LÊ XUÂN SƠN - ThS.LÊ KHÁNH HƯNG
(…áo viên Trường THPT Chuyên - Đại học Vinh)

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ
TRONG GIẢI TOÁN

LUYỆN THI ĐẠI HỌC

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH
CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT và GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

$f(x \ldots 4 - x)$

$$f'(x) = 2^x\left(\sqrt{x^2+4} - x\right)\left(\ln 2 - \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)$$

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TS. LÊ XUÂN SƠN - ThS.LÊ KHÁNH HƯNG
(Giáo viên Trường THPT Chuyên - Đại học Vinh)

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ
TRONG GIẢI TOÁN

PHƯƠNG TRÌNH,
BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH
CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ
GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39715011
Fax: (04) 39714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc - Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: DUY THẮNG
Sửa bài: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Chế bản: NGUYỄN KHỞI MINH
Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

Đối tác liên kết xuất bản:
Nhà sách HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ TRONG GIẢI TOÁN – PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Mã số: 1L- 81ĐH2014
In 2.000 cuốn, khổ 17 × 24cm tại Công ty SX-TM-DV Vạn An, TP.Hồ Chí Minh.
Giấy phép xuất bản số: 219-2014/CXB/17-38 ĐHQGHN, ngày 12/02/2014
Quyết định xuất bản số: 82LK-TN/QĐ-NXB ĐHQGHN, ngày 24/02/2014
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2014.

Lời nói đầu

Hàm số là một trong những khái niệm cơ bản của toán học, và đóng vai trò trung tâm trong chương trình Toán phổ thông. Hàm số cũng là một trong những nền tảng của nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học nói riêng và khoa học nói chung. Nắm được những vấn đề cơ bản về hàm số và biết vận dụng nó, không những giúp giải quyết được các bài toán có nhiều ràng buộc phức tạp mà còn góp phần quan trọng để rèn luyện phẩm chất tư duy hệ thống, sáng tạo cho người học. Qua đó hình thành cho người học năng lực xử lý linh hoạt, hiệu quả các tình huống của thực tiễn đời sống.

Trong các kỳ thi quan trọng về Toán từ cấp trung học phổ thông (THPT) trở lên ở trong nước cũng như trên thế giới luôn có một hàm lượng đáng kể bài toán về Hàm số. Nói riêng ở Việt Nam, trong các kỳ thi tuyển sinh vào đại học, chọn học sinh giỏi tỉnh, thành phố cấp THPT thì phần lớn các bài toán mang tính phân loại cao đều có thể được giải quyết bằng phương pháp hàm số. Ngoài những bài toán chỉ được giải quyết bằng phương pháp hàm số, còn nhiều bài toán có những cách giải khác nhau trong đó cách sử dụng hàm số nhìn chung là mạch lạc và "nhẹ nhàng" hơn cả.

Hiện nay, thị trường đã có nhiều sách tham khảo về Hàm số cho học sinh. Tuy nhiên chúng tôi hi vọng rằng, cuốn sách "***Phương pháp hàm số trong giải Toán***" là một tài liệu hữu ích cho học sinh, đặc biệt là những học sinh chuẩn bị thi vào đại học, thi học sinh giỏi các cấp với mong muốn đạt điểm cao. Cũng hi vọng rằng, cuốn sách sẽ góp phần giúp cho các thầy, cô giáo đang trực tiếp giảng dạy môn Toán thuận lợi hơn trong công việc của mình.

Nội dung của cuốn sách được trình bày thành ba chương:

Chương 1: Hệ thống phương pháp hàm số trong phương trình và bất phương trình;
Chương 2: Giải quyết các bài toán hệ phương trình; và phần trọng tâm nhất là ở
Chương 3: Trình bày về những dạng toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và chứng minh bất đẳng thức.

Trong từng mục của mỗi chương đều có phần ví dụ được đưa ra từ cơ bản đến phức tạp, phần bài tập và phần hướng dẫn giải bài tập ngay sau để thuận tiện cho việc tham khảo.

Cuốn sách không tránh khỏi những khiếm khuyết. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của Quý độc giả để cuốn sách hoàn thiện hơn trong lần tái bản sau.

CÁC TÁC GIẢ

CHƯƠNG 1
PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1 Phương pháp hàm số

Thông thường khi các phương pháp giải phương trình, bất phương trình như: biến đổi tương đương, đưa về phương trình tích, đặt ẩn phụ, ... gặp khó khăn, chúng ta có thể nghĩ đến sử dụng phương pháp hàm số.

Ta xét bài toán sau

Bài toán 1. Giải phương trình $f(x)=0$, trong đó $f(x)$ có tập xác định D.

Để vận dụng tính đơn điệu của hàm số giải phương trình, ta thường sử dụng các tính chất sau đây:

Trong cuốn sách này chúng ta luôn giả thiết K là một khoảng của $\mathbb{R}$.

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên K thì phương trình $f(x)=0$ có không quá 1 nghiệm trên K.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục và thỏa mãn $f'(x)=0$ có 1 nghiệm trên K thì phương trình $f(x)=0$ có không quá 2 nghiệm trên K. Tổng quát: Nếu $f'(x)$ liên tục và có n nghiệm trên K thì phương trình $f(x)=0$ có không quá $n+1$ nghiệm trên K.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến, hàm $y=g(x)$ nghịch biến trên K thì phương trình $f(x)=g(x)$ có không quá 1 nghiệm trên K.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên K thì phương trình
$$f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v \text{ với } u,v\in K.$$

Bài toán ban đầu có thể thuộc các dạng sau

Dạng 1. Phương trình $f(x)=0$, trong đó chúng ta có thể lập được bảng biến thiên của hàm $y=f(x)$. Dạng 1 này có các trường hợp đặc biệt:

- Hàm $y=f(x)$ đơn điệu trên khoảng D.
- Hàm $y=f(x)$ đơn điệu trên mỗi khoảng $K_i\subset D, \bigcup_{i=1}^{k} K_i=D$ và các khoảng K_i rời nhau.
- Phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow g(x)=h(x)$, trong đó $y=g(x)$ và $y=h(x)$ là các hàm đơn điệu ngược chiều trên D.

Một yêu cầu cần thiết khi giải phương trình Dạng 1 là chúng ta chỉ ra tính đơn điệu của $f(x)$ trên các khoảng $K\subset D$, rồi nhẩm tìm được nghiệm của phương trình trên K (nếu có), sau đó sử dụng các tính chất đã trình bày về hàm đơn điệu để kết luận đó là tất cả các nghiệm của phương trình đã cho. Trường hợp phương trình không có nghiệm trên K thì dựa vào giá trị của $f(x)$ trên K để kết luận.

Dạng 2. Phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow F(g(x))=F(h(x))$, trong đó $y=F(t)$ là hàm đơn điệu trên K và $g(x)$, $h(x)$ thuộc K với mọi $x\in D$. Khi đó, ta có

$$F(g(x))=F(h(x)) \Leftrightarrow g(x)=h(x).$$

Bài toán 2. Giải bất phương trình $f(x)>0$, trong đó $f(x)$ có tập xác định D. (tương tự cho bất phương trình dạng $f(x)<0;\ f(x)\ge 0;\ f(x)\le 0$).

Chúng ta cũng xét 2 dạng cơ bản sau:

Dạng 1. Giả sử $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên D và $x_0\in D$ thỏa mãn $f(x_0)=0$. Khi đó $f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(x_0)$

$$\Leftrightarrow x>x_0\ (x<x_0)$$

Dạng 2. Biến đổi bất phương trình đã cho về dạng $F(g(x))>F(h(x))$, trong đó $y=F(t)$ là hàm đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K và $g(x)$, $h(x)$ thuộc K với mọi $x\in D$. Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương với

$$g(x)>h(x)\ \text{(hoặc } g(x)<h(x)\text{)}.$$

Sau đây chúng ta sẽ bắt đầu xét các ví dụ giải phương trình và bất phương trình.

2 Phương trình và bất phương trình

Để thuận lợi cho việc đọc tài liệu theo tuần tự về kiến thức và thực hiện các kỹ năng tính toán, đầu tiên chúng ta trình bày các bài toán giải phương trình và bất phương trình vô tỷ.

2.1 Phương trình và bất phương trình vô tỷ

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}4x-1\ge 0\\ 4x^2-1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}$ trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}+\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}$; $f'(x)>0$ với mọi $x>\dfrac{1}{2}$. Do đó hàm số đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Mà $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ nên $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}=4$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x\geq -\frac{1}{3} \\ x+\sqrt{7x+2}\geq 0. \end{cases}$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}$ trên tập xác định.

Ta có $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}+\frac{1+\frac{7}{2\sqrt{7x+2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}}>0$, do đó $f(x)$ đồng biến trên tập xác định.

Mặt khác $f(1)=4$, suy ra $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $3\sqrt{3-2x}+\frac{5}{\sqrt{2x-1}}-2x\leq 6$.

Lời giải. Điều kiện: $\frac{1}{2}<x\leq\frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(x)=3\sqrt{3-2x}+\frac{5}{\sqrt{2x-1}}-2x-6$ trên $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.

Ta có $f'(x)=\frac{-3}{\sqrt{3-2x}}-\frac{5}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}-2<0$ với mọi $x\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. Do đó hàm $f(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$. Ta thấy $f(1)=0$ nên bất phương trình tương đương với $f(x)\leq f(1)\Leftrightarrow x\geq 1$.

Kết hợp điều kiện ta suy ra nghiệm của bất phương trình là $1\leq x\leq\frac{3}{2}$.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $\sqrt{3x+1}\geq(1-x)^3+2$.

Lời giải. Điều kiện: $x\geq -\frac{1}{3}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x+1}-(1-x)^3-2\ge 0. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x+1}-(1-x)^3-2$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}+3(1-x)^2>0$ với mọi $x\in\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Mặt khác, ta thấy $f(1)=0$ nên suy ra $(1)\Leftrightarrow f(x)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 1$.

Trong nhiều trường hợp hàm số $y=f(x)$ xác định trên D nhưng ta chỉ chứng tỏ được f đơn điệu trên khoảng $K\subset D$, để vận dụng được tính đơn điệu của f trong giải phương trình $f(x)=c$ (tương ứng bất phương trình) chúng ta có thể nhận xét $x\in K$ hoặc phân chia các trường hợp $x\in K$, $x\notin K$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$.

Để phương trình có nghiệm thì $\sqrt{2x-1}-3>0\Leftrightarrow x>5$.

Khi đó xét hàm số $f(x)=\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)$ trên $(5;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{2\sqrt{x+6}}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)+\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{2x-1}}>0$ với mọi $x>5$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(5;+\infty)$. Ta thấy $f(7)=4$, suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=7$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+13}=4x-3+\sqrt{3x^2+6}$.

Lời giải.

Nếu $x\le\frac{3}{4}$ thì $4x-3\le 0$, do đó $VT>VP$ nên phương trình vô nghiệm.

Nếu $x>\frac{3}{4}$, thì phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x^2+13}-\sqrt{3x^2+6}-4x+3=0.$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x^2+13}-\sqrt{3x^2+6}-4x+3$ với $x>\frac{3}{4}$.

Ta có $f'(x)=3x\left(\frac{1}{\sqrt{3x^2+13}}-\frac{1}{\sqrt{3x^2+6}}\right)-4$; $f'(x)<0$ với mọi $x>\frac{3}{4}$. Suy ra hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Mặt khác $f(1)=0$ do đó $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$.

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sqrt{x-1}=-x^3+4x+1$.

Lời giải. Điều kiện: $x\geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3-4x+\sqrt{x-1}=1$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-4x+\sqrt{x-1}$ trên $[1;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=3x^2-4+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Nếu $x\geq\frac{5}{4}$ thì $3x^2>4$ nên $f'(x)=3x^2-4+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}>0$.

Nếu $1<x<\frac{5}{4}$ thì $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}>1$ nên $f'(x)=3\left(x^2-1\right)+\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-1\right)>0$.

Suy ra $f'(x)>0$ với mọi $x>1$. Do đó $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Mặt khác, ta có $f(2)=1$ nên $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$.

Nhận xét. Chúng ta có thể giải bằng nhân liên hợp như sau

Phương trình đã cho tương đương với $x^3-4x+\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=0\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2+2x+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=2.$$

Ví dụ 8. Giải phương trình $2\sqrt{4x^2-x+1}+2x=3\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt{9x^2-4x+4}$.

(Học sinh giỏi Tỉnh Nghệ An, 2007)

Lời giải. Phương trình xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Ta thấy $x=0$ là một nghiệm của phương trình

Xét $x>0$, chia hai vế phương trình cho x và đặt $t=\frac{1}{x}$ ta được phương trình

$$2\sqrt{t^2-t+4}+2=3\sqrt[3]{2t-1}+\sqrt{4t^2-4t+9}. \qquad (1)$$

Đặt $u=\sqrt[3]{2t-1}$, khi đó phương trình (1) trở thành

$$\sqrt{u^6+15}+2=3u+\sqrt{u^6+8} \Leftrightarrow 3u+\sqrt{u^6+8}-\sqrt{u^6+15}-2=0. \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(u)=3u+\sqrt{u^6+8}-\sqrt{u^6+15}-2$ trên $\mathbb{R}$.

Ta thấy nếu $u<0$ thì $f(u)<0$ nên ta chỉ cần xét $u>0$.

Khi đó $f'(u)=3+3u^5\left(\frac{1}{\sqrt{u^6+8}}-\frac{1}{\sqrt{u^6+15}}\right)>0$ với mọi $u>0$. Do đó $f(u)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mà $f(1)=0$ nên $u=1$ là nghiệm duy nhất của (2).

Từ đó ta tìm được $x=1$.

Xét $x<0$, làm tương tự như trên ta có phương trình

$$\sqrt{u^6+8}-3u-\sqrt{u^6+15}+2=0 \text{ với } u<-1.$$

Xét hàm số $g(u)=\sqrt{u^6+8}-3u-\sqrt{u^6+15}+2$ với $u<-1$.

Ta có $g'(u)=3u^5\left(\frac{1}{\sqrt{u^6+8}}-\frac{1}{\sqrt{u^6+15}}\right)-3<0$ với mọi $u<-1$.

Nên $g(u)>g(-1)=2$.

Vậy $x=0$, $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 9. Giải phương trình $(5x-6)^2-\frac{1}{\sqrt{5x-7}}=x^2-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Phân tích và lời giải. Nhìn vào phương trình ta thấy ngay phương trình có dạng $F(g(x))=F(h(x))$. Từ đó ta có định hướng sử dụng chiều biến thiên của hàm số để giải phương trình này.

Điều kiện: $x>\frac{7}{5}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(5x-6)^2-\frac{1}{\sqrt{(5x-6)-1}}=x^2-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-\frac{1}{\sqrt{t-1}}$ với $t>1$.

Ta có $f'(t)=2t+\dfrac{1}{2\sqrt{(t-1)^3}}$; $f'(t)>0$ với mọi $t>1$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$f(5x-6)=f(x)\Leftrightarrow 5x-6=x\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $x^3+3x^2+4x+2=(3x+2)\sqrt{3x+1}$.

Lời giải. Điều kiện: $3x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^3+(x+1)=(3x+1)\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3+(x+1)=\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+\sqrt{3x+1}. \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+1>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$(*)\Leftrightarrow f(x+1)=f\left(\sqrt{3x+1}\right)\Leftrightarrow x+1=\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1.\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0$, $x=1$.

Ví dụ 11. Giải phương trình $8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}$.

Phân tích và lời giải. Ta cần đưa phương trình về dạng $f(g(x))=f(h(x))$, trong đó $f(t)=mt^3+nt$. Để ý rằng hạng tử $\sqrt[3]{3x-5}$ có bậc thấp nên tương ứng với $nh(x)$ trong $f(h(x))$, do đó $n=1$.

Ta xác định $g(x)=px+q$. Khi đó vế trái của phương trình sau khi biến đổi sẽ là $m(px+q)^3+(px+q)$. Xét hạng tử bậc 3 ta được $mp^3x^3=8x^3$. Như vậy $mp^3=8$. Đến đây có hai trường hợp có thể xảy ra là $m=1$, $p=2$ hoặc $m=8$, $p=1$.

Nếu $m=1$, $p=2$ thì $f(t)=t^3+t$. Do đó phương trình đã cho có dạng

$$(2x+q)^3+(2x+q)=3x-5+\sqrt[3]{3x-5}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3+12qx^2+(6q^2-1)x+q+5=\sqrt[3]{3x-5}.$$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases} 12q = -36 \\ 6q^2 - 1 = 53 \\ q^3 + q + 5 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow q = -3.$

Vậy trường hợp $m = 1$, $p = 2$ đã có kết quả nên ta không cần xét trường hợp $m = 8$, $p = 1$.

Từ đó ta có lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 + 2x - 3 = 3x - 5 + \sqrt[3]{3x-5} \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)^3 + 2x - 3 = 3x - 5 + \sqrt[3]{3x-5}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$(2) \Leftrightarrow f(2x-3) = f\left(\sqrt[3]{3x-5}\right) \Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt[3]{3x-5}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(8x^2 - 20x + 11\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4}. \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$, $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 12. Giải phương trình $4x^3 + x - (x+1)\sqrt{2x+1} = 0$.

(Tuyển sinh Cao Đẳng, 2012)

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

Phương trình tương đương với

$$(2x)^3 + 2x = \left(\sqrt{2x+1}\right)^3 + \sqrt{2x+1}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1$; $f'(t) > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(2x) = f\left(\sqrt{2x+1}\right) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 4x^2 = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Ví dụ 13. Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3}=\dfrac{1}{x+2}$.

(*Học sinh giỏi Tỉnh Nghệ An, 2013*)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x\ge -1 \\ x\ne 13 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+2)\left(\sqrt{x+1}-2\right)=\sqrt[3]{2x+1}-3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}=2x+1+\sqrt[3]{2x+1}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+1>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right)=f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt[3]{2x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ (x+1)^3=(2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ x^3-x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x=0$ và $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 14. Giải phương trình $-2x^3+10x^2-17x+8=2x^2\sqrt[3]{5x-x^3}$.

Lời giải. Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Với $x\ne 0$ thì phương trình đã cho tương đương với

$$-2+\frac{10}{x}-\frac{17}{x^2}+\frac{8}{x^3}=2\sqrt[3]{\frac{5}{x^2}-1}.$$

Đặt $t=\dfrac{1}{x}$, khi đó $t\ne 0$ và phương trình trở thành

$$-2+10t-17t^2+8t^3=2\sqrt[3]{5t^2-1}.$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)^3 + 2(2t-1) = 5t^2 - 1 + 2\sqrt[3]{5t^2-1}. \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(u) = u^3 + 2u$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(u) = 3u^2 + 2$; $f'(u) > 0$ với mọi $u \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(*) \Leftrightarrow f(2t-1) = f\left(\sqrt[3]{5t^2-1}\right) \Leftrightarrow 2t-1 = \sqrt[3]{5t^2-1}$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)^3 = 5t^2 - 1 \Leftrightarrow 8t^3 - 17t^2 + 6t = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \ \text{(ktm)} \\ t = \dfrac{17 \pm \sqrt{97}}{16}. \end{array}\right.$$

Suy ra $x = \dfrac{16}{17 \pm \sqrt{97}}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{16}{17 \pm \sqrt{97}}$.

Nhận xét. Ta có thể giải cách khác như sau

Để ý rằng $(x-2)^3 + 5x - x^3 = -6x^2 + 17x - 8$.

Đặt $a = \sqrt[3]{5x - x^3}$, $b = x - 2$, khi đó phương trình trở thành

$$-2x^2(x-2) - \left(-6x^2 + 17x - 8\right) = 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3}$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 b - \left(a^3 + b^3\right) = 2x^2 a$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(a^2 - ab + b^2 + 2x^2\right) = 0.$$

Vì $a^2 - ab + b^2 \geq 0$ và $2x^2 \geq 0$ nên phương trình tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} a + b = 0 \\ a = b = x = 0. \end{array}\right.$$

Với $a + b = 0$ ta suy ra $6x^2 - 17x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{17 \pm \sqrt{97}}{12}$.

Với $a = b = x = 0$, không thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{17 \pm \sqrt{97}}{12}$.

Ví dụ 15. Giải phương trình $9x^2 - 28x + 21 = \sqrt{x-1}$.

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 1$.

Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$(3x-5)^2+(3x-5)=(x-1)+\sqrt{x-1}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$. Ta có $f(t)$ đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$ và nghịch biến trên $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

Nếu $x\geq\frac{3}{2}$ thì $3x-5\geq-\frac{1}{2}$. Do đó $3x-5$ và $\sqrt{x-1}$ cùng thuộc $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Suy ra: (1) $\Leftrightarrow f(3x-5)=f\left(\sqrt{x-1}\right)\Leftrightarrow 3x-5=\sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x-5\geq 0\\(3x-5)^2=x-1\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Để ý rằng phương trình đã cho có thể viết tương đương thành

$$(4-3x)^2+4-3x=x-1+\sqrt{x-1}. \qquad (2)$$

Nếu $1\leq x<\frac{3}{2}$ thì $4-3x>-\frac{1}{2}$. Do đó

$$(2)\Leftrightarrow f(4-3x)=f\left(\sqrt{x-1}\right)\Leftrightarrow 4-3x=\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4-3x\geq 0\\(4-3x)^2=x-1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{25-\sqrt{13}}{18}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$, $x=\frac{25-\sqrt{13}}{18}$.

Nhận xét. 1. Do tính chất của hàm bậc hai, chỉ đồng biến trên "một nửa" trục số nên ta phải chia xét hai trường hợp của biến x như trên.

2. Chúng ta có thể đặt $\sqrt{x-1}=3y-5$ để đưa về hệ đối xứng loại II.

Ví dụ 16. Giải phương trình $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0.$

Lời giải. Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=-3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)$$

$$\Leftrightarrow(2x+1)\left(\sqrt{4+4x+4x^2}+2\right)=-3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)$$

$$\Leftrightarrow(2x+1)\left(\sqrt{(2x+1)^2+3}+2\right)=(-3x)\left(\sqrt{(-3x)^2+3}+2\right). \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+2\right)$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}$; $f'(t)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)\Leftrightarrow 2x+1=-3x\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{1}{5}$.

Nhận xét. Ta có cách giải khác như sau

Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x+1)\left(\sqrt{(2x+1)^2+3}+2\right)=(-3x)\left(\sqrt{(-3x)^2+3}+2\right).\qquad(2)$$

Nếu $x>0$ hoặc $x<-\dfrac{1}{2}$ thì hai vế của phương trình (2) trái dấu, do đó vô nghiệm.

Nếu $x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{5}\right)$ thì $3x<-2x-1<0$ nên $(3x)^2>(2x+1)^2$.

Suy ra $VT(2)<VP(2)$.

Nếu $x\in\left(\dfrac{1}{5};0\right]$ thì tương tự ta cũng có (2) vô nghiệm.

Nếu $x=-\dfrac{1}{5}$ thì phương trình nghiệm đúng.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{1}{5}$.

Ví dụ 17. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}.$$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-2x+3\ge 0\\x^2-6x+11\ge 0\\3-x\ge 0\\x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le 3.\qquad(1)$

Ta có bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x-1}>\sqrt{x^2-6x+11}+\sqrt{3-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{(3-x)^2+2}+\sqrt{3-x} \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t}$ với $t\ge 0$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$; $f'(t)>0$ với mọi $t>0$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Mặt khác $x-1$ và $3-x$ đều thuộc $[0;+\infty)$. Suy ra

$$(2)\Leftrightarrow f(x-1)>f(3-x)\Leftrightarrow x-1>3-x\Leftrightarrow x>2.$$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta có nghiệm của bất phương trình là $2<x\le 3$.

Ví dụ 18. Giải phương trình

$$\sqrt{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}-\sqrt{2x+\sqrt{4x^2-2x+1}}=x-1.$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x+1+\sqrt{x^2+x+1}\ge 0\\ 2x+\sqrt{4x^2-2x+1}\ge 0.\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x+1+\sqrt{x+1+\sqrt{(x+1)^2-(x+1)+1}}=2x+\sqrt{2x+\sqrt{(2x)^2-2x+1}} \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t+\sqrt{t^2-t+1}}$ trên tập xác định.

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{\left(t+\sqrt{t^2-t+1}\right)'}{2\sqrt{t+\sqrt{t^2-t+1}}}=1+\dfrac{2\sqrt{t^2-t+1}+2t-1}{4\sqrt{t+\sqrt{t^2-t+1}}.\sqrt{t^2-t+1}}$.

Để ý rằng

$$2\sqrt{t^2-t+1}+2t-1=\sqrt{4t^2-4t+4}+2t-1$$

$$=\sqrt{(2t-1)^2+3}+2t-1>|2t-1|+2t-1\ge 0.$$

Suy ra $f'(x)>0$ với mọi x thuộc tập xác định. Do đó hàm số đồng biến trên tập xác định.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f(x+1)=f(2x)\Leftrightarrow x+1=2x\Leftrightarrow x=1$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

Ví dụ 19. Giải phương trình $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^2-x+1$.

Lời giải. Điều kiện: $-2\le x\le 3$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}-x^2+x-1=0$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}-x^2+x-1$ trên đoạn $[-2;3]$.

Ta có

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}-2x+1;\ f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{(x+2)^3}}-\frac{1}{4\sqrt{(3-x)^3}}-2<0$$

với mọi $x\in(-2;3)$. Do đó phương trình $f'(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm, nên phương trình $f(x)=0$ có không quá 2 nghiệm.

Mặt khác, ta thấy $x=2$, $x=-1$ là nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$, $x=-1$.

Nhận xét. 1. Ta có thể giải bằng cách nhân liên hợp như sau

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{x+2}-2\right)+\left(\sqrt{3-x}-1\right)-\left(x^2-x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{2-x}{\sqrt{3-x}+1}-(x-2)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{3-x}+1}-(x+1)=0. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Xét phương trình (1), ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{3-x}+1}=x+1$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+2}-1}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}=x+1. \qquad (2)$$

Ta nhận thấy $x=-1$ là nghiệm của (2).

Nếu $-2\le x<-1$ thì $VT(2)>0>VP(2)$, nên phương trình (2) vô nghiệm.

Nếu $-1<x\le 3$ thì $VT(2)<0<VP(2)$, nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=2$, $x=-1$.

2. Ta có thể chứng minh phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=-1$ bằng cách xét hàm số $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{3-x}+1}-(x+1)$ trên $[-2;3]$.

Ta có $g(x)$ nghịch biến trên $[-2;3]$ và $g(-1)=0$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Tiếp theo ta xét một số ví dụ với cách giải tương tự, tức là đầu tiên ta "nhẩm" 1 nghiệm rồi dùng nhân liên hợp, sau đó sử dụng đạo hàm để tìm nghiệm còn lại nếu có.

Ví dụ 20. Giải phương trình $x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}$.

Lời giải. Điều kiện: $8-3x^2\ge 0$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-3x+1-(2-x)+(2-x)-\sqrt{8-3x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x-1\right)+\frac{4\left(x^2-x-1\right)}{(2-x)+\sqrt{8-3x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left(x+1+\frac{4}{(2-x)+\sqrt{8-3x^2}}\right)=0. \qquad (1)$$

Ta chứng minh phương trình $x+1+\dfrac{4}{(2-x)+\sqrt{8-3x^2}}=0$ (2)

vô nghiệm.

Xét hàm số $f(x)=2-x+\sqrt{8-3x^2}$ với $x\in\left[-\sqrt{\dfrac{8}{3}};\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right]$.

Ta có $f'(x)=-1-\dfrac{3x}{\sqrt{8-3x^2}}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)=\dfrac{6+4\sqrt{6}}{3}$,

$f\left(\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right)=2-\sqrt{\dfrac{8}{3}}>0$, $f\left(-\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right)=2+\sqrt{\dfrac{8}{3}}>0$. Suy ra $0<f(x)\le\dfrac{6+4\sqrt{6}}{3}$.

Do đó $x+1+\dfrac{1}{f(x)}\ge 1-\sqrt{\dfrac{8}{3}}+\dfrac{1}{\dfrac{6+4\sqrt{6}}{3}}>0$. Nên phương trình (2) vô nghiệm.

Từ đó suy ra phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 21. Giải bất phương trình $\sqrt{x+2}+x^2-x-2\le\sqrt{3x-2}$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{2}{3}$.

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}\right)+\left(x^2-x-2\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2-x)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+(x-2)(x+1)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+x+1\right)\le 0 \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+x+1$ với $x\ge\dfrac{2}{3}$.

Ta có $f'(x)=1+\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}}}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)^2}>0$ với mọi $x\ge\dfrac{2}{3}$. Do đó hàm $f(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$. Suy ra $f(x)\ge f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{5}{3}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}>0$ với mọi $x\ge\dfrac{2}{3}$.

Suy ra bất phương trình (1) $\Leftrightarrow x-2\le 0\Leftrightarrow x\le 2$.

Kết hợp điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là $\dfrac{2}{3}\le x\le 2$.

Ví dụ 22. Cho các số thực a, b, c thỏa $a>b>c>0$. Chứng minh phương trình sau có nghiệm duy nhất $\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}+\dfrac{a-b}{\sqrt{x-c}}=0$.

