 = (m-1).A_{m-1}^{k}.A_{n-k-1}^{m-k-1}$

Bước 2. Tính số các số tạo thành không chứa CS 0 :

Số cách viết k CS thuộc X trong m vị trí là A_m^k theo MĐ (2) ; số cách chọn $(m-k)$ trong số $(n-k-1)$ CS khác 0 mà không thuộc X cho $(m-k)$ vị trí còn lại là A_{n-k-1}^{m-k} theo MĐ (1).

Theo quy tắc nhân, ta được số các số đó là $S_2 = A_m^k.A_{n-k-1}^{m-k}$.

Bước 3. Theo quy tắc cộng, ta được số các số tạo thành thỏa mãn bài toán là : $S = S_1 + S_2$.

Dạng 2. Số tạo thành không chứa hai chữ số định trước cạnh nhau

Cho tập hợp gồm n CS, từ chúng viết được bao nhiêu số có m ($m \le n$) CS khác nhau mà trong đó có hai CS định trước nào đó không đứng cạnh nhau.

Cách giải. Số tạo thành có dạng $\overline{a_1a_2...a_m}$ và 2 CS định trước là x, y (thuộc n CS đã cho). Ta xét ba bài toán nhỏ theo các khả năng của giả thiết về chữ số x, y và chữ số 0 như sau :

1) *Nếu n CS đã cho chứa chữ số 0 và hai chữ số định trước x, y khác 0.*

Bước 1. Tính số các số tạo thành một cách bất kì : có n-1 cách chọn vị trí cho chữ số 0 và áp dụng MĐ (2) được số các số đó là $S_1 = (n-1)A_{n-1}^{m-1}$.

Bước 2. Tính số các số có hai CS x, y cạnh nhau theo thứ tự $\overline{xy}$ và $\overline{yx}$.

TH1. $\overline{a_1a_2} = \overline{xy}$. Khi đó mỗi số $\overline{a_3...a_m}$ ứng với một chỉnh hợp chập $(m-2)$ của $(n-2)$ chữ số khác x, y. Số các số đó là $S_2 = A_{n-2}^{m-2}$, theo MĐ (1).

TH2. $\overline{a_1a_2} \neq \overline{xy}$. Lần lượt ta có : $(n-3)$ cách chọn CS cho a_1 khác 0, x, y ; $(m-2)$ cách chọn vị trí cho $\overline{xy}$; số cách chọn $(m-3)$ trong $(n-3)$ CS còn lại khác a_1, x, y cho $(m-3)$ vị trí còn lại là A_{n-3}^{m-3} theo MĐ (1). Theo quy tắc nhân, số các số đó là : $S_3 = (n-3).(m-2)\,A_{n-3}^{m-3}$.

Từ hai trường hợp trên, ta được số các số có chứa $\overline{xy}$ là $S_2 + S_3$. Tương tự có $S_2 + S_3$ số chứa $\overline{yx}$.

Bước 3 : Vậy số các số thỏa mãn bài toán là :

$$S = S_1 - 2.(S_2 + S_3)$$

2) *Nếu n CS đã cho chứa chữ số 0 và một trong hai chữ số định trước bằng 0.*

Bạn đọc tự giải theo các bước sau :

Bước 1. Tính số các số tạo thành một cách bất kì : $S_1 = (n-1).A_{n-1}^{m-1}$.

Bước 2. Tính số các số có x, y cạnh nhau :

$S_2 = (2m-3)\,A_{n-2}^{m-2}$.

Số các số thỏa mãn bài toán là $S = S_1 - S_2$.

3) *n CS đã cho không có chữ số 0.*

Bạn đọc tự giải được $S = A_n^m - 2(m-1).A_{n-2}^{m-2}$.

Dạng 3. Số tạo thành chứa chữ số lặp lại

Trước hết ta xét ví dụ cụ thể :

Ví dụ : *Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 CS sao cho trong đó có một CS xuất hiện ba lần, một CS khác xuất hiện hai lần và một CS khác với hai CS trên.*

Lời giải. Nếu kể cả trường hợp CS 0 đứng đầu, lần lượt :

Có 10 cách chọn chữ số xuất hiện 3 lần và có C_6^3 cách chọn 3 trong 6 vị trí cho CS đó. Sau đó có 9 cách chọn chữ số xuất hiện 2 lần (khác với CS trên) và có C_3^2 cách chọn 2 trong 3 vị trí còn lại cho CS đó. Tiếp theo có 8 cách chọn CS cho vị trí còn lại cuối cùng. Ta được số các số đó là $S = 10.C_6^3.9.C_3^2.8 = 720.C_6^3.C_3^2$.

Vì vai trò của 10 CS 0, 1, ..., 9 như nhau nên số các số có CS đứng đầu khác 0 thỏa mãn bài toán là $9S/10 = 648.C_6^3.C_3^2$.

Bài toán tổng quát : *Cho tập hợp gồm n CS, từ chúng viết được bao nhiêu số có m CS sao cho trong đó có một CS xuất hiện k lần, một CS khác xuất hiện q lần với k + q = m.*

Cách giải. Ta xét hai bài toán nhỏ dưới đây

1) *Nếu n CS đã cho có chữ số 0*

Bước 1. Nếu kể cả trường hợp CS 0 đứng đầu, ta thấy :

Có n cách chọn chữ số xuất hiện k lần và có C_m^k cách chọn k trong m vị trí cho CS đó. Sau đó có n–1 cách chọn chữ số xuất hiện q lần (khác với CS trên) và có C_{m-k}^q cách chọn q trong $m-k$ vị trí còn lại cho CS đó.

Theo quy tắc nhân, ta tính được số các số đó là : $S = n.C_m^k.(n-1).C_{m-k}^q$.

Bước 2. Vì vai trò của n CS như nhau nên số các số có CS đứng đầu khác 0 thỏa mãn bài toán là : $\dfrac{(n-1).S}{n}$.

2) *n CS đã cho không có chữ số 0.*

Bạn đọc tự giải được $S = n.C_m^k.(n-1).C_{m-k}^q$.

Ta có thể mở rộng bài toán tổng quát cho t chữ số trong đó mỗi chữ số xuất hiện lần lượt k_1, k_2, ..., k_t lần.

BÀI TẬP

1. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 35400 và có 5 chữ số khác nhau.

2. Cho các CS 0, 1, 2,3, 4, 5, 6. Từ chúng viết được bao nhiêu số có 5 CS khác nhau sao cho số tạo thành là một số chẵn.

3. Cho các CS 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Từ chúng viết được bao nhiêu số có 8 CS khác nhau sao cho trong đó có CS 1 đứng phía trước CS 2.

Sau 137 năm
HÌNH LẬP PHƯƠNG MAGIC HOÀN TOÀN BẬC NHỎ NHẤT
đã được xây dựng

137 năm sau khi vấn đề được nêu ra một phát minh toán học có tính "bác học" mới có lời giải đáp. Nhưng để kiểm chứng lại chỉ cần có trình độ toán của lớp 4, nghĩa là chỉ cần biết làm phép toán cộng.

Năm 1866, mục sư người Anh Adrew H. Frost, một nhà nghiên cứu tài tử về trò chơi toán học đã công bố trong một tạp chí khoa học lúc bấy giờ cách xây dựng một *hình lập phương magic hoàn toàn* đầu tiên.

137 năm sau, một sự kiện toán học xuất phát từ trò chơi toán học đó, đã làm rung động giới toán học thế giới. Đó là sự phát minh ra một hình lập phương magic hoàn toàn nhỏ nhất của giáo sư toán học người Đức Walter Triumph. Có người ví sự kiện này như "một chùm pháo hoa rực rỡ, tung ra giữa bầu trời toán học", "một mô hình tuyệt vời về vẻ đẹp toán học mà con người có thể nghĩ ra được", "một chứng minh vô song về sự hài hòa giữa cái đẹp và cái có lí !"

Trước hết ta hãy nói đến khái niệm hình vuông magic : *Hình vuông magic bậc n là một bảng vuông gồm $n \times n = n^2$ hình vuông chứa n^2 số từ 1 đến n^2 sao cho tổng các số ở mỗi hàng, tổng các số ở mỗi cột, tổng các số ở mỗi đường chéo đều bằng nhau.* Hình vuông bên cạnh là hình vuông magic bậc 4. Tổng các số ở mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo là 34. Hình vuông này do Albrech Düer nghĩ ra năm 1514, được tìm thấy trong một bức tranh có tên là "Nỗi buồn". Các hình vuông magic bậc 3 và 9 đều có ghép với một ý nghĩa thiên văn, theo như cách làm của nhà Thần học Agrippa Von Netteishem. Do đó Düer cũng cho hình vuông ma phương bậc 4 của mình tượng trưng cho cuộc chiến đấu giữa những lực lượng của Jupiter và nỗi buồn. Số 34 (tổng) có một ý nghĩa thần học : số 3 tượng trưng cho cuộc sống thể chất và số 4 tượng trưng cho cuộc sống tinh thần.

16	23	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Còn hình lập phương magic (HLPM) và hình lập phương magic hoàn toàn (HLPMHT) là gì ?

HLPM bậc n là một hình gồm n khối vuông kích thước $n \times n$ chồng lên nhau. Mỗi khối vuông đơn vị (1×1) mang một số khác nhau, lấy trong dãy số từ 1 đến n^3 sao cho : tổng các số của bất cứ hàng ngang nào, hàng dọc nào, cột nào, đường chéo lớn nào (đường chéo nối hai đỉnh đối diện của hình lập phương), cũng đều bằng nhau.

Một HLPM gọi là HLPMHT khi tất cả các đường chéo của hình vuông song song với những mặt của hình lập phương cũng có tổng các số bằng tổng các số của các đường chéo lớn nói trên. Nói một cách khác, một HLPMHT bậc *n* là một hình lập phương mà bất cứ hình vuông nằm ngang, nằm dọc hay là mặt chéo cũng là hình vuông magic với tổng các số đều bằng nhau.

Hình vuông magic đã xuất hiện ở Trung Quốc từ 2200 năm trước Công nguyên, nhưng hình lập phương magic trái lại chỉ mới xuất hiện từ 1640 với Pierre de Fermat, trong một bức thư gửi cho Marin Mersenne. Vào thế kỉ sau, Leibniz, một nhà toán học nổi tiếng khác, cũng rất quan tâm đến hình lập phương magic. Hồi đó khái niệm "hình lập phương magic" chưa được thống nhất về định nghĩa. Mãi đến nửa cuối thế kỉ 19 nhiều nhà toán học khác nhau, trong đó có Frost, mới đi đến thống nhất về định nghĩa HLPM như hiện nay.

HLPMHT bậc 7 do Frost tìm ra. Nhiều nhà nghiên cứu toán cũng đã tìm ra HLPMHT bậc 7, 8, 9 ... Christian Boyer đã tìm ra HLPMHT bậc 8192. Hình lập phương "vĩ đại" này còn có các tính chất phụ là "magic bậc 4", nghĩa là nếu thay mỗi số bằng bình phương, lập phương, thậm chí lũy thừa bậc bốn của nó, hình lập phương đó vẫn bảo toàn tính magic. Thế mà chưa tìm được HLPMHT bậc nhỏ hơn 7 (trừ bậc 1, hiển nhiên !). Dễ thấy không thể có hình vuông hay hình lập phương magic bậc 2. HLPMHT bậc 3, bậc 4 cũng không thể có. Đối với bậc 3, thì dễ thấy rằng, khác nhau một sự đối xứng, chỉ có 4 HLPM khác nhau. Có thể kiểm tra để thấy không có hình lập phương nào hoàn toàn. Năm 1972 Richard Schroeppel đã chứng minh rằng không có HLPMHT bậc 4 và sau đó năm 1976, ông chứng tỏ rằng nếu có HLPMHT bậc 5, thì số ở tâm phải là 63. Về HLPMHT bậc 6 thì chưa ai biết có hay không có.

Sau hơn một thế kỉ tìm tòi không có kết quả, ai cũng nghĩ rằng không có HLPMHT bậc 5 hay 6. Nhưng tháng 9 năm 2003 Walter Triumph "trình làng" một HLPMHT bậc 6. Rồi không ngờ, hai tháng sau đó Walter Triumph và Christian Boyer đã tìm ra một HLPMHT bậc 5. Tất nhiên không thể nào hi vọng tìm một hình lập phương như vậy bằng cách lần lượt thế các số vào các ô vuông (125 ô), vì số tổ hợp (số các tổng) là một số dài đến 200 chữ số. Tất cả các máy tính trên thế giới cùng làm việc trong hàng tỉ năm cũng không làm nổi !

Để giảm bớt số trường hợp cần nghiên cứu, các nhà toán học tập trung trước hết vào HLPM bậc 3. Bằng máy tính họ đã chứng tỏ rằng nếu có HLPMHT thì số ở tâm là 63. Từ số ở tâm (63), bằng những suy luận toán học, chủ yếu là bằng số học, và sau đó kiểm tra bằng máy vi tính, họ lấp đầy được 27 ô ở giữa, còn lại 98 ô ở ngoài. Bằng máy vi tính và sử dụng 29 lần các số x và y thỏa mãn $x + y = 126$ họ lấp đầy được các ô đối diện. Phải mất nhiều tuần tính toán, với sự hỗ trợ của 5 máy vi tính, họ mới tạo ra được HLPMHT bậc 5 hoàn chỉnh. Hơn 80000 khối lập phương phụ bậc 3 đã được khảo sát.

5 hình vuông magic (hình bên) đặt chồng lên nhau từ trên xuống dưới tạo thành hình lập phương magic hoàn toàn có tổng các hàng đều bằng 315, chẳng hạn $90 + 1 + 85 + 72 + 67 = 90 + 13 + 37 + 74 + 101 = 90 + 69 + 63 + 57 + 36 = 315$.

Như vậy sau 137 năm bài toán HLPMHT đã được giải quyết trọn vẹn. Hơn nữa đó là HLPMHT có bậc nhỏ nhất.

Tham vọng hay nói đúng hơn kì vọng đi tìm cái mới của con người không dừng lại ở đó. Các nhà toán học tài tử còn muốn tìm ra HLPMHT có tính "magic kép", nghĩa là nếu thay mỗi số a bằng a^2 thì "tính magic" vẫn bảo toàn. Hiện nay HLP loại này có bậc 32 là nhỏ nhất. Rồi còn "magic bậc ba, bậc bốn", "magic trong không gian 4 chiều", "siêu lập phương magic" v.v...

Những tìm tòi này có áp dụng gì trong thực tế không ? Hiện nay là chưa, hoàn toàn chưa, nhưng biết đâu sau này...