(*Học sinh giỏi Tỉnh Hà Tĩnh, 2009*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge a$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{b-a}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}+\frac{a-b}{\sqrt{x-c}}=0\Leftrightarrow\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}-\sqrt{x-c}=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x-a}{x-c}}+\sqrt{\frac{x-b}{x-c}}-1=0.$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-a}{x-c}}+\sqrt{\dfrac{x-b}{x-c}}-1$ với $x\ge a$.

Ta có $f(x)$ là hàm đồng biến và $f(a)=\sqrt{\dfrac{a-b}{a-c}}-1<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1>0$. Suy ra phương trình $f(x)=0$ có duy nhất nghiệm, điều phải chứng minh.

Tiếp theo chúng ta trình bày các ví dụ giải phương trình và bất phương trình mũ – logarit. Các định hướng sử dụng tính đơn điệu của hàm số cũng tương tự như giải các phương trình và bất phương trình vô tỷ.

2.2 Phương trình và bất phương trình mũ – logarit

Ví dụ 1. Giải phương trình $\log_2\left(\sqrt{x}+\frac{3}{2}\right)+2^{x+\sqrt{x}-\frac{3}{4}}=2.$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0.$

Đặt $t=\sqrt{x}$, khi đó $t\ge 0$ và phương trình trở thành

$$\log_2\left(t+\frac{3}{2}\right)+2^{t^2+t-\frac{3}{4}}-2=0. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2\left(t+\frac{3}{2}\right)+2^{t^2+t-\frac{3}{4}}-2$ với $t\ge 0.$

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{\left(t+\frac{3}{2}\right).\ln 2}+(2t+1)2^{t^2+t-\frac{3}{4}}.\ln 2$; $f'(t)>0$ với mọi $t\ge 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Mặt khác và $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ nên phương trình $f(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t=\frac{1}{2}$.

Suy ra $x=\frac{1}{4}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\log_3\left(\sqrt{x^2-3x+2}+2\right)+\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-x^2-1}=2.$

Lời giải. Điều kiện: $x^2-3x+2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge 2\end{array}\right.$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+2}$, khi đó $t\ge 0$, $3x-x^2-1=1-t^2$ và phương trình đã cho trở thành

$$\log_3(t+2)+\left(\frac{1}{5}\right)^{1-t^2}=2. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_3(t+2)+\left(\frac{1}{5}\right)^{1-t^2}$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{(t+2)\ln 3}+\dfrac{1}{5}.2t.5^{t^2}.\ln 3$; $f'(t)>0$ với mọi $t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Mặc khác, $f(1)=2$ nên $t=1$ là nghiệm duy nhất của (1). Suy ra

$$\sqrt{x^2-3x+2}=1 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=1$.

(Học sinh giỏi Tỉnh Nghệ An, 2009)

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-1$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $$f'(x)=3^x\ln 3\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+3^x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$$

$$=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\ln 3-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

Vì $\sqrt{x^2+1}-x>0$ và $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\le 1<\ln 3$ nên $f'(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $f(0)=0$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\log_2\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_3 x$.

Lời giải. Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\log_3 x$, khi đó $t=\log_2\left(1+\sqrt{x}\right)$ và ta có $\begin{cases} x=3^t \\ 1+\sqrt{x}=2^t. \end{cases}$

Từ đó suy ra

$$\left(\sqrt{3}\right)^t=2^t-1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t=1.$$

Rõ ràng hàm số $f(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^t+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$, mà $f(2)=1$ nên $t=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t)=1$. Suy ra $x=9$.

Nhận xét. Ở đây chúng ta đã đưa một phương trình logarit với các logarit có cơ số không biểu diễn qua nhau dưới dạng lũy thừa nguyên. Ta tạm gọi đây là kỹ thuật mũ hóa phương trình logarit. Việc làm này có thể xem là ngược lại với kỹ thuật logarit hóa để giải các phương trình mũ với các cơ số không biểu diễn được qua nhau dưới dạng lũy thừa nguyên đã được trình bày trong Sách giáo khoa Giải tích 12.

Ví dụ 5. Giải phương trình $(x-1)\log_3 x=\frac{x+1}{2}$.

Lời giải. Điều kiện: $x>0$.

Rõ ràng $x=1$ không là nghiệm của phương trình.

Với $x\neq 1$, ta có phương trình tương đương với

$$\log_3 x=\frac{x+1}{2(x-1)}\Leftrightarrow \log_3 x-\frac{x+1}{2(x-1)}=0.$$

Xét hàm số $f(x)=\log_3 x-\frac{x+1}{2(x-1)}$ trên tập xác định.

Ta có $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}+\frac{3}{4(x-1)^2}$, $f'(x)>0$ với mọi $0<x\neq 1$.

Suy ra hàm $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x)=0$ có đúng 2 nghiệm.

Mặt khác, ta thấy $x=3$ và $x=\frac{1}{3}$ là nghiệm của phương trình. Vậy nghiệm của phương trình là $x=3$ và $x=\frac{1}{3}$.

Nhận xét. 1. Việc chuyển phương trình về xét hàm $f(x)$ với hàm logarit và hàm phân thức độc lập là rất tự nhiên. Nhưng rất dễ bỏ sót nghiệm $x=\frac{1}{3}$ nếu vội vàng kết luận hàm $f(x)$ đồng biến trên tập xác định và phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm.

2. Chúng ta cũng có cách giải khác như sau

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-1)\log_3 x-\frac{x+1}{2}=0.$$

Xét hàm số $g(x)=(x-1)\log_3 x-\frac{x+1}{2}$ với $x>0$.

Ta có $g'(x)=\frac{x-1}{x\ln 3}+\log_3 x-\frac{1}{2}$; $g''(x)=\frac{1}{x^2\ln 3}+\frac{1}{x\ln 3}>0$ với mọi $x>0$.

Suy ra $g'(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ nên phương trình $g'(x)=0$ có nghiệm duy nhất trên $(0;+\infty)$. Suy ra phương trình $f(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác, ta thấy $x=3$ và $x=\frac{1}{3}$ là nghiệm của phương trình. Vậy nghiệm của phương trình là $x=3$ và $x=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $3^x.2x=3^x+2x+1$.

Lời giải. Rõ ràng $x=-\frac{1}{2}$ không là nghiệm của phương trình.

Với $x\neq-\frac{1}{2}$, phương trình đã cho tương đương với

$$3^x(2x-1)=2x+1 \Leftrightarrow 3^x=\frac{2x+1}{2x-1} \Leftrightarrow 3^x-\frac{2x+1}{2x-1}=0.$$

Xét hàm số $f(x)=3^x-\frac{2x+1}{2x-1}$ với $x\neq-\frac{1}{2}$.

Ta có $f'(x)=3^x\ln 3+\frac{4}{(2x-1)^2}$; $f'(x)>0$ với mọi $x\neq-\frac{1}{2}$. Do đó hàm $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x)=0$ có đúng 2 nghiệm.
Mặt khác, ta có $x=-1$ và $x=1$ là 2 nghiệm của phương trình.
Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1$, $x=1$.

Ví dụ 7. Giải bất phương trình $2^{\log_3 x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\log_3 x}}\ge\frac{5}{2}$.

Lời giải. Điều kiện: $0<x\neq 1$.

Đặt $t=\log_3 x$, khi đó bất phương trình trở thành $2^t+2^{-\frac{1}{t}}\ge\frac{5}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=2^t+2^{-\frac{1}{t}}$ với $t\neq 0$.

Ta có $f'(t)=\left(2^t+\frac{2^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\right)\ln 2>0$ với mọi $t\neq 0$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Mặt khác ta thấy $f(-1)=f(1)=\frac{5}{2}$. Suy ra bất phương trình $f(t)\ge\frac{5}{2}$ tương đương với $\left[\begin{array}{l}-1\le t<0\\ t\ge 1.\end{array}\right.$

Từ đó suy ra $\frac{1}{3}\le x<1$ hoặc $x\ge 3$.

Ví dụ 8. Giải phương trình $3^x+2.4^x=19x+3$.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với $3^x+2.4^x-19x-3=0$.

Xét hàm số $f(x)=3^x+2.4^x-19x-3$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=3^x\ln 3+2.4^x\ln 4-19$; $f''(x)=3^x(\ln 3)^2+2.4^x(\ln 4)^2>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó phương trình $f'(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm. Điều đó dẫn đến phương trình $f(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm.
Mặt khác $f(0)=f(2)=0$ nên suy ra phương trình có 2 nghiệm $x=0, x=2$.

Ví dụ 9. Giải phương trình $3^x+9^{\frac{1}{x}}=12$.
Lời giải. Điều kiện: $x\neq 0$.
Rõ ràng phương trình không có nghiệm $x<0$ nên ta chỉ giải với $x>0$.

Xét hàm $f(x)=3^x+9^{\frac{1}{x}}-12$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=3^x\ln 3-\dfrac{1}{x^2}9^{\frac{1}{x}}\ln 9$; $f''(x)=3^x(\ln 3)^2+\dfrac{1}{x^4}9^{\frac{1}{x}}(\ln 9)^2+\dfrac{2}{x^3}9^{\frac{1}{x}}\ln 9$;

$f''(x)>0$ với mọi $x>0$. Suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó phương trình $f'(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm. Điều đó dẫn đến phương trình $f(x)=0$ có không quá 2 nghiệm.
Mặt khác ta thấy $x=1$ và $x=2$ là nghiệm của phương trình. Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$ và $x=2$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $(1+x)\left(2+4^x\right)=3.4^x$.

Lời giải. Từ phương trình ta suy ra $x>-1$.

Phương trình đã cho tương đương với $(1+x)\left(2+4^x\right)-3.4^x=0$.

Xét hàm số $f(x)=(1+x)\left(2+4^x\right)-3.4^x$ trên $(-1;+\infty)$.

Ta có

$f'(x)=(x-2)4^x\ln 4+4^x+2$; $f''(x)=(x-4)(\ln 4)^2+2.4^x\ln 4$;

$f'''(x)=(x-2)4^x(\ln 4)^3+3.4^x(\ln 4)^2$;

$f'''(x)=0\Leftrightarrow x=2-\dfrac{3}{\ln 4}>1$. Đặt $x_0=2-\dfrac{3}{\ln 4}$. Khi đó ta có $f''(x)$ nghịch biến trên $(-1;x_0)$, đồng biến trên $(x_0;+\infty)$ và $f''(-1)<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=+\infty$, nên phương trình $f''(x)=0$ có nghiệm duy nhất trên $(-1;+\infty)$. Do đó phương trình $f'(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm. Suy ra phương trình $f(x)=0$ có không quá 3 nghiệm trên $(-1;+\infty)$.

Mặt khác, ta thấy có 3 giá trị thỏa mãn phương trình $f(x)=0$ là $x=0, x=\dfrac{1}{2}, x=1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải khác như sau

Phương trình đã cho tương đương với $x+1=\frac{3.4^x}{2+4^x} \Leftrightarrow \frac{3.4^x}{2+4^x}-x-1=0.$ (1)

Xét hàm số $g(x)=\frac{3.4^x}{2+4^x}-x-1$

Ta có

$$g'(x)=\frac{3.4^x(4^x+2)\ln 4-3.4^x.4^x\ln 4}{(4^x+2)^2}-1=\frac{6.4^x\ln 4}{(4^x+2)^2}-1=\frac{6.4^x\ln 4-(4^x+2)^2}{(4^x+2)^2};$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 6.4^x\ln 4-(4^x+2)^2=0.$ (2)

Đặt $t=4^x$, khi đó phương trình (2) trở thành $6t\ln 4-(t+2)^2=0$. Phương trình này bậc 2 đối với t, do đó có không quá 2 nghiệm t. Suy ra phương trình (2) có không quá 2 nghiệm x, hay phương trình $g'(x)=0$ có không quá 2 nghiệm. Điều đó dẫn đến phương trình $g(x)=0$ có tối đa 3 nghiệm.

Mặt khác, ta thấy có 3 giá trị thỏa mãn phương trình $g(x)=0$ là $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$

nên nghiệm của phương trình là $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$.

Ví dụ 11. Giải phương trình $6^x+1=8^x-27^{x-1}$.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$1+\left(-2^x\right)^3+\left(3^{x-1}\right)^3-3\left(-2^x\right)\left(3^{x-1}\right)=0.$$

Chúng ta liên tưởng đến hằng đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right).$$

Nếu đặt $a=1$, $b=-2^x$, $c=3^{x-1}$ thì $a\neq b$ và phương trình có dạng

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0,$$

nên tương đương với $a+b+c=0$, hay $1-2^x+3^{x-1}=0$.

Xét hàm số $f(x)=1-2^x+3^{x-1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=-2^x\ln 2+3^{x-1}\ln 3$;

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2^x\ln 2=3^{x-1}\ln 3 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{\ln 3}{3\ln 2} \Leftrightarrow x=\log_{\frac{2}{3}}\frac{\ln 3}{3\ln 2}.$$

Suy ra phương trình $f(x)=0$ có không quá 2 nghiệm.

Mặt khác, ta thấy $x=1$, $x=2$ là nghiệm của phương trình, nên đó là tất cả các nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$, $x=2$.

Ví dụ 12. Giải bất phương trình $\dfrac{2^{4-x}-x+1}{\log_2(|x|-3)} \geq 0$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=2^{4-x}-x+1$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=-2^{4-x}.\ln 2-1$; $f'(x)<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $f(3)=0$, nên $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 3$ và $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\geq 3$. (*)

$$\text{Ta có } \frac{2^{4-x}-x+1}{\log_2(|x|-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ \log_2(|x|-3)>0 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} f(x)\leq 0 \\ \log_2(|x|-3)<0 \end{cases} & (II) \end{array}\right.$$

Kết hợp với (*), ta suy ra

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 3 \\ |x|-3>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 3 \\ |x|>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x<-4.$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ 0<|x|-3<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ 3<|x|<4 \end{cases} \Leftrightarrow 3<x<4.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x<-4$, $3<x<4$.

Ví dụ 13. Giải phương trình $2^{x-1}-2^{x^2-x}=(x-1)^2$.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$2^{x-1}+x-1=2^{x^2-x}+x^2-x. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\ln 2.2^t+1>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra (1) $\Leftrightarrow f(x-1)=f\left(x^2-x\right) \Leftrightarrow x-1=x^2-x \Leftrightarrow x=1$.

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 14. Giải phương trình $\cos x.\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\sin x}=\sin x.\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\cos x}$.

Lời giải. Rõ ràng $\sin x=0$ hoặc $\cos x=0$ không thỏa mãn phương trình.
Với $\sin x.\cos x\neq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{\sin x}}{\sin x}=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x}}{\cos x}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^{t}}{t}$ với $t\in(-1;1)$. Ta có

$f'(t)=\dfrac{t.\left(\frac{5}{2}\right)^{t}.\ln\frac{5}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^{t}}{t^2}=\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^{t}.\left(t\ln\frac{5}{2}-1\right)}{t^2}<0$ với mọi $t\in(-1;1)$. Do đó hàm $f(t)$ nghịch biến trên $(-1;1)$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f(\sin x)=f(\cos x)\Leftrightarrow \sin x=\cos x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{R}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 15. Giải phương trình $\sin 2x-\cos x=1+\log_2\sin x$ trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải. Do $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $0<\sin x,\ \cos x<1$. Suy ra phương trình đã cho tương đương với $\log_2\cos x+\sin 2x-\cos x=1+\log_2\sin x+\log_2\cos x$

$$\Leftrightarrow \log_2\cos x-\cos x=\log_2\sin 2x-\sin 2x. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t-t$ với $t\in(0;1]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}-1>0$ với mọi $t\in(0;1]$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;1]$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f(\cos x)=f(\sin 2x)\Leftrightarrow \cos x=\sin 2x\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\pi}{6}$.

Ví dụ 16. Giải phương trình $7^{x-1}=6\log_7(6x-5)+1$.

Lời giải. Điều kiện: $6x-5>0\Leftrightarrow x>\dfrac{5}{6}$.

Đặt $y-1=\log_7(6x-5)$, khi đó $7^{y-1}=6x-5$ và do đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 7^{y-1}=6x-5 \\ 7^{x-1}=6(y-1)+1. \end{cases}$$

Suy ra $7^{x-1}-7^{y-1}=6y-6x \Leftrightarrow 7^{x-1}+6x=7^{y-1}+6y.$ (1)

Xét hàm số $f(t)=7^{t-1}+6t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=7^{t-1}\ln 7+6>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra (1) $\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Do đó $x=\log_7(6x-5)+1\Leftrightarrow 7^{x-1}=6x-5\Leftrightarrow 7^{x-1}-6x+5=0.$ (2)

Xét hàm số $g(x)=7^{x-1}-6x+5$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=7^{x-1}\ln 7-6$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1+\log_7\dfrac{6}{\ln 7}$. Suy ra phương trình $g(x)=0$ có không quá 2 nghiệm.

Mặt khác ta thấy $x=1, x=2$ là nghiệm của (2).

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1, x=2$.

Ví dụ 17. Giải phương trình $\log_2\dfrac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}=x^2+3x+2.$

Lời giải. Để ý rằng $2x^2+4x+5-\left(x^2+x+3\right)=x^2+3x+2$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\left(x^2+x+3\right)+\left(x^2+x+3\right)=\log_2\left(2x^2+4x+5\right)+\left(2x^2+4x+5\right). \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1$; $f'(t)>0$ với mọi $t>0$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f\left(x^2+x+3\right)=f\left(2x^2+4x+5\right)\Leftrightarrow x^2+x+3=2x^2+4x+5$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1, x=-2$.

Ví dụ 18. Giải phương trình $\log_2\dfrac{2^x-1}{|x|}=1+x-2^x.$

Lời giải. Điều kiện: $\frac{2^x-1}{|x|}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ 2^x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0.$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\left(2^x-1\right)-\log_2 x=1+x-2^x \Leftrightarrow \log_2\left(2^x-1\right)+2^x-1=\log_2 x+x. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1$; $f'(t)>0$ với mọi $t>0$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra $(1)\Leftrightarrow f\left(2^x-1\right)=f(x)\Leftrightarrow 2^x-1=x\Leftrightarrow 2^x-x-1=0.$

Xét hàm số $g(x)=2^x-x-1$ với $x>0$.

Ta có $g'(x)=2^x\ln 2-1$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_2\frac{1}{\ln 2}$. Suy ra phương trình $g(x)=0$ có không quá 2 nghiệm.

Mặt khác, ta thấy $x=0$, $x=1$ là nghiệm của $g(x)=0$. Đối chiếu điều kiện $x>0$ ta có nghiệm của phương trình là $x=1$.

Ví dụ 19. Giải phương trình $3^x=1+x+\log_3(1+2x)$.

Lời giải. Điều kiện: $1+2x>0\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $3^x+x=1+2x+\log_3(1+2x)$

$$\Leftrightarrow 3^x+\log_3 3^x=(1+2x)+\log_3(1+2x). \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_3 t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1$; $f'(t)>0$ với mọi $t>0$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f\left(3^x\right)=f(1+2x)\Leftrightarrow 3^x=1+2x\Leftrightarrow 3^x-2x-1=0. \quad (2)$$

Xét hàm số $g(x)=3^x-2x-1$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=3^x\ln 3-2$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_3\frac{2}{\ln 3}$. Suy ra phương trình $g(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm. Mà ta thấy $x=0$, $x=1$ là các nghiệm của (2) nên đây là tất cả các nghiệm của (2).

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0$, $x=1$.

Ví dụ 20. Giải phương trình

$$\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}.$$

(Chọn Đội tuyển HSG Quốc gia Chuyên Đại học Vinh, 2010)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x+2>0 \\ \dfrac{2x+1}{x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<x<-\dfrac{1}{2} \\ x>0. \end{array}\right.$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\sqrt{x+2}+x+2-2\sqrt{x+2}=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left(2+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(2+\frac{1}{x}\right). \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t^2-2t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2t-2>\dfrac{1}{t}+2t-2=\dfrac{2t^2-2t+1}{t}>0$ với mọi $t>0$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(2+\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=2+\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x-1=0\Leftrightarrow x=-1;\ x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=-1;\ x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Bài tập

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{x}=(1-x)^3+1$.

Bài 2. Giải phương trình $(x+2)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)=0$.

Bài 3. Giải phương trình $27x^3-27x^2+13x-2=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Bài 4. Giải phương trình $4x^3+18x^2+27x+14=\sqrt[3]{4x+5}$.

Bài 5. Giải phương trình $8x^3-17x^2+10x-2=2\sqrt[3]{5x^2-1}$.

Bài 6. Giải phương trình $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$.

Bài 7. Giải phương trình $\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}-(x-5)\sqrt{x-8}-3x+31=0$.

Bài 8. Giải phương trình $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$.

Bài 9. Giải phương trình $\log_7 x = \log_3\left(\sqrt{x}+2\right)$.

Bài 10. Giải phương trình $3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1)$.

Bài 11. Giải phương trình $\log_{\sqrt[4]{6}}\left(x^2-2x-2\right) = 2\log_{\sqrt{5}}\left(x^2-2x-3\right)$.

Bài 12. Giải phương trình $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2\right) = \log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)$.

Bài 13. Giải phương trình $\log_5\left(3+\sqrt{3^x+1}\right) = \log_4\left(3^x+1\right)$.

Bài 14. Giải phương trình $2^{3x} + 3^{\frac{2}{x}} = 17$.

Bài 15. Giải phương trình $e^x = 1 + \ln(1+x)$.

Bài 16. Giải phương trình $1 + \log_4 x = \dfrac{3x}{x+2}$;

Bài 17. Giải phương trình $(1+\cos x)\left(2+4^{\cos x}\right) = 3.4^{\cos x}$.

Bài 18. Giải phương trình $64^x - 8.343^{x-1} = 8 + 12.4^x.7^{x-1}$.

Bài 19. Giải phương trình $2^{x^2-x} + 9^{3-2x} + x^2 + 6 = 4^{2x-3} + 3^{x-x^2} + 5x$.

Bài 20. Giải phương trình $e^{|8\sin x-5|} - e^{|4\sin x-1|} = \dfrac{1}{|8\sin x-5|} - \dfrac{1}{|4\sin x-1|}$.

Bài 21. Giải phương trình sau trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\log_2(\cot x - \tan x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x.$$

Bài 22. Giải phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x} + \dfrac{1}{2} = \cos 2x + \log_4\left(4\cos^3 2x - \cos 6x - 1\right)$.

Bài 23. Giải phương trình $\log_3 \dfrac{4x^2+2}{x^6+x^2+1} = x^6 - 3x^2 - 1$.

Bài 24. Giải phương trình $\log_2 \dfrac{4^x-2^x+1}{2.16^x-2.4^x+1} = 2^x\left(2.8^x - 3.2^x + 1\right)$.

Bài 25. Giải phương trình $2x^2 - 6x + 2 = \log_2 \dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$.

Bài 26. Giải phương trình $(x+2)^2 + \log_2 \dfrac{x^2+4x+5}{\sqrt{2x+3}} = 2\sqrt{2x+3}$.

Bài 27. Giải phương trình $4^{|\sin x|}+2^{|\cos x|+2}=8$.

Bài 28. Giải phương trình $\log_2(x^2+3)=\dfrac{2(x^2-3x)}{x+1}+\log_2(x+1)$.

Bài 29. Giải phương trình $\log_2(x+2)=1+\log_5(2x+1)$.

Bài 30. Giải phương trình $4^{-|x+1|}\log_4(x^2+1)=2^{2-x^2}\left(1+\log_2|x+1|\right)$.

Bài 31. Giải phương trình $3^x+2^x=3x+2$.

Bài 32. Giải phương trình $4^x+6^x=25x+2$.

Bài 33. Chứng minh phương trình $x^5-4x^2-4x=1$ có đúng một nghiệm và nghiệm đó nhận giá trị dương.

Hướng dẫn giải bài tập

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{x}=(1-x)^3+1$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x}-(1-x)^3-1=0. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x}-(1-x)^3-1$ trên đoạn $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+3(1-x)^2>0$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$. Suy ra phương trình (1) có không quá 1 nghiệm.

Mặt khác, ta thấy $x=1$ là nghiệm nên đây là nghiệm duy nhất của (1).

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

Bài 2. Giải phương trình $(x+2)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)=0$.

Lời giải. Phương trình xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+2)\left(\sqrt{(x+2)^2+3}+1\right)+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)=0. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=\sqrt{x^2+3}+1+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $g(x)=f(x+2)+f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (1) có tối đa 1 nghiệm.

Mà ta thấy $x=-1$ là nghiệm của (1) nên đó là nghiệm duy nhất.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1$.

Bài 3. Giải phương trình $27x^3-27x^2+13x-2=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(3x-1)^3+2(3x-1)=(2x-1)+2\sqrt[3]{2x-1}. \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+2$; $f'(t)>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(*)\Leftrightarrow f(3x-1)=f\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)\Leftrightarrow 3x-1=\sqrt[3]{2x-1}$$
$$\Leftrightarrow (3x-1)^3=2x-1\Leftrightarrow 27x^3-27x^2+7x=0$$
$$\Leftrightarrow x=0.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0$.

Bài 4. Giải phương trình $4x^3+18x^2+27x+14=\sqrt[3]{4x+5}$.

Lời giải. Phương trình tương đương với

$$(2x+3)^3+2(2x+3)=4x+5+2\sqrt[3]{4x+5}. \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+2>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$(2)\Leftrightarrow f(2x+3)=f\left(\sqrt[3]{4x+5}\right)\Leftrightarrow 2x+3=\sqrt[3]{4x+5}$$
$$\Leftrightarrow (2x+3)^3=4x+5\Leftrightarrow 8x^3+36x^2+50x+22=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(4x^2+14x+11)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{-7\pm\sqrt{5}}{4}. \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1$, $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{5}}{4}$.

Nhận xét. Chúng ta có thể giải bằng cách đặt $\sqrt[3]{4x+5}=2y+3$ để đưa về hệ đối xứng loại II.

Bài 5. Giải phương trình $8x^3-17x^2+10x-2=2\sqrt[3]{5x^2-1}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x-1)^3+2(2x-1)=5x^2-1+2\sqrt[3]{5x^2-1}. \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3t^2+2$; $f'(t)>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(*)\Leftrightarrow f(2x-1)=f\left(\sqrt[3]{5x^2-1}\right)\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{5x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^3=5x^2-1\Leftrightarrow 8x^3-17x^2+6x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{17\pm\sqrt{97}}{16}. \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0,\ x=\dfrac{17\pm\sqrt{97}}{16}$.

Bài 6. Giải phương trình $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$6x+1+\sqrt[3]{6x+1}=(2x)^3+2x. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3t^2+1$; $f'(t)>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{6x+1}\right)=f(2x)\Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1}=2x\Leftrightarrow 8x^3-6x-1=0. \quad (2)$$

Với $x\in[-1;1]$, đặt $x=\cos u$, $u\in[0;\pi]$, khi đó phương trình (2) trở thành

$$2\left(4\cos^3 u-3\cos u\right)-1=0\Leftrightarrow \cos 3u=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 3u=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Do $u\in[0;\pi]$ nên $u=\dfrac{\pi}{9}$, $u=\dfrac{5\pi}{9}$ hoặc $u=\dfrac{7\pi}{9}$. Suy ra $x=\cos\dfrac{\pi}{9}$, $x=\cos\dfrac{5\pi}{9}$ hoặc $x=\cos\dfrac{7\pi}{9}$. Vì (2) là phương trình bậc 3 nên có không quá 3 nghiệm, do đó đây là tất cả các nghiệm của phương trình (2).

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\cos\dfrac{\pi}{9}$, $x=\cos\dfrac{5\pi}{9}$, $x=\cos\dfrac{7\pi}{9}$.

Bài 7. Giải phương trình $\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}-(x-5)\sqrt{x-8}-3x+31=0$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\geq 8$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x-1+\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}=\left(\sqrt{x-8}+1\right)^3+\left(\sqrt{x-8}+1\right)^2-2\left(\sqrt{x-8}+1\right). \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t^2-2t$ với $t\ge 1$.

Ta có $f'(t)=3t^2+2t-2$; $f'(t)>0$ với mọi $t\ge 1$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$. Vì với $x\ge 8$ thì $\sqrt[3]{x-1}$ và $\sqrt{x-8}+1$ cùng thuộc $[1;+\infty)$ nên

$$(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{x-1}\right)=f\left(\sqrt{x-8}+1\right)\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1}=\sqrt{x-8}+1. \quad (2)$$

Đặt $u=\sqrt[3]{x-1}$, khi đó phương trình (2) trở thành $u-1=\sqrt{u^3-7}$

$$\Leftrightarrow u^3-u^2+2u-8=0\Leftrightarrow (u-2)\left(u^2+u+4\right)=0\Leftrightarrow u=2\Leftrightarrow x=9.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=9$.

Bài 8. Giải phương trình $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$.

Lời giải. Điều kiện: $-2\le x\le \dfrac{22}{3}$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$4\left(\sqrt{x+2}-2\right)+\left(\sqrt{22-3x}-4\right)=x^2-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3(2-x)}{\sqrt{22-3x}+4}=(x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x+2-\frac{4}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x+2-\dfrac{4}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{3}{\sqrt{22-3x}+4}=0 \end{array}\right. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=x+2-\dfrac{4}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{3}{\sqrt{22-3x}+4}$ với $-2\le x\le\dfrac{22}{3}$.

Ta có $f'(x)=1+\dfrac{2}{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}+\dfrac{9}{\sqrt{22-3x}\left(\sqrt{22-3x}+4\right)}>0$ với mọi $x\in\left(-2;\dfrac{22}{3}\right)$. Do đó hàm $f(x)$ đồng biến trên $\left[-2;\dfrac{22}{3}\right]$.

Mặt khác, ta thấy $f(-1)=0$ nên $x=-1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$, $x=-1$.

Bài 9. Giải phương trình $\log_7 x = \log_3\left(\sqrt{x}+2\right)$.

Bạn đọc tự giải.

Bài 10. Giải phương trình $3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1)$.

Bạn đọc tự giải.

Bài 11. Giải phương trình $\log_{\sqrt[4]{6}}\left(x^2-2x-2\right) = 2\log_{\sqrt{5}}\left(x^2-2x-3\right)$.

Bạn đọc tự giải.

Bài 12. Giải phương trình $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2\right) = \log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)$.

Bạn đọc tự giải.

Bài 13. Giải phương trình $\log_5\left(3+\sqrt{3^x+1}\right) = \log_4\left(3^x+1\right)$.

Bạn đọc tự giải.

Bài 14. Giải phương trình $2^{3x} + 3^{\frac{2}{x}} = 17$.

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0$.

Nếu $x < 0$ thì $VT < 2$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $x > 0$, xét hàm số $f(x) = 2^{3x} + 3^{\frac{2}{x}} - 17$, ta có

$f'(x) = 3.2^{3x}\ln 2 - \dfrac{2}{x^2}.3^{\frac{2}{x}}\ln 3$; $f''(x) = 9.2^{3x}\ln^2 2 + \dfrac{4(x+\ln 3)}{x^4}.3^{\frac{2}{x}}\ln 3 > 0$ với mọi $x > 0$. Do đó hàm $f'(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty$ nên ta suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (0;+\infty)$.

Suy ra bảng biến thiên

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm.

Mặt khác ta thấy $f(1) = f\left(\dfrac{2}{3}\log_2 3\right) = 0$ nên nghiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = \dfrac{2}{3}\log_2 3$.

Bài 15. Giải phương trình $e^x = 1 + \ln(1+x)$.

Lời giải. Điều kiện: $x > -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$e^x - \ln(1+x) - 1 = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = e^x - \ln(1+x) - 1$ với $x > -1$.

Ta có $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{1+x}$; $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{(1+x)^2}$; $f''(x) > 0$ với mọi $x > -1$.

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

Mà $f'(0) = 0$, nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f'(x) = 0$.

Suy ra bảng biến thiên

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài 16. Giải phương trình $1 + \log_4 x = \dfrac{3x}{x+2}$.

Bạn đọc tự giải.

Bài 17. Giải phương trình $(1+\cos x)\left(2+4^{\cos x}\right) = 3.4^{\cos x}$.

Bạn đọc tự giải.

Bài 18. Giải phương trình $64^x - 8.343^{x-1} = 8 + 12.4^x.7^{x-1}$.

Lời giải. Đặt $a = 2$, $b = -4^x$, $c = 2.7^{x-1}$, khi đó $a \neq b$ và phương trình đã cho trở thành

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 0.$$

Suy ra $2 - 4^x + 2.7^{x-1} = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 2 - 4^x + 2.7^{x-1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = -4^x \ln 4 + \dfrac{2}{7}.7^x \ln 7$.

Phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất nên phương trình $f(x)=0$ có không quá 2 nghiệm. Mà $x=1$ và $x=2$ là nghiệm nên đây là tất cả các nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$, $x=2$.

Bài 19. Giải phương trình $2^{x^2-x}+9^{3-2x}+x^2+6=4^{2x-3}+3^{x-x^2}+5x.$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$2^{x^2-x}+3^{6-4x}+x^2+6=2^{4x-6}+3^{x-x^2}+5x$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-x}+x^2-x-3^{x-x^2}=2^{4x-6}+4x-6-3^{6-4x}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t-3^{-t}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=2^t\ln 2+1+3^{-t}\ln 3$; $f'(t)>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f\left(x^2-x\right)=f\left(4x-6\right)\Leftrightarrow x^2-x=4x-6\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=3.\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$, $x=3$.

Bài 20. Giải phương trình $e^{|8\sin x-5|}-e^{|4\sin x-1|}=\dfrac{1}{|8\sin x-5|}-\dfrac{1}{|4\sin x-1|}.$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq \dfrac{1}{4}\\ \sin x\neq \dfrac{5}{8}\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$e^{|8\sin x-5|}-\frac{1}{|8\sin x-5|}=e^{|4\sin x-1|}-\frac{1}{|4\sin x-1|}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=e^t-\dfrac{1}{t}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=e^t+\dfrac{1}{t^2}>0$ với mọi $t\in(0;+\infty)$.

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f\left(|8\sin x-5|\right)=f\left(|4\sin x-1|\right)\Leftrightarrow |8\sin x-5|=|4\sin x-1|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8\sin x - 5 = 4\sin x - 1 \\ 8\sin x - 5 = 1 - 4\sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Bài 21. Giải phương trình $\log_2(\cot x - \tan x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải. Điều kiện: $\cot x - \tan x > 0$.

Kết hợp $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ với $\cot x - \tan x > 0$ ta suy ra $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Vì $\cot x - \tan x = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}$ nên phương trình đã cho tương đương với $\log_2 \cos 2x - \log_2 \sin 2x = \cos 2x - \sin 2x$

$$\Leftrightarrow \log_2 \cos 2x - \cos 2x = \log_2 \sin 2x - \sin 2x. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t - t$ với $t \in (0; 1)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} - 1 > 0$ với mọi $t \in (0; 1)$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0; 1)$. Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow f(\cos 2x) = f(\sin 2x) \Leftrightarrow \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow \tan 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{8}$.

Bài 22. Giải phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x} + \dfrac{1}{2} = \cos 2x + \log_4\left(4\cos^3 2x - \cos 6x - 1\right)$.

Lời giải. Điều kiện: $4\cos^3 2x - \cos 6x - 1 > 0$.

Đặt $y = \cos 2x$, khi đó $y \le 1$ và phương trình đã cho trở thành

$$2^{y-1} + \frac{1}{2} = y + \log_4(3y - 1).$$

Đặt $t=\log_2(3y-1)$, khi đó $2^t=3y-1$, ta có hệ phương trình $\begin{cases}2^y=2y+t-1\\2^t=3y-1.\end{cases}$

Từ hệ ta suy ra $2^y+y=2^t+t$. (1)

Xét hàm số $f(u)=2^u+u$, ta có hàm $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f(y)=f(t)\Leftrightarrow y=t,$$

hay $2^t=3t-1\Leftrightarrow 2^t-3t+1=0$. (2)

Xét hàm $g(t)=2^t-3t+1$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(t)=2^t\ln 2-3$; $g'(t)=0\Leftrightarrow t=\log_2\dfrac{3}{\ln 2}$. Suy ra phương trình $g(t)=0$ có không quá 2 nghiệm. Mà $t=1$, $t=3$ là nghiệm nên đó là tất cả các nghiệm.

Với $t=1$, ta có $\log_2(3y-1)=1\Leftrightarrow 3y-1=2\Leftrightarrow y=1$.

Suy ra $\cos 2x=1\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Với $t=3$, ta có $\log_2(3y-1)=3\Leftrightarrow 3y-1=8\Leftrightarrow y=3$, không thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Bài 23. Giải phương trình $\log_3\dfrac{4x^2+2}{x^6+x^2+1}=x^6-3x^2-1$.

Lời giải. Để ý rằng $\left(x^6+x^2+1\right)-\left(4x^2+2\right)=x^6-3x^2-1$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3\left(4x^2+2\right)+\left(4x^2+2\right)=\log_3\left(x^6+x^2+1\right)+\left(x^6+x^2+1\right). \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1$; $f'(t)>0$ với mọi $t>0$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f\left(4x^2+2\right)=f\left(x^6+x^2+1\right)\Leftrightarrow 4x^2+2=x^6+x^2+1$$

$$\Leftrightarrow x^6-3x^2-1=0.$$

Đặt $u=x^2$, khi đó $u\ge 0$ và phương trình trở thành $u^3-3u=1$.

Đặt $u=2v$, khi đó $v\ge 0$ và phương trình trở thành $4v^3-3v=\dfrac{1}{2}$. (2)

Xét hàm số $g(v)=4v^3-3v$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $g'(v)=0\Leftrightarrow v=\pm\dfrac{1}{2}$.

Vì $g(0)=0$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=-1$, $g(1)=1$ nên phương trình (2) chỉ có một nghiệm duy nhất $v_0>0$, với $v_0<1$. Đặt $v=\cos t$ với $0<t<\frac{\pi}{2}$, phương trình (2) trở thành $\cos 3t=\frac{1}{2}$. Phương trình này chỉ có nghiệm $t=\frac{\pi}{9}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $v=\cos\frac{\pi}{9}$, $u=2\cos\frac{\pi}{9}$ và $x=\pm\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\pm\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}$.

Bài 24. Giải phương trình $\log_2\frac{4^x-2^x+1}{2.16^x-2.4^x+1}=2^x\left(2.8^x-3.2^x+1\right)$.

Lời giải. Ta thấy $\begin{cases}4^x-2^x+1>0\\2.16^x-2.4^x+1>0\end{cases}$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\left(4^x-2^x+1\right)-\log_2\left(2.16^x-2.4^x+1\right)=\left(2.16^x-2.4^x+1\right)-\left(4^x-2^x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(4^x-2^x+1\right)+\left(4^x-2^x+1\right)=\log_2\left(2.16^x-2.4^x+1\right)+\left(2.16^x-2.4^x+1\right).$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1$; $f'(t)>0$ với mọi $t>0$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra phương trình tương đương với

$$f\left(4^x-2^x+1\right)=f\left(2.16^x-2.4^x+1\right)\Leftrightarrow 4^x-2^x+1=2.16^x-2.4^x+1$$

$$\Leftrightarrow 2.16^x-3.4^x+2^x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=1\\2^x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\log_2\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0$, $x=\log_2\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Bài 25. Giải phương trình $2x^2-6x+2=\log_2\frac{2x+1}{(x-1)^2}$.

Lời giải. Điều kiện: $\frac{2x+1}{(x-1)^2}>0\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\neq 0\\2x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x\neq 1.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\left(x+\frac{1}{2}\right)+2\left(x+\frac{1}{2}\right)=\log_2(x-1)^2+2(x-1)^2. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+2t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+2$; $f'(t)>0$ với mọi $t>0$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left((x-1)^2\right)\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}=(x-1)^2\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$.

Bài 26. Giải phương trình $(x+2)^2+\log_2\frac{x^2+4x+5}{\sqrt{2x+3}}=2\sqrt{2x+3}$.

Lời giải. Điều kiện: $2x+3>0\Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+2)^2+1+\log_2\left((x+2)^2+1\right)=2\sqrt{2x+3}+\log_2 2\sqrt{2x+3}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=1+\frac{1}{t\ln 2}$; $f'(t)>0$ với mọi $t>0$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f\left((x+2)^2+1\right)=f\left(2\sqrt{2x+3}\right)\Leftrightarrow(x+2)^2+1=2\sqrt{2x+3}.$$

Đặt $y+2=\sqrt{2x+3}$, khi đó $y+2\geq 0$ và ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+2)^2+1=2(y+2)\\(y+2)^2=2x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x-2y+1=0\\y^2+4y-2x+1=0\end{cases}$$

Trừ hai phương trình của hệ, ta được

$$x^2-y^2+6(x-y)=0\Leftrightarrow(x-y)(x+y+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x+y+6=0.\end{array}\right.$$

Vì $x\geq-\frac{3}{2}$ và $y\geq-2$ nên $x+y+6>0$.

Với $x=y$, hệ trở thành $\begin{cases} x=y \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-1.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1$.

Bài 27. Giải phương trình $4^{|\sin x|}+2^{|\cos x|+2}=8$.

Lời giải. Đặt $|\sin x|=t$, phương trình đã cho trở thành $4^t+2^{\sqrt{1-t^2}+2}=8$, $t\in[0;1]$.

Xét hàm số $h(t)=4^t+2^{\sqrt{1-t^2}+2}$, $t\in[0;1]$.

Ta có $h'(t)=4^t\ln 4-4.2^{\sqrt{1-t^2}}\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\ln 2$;

$$h'(t)=0\Leftrightarrow \frac{2^{2t}}{2t}=\frac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}, 0<t<1. \quad (1)$$

Xét hàm số $u(a)=\dfrac{2^a}{a}$, $0<a\le 2$. Ta có $u'(a)=\dfrac{2^a a\ln 2-2^a}{a^2}$;

$u'(a)=0\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{\ln 2}\in(1;2)$; $u'(a)>0\Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln 2}<a<2$ và

$u'(a)<0\Leftrightarrow 0<a<\dfrac{1}{\ln 2}$. (2)

Chú ý rằng $u(1)=u(2)=2$.

Suy ra $u(a)>2\Leftrightarrow 0<a<1$ và $u(a)<2\Leftrightarrow 1<a<2$. (3)

Để tìm nghiệm của (1) ta xét hai trường hợp sau

TH 1. $2t>1$. Từ (3) ta có $\dfrac{2^{2t}}{2t}<2<\dfrac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}$, không thỏa mãn.

TH 2. $0<2t\le 1$. Từ (2) ta có $u(a)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1]$, nên từ (1) suy ra

$$2t=\sqrt{1-t^2}\text{, hay } t=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ta có $h(0)=9, h(1)=8, h\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=5.4^{\frac{1}{\sqrt{5}}}>5.4^{\frac{2}{5}}>8.$

Suy ra $h(t)\ge 8$ với mọi $t\in[0;1]$ và phương trình $h(t)=8$ có duy nhất nghiệm $t=1$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Bài 33. Chứng minh phương trình $x^5 - 4x^2 - 4x = 1$ có đúng một nghiệm và nghiệm đó nhận giá trị dương.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $x^5 = (2x+1)^2$. (1)

Nếu x là nghiệm thì từ (1) ta có $x^5 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$. Do đó $x^5 = (2x+1)^2 \ge 1$. Suy ra $x \ge 1$.

Với $x \ge 1$, xét $f(x) = x^5 - 4x^2 - 4x - 1$.

Ta có $f'(x) = 5x^4 - 8x - 4$; $f''(x) = 20x^3 - 8$; $f''(x) > 0$ với mọi $x \ge 1$. Do đó $f'(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Mà $f'(1) = -7$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$ nên tồn tại $x_0 \in [1; +\infty)$ để $f'(x_0) = 0$.

Suy ra bảng biến thiên:

x	1		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-8	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất và nghiệm đó có giá trị dương, điều phải chứng minh.

3 Phương trình và bất phương trình chứa tham số

Bài toán: Tìm điều kiện để phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm trên tập D.

Cách giải: Dựa vào các kết quả:

- Phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g(m)$ thuộc tập giá trị của hàm số $y = f(x)$ trên D.

- Phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = g(m)$ cắt nhau.

- Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ là số giao điểm của đường thẳng $y = g(m)$ với đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Từ đó ta có các bước giải:

- Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

- Dựa vào bảng biến thiên ta xác định m để đường thẳng $y = g(m)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Chú ý: Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và $m=\min\limits_{D} f(x)$, $M=\max\limits_{D} f(x)$ thì phương trình $f(x)=g(m)$ có nghiệm $x\in D$ khi và chỉ khi $m\le g(m)\le M$.

Sau đây ta xét một số ví dụ

3.1 Xét hàm trực tiếp

Ví dụ 1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x\sqrt{x}=\sqrt[4]{(x^2+1)^3} \Leftrightarrow x^6=(x^2+1)^3 \Leftrightarrow x^2=x^2+1$, vô nghiệm.

Suy ra $f'(x)$ không đổi dấu trên $(0;+\infty)$. Mà $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{8}}-\dfrac{1}{2}<0$ nên $f'(x)<0$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Do đó $f(x)$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=0$ suy ra bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị của m là $0<m\le 1$.

Ví dụ 2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ trên tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$;

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{x^2-x+1}=(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2x+1)(2x-1)\ge 0\\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)(2x-1) \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{vô nghiệm.}$$

Suy ra $f'(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$. Mà $f'(0) = 1 > 0$ nên $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = 1$.

và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = -1$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m < 1$.

Ví dụ 3. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^4 - 13x + m = (1-x)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 4x^3 - 6x^2 - 9x = 1 - m \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm $x \leq 1$.

Xét hàm số $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x$ trên $(-\infty; 1]$.

Ta có $f'(x) = 12x^2 - 12x - 9$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	-11

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $1-m\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow m\ge-\frac{3}{2}$.

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối B, 2006)

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}2x+1\ge0\\ x^2+mx+2=(2x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\frac{1}{2}\\ 3x^2+4x-1=mx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\frac{1}{2}\\ 3x+4-\frac{1}{x}=m\end{cases}\quad(1)$$

(do $x=0$ không là nghiệm của phương trình).

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $x\ge-\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x)=3x+4-\frac{1}{x}$ với $-\frac{1}{2}\le x\ne0$.

Ta có $f'(x)=3+\frac{1}{x^2}$; $f'(x)>0$ với mọi $-\frac{1}{2}\le x\ne0$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m \geq \frac{9}{2}$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mọi m dương, phương trình sau có 2 nghiệm thực phân biệt $x^2+2x-8=\sqrt{m(x-2)}$.

(Tuyển sinh Đại học Khối B, 2007)

Lời giải. Với $m>0$, điều kiện của phương trình là $x \geq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-2)\left(x^3+6x^2-32-m\right)=0.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $x^3+6x^2-32-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(2;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x)=x^3+6x^2-32$ trên $(2;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=3x^2+12x$; $f'(x)>0$ với mọi $x\in(2;+\infty)$.

Suy ra bảng biến thiên

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa và bảng biến thiên ta có phương trình $f(x)=m$ có nghiệm $x\in(2;+\infty)$ với mọi $m>0$, điều phải chứng minh.

Ví dụ 6. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right).$$

Lời giải. Điều kiện: $0\leq x\leq 4$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right)=m.$$

Xét hàm số $f(x)=\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right)$ với $0\leq x\leq 4$.

Ta có

$$f'(x)=\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x+12}}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right)+\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{4-x}}-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}\right).$$

Nhận thấy $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (0; 4)$. Do đó hàm $f(x)$ đồng biến trên $[0; 4]$. Suy ra phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên $[0; 4]$ khi và chỉ khi

$$f(0) \le m \le f(4) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-2\right) \le m \le 12.$$

Nhận xét. Ta có thể giải như sau

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}} = m.$

Ta có hàm số $g(x) = x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}$ đồng biến và nhận giá trị dương trên $[0; 4]$, hàm số $h(x) = \sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}$ nghịch biến và nhận giá trị dương trên $[0; 4]$. Do đó hàm số $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ đồng biến trên $[0; 4]$. Suy ra phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên $[0; 4]$ khi và chỉ khi

$$f(0) \le m \le f(4) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(\sqrt{5}-2) \le m \le 12.$$

Ví dụ 7. Tìm m để phương trình sau có đúng 3 nghiệm phân biệt

$$m\sqrt{x^2+2} = x + m.$$

Lời giải. Vì $\sqrt{x^2+2}-1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$m\left(\sqrt{x^2+2}-1\right) = x \Leftrightarrow m = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}-1}.$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}-1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}-1-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}}{\left(\sqrt{x^2+2}-1\right)^2} = \frac{2-\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}\left(\sqrt{x^2+2}-1\right)^2};\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$.

Ví dụ 8. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt

$$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2008)

Lời giải. Điều kiện: $0\le x\le 6$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}$ trên $[0;6]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}-\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}}-\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}}+\frac{1}{\sqrt{2x}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}}+\frac{1}{\sqrt{6-x}}. \qquad (*)$$

Xét hàm $g(t)=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{t^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Rõ ràng $g(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra phương trình $(*)\Leftrightarrow f(2x)=f(6-x)\Leftrightarrow 2x=6-x\Leftrightarrow x=2$.

Suy ra bảng biến thiên

x	0	2	6
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$ ↗	$3\sqrt{2}+6$	↘ $2\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}$

Dựa và bảng biến thiên ta có phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m<3\sqrt{2}+6$.

Nhận xét. Ta có thể giải phương trình $f'(x)=0$ và xét dấu $f'(x)$ như sau:

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x}}-\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}\right)$.

Đặt $u(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}$, $v(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}-\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$.

Ta thấy $u(2)=v(2)=0$ nên $f'(2)=0$. Hơn nữa $u(x),v(x)$ cùng dương trên khoảng $(0;2)$ và cùng âm trên khoảng $(2;6)$.

Từ đó ta có bảng biến thiên như trên.

Ví dụ 9. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$x^3-3x+4=m\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1\right).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{x^3-3x+4}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1}=m.$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^3-3x+4}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1}$ với $x\ge 1$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1\right)\left(3x^2-3\right)-\left(x^3-3x+4\right)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1\right)^2}.$

Với $x>1$, ta có $\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1\right)\left(3x^2-3\right)>0$; $x^3-3x+4>0$ và

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}<0$. Suy ra $f'(x)>0$ với mọi $x>1$.

Do đó $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Vì vậy phương trình $f(x)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge 1$.

Đối với bài toán bất phương trình thì cách giải tương tự, xét các ví dụ sau

Ví dụ 10. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}\ge m$.

Lời giải. Điều kiện: $-5\le x\le 4$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}$ trên $[-5;4]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}=\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x+5}}{2\sqrt{(4-x)(x+5)}}$;

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x}=\sqrt{x+5}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Suy ra bảng biến thiên

x	-5		$-\frac{1}{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq 3\sqrt{2}$.

Ví dụ 11. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm $mx - \sqrt{x-3} \leq m+1$.

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 3$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $m \leq \dfrac{\sqrt{x-3}+1}{x-1}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}+1}{x-1}$ với $x \geq 3$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{5-x-\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-3}(x-1)^2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x-3 = (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Suy ra bảng biến thiên

x	3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0

Dựa và bảng biến thiên ta suy ra bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \dfrac{2}{3}$.

Trong các ví dụ trên, chúng ta đã giải các bài toán tìm điều kiện có nghiệm qua hai bước chính: Lập bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ và dựa vào bảng biến thiên để tìm m. Tuy nhiên, trong một số trường hợp việc lập bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ gặp nhiều khó khăn. Hơn nữa trong biểu thức lại có nhiều dấu hiệu để ta có thể đổi biến, chẳng hạn trong $f(x)$ chứa các biểu thức giống nhau. Khi đó chúng ta sẽ đổi biến và thực hiện các bước với hàm số của biến mới:

3.2 Đổi biến

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi $m > 0$ thì phương trình sau luôn có nghiệm

$$x^2 + \left(m^2 - \frac{5}{3}\right)\sqrt{x^2+4} + 2 - m^3 = 0.$$

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{x^2+4}$, khi đó $t\ge 2$ và phương trình trở thành

$$t^2+\left(m^2-\frac{5}{3}\right)t-m^3-2=0. \qquad (1)$$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (2) có nghiệm $t\ge 2$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+\left(m^2-\frac{5}{3}\right)t-m^3-2$, ta có $f(t)$ liên tục trên $[2;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Ta sẽ chứng minh $f(2)\le 0$ với mọi $m\ge 0$. Thật vậy

$$f(2)=-m^3+2m^2-\frac{4}{3}.$$

Xét hàm số $g(m)=-m^3+2m^2-\frac{4}{3}$ với $m\ge 0$.

Ta có $g'(m)=-3m^2+4m$; $g'(m)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

m	0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$g'(m)$		$+$	0	$-$	
$g(m)$	0	$\nearrow$	$-\frac{4}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $f(2)=g(m)<0$ với mọi $m\ge 0$. Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(x+3(6-x)}=m.$$

Lời giải. Điều kiện: $-3\le x\le 6$.

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}$, khi đó $t^2=9+\sqrt{(x+3)(6-x)}$ và phương trình đã cho trở thành $t-\dfrac{t^2-9}{2}=m\Leftrightarrow t^2-2t=9-2m. \qquad (2)$

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}$ trên $[-3;6]$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=\sqrt{6-x}\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Suy ra bảng biến thiên

x	-3		$\frac{3}{2}$		6
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	3	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	3

Dựa và bảng biến thiên ta có $3 \le g(x) \le 3\sqrt{2}$ với mọi $x \in [-3; 6]$. Suy ra $t \in \left[3; 3\sqrt{2}\right]$. Do đó phương trình đã cho có nghiệm x khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in \left[3; 3\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ với $t \in \left[3; 3\sqrt{2}\right]$.

Ta có $f'(t) = 2t - 2$; $f'(t) > 0$ với mọi $t \in \left[3; 3\sqrt{2}\right]$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $\left[3; 3\sqrt{2}\right]$. Suy ra phương trình $f(t) = 9 - 2m$ có nghiệm $t \in \left[3; 3\sqrt{2}\right]$ khi và chỉ khi $f(3) \le 9 - 2m \le f\left(3\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \dfrac{6\sqrt{2}-9}{2} \le m \le 3.$

Nhận xét. Dạng của phương trình này là đối xứng với $\sqrt{f(x)}$ và $\sqrt{g(x)}$. Khi đó một phép đổi biến thường dùng là đặt $t = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$, hoặc tổng quát hơn $t = \sqrt{f(x)} + a\sqrt{g(x)}$.

Ví dụ 3. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}.$$

Lời giải. Điều kiện: $0 \le x \le 9$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$9 + 2\sqrt{x(9-x)} = -x^2 + 9x + m \Leftrightarrow x(9-x) - 2\sqrt{x(9-x)} = 2 - m.$$

Đặt $t = \sqrt{x(9-x)}$, khi đó $0 \le t \le \dfrac{x+9-x}{2} = \dfrac{9}{2}$ và phương trình trở thành

$$t^2 - 2t = 2 - m. \qquad (2)$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in \left[0; \dfrac{9}{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-2t$ trên $\left[0;\dfrac{9}{2}\right]$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		1		$\frac{9}{2}$
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{45}{4}$

Dựa vào bảng biên thiên ta suy ra phương trình $f(t)=2-m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1\le 2-m\le\dfrac{45}{4}\Leftrightarrow -\dfrac{37}{4}\le m\le 3$.

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$2\sqrt{-x^2-2x+3}-(m-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}\right)+m+1=0.$$

Lời giải. Điều kiện: $-3\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}$, khi đó $t^2=4+\sqrt{-x^2-2x+3}\ge 4$, suy ra $t\ge 2$.

Mặt khác $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{2(x+3+1-x)}=2\sqrt{2}$.

Từ đó ta có $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$. Khi đó phương trình trở thành

$$t^2-(m-1)t+m-3=0\Leftrightarrow m=\frac{t^2+t-3}{t-1}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+t-3}{t-1}$ với $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t^2-2t+2}{(t-1)^2}>0$ với mọi $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[2;2\sqrt{2}\right]$. Suy ra phương trình $f(t)=m$ có nghiệm $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$ khi và chỉ khi $f(2)\le m\le f\left(2\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow 3\le m\le\dfrac{12\sqrt{2}+13}{7}$.

Ví dụ 5. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$6+x+2\sqrt{(4-x)(2x-2)}=m+4\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-2}\right).$$

(Tuyển sinh Cao Đẳng, 2011)

Lời giải. Điều kiện: $1 \le x \le 4$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2}$ với $1 \le x \le 4$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}} + \dfrac{1}{\sqrt{2x-2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Suy ra bảng biến thiên

x	1		3		4
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$\sqrt{3}$	↗	3	↘	$\sqrt{6}$

Đặt $t = \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2}$. Khi đó dựa vào bảng biến của hàm $f(x)$ ta suy ra $t \in \left[\sqrt{3}; 3\right]$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 4t + 4 = m$. (*)

Do đó phương trình đã cho có nghiệm x khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm $t \in \left[\sqrt{3}; 3\right]$.

Xét hàm số $g(t) = t^2 - 4t + 4$ trên $\left[\sqrt{3}; 3\right]$.

Ta có bảng biến thiên

t	$\sqrt{3}$		2		4
$g'(t)$		−	0	+	
$g(t)$	$7-4\sqrt{3}$	↘	0	↗	1

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $g(t) = m$ có nghiệm $t \in \left[\sqrt{3}; 3\right]$ khi và chỉ khi $0 \le m \le 1$.

Ví dụ 6. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$m\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2\right) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối B, 2004)

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ với $-1 \le x \le 1$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Suy ra bảng biến thiên

x	-1		0		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $0 \le g(x) \le \sqrt{2}$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$, khi đó $t \in \left[0; \sqrt{2}\right]$ và $t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4}$, phương trình trở thành

$$m(t+2) = 2 - t^2 + t \Leftrightarrow \frac{-t^2+t+2}{t+2} = m. \qquad (*)$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm $t \in \left[0; \sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$ trên $\left[0; \sqrt{2}\right]$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{-t^2-4t}{(t+2)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -4 \notin \left[0; \sqrt{2}\right]. \end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}-1$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t \in \left[0; \sqrt{2}\right]$ khi và chỉ khi $\sqrt{2} - 1 \le m \le 1$.

Ví dụ 7. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + 7 + m\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^4+x^2+1} + m\left(\sqrt{x^2-x+1} - 2\right).$$

Lời giải. Phương trình đã tương đương với

$$x^2 - \sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)} + m\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} + 2\right) + 7 = 0.$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ trên tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$;

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}=(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+1)(2x-1)\ge 0\\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+1)(2x-1)\ge 0\\ x=0\end{cases}\ \text{vô nghiệm.}$$

Suy ra $f'(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$. Mà $f'(0)=1>0$ nên $f'(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=1$

và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=-1$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra tập giá trị của $f(x)$ là $(-1;1)$. Hay ta có $t\in(-1;1)$.