PHAN THANH QUANG

(Viết theo Christian Boyer trong ***Recherche*** *số tháng 3/2004)*

25	16	80	104	90
115	98	4	1	97
42	111	85	2	75
66	72	27	102	48
67	18	119	106	5

91	77	71	6	70
52	64	117	69	13
30	118	21	123	23
26	39	92	44	114
116	17	14	73	95

47	61	45	76	86
107	43	38	33	94
89	68	63	58	37
32	93	88	83	19
40	50	81	65	79

31	53	112	109	10
12	82	34	87	100
103	3	105	8	96
113	57	9	62	74
56	120	55	49	35

121	108	7	20	59
29	28	122	125	11
51	15	41	124	84
78	54	99	24	60
36	110	46	22	101

MỘT SỐ ĐẶC ĐIỂM ... *(Tiếp bìa 3)*

Yêu cầu về suy luận trong Hình học đã nâng dần so với lớp 7. Hầu hết các định lí đều được chứng minh chặt chẽ (trừ định lí Ta-let được công nhận không chứng minh).

Để đảm bảo tỉ lệ giữa lí thuyết và thực hành (khoảng 40% thời lượng dành cho lí thuyết, 60% thời lượng dành cho luyện tập, thực hành và giải toán), sách Toán 8 rất chú trọng xây dựng hệ thống câu hỏi, bài tập. Có những câu hỏi, bài tập nhỏ nhằm tái hiện, gợi mở, củng cố, tập vận dụng trực tiếp kiến thức sử dụng trong tiết lên lớp ; có những bài tập rèn kĩ năng thực hiện các phép tính, kĩ năng giải phương trình, bất phương trình, kĩ năng suy luận chứng minh, kĩ năng vẽ hình, kĩ năng vận dụng toán học vào thực tế và vào các môn học khác. Thông qua việc giải các bài tập này, ngoài tác dụng củng cố kiến thức, rèn luyện kĩ năng, phát triển tư duy, học sinh còn được nâng cao mặt bằng văn hóa chung. Sau khi giải một bài tập về hằng đẳng thức đáng nhớ kết hợp với điền ô chữ, học sinh được hình thành một đức tính đáng quý của con người ; qua việc rút gọn rồi tính giá trị của một biểu thức, học sinh biết được một ngày lễ lớn trên thế giới ; biết được trên $1cm^2$ bề mặt da người có bao nhiêu con vi khuẩn ; thuế VAT là gì ; giá điện sinh hoạt được tính theo kiểu lũy tiến như thế nào ? thế nào là "tứ giác Long xuyên" ? ; biển báo giao thông nào có trục đối xứng? gian phòng như thế nào được coi là đạt mức chuẩn về ánh sáng ? vẽ thu nhỏ hoặc phóng to một bản đồ như thế nào ? v.v...

(Còn tiếp)

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 4

(Đề đã đăng trên THTT số 322, tháng 4 năm 2004)

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Ta có $y' = \dfrac{x^2-2mx+8-m^2}{(x-m)^2}$. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $y'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < -2$ hoặc $m > 2$.

Giả sử (x, y) là tọa độ điểm cực trị thì :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+mx-8}{x-m} \\ x^2-2mx+8-m^2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2+mx-8+(x^2-2mx+8-m^2)}{x-m}$$

$\Rightarrow y = 2x + m$ (với $m < -2$ hoặc $m > 2$).

Đây là PT đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

3) PT $y = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt. Gọi (x, y) là tọa độ giao điểm đó thì hệ số góc k của tiếp tuyến tại giao điểm là :

$$k = \frac{x^2-2mx+8-m^2}{(x-m)^2}$$

$$= \frac{x^2-2mx+8-m^2+(x^2+mx-8)}{(x-m)^2} = \frac{2x+m}{x-m}$$

Câu II. 1) Đặt $t = 2^x - 2^{-x}$, vì $x \in [0, 1]$ nên $t \in \left[0, \dfrac{3}{2}\right]$. PT đã cho trở thành :

$$2t^2 - 2(m+1)t + 4 - m = 0 \qquad (1)$$

Đặt $f(t) = 2t^2 - 2(m+1)t + 4 - m$

• *Trường hợp 1*. PT (1) có một nghiệm thuộc $[0, 3/2]$. Điều kiện cần và đủ là $f(0).f(3/2) \le 0$

$$\Leftrightarrow (4-m)\left(\frac{11-8m}{2}\right) \le 0 \Leftrightarrow \frac{11}{8} \le m \le 4.$$

• *Trường hợp 2*. PT (1) có hai nghiệm thuộc $[0, 3/2]$. Điều kiện là :

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2.f(0) \ge 0 \\ 2.f(3/2) \ge 0 \\ 0 \le S/2 \le 3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4m-7 \ge 0 \\ 4-m \ge 0 \\ 11-8m \ge 0 \\ 0 \le m+1 \le 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -2+\sqrt{11} \le m \le 11/8$.

Đáp số: $-2 + \sqrt{11} \le m \le 4$.

2) ĐK $-1 \le x \le 3$. Đặt $t = \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$. PT đã cho trở thành

$$\frac{2}{t} = 1+\frac{t^2-4}{2} \Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+2) = 0 \Rightarrow t = 2$$

$\Rightarrow \sqrt{3+2x-x^2} = 0 \Rightarrow x_1=-1$; $x_2=3$. Thử lại đúng.

Câu III. Ta có

$$I = \int_0^x \sin 2t\sqrt{1+\cos^2 t}.dt = \int_0^x \frac{\sin 2t(1+\cos^2 t)}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt.$$

Đặt $u = \sqrt{1+\cos^2 t}$ thì $du = \dfrac{-\sin 2t.dt}{2\sqrt{1+\cos^2 t}} \Rightarrow$

$$I = \int_{\sqrt{1+\cos^2 x}}^{\sqrt{2}} 2u^2 du = \frac{2(2\sqrt{2}-(1+\cos^2 x)\sqrt{1+\cos^2 x})}{3}$$

Thay vào PT đã cho nhận được $\cos^2 x = 1$, hay $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $(k \in Z)$

2) Ta có $2\sin A\sin B(1 - \cos C) = 1$

$\Leftrightarrow [\cos(A-B) - \cos(A+B)](1-\cos C) = 1$

$\Leftrightarrow (1-\cos C).\cos(A-B) + \cos C - \cos^2 C = 1$

$\Leftrightarrow (1-\cos C)[1 - \cos(A-B)] + \cos^2 C = 0$

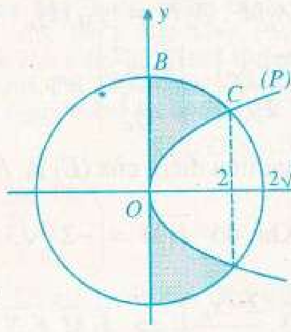
$\Rightarrow \cos C = 0$ và $\cos(A-B) = 1$

$\Rightarrow C = 90^o, A = B = 45^o$

Câu IV. 1) Tọa độ giao điểm của parabol (P) với đường tròn (C) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y=2x \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\pm 2 \end{cases}$$

Diện tích tam giác cong OBC tính theo công thức $S_{OBC} = \displaystyle\int_0^2 \left(\sqrt{8-x^2}-\sqrt{2x}\right)dx = \pi - \frac{2}{3}$



Hình 1

(đặt $x = 2\sqrt{2}\sin t$ để tính nguyên hàm của $\sqrt{8-x^2}$). Diện tích hình tròn là 8π. Diện tích phần hình tròn nằm ngoài (P) là : $4\pi + 2\left(\pi-\frac{2}{3}\right) = 6\pi-\frac{4}{3}$. Từ đó tỉ số hai phần hình tròn bị cắt bởi (P) là $k = \frac{2\pi+4/3}{6\pi-4/3}$.

3) Ta có $(1+x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k .x^k \Rightarrow$

$\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n+1}dx = \int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k .x^k \Leftrightarrow \frac{2^{2n+2}}{2n+2} =$

$= \left(C_{2n+1}^o x + C_{2n+1}^1 \frac{x^2}{2} + C_{2n+1}^2 . \frac{x^3}{3} + ... + C_{2n+1}^{2n+1} . \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$

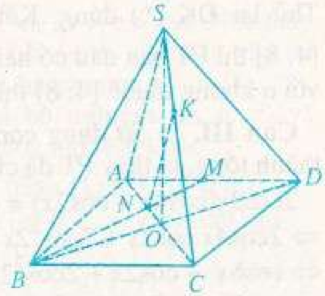
$\Rightarrow C_{2n+1}^o + \frac{1}{3}C_{2n+1}^2 + \frac{1}{5}C_{2n+1}^4 + ... + \frac{1}{2n-1}.C_{2n+1}^{2n-2}$

$+ \frac{1}{2n+1}.C_{2n+1}^{2n} = \frac{2^{2n+1}}{2n+2}$. Lấy $n = 1001$, ta được:

$S = C_{2003}^o + \frac{1}{3}C_{2003}^2 + ... + \frac{1}{2003}C_{2003}^{2002} = \frac{2^{2003}}{2004}$.

Câu V. 1) a) Tọa độ điểm cố định phải thỏa mãn hệ PT $\begin{cases} 2(x+2y)=0 \\ x^2+y^2-2x-5=0 \end{cases} \Rightarrow$ họ đường tròn có hai điểm cố định $M_1\left(2-\sqrt{29}; \frac{-2+\sqrt{29}}{2}\right)$; $M_2\left(2+\sqrt{29}; \frac{-2-\sqrt{29}}{2}\right)$.

b) Giả sử đường thẳng (d) là trục đẳng phương của 2 đường tròn bất kì trong họ đường tròn đã cho thì (d) đi qua hai điểm $M_1, M_2 \Rightarrow$ PT đường thẳng (d) là $x + 2y = 0$. Vì thế mọi điểm trên (d) có cùng phương tích với mọi đường tròn của họ này.



Hình 2

2) Gọi N là giao điểm của BM và AC (h. 2), ta thấy N là trọng tâm ΔABD. Dễ thấy $NK//SA$. Ta có :

$\frac{ON}{OA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CK}{CS} = \frac{CN}{CA} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$h_K = \frac{2}{3}h_S$ (h_K, h_S lần lượt là chiều cao của các hình chóp $KBCDM$, $SABCD$)

Vì $S_{BCDM} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{8}$, suy ra : $V_{KBCDM} = \frac{a^3}{8}$

NGUYỄN THANH CẢNH
(GV CĐSP Hưng Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 5

(Đề đã đăng trên THTT số 323, tháng 5 năm 2004)

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Ta có : $y' = 1-\frac{1}{(x-1)^2}$. Từ $x_1 + x_2 = 2$ có $(x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \Rightarrow y'(x_1) = y'(x_2)$ suy ra đpcm.

Câu II. 1) ĐK $x > 0$, vế phải của PT đã cho là $\log_2\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \log_2\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 1$ (do $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$) (1). Mặt khác bằng cách lấy đạo hàm CM được vế trái của PT : $3x^2 - 2x^3 \leq 1$ (2). Từ (1), (2) suy ra PT đã cho có nghiệm là $x = 1$. Thử lại đúng.

2) Giải, biện luận PT :

$\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x} = 4$

ĐK : $-a \leq x \leq a$ (*). Suy ra $a \geq 0$. Bình phương hai vế ta được $2a + 2\sqrt{a^2-x^2} = 16 \Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} = 8-a$. Với $0 \leq a \leq 8$ thì $x^2 = 16(a-4)$

Với $4 \leq a \leq 8$ PT này có nghiệm là $x = \pm 4\sqrt{a-4}$.

Thử lại ĐK (*) đúng. Kết luận : Với a thuộc [4; 8] thì PT ban đầu có hai nghiệm $x = \pm 4\sqrt{a-4}$, với a không thuộc [4; 8] thì PT vô nghiệm.

Câu III. 1) Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng, ta thấy PT đã cho tương đương với :

$2\cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) = \cos 6x$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x.\cos 2x + 2\cos^2 2x = \cos 6x$

$\Leftrightarrow \cos 6x + \cos 2x + 2\cos^2 2x = \cos 6x$

$\Leftrightarrow \cos 2x(1 + 2\cos 2x) = 0$

a) $\cos 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in Z)$

b) $1 + \cos 2x = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + m\pi$ $(m \in Z)$

a) Ta có :

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \le 2\cos\frac{C}{2}$$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B$).

Ta có $\dfrac{1}{2}(\sin A + \sin B) \le \cos\dfrac{C}{2}$ (1)

Tương tự có :

$\dfrac{5}{2}(\sin B + \sin C) \le 5\cos\dfrac{A}{2}$ (2)

$\dfrac{3}{2}(\sin C + \sin A) \le 3\cos\dfrac{B}{2}$ (3)

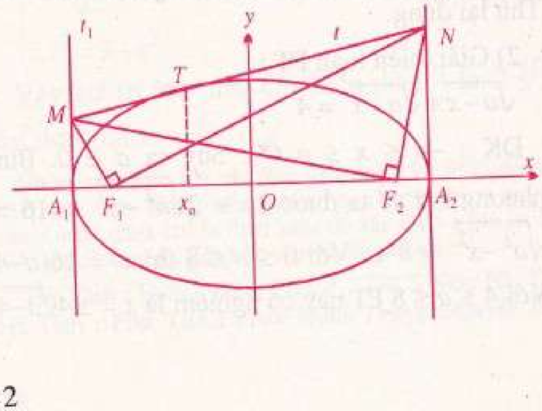
Từ (1), (2), (3) suy ra

$2\sin A + 3\sin B + 4\sin C \le$

$5\cos\dfrac{A}{2} + 3\cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Câu IV. Giả sử (t) tiếp xúc với (E) tại điểm $T(x_o, y_o)$, PT của (t) là : $x_o x + 4y_o y = 4$. Do M, N là giao điểm của (t) với t_1, t_2 nên có $M\left(-2, \dfrac{2+x_o}{2y_o}\right)$; $N\left(2, \dfrac{2-x_o}{2y_o}\right)$.



1) Ta có : $\overline{A_1M}\,.\,\overline{A_2N} = |y_M|.|y_n| =$

$$= \left|\frac{2+x_o}{2y_o}\right|.\left|\frac{2-x_o}{2y_o}\right| = \left|\frac{4-x_o^2}{4y_o^2}\right| = 1.$$

2) Tọa độ hai tiêu điểm của (E) là $F_1(-\sqrt{3},0)$, $F_2(\sqrt{3},0)$. Khi đó $\overrightarrow{F_1M} = \left(-2+\sqrt{3}, \dfrac{2+x_o}{2y_o}\right)$; $\overrightarrow{F_1N} = \left(2+\sqrt{3}, \dfrac{2-x_o}{2y_o}\right) \Rightarrow \overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_1N} = 0$ hay $\overrightarrow{F_1M} \perp \overrightarrow{F_1N}$. Tương tự $\overrightarrow{F_2M} \perp \overrightarrow{F_2N}$. Do đó đường tròn đường kính MN luôn đi qua hai tiêu điểm F_1, F_2 của (E).