Mặt khác $t^2=2x^2+2-2\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$ nên phương trình trở thành

$$\frac{t^2-2}{2}+m(t+2)+7=0\Leftrightarrow t^2+12=-2m(t+2)\Leftrightarrow\frac{t^2+12}{t+2}=-2m.$$

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t^2+12}{t+2}$ với $t\in(-1;1)$.

Ta có $g'(t)=\dfrac{t^2+4t-12}{(t+2)^2}$; $g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-6\end{array}\right.$ không thỏa mãn.

Suy ra bảng biến thiên

t	-1		1
$g'(t)$		$-$	
$g(t)$	13	$\searrow$	$\dfrac{13}{3}$

Dựa và bảng biến thiên ta suy ra phương trình $g(t)=-2m$ có nghiệm $t\in(-1;1)$ khi và chỉ khi $\dfrac{13}{3}<-2m<13\Leftrightarrow-\dfrac{13}{2}<m<-\dfrac{13}{6}$.

Nhận xét. Chúng ta có thể tìm tập giá trị của hàm $f(x)$ hay miền xác định của biến t bằng cách khác như sau

$$\text{Ta có } t=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}.$$

$$\text{Suy ra } |t|=\frac{\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}<\frac{\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|}{\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|}=1.$$

Do đó $-1<t<1$.

Ví dụ 8. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2007)

Lời giải. Điều kiện: $x\geq1$.

Phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=m$.

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$, khi đó phương trình trở thành $-3t^2+2t=m$. (1)

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ với $x\geq 1$. Ta có $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$; $g'(x)>0$ với mọi $x\geq 1$. Do đó hàm $g(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$. Suy ra với $x\geq 1$ thì $0\leq g(x)<1$. Từ đó ta có $t\in[0;1)$ và phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $t\in[0;1)$.

Xét hàm số $f(t)=-3t^2+2t$ trên $[0;1)$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f(t)$			$\frac{1}{3}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				-1

Dựa và bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(t)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1<m\leq\dfrac{1}{3}$.

Nhận xét. 1. Ta có thể tìm điều kiện của t như sau

Ta có $0\leq t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\dfrac{2}{x+1}}<1$ với mọi $x\geq 1$.

2. Phương trình trên gọi là phương trình đẳng cấp bậc hai đối với $\sqrt{f(x)}$ và $\sqrt{g(x)}$. Chúng ta sẽ đổi biến $t=\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$.

Ví dụ 9. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x-2}-2\sqrt[4]{x^2-2x}+m\sqrt{x}=0.$$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}-2\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{x}}+m=0$.

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{x}}$, khi đó $0\leq t=\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{x}}=\sqrt[4]{1-\dfrac{2}{x}}<1$ với mọi $x\geq 1$ và phương trình trở thành $t^2-2t+m=0$. (1)

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $t\in[0;1)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-2t$ trên $[0;1)$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		1
$f(t)$	0	$\searrow$	-1

Dựa và bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(t)=-m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1<-m\le 0 \Leftrightarrow 0\le m<-1$.

Ví dụ 10. Tìm tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$m\left(\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x^2-4}\right)-\sqrt{x+2}=2\sqrt[4]{x^2-4}.$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2$.

Rõ ràng $x=2$ không là nghiệm của phương trình.

Với $x>2$, ta có phương trình đã cho tương đương với

$$m\left(\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+2}}+2\right)-\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}=2.$$

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-2}}$, khi đó vì $\dfrac{x+2}{x-2}=1+\dfrac{4}{x-2}>1$ với mọi $x>2$ nên ta có $t>1$ và phương trình trở thành

$$m\left(\frac{1}{t}+2\right)-t=2 \Leftrightarrow m=\frac{t^2+2t}{2t+1}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+2t}{2t+1}$ với $t>1$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}$; $f'(t)>0$ với mọi $t>1$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. Suy ra phương trình $f(t)=m$ có nghiệm $t>1$ khi và chỉ khi $m>f(1)=1$.

Ví dụ 11. Tìm tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$5x^2+6x+7=m(x+1)\sqrt{x^2+2}.$$

Lời giải. Nhận thấy $5x^2+6x+7=3(x+1)^2+2\left(x^2+2\right)$.

Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$2\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2+3(x+1)^2=m(x+1)\sqrt{x^2+2}.$$

Rõ ràng $x=-1$ không là nghiệm nên phương trình tương đương với

$$2\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}+3\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}=m. \qquad (1)$$

Đặt $t=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$, khi đó phương trình (1) trở thành $\dfrac{2}{t}+3t=m.$ (2)

Tìm điều kiện của t. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{2-x}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $t\in\left(-1;\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$, $t\neq 0$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t\in\left(-1;\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$, $t\neq 0$.

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{2}{t}+3t$ với $t\in\left(-1;\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$, $t\neq 0$.

Ta có $g'(t)=\dfrac{3t^2-2}{t^2}$; $g'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra bảng biến thiên

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
x & -1 & & -\frac{\sqrt{6}}{3} & & 0 & & \frac{\sqrt{6}}{3} & & \frac{\sqrt{6}}{2} \\
\hline
g'(t) & & + & 0 & - & \| & - & 0 & + & \\
\hline
 & & & & & \| & +\infty & & & \frac{13}{\sqrt{6}} \\
g(t) & & & -2\sqrt{6} & & \| & \searrow & & \nearrow & \\
 & -5 & \nearrow & & \searrow & \| & & 2\sqrt{6} & & \\
 & & & & & -\infty \| & & & &
\end{array}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị của m là

$$m \geq 2\sqrt{6},\ m \leq -2\sqrt{6}.$$

Ví dụ 12. Tìm tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{x(x-1)}\right)=1.$$

Lời giải. Điều kiện: $x>1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{x(x-1)}\right)=1 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow m\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{x(x-1)}=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{x(x-1)}=(1-m)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{\frac{x-1}{x}}=1-m.$$

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x}}$. Khi đó $0<t<1$, phương trình trở thành

$$\frac{1}{t^2}+t=1-m \Leftrightarrow m=-\frac{1}{t^2}-t+1 \qquad (2)$$

Phương trình (1) có nghiệm x $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t\in(0;1)$.

Xét hàm $f(t)=-\dfrac{1}{t^2}-t+1,\ t\in(0;1)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2}{t^3}-1>0,\ \forall t\in(0;1)$.

Suy ra bảng biến thiên

t	0		1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1

Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow m < -1$.

Vậy giá trị của m là $m < -1$.

Ví dụ 13. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$\frac{\left(x+2-\sqrt{x^2+1}\right)^2}{x^2+1}+\frac{18\sqrt{x^2+1}}{x+2+\sqrt{x^2+1}}=m.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)^2+\frac{18}{\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}+1}=m.$$

Đặt $t=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$. Phương trình trở thành $(t-1)^2+\dfrac{18}{t+1}=m.$

Xét hàm $g(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$. Ta có $g'(x)=\dfrac{1-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$;

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có với $x\in(-\infty;+\infty)$ thì $t\in\left(-1;\sqrt{5}\right]$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình

$$(t-1)^2+\frac{18}{t+1}=m \text{ có nghiệm } t\in(-1;\sqrt{5}].$$

Xét hàm $f(t)=(t-1)^2+\dfrac{18}{t+1}$ trên $\left(-1;\sqrt{5}\right]$.

Ta có $f'(t)=2(t-1)-\dfrac{18}{(t+1)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$; $\lim\limits_{t\to(-1)^+}f(t)=+\infty$; $f(2)=7$.

Suy ra bảng biến thiên

t	-1		2		$\sqrt{5}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình $f(t)=m$ có nghiệm $t\in\left(-1;\sqrt{5}\right]$ khi và chỉ khi $m\geq 7$.

Vậy giá trị của m là $m\geq 7$.

Ví dụ 14. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\tan^2x+\cot^2x+m(\tan x+\cot x)+3=0.$$

Lời giải. Điều kiện: $\sin x\cos x\neq 0\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0$.

Đặt $t=\tan x+\cot x$, khi đó $|t|\geq 2$ và $t^2=\tan^2x+\cot^2x+2$, phương trình đã cho trở thành $t^2+mt+1=0\Leftrightarrow \dfrac{t^2+1}{t}=-m$. (1)

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm t thỏa mãn $|t|\geq 2$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-1}{t}$ với $|t|\geq 2$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2}$; $f'(t)>0$ với mọi $t\geq 2$ hoặc $t\leq -2$.

Suy ra bảng biến thiên

t	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$				$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{5}{2}$		$\dfrac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(t)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\le -\frac{5}{2}$ hoặc $m\ge \frac{5}{2}$.

Ví dụ 15. Tìm m để phương trình sau có đúng 1 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$$3\sqrt{\tan x+1}\left(\sin x+2\cos x\right)=m\left(\sin x+3\cos x\right).$$

Lời giải. Với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì $\sin x>0, \cos x>0, \tan x>0$ do đó phương trình đã cho tương đương với

$$3\sqrt{\tan x+1}\left(\frac{\sin x+2\cos x}{\sin x+3\cos x}\right)=m \Leftrightarrow 3\sqrt{\tan x+1}.\frac{\tan x+2}{\tan x+3}=m. \qquad (1)$$

Đặt $t=\tan x$, khi đó $t>0$ và với mỗi $t>0$ cho ta duy nhất một $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$,

phương trình (1) trở thành $3\sqrt{t+1}.\frac{t+2}{t+3}=m.$ (2)

Phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $t>0$.

Xét hàm số $f(t)=3\sqrt{t+1}.\frac{t+2}{t+3}$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=\frac{3}{2\sqrt{t+1}}.\frac{t+2}{t+3}+\frac{3\sqrt{t+1}}{(t+3)^2}>0$ với mọi $t>0$.

Suy ra bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	2 ↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(t)=m$ có đúng 1 nghiệm $t>0$ khi và chỉ khi $m>2$.

Ví dụ 16. Tìm m để phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt

$$x^6+2x^5-3x^4-mx^3-3x^2+2x+1=0.$$

Lời giải. Rõ ràng $x=0$ không là nghiệm của phương trình (1).

Với $x\neq 0$, phương trình (1) tương đương với

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-m=0.$$

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$, $|t|\geq 2$. Khi đó phương trình trở thành

$$t(t^2-3)+2(t^2-2)-3t-m=0\Leftrightarrow t^3+2t^2-6t-4-m=0 \qquad (2)$$

Từ phép đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$, ta có với mỗi $t=\pm 2$ cho ta một giá trị của x; với mỗi t thỏa mãn $|t|>2$ cho ta hai giá trị phân biệt của x. Do đó, phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) chỉ có các nghiệm $t_1=-2$ và $t_2=2$, hoặc (2) có đúng một nghiệm t và thỏa mãn $|t|>2$. Xét hai trường hợp

TH 1. (2) chỉ có các nghiệm $t_1=-2$ và $t_2=2$. Khi đó

$$\begin{cases}8+m=0\\ m=0\end{cases}$$, không tồn tại m.

TH 2. (2) có đúng một nghiệm t và thỏa mãn $|t|>2$.

Ta có phương trình (2) $\Leftrightarrow t^3+2t^2-6t-4=m$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t^2-6t-4$. Ta có

$$f'(t)=3t^2+4t-6;\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{-2\pm\sqrt{22}}{3}.$$

Suy ra bảng biến thiên

t	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{22}}{3}$		-2		$\frac{-2+\sqrt{22}}{3}$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0				0			$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$						$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(t) = m$ có đúng một nghiệm t và thỏa mãn $|t| > 2$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m > f\left(\dfrac{-2-\sqrt{22}}{3}\right) \\ m < f(2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{16+44\sqrt{22}}{27} \\ m < 0 \end{array}\right.$

Ví dụ 17. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc đoạn $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2002)

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$, khi đó với $x \in \left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$ thì $t \in [1; 2]$ và phương trình trở thành $t^2 + t - 2 = 2m$. (*)

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$ khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm $t \in [1; 2]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 2$ trên $[1; 2]$.

Ta có bảng biến thiên

t	1		2
$f(t)$	0	↗	4

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị của m là $0 \le 2m \le 4 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$.

Ví dụ 18. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m + 1 = 0.$$

Lời giải. Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.

Đặt $t = 3^{1+\sqrt{1-x^2}}$, khi đó với $x \in [-1; 1]$ thì $t \in [3; 9]$ và phương trình trở thành

$$t^2 - (m+2)t + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2} = m.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 - 2t + 1}{t - 2}$ trên $[3; 9]$.

Ta có $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{(t-2)^2}$; $f'(t) > 0$ với mọi $t \in (3; 9)$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $[3;9]$. Do đó phương trình $f(t)=m$ có nghiệm trên $[3;9]$ khi và chỉ khi $f(3)\le m\le f(9)\Leftrightarrow 4\le m\le \frac{64}{7}$.

Ví dụ 19. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$

$$4^{1+x}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+2m.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$4\left(4^x+4^{-x}\right)=4(m+1)\left(2^x-2^{-x}\right)+2m.$$

Đặt $t=2^x-2^{-x}$ với $x\in[0;1]$. Xét hàm số $g(x)=2^x-2^{-x}$ với $x\in[0;1]$.

Ta có $g'(x)=\left(2^x+2^{-x}\right)\ln 2$; $g'(x)>0$ với mọi $x\in[0;1]$. Suy ra hàm $g(x)$ đồng biến trên $[0;1]$. Do đó với mọi $x\in[0;1]$ thì $g(0)\le g(x)\le g(1)$ $\Leftrightarrow 0\le g(x)\le\frac{3}{2}$. Suy ra $t\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$.

Ta có $t^2=4^x+4^{-x}-2$ và phương trình trở thành

$$2\left(t^2+2\right)=2(m+1)t+m\Leftrightarrow 2\left(t^2-t+2\right)=(2t+1)m\Leftrightarrow\frac{t^2-t+2}{2t+1}=\frac{m}{2}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-t+2}{2t+1}$ với $t\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2t^2+2t-5}{(2t+1)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}\\ t=\dfrac{-1-\sqrt{11}}{2}\notin\left[0;\dfrac{3}{2}\right]\end{array}\right.$

$$f(0)=2,\ f\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right)=\frac{-2+\sqrt{11}}{2},\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{6}.$$

Suy ra bảng biến thiên

t	0		$\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	$\frac{-2+\sqrt{11}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{11}{6}$

Dựa và bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(t)=\frac{m}{2}$ có nghiệm $t\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$ khi và chỉ khi $\frac{-2+\sqrt{11}}{2}\le\frac{m}{2}\le 2\Leftrightarrow -2+\sqrt{11}\le m\le 4.$

Ví dụ 20. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$(4m-3)\sqrt{x+3}+(3m-4)\sqrt{1-x}+m-1=0.$$

Lời giải. Điều kiện: $-3\le x\le 1.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$m\left(4\sqrt{x+3}+3\sqrt{1-x}+1\right)=3\sqrt{x+3}+4\sqrt{x-1}+1$$

$$\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{x+3}+4\sqrt{x-1}+1}{4\sqrt{x+3}+3\sqrt{1-x}+1}=m. \quad (1)$$

Vì $\left(\sqrt{x+3}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2=4$ nên ta có thể đặt $\begin{cases}\sqrt{x+3}=2\sin\alpha\\ \sqrt{1-x}=2\cos\alpha\end{cases}$ với $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$

Khi đó phương trình (1) trở thành $\frac{6\sin\alpha+8\cos\alpha+1}{8\sin\alpha+6\cos\alpha+1}=m. \quad (2)$

Đặt $t=\tan\frac{\alpha}{2}$, khi đó $t\in[0;1]$; $\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, phương trình (2) trở thành $\frac{7t^2-12t-9}{5t^2-16t-7}=m. \quad (3)$

Xét hàm số $f(t)=\frac{7t^2-12t-9}{5t^2-16t-7}$ với $t\in[0;1]$.

Ta có $f'(t)=-\frac{52t^2+8t+60}{(5t^2-16t-7)^2}$; $f'(t)<0$ với mọi $t\in[0;1]$. Do đó hàm $f(t)$ nghịch biến trên $[0;1]$. Suy ra phương trình $f(t)=m$ có nghiệm $t\in[0;1]$ khi và chỉ khi $f(0)\le m\le f(1)\Leftrightarrow\frac{7}{9}\le m\le\frac{9}{7}.$

Nhận xét. Ta có thể xét trực tiếp hàm $g(x)=\frac{3\sqrt{x+3}+4\sqrt{x-1}+1}{4\sqrt{x+3}+3\sqrt{1-x}+1}$ để tìm điều kiện có nghiệm của phương trình (1), hoặc xét hàm $h(\alpha)=\frac{6\sin\alpha+8\cos\alpha+1}{8\sin\alpha+6\cos\alpha+1}$ để tìm điều kiện có nghiệm của phương trình (2).

Ví dụ 21. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt

$$m2^{\sqrt[3]{x^2}+1}+(2m+1)\left(3-\sqrt{5}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}+\left(3+\sqrt{5}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}=0.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$2m+(2m-1)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}=0. \qquad (1)$$

Đặt $t=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}$, khi đó $t\geq 1$, phương trình (1) trở thành

$$2m+(2m-1)\frac{1}{t}+t=0\Leftrightarrow -2m(t+2)=t^2-1\Leftrightarrow \frac{t^2-1}{t+2}=-2m. \qquad (2)$$

Với $t\geq 1$ ta có $t=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\log^3_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} t}$. Do đó với $t=1$ thì có duy nhất $x=0$; với $t>1$ thì ta có 2 giá trị của x.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-1}{t+2}$ với $t\geq 1$.

Ta có $f'(t)=\frac{t^2+4t+1}{(t+2)^2}$; $f'(t)>0$ với mọi $t\geq 1$.

Suy ra bảng biến thiên:

t	1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(t)=-2m$ có tối đa 1 nghiệm $t\geq 1$. Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm x phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t>1 \Leftrightarrow -2m>0\Leftrightarrow m<0$.

Ví dụ 22. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$(x-2-m)\sqrt{x-1}\leq m-4.$$

(Tuyển sinh Cao Đẳng, 2013)

Lời giải. Điều kiện: $x\geq 1$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}$, khi đó $t\ge 0$ và bất phương trình trở thành

$$\left(t^2-1-m\right)t\le m-4\Leftrightarrow m\ge\frac{t^3-t+4}{t+1}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^3-t+4}{t+1}$ với $t\ge 0$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{(t-1)\left(2t^2+5t+5\right)}{(t+1)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra bất phương trình $f(t)\le m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge 2$.

Ví dụ 23. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$

$$m\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\le 0.$$

Lời giải. Xét hàm số $g(x)=x^2-2x+2$ với $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		1		$1+\sqrt{3}$
$g(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra với $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$ thì $g(x)\in[1;4]$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2}$, khi đó $t=\sqrt{g(x)}\in[1;2]$ và bất phương trình trở thành

$$m(t+1)\le t^2-2\Leftrightarrow m\le\frac{t^2-2}{t+1}. \qquad (1)$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left[0; 1+\sqrt{3}\right]$ khi và chỉ khi bất phương trình (1) có nghiệm $t \in [1; 2]$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2-2}{t+1}$ với $t \in [1; 2]$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}$; $f'(t) > 0$ với mọi $t \in [1; 2]$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $[1; 2]$. Suy ra bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm $t \in [1; 2]$ khi và chỉ khi $m \leq f(2) = \dfrac{2}{3}$.

Nhận xét. Nếu đề bài yêu cầu tìm m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \left[0; 1+\sqrt{3}\right]$ thì yêu cầu đó tương đương với bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $t \in [1; 2]$. Điều đó tương đương với $m \leq f(1) = -\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 24. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thỏa mãn $-1 \leq x \leq 1$

$$m\sqrt{1-x} + 12\sqrt{1-x^2} \geq 16x + 3m\sqrt{1+x} + 2m + 15.$$

Lời giải. Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$m\left(\sqrt{1-x} - 3\sqrt{1+x}\right) \geq 16x - 12\sqrt{1-x^2} + 2m + 15$$

$$\Leftrightarrow 2\left(9(x+1) - 6\sqrt{(1-x)(1+x)} + (1-x)\right) + m\left(3\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + 2\right) - 5 \leq 0. \quad (1)$$

Đặt $3\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = t$, khi đó (1) trở thành $2t^2 + m(t+2) - 5 \leq 0$ (2)

Xem t là một hàm số của x, ta có $t' = \dfrac{3}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0$ với mọi $x \in (-1; 1)$. Vì $t(-1) = -\sqrt{2}$, $t(1) = 3\sqrt{2}$ nên $-\sqrt{2} \leq t \leq 3\sqrt{2}$ và mỗi $t \in \left[-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right]$ có duy nhất $x \in [-1; 1]$.

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t \in \left[-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right]$.

Do $t+2 > 0$ với mọi $t \in \left[-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right]$ nên (2) $\Leftrightarrow m \leq \dfrac{-2t^2+5}{t+2}$. (3)

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-2t^2+5}{t+2}$ trên $\left[-\sqrt{2};3\sqrt{2}\right]$. Ta có

$f'(t)=\dfrac{-4t(t+2)-(-2t^2+5)}{(t+2)^2}=\dfrac{-2t^2-8t-5}{(t+2)^2}<0$ với mọi $t\in\left[-\sqrt{2};3\sqrt{2}\right]$.

Do đó hàm $f(t)$ nghịch biến trên $\left[-\sqrt{2};3\sqrt{2}\right]$.

Suy ra phương bất phương trình (3) nghiệm đúng mọi $t\in\left[-\sqrt{2};3\sqrt{2}\right]$ khi và chỉ khi $m\le\min\limits_{\left[-\sqrt{2};3\sqrt{2}\right]}f(t)=f\left(3\sqrt{2}\right)=\dfrac{-31}{3\sqrt{2}+2}$.

Vậy giá trị của m là $m\le\dfrac{-31}{3\sqrt{2}+2}$.

Ví dụ 25. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thỏa mãn $|x|\ge\dfrac{1}{2}$

$$9^{2x^2-x}-2(m-1)6^{2x^2-x}+(m+1)4^{2x^2-x}\ge 0.$$

Lời giải. Chia hai vế của bất phương trình cho 4^{2x^2-x} và đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x^2-x}$, ta được

$$t^2-2(m-1)t+m+1\ge 0. \qquad (1)$$

Với $|x|\ge\dfrac{1}{2}$ thì $2x^2-x\ge 0$, do đó $t\ge 1$. Khi đó bất phương trình (1) tương đương với $\dfrac{t^2+2t+1}{2t-1}\ge m.$ (2)

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $|x|\ge\dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t\ge 1$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+2t+1}{2t-1}$ với $t\ge 1$.

Ta có

$$f'(t)=\dfrac{2t^2-2t-4}{(2t-1)^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=2.$$

Suy ra bảng biến thiên

t	1		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có bất phương trình $f(t)\geq m$ nghiệm đúng với mọi $t\geq 1$ khi và chỉ khi $m\leq 3$.

Bài tập

Bài 1. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt

$$m\sqrt{x^2+1}=x+2-m.$$

Bài 2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$x^2-x-\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}=m.$$

Bài 3. Tìm số thực m để phương trình sau có nghiệm thực

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right).\left(m^2.\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}-3.\sqrt[4]{x(x-2)}\right)=2.$$

Bài 4. Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

$$\sin^4x+\cos^4x+\cos^2 4x=m.$$

Bài 5. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$

$$4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0.$$

Bài 6. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x\in[32;+\infty)$

$$\sqrt{\log_2^2x+\log_{\frac{1}{2}}x^2-3}=m(\log_2x-3).$$

Bài 7. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thỏa mãn $|x|\geq\frac{1}{2}$

$$m9^{2x^2-x}-(2m+1)6^{2x^2-x}+m4^{2x^2-x}=0.$$

Bài 8. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc khoảng $(2;4)$

$$(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)-(m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+m-1=0.$$

Bài 9. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$4^x - m.2^{x+1} + 3 - 2m \le 0.$$

Bài 10. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$4\sqrt{6+x-x^2} - 3x = m(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{3-x}).$$

Bài 11. Tìm m để phương trình $x^3 - 4x + \sqrt{x-1} = m$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải bài tập

Bài 1. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt

$$m\sqrt{x^2+1} = x + 2 - m.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$m\left(\sqrt{x^2+1}+1\right) = x+2 \Leftrightarrow m = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}+1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+1-\dfrac{x(x+2)}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-2x+1}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x^2+1 = 4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}\right)} = -1 \text{ và } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1<m<\frac{5}{4}$.

Bài 2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$x^2-x-\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}=m.$$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 2$.

Xét hàm số $f(x)=x^2-x-\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}$ với $-1\le x\le 2$.

Ta có $f'(x)=2x-1-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$;

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(2x-1)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}\sqrt{2-x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}\right)}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Suy ra bảng biến thiên:

x	-1		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$2-\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}-\sqrt{6}$	$\nearrow$	$2-\sqrt{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-\frac{1}{4}-\sqrt{6}\le m\le 2-\sqrt{3}$.

Nhận xét. 1. Nếu chọn $m=-1-\sqrt{2}$ thì ta có bài toán: Giải phương trình sau

$$x^2-x-\sqrt{x+1}-\sqrt{2-x}=-1-\sqrt{2}.$$

Khi đó dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình có tối đa 2 nghiệm, mặt khác $x=0,\ x=1$ là nghiệm nên nghiệm của phương trình là $x=0,\ x=1$.

2. Chúng ta cũng có thể giải phương trình trên bằng cách nhân liên hợp như sau

Phương trình tương đương với

$$\left(x^2-x\right)-\left(\sqrt{x+1}-1\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{2-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-x\right)-\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{x}{\sqrt{2}+\sqrt{2-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-1-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2-x}}=0 \end{array}\right. \qquad (*)$$

Ta thấy $x=1$ là một nghiệm của (*).

Với $x>1$ thì $VT(*)>0=VP(*)$, nên (*) không có nghiệm $x>1$.

Với $x<1$ thì $VT(*)<0=VP(*)$, nên (*) không có nghiệm $x<1$.

3. Cách giải phương trình vô tỷ bằng nhân liên hợp như trên khá quan trọng, các em học sinh nên rèn luyện giải thêm các ví dụ sau

Giải các phương trình và bất phương trình

a) $\sqrt{x^2+21}=\sqrt{x-1}+x^2$.

b) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8\geq 0$.

c) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^3+x^2-4x-1$.

Bài 3. Tìm số thực m để phương trình sau có nghiệm thực

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)\left(m^2.\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}-3.\sqrt[4]{x(x-2)}\right)=2.$$

Lời giải. Điều kiện: $x>2$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\left(m^2.\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x-2}}-3.\sqrt[4]{x(x-2)}\right)=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)$

$$\Leftrightarrow m^2.\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}-3.\sqrt[4]{x(x-2)}=\sqrt{x}-\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\frac{2}{\sqrt{x-2}}-3.\sqrt[4]{x(x-2)}=(1-m^2)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}-3.\sqrt[4]{\frac{x-2}{x}}=1-m^2.$$

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{x}}$. Khi đó $0<t<1$. Phương trình trở thành

$$\frac{1}{t^2}-3t=1-m^2 \qquad (*)$$

Phương trình đã cho có nghiệm $x \Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm $t\in(0;1)$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{1}{t^2}-3t,\ t\in(0;1)$. Ta có $f'(t)=-\dfrac{2}{t^3}-3<0,\ \forall t\in(0;1)$.

Suy ra bảng biến thiên

t	0		1
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-2

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow 1-m^2>-2 \ \Leftrightarrow -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}.$$

Bài 4. Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\cos^2 4x=m.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{3+\cos 4x}{4}+\cos^2 4x=m \Leftrightarrow 4\cos^2 4x+\cos 4x=4m-3. \qquad (1)$$

Đặt $t=\cos 4x$, khi đó với $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ thì $t\in[-1;1]$, phương trình (1) trở thành $4t^2+t=4m-3.$ (2)

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $t\in[-1;1)$. (3)

Xét hàm số $f(t)=4t^2+t$ với $t\in[-1;1)$.

Ta có bảng biến thiên

t	-1		$-\frac{1}{8}$		1
$f(t)$	3	$\searrow$	$-\frac{1}{16}$	$\nearrow$	5

Dựa vào bảng biến thiên suy ra (3) xảy ra $\Leftrightarrow -\frac{1}{16}<4m-3\le 3 \Leftrightarrow \frac{47}{64}<m\le\frac{3}{2}.$

Vậy giá trị m cần tìm là $\frac{47}{64}<m\le\frac{3}{2}.$

Bài 5. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$

$$4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với $\log_2^2 x+\log_2 x+m=0.$

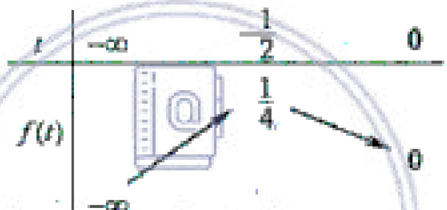
Đặt $t=\log_2 x$, khi đó với $x\in(0;1)$ thì $-\infty<\log_2 x<0$ hay $t<0$. Phương trình trở thành

$$t^2+t+m=0\Leftrightarrow -t^2-t=m. \qquad (*)$$

Phương trình đã cho có nghiệm $x\in(0;1)$ khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm $t<0$.

Xét hàm số $f(t)=-t^2-t$ trên $(-\infty;0)$.

Ta có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị của m là $m\le\frac{1}{4}$.

Bài 6. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x\in[32;+\infty)$

$$\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}}x^2-3}=m\left(\log_2 x-3\right).$$

Lời giải. Với $x\in[32;+\infty)$ thì $\log_2 x\ge 5$, suy ra $\log_2 x-3\ge 2$ nên $m\ge 0$. Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2^2 x+2\log_{\frac{1}{2}}x-3=m^2\left(\log_2 x-3\right)^2. \qquad (1)$$

Đặt $t=\log_2 x$, khi đó $t\ge 5$ và phương trình (1) trở thành

$$t^2-2t-3=m^2(t-3)^2\Leftrightarrow m^2=\frac{t+1}{t-3}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+1}{t-3}$ với $t\ge 5$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-4}{(t-3)^2}<0$ với mọi $t\ge 5$.

Suy ra bảng biến thiên

t	5		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	3	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(t)=m^2$ có nghiệm $t\ge 5$ khi và chỉ khi $1<m^2\le 3$. Kết hợp với $m\ge 0$ ta được $1<m\le\sqrt{3}$.

Bài 7. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thỏa mãn $|x|\ge\frac{1}{2}$

$$m9^{2x^2-x}-(2m+1)6^{2x^2-x}+m4^{2x^2-x}=0.$$

Lời giải. Xét hàm số $g(x)=2x^2-x$ với $|x|\ge\frac{1}{2}$.

Ta có bảng biến

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1		0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa và bảng biến thiên ta có $g(x)\ge 0$ với mọi $|x|\ge\frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$m\left(\frac{3}{2}\right)^{2(2x^2-x)}-(2m+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-x}+m=0.$$

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-x}$, khi đó vì $g(x)\ge 0$ với mọi $|x|\ge\frac{1}{2}$ nên $t\ge 1$ với mọi $|x|\ge\frac{1}{2}$.

Phương trình trở thành $mt^2-(2m+1)t+m=0\Leftrightarrow m\left(t^2-2t+1\right)=t.$ $\quad$ (1)

Rõ ràng $t=1$ không là nghiệm của phương trình (1), do đó

$$(1)\Leftrightarrow\frac{t}{t^2-2t+1}=m. \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{t^2-2t+1}$ với $t>1$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1-t^2}{(t^2-2t+1)^2}$; $f'(t)<0$ với mọi $t>1$.

Suy ra bảng biến thiên

t	1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(t)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m>0$.

Bài 8. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc khoảng $(2;\,4)$

$$(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)-(m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+m-1=0.$$

Lời giải. Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$, khi đó với $x\in(2;\,4)$ thì $t\in(-2;\,0)$ và phương trình đã cho trở thành

$$(m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0\Leftrightarrow\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}=m. \qquad (1)$$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (1) có nghiệm $t\in(-2;\,0)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$ với $t\in(-2;\,0)$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{t^2+4}{(t^2-t+1)^2}$; $f'(t)<0$ với mọi $t\in(-2;\,0)$. Do đó hàm $f(t)$ nghịch biến trên $(-2;\,0)$. Suy ra phương trình $f(t)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $f(0)<m<f(-2)\Leftrightarrow 1<m<\dfrac{15}{7}$.

Bài 9. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$4^x-m.2^{x+1}+3-2m\le 0.$$

Lời giải. Đặt $t=2^x$, khi đó $t>0$ và bất phương trình trở thành

$$t^2 - 2mt + 3 - 2m \le 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+3}{t+1} \le 2m. \qquad (1)$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình (1) có nghiệm $t > 0$.

Xét hàm số $f(t = \dfrac{t^2+3}{t+1})$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \text{ (ktm)}. \end{array}\right.$

Suy ra bảng bản biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra bất phương trình $f(t) \le 2m$ có nghiệm khi và chỉ khi $2m \le 2 \Leftrightarrow m \le 1$.

Bài 10. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$4\sqrt{6+x-x^2} - 3x = m(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{3-x}).$$

Lời giải. Điều kiện: $-2 \le x \le 3$.

Đặt $t = \sqrt{x+2} + 2\sqrt{3-x}$, $-2 \le x \le 3$. Xem t là một hàm số biến x.

Ta có $t' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} - \dfrac{2}{2\sqrt{3-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow x = -1$.

Suy ra bảng biến thiên

x	-2		-1		3
t'	||	$+$	0	$-$	||
t	$2\sqrt{5}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\sqrt{5}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\sqrt{5} \le t \le 5$.

Ta lại có $t^2 = 14 - 3x + 4\sqrt{6+x-x^2}$, hay $4\sqrt{6+x-x^2} - 3x = t^2 - 14$.

Phương trình đã cho trở thành

$$t^2-14=mt,\ \text{với } \sqrt{5}\le t\le 5$$

$$\Leftrightarrow t-\frac{14}{t}=m,\ \text{với } \sqrt{5}\le t\le 5.$$

Xét hàm số $f(t)=t-\frac{14}{t}$ trên $\left[\sqrt{5};5\right]$.

Ta có $f'(t)=1+\frac{14}{t^2}>0,\ \forall t\in\left[\sqrt{5};5\right]$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{5};5\right]$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ pt $f(t)=m$ có nghiệm trên $\left[\sqrt{5};5\right]$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{5})\le m\le f(5)\quad\Leftrightarrow\quad -\frac{9\sqrt{5}}{5}\le m\le\frac{11}{5}.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $-\frac{9\sqrt{5}}{5}\le m\le\frac{11}{5}$.

CHƯƠNG 2
HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1 Hệ phương trình

Khi giải hệ phương trình bằng sử dụng tính đơn điệu của hàm số thì định hướng đầu tiên là chúng ta sẽ dùng phương pháp thế để đưa về xét phương trình một ẩn. Do đó việc tìm được liên hệ với biểu thức đơn giản của các ẩn là rất quan trọng.

Đầu tiên chúng ta sẽ tìm liên hệ đó bằng cách sử dụng tính chất:

Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu trên K thì trên K, ta có

$$f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v\ \text{ với } u,v\in K.$$

1.1 Hệ phương trình đại số

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+x-2=y^3+3y^2+4y\\ x^5+y^3+1=0\end{cases}\quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Ta có phương trình thứ nhất tương đương với

$$x^3+x-2=(y+1)^3+(y+1)-2. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t-2$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó phương trình (1) tương đương với

$$f(x) = f(y+1) \Leftrightarrow x = y+1.$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x^5 + (x-1)^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^5 + x^3 - 3x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^4 + x^2 - 3x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^4 + x^2 - 3x + 3 = 0. \end{array}\right.$$

Vì $x^4 + x^2 - 3x + 3 = (x^2-1)^2 + 3x^2 - 3x + 2 > 0$ nên ta chỉ có nghiệm $x = 0$, suy ra $y = -1$.

Vậy nghiệm của hệ là $x = 0$, $y = -1$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 2 = 3x - 3y^2 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} + 2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

(Học sinh giỏi Tỉnh Nghệ An, 2010)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3 - 3x - 2 = (y-1)^3 - 3(y-1) - 2. \quad (1)$$

Từ điều kiện ta suy ra $x,\ y-1 \in [-1; 1]$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t - 2$ với $t \in [-1; 1]$.

Ta có $f'(t) = 3\left(t^2 - 1\right)$; $f'(t) < 0$ với mọi $t \in (-1; 1)$. Do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$. Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y-1) \Leftrightarrow x = y-1.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Suy ra $y = 1$. Vậy nghiệm của hệ là $x = 0$, $y = 1$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \\ 2\sqrt{4-x^2} - 3\sqrt{3+2y-y^2} - 3x + 2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 3. \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y. \qquad (1)$$

Từ điều kiện ta suy ra $x,\ y-1 \in [-1;\ 3]$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ với $t \in [-1;\ 3]$.

Ta có $f'(t) = 3(t^2+1)$; $f'(t) > 0$ với mọi $t \in (-1;\ 3)$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[-1;\ 3]$. Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x = y-1.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\sqrt{-y^2+2y+3} = 5-3y \Leftrightarrow \begin{cases} 5-3y \ge 0 \\ -y^2+2y+3 = (5-3y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1.$$

Suy ra $x = 0$. Vậy nghiệm của hệ là $x = 0,\ y = 1$.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 12y^2 + x + 2 = 8y^3 + 8y \\ \sqrt{x^2+8y^3} + 2y = 5x \end{cases} (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x^2 + 8y^3 \ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3 + x = (2y-1)^3 + (2y-1). \qquad (1)$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(2y-1) \Leftrightarrow x = 2y-1.$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\sqrt{(2y-1)^2+8y^3} + 2y = 5(2y-1) \Leftrightarrow \sqrt{8y^3+4y^2-4y+1} = 8y-5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y-5 \ge 0 \\ 8y^3+4y^2-4y+1 = (8y-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge \dfrac{5}{8} \\ 8y^3 - 60y^2 + 76y - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 6 \end{array}\right.$$

Suy ra nghiệm của hệ phương trình là $(1;\ 1),\ (11;\ 6)$.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \\ (x+1)\sqrt{y+1} + (x+6)\sqrt{y+6} = x^2 - 5x + 12y \end{cases} (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $y \geq -1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $(x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y$. (1)

Xét hàm $f(t) = t^3 + 3t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ nên hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra phương trình (1) tương đương với $f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y$.

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} = x^2 + 7x + 12$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{x+2} - 2\right) + (x+6)\left(\sqrt{x+7} - 3\right) = x^2 + 2x - 8$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}\right) = (x-2)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \dfrac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} = x+4 \end{array}\right. \quad (2)$$

Vì $y \geq -1$ nên $x \geq -2$.

Nếu $-2 \leq x \leq -1$ thì $\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} \leq 0$ và $\dfrac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} < x+4$ nên (2) vô nghiệm.

Nếu $x > -1$ thì $\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} \leq \dfrac{x+1}{2}$ và $\dfrac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} < \dfrac{x+6}{2}$ nên (2) vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ là $x = 2,\ y = 3$.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$.

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2012)

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) & (1) \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $\left|x-\frac{1}{2}\right|\le 1,\ \left|y+\frac{1}{2}\right|\le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\le x-1\le \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\le y+1\le \frac{3}{2}.$

Xét hàm số $f(t)=t^3-12t$ trên $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$.

Ta có $f'(t)=3\left(t^2-4\right)<0$ với mọi $t\in(-2;2)$. Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$. Do đó

$$(1)\Leftrightarrow f(x-1)=f(y+1)\Leftrightarrow x-1=y+1\Leftrightarrow y=x-2. \qquad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được $4x^2-8x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2},\ x=\frac{3}{2}.$

Từ đó ta suy ra nghiệm của hệ là $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ và $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải khác như sau

Đặt $z=-y$, khi đó hệ trở thành $\begin{cases} x^3+z^3-3\left(x^2+z^2\right)-9(x+z)+22=0\\ x^2+y^2-(x+z)=\frac{1}{2}\end{cases}$

Đặt $u=x+z,\ v=xz$ hệ trở thành

$$\begin{cases} u^3-3uv-3u^2+6v-9u+22=0 & (1)\\ u^2-2v-u=\frac{1}{2} & (2)\end{cases}$$

Từ (2) suy ra $v=\frac{2u^2-2u-1}{4}$, thế vào (1) ta được

$$2u^3-6u^2+45u-82=0\Leftrightarrow (u-2)\left(2u^2-2u+41\right)=0$$

$$\Leftrightarrow u=2\ \text{(vì } 2u^2-2u+41>0 \text{ với mọi } u).$$

Suy ra $v=\frac{3}{4}$. Do đó $\begin{cases} x+z=2\\ xz=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2},\ z=\frac{1}{2}\\ x=\frac{1}{2},\ z=\frac{3}{2}.\end{array}\right.$

Từ đó suy ra nghiệm $(x;y)$ của hệ là $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ và $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -\dfrac{5}{4}$.

* Nếu $y = 0$ thì từ phương trình thứ nhất ta có $x = 0$, không thỏa mãn phương trình thứ hai.

* Với $y \neq 0$, ta có phương trình thứ nhất tương đương với

$$\frac{x^5}{y^5} + \frac{x}{y} = y^5 + y. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^5 + t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 5t^4 + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2.$$

Thế vào phương trình thứ hai ta được $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6$. (2)

Rõ ràng vế trái của phương trình (2) đồng biến, và $x = 1$ là nghiệm, do đó $x = 1$ là nghiệm duy nhất.

Suy ra nghiệm của hệ là $(1;\ 1)$, $(1;\ -1)$.

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12} \\ 7y^4 + 13x + 8 = 2y^4\sqrt[3]{x(3x^2 + 3y^2 - 1)} \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

(Học sinh giỏi Thành phố Hồ Chí Minh, 2010)

Lời giải.

* Nếu $y = 0$ thì thay vào hệ ta được $x = -\dfrac{8}{13}$.

* Nếu $x = 0$ thì từ phương trình thứ nhất ta có $y = 0$, không thỏa mãn phương trình thứ hai.

* Với $xy \neq 0$, ta có phương trình thứ nhất tương đương với

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{11} + \frac{x}{y} = y^{11} + y. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^{11} + t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 11t^{10} + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2 > 0.$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$7x^2 + 13x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{x(3x^2 + 3x - 1)}.$$

Đặt $t = \frac{1}{x}$, phương trình trở thành $7t + 13t^2 + 8t^3 = 2\sqrt[3]{3 + 3t - t^2}$

$$\Leftrightarrow (2t+1)^3 + 2(2t+1) = 3 + 3t - t^2 + 2\sqrt[3]{3 + 3t - t^2}. \quad (2)$$

Xét hàm số $g(u) = u^3 + 2u$, với $u > 0$.

Ta có $g'(u) = 3u^2 + 2 > 0$ với mọi $u > 0$.

Do đó hàm $g(u)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Suy ra

$$(2) \Leftrightarrow g(2t+1) = g\left(\sqrt[3]{3 + 3t - t^2}\right) \Leftrightarrow 2t + 1 = \sqrt[3]{3 + 3t - t^2}$$

$$\Leftrightarrow (2t+1)^3 = 3 + 3t - t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (ktm)} \\ t = \dfrac{-5 - \sqrt{89}}{16} \text{ (ktm)} \\ t = \dfrac{\sqrt{89} - 5}{16}. \end{array}\right.$$

Suy ra $x = \dfrac{16}{\sqrt{89} - 5}$, $y = \pm\sqrt{\dfrac{16}{\sqrt{89} - 5}}$.

Vậy nghiệm của hệ là $\left(-\dfrac{8}{13}; 0\right), \left(\dfrac{16}{\sqrt{89} - 5}; \pm\sqrt{\dfrac{16}{\sqrt{89} - 5}}\right)$.

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = \sqrt{y^3 + 3y^2} \\ 3\sqrt{x - 2} = \sqrt{y^2 + 8y} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 2$, $y \geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3 - 3x^2 + 2 = y\sqrt{y + 3} \Leftrightarrow (x-1)^3 - 3(x-1) = \left(\sqrt{y + 3}\right)^3 - 3\sqrt{y + 3}. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ ta có $f'(t)=3t^2-3\ge 0$ với mọi $t\ge 1$. Vì $x-1\ge 1$ và $\sqrt{y+3}\ge\sqrt{3}>1$ nên ta có

$$(1)\Leftrightarrow f(x-1)=f\left(\sqrt{y+3}\right)\Leftrightarrow x-1=\sqrt{y+3}\Leftrightarrow y=x^2-2x-2.$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$9(x-2)=y^2+8y\Leftrightarrow 9(x-2)=(x^2-2x-2)^2+8(x^2-2x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^4-4x^3+8x^2-17x+6=0\Leftrightarrow (x-3)(x^3-x^2+5x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x^3-x^2+5x-2=0.\end{array}\right.$$

Vì $x^3-x^2+5x-2=x^2(x-1)+5x-2>0$ với mọi $x\ge 2$ nên ta chỉ có nghiệm $x=3$. Suy ra $y=1$. Vậy nghiệm của hệ là $x=3$, $y=1$.

Ví dụ 10. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}\\\sqrt{2y^2+1}-y=2-x\end{cases}\quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\le 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2y^3+y=2\sqrt{1-x}-2x\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 2y^3+y=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}.\qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=6t^2+1$; $f'(t)>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f(y)=f\left(\sqrt{1-x}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\y^2=1-x.\end{cases}$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=2-x\Leftrightarrow\frac{2-x}{\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}}=2-x$$

$$\Leftrightarrow(2-x)\left(\frac{1}{\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}}-1\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}}-1=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}=1\Leftrightarrow x=1.$$

Suy ra nghiệm của hệ phương trình là $x=1$, $y=0$.

Ví dụ 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^3-3x+(y-1)\sqrt{2y+1}=0 \\ 2x^2+x+\sqrt{-y(2y+1)}=0 \end{cases}$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $-\dfrac{1}{2}\le y\le 0$.

Phương trình thứ nhất tương đương với

$$(-2x)^3-3(-2x)=\big((2y+1)-3\big)\sqrt{2y+1}$$

$$\Leftrightarrow (-2x)^3-3(-2x)=\left(\sqrt{2y+1}\right)^3-3\sqrt{2y+1}. \qquad (1)$$

Từ điều kiện $-\dfrac{1}{2}\le y\le 0$ ta có $0\le\sqrt{2y+1}\le 1$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra $2x^2+x\le 0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le x\le 0$.

Khi đó $0\le -2x\le 1$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ trên $[0;\ 1]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-3$; $f'(t)<0$ với mọi $t\in(0;\ 1)$. Do đó $f(t)$ nghịch biến trên $[0;\ 1]$. Suy ra phương trình $(1)\Leftrightarrow f(-2x)=f\left(\sqrt{2y+1}\right)\Leftrightarrow -2x=\sqrt{2y+1}$.

Thế vào phương trình thứ hai ta được

$$2x^2+x+\sqrt{-\frac{4x^2-1}{2}.4x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+\sqrt{2x^2-8x^4}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x+1-\sqrt{2-8x^2}=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Suy ra nghiệm của hệ là $\left(0;\ -\dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2};\ 0\right)$.

Ví dụ 12. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(4x^2+1\right)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2010)

Lời giải. Điều kiện: $x\le\dfrac{3}{4},\ y\le\dfrac{5}{2}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\left(4x^2+1\right).2x=(5-2y+1)\sqrt{5-2y}. \qquad (1)$$

Nhận xét: phương trình (1) có dạng $f(2x)=f\left(\sqrt{5-2y}\right)$, với $f(t)=\left(t^2+1\right)t$.

Ta có $f'(t)=3t^2+1>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$, suy ra f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ y=\dfrac{5-4x^2}{2}.\end{cases}$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0. \qquad (2)$$

Nhận thấy $x=0$ và $x=\dfrac{3}{4}$ không phải là nghiệm của (2).

Xét hàm số $g(x)=4x^2+\left(\dfrac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$.

Ta có $g'(x)=8x-8x\left(\dfrac{5}{2}-2x^2\right)-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}=4x\left(4x^2-3\right)-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}<0$ với mọi $x\in\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$. Suy ra hàm $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$.

Mặt khác $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, do đó (2) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$; suy ra $y=2$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Nhận xét. Sau khi xét phương trình một tìm được $2x=\sqrt{5-2y}$, ta có thể giải tiếp bằng cách xét hàm biến y như sau:

Do $x\leq\dfrac{3}{4}$ nên $\sqrt{5-2y}\leq\dfrac{3}{2}$. Suy ra $y\in\left[\dfrac{11}{8};\dfrac{5}{2}\right]$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$5-2y+y^2+2\sqrt{3-2\sqrt{5-2y}}=7$$

$$\Leftrightarrow(y-1)^2+2\sqrt{3-2\sqrt{5-2y}}=3.$$

Ta có $f(y)=(y-1)^2+2\sqrt{3-2\sqrt{5-2y}}$ là hàm đồng biến trên $\left[\frac{11}{8};\frac{5}{2}\right]$ và $f(2)=3$ nên $y=2$ là nghiệm duy nhất.

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là $x=\frac{1}{2}$, $y=2$.

Ví dụ 13. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0\end{cases}\quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

(*Tuyển sinh Đại học Khối A, 2013*)

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$.

Từ phương trình thứ hai ta có $4y=(x+y-1)^2$, suy ra $y\ge 0$.

Đặt $u=\sqrt[4]{x-1}$, khi đó $u\ge 0$ và phương trình thứ nhất trở thành

$$\sqrt{u^4+2}+u=\sqrt{y^4+2}+y. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^4+2}+t$, với $t\ge 0$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}+1$; $f'(t)>0$ với mọi $t\ge 0$.

Suy ra phương trình (1) tương đương với

$$f(u)=f(y)\Leftrightarrow u=y,\text{ hay } x=y^4+1.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có $y\left(y^7+2y^4+y-4\right)=0$. (2)

Xét hàm số $g(y)=y^7+2y^4+y-4$ với $y\ge 0$.

Ta có $g'(y)=7y^6+8y^3+1>0$ với mọi $y\ge 0$, và $g(1)=0$, nên phương trình (2) tương đương với $y=0$ hoặc $y=1$.

Với $y=0$ ta được nghiệm $(x;y)=(1;0)$; với $y=1$ ta được nghiệm $(x;y)=(2;1)$.

Vậy nghiệm của hệ là $(1;0)$ và $(2;1)$.

Ví dụ 14. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1\end{cases}\quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $6x-2xy+1\ge 0$.

Phương trình thứ nhất tương đương với $x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1}$. (1)

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\dfrac{|t|+t}{\sqrt{t^2+1}}\geq 0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x)=f(-y)\Leftrightarrow x=-y$.

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2+6x+1}-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{25x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\\ \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x.\end{array}\right.$$

* $\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ 2x^2+6x+1=9x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$. Suy ra $y=-1$.

* $\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ 2x^2+6x+1=4x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}$.

Suy ra $y=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ là $(1;-1)$, $\left(\dfrac{3-\sqrt{11}}{2};\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

Ví dụ 15. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2\\ 27x^6=x^3-8y+2\end{cases}\quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

(Học sinh giỏi Tỉnh Nghệ An, 2013 - 2014)

Lời giải. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(-2y)^2+4}+(-2y).\qquad(1)$$

Hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+4}+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}+1$; $f'(t)>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(1)\Leftrightarrow f(x)=f(-2y)\Leftrightarrow x=-2y.$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$27x^6 = x^3 + 4x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 = \sqrt[3]{x^3 + 4x + 2}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = x^3 + 4x + 2 + \sqrt[3]{x^3 + 4x + 2}. \qquad (2)$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $g'(t) = 3t^2 + 1$; $g'(t) > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.
Suy ra $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(2) \Leftrightarrow f(x+1) = f\left(\sqrt{x^3 + 4x + 2}\right) \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{x^3 + 4x + 2}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Suy ra nghiệm của hệ là $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}; \frac{-1-\sqrt{13}}{12}\right), \left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{-1+\sqrt{13}}{12}\right).$

Ví dụ 16. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(3x + \sqrt{9x^2 + 1}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = 1 \\ 8x^3 + 2y = \sqrt{5x + y + 2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

(Học sinh giỏi Tỉnh Lâm Đồng, 2013 - 2014)

Lời giải. Điều kiện: $5x + y + 2 \geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$3x + \sqrt{1 + (3x)^2} = (-y) + \sqrt{1 + (-y)^2}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} > \dfrac{|t| + t}{\sqrt{t^2 + 1}} \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra phương trình $(1) \Leftrightarrow f(3x) = f(-y) \Leftrightarrow 3x = -y$.

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$8x^3 - 6x = \sqrt{2x + 2}. \qquad (2)$$

Điều kiện: $x \geq -1$.

Nếu $x > 1$ thì $VT(2) = 2x + 8x\left(x^2 - 1\right) > 2x > \sqrt{2x + 2} = VP(2)$, nên (2) vô nghiệm.

Với $x \in [-1; 1]$, đặt $x = \cos t$, $t \in [0; \pi]$, phương trình (2) trở thành

$$2\left(4\cos^3 t - 3\cos t\right) = \sqrt{2\cos t + 2} \Leftrightarrow \cos 3t = \cos\frac{t}{2}.$$

Với $t\in[0;\pi]$ thì ta có $t=0$, $t=\frac{4\pi}{5}$, $t=\frac{4\pi}{7}$.

Suy ra nghiệm của hệ là $(1;-3)$, $\left(\cos\frac{4\pi}{5};-3\cos\frac{4\pi}{5}\right)$, $\left(\cos\frac{4\pi}{7};-3\cos\frac{4\pi}{7}\right)$.

Ví dụ 17. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(2x-1)\sqrt{x+y}=(6-x-y)\sqrt{2-x}\\ 2\sqrt[3]{12x^2+3xy-18x}=x^3-6x-y+5\end{cases}\quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

(Học sinh giỏi Tỉnh Bắc Ninh, 2013 - 2014)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x+y\ge 0\\ 2-x\ge 0.\end{cases}$

Đặt $a=\sqrt{2-x}$, $b=\sqrt{x+y}$, khi đó $a,b\ge 0$ và phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\left(3-2a^2\right)b=\left(6-b^2\right)a.$$

Rõ ràng $a=0$ hoặc $b=0$ không thỏa mãn phương trình. Với $a,b>0$, phương trình tương đương với

$$\frac{3-2a^2}{a}=\frac{6-b^2}{b}\Leftrightarrow\frac{6-(2a)^2}{2a}=\frac{6-b^2}{b}.\qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{6-t^2}{t}$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=-\frac{6}{t^2}-1<0$ với mọi $t>0$. Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f(2a)=f(b)\Leftrightarrow 2a=b,$$

hay $2\sqrt{2-x}=\sqrt{x+y}\Leftrightarrow y=8-5x$.

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$2\sqrt[3]{-3x^2+6x}=x^3-x-3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3+2(x-1)=\left(-3x^2+6x\right)+2\sqrt[3]{-3x^2+6x}.$$

Xét hàm số $g(z)=z^3+2z$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(z)=3z^2+2>0$ với mọi $z\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm $g(z)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra

$$(2) \Leftrightarrow g(x-1) = g\left(\sqrt[3]{-3x^2+6x}\right) \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{-3x^2+6x}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 1 = 0. \qquad (3)$$

Với $x \in [-2; 2]$ đặt $x = 2\cos\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$, phương trình (3) trở thành

$$8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2}.$$

Vì $\alpha \in [0; \pi]$ nên $\alpha = \frac{\pi}{9}$, $\alpha = \frac{5\pi}{9}$, $\alpha = \frac{7\pi}{9}$. Suy ra $x = 2\cos\frac{\pi}{9}$, $x = 2\cos\frac{5\pi}{9}$ hoặc $x = 2\cos\frac{7\pi}{9}$. Vì (3) là phương trình bậc 3 có không quá 3 nghiệm nên đây là 3 nghiệm của phương trình.

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là

$$\left(2\cos\frac{\pi}{9}; 8-10\cos\frac{\pi}{9}\right), \left(2\cos\frac{5\pi}{9}; 8-10\cos\frac{5\pi}{9}\right), \left(2\cos\frac{7\pi}{9}; 8-10\cos\frac{7\pi}{9}\right).$$

Nhận xét. Chúng ta có thể biến đổi phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\left(2\sqrt{2-x} - \sqrt{x+y}\right)\left(\sqrt{(2-x)(x+y)} + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x} - \sqrt{x+y} = 0 \Leftrightarrow y = 8 - 5x.$$

Ví dụ 18. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2(1+y^2) + y^2(1+x^2) = 4\sqrt{xy} \\ x^2y\sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2} = x^2y - x \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $xy \geq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x - \sqrt{1+x^2} = x^2y(1 - \sqrt{1+y^2}). \qquad (1)$$

Rõ ràng $x = 0$ không thỏa mãn phương trình. Mặt khác, vì $x - \sqrt{1+x^2} < 0$ và $1 - \sqrt{1+y^2} < 0$ nên từ phương trình suy ra $y > 0$. Kết hợp điều kiện của hệ ta có $x > 0$. Khi đó, phương trình (1) tương đương với

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = y - y\sqrt{1+y^2}. \qquad (2)$$

Xét hàm $f(t) = t - t\sqrt{1+t^2}$ trên $(0; +\infty)$. Ta có

$$f'(t)=1-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}-\sqrt{1+t^2}<0 \text{ với mọi } t\in(0;+\infty).$$

Suy ra hàm f nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Do đó phương trình (2) tương đương với $\frac{1}{x}=y \Leftrightarrow xy=1$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}(1+x^2)=4$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Kết hợp điều kiện, ta có nghiệm $x=y=1$.

Ví dụ 19. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+3x-1+\sqrt{2x+1}=y \\ y^3+3y-1+\sqrt{2y+1}=x \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x,\ y\geq -\frac{1}{2}$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$x^3+4x+\sqrt{2x+1}=y^3+4y+\sqrt{2y+1}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+4t+\sqrt{2t+1}$ với $t\geq\frac{1}{2}$.

Ta có $f'(t)=3x^2+4+\frac{1}{\sqrt{2t+1}}$; $f'(t)>0$ với mọi $t>\frac{1}{2}$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Suy ra phương trình $(1) \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $x^3+2x-1+\sqrt{2x+1}=0$. (2)

Xét hàm số $g(x)=x^3+2x-1+\sqrt{2x+1}$ trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $g'(t)=3t^2+2+\frac{1}{\sqrt{2t+1}}$; $f'(t)>0$ với mọi $t>\frac{1}{2}$.