Câu V. 1) Với $x \neq 0$ ta có :

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-3x^2+1}.dx = \int \frac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2+\dfrac{1}{x^2}-3}dx =$$

$$= \int \frac{d\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-1} = \int \frac{du}{u^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du = \frac{1}{2}.\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$

(với $u = x - \dfrac{1}{x}$)

2) Từ $(1+x)^n = C_n^o + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n$. Lấy đạo hàm hai vế và cho $x = 1$ được

$$1.C_n^1 + 2C_n^2 + ... + n.C_n^n = n.2^{n-1}.$$

Tiếp tục xét tiếp đạo hàm cấp hai, đồng thời cho $x = 1$ thì có

$$2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1).2^{n-2}$$

Từ đó :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.C_n^k = \sum_{k=1}^{n}[k(k-1)+k].C_n^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k + \sum_{k=1}^{n} k.C_n^k$$

$$= n(n-1).2^{n-2} + n.2^{n-1} = n(n+1).2^{n-2}.$$

PHẠM HÙNG
(GV PTCTT–ĐHKHTN Hà Nội)

GƯƠNG HỌC TẬP VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

ĐOÀN AN HẢI

Người Việt Nam đầu tiên giành Giải thưởng Luận văn Tiến sĩ ACM

Đoàn An Hải - hiện là Phó giáo sư về khoa học máy tính tại ĐH Illinois, Mỹ - đã giành Giải thưởng luận văn Tiến sĩ ACM 2003. Đây là giải thưởng hàng năm được Hiệp hội máy tính (ACM) trao cho tác giả hoặc những tác giả có luận văn tiến sĩ xuất sắc nhất về khoa học và kĩ thuật máy tính tại Mỹ. Trị giá của giải thưởng là 5.000 USD.

Đoàn An Hải là người châu Á thứ hai giành giải thưởng vinh dự này. Lĩnh vực nghiên cứu của anh hiện nay là cơ sở dữ liệu, tích hợp và chia sẻ dữ liệu, khớp giản đồ, khai thác dữ liệu, khám phá thông tin trên web, Semantic Web, quản lí siêu dữ liệu và học máy.

Hàng năm, một hoặc hai luận văn tiến sĩ hàng đầu về kĩ thuật và khoa học máy tính được công nhận bằng *Giải thưởng luận văn tưởng nhớ William Chan* và được chuyển lên ACM để xem xét trao *Giải luận văn Tiến sĩ ACM*. Luận văn Tiến sĩ của An Hải bảo vệ năm 2002 mang tựa đề : *"Learning to Map between Structured Representation of Data""*, đưa ra một phương pháp tiếp cận học máy đối với vẽ giản đồ cơ sở dữ liệu.

Sinh ra tại một làng nhỏ ở Quỳnh Lưu - Nghệ An, sau khi học xong cấp II, do nhà nghèo, không có điều kiện đi học ở xa nên Hải đã quyết định theo học tại Trường THPT chuyên Phan Bội Châu ở TP Vinh, Nghệ An. Hải học xuất sắc cả Toán, Lý, Văn và là học sinh đầu tiên của trường được chọn đi dự cuộc thi Toán Quốc tế năm 1986 tại Ba Lan.

Năm 1987, Hải đã đoạt giải nhất kì thi tiếng Hungary của học sinh Việt Nam đang học tại Đại học ngoại ngữ Hà Nội, sau đó anh được chọn sang Hungary để học Đại học ngành Tin học.

Trong 5 năm đèn sách tại Hungary, Hải còn phải tranh thủ thời gian làm thêm để gửi tiền giúp đỡ bố mẹ nuôi các em ăn học. Mặc dù vậy Hải vẫn cố gắng học chuyên môn và tự học thêm tiếng Anh.

Năm 1993, Hải tốt nghiệp đại học ở Hungary với tấm bằng Đỏ đứng đầu lớp, và sau đó anh cũng đã xin được sang học Thạc sĩ tin học tại Đại học Wisconsin, Mỹ, do giáo sư Peter Haddawy tài trợ. Với suất học bổng này, Hải là học sinh Việt Nam đầu tiên từ Hungary sang học ở Mỹ.

Sau hai năm theo học Thạc sĩ tại Đại học Wisconsin, Hải quyết định chuyển về học Tiến sĩ tin học ở Đại học Washington, Seattle. Thời gian này Việt Nam và Mỹ vừa mới bình thường hóa quan hệ, người Việt ở trong nước sang Mỹ công tác và làm việc ngày một đông. Để giúp đỡ cộng đồng Việt Nam sang Mỹ, Hải cùng các bạn là Nguyễn Công Thanh (ĐH Wisconsin), nay làm việc tại Mỹ, Đàm Thanh Sơn (ĐH ở Nga) - nay là giáo sư khoa Vật lí ĐH Washington, và Vũ Hồng Lâm (ĐH ở Đức) thành lập *Diễn đàn điện tử VNSA* dành cho học sinh Việt Nam ở nước ngoài.

Một ngày sau khi nhận giải Luận án tiến sĩ tin học xuất sắc của ACM, Đoàn An Hải lại tiếp tục được Hội khoa học quốc gia Mỹ thông báo trao tặng *Giải thưởng Career*. Đây là một trong những Giải thưởng cao nhất ở Mỹ mà một giáo sư đại học mới nhận việc trong vòng 5 năm qua có thể nhận được, mỗi năm chỉ trao cho 300 giáo sư tại Mỹ. Giải thưởng đi kèm là 500.000 USD.

(Theo Tin hoạt động các hội KH&KT 20.3.04)

TIN TỨC HOẠT ĐỘNG TOÁN HỌC

VIỆT NAM THAM GIA CUỘC THI OLYMPIC TOÁN SINGAPORE 2004 MỞ RỘNG

Lần đầu tiên Cuộc thi Olympic toán Singapo do Hội toán học Singapo tổ chức đã mời Việt Nam và một số nước Đông Nam Á tham dự. Cuộc thi tiến hành qua 3 vòng thi. Ngày 3.6.2004 cuộc thi vòng 1 của Việt Nam đã tiến hành dưới sự bảo trợ của Hội Toán học Hà Nội, tổ chức tại trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội. Trường THPT Chu Văn An và ĐHBK Hà Nội tài trợ cho cuộc thi. Thí sinh dự thi không phải đóng góp bất cứ chi phí gì. Có 20 học sinh dự thi chương trình Senior (sinh từ 2.1.1988) và 9 học sinh dự thi chương trình Junior (sinh từ 2.1.1990) đến từ các trường THPT Hà Nội - Amsterdam, THPT Chu Văn An, THCS Trưng Vương, THCS Ngô Sĩ Liên, Bán công chuyên ngữ Lômônôxôp, THCS Nguyễn Trường Tộ, THCS Giảng Võ, THCS Lê Quý Đôn. *Mỗi đề thi gồm 35 bài toán*. Mười bài đầu là câu hỏi trắc nghiệm. Các bài còn lại phải viết lời giải. *Đề thi và bài làm đều bằng tiếng Anh*. Nhìn chung học sinh Việt Nam còn lúng túng khi tham gia kiểu thi này.

LÊ HÙNG SƠN và VŨ KIM THỦY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/324. (Lớp 6). Số 2^{100} có bao nhiêu chữ số ? Tìm chữ số đầu tiên bên trái của số đó.

HOÀNG TRỌNG HẢO
(SV K49 khoa Toán ĐHSP Hà Nội)

Bài T2/324. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC}=70^o$, $\widehat{ACB}=50^o$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $\widehat{ABM}=20^o$. Trên cạnh AB lấy điểm N sao cho $\widehat{ACN}=10^o$. Gọi P là giao điểm của BM và CN. Chứng minh rằng $MN = 2PM$.

LÊ CHU BIÊN
(GV THCS Xuân Phú, Xuân Trường, Nam Định)

Bài T3/324. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y=2 \\ y^3+x=2 \end{cases}$

TRẦN VIỆT ANH
(SV K51, CLC khoa Toán, ĐHSP Hà Nội)

Bài T4/324. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}$$

trong đó a, b, c là các số thực không âm.

PHẠM VĂN THUẬN
(Hà Nội)

Bài T5/324. Cho tam giác ABC vuông tại A. Với mỗi điểm K trên cạnh AC dựng đường tròn tâm K tiếp xúc với BC tại E. Dựng BD tiếp xúc với đường tròn tâm K tại D (khác E). Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của AK, AD, BD và MP. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng QN và BD. Hỏi điểm S chạy trên đường nào khi K di động trên cạnh AC ?

PHẠM HÙNG
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/324. Cho đa thức $f(x)$ bậc 2003 và $f(k) = \dfrac{k^2}{k+1}$ với $k = 1, 2, 3, ..., 2004$. Hãy tính $f(2005)$.

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV THPT Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai)

Bài T7/324. Chứng minh rằng $4x^2 + 4y^2 \leq xy + yz + zx + 5z^2$ trong đó x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \leq y \leq z$.

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

LÊ VĂN AN
(GV THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)

Bài T8/324. Gọi r_a, r_b, r_c lần lượt là các bán kính đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

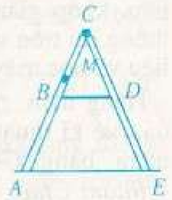
$$r_a\sin(A/2)+r_b\sin(B/2)+r_c\sin(C/2)$$

$$\leq \frac{r_a^3+r_b^3+r_c^3}{6}\left(\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\right)$$

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/324. Một thang gấp hình chữ A, độ dài hai nhánh $CA = CE = 2,5$m, với Clà một bản lề. Buộc hai trung điểm B của CA và D của CE bằng một sợi dây BD=0,7m. Một người khối lượng m = 60kg đứng tại bậc thang M (CM = 1m). Hãy tính

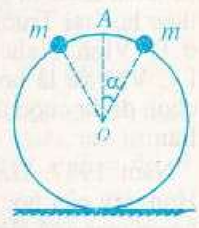


a) Lực căng của sợi dây BD

b) Các lực $\overrightarrow{P_A}$ và $\overrightarrow{P_E}$ do mặt sàn tác dụng lên các chân thang A và E. Cho biết $g = 10\text{m/s}^2$, mặt sàn AE nằm ngang. Bỏ qua ma sát giữa mặt sàn và các chân thang A, E và ma sát tại C.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/324. Hai hạt cườm giống nhau, mỗi hạt có khối lượng m được luồn vào một vòng mảnh, cứng có khối lượng M. Vòng được đặt thẳng đứng trên mặt phẳng nằm ngang. Hai hạt cườm bắt đầu trượt không ma sát, không vận tốc đầu từ điểm cao nhất của vòng.



a) Xác định lực do mỗi hạt cườm tác dụng lên vòng khi chúng ở vị trí mà bán kính nối vật với tâm vòng tròn hợp với phương thẳng đứng một góc α.

b) Tìm điều kiện $\dfrac{M}{m}$ để vòng có thể nảy lên.

c) Giả sử điều kiện ở câu b được thỏa mãn. Hãy xác định góc α khi vòng bắt đầu nảy lên.

NGUYỄN THANH NHÀN
(GV THPT Yên Lạc,Vĩnh Phúc)

CUỘC THI GIẢI TOÁN KỈ NIỆM 40 NĂM TẠP CHÍ THTT

CÁC LỚP THCS

Bài T7/THCS. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$6\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \le 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{10a+b+c}+\frac{1}{a+10b+c}+\frac{1}{a+b+10c} \le \frac{1}{12}$$

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T8/THCS. Cho tam giác ABC vuông tại A với $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Một đường thẳng đi qua B cắt đường thẳng AC tại D và cắt đường tròn tâm A bán kính AC tại E và F. Chứng minh rằng

$$\left|\frac{1}{BE}-\frac{1}{BF}\right| = \frac{1}{BD}$$

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T7/THPT. Tìm số thực c lớn nhất thỏa mãn điều kiện : với mọi cặp số nguyên dương m, n luôn tìm được số thực x sao cho

$$\sin(mx) + \sin(nx) \ge c$$

TRẦN NAM DŨNG
(GV ĐHKHTN TP. HCM)

Bài T8/THPT. Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$. Một mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu nội tiếp hình lập phương tại Q và cắt các cạnh $AB, AD, A'B', A'D'$ của hình lập phương theo thứ tự tại M, N, M', N'. Chứng minh rằng $\widehat{MQN}+\widehat{M'QN'} = 90^\circ$.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV khối PTCTT ĐHSP Hà Nội)

Đề thi đăng từ số báo 321 (3.2004) đến 325 (7.2004). Thời hạn nhận bài là 2 tháng từ cuối tháng của số báo đăng đề. Bài giải đăng từ số báo 325 (7.2004) đến 329 (11.2004). Có giải thưởng tập thể dành cho trường có nhiều bạn tham gia.

THTT

CONTEST ON THE 40th ANNIVERSARY OF THE JOURNAL

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T7/THCS. Let be given positive real numbers a, b, c satisfying the condition

$$6\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \le 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Prove that

$$\frac{1}{10a+b+c}+\frac{1}{a+10b+c}+\frac{1}{a+b+10c} \le \frac{1}{12}$$

T8/THCS. Let ABC be a triangle, right at A and $\widehat{ABC} = 60^\circ$. A line passing through B cuts the line AC at D and cuts the circle with center A and radius AC at E and F. Prove that

$$\left|\frac{1}{BE}-\frac{1}{BF}\right| = \frac{1}{BD}$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T7/THPT. Find the greatest real number c satisfying the condition : for arbitrary given positive integers m, n, there exists a real number x such that $\sin(mx) + \sin(nx) \ge c$

T8/THPT. Let be given a cube $ABCDA'B'C'D'$. A plane touches the sphere inscribed in the cube at Q and cuts the sides $AB, AD, A'B', A'D'$ of the cube at M, N, M', N' respectively. Prove that $\widehat{MQN} + \widehat{M'QN'} = 90^\circ$.

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/324. (For 6th grade). How many digits does contain the decimal representation of the number 2^{100} ? What is the first digit on the left in this representation ?

T2/324. (For 7th grade). Let ABC be a triangle with $\widehat{ABC} = 70^\circ$, $\widehat{ACB} = 50^\circ$. On the side AC, take M so that $\widehat{ABM} = 20^\circ$, on the side AB, take N so that $\widehat{ACN} = 10^\circ$. Let P be the point of intersection of BM and CN. Prove that $MN = 2PM$.

T3/324. Solve the system of equations $\begin{cases} x^3+y=2 \\ y^3+x=2 \end{cases}$

T4/324. Prove the inequality

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \ge$$
$$\ge \sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}$$

where a, b, c are non negative real numbers.

(Xem tiếp trang 2)

Bài T1/320. (Lớp 6).

Tổng $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}$ *bằng* $\frac{a}{b}$ *với* $\frac{a}{b}$ *là phân số tối giản (các mẫu số ở các số hạng của tổng là các số tự nhiên liên tiếp từ 2 đến 18). Chứng minh rằng b chia hết cho 2431.*

Lời giải. Ta kí hiệu M là BSCNN của các số tự nhiên liên tiếp 2, 3, ..., 17, 18 và lần lượt đặt : $M = k_1 = 2k_2 = 3k_3 = ... = 17.k_{17} = 18.k_{18}$

Quy đồng mẫu số của tổng ta được :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}=\frac{k_1+k_2+...+k_{17}+k_{18}}{M} \quad (1)$$

Vì 11 là số nguyên tố và các bội số khác của nó đều lớn hơn 18 nên trong các thừa số phụ k_1, k_2, ... , k_{17}, k_{18} chỉ có duy nhất k_{11} là không chia hết cho 11 còn tất cả các số còn lại đều chia hết cho 11. Do đó tổng $(k_1 + k_2 + ... + k_{17} + k_{18})$ không chia hết cho 11.

Cũng lí luận hoàn toàn tương tự, ta được tổng $(k_1 + k_2 + ... + k_{17} + k_{18})$ không chia hết cho 13 và 17. Mặt khác, hiển nhiên mẫu số chung M chia hết cho 11, 13, 17. Do đó khi rút gọn phân số trong vế phải của (1) đến tối giản ta được $\frac{a}{b}$, nghĩa là $k_1 + ... + k_{18} = t.a$, $M = t.b$ thì t không chia hết cho 11, 13, 17 nên b vẫn chia hết cho mỗi số nguyên tố 11, 13, 17. Điều đó có nghĩa là b chia hết cho tích 11.13.17 = 2431.

Nhận xét. 1. Một số bạn đã mắc sai lầm khi cho rằng b là M (BSCNN của các số tự nhiên liên tiếp 2, 3, ..., 17, 18) nên b chia hết cho 11, 13, 17 (!). Thực tế, sau khi quy đồng mẫu và rút gọn đến tối giản thì $b < M$.

2. Có thể đưa ra nhận xét tổng quát : nếu p là số nguyên tố, n là số tự nhiên thỏa mãn $p < n < 2p$ và tổng $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$ bằng $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì b chia hết cho p.

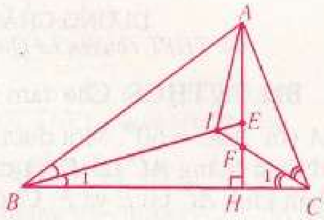
3. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Nghệ An : *Vũ Đức Hoàn*, 6A, *Phan Huy Cao*, 6C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Tăng Văn Bình*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Nam Định :** *Trương Quang Huy, Nguyễn Lâm Phúc*, 6A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định ; **Yên Bái :** *Văn Thu Thảo*, 5C, TH Nguyễn Trãi, TP. Yên Bái ; **Vĩnh Phúc :** *Hà Ngọc Thủy*, 6A, THCS Thái Hòa, Lập Thạch ; *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 6A, THCS Yên Lạc ; **Đắk Lắk :** *Vũ Anh Tuấn, Nguyễn Việt Thành*, 6B, THCS Nguyễn Văn Cừ, Buôn Ma Thuột.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/320. (Lớp 7). *Tam giác ABC có AB > AC, chân đường cao AH nằm trong cạnh BC. Đường phân giác của góc ABC và góc ACB cắt AH theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng BE > EF + FC*

Lời giải. Gọi I là giao điểm của BE và CF thì :



$\widehat{BAI}=\widehat{CAI}=\frac{\widehat{A}}{2}$.

Trong ΔABC có $AB > AC$ nên $\widehat{C} > \widehat{B} \Rightarrow 90^o - \widehat{C} < 90^o - \widehat{B} \Rightarrow \widehat{CAH} < \widehat{BAH} \Rightarrow \widehat{CAH}+\widehat{BAH} < 2\widehat{BAH} \Rightarrow \widehat{BAC} < 2\widehat{BAH} \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{2}<\widehat{BAH}$. Vậy $\widehat{BAI}<\widehat{BAH}$. Do đó tia AI cắt đoạn thẳng BE tại I, ta có $BE = BI + IE$. Cũng từ lập luận trên suy ra B và I nằm ở cùng phía đối với đường thẳng AH còn B và C nằm khác phía đối với AH (gt) nên I và C nằm khác phía đối với AH. Do đó F nằm giữa I và C, tức là $IC = IF + FC$.

Từ $\widehat{B} < \widehat{C}$ suy ra $\widehat{B_1}<\widehat{C_1} \Rightarrow BI > IC$

$\Rightarrow BI + IE > IC + IE = (IF + FC) + IE$ hay

$$BE > (IE + IF) + FC \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức tam giác ta có

$$IF + IE > EF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BE > EF + FC$ (đpcm).

Nhận xét. 1. Bài này không khó, tất cả các bạn tham gia giải đều có hướng giải đúng. Tuy nhiên, hầu hết các bạn thiếu lập luận chặt chẽ khi viết $BI + IE = BE$ và $IF + FC = IC$.

Trong lời giải trên đây ta đã sử dụng một kết quả (là tiên đề) về một đường thẳng chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng : Nếu A, B, C không thuộc đường thẳng Δ mà A và B nằm về hai phía của đường thẳng Δ thì Δ cắt đoạn AB, còn A và C nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ thì Δ không cắt đoạn AB.

2. Các bạn sau đây có lời giải đúng và lập luận chặt chẽ :

Phú Thọ : *Tạ Hồng Hà*, 6A3, THCS Lâm Thao ; **Hải Phòng :** *Vũ Hồng Anh*, 7C2, THCS Trần Phú II, Q. Lê Chân ; **Hà Tây :** *Cấn Mạnh Hùng*, 7C, THCS Thạch Thất ; **Hà Tĩnh :** *Đinh Văn Học*, 7C, THCS Sơn Lộc, Can Lộc ; **Đắk Lắk :** *Phan Duy Bá Hoành*, 7D, THCS

Tân Lợi, Buôn Ma Thuột ; **Bình Định :** *Nguyễn Duy Hoàng Việt*, 7A6, THCS Ngô Mây, Phù Cát ; **Quảng Ngãi :** *Tạ Thị Hải Vân*, 7C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, *Trần Tấn Thanh*, 7C, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Anh Hùng*, 7C, THCS Lê Hữu Lập.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/320. *Tìm hai bộ ba số nguyên dương $a \geq b \geq c$ và $x \geq y \geq z$ sao cho tổng ba số của bộ này bằng tích ba số của bộ kia.*

Lời giải. Từ giả thiết dẫn đến giải hệ phương trình $\begin{cases} a+b+c=xyz & (1) \\ x+y+z=abc & (2) \end{cases}$

trong đó a, b, c, x, y, z nguyên dương với $a \geq b \geq c$ và $x \geq y \geq z$ (*).

So sánh $a+b+c$ và abc có 3 trường hợp xảy ra :

1) Nếu $a+b+c=abc$ (4) thì từ (*) và (4) có $abc \leq 3a \Rightarrow bc \leq 3$.

• Với $c=1, b=1$ thay vào (4) được $a+2=a$ $\Rightarrow$ vô nghiệm.

• Với $c=1, b=3$ thay vào (4) được $a+4=3a$ $\Rightarrow a=2 \Rightarrow a<b$ không thỏa mãn.

• Với $c=1, b=2$ thay vào (4) được $a+3=2a$ $\Rightarrow a=3$. Thay vào (1), (2) được $x+y+z=6=xyz$. Lập luận như đối với a, b, c ta có nghiệm $z=1$, $y=2, x=3$.

2) Nếu $a+b+c>abc$ thì từ đó và (*) có $abc<3a \Rightarrow bc<3$. Xảy ra các khả năng sau :

a) Với $c=1, b=1$ thì từ (1) và (2) có

$$x+y+z+2=xyz \qquad (5)$$

Nếu $x=y=z=1$ thì (5) không xảy ra nên $x \geq 2$. Từ đó và (5), (*) có $4x \geq xyz \Rightarrow yz \leq 4$. Trong các trường hợp sau, thay giá trị y, z vào (5) để suy ra giá trị x rồi thay vào (1) để tìm được a.

• $yz=1 \Rightarrow y=z=1 \Rightarrow$ vô nghiệm.

• $yz=2 \Rightarrow y=2, z=1 \Rightarrow x=5 \Rightarrow a=8$.

• $yz=3 \Rightarrow y=3, z=1 \Rightarrow x=3 \Rightarrow a=7$.

• $yz=4$. Nếu $y=4, z=1$ thì vô nghiệm.

Nếu $y=2, z=2$ thì $x=2 \Rightarrow a=6$.

b) Với $c=1, b=2$ thì $x \geq 2$, từ (1) và (2) có

$$x+y+z+6=2xyz \qquad (6)$$

Từ (6), (*) có $6x \geq 2xyz \Rightarrow yz \leq 3$. Trong các trường hợp sau thay giá trị y, z vào (6) để suy ra giá trị x rồi thay vào (1) để tìm được a.

• $yz=1 \Rightarrow y=z=1 \Rightarrow x=8 \Rightarrow a=5$

• $yz=2 \Rightarrow y=2, z=1 \Rightarrow x=3 \Rightarrow a=3$

• $yz=3 \Rightarrow y=3, z=1 \Rightarrow$ vô nghiệm.

3) Nếu $a+b+c<abc \Leftrightarrow x+y+z>xyz$. Nếu thay thế bộ ba số (x, y, z) bởi (a, b, c) thì ta gặp lại trường hợp 2 khi giải hệ phương trình (1), (2), nghĩa là tráo đổi hai bộ nghiệm (a, b, c) và (x, y, z) cho nhau ta được nghiệm khác.

Tóm lại hệ phương trình (1) (2) với $a \geq b \geq c$, $x \geq y \geq z$ có 7 nghiệm (a, b, c, x, y, z) như sau :

(3, 2, 1, 3, 2, 1), (8, 1, 1, 5, 2, 1), (7, 1, 1, 3, 3, 1), (6, 1, 1, 2, 2, 2), (5, 2, 1, 8, 1, 1), (3, 3, 1, 7, 1, 1), (2, 2, 2, 6, 1, 1).

Nhận xét. Trừ một vài bạn giải thiếu nghiệm, đa số các bạn đều giải đúng. Điều quan trọng là tìm cách hạn chế giá trị các nghiệm để lời giải gọn nhất. Các bạn sau có lời giải tốt :

Vĩnh Phú : *Phạm Huy*, 9C, THCS Tam Dương, *Trần Tấn Phong*, 8A, THCS Lập Thạch, *Đỗ Đình Khanh*, *Nguyễn Hữu Kiên*, 9A, THCS Yên Lạc ; **Hà Tây :** *Đặng Văn Thùy*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ ; **Hà Nam :** *Nhữ Anh Tuấn*, 9B, THCS Trần Phú, Phủ Lý ; **Nam Định :** *Phạm Duy Hiệp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** *Bùi Phương Dung*, 9A, THCS Hoằng Trung, *Lê Ngọc Tuấn*, *Lê Văn Hoàn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Trịnh Huy Giang*, 9A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Lê Khánh Toàn*, 7B, *Lê Trâm Anh*, 7D, THCS Điện Biên, TP. Thanh Hóa ; **Nghệ An :** *Trịnh Văn Nam*, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Bùi Nguyễn Công*, 9C, THCS Nguyễn Trãi, Tân Kỳ ; **Bạc Liêu :** *Trần Mỹ Linh*, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu.

VIỆT HẢI

Bài T4/320. *Giải phương trình*

$$(x-2)\sqrt{x-1}-\sqrt{2}x+2=0 \qquad (1)$$

Lời giải. Điều kiện để phương trình (1) có nghĩa là $x \geq 1$ (*).

Đặt $\sqrt{x-1}=y$ $(y \geq 0) \Rightarrow x=y^2+1$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow (y^2-1)y-\sqrt{2}(y^2+1)+2=0$

$\Leftrightarrow y^3-\sqrt{2}y^2-y+2-\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow (y^3-\sqrt{2}y^2+y^2)-(y^2-\sqrt{2}y+y)-(\sqrt{2}y-2+\sqrt{2})=0$

$\Leftrightarrow y^2(y-\sqrt{2}+1)-y(y-\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}(y-\sqrt{2}+1)=0$

$\Leftrightarrow (y-\sqrt{2}+1)(y^2-y-\sqrt{2})=0$

Xảy ra 2 trường hợp :

• $y-\sqrt{2}+1=0 \Leftrightarrow y=\sqrt{2}-1$

$\Rightarrow x=(\sqrt{2}-1)^2+1=4-2\sqrt{2}$ thỏa mãn (*)

• $y^2-y-\sqrt{2}=0$.

Giải PT này với $y \geq 0$ được $y=\dfrac{1+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$

$$\Rightarrow x=\left(\frac{1+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}\right)^2+1=\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$$

thỏa mãn (*).

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm là :

$$x = 4-2\sqrt{2} \text{ và } x = \frac{3+2\sqrt{2}+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}.$$

Nhận xét. Hầu hết các bạn tham gia đều giải đúng bài này. Các bạn có lời giải tốt là : **Bắc Giang :** *Thân Ngọc Thức*, 9A, THCS Nguyễn Hồng, Tân Yên ; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Thị Hà*, 9A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch ; **Hà Tây :** *Trịnh Ngọc Tú*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ ; **Hà Nam :** *Nguyễn Mạnh An*, 9B, THCS Trần Phú, TX. Phủ Lý ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Tiến Liên*, 7A, THCS Yên Trường, Yên Định, *Trịnh Hà Linh*, 9A, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định ; **Nghệ An :** *Lê Đình Toàn*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Đắk Lắk :** *Võ Văn Tuấn*, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk ; **Khánh Hòa :** *Đỗ Phú Thịnh*, 9^{12}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **TP. Hồ Chí Minh :** *Trần Nhật Tuấn*, 10A1, THPT Bùi Thị Xuân.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/320. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $\sqrt{4x-x^3}+\sqrt{x+x^3}$ *với* $0 \le x \le 2$.