Do đó hàm $g(t)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Mặt khác, $g(0)=0$, nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của (2).

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là $x=y=0$.

Ví dụ 20. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2-5\sqrt{x}+5=0 \\ \sqrt{x+2}=\sqrt{y^2+2y+3}-\frac{1}{5}y^2+y \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

(Học sinh giỏi Tỉnh An Giang, 2013 - 2014)

Lời giải. Điều kiện: $x\geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $\frac{1}{5}y^2=\sqrt{x}-1$.

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\sqrt{x+2}=\sqrt{y^2+2y+3}-\left(\sqrt{x}-1\right)+y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2+2}+\sqrt{x}=\sqrt{(y+1)^2+2}+(y+1). \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+2}+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}+1=\frac{\sqrt{t^2+2}+t}{\sqrt{t^2+2}}>\frac{|t|+t}{\sqrt{t^2+2}}\geq 0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x}\right)=f(y+1)\Leftrightarrow \sqrt{x}=y+1.$$

Thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $y^2-5(y+1)+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=5. \end{array}\right.$

Suy ra nghiệm $(x;y)$ của hệ là $(36;5)$, $(1;0)$.

Ví dụ 21. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x-1}+4(2x+1)=\sqrt{y-1}+3y \\ (x+y)(2x-y)+4=-6x-3y \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$

Phân tích và lời giải. Ta thấy phương trình thứ nhất có dạng các biến phân ly là một dấu hiệu thuận lợi để sử dụng tính đơn điệu của hàm số. Tuy nhiên, không thể tìm được hàm số đặc trưng! Để khắc phục điều này, chúng ta sẽ tìm liện hệ giữa x và y từ phương trình thứ hai rồi đưa phương trình thứ nhất về một biến, từ đó tìm hàm đặc trưng.

Điều kiện: $x\geq\frac{1}{3}$, $y\geq 1$.

Ta có phương trình thứ hai tương đương với

$$(x+y)(2x-y)+4=-4(x+y)-(2x-y) \Leftrightarrow (x+y+1)(2x-y-4)=0$$

$$\Leftrightarrow y=2x+4.$$

Thế vào phương trình thứ nhất ta được

$$\sqrt{3x-1}+2x-8=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow 2(3x-1)+\sqrt{3x-1}=2(2x+3)+\sqrt{2x+3}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=2t^2+t$ với $t \geq 0$.

Ta có $f'(t)=4t+1>0$ với mọi $t \geq 0$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$. Suy ra phương trình (1) tương đương với

$$f\left(\sqrt{3x-1}\right)=f\left(\sqrt{2x+3}\right) \Leftrightarrow \sqrt{3x-1}=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x=4.$$

Suy ra $y=12$.

Vậy nghiệm của hệ là $x=4$, $y=12$.

Ví dụ 22. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4} \\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Phương trình thứ hai tương đương với $3y=y^2-x^2+3x-1$. Thế vào phương trình thứ nhất ta được

$$x+\sqrt{x^2-2+5}=y^2-x^2+3x-1+\sqrt{y^2+4}$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+\sqrt{x^2-2x+5}=y^2+\sqrt{y^2+4}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+\sqrt{(x-1)^2+4}=y^2+\sqrt{y^2+4}. \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t+4}$ với $t \geq 0$.

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{t+4}}$; $f'(t)>0$ với mọi $t \geq 0$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$. Do đó

$$(*) \Leftrightarrow f\left((x-1)^2\right)=f\left(y^2\right) \Leftrightarrow (x-1)^2=y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=1-x. \end{array}\right.$$

Với $y=x-1$, ta có hệ $\begin{cases} y=x-1 \\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{1}{2}.$

Với $y=1-x$, ta có hệ $\begin{cases} y=1-x \\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}, y=\dfrac{1}{4}.$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Ví dụ 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y^3-x^3)=7 \\ x^4+x^3y+9y=y^3x+x^2y^2+9x \end{cases}$

Lời giải.

Từ phương trình thứ nhất, suy ra $x-y\neq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^2\left(x^2-y^2\right)+xy\left(x^2-y^2\right)-9(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+y)+xy(x+y)-9=0\Leftrightarrow x(x+y)^2=9$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+y=\pm\frac{3}{\sqrt{x}} \\ x>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-x\pm\frac{3}{\sqrt{x}} \\ x>0 \end{cases}$$

Vì $y^3-x^3>0$ nên $y>0$. Do đó trường hợp $y=-x-\frac{3}{\sqrt{x}}$ không thỏa mãn.

Với $y=\frac{3}{\sqrt{x}}-x$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$x\left[\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-x\right)^3-x^3\right]=7. \qquad (1)$$

Đặt $t=\sqrt{x}$, khi đó $t>0$ và phương trình trở thành

$$t^2\left[\left(\frac{3}{t}-t^2\right)^3-t^6\right]=7\Leftrightarrow f(t)=2t^9-9t^6+27t^3+7t-27=0 \qquad (2)$$

Ta có $f'(t)=18t^8-54t^5+81t^2+7\geq 2\sqrt{18t^8.81t^2}-54t^5+7>0$ và $f(1)=0$

Nên (2) có nghiệm duy nhất $t=1$. Suy ra $x=1$, $y=2$.

Vậy $(x;y)=(1;2)$ là nghiệm của hệ.

Ví dụ 24. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}-\sqrt{y}=8-x^3 \\ (x-1)^4=y \end{cases}\quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq 1$, $y\geq 0$.

Đặt $u=\sqrt{x-1}$, $v=\sqrt{y}$, u, $v\geq 0$.

Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} u - v = 8 - \left(u^2+1\right)^3 \\ u^8 = v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 8 - \left(u^2+1\right)^3 \\ v = u^4 \end{cases}$$

Suy ra $u - u^4 = 8 - \left(u^2+1\right)^3 \Leftrightarrow u^6 + 2u^4 + 3u^2 + u - 7 = 0$.

Xét hàm số $f(u) = u^6 + 2u^4 + 3u^2 + u - 7$ với $u \ge 0$.

Ta có $f'(u) = 6u^5 + 8u^3 + 6u + 1$; $f'(u) > 0$ với mọi $u \ge 0$. Do đó hàm $f(u)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Mặt khác $f(1) = 0$ nên $u = 1$ là nghiệm duy nhất.

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là $x = 2$, $y = 1$.

Nhận xét. Ta có cách giải khác như sau:

Thế phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất ta được

$$\sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 8 - x^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 + x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + 4x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + x^2 + x + 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2.$$

Suy ra nghiệm của hệ là $x = 2$, $y = 1$.

Ví dụ 25. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \\ y\left(\sqrt{x^2+1} - 1\right) = \sqrt{3x^2+3} \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x > 0$, $y \ne 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \Leftrightarrow y\sqrt{x} + y^2 = 2x\sqrt{x} + 2xy$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y\left(\sqrt{x} - 2x\right) - 2x\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2x)\left(y + \sqrt{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{x} \\ y = 2x. \end{array}\right.$$

* Nếu $y=-\sqrt{x}$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$-\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3}.$$

Vì $-\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)<0<\sqrt{3x^2+3}$ nên phương trình này vô nghiệm.

* Nếu $y=2x$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$2x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\left(2x-\sqrt{3}\right)=2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=\frac{2x}{2x-\sqrt{3}} \qquad (2)$$

(vì $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ không là nghiệm nên ta chỉ xét $x\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$ để có phương trình (2))

Xét hai hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ và $g(x)=\frac{2x}{2x-\sqrt{3}}$ với $x>0$.

Ta có $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0$ và $g'(x)=\frac{-2\sqrt{3}}{\left(2x-\sqrt{3}\right)^2}<0$ với mọi $x>0$ nên $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Do đó phương trình $f(x)=g(x)$ có không quá một nghiệm $x>0$.

Mặt khác ta thấy $x=\sqrt{3}$ là nghiệm của (2) nên $x=\sqrt{3}$ là nghiệm duy nhất của (2). Từ đó ta suy ra nghiệm của hệ là $x=\sqrt{3}$, $y=2\sqrt{3}$.

1.2 Hệ phương trình mũ - logarit

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\ln\frac{1+x}{1+y}=x-y\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1\end{cases} \quad (x, y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x, y\geq 0$.

Phương trình thứ nhất tương đương với $\ln(1+x)-x=\ln(1+y)-y$. (1)

Xét hàm số $f(t)=\ln(1+t)-t$ với $t\geq 0$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{1+t}-1$; $f'(t)<0$ với mọi $t>0$. Suy ra hàm $f(t)$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$. Suy ra (1) $\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{4}$.

Vậy nghiệm của hệ là $x = y = \dfrac{1}{4}$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x,\ y \geq -1$.

Phương trình thứ nhất tương đương với $\ln(1+x) - x = \ln(1+y) - y$. (1)

Xét hàm số $f(t) = \ln(1+t) - t$ với $t \geq 0$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$; $f'(t) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên trên $(-1;\ 0)$ và nghịch biến trên $[0;\ +\infty)$.

Ta có phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$(x - 2y)(x - 10y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = 10y \end{array}\right. \qquad (2)$$

Do đó x và y luôn cùng dấu, hay $x,\ y \in (-1;\ 0)$ hoặc $x,\ y \in [0;\ +\infty)$.

Suy ra phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào (2) ta có $x = y = 0$.

Vậy nghiệm của hệ là $x = y = 0$.

Nhận xét. Vì hàm $f(t)$ đồng biến trên $(-1;\ 0)$ và nghịch biến trên $[0;\ +\infty)$ nên ta không thể suy ra ngay được $x = y$ mà phải sử dụng phương trình thứ hai cả hệ để có điều kiện $x,\ y$ luôn cùng thuộc một trong hai khoảng đơn điệu của hàm $f(t)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3^x - 3^{2-y} + \log_2 \dfrac{x}{2-y} = 0 \\ y^2 + 11y - xy + 2x + 1 = 0 \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $\dfrac{x}{2-y} > 0$.

Với $x < 0,\ 2 - y < 0$ thì vế trái của phương trình thứ hai luôn dương.

Với $x>0,\ 2-y>0,$ ta có phương trình thứ nhất của hệ tương đương với
$$3^x+\log_2 x=3^{2-y}+\log_2(2-y). \qquad (1)$$
Xét hàm số $f(t)=3^t+\log_2 t$ với $t>0.$

Ta có $f'(t)=3^t\ln 3+\dfrac{1}{t\ln 2}>0$ với mọi $t>0.$ Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty).$ Suy ra
$$(1)\Leftrightarrow f(x)=f(2-y)\Leftrightarrow x=2-y.$$
Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được
$$y^2+11y-(2-y)y+2(2-y)+1=0\Leftrightarrow 2y^2+7y+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1\\ y=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$$
Suy ra nghiệm của hệ là $(3;-1),\ \left(\dfrac{9}{2};-\dfrac{5}{2}\right).$

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases}6x^2+y^2-5xy-7x+3y+2=0\\ \dfrac{x-y}{3}=\ln(x+2)-\ln(y+2)\end{cases}\quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x>-2,\ y>-2.$

Ta có phương trình thứ nhất của hệ tương đương với
$$(3x-y-2)(2x-y-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=3x-2\\ y=2x-1.\end{array}\right.$$
Phương trình thứ hai của hệ tương đương với
$$x-3\ln(x+2)=y-3\ln(y+2). \qquad (*)$$
Xét hàm số $f(t)=t-3\ln(t+2)$ với $t>-2.$

Ta có $f'(t)=\dfrac{t-1}{t+2},$ do đó hàm nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$ và đồng biến trên $(1;+\infty).$

* Rõ ràng $x=y=1$ là nghiệm của hệ.

* Với $x<1,$ ta có $\left[\begin{array}{l} y-x=2x-2<0\\ y-x=x-1<0\end{array}\right.$ cho nên $y<x<1.$ Suy ra $f(y)>f(x),$ hay phương trình (*) không có nghiệm $x<1.$

* Với $x>1$, ta có $\begin{cases} y-x=2x-2>0 \\ y-x=x-1>0 \end{cases}$ cho nên $y>x>1$. Suy ra $f(y)>f(x)$, hay phương trình (*) không có nghiệm $x>1$.

Vậy nghiệm của hệ là $x=y=1$.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right)7^{2y-x^2+2} \\ 4^x+4=4x+4\sqrt{2y-2x+4} \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $y-x+2\ge 0$.

Đặt $t=x^2-2y$, khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$4+3^{t+2}=\left(4+3^{2t}\right)7^{2-t}\Leftrightarrow \frac{4+3^{t+2}}{7^{t+2}}=\frac{4+3^{2t}}{7^{2t}}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4+3^t}{7^t}$. Ta có $f(t)=4\left(\dfrac{1}{7}\right)^t+\left(\dfrac{3}{7}\right)^t$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(t+2)=f(2t)\Leftrightarrow t+2=2t\Leftrightarrow t=2$.

Từ đó suy ra $x^2-2y=2\Leftrightarrow 2y=x^2-2$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$4^x+4=4x+4\sqrt{x^2-2-2x+4}\Leftrightarrow 4^{x-1}=x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}.$$

Đặt $u=x-1$, phương trình trở thành $4^u=u+\sqrt{u^2+1}$. (2)

Do $\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)=1$ nên suy ra $4^{-u}=\sqrt{u^2+1}-u$. Do đó ta có

$$4^u-4^{-u}-2u=0. \qquad (3)$$

Xét hàm số $g(u)=4^u-4^{-u}-2u=0$, trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(u)=4^u\ln 4+4^{-u}\ln 4-2=\left(4^u+\dfrac{1}{4^u}\right)\ln 4-2\ge 2\ln 4-2>0$. Do đó $g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $g(0)=0$ nên $u=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3) hay cũng là nghiệm duy nhất của (2). Từ đó ta có nghiệm của hệ là $x=1$, $y=-\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1 \end{cases}$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-1 \end{cases}$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases} u+\sqrt{u^2+1}=3^v & (1) \\ v+\sqrt{v^2+1}=3^u & (2) \end{cases}$

Nhận thấy đây là hệ đối xứng loại 2, trừ hai phương trình ta được

$$u+\sqrt{u^2+1}+3^u = v+\sqrt{v^2+1}+3^v. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}+3^t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}+3^t\ln 3$. Vì $\sqrt{t^2+1}>\sqrt{t^2}\ge -t$ nên $f'(t)>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra

$$(3)\Leftrightarrow f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v.$$

Thay vào (1) ta có $u+\sqrt{u^2+1}=3^u \qquad (4)$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{u^2+1}+u\right)-u\ln 3=0. \qquad (5)$$

Xét hàm số $g(u)=\ln\left(\sqrt{u^2+1}+u\right)-u\ln 3$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(u)=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}-\ln 3<1-\ln 3<0$ với mọi $u\in\mathbb{R}$. Do đó hàm $g(u)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $g(0)=0$ nên $u=0$ là nghiệm duy nhất của (5). Từ đó suy ra nghiệm của hệ là $x=y=1$.

Nhận xét. Chúng ta có thể chứng minh phương trình (4) có nghiệm duy nhất $u=0$ như sau:

Ta có (4) $\Leftrightarrow 3^u\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)=1. \qquad (6)$

Xét hàm số $h(u)=3^u\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)$ trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$h'(u)=3^u\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}-1\right)+\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)3^u\ln 3=\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)3^u\left(\ln 3-\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)>0$$

với mọi $u\in\mathbb{R}$. Suy ra $h(u)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $h(0)=1$ nên $u=0$ là nghiệm duy nhất của (4).

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y\left(4y^2+3x^2\right)=x^4\left(x^2+3\right) \\ 2^x\left(\sqrt{2y-2x+5}-x+1\right)=4 \end{cases}$ $(x, y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $2y-2x+5\ge 0$.

Rõ ràng $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Với $x\ne 0$, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\left(\frac{2y}{x}\right)^3+3.\frac{2y}{x}=x^3+3x. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3t^2+3$; $f'(t)>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $(1)\Leftrightarrow f\left(\frac{2y}{x}\right)=f(x)\Leftrightarrow x=\frac{2y}{x}\Leftrightarrow y=\frac{x^2}{2}$.

Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$2^{x-1}\left(\sqrt{(x-1)^2+4}-(x-1)\right)=2. \qquad (2)$$

Xét hàm số $g(u)=2^u\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(u)=2^u\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)\left(\ln 2-\frac{1}{\sqrt{u^2+4}}\right)$; $g'(u)>0$ với mọi $u\in\mathbb{R}$ vì $\sqrt{u^2+4}>|u|\ge u$ và $\ln 2>1>\frac{1}{\sqrt{u^2+4}}$. Do đó hàm $g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $g(0)=2$, nên $u=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2). Từ đó ta suy ra nghiệm của hệ là $x=1$, $y=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+4xy+2=0 \\ 2^{x+y+1}=\sqrt{2-2xy}+x+y \end{cases}$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $2-2xy\ge 0\Leftrightarrow xy\le 1$.

Đặt $u=x+y$, $v=xy$. Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} u^2+2v+2=0 \\ 2^{u+1}=\sqrt{2-2v}+u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2v=-u^2-2 & (1) \\ 2^{u+1}=\sqrt{u^2+4}+u & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow 2^{u+1}(\sqrt{u^2+4}-u)=4$

$$\Leftrightarrow 2^u(\sqrt{u^2+4}-u)=2 \qquad (3)$$

Xét hàm $f(u)=2^u\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)$ trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(u)=2^u\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)\left(\ln 2-\frac{1}{\sqrt{u^2+4}}\right)>0 \text{ với mọi } u\in\mathbb{R}.$$

Suy ra hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà ta có $f(0)=2$ hay $u=0$ là nghiệm của phương trình (3). Do đó $u=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3). Suy ra $u=0,\ v=-1$. Suy ra

$$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,\ y=-1 \\ x=-1,\ y=1. \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;-1),(-1;1)$.

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_2 x=2^{y+2} \\ 4\sqrt{1+x}+xy\sqrt{4+y^2}=0 \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

(Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ)

Lời giải. Điều kiện: $x>0$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra $y<0$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$16(x+1)=x^2y^2\left(4+y^2\right)\Leftrightarrow x^2y^4+4x^2y^2-16(x+1)=0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là y^2, ta có

$$\Delta'_{y^2}=4x^4+16x^2(x+1)=4x^2(x+2)^2, \text{ từ đó suy ra}$$

$$\left[\begin{array}{l} y^2=\dfrac{-2x^2+2x(x+2)}{x^2}=\dfrac{4}{x} \\[2ex] y^2=\dfrac{-2x^2-2x(x+2)}{x^2}=\dfrac{-4x^2-4x}{x^2}<0. \end{array}\right.$$

Do đó $y^2=\dfrac{4}{x}\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{y^2}$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$\log_2\frac{4}{y^2}=2^{y+2}\Leftrightarrow 2-\log_2 y^2-2^{y+2}=0. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(y)=2-\log_2 y^2-2^{y+2}$ với $y<0$.

Ta có $f'(y)=-2^{y+2}\ln 2-\dfrac{2}{y\ln 2}=-\dfrac{2}{y\ln 2}\left(1-y\ln^2 2.2y+1\right)>0$ với mọi $y<0$. Do đó $f(y)$ đồng biến trên $(-\infty;0)$. Mặt khác, lại có $f(-1)=0$. Suy ra $y=-1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1). Từ đó ta có $x=4$.

Vậy nghiệm của hệ là $x=4,\ y=-1$.

Nhận xét. Chúng ta có thể suy ra $xy^2=4$ bằng các cách khác như sau

Cách 2. Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra $y<0$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$16(x+1)=x^2y^2\left(4+y^2\right)\Leftrightarrow 4x^2y^2-16x+x^2y^4-16=0$$

$$\Leftrightarrow\left(xy^2-4\right)\left(4x+xy^2+4\right)=0\Leftrightarrow xy^2-4=0.$$

Cách 3. Với $x>0,\ y<0$ phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\frac{4}{x}\sqrt{x+1}=-y\sqrt{4+y^2}\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{x}}\sqrt{4+\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2}=(-y)\sqrt{4+(-y)^2}.\qquad(2)$$

Xét hàm số $g(t)=t\sqrt{4+t^2}$ với $t>0$. Ta có $f'(t)=\dfrac{2\left(t^2+2\right)}{\sqrt{4+t^2}}>0$ nên hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra

$$(2)\Leftrightarrow f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=f(-y)\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{x}}=-y\Leftrightarrow xy^2=4.$$

Ví dụ 10. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+x+\log_2\dfrac{x}{y}=8y^3+2y+1\\ \sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}-1=0\end{cases}\quad(x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x,\ y\ge 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3+x+\log_2 x=(2y)^3+2y+\log_2 2y.\qquad(1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t+\log_2 t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=3t^2+1+\dfrac{1}{t\ln 2}$; $f'(t)>0$ với mọi $t>0$.

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow f(x)=f(2y) \Leftrightarrow x=2y.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\sqrt{2y-1}-\sqrt{y-1}-1=0 \Leftrightarrow 2y-1=y-2\sqrt{y-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{y-1}=1-y \Leftrightarrow y=1.$$

Suy ra $x=2$.

Vậy nghiệm của hệ là $x=2$, $y=1$.

Ví dụ 11. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{2x-y}-2^{y+1}-2^{x}=0 \\ \log_2(x^2-y)-\log_2(y+1)+(x-1)^2=0 \end{cases} (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x^2-y>0$, $y+1>0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2^{2(x-y)}-2^{x-y}-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x-y}=-1 \\ 2^{x-y}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x-y=1 \Leftrightarrow y=x-1.$$

Thế vào phương trình thứ hai ta được

$$\log_2(x^2-x+1)-\log_2 x+(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2-x+1)+(x^2-x+1)=\log_2 x+x. \qquad (*)$$

Xét hàm $f(t)=\log_2 t+t$ trên $(0;+\infty)$. Ta có

$$f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1>0 \text{ với mọi } x\in(0;+\infty).$$

Suy ra phương trình (*) $\Leftrightarrow f(x^2-x+1)=f(x)$

$$\Leftrightarrow x^2-x+1=x$$

$$\Leftrightarrow x=1.$$

Suy ra nghiệm của hệ là $x=1$, $y=0$.

Ví dụ 12. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} e^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3\log_2(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1 \end{cases} (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x+2y+6>0 \\ x+y+2>0. \end{cases}$

Xét hàm số $f(t)=e^t(t+1)$ với $t\in[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=e^t(t+1)+e^t=e^t(t+2)>0$, với mọi $t\in[0;+\infty)$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$e^{x^2}(x^2+1)=e^{y^2}(y^2+1)\Leftrightarrow f(x^2)=f(y^2)\Leftrightarrow x^2=y^2\Leftrightarrow x=\pm y.$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$3\log_2(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left((x+2y+6)^3\right)=\log_2\left(2(x+y+2)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (x+2y+6)^3=2(x+y+2)^2. \qquad (1)$$

Xét hai trường hợp:

* Nếu $x=y$ thì thay vào (1) ta được $(3x+6)^3=2(2x+2)^2$. (2)

Theo điều kiện xác định ta có $x>-1$. Khi đó

$$(3x+6)^3-2(2x+4)^2=(x+2)^2(27x+46)>0$$

nên $(3x+6)^3>2(2x+4)^2>2(2x+2)^2$, do đó (2) vô nghiệm.

* Nếu $x=-y$ thì thay vào (1) ta được

$$(-x+6)^3=2(2)^2\Leftrightarrow(6-x)^3=8\Leftrightarrow 6-x=2\Leftrightarrow x=4.$$

Suy ra $y=-4$.

Vậy nghiệm của hệ là $x=4$, $y=-4$.

Nhận xét. Để chứng minh (2) không có nghiệm $x>-1$ ta có thể xét trực tiếp hàm bậc ba.

Ví dụ 13. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\log_2\dfrac{y}{2\sqrt{1+x}}=3(y-\sqrt{1+x})-y^2+x\\ 2\sqrt{1-x}(y^3-y)=2x^2-y-1\end{cases}\quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $-1<x\le 1$, $y>0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\log_2 y+y^2-3y=\log_2\sqrt{1+x}+(x+1)-3\sqrt{1+x}. \qquad (1)$$

Xét hàm $f(t)=\log_2 t+t^2-3t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2t-3\ge 2\sqrt{\dfrac{2}{\ln 2}}-3>0$ với mọi $t>0$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra pt (1) $\Leftrightarrow f(y)=f(\sqrt{1+x})$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{1+x}.$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$2\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x}^3-\sqrt{1+x})=2x^2-1-\sqrt{1+x}$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{1-x^2}=2x^2-1-\sqrt{1+x} \qquad (2)$$

Đặt $x=\cos\alpha$ với $\alpha\in[0;\pi)$. Khi đó phương trình (2) trở thành

$$2\sin\alpha\cos\alpha=\cos 2\alpha-\sqrt{1+\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\alpha-\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow \cos(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=-\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{4\pi}{3}\\ \alpha=-\dfrac{\pi}{10}+k\dfrac{4\pi}{5}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Do $\alpha\in[0;\pi)$ nên $\alpha=\dfrac{7\pi}{10}$.

Suy ra nghiệm của hệ phương trình là $x=\cos\dfrac{7\pi}{10}$, $y=\sqrt{2}\cos\dfrac{7\pi}{20}$.

1.3 Hệ phương trình hoán vị

Dạng:

$$\begin{cases} f(x_1)=g(x_2)\\ f(x_2)=g(x_3)\\ \dots\\ f(x_{n-1})=g(x_n)\\ f(x_n)=g(x_{n-1})\end{cases}$$

Nghiệm của hệ là bộ n số thực

Sau đây ta trình bày một số tính chất, từ đó giúp cho việc định hình phương pháp giải các bài tập.

Tính chất 1. Nếu hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (hoặc cùng nghịch biến) trên khoảng K và $(x_1;x_2;...;x_n)$ là nghiệm của hệ (trong đó $x_i\in K$, $i=\overline{1,n}$) thì $x_1=x_2=...=x_n$.

Chứng minh: Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Xét trường hợp cả $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm đồng biến trên K (trường hợp cùng nghịch biến hoàn toàn tương tự). Khi đó ta có

$$f(x_1) \ge f(x_2) \Rightarrow g(x_2) \ge g(x_3) \Rightarrow x_2 \ge x_3 \Rightarrow ... \Rightarrow x_n \ge x_1.$$

Do đó $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge ... \ge x_n \ge x_1$ hay $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Tính chất 2. Nếu hàm số $f(x)$ nghịch biến, $g(x)$ đồng biến trên khoảng K và $(x_1; x_2; ...; x_n)$ là nghiệm của hệ (trong đó $x_i \in K, i = \overline{1, n}$) thì với n là số nguyên dương lẻ ta có $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Chứng minh: Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Khi đó

$$x_1 \ge x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \Rightarrow g(x_2) \le g(x_3) \Rightarrow x_2 \le x_3 \Rightarrow ... \Rightarrow x_n \ge x_1$$
$$\Rightarrow f(x_n) \le f(x_1) \Rightarrow x_1 \le x_2.$$

Suy ra $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Tính chất 3. Nếu hàm số $f(x)$ nghịch biến, $g(x)$ đồng biến trên khoảng K và $(x_1; x_2; ...; x_n)$ là nghiệm của hệ (trong đó $x_i \in K, i = \overline{1, n}$) thì với n là số nguyên dương chẵn ta có $x_1 = x_3 = ... = x_{n-1}$ và $x_2 = x_4 = ... = x_n$.

Chứng minh: Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} x_1 \ge x_3 &\Rightarrow f(x_1) \le f(x_3) \Rightarrow g(x_2) \le g(x_4) \Rightarrow x_2 \le x_4 \\ &\Rightarrow f(x_2) \ge f(x_4) \Rightarrow g(x_3) \ge g(x_5) \Rightarrow x_3 \ge x_5 \Rightarrow ... \\ &\Rightarrow f(x_{n-2}) \ge f(x_n) \Rightarrow g(x_{n-1}) \ge g(x_1) \Rightarrow x_{n-1} \ge x_1 \\ &\Rightarrow f(x_{n-1}) \le f(x_1) \Rightarrow g(x_n) \le g(x_2) \Rightarrow x_n \le x_2. \end{aligned}$$

Suy ra $\begin{cases} x_1 \ge x_3 \ge ... \ge x_{n-1} \ge x_1 \\ x_2 \le x_4 \le ... \le x_n \le x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 = ... = x_{n-1} \\ x_2 = x_4 = ... = x_n. \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \dfrac{2y^2}{y^2+1} = z \\ \dfrac{2z^2}{z^2+1} = x \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Từ hệ phương trình ta suy ra $x, y, z \geq 0$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2t^2}{t^2+1}$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{4t}{(t^2+1)^2} > 0$ với mọi $t > 0$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Khi đó

$x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow y \geq z \Rightarrow f(y) \geq f(z) \Rightarrow z \geq x$.

Suy ra $x \geq y \geq z \geq x$ hay $x = y = z$. Từ đó ta suy ra nghiệm của hệ phương trình là (0; 0; 0) và (1; 1; 1).

Nhận xét. Ta có thể giải bằng cách đánh giá bất đẳng thức như sau:

* Nếu $x = 0$ thì $y = 0$, $z = 0$. Khi đó có nghiệm (0; 0; 0).