Lời giải. Gọi A là biểu thức đã cho, với $0 \le x \le 2$, ta có A là xác định và không âm. Viết $2A = \sqrt{2}\sqrt{8x-2x^3}+2\sqrt{x+x^3}$ và áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho các cặp số $(\sqrt{2},2)$ và $(\sqrt{8x-2x^3}, \sqrt{x+x^3})$ ta được :

$$4A^2 \le 6(9x-x^3) \qquad (1)$$

Viết $B = 9x - x^3 = x(9-x^2)$, ta có $B^2 = \frac{1}{2}2x^2(9-x^2)^2$. Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số không âm $2x^2$, $9-x^2$, $9-x^2$, ta được :

$$B^2 \le 3.6^2 \qquad (2)$$

Suy ra $4A^2 \le 6B \le 36\sqrt{3}$ hay $A \le 3\sqrt[4]{3}$. Đẳng thức cuối cùng xảy ra khi và chỉ khi đẳng thức xảy ra ở (1) và (2), nghĩa là :

$$\begin{cases} 0\le x\le 2 \\ \dfrac{\sqrt{8x-2x^3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{x+x^3}}{2} \\ 2x^2 = 9-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là $3\sqrt[4]{3}$ đạt được tại $x = \sqrt{3}$.

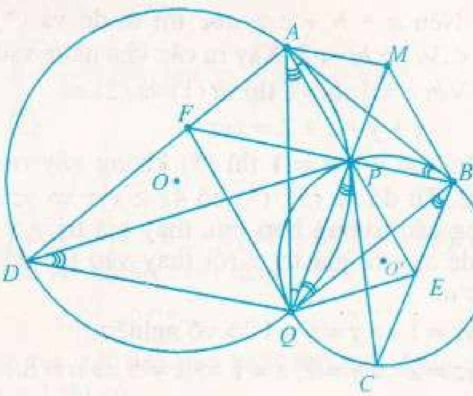
Nhận xét. Hầu hết các bạn giải đúng và sử dụng hai BĐT nêu trên. Đáng tiếc, một số bạn chưa chỉ ra giá trị của x hoặc chưa chỉ ra điều kiện để xác định x mà tại đó biểu thức lớn nhất. Các bạn sau có lời giải tốt :

Hà Tĩnh : *Vương Bằng Việt*, 7_1, THCS Nam Hà, TX. Hà Tĩnh ; **Phú Thọ :** *Trần Mạnh Trung*, *Nguyễn Hải Nam*, *Nguyễn Văn Hảo*, 9A, THCS Giấy Phong Châu ; **Hải Phòng :** *Phạm Thanh Huyền*, 9A, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo; **Vĩnh Phúc :** *Phạm Huy*, 9C, THCS Tam Dương, *Đỗ Hoàng Tùng*, 8E, THCS Vĩnh Yên ; **Nam Định :** *Ngô Thanh Long*, 9A, THCS Nghĩa Hưng, *Nguyễn Văn Đỉnh*, 12I, THPT Giao Thủy A ; **Thanh Hóa :** *Cao Trường Quân*, 9B, THCS Bút Sơn, Hoằng Hóa, *Lê Xuân Thống Nhất*, *Lê Hữu Tuấn*, *Lê Ngọc Tuấn*, *Nguyễn Quang Huy*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Nguyễn Khắc Cương*, 9C, THCS Thiệu Đô, Thiệu Hóa, *Lê Khắc Trương*, 9D, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, *Hoàng Vũ Hạnh*, 9B, THCS Trần Mai Ninh; **Đắk Lắk:** *Phan Duy Khánh*, 9A7, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuột ; **Tiền Giang :** *Phạm Hồng Nhật*, 9A4, THPT Nguyễn Đình Chiểu, Mỹ Tho.

PHAN DOÃN THOẠI

Bài T6/320. *Hai đường tròn tâm O và tâm O' cắt nhau tại P và Q. Tiếp tuyến chung của chúng gần P tiếp xúc với đường tròn (O) tại A và với đường tròn (O') tại B. Tiếp tuyến của (O) tại P cắt (O') tại C và tiếp tuyến của (O') tại P cắt (O) tại D. Gọi M là điểm đối xứng của P qua điểm giữa của AB. Đường thẳng AP cắt BC tại E và đường thẳng BP cắt AD tại F. Chứng minh rằng AMBEQF là lục giác nội tiếp.*

Lời giải. Do AB là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn nên : $\widehat{PAB} = \widehat{AQP}$, $\widehat{PBA} = \widehat{PQB}$. Suy ra $\widehat{AQB} = \widehat{PAB} + \widehat{PBA} = 180^\circ - \widehat{APB}$.



Mà $\widehat{APB} = \widehat{AMB}$ (vì P đối xứng với M qua trung điểm AB nên $APBM$ là hình bình hành). Do đó $\widehat{AQB} + \widehat{AMB} = 180^\circ$ suy ra tứ giác $AMBQ$ nội tiếp được hay A, M, B, Q là 4 điểm đồng viên (1).

Vì CP là tiếp tuyến của đường tròn tâm O nên $\widehat{PDQ} = \widehat{CPQ}$. Lại có $\widehat{PDQ} = \widehat{QAP}$, $\widehat{QPC} = \widehat{QBC}$ nên $\widehat{QAE} = \widehat{QBE}$ tức 4 điểm Q, A, B, E đồng viên (2).

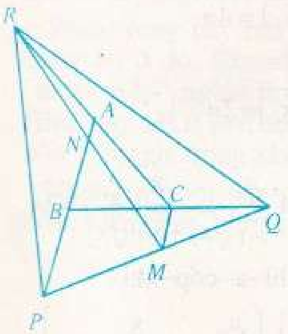
Tương tự có 4 điểm A, F, Q, B đồng viên (3). Vì với 3 điểm không thẳng hàng có 1 đường tròn duy nhất đi qua nên 6 điểm A, M, B, E, Q, F đồng viên (do (1), (2), (3) và vì dễ thấy 3 đường tròn trên là một). Vậy $AMBEQF$ là lục giác nội tiếp.

Nhận xét. 1. Đa số các bạn chỉ chứng minh 3 tứ giác nội tiếp rồi kết luận ngay $AMBEQF$ nội tiếp.

2. Các bạn có lời giải tốt : **Phú Thọ :** *Hoàng Quỳnh Trang*, 9E, THCS Văn Lang, Việt Trì ; **Hà Tây :** *Đặng Văn Thủy*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ ; **Hà Nam :** *Nguyễn Thị Thu Hằng*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên ; **Hải Dương :** *Vũ Đình Quyền*, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách ; **Nam Định :** *Ngô Duy Tiệm*, 9A1, THCS Phùng Chí Kiên, TP Nam Định ; *Phạm Duy Hiệp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Đức Thương*, 9A, THCS Lê Hữu Lộc, Hậu Lộc ; **Nghệ An :** *Tăng Văn Thuận*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Khánh Hòa :** *Đỗ Phú Thịnh*, 9^{12}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Đắk Lắk :** *Võ Văn Tuấn*, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk.

VŨ KIM THỦY

Bài T7/320. *Dựng tam giác ABC biết ba điểm P, Q, R trong đó P là điểm đối xứng của A qua B, Q là điểm đối xứng của B qua C, R là điểm đối xứng của C qua A.*



Lời giải. (Của bạn *Ngô Phan Xuân Thi*, 9A1, THCS Lí Tự Trọng, Tam Kỳ, **Quảng Nam**).

Phân tích. Giả sử đã dựng được tam giác ABC thỏa mãn điều kiện đề bài. Gọi M là trung điểm của PQ, N là giao điểm của RM và AP. Ta thấy :

CM là đường trung bình của ΔBPQ nên $CM \parallel BP \Rightarrow NM = NR$ (vì $AC = AR$) (1)

và $CM = \dfrac{AP}{4}$ (vì $BP = BA$).

Vì M, B, P nằm cùng phía đối với đường thẳng AC nên tia RM cắt đoạn AP tại N. Vì AN là đường trung bình của ΔRCM nên $CM = 2AN$.

Vậy: $\dfrac{1}{4}AP = 2AN \Rightarrow \dfrac{1}{8}AP = AN \Rightarrow \dfrac{1}{7}PN = AN$ (2)

Từ (1), (2) suy ra cách dựng điểm A và từ đó dựng được tam giác ABC.

Cách dựng : Dựng M là trung điểm PQ.

Dựng N là trung điểm RM.

Dựng A thuộc tia đối của tia NP sao cho : $NA = \dfrac{1}{7}NP$.

Dựng B là trung điểm AP.

Dựng C là trung điểm BQ.

Chứng minh : Theo cách dựng $NR = NM$ (3)

$$AN = \frac{1}{8}AP = \frac{1}{4}BP = \frac{1}{2}CM \qquad (4)$$

Từ (3), (4) với chú ý rằng $MC // AN$ ta có : A là trung điểm của CR. Đương nhiên B, C là trung điểm của AP, BQ.

Biện luận : Bài toán có một nghiệm hình duy nhất. Chú ý rằng A, B, C không thẳng hàng $\Leftrightarrow$ P, Q, R không thẳng hàng.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Khá nhiều bạn giải sai. Một số bạn giải quá dài.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Hà Nam :** *Mai Xuân Phong*, 9B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm ; **Thanh Hóa :** *Lê Xuân Thống Nhất*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Lê Minh Hòa*, 9B, THCS Trần Phú, Nông Cống, *Lê Thị Nga*, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Hoàng Đức Ý*, 8E, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa ; **Vĩnh Phúc :** *Phạm Huy*, 9C, THCS Tam Dương, *Đỗ Đình Khang*, 9A, THCS Yên Lạc, **Nam Định :** *Ngô Duy Tiệm*, 9A1, THCS Phùng Chí Kiên, TP. Nam Định ; **Hải Phòng :** *Phùng Thanh Huyền*, 9A, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo ; **Bà Rịa – Vũng Tàu :** *Đinh Ngọc Thái*, 8A8, THCS Vũng Tàu, TP. Vũng Tàu.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T8/320. *Chứng minh các đẳng thức sau với số nguyên dương n :*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} C_n^k . C_{n+k-1}^{k-1} = 1$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}.k^n}{2k-1} C_n^k = \frac{(n!)^2.2^n}{(2n)!}$

Lời giải. (Của bạn *Lương Xuân Bách*, 11 Toán, THPT chuyên **Hưng Yên**)

Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là các hằng số cho trước

$$\text{Xét } F(x) = \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)}{(x+1)(x+2)...(x+n)(2x+1)} \quad (1)$$

Ta biểu diễn $F(x)$ dưới dạng

$$F(x) = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + ... + \frac{a_n}{x+n} + \frac{a_{n+1}}{2x+1} \quad (2)$$

Quy đồng mẫu số và cho x lần lượt các giá trị $x = -1, -2, ..., -n, -\dfrac{1}{2}$ ta thu được :

(với $1 \le k \le n$)

$$a_1 = \frac{(\alpha_1+1)...(\alpha_n+1)(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$a_2 = \frac{(\alpha_1+2)...(\alpha_n+2)(-1)^{n-2}}{1!(n-2)!\,3}$$

...

$$a_k = \frac{(\alpha_1+k)(\alpha_2+k)...(\alpha_n+k)}{(k-1)!(n-k)!}\frac{(-1)^{n-k}}{(2k-1)}$$

và $a_{n+1} = \dfrac{(2\alpha_1+1)...(2\alpha_n+1)(-1)^n}{1.3.5...(2n-1)}$

Đặt $\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n}(x+\alpha_i) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+x)$

Từ (1) và (2) cho $x = 0$ ta được

$$\frac{\varphi(1)(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\varphi(2)}{2!(n-2)!}\frac{(-1)^{n-2}}{3} + ...$$

$$+ \frac{\varphi(n)}{n!}\frac{1}{2n-1} + \frac{(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)...(2\alpha_n+1)(-1)^n}{1.3.5...(2n-1)}$$

$$= \frac{(-1)^n\alpha_1...\alpha_n}{n!} - C_n^1\varphi(1) + \frac{1}{3}C_n^2\varphi(2) - ... +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2n-1}C_n^n\varphi(n) + n!\frac{(2\alpha_1+1)...(2\alpha_n+1)}{1.3.5...(2n-1)}$$

$$= \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \qquad (3)$$

a) Ở (3) cho $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, ..., $\alpha_n = n-1$ ta thu được

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1}C_n^k C_{n+k-1}^{k-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{đẳng thức a)}$$

(chú ý rằng $\varphi(k) = C_{n+k-1}^{k-1}$)

b) Ở (3) cho $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ ta thu được

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1}k^n C_n^k + \frac{n!}{1.3.5...(2n-1)} = 0$$

Vì $\dfrac{n!}{1.3.5...(2n-1)} = \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$ nên ta thu được đẳng thức b).

Nhận xét. Bài này có ít bạn tham gia giải. Tất cả các bạn gửi bài giải đến đều làm đúng. Các bạn có lời giải tốt là : *Trần Hữu Hiếu*, 11A, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, **Phú Thọ** ; *Lê Công Tuyển*, 10A1, THPT ch. **Vĩnh Phúc** ; *Trần Quốc Ngân*, 11CT, THPT Lê Hồng Phong, **TP. HCM**, *Nguyễn Minh Trường*, 11T,THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng** ; *Đỗ Hoàng Khiêm*, 11A1, ĐHSP **Hà Nội**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/320. *Giải hệ phương trình n ẩn sau với số nguyên dương n :*

$$\begin{cases}\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_n} = n \\ \sqrt{x_1+8} + \sqrt{x_2+8} + ... + \sqrt{x_n+8} = 3n\end{cases}$$

Hãy tổng quát hóa bài toán.

Lời giải. Điều kiện của hệ phương trình (HPT) là $x_i \geq 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

Cách 1. Nhận xét : Với mọi $x \in R$, $x \geq 0$, $3\sqrt{x+8} \geq \sqrt{x} + 8$.

Thật vậy $9(x+8) - \left(\sqrt{x}+8\right)^2 = 8\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Áp dụng vào bài toán :

$3\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i+8} \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}+8\right)$. Nhưng ta thấy cả hai vế đều bằng $9.n$. Do đó $x_1 = x_2 = ... x_n = 1$ là nghiệm duy nhất của HPT.

Cách 2. HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i+8} + \sqrt{x_i}\right) = 4n \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i+8} - \sqrt{x_i}\right) = 2n\end{cases}$$

PT sau tương đương với $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{8}{\sqrt{x_i+8}+\sqrt{x_i}} = 2n$

Nhưng theo BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki

$$8n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i+8}+\sqrt{x_i}\right)\right).\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{8}{\sqrt{x_i+8}+\sqrt{x_i}}\right)$$

$$\geq \left(2\sqrt{2}.n\right)^2 = 8n^2.$$

Do đó : $\sqrt{x_1+8} + \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2+8} + \sqrt{x_2} = ... = \sqrt{x_n+8} + \sqrt{x_n}$.

Chú ý nếu $y > x \geq 0$ thì $\sqrt{y+8} + \sqrt{y} > \sqrt{x+8} + \sqrt{x}$.