* Nếu $x \neq 0$ thì $x, y, z > 0$. Khi đó nhân ba phương trình của hệ ta được

$$\frac{8x^2y^2z^2}{(z^2+1)(y^2+1)(x^2+1)} = xyz \Leftrightarrow (z^2+1)(y^2+1)(x^2+1) = 8xyz.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$(z^2+1)(y^2+1)(x^2+1) \geq 8xyz.$$

Suy ra phương trình tương đương với dấu đẳng thức xảy ra, hay $x = y = z = 1$.

Vậy nghiệm của hệ là (0; 0; 0) và (1; 1; 1).

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x(y^2+1) = y(y^2+9) \\ 2y(z^2+1) = z(z^2+9) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}). \\ 2z(x^2+1) = x(x^2+9) \end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x = \dfrac{y(y^2+9)}{y^2+1} \\ y = \dfrac{z(z^2+9)}{z^2+1} \\ z = \dfrac{x(x^2+9)}{x^2+1} \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t(t^2+9)}{2(t^2+1)}$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^4 - 4t^2 + 9}{2(t^2+1)^2} > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \max\{x,\ y,\ z\}$. Khi đó

$$x \ge y \Rightarrow f(x) \ge f(y) \Rightarrow z \ge x \Rightarrow f(z) \ge f(x) \Rightarrow y \ge z.$$

Suy ra $x \ge y \ge z \ge x$ nên $x = y = z$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$2x^3 + 2x = x^3 + 9x \Leftrightarrow x^3 - 7x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{7}. \end{array}\right.$$

Suy ra hệ phương trình có ba nghiệm $(x;\ y;\ z)$ là

$$(0;\ 0;\ 0),\ \left(\sqrt{7};\ \sqrt{7};\ \sqrt{7}\right) \text{ và } \left(-\sqrt{7};\ -\sqrt{7};\ -\sqrt{7}\right).$$

Nhận xét. Ta có bài toán tổng quát sau:

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo a

$$\begin{cases} 2x(y^2 + a^2) = y(y^2 + 9a^2) \\ 2y(z^2 + a^2) = z(z^2 + 9a^2) \quad (x,\ y,\ z \in \mathbb{R}). \\ 2z(x^2 + a^2) = x(x^2 + 9a^2) \end{cases}$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \quad (x,\ y,\ z \in \mathbb{R}). \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y^3 = 6x^2 - 12x + 8 \\ z^3 = 6y^2 - 12y + 8 \\ x^3 = 6z^2 - 12z + 8 \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \max\{x,\ y,\ z\}$.

Ta có $y^3 = 6(x-1)^2 + 2 \ge 2$ nên $y > 1$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $x,\ y,\ z > 1$.

Xét hàm số $f(t) = 6t^2 - 12t + 8$ với $t > 1$.

Ta có $f'(t) = 12t - 12 > 0$ với mọi $t > 1$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(1;\ +\infty)$.

Từ $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow y^3 \geq z^3 \Rightarrow y \geq z \Rightarrow f(y) \geq f(z) \Rightarrow z^3 \geq x^3 \Rightarrow z \geq x$.

Suy ra $x \geq y \geq z \geq x$ hay $x = y = z$. Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x = y = z \\ x^3 = 6x^2 - 12x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(2; 2; 2)$.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x \end{cases} \quad (x,\ y,\ z \in \mathbb{R}).$$

(Học sinh giỏi Quốc gia, 2006)

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x - 5 = y + x \\ y^3 + 3y^2 + 3y - 5 = z + y \\ z^3 + 3z^2 + 3z - 5 = x + z. \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t^2 + 3t - 5$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 6t + 3 = 3(t+1)^2 \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \max\{x,\ y,\ z\}$. Khi đó ta có

$x \geq z \Rightarrow f(x) \geq f(z) \Rightarrow y + x \geq x + z \Rightarrow y \geq z \Rightarrow f(y) \geq f(z) \Rightarrow z + y \geq x + z$
$\Rightarrow y \geq x \Rightarrow f(y) \geq f(x) \Rightarrow z + y \geq y + x \Rightarrow z \geq x.$

Suy ra $x = y = z$.

Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x = y = z \\ x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 3y^3 + 2y^2 \\ y = 3z^3 + 2z^2 \\ z = 3x^3 + 2x^2 \end{cases} \quad (x,\ y,\ z \in \mathbb{R}).$$

(Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ)

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+y=3y^3+2y^2+y \\ y+z=3z^3+2z^2+z \\ z+x=3x^3+2x^2+x. \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t)=3t^3+2t^2+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3t^2+4t+1>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x=\max\{x,\ y,\ z\}$. Khi đó ta có

$$x\ge y \Rightarrow f(x)\ge f(y)\Rightarrow z+x\ge x+y\Rightarrow z\ge y\Rightarrow f(z)\ge f(y)\Rightarrow y+z\ge x+y$$
$$\Rightarrow z\ge x\Rightarrow f(z)\ge f(x)\Rightarrow y+z\ge z+x\Rightarrow y\ge x.$$

Suy ra $x=y=z$.

Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x=y=z \\ 3x^3+2x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x\in\left\{0,\ -1,\ \frac{1}{3}\right\}. \end{cases}$$

Vậy nghiệm $(x;\ y;\ z)$ của hệ là $(0;\ 0;\ 0)$, $(-1;\ -1;\ -1)$, $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \ln\left(x^2+x+1\right)=x+3y \\ \ln\left(y^2+y+1\right)=y+3z \\ \ln\left(z^2+z+1\right)=z+3x \end{cases}$ $(x,\ y,\ z\in\mathbb{R})$.

(Chọn đội tuyển HSG Quốc gia Chuyên Đại học Vinh, 2013 - 2014)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $x=\max\{x,\ y,\ z\}$. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \ln\left(x^2+x+1\right)+2x=3x+3y \\ \ln\left(y^2+y+1\right)+2y=3y+3z \\ \ln\left(z^2+z+1\right)+2z=3z+3x. \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t)=\ln\left(x^2+x+1\right)+2x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2t+1}{t^2+t+1}+2=\dfrac{2t^2+4t+3}{t^2+t+1}>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} f(x) = 3x + 3y \\ f(y) = 3y + 3z \\ f(z) = 3z + 3x. \end{cases}$$

Khi đó $x \ge z \Leftrightarrow f(x) \ge f(z)$, tức là $3x + 3y \ge 3z + 3x \Leftrightarrow y \ge z$.

Suy ra $f(y) \ge f(z) \Leftrightarrow 3y + 3z \ge 3z + 3x \Leftrightarrow y \ge x$.

Suy ra $f(y) \ge f(x) \Leftrightarrow 3y + 3z \ge 3x + 3y \Leftrightarrow z \ge x$.

Từ đó kết hợp $x = \max\{x, y, z\}$ suy ra $x = y = z$.

Hệ trở thành $\begin{cases} x = y = z \\ \ln\left(x^2 + x + 1\right) = 4x. \end{cases}$

Xét hàm số $g(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right) - 4x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} - 4 = \dfrac{-4x^2 - 2x - 3}{x^2 + x + 1} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $g(0) = 0$, do đó phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Từ đó ta có hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = 0$.

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} e^x - e^{x-y} = y \\ e^y - e^{y-z} = z \\ e^z - e^{z-x} = x \end{cases}$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$.

Lời giải. Với $x = 0$, hệ trở thành $\begin{cases} 1 - e^{-y} = y \\ e^y - e^{y-z} = z \\ e^z - e^z = 0. \end{cases}$

Xét hàm số $f(y) = 1 - e^{-y} - y$ với $y \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(y) = e^{-y} - 1$; $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ và $f'(y) > 0 \Leftrightarrow y < 0$. Suy ra hàm đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên $f(y) \le 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Do đó $1 - e^{-y} = y \Leftrightarrow y = 0$.

Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} y = 0 \\ 1 - e^{-z} = z \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0$. Vậy $(0; 0; 0)$ là một nghiệm của hệ.

Xét $x \neq 0$, khi đó $y \neq 0$, $z \neq 0$ và hệ tương đương với

$$\begin{cases} e^{z} = \dfrac{ye^{y}}{e^{y}-1} \\ e^{y} = \dfrac{ze^{z}}{e^{z}-1} \\ e^{z} = \dfrac{xe^{x}}{e^{x}-1}. \end{cases}$$

Xét hàm số $g(t) = \dfrac{te^{t}}{e^{t}-1}$ với $t \neq 0$.

Ta có $g'(t) = \dfrac{e^{t}(e^{t}-t-1)}{(e^{t}-1)^2} > 0$ với mọi $t \neq 0$ (vì $e^{t} > t+1$ với mọi $t \neq 0$) và $\lim\limits_{t\to 0^-} g(t) = 1$; $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = 1$.

Suy ra bảng biến thiên

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	||	$+$	
$g(t)$		$\nearrow$	1 || 1	$\nearrow$	

Nếu $x > y \Rightarrow g(x) > g(y) \Rightarrow e^{z} > e^{x} \Rightarrow z > x \Rightarrow g(z) > g(x) \Rightarrow e^{y} > e^{z} \Rightarrow y > z$.

Suy ra $y > z > x > y$, vô lý.

Tương tự, nếu $y > x$ cũng vô lý.

Suy ra $x = y$, khi đó $y = z$ và hệ trở thành $\begin{cases} x = y = z \neq 0 \\ e^{x} - 1 = x \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ là $(0;\ 0;\ 0)$.

Bài tập

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x\sqrt{8x-4} - 12y^2 - 5 = 4y^3 + 13y + \sqrt{18x-9} \\ 4x^2 - 8x + 4\sqrt{2x-1} + 2y^3 + 7y^2 + 2y = 0 \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3(4y^2+1)+2(x^2+1)\sqrt{x}=6 \\ x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1} \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Bài 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2+21}-\sqrt{y}=(y+1)^2 \\ \sqrt{(y+1)^2+21}-\sqrt{x}=(x+1)^2 \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Bài 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{y+1}=(y+1)^x \\ \sqrt{-4x^2+18x-20}+\dfrac{2x^2-9x+6}{2x^2-9x+8}=\sqrt{y+1} \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Bài 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 125y^2+\dfrac{6\sqrt{15}}{y^3}=125 \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Bài 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3x-x^4=28 \\ xy^2+2x^2y+x^3=18\sqrt{2} \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Bài 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (2x^2-3x+4)(2y^2-3y+4)=18 \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0 \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Bài 8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(2x^2-1\right)\left(2y^2-1\right)=\dfrac{7}{2}xy \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0 \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Bài 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3(2+3y)=1 \\ x(y^3-2)=3 \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Bài 10. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos x - \cos y = y - x \\ \sqrt{y+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{y+8}} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 11. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^8 + 100\cos y = y^4 + 100\cos x^2 \\ x^3 - x^2y + 2x^2 + xy^2 + 2y^2 - y^3 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 12. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_3 x + \sqrt{\log_3^2 x - \log_3 x^2 + 2} = \dfrac{y}{3} + 1 \\ \log_3 y + \sqrt{\log_3^2 y - \log_3 y^2 + 2} = \dfrac{x}{3} + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 13. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{2xy}{x+y} + \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} = \dfrac{2\sqrt{xy} + x + y}{2} \\ 2013^{x+y-1} - 3x + y + 1 = \sqrt{(2x-1)^2 + x - y + 1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 14. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_3(-2y-2) + 4x^2 - \sqrt{4x^2+1} = 1 + \sqrt{2} \\ \log_3 \dfrac{2x+1}{x-y} + 1 = \sqrt{4x^2+4x+2} - \sqrt{(x-y)^2+1} + (x-y)^2 - 4x(x+1) \end{cases}$$

Bài 15. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^{x^2-16} + 3\sqrt{x} + \sqrt{x^2+1} = 4^{y^2-8y} + 3\sqrt{y-4} + \sqrt{y^2-8y+17} \\ y\left(x^2-1\right) - 4x^2 + 3x - 8 + \ln\left(x^2-3x+3\right) = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 3x + \ln(2x+1) = y \\ y^2 + 3y + \ln(2y+1) = x. \end{cases}$

(Học sinh giỏi Quốc gia, 1994)

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(1+4^{2x-y}\right).5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln\left(y^2+2x\right) = 0 \end{cases}$

(Học sinh giỏi Quốc gia, 1999)

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3x-3+\ln\left(x^2-x+1\right)=y \\ y^3+3y-3+\ln\left(y^2-y+1\right)=z \\ z^3+3z-3+\ln\left(z^2-z+1\right)=x. \end{cases}$

(Học sinh giỏi Quốc gia, 1994)

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+6}.\log_3(6-y)=x \\ \sqrt{y^2-2y+6}.\log(6-z)=y \\ \sqrt{z^2-2z+6}.\log_3(6-x)=z. \end{cases}$

(Học sinh giỏi Quốc gia, 2006)

Hướng dẫn giải bài tập

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x\sqrt{8x-4}-12y^2-5=4y^3+13y+\sqrt{18x-9} \\ 4x^2-8x+4\sqrt{2x-1}+2y^4+7y^2+2y=0 \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq\frac{1}{2}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$8x\sqrt{2x-1}=4y^3+12y^2+13y+5+3\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow 8x\sqrt{2x-1}-3\sqrt{2x-1}=4y^3+12y^2+13y+5$$

$$\Leftrightarrow (4(2x-1)+1)\sqrt{2x-1}=4(y+1)^3+(y+1)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+\sqrt{2x-1}=4(y+1)^3+(y+1). \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=4t^3+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=12t^2+1$; $f'(t)>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra

$$(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2x-1}\right)=f(y+1)\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}=y+1\Leftrightarrow\begin{cases} y+1\geq 0 \\ 2x=y^2+2y+2. \end{cases}$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\left(y^2+2y+2\right)^2-4\left(y^2+2y+2\right)+4(y+1)+2y^3+7y^2+2y=0$$

$$\Leftrightarrow y^4+6y^3+11y^2+6y=0$$

$$\Leftrightarrow y(y+1)\left(y^2+5y+6\right)=0 \Leftrightarrow y=0,\ y=-1,\ y=-2,\ y=-3.$$

Đối chiếu điều kiện $y \geq -1$ suy ra $y=0,\ y=-1$.

Với $y=0$ ta có $x=1$.

Với $y=-1$ ta có $x=\frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;\ 0)$, $\left(\frac{1}{2};-1\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3(4y^2+1)+2(x^2+1)\sqrt{x}=6 \\ x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1} \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 0$.

Nếu $x=0$ thì từ phương trình thứ hai của hệ ta có $0=6$, không thỏa mãn.

Với $x>0$, chia cả hai vế của phương trình thứ hai của hệ cho x^2 ta được

$$2y\left(1+\sqrt{4y^2+1}\right)=\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right). \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{2t^2+1}{\sqrt{t^2+1}}>0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình (1) tương đương với $f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y=\frac{1}{x}$.

Thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$x^3+x+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow x^3+x-6=-2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}. \qquad (2)$$

Xét các hàm số $g(x)=x^3+x-6,\ h(x)=-2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}$ với $x \in (0;+\infty)$.

Ta có $g(x)$ đồng biến và $h(x)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và $g(1)=h(1)$. Do đó phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x=1$.

Suy ra $y=\frac{1}{2}$. Vậy nghiệm của hệ là $x=1,\ y=\frac{1}{2}$.

Bài 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2+21}-\sqrt{y}=(y+1)^2 \\ \sqrt{(y+1)^2+21}-\sqrt{x}=(x+1)^2 \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x,\ y\geq 0$.

Ta thấy $x=0$ hoặc $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x,\ y>0$. Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$\sqrt{(x+1)^2+21}+(x+1)^2+\sqrt{x}=\sqrt{(y+1)^2+21}+(y+1)^2+\sqrt{y}. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{(t+1)^2+21}+(t+1)^2+\sqrt{t}$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=2(t+1)+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{t+1}{\sqrt{(t+1)^2+21}}$; $f'(t)>0$ với mọi $t>0$. Do đó hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra phương trình $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$(x+1)^2+\sqrt{x}-\sqrt{(x+1)^2+21}=0. \quad (2)$$

Xét hàm số $g(x)=(x+1)^2+\sqrt{x}-\sqrt{(x+1)^2+21}$ với $x>0$.

Ta có $g'(x)=2x+2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+21}}>2-\dfrac{x+1}{x+1}>0$ với mọi $t>0$. Do đó hàm $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mặt khác $g(1)=0$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của (2).

Vậy nghiệm của phương trình là $x=y=1$.

Bài 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{y+1}=(y+1)^x \\ \sqrt{-4x^2+18x-20}+\dfrac{2x^2-9x+6}{2x^2-9x+8}=\sqrt{y+1} \end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} y+1>0,\ x>0 \\ -4x^2+18x-20\geq 0 \\ 2x^2-9x+8\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y>-1 \\ 2\leq x\leq\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

Đặt $t=\sqrt{-4x^2+18x-20}=\sqrt{\frac{1}{4}-4\left(x-\frac{9}{4}\right)^2}$, khi đó $0\le t\le \frac{1}{2}$ và phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$t+1+\frac{4}{t^2+4}=\sqrt{y+1}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t+1+\frac{4}{t^2+4}$ với $0\le t\le\frac{1}{2}$.

Ta có $f'(t)=1-\frac{8t}{(t^2+4)^2}>0$ với mọi $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ nên $2=f(0)\le f(t)\le f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{83}{34}<\frac{5}{2}$ với mọi $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Kết hợp (1) ta suy ra $\sqrt{y+1}\ge 2\Leftrightarrow y+1\ge 4$.

Ta có $x^{y+1}=(y+1)^x\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln(y+1)}{y+1}\Leftrightarrow g(x)=g(y+1)$, $\qquad (2)$

trong đó $g(t)=\frac{\ln t}{t}$. Ta có $g'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$; $g'(t)>0\Leftrightarrow t<e$.

Suy ra bảng biến thiên

t	2		$\frac{5}{2}$	e		4		$+\infty$
$g'(t)$		$+$		0	$-$			
$g(t)$	$\frac{\ln 2}{2}$	$\nearrow$			$\searrow$	$\frac{\ln 2}{2}$	$\searrow$	

Vì $x\in\left[2;\frac{5}{2}\right]$ và $y+1\ge 4$ dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình

$$g(x)=g(y+1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y+1=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=3.\end{cases}$$

Vậy $(x;y)=(2;3)$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ 125y^2+\frac{6\sqrt{15}}{y^3}=125\end{cases}$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $y \neq 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra $y \in [-1; 1] \setminus \{0\}$.

Xét hàm số $f(y) = 125y^2 + \dfrac{6\sqrt{15}}{y^3}$ với $y \in [-1; 1] \setminus \{0\}$.

Ta có $f'(y) = 250y - \dfrac{18\sqrt{15}}{y^4}$; $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y^5 = \dfrac{18\sqrt{15}}{280} \Leftrightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Suy ra bảng biến thiên

y	-1		0		$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}}$		1
$f'(y)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(y)$		$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	125	$\nearrow$	

Vì $f(-1) = 125 - 6\sqrt{15} < 125$ nên dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(y) = 125$ có nghiệm duy nhất $y = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$.

Suy ra nghiệm $(x; y)$ của hệ là $\left(\sqrt{1 - \sqrt[3]{\dfrac{9}{25}}}; \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}\right)$, $\left(-\sqrt{1 - \sqrt[3]{\dfrac{9}{25}}}; \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3x - x^4 = 28 \\ xy^2 + 2x^2y + x^3 = 18\sqrt{2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x(y^3 - x^3) = 28 & (1) \\ x(y + x)^2 = 18\sqrt{2} & (2) \end{cases}$

Suy ra để $(x; y)$ là nghiệm thì $y > x > 0$. Từ (2), rút y theo x và thế vào (1) ta có

$$x\left(\left(\frac{3\sqrt[4]{8}}{\sqrt{x}} - x\right)^3 - x^3\right) = 28. \qquad (3)$$

Đặt $t = \sqrt{x}$, $t > 0$, khi đó (3) trở thành

$$t^9 - (3\sqrt[4]{8} - t^3)^3 + 28t = 0. \qquad (4)$$

Xét hàm số $f(t)=t^9-(3\sqrt[4]{8}-t^3)^3+28t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)>0$ với mọi $t>0$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mà $f\left(\sqrt[4]{2}\right)=0$ nên $t=\sqrt[4]{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình (4). Từ đó suy ra nghiệm của hệ là $x=\sqrt{2},\ y=2\sqrt{2}$.

Bài 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(2x^2-3x+4)(2y^2-3y+4)=18\\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0\end{cases}\quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Xét phương trình $x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0$. (2)

Xem (2) là phương trình bậc hai biến x, ta có

$$(2)\Leftrightarrow x^2+(y-7)x+y^2-6y+14=0.$$

Điều kiện có nghiệm là

$$\Delta_x=(y-7)^2-4(y^2-6y+14)\ge 0\Leftrightarrow -3y^2+10y-7\ge 0\Leftrightarrow 1\le y\le\frac{7}{3}.$$

Tương tự, xem (2) là phương trình bậc hai của y, ta có

$$(2)\Leftrightarrow y^2-(x-6)y+x^2-7x+14=0.$$

Phương trình có nghiệm khi

$$\Delta_y=(x-6)^2-4(x^2-7x+14)\ge 0\Leftrightarrow -3x^2+16x-20\ge 0\Leftrightarrow 2\le x\le\frac{10}{3}.$$

Như vậy, từ phương trình (2) suy ra $2\le x\le\frac{10}{3}$ và $1\le y\le\frac{7}{3}$.

Xét hàm số $f(t)=2t^2-3t+4$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=4t-3;\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{4}<1$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$. Do đó

$$f(x)\ge f(2)=6\ \text{với mọi}\ 2\le x\le\frac{10}{3}\ \text{và}\ f(y)\ge f(1)=3\ \text{với mọi}\ 1\le y\le\frac{7}{3}.$$

Suy ra $f(x).f(y)\ge 6.3=18$ với mọi $2\le x\le\frac{10}{3}$ và $1\le y\le\frac{7}{3}$. Do đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với dấu đẳng thức xảy ra, tức là $x=2,\ y=1$.

Thay giá trị này vào (2) không thỏa mãn, do đó hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(2x^2-1)(2y^2-1)=\dfrac{7}{2}xy \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0\end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Xét phương trình $x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0.$ (2)

Xem (2) là phương trình bậc hai biến x, ta có

$$(2)\Leftrightarrow x^2+(y-7)x+y^2-6y+14=0.$$

Điều kiện có nghiệm là

$$\Delta_x=(y-7)^2-4(y^2-6y+14)\ge 0\Leftrightarrow -3y^2+10y-7\ge 0\Leftrightarrow 1\le y\le\frac{7}{3}.$$

Tương tự, xem (2) là phương trình bậc hai của y, ta có

$$(2)\Leftrightarrow y^2-(x-6)y+x^2-7x+14=0.$$

Phương trình có nghiệm khi

$$\Delta_y=(x-6)^2-4(x^2-7x+14)\ge 0\Leftrightarrow -3x^2+16x-20\ge 0\Leftrightarrow 2\le x\le\frac{10}{3}.$$

Như vậy, từ phương trình (2) suy ra $2\le x\le\frac{10}{3}$ và $1\le y\le\frac{7}{3}$.

Ta có phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\left(2x-\frac{1}{x}\right)\left(2y-\frac{1}{y}\right)=\frac{7}{2}. \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t)=2t-\frac{1}{t}$ với $t\ge 1$.

Ta có $f'(t)=2+\frac{1}{t^2}$; $f'(t)>0$ với mọi $t\ge 1$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$. Suy ra $f(x)f(y)\ge f(2)f(1)=\frac{7}{2}$. Từ đó suy ra phương trình

$(3)\Leftrightarrow x=2,\ y=1.$

Thử lại vào (2) không thỏa mãn. Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Bài 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3(2+3y)=1 \\ x(y^3-2)=3\end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Rõ ràng $x=0$ không thỏa mãn hệ.

Với $x \neq 0$, từ hệ suy ra

$$x^3(2+3y+y^3-2)=3x^2+1 \Leftrightarrow y^3+3y=\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3t^2+3>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(y)=f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow y=\frac{1}{x}$.

Thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$x^3\left(2+\frac{3}{x}\right)=1 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là $(-1;-1)$, $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos x-\cos y=y-x \\ \sqrt{y+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{y+8}} \end{cases} (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} y\geq -1 \\ x\geq \sqrt{y+8}. \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $\cos x+x=\cos y+y$. (1)

Xét hàm số $f(t)=\cos t+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=-\sin t+1\geq 0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại các điểm $t=k\pi$ nên hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y.$$

Thế vào phương trình thứ hai ta được

$$\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}} \Leftrightarrow x+2-2\sqrt{x+1}=x-\sqrt{x+8}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=2+\sqrt{x+8} \Leftrightarrow 4(x+1)=4+4\sqrt{x+8}+x+8$$

$$\Leftrightarrow 3x-8=4\sqrt{x+8} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-8\geq 0 \\ (3x-8)^2=16(x+8) \end{cases} \Leftrightarrow x=8.$$

Suy ra nghiệm của hệ là $x=y=8$.

Bài 11. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^8 + 100\cos y = y^4 + 100\cos x^2 \\ x^3 - x^2y + 2x^2 + xy^2 + 2y^2 - y^3 = 0 \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$(x-y+2)(x^2+y^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x+2 = y. \end{array}\right.$$

Ta có $x = y = 0$ thỏa mãn hệ phương trình.

Với $x+2 = y$, thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$x^8 - 100\cos x^2 = (x+2)^4 - 100\cos(x+2). \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 100\cos t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 4t^3 + 100\sin t$.

Xét các khoảng của t.

* Với $t \in [0;\ \pi]$ ta có $f'(t) > 0$.

* Với $t \in (\pi;\ +\infty)$ ta có $f'(t) > 4\pi^3 - 100 > 0$.

Suy ra $f'(t) > 0$ với mọi $t \geq 0$ hay $f(t)$ đồng biến trên $[0;\ +\infty)$.

Nếu $x \geq -2$ thì $x+2,\ x^2 \in [0;\ +\infty)$ do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(x+2) = f\left(x^2\right) \Leftrightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Nếu $x < -2$ thì $-x-2,\ x^2 \in [0;\ +\infty)$ do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(-x-2) = f\left(x^2\right) \Leftrightarrow -x-2 = x^2, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(0;\ 0), (2;\ 4), (-1;\ 1)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_3 x + \sqrt{\log_3^2 x - \log_3 x^2 + 2} = \dfrac{y}{3} + 1 \\ \log_3 y + \sqrt{\log_3^2 y - \log_3 y^2 + 2} = \dfrac{x}{3} + 1 \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x,\ y > 0$.

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} \log_3 x - 1 + \sqrt{(\log_3 x - 1)^2 + 1} = \dfrac{y}{3} \\ \log_3 y - 1 + \sqrt{(\log_3 y - 1)^2 + 1} = \dfrac{x}{3} \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = \log_3 x - 1 \\ v = \log_3 y - 1 \end{cases}$ hệ trở thành $\begin{cases} u + \sqrt{u^2+1} = 3^v \\ v + \sqrt{v^2+1} = 3^u. \end{cases}$

Giải tiếp tương tự Ví dụ 6 mục 1.2.

Ta có nghiệm của hệ là $x = y = 3$.

Bài 13. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{2xy}{x+y} + \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} = \dfrac{2\sqrt{xy}+x+y}{2} \\ 2013^{x+y-1} - 3x + y + 1 = \sqrt{(2x-1)^2 + x - y + 1} \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $xy \ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{2xy}{x+y} - \frac{x+y}{2} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \sqrt{xy} = 0 \Leftrightarrow \frac{4xy-(x+y)^2}{2(x+y)} + \frac{\dfrac{x^2+y^2}{2} - xy}{\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x-y)^2}{2(x+y)} + \frac{(x-y)^2}{2\left(\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}} \end{array}\right. \quad (1)$$

Xét phương trình (1), ta có

$$(1) \Leftrightarrow x + y = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy} \Leftrightarrow 2(x+y) = \sqrt{2(x^2+y^2)} + 2\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = \sqrt{2(x^2+y^2)} - (x+y) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$$

$$= \frac{2(x^2+y^2) - (x+y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)} + (x+y)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)} + x + y}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)} + x + y}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ 1 = \dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+x+y} \end{array}\right. \qquad (2)$$

Xét phương trình (2), ta có

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2+y^2)}+x+y=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2+y^2)}=2\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=2xy \Leftrightarrow x=y.$$

Từ đó suy ra $(1) \Leftrightarrow x=y$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$2013^{2x-1}-2x+1=\sqrt{(2x-1)^2+1}.$$

Đặt $t=2x-1$, phương trình trở thành

$$2013^t=t+\sqrt{t^2+1} \Leftrightarrow \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)-t\ln 2013=0. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t)=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)-t\ln 2013$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}-\ln 2013<0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$. Do đó hàm $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $f(0)=0$ nên $t=0$ là nghiệm duy nhất của (3). Từ đó ta suy ra nghiệm của hệ là $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Bài 14. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_3(-2y-2)+4x^2-\sqrt{4x^2+1}=1-\sqrt{2} \\ \log_3\dfrac{2x+1}{x-y}+1=\sqrt{4x^2+4x+2}-\sqrt{(x-y)^2+1}+(x-y)^2-4x(x+1) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} y\le -1 \\ \dfrac{2x+1}{x-y}>0. \end{cases}$

TH 1: $x>y$, khi đó phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\sqrt{(2x+1)^2+1}-(2x+1)^2-\log_3(2x+1)=\sqrt{(x-y)^2+1}-(x-y)^2-\log_3(x-y). \ (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+1}-t^2-\log_3 t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}-\left(2t+\dfrac{1}{t}\right)\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}<0$ với mọi $t>0$.