Bởi vậy $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Một số bạn giải theo cách thứ ba : dựa vào tính chất "đối với mọi đường gấp khúc $A_0A_1A_2...A_n$:

$$A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n \geq A_0A_n.$$

Giải tương tự như hai cách trên ta có kết quả tổng quát sau :

Hệ phương trình $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} = n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i + b^2 - 1} = b.n \end{cases}$ (1)

trong đó $n \in N^*$, $b \in R$, $b > 1$, *có nghiệm duy nhất* $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$".

Nhận xét. 1) Trong nhiều trường hợp để giải một HPT có số ẩn số nhiều hơn số phương trình ta đi tìm một BĐT tương ứng nào đó sao cho đẳng thức xảy ra thì HPT nghiệm đúng. Ví dụ : nếu m là số tự nhiên chẵn, $m \geq 4$ và α, a, b là các số thực dương thỏa mãn $\alpha\sqrt[m]{x+a} \geq \sqrt[m]{x}+b$ với mọi $x \in R$, $x \geq 0$, và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = u$, thì HPT $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt[m]{x_i} = \sqrt[m]{u}.n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt[m]{x_i + a} = \sqrt[m]{u+a}.n \end{cases}$

có nghiệm duy nhất $x_1 = x_2 = ... = x_n = u$.

2) Rất nhiều bạn học sinh đưa ra HPT tổng quát dạng :

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i + a} = p.n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i + c} = q.n \end{cases}$$

trong đó $a, c, p, q \in R$, $p > q > 0$, $a - c = p^2 - q^2$.

Nếu ta đổi tham số $t_i = \dfrac{x_i + c}{q^2}$, $b = \dfrac{p}{q}$ thì HPT (2) sẽ trở về HPT (1) $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{t_i} = n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{t_i + b^2 - 1} = bn \end{cases}$

3) Tòa soạn nhận được lời giải của gần 200 bạn. Đa số các bạn đều giải theo một trong hai cách nêu trên.

Các bạn THCS sau có lời giải tốt :

Vĩnh Phúc : *Phạm Huy*, 9C, THCS Tam Dương, *Đỗ Đình Khang*, *Nguyễn Hữu Kiên*, *Nguyễn Kim Thuật*, 9A, THCS Yên Lạc ; **Hà Tây :** *Đặng VănThùy*, *Trịnh Ngọc Tú*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên ; **Hải Phòng :** *Phạm Thanh Huyền*, 9A, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Thanh Hóa :** *Lê Thị Hạnh*, 7A5, THCS Quang Trung, *Trịnh VănVương*, 9B, THCS Điện Biên, *Hoàng Thu Hiền*, *Lê Văn Hoàn*, *Nguyễn Quang Huy*, *Lê Xuân Thống Nhất*, *Lê Ngọc Tuấn*, *Lê Viết Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ ; **Nghệ An :** *Trịnh Văn* Nam, 9C, THCS Cao Xuân Huy ; **TP Hồ Chí Minh:** *Lê Đức Lợi*, 8^1, THCS Hồng Bàng; **Đắk Lắk:** *Phan Duy Khánh*, 9A7, THCS Trần Hưng Đạo.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/320. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số*

$$f(x) = \sqrt{2}\sin x + \sqrt{15 - 10\sqrt{2}\cos x}$$

Lời giải. *Cách 1.* (của đa số các bạn)

Nhận xét rằng hàm số đã cho xác định trên toàn trục thực R và

$$f(x) = \sqrt{2}\sin x + \sqrt{5}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos x}$$

Tiếp theo, áp dụng BĐT Bu–nhi–a–cốp–xki cho hai bộ số $\left(1, \sqrt{5}\right)$ và $\left(\sqrt{2}\sin x, \sqrt{3-2\sqrt{2}\cos x}\right)$, ta thu được :

$[f(x)]^2 \leq (1+5)(2\sin^2 x + 3 - 2\sqrt{2}\cos x) = 6\left[6 - \left(\sqrt{2}\cos x + 1\right)^2\right] \leq 6^2$. Do đó $f(x) \leq 6$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x + 1 = 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}\sin x}{1} = \dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos x}}{\sqrt{5}} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

hay $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in Z)$

Cách 2. (*Cao Thị Tình*, 11A2 Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội và của nhiều bạn)

Đặt $\sqrt{2}\cos x = t$ thì $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ và $|\sqrt{2}\sin x| = \sqrt{2 - t^2}$.

Dễ thấy, để xác định giá trị lớn nhất của $f(x)$ chỉ cần xét các giá trị x để $\sin x \geq 0$. Khi đó, xét hàm số $g(t) = \sqrt{2-t^2} + \sqrt{15-10t}$.

Khi đó $g'(t) = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}} - \dfrac{5}{\sqrt{15-10t}}$

$g'(t) = 0$ khi $\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{15-10t}}$

hay $\begin{cases} t < 0, t \neq \pm\sqrt{2}, t \neq \dfrac{15}{10} \\ t\sqrt{15-10t} = -5\sqrt{2-t^2} \end{cases} \Leftrightarrow t = -1.$

Ta thấy $g'(t) > 0$ khi $t \in \left(-\sqrt{2}, -1\right)$ và $g'(t) < 0$ khi $t \in \left(-1, \sqrt{2}\right)$. Vậy $g(t)$ đạt giá trị lớn nhất (trùng với giá trị cực đại) tại $t = -1$ và $g(-1) = 6$. Suy ra giá trị lớn nhất của $f(x)$ bằng 6 khi $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in Z)$

Nhận xét. Đây là một bài toán không khó nên có rất nhiều bạn tham gia giải và gửi bài đến Tòa soạn. Các bạn đều giải đúng và theo các cách trình bày đã nêu ở trên. Xin nêu tên một số bạn nhỏ tuổi cũng giải đúng bài này :

Hà Nội : *Nguyễn Thị Nga*, 8B, THCS Uy Nỗ, Đông Anh ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Lưu Bách*, 8C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, *Du Minh Lan*, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Lê Viết Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa ; **Phú Thọ :** *Ngô Bảo Linh*, 9A, THCS Văn Lang, TP Việt Trì ; **Vĩnh Phúc :** *Đỗ Mạnh Hùng*, *Nguyễn Hữu Kiên*, *Đỗ Đình Khang*, 9A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/320. *Gọi r và R lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của một tam giác ABC. Gọi p và p' lần lượt là chu vi ΔABC và $\Delta A'B'C'$, trong đó A', B', C' là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh của ΔABC. Chứng minh rằng :* $\frac{r}{R} \le \frac{p'}{p} \le \frac{1}{2}$

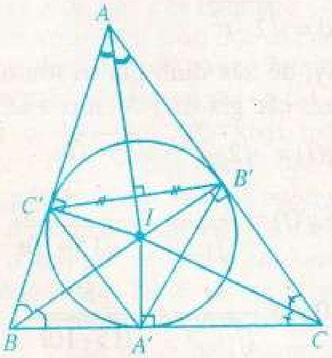
Lời giải. a) Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, ta có

$AC' = AB' = \frac{b+c-a}{2} = \frac{p-2a}{2}$;

$B'C' = 2AB'.\sin(A/2) = (p-2a)\sin(A/2)$;

$A'C' = (p-2b)\sin(B/2)$; $A'B' = (p-2c)\sin(C/2)$.

Sử dụng định lí hàm số côsin cho ΔABC ; công thức $\cos A = 1 - 2\sin^2(A/2)$; đồng thời áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta được :



$$\sin(A/2) = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{(p-2b)(p-2c)}{4bc}}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{p-2b}{2b} + \frac{p-2c}{2c}\right)$$

Từ đó : $B'C' + C'A' + A'B' \le$

$$\le \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p-2b}{2b} + \frac{p-2c}{2c}\right)(p-2a) + \left(\frac{p-2c}{2c} + \frac{p-2a}{2a}\right)(p-2b) + \left(\frac{p-2a}{2a} + \frac{p-2b}{2b}\right)(p-2c)\right]$$

$$\Leftrightarrow p' \le p/2 \Leftrightarrow \left(\frac{p'}{p}\right) \le \frac{1}{2} \quad (1)$$

b) Mặt khác : $B'C'^2 = 2r^2 - 2r^2.\cos\widehat{B'IC'} = 2r^2(1 + \cos A) = 4r^2.\cos^2\frac{A}{2}$ (2). Sử dụng BĐT $\frac{1}{2}(\sin x + \sin y) \le \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$ với mọi $x \in (0, \pi)$ ta thu được

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a+b+c}{2R} \le \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow p \le 2R\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right).$$

Từ (2) suy ra :

$$\frac{p.r}{R} \le 2r\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) = B'C' + C'A' + A'B' = p'.$$

Do đó : $\frac{p'}{p} \ge \frac{r}{R}$ (3). Từ (1), (3) suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức ở (1) hay (3) xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Nhận xét. 1) Để chứng minh các BĐT ở bài ra, một số bạn đã giải bằng cách sử dụng định lí *L. Euler* :

$S_{A'B'C'} = \frac{1}{4}S_{ABC}\left(1 - \frac{OI^2}{R^2}\right)$; $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC), trên cơ sở của cách giải đó hai bạn *Lưu Đức Minh*, 11K2, THPT Lam Sơn, *Lưu Bá Tâm*, 11B10, THPT Hậu Lộc II, **Thanh Hóa** đã đề xuất, giải đúng bài toán sau : *Cho ΔABC với R, r là các bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp. M là một điểm bất kì trong tam giác đó ; A', B', C' là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến các cạnh BC, CA, AB ; p và p' lần lượt là chu vi ΔABC và $\Delta A'B'C'$. Khi đó ta cũng có BĐT : $p'/p \ge r/R$.*

2) Tất cả các lời giải gửi về tòa soạn đều đúng. Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả :

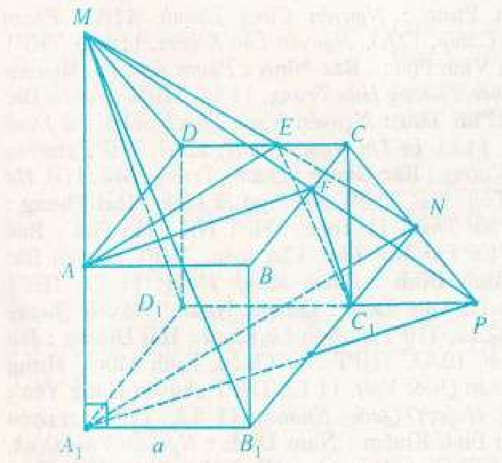
Hà Nội : *Lê Hùng Việt Bảo*, 12A, *Nguyễn Trường Giang*, *Nguyễn Trọng Nhật Quang*, 10A1, *Từ Đức Tâm*, 10A2 Tin, *Cao Thị Tĩnh*, 11A2, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, *Lương Đức Tiến*, 10A2, *Đỗ Hoàng Khiêm*, 11A1, PTCTT–ĐHSP Hà Nội, *Đào Anh Tú*, 10T2, THPT Hà Nội – Amsterdam ; **Bắc Giang :** *Nguyễn Tuyết Mai*, 12A, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Vĩnh Phúc :** *Bùi Hữu Đức*, 11A1, THPT ch Vĩnh Phúc ; **Hưng Yên :** *Nguyễn Hữu Thiện*, 10T, THPT ch. Hưng Yên ; **Hải Phòng :** *Lê Trung Sơn*, 10T, THPT NK Trần Phú ; *Phạm Thế Thính*, 12A1, THPT Kinh Môn ; **Điện Biên :** *Đỗ Phương Thúy*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn ; **Nam Định :** *Lê Văn Hoan*, 8B, THCS Yên Thành, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** *Lê Ngọc Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, *Lê Thị Hạnh*, 7A5, THCS Quang Trung ; **Nghệ An :** *Nguyễn Trọng Hoàng*, 10A1, PTCTT – ĐH Vinh, *Nguyễn Tường Anh*, 10A1, *Nguyễn Ngọc Cường*, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Đinh*

Quỳnh Nga, 10A2, THPT Nghi Lộc I, *Trần Xuân Tùng*, 10A12, THPT Diễn Châu II, Diễn Châu ; **Hà Tĩnh :** *Hoàng Thanh Hà*, 10 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Thừa Thiên – Huế :** *Nguyễn Tuấn Minh*, 10/5, trường Quốc học – Huế ; **Đà Nẵng :** *Thái Thanh Hải*, 11A1, THPT ch. Lê Quý Đôn ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 8/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Đồng Nai:** *Nguyễn Trung Thảo*, 10A3, THPT chuyên Lương Thế Vinh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Tuấn Tú*, 10CT, THPT Lê Hồng Phong, *Cao Hoàng Tân*, 12A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Q. 1.

HỒ QUANG VINH

Bài T12/320. *Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh $AB = a$. Qua điểm E trên cạnh CD (E khác C, D) dựng đường thẳng cắt các đường thẳng AA_1 và B_1C_1 tại M và N theo thứ tự. Qua điểm M dựng đường thẳng cắt các đường thẳng BC và C_1D_1 lần lượt tại F và P. Hãy xác định vị trí điểm E sao cho tam giác MNP có chu vi nhỏ nhất và tính chu vi đó.*

Lời giải. (Dựa theo *Nguyễn Tuyết Mai*, 12A, THPT NK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**).



Vị trí của điểm E cần tìm trên cạnh CD của hình lập phương đã cho hoàn toàn được xác định bởi tỉ số $\dfrac{EC}{ED} = x$ ($x > 0$). Ta tính tỉ số này.

Sử dụng tính chất một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song theo hai giao tuyến song song, từ các cặp mặt phẳng song song ADD_1A_1, BCC_1D_1 ; $A_1B_1C_1D_1$, $ABCD$ và ABB_1A_1, DCC_1D_1 ta được: $DM // CN$, $MD_1 // FC_1$, $AE // A_1N$, $AF // A_1P$, $MB_1 // EC_1$.

Từ đó, theo định lí Ta-lét ta được :

$$x = \frac{EC}{ED} = \frac{EN}{EM} = \frac{AA_1}{AM} = \frac{FP}{FM} = \frac{C_1N}{C_1B_1} = \frac{C_1P}{C_1D_1} \quad (1)$$

Lại vì $AA_1 = C_1B_1 = C_1D_1 = a$, thay vào (1), ta được :

$$x = \frac{a}{AM} = \frac{C_1N}{a} = \frac{C_1P}{a} ; \quad (2)$$

Từ (2) ta được các hệ thức sau :

$$AM = \frac{a}{x} ; C_1N = C_1P = ax \quad (3)$$

Nhận xét thêm rằng, với mọi vị trí của E trên đoạn CD và nói chung, với điểm E bất kì thuộc đường thẳng CD ta luôn có :

$$AM.C_1N = AM.C_1P = a^2 \text{ (không đổi)} \quad (4)$$

Ngoài ra, trong mặt phẳng $A_1B_1C_1D_1$ ta có : $\Delta A_1C_1N = \Delta A_1C_1P$ (c.g.c) nên ta được : $A_1N = A_1P$; suy ra : $MN = MP$ (5)

Tam giác C_1NP vuông cân ở C_1 nên ta được :

$$NP = \sqrt{C_1N^2 + C_1P^2} = ax\sqrt{2} \quad (6)$$

Vì E thuộc đoạn CD, $AE // A_1N$, nên N thuộc tia đối của tia C_1B_1, M thuộc tia đối của tia AA_1 và $MD_1 // FC_1$ nên ta suy ra F thuộc đoạn BC và P thuộc tia đối của tia C_1D_1.

Theo định lí Pitago, ta được :

$$MP^2 = MA_1^2 + A_1P^2 =$$
$$= (AA_1 + AM)^2 + (A_1D_1^2 + D_1P^2)$$
$$= A_1D_1^2 + (AA_1 + AM)^2 + (D_1C_1 + C_1P)^2$$

Thay $AA_1 = D_1C_1 = a$ và đối chiếu với (3), ta được :

$$MP^2 = a^2 + \left(a + \frac{a}{x}\right)^2 + (a + ax)^2 = a^2\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^2$$

Sau đó, đối chiếu với (5), ta được :

$$MN = MP = a\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) \quad (7)$$

Cuối cùng, từ (6) và (7) ta được biểu thức của chu vi $p(x)$ của tam giác MNP (tính theo a và x):

$$p(x) = ax\sqrt{2} + 2a\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= a\left[(2+\sqrt{2})x + \frac{2}{x} + 2\right] \quad (8)$$

Áp dụng BĐT về trung bình cộng và trung bình nhân, ta được :

$$p(x) \geq 2a\left(1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\right) \quad (9)$$

Đẳng thức xảy ra ở (9) khi và chỉ khi :

$(2+\sqrt{2})x=\dfrac{2}{x}>0 \Leftrightarrow x=\dfrac{EC}{ED}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

Vậy chu vi nhỏ nhất của ΔMNP là $2a\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)$.

Chú thích : Ta có thể dựng các điểm N, M và F, P theo trình tự sau :

– Nối AE rồi trong mp$(A_1B_1C_1D_1)$ qua A_1 dựng đường thẳng song song với AE cắt đường thẳng B_1C_1 ở N. Sau đó, trong mặt phẳng (EAA_1N) dựng giao điểm M của AA_1 và EN

– Trong mặt phẳng(BCC_1B_1) qua C_1 dựng đường thẳng song song với MD_1, cắt BC tại F, sau đó trong mp(C_1D_1MF) dựng giao điểm P của C_1D_1 và MF.

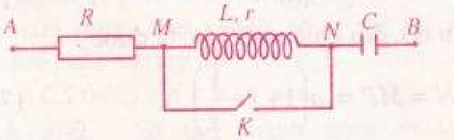
Nhận xét. 1) Số các bạn tham gia giải bài toán này không nhiều. Đáng tiếc chỉ có 55% số các bạn cho lời giải đúng. Đa số các bạn lao vào tính toán quá dài dòng hoặc còn phải khảo sát hàm số, trong khi chỉ cần sử dụng BĐT về trung bình cộng và trung bình nhân của hai số dương.

Nhiều bạn trình bày lời giải thiếu chặt chẽ về cơ sở lập luận của việc xác định các giao điểm của hai đường thẳng trong không gian.

2) Ngoài bạn *Nguyễn Tuyết Mai*, các bạn sau đây cho lời giải tốt, không những cho đáp số đúng mà lời giải gọn gàng sáng sủa hơn cả. **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thọ Khiêm*, 11A10, THPT ch. Vĩnh Phúc, TX. Vĩnh Yên ; **Phú Thọ :** *Lê Bá Long*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; **Hải Dương :** *Nguyễn Anh Tuấn*, 10 Toán, THPT Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương ; **Thanh Hóa :** *Trần Văn Thiện*, 12C5, THPT Như Thanh ; **Nghệ An :** *Phạm Xuân Khoa*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/320. *Cho mạch điện như hình vẽ :*



$u_{AB}=180\sqrt{2}\sin\omega t$ (V), $L=0{,}4$(H). Khi khóa K đóng và khi K mở biểu thức của dòng điện lần lượt là : $i_d=2\sqrt{2}\sin(\omega t+\pi/3)$ (A),

$i_m=2\sqrt{6}\sin(\omega t-\pi/6)$ (A)

1) Chứng minh rằng $r=0$.

2) Xác định R, Z_L, Z_C.

3) Xác định chu kì của dòng xoay chiều.

Lời giải. 1) Khi K đóng :

$Z_{AB}=\dfrac{U_{AB}}{I}=Z_{RC}=90(\Omega)$;

$R=Z_{AB}\cos\varphi=90\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=45(\Omega)$ (1)

Khi K mở : $Z_{AB}=\dfrac{U_{AB}}{I}=30\sqrt{3}\ (\Omega)$

$\Rightarrow R+r=Z_{AB}\cos\varphi=45(\Omega)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phải có $r=0$.

2) Khi K đóng, theo trên $Z_{AB}=Z_{RC}=90\ (\Omega)$, mà $R=45\Omega$ nên tìm được :

$Z_C=\sqrt{Z_{RC}^2-R^2}=45\sqrt{3}\ (\Omega)$

Khi K mở: $\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{Z_L-Z_C}{R}=\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow Z_L-Z_C=15\sqrt{3}$

$\Rightarrow Z_L=15\sqrt{3}+Z_C=60\sqrt{3}\ (\Omega)$

3) Ta có : $\omega=\dfrac{Z_L}{L}=\dfrac{60\sqrt{3}}{0{,}4}$(rad/s)

$\Rightarrow T=\dfrac{2\pi}{\omega}\approx 0{,}024$ (s).

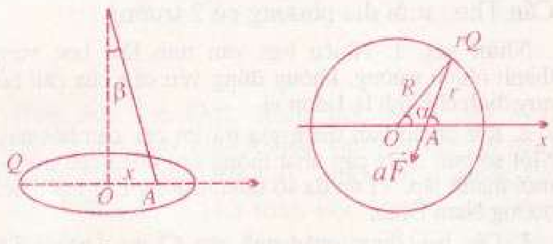
Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đáp số đúng :

Vĩnh Phúc : *Nguyễn Công Thành*, 11A3, *Phạm Quang Chiến*, 12A1, *Nguyễn Thọ Khiêm*, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Bắc Ninh :** *Phạm Anh Tú*, *Nguyễn Việt Hoài*, *Trương Hữu Trung*, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Ngọc Thạch*, 11B, *Vũ Đình Quang*, 11 Lí, *Lê Thị Ngọc Chung*, 12A1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Bắc Giang :** *Dương Trung Hiếu*, 11B, *Hồ Năng Tân*, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Hải Phòng :** *Trần Tiến Thức*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú ; **Bắc Kạn :** *Vũ Thị Mai Thư*, 12A toán, THPT chuyên Bắc Kạn; **Bình Định :** *Phạm Mạnh Hùng*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi :** *Huỳnh Quang Hiếu*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết ; **Hải Dương :** *Bùi Thị Thái*, 10A3, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn ; **Hưng Yên** *Trần Quốc Việt*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên ; *Trương Huỳnh Quốc Khánh*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Nam Định :** *Nguyễn Văn Đỉnh*, 12I, THPT Giao Thủy A ; **Hà Nội :** *Phạm Việt Đức*, 11A, THPT chuyên Lí, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Nghệ An :** *Nguyễn Văn Sinh*, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu ; **Tiền Giang :** *Trương Huỳnh Thanh Trúc*, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang ; **TP. Hồ Chí Minh:** *Hoàng Nguyễn Anh Tuấn*, 11 Lí, PTNK, ĐHQG TP. HCM ; **Đak Lăk :** *Nguyễn Chí Linh*, 11A, THPT Phan Bội Châu, Krông Năng.

MAI ANH

Bài L2/320. *Một điện tích điểm q, khối lượng m được treo vào một điểm cố định qua một sợi dây nhẹ, không giãn và cách điện, chiều dài l. Ở vị trí cân bằng, điện tích q nằm ở tâm của một vòng tròn tích điện đều với điện tích Q cùng dấu với q. Vòng cố định nằm ngang và có bán kính R. Tìm chu kì dao động nhỏ của q.*

Lời giải. Chọn trục OA như hình vẽ. Xét điện tích q ở vị trí có li độ x ($x = OA \ll R$). Dây treo lệch góc β so với phương thẳng đứng. Lực tĩnh điện do phần tử $dQ = \frac{Q}{2\pi}d\alpha$ tác dụng lên điện tích q là :



$dF = k\frac{qdQ}{r^2}$. Do $x \ll R$ nên $\alpha \approx \varphi$ và $d\alpha \approx d\varphi$. Từ đó :

$$dF = \frac{kqQ}{2\pi}\frac{d\alpha}{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\alpha} \approx \frac{kqQ}{2\pi}\frac{d\varphi}{R^2 - 2Rx\cos\varphi}$$

$$\Rightarrow dF \approx \frac{kQq}{2\pi R^2}\left(1 + \frac{2x}{R}\cos\varphi\right), \text{ và } dF_x = -dF\cos\varphi$$

Lực điện tổng hợp tác dụng lên q theo phương OA là : $F_x = \int_0^{2\pi} dF_x = -k\frac{Qq}{R^3}x$. Như vậy ta có :

$$mx'' = -\left(mg\sin\beta + \frac{kQq}{R^3}x\right) = -\left(mg\frac{x}{l} + \frac{kQq}{R^3}x\right)$$

$\Rightarrow x'' + \left(\frac{g}{l} + \frac{kQq}{mR^3}\right)x = 0$. Điện tích q dao động điều hòa với chu kì :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{kQq}{mR^3}}}.$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng :

Bắc Ninh : *Chu Thanh Bình*, Lí 12, *Trần Văn Hòa*, Lí 11, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Hà Tĩnh :** *Lê Quốc Hương*, 11 Lí, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Đăk Lăk :** *Lưu Xuân Bách*, 12 Lí, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột ; **Hà Nội :** *Trần Tuấn Anh*, 10A Lí, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội.

MAI ANH

X hỏi ? Y, Z trả lời.

HỎI – SỐ NÀY

1.(6.04). Khi cạnh AB và CD song song và bằng nhau ta có thể kí hiệu $AB \overset{//}{=} CD$ được không ?

(TVD lớp 10A10, THPT Bình Xuyên, Vĩnh Phúc)

2. (6.04). Trong một bài toán chứng minh bất đẳng thức hình học có luôn phải xác định khi nào dấu đẳng thức xảy ra không ?

(Thảo Nguyên, Hà Nam)

TRẢ LỜI – NHỮNG SỐ TRƯỚC

1. (4.04). $-1 = (-1)^{2\times\frac{1}{2}}$ là sai, bởi vì $(-1)^{2\times\frac{1}{2}} = (\sqrt{-1})^2$ không có nghĩa vì không có căn bậc chẵn cho số âm. Cái sai ở đây là áp dụng lũy thừa với số mũ hữu tỉ cho cơ số âm. Các đẳng thức đúng là

$$\left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

(Phùng Văn Đông, 9E, THCS Bình Minh, Hải Dương)

Ta có $-1 = (-1)^{2\times\frac{1}{2}}$ nhưng $(-1)^{2\times\frac{1}{2}} \neq \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

vì ta có $a^{m\times n} = \left(a^m\right)^n$ khi và chỉ khi $a \in R^*$ và $m, n \in Z$. Ở đây $n = \frac{1}{2} \notin Z$

(Bùi Ngọc Hà, 11A1, THPT Tống Văn Trân, Ý Yên, Nam Định)

2. (4.04).

- Nếu đang tìm thiết diện của (α) với tứ diện thì tất nhiên không xét M và N trùng với A và B.

- Nếu cho một điểm nằm trên cạnh của một tam giác thì phải xét nó trùng với hai đầu mút.

(Lương Như Quỳnh, 11A1, THPT Hàm Thuận Nam, Bình Thuận)

- Thông thường ta không cần xét trường hợp M và N trùng với A và B, hay không cần xét trường hợp 1 điểm nằm trên cạnh tam giác trùng với 2 đầu mút. Ta chỉ xét trường hợp này khi giải các bài toán quỹ tích.

(Đỗ Xuân Chi, 11A4, THPT Xuân Đỉnh, Từ Liêm, Hà Nội).

VKT

Giải đáp số 322

BAO NHIÊU ? Ở ĐÂU ?

1. Nước ta có 108 trường đại học, học viện (Đại học Quốc gia, Đại học khu vực tính là 1 đơn vị, trường có cả ở Hà Nội và Tp. HCM tính là 2 đơn vị ; không kể các trường sĩ quan trong số này).

2. Những tỉnh, thành có đặt các trường đại học, học viện là : Hà Nội, TP Hồ Chí Minh, Hà Tây, Đà Nẵng, Hải Phòng, Nam Định, Thừa Thiên - Huế, Khánh Hòa, Cần Thơ, Vĩnh Phúc, Thái Nguyên, Bắc Ninh, Hưng Yên, Thái Bình, Phú Thọ, Sơn La, Thanh Hóa, Nghệ An, Bình Định, Lâm Đồng, Đắk Lắk, Đồng Nai, Bình Dương, An Giang, Đồng Tháp, Cửu Long (26 địa phương).

3. Những tỉnh, thành có từ 2 Đại học, Học viện trở lên :

Hà Nội :	42
TP Hồ Chí Minh	26
Hà Tây	6
Đà Nẵng	5
Hải Phòng	4

Nam Định, Thừa Thiên - Huế, Khánh Hòa, Cần Thơ : mỗi địa phương có 2 trường.

Nhận xét. 1. Nhiều bạn vẫn tính Đại học vùng thành nhiều trường, không đúng yêu cầu của câu hỏi quy định chỉ tính là 1 đơn vị.

2. Rất nhiều bạn tham gia trả lời các câu hỏi này. Một số bạn chưa cập nhật thông tin, thiếu các trường mới thành lập. Ví dụ đa số thiếu trường Đại học Điều dưỡng Nam Định.

3. Các bạn được nhận quà của CLB : *Dương Thị Thanh Hải*, 10A6, THPT Tân Yên I, **Bắc Giang** ; *Trần Thu Hương*, số nhà 134, tiểu khu 12, TT Lương Sơn, **Hòa Bình**; *Nguyễn Văn Hoạt*, 11A10, THPT Lê Xoay, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc** ; *Đinh Thị Thu Thủy*, Nội Hoàng, Yên Minh, Ý Yên, **Nam Định** ; *Lê Minh Hằng*, 11A28, THPT Lê Quý Đôn, Hà Đông, **Hà Tây** ; *Lê Hiệp*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, **Hà Nội** ; *Trần Thị Hoài Phương*, 12L, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, *Bùi Thị Kim Khoa*, 71/56A, đường Trưng Trắc, khu 4, TT Trà Ôn, **Vĩnh Long**.

VŨ ĐỖ QUAN

DU LỊCH HÈ

Tờ báo này đến tay các bạn khi hầu hết các kì thi đã xong. Chỉ còn các bạn lớp 12 đang chuẩn bị cho kì thi vào Đại học, Cao đẳng và các trường nghề. Sau đó sẽ là kì nghỉ hè thú vị. Bạn sẽ đi tắm biển, đi rừng hay đến những nơi danh lam thắng cảnh lí thú nào ? Đồng bằng và trung du Bắc Bộ vốn là một trong những nơi đậm đặc di tích lịch sử và danh thắng. Bạn hãy tìm trong ô chữ này các địa danh đó nhé.

VŨ THANH THÀNH

N	G	U	Đ	O	N	G	T	H	I	S	O	N					
		N	H	A	T	H	O	Đ	A	P	H	A	T	D	I	E	M
	P		T	N	U	I	C	O	N	S	O	N	B				
C	H	U	A	D	A	U	C	H	U	A	T	H	A	Y			
T	U	C	M	A	C	P	H	U	G	I	A	Y	V	C			
	N		Đ	E	N	V	A				Y		I	O			
	H		A			B	I	C	H	Đ	O	N	G	N			
	A	Đ	O	S	O	N	T	A	M	C	O	C		L			
K	I	E	P	B	A	C	H	U	A	T	H	A	P	U			
	T	C	H	U	A	M	I	A	T	H	A	C	Đ	A			
	H				Đ	E	N	S	O	C	O	L	O	A			
B	A	Đ	A			C	H	U	A	K	E	O					
I	P		Q	U	A	T	L	A	M	B	A	L	A	T			
A	B	C	H	U	A	C	O	L	E	H	O	A	L	U			
B	U				Đ	E	N	T	R	A	N						
A	T		H	U	O	N	G	T	I	C	H						

Giải đáp bài :

CÁCH GIẢI HAY ?

(THTT số 322, tháng 4 năm 2004)

Trước hết ta nhớ lại một kết quả đúng sau : *Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B và đường thẳng (d) đi qua C. Khi đó :*

a) Nếu A, B cùng phía so với (d) thì CA + CB đạt giá trị nhỏ nhất (GTNN) khi C là giao điểm của AB_1 với đường thẳng (d) (trong đó B_1 là giao điểm đối xứng với B qua d), lúc đó $CA + CB = AB_1$.

b) Nếu A, B khác phía nhau so với (d) thì CA + CB đạt GTNN khi C là giao điểm của AB với (d), lúc đó CA + CB = AB.

• *Phân tích sai lầm :* Trong lời giải đề xuất, đã chọn $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ là hai điểm cùng phía so với trục hoành. Đoạn AB không cắt trục Ox, từ đó đẳng thức ở BĐT $CA + CB \geq AB$ không xảy ra (không tồn tại điểm $C_o \in Ox$ sao cho $C_oA + C_oB = AB$), nghĩa là $CA + CB > AB$. Vậy việc kết luận GTNN của hàm $f(x)$ bằng $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$ là sai lầm.

• *Khắc phục sai lầm :* Xét hệ trục tọa độ Oxy, trên đó chọn $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ và $C\,(x, 0)$. Ta có $f(x) = CA + CB_1 \geq AB_1$ (trong đó $AB_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$) nên $f(x) \geq \sqrt{2}$ $(\forall x \in R)$. Đẳng thức xảy ra khi $x = \sqrt{3}-1$. Do đó GTNN của hàm số đã cho là $\sqrt{2}$ đạt được khi $x = \sqrt{3} - 1$.

Nhận xét. Những bạn sau có đáp án tốt hơn cả : *Hoàng Văn Tuyển*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh** ; *Cao Xuân Nam*, GV THPT chuyên Hà Giang, **Hà Giang** ; *Vũ Hồng Toản*, 10A, khối chuyên Lý, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội** , *Đỗ Văn Bảo*, SVK47, khoa Toán – Cơ – Tin, ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội** ; *Lê Văn Lương*, 10T, THPT Hà Huy Tập, TP. Vinh, **Nghệ An** (TS xin hoan nghênh bạn *Bảo* đã đưa ra một số phương án để giải bài toán sau: "Tìm GTNN của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+ax+b}+\sqrt{x^2+cx+d}$ với điều kiện $a^2 - 4b < 0$ và $c^2 - 4d < 0$"

NGỌC HIỂN

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG KHÓ !

Trong giờ luyện tập giải PT lượng giác :

$$\sin x + \cos x = \mathrm{tg}x(1 + \sin x) - 1 \quad (1)$$

Một học sinh trong lớp đề xuất một lời giải chỉ sau 5 phút :

ĐK : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \ (k \in Z)$

Đặt $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{tg}x = \frac{2t}{1-t^2}$. PT (1) trở thành :

$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t}{1-t^2}\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)-1 \text{ (ĐK } t \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow (2t + 1 - t^2)(1 - t^2) = 2t(1 + t^2 + 2t) - (1 - t^4)$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 + 3t^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 1)^2(2t - 1) = 0$$

$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$ (nghiệm $t = -1$ loại), khi đó

$\mathrm{tg}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \mathrm{tg}\alpha$ (đặt $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$)

$\Rightarrow x = 2\alpha + 2m\pi \ (m \in Z)$.

Bạn nhận xét như thế nào về lời giải của học sinh đó ? Bạn giải như thế nào ?

NGUYỄN ĐỨC ĐIỆP

(GV THPT Kinh Môn, Hải Dương)

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

NĂM THỨ 41
Số 324 (6-2004)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THỤY

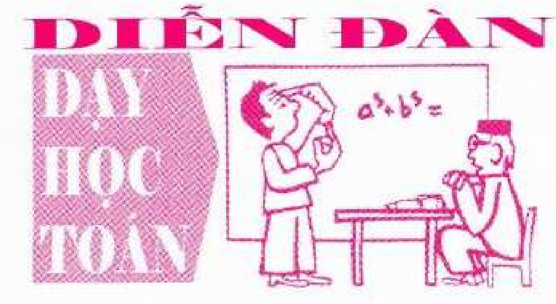
Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI
Biên tập : VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH.
Trị sự : VŨ ANH THƯ
Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 325 (7/2004)

- 30 năm Đoàn học sinh Việt Nam thi Toán Quốc tế.
- Một chân trời mới cho giả thuyết Goldbach.
- Kĩ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cauchy.
- Nghỉ hè trên hành tinh Số nguyên.
- Hướng dẫn giải đề thi học sinh giỏi toán THCS TP Hồ Chí Minh năm 2004.

Mời các bạn đặt mua THTT tại các cơ sở Bưu điện !
Từ tháng 7.2004 giá mỗi số tạp chí là 3500 đồng.

THTT



PGS. TS. Tôn Thân sinh ngày 28 tháng 9 năm 1943 tại Hà Nội, là giáo viên dạy lớp Chuyên Toán đầu tiên của Hà Nội đặt tại trường THCS Trưng Vương. Nhiều học sinh của ông sau này đã đoạt giải cao trong các kì thi Toán Quốc tế và trở thành những nhà toán học.

Được phong danh hiệu Nhà giáo ưu tú năm 1990, bảo vệ Luận án Tiến sĩ tại Viện Khoa học Giáo dục năm 1995 và được công nhận chức danh Phó Giáo sư năm 2002. Hiện là Trưởng phòng Toán - Tin học thuộc Viện Chiến lược và Chương trình Giáo dục, Ủy viên Ban Chấp hành Hội Toán học Hà Nội.

Ông đã viết về tạp chí THTT :

"Tôi là một bạn đọc trung thành của tạp chí Toán học và Tuổi trẻ ngay từ khi tạp chí ra số đầu tiên. Đối với tôi, Tạp chí luôn là người thầy, người bạn gần gũi thân thiết trong suốt cuộc đời dạy toán và học toán. Tôi luôn nghĩ : mỗi thành công của mình trong công tác phát hiện, đào tạo và bồi dưỡng những năng khiếu toán học đều có sự đóng góp không nhỏ của tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Chúc Tạp chí liên tục phát triển, đạt nhiều thành tựu to lớn hơn nữa trong việc thực hiện mục tiêu cao cả của mình".

MỘT SỐ ĐẶC ĐIỂM CỦA SÁCH GIÁO KHOA TOÁN 8

TÔN THÂN

1) Về cấu trúc: Sách Toán 8 được viết thành hai tập. Tập I gồm : *Phần Đại số :* Chương I : Phép nhân và phép chia các đa thức ; Chương II: Phân thức đại số. *Phần Hình học :* Chương I : Tứ giác ; Chương II : Đa giác. Diện tích đa giác.

Tập II gồm : *Phần Đại số :* Chương III : Phương trình bậc nhất một ẩn ; Chương IV : Bất phương trình bậc nhất một ẩn. *Phần Hình học:* Chương III : Tam giác đồng dạng ; Chương IV : Hình lăng trụ đứng. Hình chóp đều.

Mỗi chương được chia thành nhiều mục, mỗi mục được phân phối từ một đến hai tiết. Trong mỗi mục có một số tiểu mục. Các kiến thức cơ bản cần ghi nhớ được đóng khung. Sau mỗi tiết lí thuyết có từ ba đến năm bài tập để học sinh luyện tập vận dụng kiến thức và rèn luyện kĩ năng. Cuối mỗi chương có phần ôn tập chương bao gồm một số câu hỏi ôn tập lí thuyết, một số bảng hệ thống hóa kiến thức và các bài tập ôn.

2) Về nội dung : Sách Toán 8 đảm bảo đầy đủ các kiến thức với yêu cầu, mức độ được quy định trong chương trình môn toán THCS do Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành tại quyết định số 03/2002/QĐ-BGD&ĐT ngày 24 tháng 1 năm 2002. Các nội dung cơ bản của Đại số 8 được giữ không khác sách cũ. Tuy nhiên, sách Toán 8 chú trọng nhiều hơn đến các quy tắc thực hành, các ứng dụng thực tiễn, tạo điều kiện cho học sinh nắm vững và vận dụng tốt các quy tắc, các phương pháp cụ thể, các phép biến đổi các biểu thức hữu tỉ v.v... Các nội dung kiến thức chủ yếu của Hình học 8 là : tứ giác, đa giác, diện tích đa giác, tam giác đồng dạng ; hình lăng trụ đứng ; hình chóp đều. Điểm mới ở đây có định lí về đường trung bình của tam giác được chuyển từ lớp 7 lên ; các hệ thức lượng trong tam giác vuông được chuyển lên lớp 9; cuối lớp 8 có thêm nội dung "hình lăng trụ đứng, hình chóp đều" giúp học sinh nhận biết một số vật thể quen thuộc trong không gian, qua đó dần hình thành một số khái niệm cơ bản của hình học không gian.

Sách Toán 8 chú ý tận dụng các kiến thức đã học ở lớp dưới, ở chương trước để giảm nhẹ việc trình bày các kiến thức ở lớp trên, ở chương sau. Ví dụ : tận dụng kiến thức về phân số ở lớp 6 để giảm nhẹ cách trình bày các kiến thức về phân thức đại số ; tận dụng kiến thức về thứ tự trên tập số ở lớp 7 để giới thiệu về bất đẳng thức ; tận dụng kiến thức về tứ giác ở chương I để trình bày kiến thức về đa giác ở chương II v.v...

(Xem tiếp trang 9)

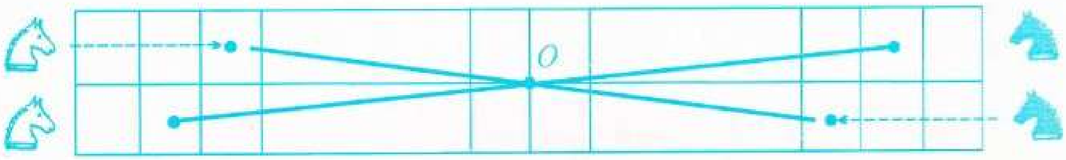
Giải đáp : ĐƯỜNG ĐUA 2004

Vận dụng phép đối xứng tâm trong cách chơi. Mỗi khi ngựa trắng đi bao nhiêu bước ở một làn đường thì ngựa đen sẽ đi đúng bấy nhiêu bước ở làn đường kia. Như vậy vị trí đứng của 4 quân sau khi bên đen đi sẽ tạo thành hình bình hành. Do 2004 là số chẵn nên các đỉnh đối xứng nhau qua tâm hình bình hành trùng tâm O của đường đua. Bởi vậy nếu bên trắng còn đường đi thì ở làn kia bên đen cũng còn đường. Khi kết thúc bên đen đi ô cuối cùng và chiến thắng.

Nhận xét. 1. Nhiều bạn bị cái bẫy mỗi lần chỉ đi từ 1 đến 10 phiến đá nên sa vào tính toán rất dài.

2. Các bạn được nhận quà của chuyên mục này là : *Đào Đức Chính*, 9C, THCS Hoàng Liệt, Q. Hoàng Mai, **Hà Nội** ; *Nguyễn Ngọc Thanh*, 9A, THCS Phong Châu, **Phú Thọ** ; *Lê Đức Thành*, 8A3, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên, **Vĩnh Phúc**; *Hoàng Văn Hùng*, 10A1, THPT Kinh Môn, **Hải Dương** ; *Trần Vũ*, 5/745 Trường Chinh, Phường Hà Long, *Bùi Ngọc Hà*, 11A1, THPT Tống Văn Trân, Ý Yên, **Nam Định** ; *Nguyễn Văn Hải*, 11G, THPT Nghĩa Đàn, **Nghệ An** : *Nguyễn Trác Việt*, 12A1, THPT Quảng Trị, *Võ Thái Thông*, 8/4, trường Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**.

BÌNH NAM HÀ



VẼ BẢN ĐỒ THAM QUAN

Một đảo có 5 thị trấn. Thị trấn *Chợ* ở cực Bắc của đảo. Thị trấn *Êm* ở cực Đông của đảo. Các thị trấn *An*, *Bình*, *Dài* đều nằm trên bờ biển. Chỉ có 2 con đường. Một con đường chạy vòng quanh bờ biển, một con đường cắt ngang đảo nối 2 thị trấn. Bảng bên cạnh chỉ ra khoảng cách ngắn nhất nối giữa 5 thị trấn với nhau (tên thị trấn viết tắt).

Hãy lập bản đồ của đảo.

B	4			
C	7	11		
D	2	3	9	
E	6	7	10	4
	A	B	C	D

THỦY VŨ

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT26M4
Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2004
Giá : 3400 đồng
Ba nghìn bốn trăm đồng