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Từ đó ta có

$$(1) \Leftrightarrow f(2x+1)=f(x-y) \Leftrightarrow 2x+1=x-y \Leftrightarrow x=-y-1.$$

Thế vào phương trình thứ nhất ta được

$$\log_3 2x+4x^2-\sqrt{4x^2+1}=1-\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Xét hàm số $g(x)=\log_3 2x+4x^2-\sqrt{4x^2+1}$ với $x>0$.

Ta có $g'(x)=4x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\right)+\dfrac{1}{x}>0$ với mọi $x>0$. Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mà $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\sqrt{2}$ nên (2) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$. Suy ra $y=-\dfrac{3}{2}$.

TH 2: $x<y$, khi đó phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\sqrt{(2x+1)^2+1}-(2x+1)^2-\log_3\left(-(2x+1)\right)=\sqrt{(x-y)^2+1}-(x-y)^2-\log_3(y-x). \quad (3)$$

Tương tự như TH 1, ta có $(3) \Leftrightarrow -(2x+1)=y-x \Leftrightarrow x=-y-1$. Không thỏa mãn với điều kiện $y<-1$ và $x<y$.

Vậy nghiệm của hệ là $x=\dfrac{1}{2}, y=-\dfrac{3}{2}$.

Bài 15. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^{x^2-16}+3\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}=4^{y^2-8y}+3\sqrt{y-4}+\sqrt{y^2-8y+17} \\ y\left(x^2-1\right)-4x^2+3x-8+\ln\left(x^2-3x+3\right)=0 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq 0,\ y\geq 4$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$4^{x^2-16}+3\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}=4^{(y-4)^2-16}+3\sqrt{y-4}+\sqrt{(y-4)^2+1}. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=4^{t^2-16}+3\sqrt{t}+\sqrt{t^2+1}$ với $t\geq 0$.

Ta có $f'(t)=2t4^{t^2-16}\ln 4+\dfrac{3}{2\sqrt{t}}+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$; $f'(t)>0$ với mọi $t>0$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó phương trình $(1) \Leftrightarrow f(x)=f(y-4) \Leftrightarrow x=y-4 \Leftrightarrow y=x+4$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x^3+2x-12+\ln\left(x^2-3x+3\right)=0. \qquad (2)$$

Xét hàm số $g(x)=x^3+2x-12+\ln\left(x^2-3x+3\right)$ với $x\geq 0$.

Ta có $g'(x)=3x^2+2+\dfrac{2x-3}{x^2-3x+3}=3x^2+\dfrac{2x^2-4x+3}{x^2-3x+3}>0$ với mọi $x\geq 0$. Do đó $g(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Mặt khác $g(2)=0$ nên $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2).

Vậy nghiệm của hệ là $x=2,\ y=6$.

2 Hệ phương trình chứa tham số

Ví dụ 1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy}=0 \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2y-1}=m. \end{cases}$$

Phân tích và lời giải. Điều kiện: $x\geq 1,\ y\geq \dfrac{1}{2}$.

Phương trình thứ nhất của hệ là phương trình đẳng cấp bậc hai đối với $\sqrt{x}$ và $\sqrt{y}$. Do đó chúng ta sẽ tìm được liên hệ bậc nhất của x và y. Khi đó ta sẽ thế một ẩn theo ẩn kia vào phương trình thứ hai để tìm điều kiện có nghiệm.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow x=4y.$$

Do đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} x=4y & (1) \\ \sqrt{4y-1}-\sqrt{2y-1}=m. & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta thấy với mỗi $y\geq\dfrac{1}{2}$ sẽ cho ta một $x\geq 1$. Vì vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $y\geq\dfrac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(y)=\sqrt{4y-1}-\sqrt{2y-1}$ trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(y)=\dfrac{2}{\sqrt{4y-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2y-1}}$; $f'(y)=0\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}$;

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1,\ f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(y)=+\infty$.

Suy ra bảng biến thiên

y	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa và bảng biến thiên ta suy ra phương trình (2) có nghiệm $y \geq \frac{1}{2}$ hay hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tiếp theo ta xét ví dụ

Ví dụ 2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} 2x - y + m = 0 \\ y + \sqrt{xy} = 2. \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $xy \geq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $\sqrt{xy} = 2 - y \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2 \\ x = \dfrac{y^2 - 4y + 4}{y} \end{cases}$.

Thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$\frac{y^2 - 4y + 4}{y} - y + m = 0 \Leftrightarrow \frac{4y - 4}{y} = m. \qquad (1)$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $y \leq 2$.

Xét hàm số $f(y) = \dfrac{4y - 4}{y}$ với $y \leq 2$.

Ta có $f'(y) = \dfrac{4}{y^2}$; $f'(y) > 0$ với mọi $y \leq 2$.

Suy ra bảng biến thiên

y	$-\infty$		0		2
$f'(y)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(y)$	4	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(y)=m$ có nghiệm $y\le 2$ khi và chỉ khi $m\ge 4$ hoặc $m\le 2$.

Qua hai ví dụ trên ta nhận thấy một cách giải của bài toán tìm điều kiện để hệ phương trình có nghiệm là tìm cách thế một ẩn theo ẩn kia vào phương trình chứa tham số, sau đó sử dụng đạo hàm để tìm điều kiện có nghiệm của phương trình này. Ta tiếp tục xét các ví dụ sau

Ví dụ 3. Tìm m để hệ phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} 3(x+1)^2+y-m=0 \\ x+\sqrt{xy}=1 \end{cases}$$

Lời giải. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$\sqrt{xy}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x\ge 0 \\ xy=x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ y=\dfrac{x^2-2x+1}{x} \end{cases}$ (do $x=0$ không thỏa mãn phương trình).

Thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$3x^2+6x+\frac{x^2-2x+1}{x}=m-3. \qquad (1)$$

Hệ đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm x phân biệt thỏa mãn $x\le 1$.

Xét hàm số $f(x)=3x^2+6x+\dfrac{x^2-2x+1}{x}$ với $x\le 1$.

Ta có $f'(x)=6x+7-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{6x^3+7x^2-1}{x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1,\ x=-\dfrac{1}{2},\ x=\dfrac{1}{3}$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-7	↗	$\frac{27}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{11}{3}$	↗	9

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x)=m-3$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{11}{3} \le m-3 \le 9 \\ -7 \le m-3 \le -\dfrac{27}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{20}{3} \le m \le 12 \\ -4 \le m \le -\dfrac{15}{4}. \end{array}\right.$$

Vậy giá trị của m là $\dfrac{20}{3} \le m \le 12$ hoặc $-4 \le m \le -\dfrac{15}{4}$.

Ví dụ 4. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=1-3m. \end{cases}$

(Tuyển sinh Đại học Khối D, 2003 - 2004)

Lời giải. Điều kiện: $x,\ y \ge 0$.

Ta có $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=1-3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ \left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{y}\right)^3=1-3m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)=1-3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-3\sqrt{xy}=1-3m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ \sqrt{xy}=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}=1-\sqrt{x} \\ \sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}=1-\sqrt{x} \\ -\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}=m \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $t=\sqrt{x}$, khi đó phương trình (1) trở thành $-t^2+t=m$. (2)

Hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; 1]$.

Xét hàm số $f(t)=-t^2+t$ trên $[0; 1]$.

Ta có bảng biến thiên

$$\begin{array}{c|ccccc} t & 0 & & \frac{1}{2} & & 1 \\ \hline & & & \frac{1}{4} & & \\ f(t) & & \nearrow & & \searrow & \\ & 0 & & & & 0 \end{array}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(t)=m$ có nghiệm $t \in [0; 1]$ khi và chỉ khi $0 \le m \le \dfrac{1}{4}$.

Nhận xét. 1. Chúng ta có thể tìm điều kiện có nghiệm của hệ $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\ \sqrt{xy}=m\end{cases}$ bằng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2. Thật vậy, hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $t^2-t+m=0$ có 2 nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\ge 0\\ S\ge 0\\ P\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-4m\ge 0\\ m\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow 0\le m\le \frac{1}{4}.$$

2. Một yêu cầu cần có để sử dụng được đạo hàm để tìm điều kiện có nghiệm của phương trình là biến đổi được phương trình về dạng $f(x)=m$ hoặc $f(x)=g(m)$, gọi là cô lập tham số m.

Những trường hợp khác, chúng ta có thể sử dụng các điều kiện để phương trình có nghiệm đã biết.

Chẳng hạn xét các ví dụ sau

a) Xác định giá trị của tham số a để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-3}=a\\ x+y=2(a+1)\end{cases}$$

Lời giải. Đặt $u=\sqrt{x+1}\ge 0;\ v=-\sqrt{y-3}\le 0$.

Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases}u+v=a\\ u^2+v^2=2a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=a\\ uv=\dfrac{a^2-2a}{2}\end{cases}$$

Suy ra u,v là nghiệm của phương trình $f(t)=t^2-at+\dfrac{a^2-2a}{2}=0$.

Hệ đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(t)=0$ có nghiệm t_1, t_2 thoả mãn $t_1\le 0\le t_2$

$$\Leftrightarrow 1.f(0)\le 0 \Leftrightarrow \frac{a^2-2a}{2}\le 0 \Leftrightarrow 0\le a\le 2.$$

b) Xác định giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=m\\ x+y=2m+1\end{cases}$$

Các em học sinh tự giải, với đáp số $1+\sqrt{2}\le m\le 2+\sqrt{6}$.

Ví dụ 5. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}(x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=4\\(x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=10m+6.\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $xy\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4\\x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=10m+6.\end{cases}$$

Đặt $a=x+\dfrac{1}{x}$, $b=y+\dfrac{1}{y}$, khi đó $|a|\geq 2$, $|b|\geq 2$ và hệ trở thành

$$\begin{cases}a+b=4\\a^2-2+b^2-2=10m+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\(a+b)^2-2ab=10m+10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\ab=3-5m.\end{cases}$$

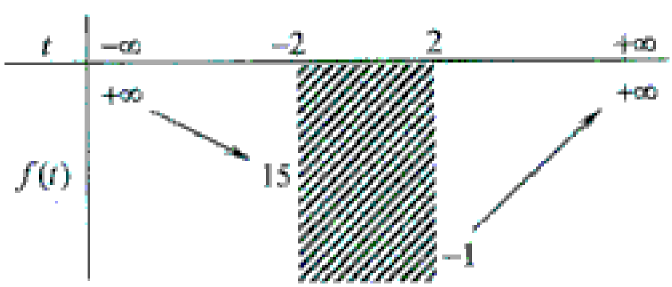
Suy ra a, b là hai nghiệm của phương trình

$$t^2-4t+3-5m=0\Leftrightarrow t^2-4t+3=5m. \qquad (1)$$

Do đó hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa mãn $|t|\geq 2$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-4t+3$ với $|t|\geq 2$.

Ta có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(t)=5m$ có 2 nghiệm thỏa mãn $|t|\geq 2$ khi và chỉ khi $3m\geq 15\Leftrightarrow m\geq 3$.

Ví dụ 6. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^3+y^3+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=15m-10. \end{cases}$$

(Tuyển sinh Đại học Khối D, 2007)

Lời giải. Điều kiện: $xy \neq 0$.

Đặt $a=x+\dfrac{1}{x}$, $b=y+\dfrac{1}{y}$, khi đó $|a|\geq 2$, $|b|\geq 2$ và hệ trở thành

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a^3+b^3-3(a+b)=15m-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=8-m. \end{cases}$$

Suy ra a, b là hai nghiệm của phương trình

$$t^2-5t+8-m=0 \Leftrightarrow t^2-5t+8=m. \qquad (1)$$

Do đó hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa mãn $|t|\geq 2$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-5t+8$ với $|t|\geq 2$.

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		-2		2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	22		2	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(t)=m$ có 2 nghiệm thỏa mãn $|t|\geq 2$ khi và chỉ khi $\dfrac{7}{4}\leq m\leq 2$ hoặc $m\geq 22$.

Ví dụ 7. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 3\left(x^2+y^2\right)-2xy-2(x+y)=15 \\ x^2+y^2=m \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $S=x+y$, $P=xy$, khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases}3S^2-2S-8P-15=0\\4S^2-8P=4m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3S^2-2S-8P-15=0 & (1)\\S^2+2S+15=4m & (2)\end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi hệ (1), (2) có nghiệm S, P thỏa mãn $S^2\ge 4P$.

Từ (1) ta có $3S^2-2S-15=8P\le 2S^2$. Suy ra $S^2-2S-15\le 0\Leftrightarrow -3\le S\le 5$.

Do đó hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $S\in[-3;\,5]$.

Xét hàm số $f(S)=S^2+2S+15$ với $S\in[-3;\,5]$.

Ta có bảng biến thiên

S	-3	-1	5
$f(S)$	18 ↘	14 ↗	50

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(S)=4m$ có nghiệm $S\in[-3;\,5]$ khi và chỉ khi $14\le 4m\le 50\Leftrightarrow \dfrac{7}{2}\le m\le\dfrac{25}{2}$.

Ví dụ 8. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $(x;\,y)$ với $x>0$, $y>0$

$$\begin{cases}xy(x+y)=3(x+y)+xy\\x^2+y^2+3xy-(m-5)(x+y)-xy(x+y)+m+33=0\end{cases}$$

Lời giải. Đặt $S=x+y$, $P=xy$, khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases}SP=3S+P & (1)\\S^2+P-(m-5)S-SP+m+33=0 & (2)\end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi hệ (1), (2) có nghiệm S, P thỏa mãn $S>0$, $P>0$ và $S^2\ge 4P$.

Ta thấy $S=1$ không thỏa mãn (1).

Với $S\ne 1$, từ (1) ta có $\dfrac{3S}{S-1}=P\le\dfrac{S^2}{4}$. Suy ra

$$\frac{S^3-4S^2-12S}{4(S-1)}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le S<1\\S\ge 4\end{array}\right.$$

Mặt khác $\dfrac{3S}{S-1}=P>0$ suy ra $\left[\begin{array}{l}S<0\\S>1.\end{array}\right.$

Từ đó ta suy ra $S \in [4; +\infty)$ và hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $m = \dfrac{S^2 + 2S + 33}{S - 1}$ có nghiệm $S \in [4; +\infty)$.

Xét hàm số $f(S) = \dfrac{S^2 + 2S + 33}{S - 1}$ với $S \in [4; +\infty)$.

Ta có $f'(S) = \dfrac{S^2 - 2S - 35}{(S-1)^2}$; $f'(S) = 0 \Leftrightarrow S = 7$.

Suy ra bảng biến thiên

S	4		7		$+\infty$
$f'(S)$		$-$	0	$+$	
$f(S)$	19	$\searrow$	16	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(S) = m$ có nghiệm $S \geq 4$ khi và chỉ khi $m \geq 16$.

Ví dụ 9. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm $(x; y)$ với $0 < x \leq 1$, $0 < y \leq 1$

$$\begin{cases} x + y = 4xy \\ x^2 + y^2 - 7xy = m \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $S = x + y$, $P = xy$, khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} S = 4P \\ S^2 - 9P = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 4P \\ 16P^2 - 9P = m. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Theo định lí Viet ta có x, y là hai nghiệm thuộc $(0; 1]$ của phương trình $t^2 - 4Pt + P = 0$.

Trước hết ta tìm P để phương trình $t^2 - 4Pt + P = 0$ có hai nghiệm trong $(0; 1]$. Điều đó tương đương với tìm P để phương trình $P = \dfrac{t^2}{4t - 1}$ có hai nghiệm trong $(0; 1]$ (vì $t = \dfrac{1}{4}$ không phải là nghiệm).

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{4t - 1}$ với $t \in (0; 1]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2t(2t-1)}{(4t-1)^2}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Suy ra bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(t)$	0 ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $P=\dfrac{t^2}{4t-1}$ có hai nghiệm trong $(0;1]$ khi và chỉ khi $\dfrac{1}{4}\le P\le\dfrac{1}{3}$.

Hệ phương trình (I) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $16P^2-9P=m$ có nghiệm $P\in\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]$.

Xét hàm số $g(P)=16P^2-9P$ với $P\in\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]$.

Ta có bảng biến thiên

P	$\frac{1}{4}$		$\frac{9}{32}$		$\frac{1}{3}$
$g(P)$	$-\frac{5}{4}$	↘	$-\frac{81}{64}$	↗	$-\frac{11}{9}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị cần tìm của m là $-\dfrac{81}{64}\le m\le-\dfrac{11}{9}$.

Ví dụ 10. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x^3-(y+2)x^2+xy=m \\ x^2+x-y=1-2m \end{cases}$$

(Tuyển sinh Đại học Khối D, 2011)

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases}(x^2-x)(2x-y)=m\\(x^2-x)+(2x-y)=1-2m.\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}u=x^2-x\\v=2x-y\end{cases}$ khi đó $u\ge -\dfrac{1}{4}$ và hệ trở thành

$$\begin{cases}uv=m\\u+v=1-2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=1-u-2m\\u^2+(2m-1)u+m=0.\end{cases}\qquad(1)$$

Ta có hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $u\ge -\dfrac{1}{4}$.

Với $u\ge -\dfrac{1}{4}$, phương trình (1) $\Leftrightarrow m=\dfrac{-u^2+u}{2u+1}$.

Xét hàm số $f(u)=\dfrac{-u^2+u}{2u+1}$ với $u\ge -\dfrac{1}{4}$.

Ta có $f'(u)=\dfrac{-2u^2-2u+1}{(2u+1)^2}$; $f'(u)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\\u=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}<-\dfrac{1}{4}.\end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

u	$-\frac{1}{4}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$	$-\frac{5}{8}$	$\nearrow$	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(u)=m$ có nghiệm $u\ge -\dfrac{1}{4}$ khi và chỉ khi $m\le\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải khác như sau

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$y=x^2+x+2m-1.$$

Thế vào phương trình thứ nhất, ta được

$$2x^3-\left(x^2+x+2m+1\right)x^2+x\left(x^2+x+2m-1\right)=m$$

$$\Leftrightarrow -x^4+2x^3-x=m\left(2x^2-2x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2-x\right)\left(1+x-x^2\right)}{2\left(x^2-x\right)+1}=m. \qquad (2)$$

Đặt $t=x^2-x$, khi đó $t\geq -\frac{1}{4}$ và phương trình (2) trở thành $\frac{t(1-t)}{2t+1}=m.$ (3)

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm $t\geq -\frac{1}{4}$.

Đến đây tương tự như trên ta được giá trị của m là $m\leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 11. Tìm m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} x^2+y^2-5x+4y+8=0 \\ 3x^2-mx\sqrt{x}+16=0 \end{cases}$

Lời giải. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$y^2+4y+x^2-5x+8=0.$$

Xem phương trình này là phương trình bậc hai ẩn y, khi đó phương trình có nghiệm $y \Leftrightarrow \Delta'=4-\left(x^2-5x+8\right)\geq 0 \Leftrightarrow x^2-5x+4\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 4.$

Từ đó suy ra hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình

$$3x^2-mx\sqrt{x}+16=0 \qquad (1)$$

có nghiệm $x\in[1;\,4]$. Đặt $t=\sqrt{x}$, khi đó với $x\in[1;\,4]$ thì $t\in[1;\,2]$ và phương trình (1) trở thành $3t^4-mt^3+16=0 \Leftrightarrow 3t+\frac{16}{t^3}=m.$ (2)

Xét hàm số $f(t)=3t+\frac{16}{t^3}$ với $t\in[1;\,2]$.

Ta có $f'(t)=3-\frac{48}{t^4}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2.$

Suy ra bảng biến thiên

t	1		2
$f'(t)$		$-$	0
$f(t)$	19	$\searrow$	8

Dựa và bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(t)=m$ có nghiệm $t\in[1;\,2]$ khi và chỉ khi $8\le m\le 19$.

Ví dụ 12. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} x^2-m=y(x+my) \\ x^2-y=xy \end{cases}$

(Học sinh giỏi Tỉnh Hà Tĩnh, 2013)

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} my^2-y+m=0 & (1) \\ x^2-yx-y=0 & (2) \end{cases}$

Phương trình (2) (ẩn x) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta_x=y^2+4y\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\ge 0 \\ y\le -4 \end{array}\right.$

Do đó hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $y\ge 0$ hoặc $y\le -4$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow m=\dfrac{y}{y^2+1}$.

Xét hàm số $f(y)=\dfrac{y}{y^2+1}$ trên $(-\infty;\,-4]\cup[0;\,+\infty)$.

Ta có $f'(y)=\dfrac{1-y^2}{(y^2+1)^2}$; $f'(y)=0\Leftrightarrow y=\pm 1$.

Suy ra bảng biến thiên

y	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$f'(y)$		$-$				$+$	0	$-$	
$f(y)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{4}{17}$		0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(y)=m$ có nghiệm $y\ge 0$ hoặc $y\le -4$ khi và chỉ khi $-\dfrac{4}{17}\le m\le \dfrac{1}{2}$.

Nhận xét. Chúng ta có thể tìm điều kiện để phương trình (1) có nghiệm $y\ge 0$ hoặc $y\le -4$ bằng cách khác như sau

Xét hai trường hợp

TH1: $m=0$, ta có $y=0$, $x=0$. Suy ra $m=0$ thỏa mãn.

TH2: $m \neq 0$. Phương trình (1) (ẩn y) không có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;-4] \cup [0;+\infty)$ (*) là (1) vô nghiệm hoặc (1) có 2 nghiệm đều thuộc $(-4;0)$, điều kiện là

$$\left[\begin{array}{l} \Delta = 1-4m^2 < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 1-4m^2 \geq 0 \\ -4 < y_1 < 0 \\ -4 < y_2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta = 1-4m^2 < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 1-4m^2 \geq 0 \\ -4 < \dfrac{1-\sqrt{1-4m^2}}{2m} < 0 \\ -4 < \dfrac{1+\sqrt{1-4m^2}}{2m} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \in \left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right) \\ \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq m < 0 \\ \sqrt{1-4m^2} > 1+8m \\ \sqrt{1-4m^2} < -1-8m \end{cases} (\mathrm{I}) \end{array}\right. (\mathrm{II})$$

(với y_1, y_2 là 2 nghiệm của phương trình (1)).

Ta có (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq m < -\dfrac{1}{8} \\ \sqrt{1-4m^2} < -1-8m \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq m < -\dfrac{4}{17}$

Suy ra (II) $\Leftrightarrow m \in \left(-\infty;-\dfrac{4}{17}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) (ẩn y) có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;-4] \cup [0;+\infty)$ hay (*) không xảy ra, điều kiện là $-\dfrac{4}{17} \leq m \leq \dfrac{1}{2}; m \neq 0$. Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là $-\dfrac{4}{17} \leq m \leq \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 13. Tìm m để hệ phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x+y=m \\ (y+1)x^2+xy=m(x+1). \end{cases}$$

(Học sinh giỏi Tỉnh Nghệ An, 2006)

Lời giải. Từ phương trình thứ nhất ta có $y=m-x$, thay vào phương trình thứ hai ta được $x^3-mx^2+m=0 \Leftrightarrow x^3=m\left(x^2-1\right)$. (1)

Vì $y=m-x$ nên hệ đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Rõ ràng $x=\pm1$ không là nghiệm của (1)

Với $x \neq \pm1$, ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1}=m$. (2)

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ trên tập xác định.

Ta có $f'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m>\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ hoặc $m<-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Nhận xét. Chúng ta có thể tìm điều kiện để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt dựa vào tính chất của đồ thị hàm bậc 3 như sau

Xét hàm số $f(x)=x^3-mx^2+m$ trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với Ox. (3)

Ta có $f'(x)=3x^2-2mx$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{2m}{3}.\end{array}\right.$

Suy ra: $(3)\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\f(0).f\left(\dfrac{2m}{3}\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow m^2\left(27-4m^2\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\\m>\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$

Ví dụ 14. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $(x;\,y)$ thỏa mãn $x\geq 9$

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\\\sqrt{x+7}+\sqrt{y+7}=m.\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $x,\,y\geq 0$.

Đặt $t=\sqrt{x}$, khi đó từ phương trình thứ nhất và điều kiện $x\ge 9$ suy ra $3\le t\le 4$, và $\sqrt{y}=4-t$ hay $y=t^2-8t+16$, phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\sqrt{t^2+7}+\sqrt{t^2-8t+23}=m. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+7}+\sqrt{t^2-8t+23}$ với $3\le t\le 4$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+7}}+\dfrac{t-4}{\sqrt{t^2-8t+23}}$;

$f'(t)=0\Leftrightarrow t\sqrt{t^2-8t+23}=(4-t)\sqrt{t^2+7}$

$$\Leftrightarrow\left((t-4)^2+7\right)t^2=(4-t)^2\left(t^2+7\right)\Leftrightarrow t=2;$$

$f(3)=4+\sqrt{8};f(4)=\sqrt{23}+\sqrt{7}$

Suy ra bảng biến thiên

t	3		4
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$4+\sqrt{8}$	$\nearrow$	$\sqrt{23}+\sqrt{7}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình (3) có nghiệm $t\in[3;4]$ khi và chỉ khi $4+\sqrt{8}\le\sqrt{23}+\sqrt{7}$.

Ví dụ 15. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}x^3-y^3+3y^2-3x-2=0\\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0.\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}1-x^2\ge 0\\ 2y-y^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 0\le y\le 2.\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x+1)^3-3(x+1)^2=y^3-3y^2. \qquad (1)$$

Vì $x\in[-1;1]$ nên $x+1\in[0;2]$. Xét hàm số $f(t)=t^3-3t^2$ với $t\in[0;2]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-6t$; $f'(t)<0$ với mọi $t\in(0;2)$.

Do đó hàm $f(t)$ nghịch biến trên $[0; 2]$. Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y.$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được $x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + m = 0$. (2)

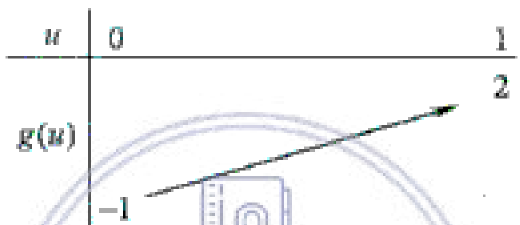
Đặt $u = \sqrt{1-x^2}$, khi đó $u \in [0; 1]$ và phươn trình (2) trở thành

$$u^2 + 2u - 1 = m. \quad (3)$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $x \in [-1; 1]$, hay phương trình (3) có nghiệm $u \in [0; 1]$.

Xét hàm số $g(u) = u^2 + 2u - 1$ với $u \in [0; 1]$.

Ta có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị của m là $-1 \le m \le 2$.

Ví dụ 16. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 4x^3 - 3x + (y-1)\sqrt{2y+1} = 0 \\ 2x^2 + x + \sqrt{-y(2y+1)} + m^2 = 0 \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $-\frac{1}{2} \le y \le 0$.

Phương trình thứ nhất tương đương với

$$(-2x)^3 - 3(-2x) = \left((2y+1) - 3\right)\sqrt{2y+1}$$

$$\Leftrightarrow (-2x)^3 - 3(-2x) = \left(\sqrt{2y+1}\right)^3 - 3\sqrt{2y+1}.$$

Từ điều kiện $-\frac{1}{2} \le y \le 0$ ta có $0 \le \sqrt{2y+1} \le 1$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra $2x^2 + x \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 0$.

Khi đó $0 \le -2x \le 1$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên $[0; 1]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3$; $f'(t) < 0$ với mọi $t \in (0; 1)$.

Do đó $f(t)$ nghịch biến trên $[0;1]$.

Suy ra phương trình (3) $\Leftrightarrow f(-2x)=f\left(\sqrt{2y+1}\right)\Leftrightarrow -2x=\sqrt{2y+1}$.

Thế vào phương trình thứ hai ta được

$$2x^2+x+\sqrt{-\frac{4x^2-1}{2}.4x^2}+m^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+\sqrt{2x^2-8x^4}=-m^2.$$

Xét hàm số $g(x)=2x^2+x+\sqrt{2x^2-8x^4}$ trên $\left[-\frac{1}{2};0\right]$.

Ta có $g(x)\ge 0$ với mọi $x\in\left[-\frac{1}{2};0\right]$. Suy ra phương trình (4) có nghiệm khi và chỉ khi $-m^2\ge 0\Leftrightarrow m=0$.

Ví dụ 17. Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}x^2(1+y^2)+y^2(1+x^2)=m\sqrt{xy}\\ x^2y\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}=x^2y-x\end{cases}\quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $xy\ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x-\sqrt{1+x^2}=x^2y(1-\sqrt{1+y^2}).\qquad (3)$$

Rõ ràng $x=0$ không thỏa mãn phương trình. Mặt khác, vì $x-\sqrt{1+x^2}<0$ và $1-\sqrt{1+y^2}<0$ nên từ phương trình suy ra $y>0$. Kết hợp điều kiện của hệ ta có $x>0$. Khi đó, phương trình (3) tương đương với

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=y-y\sqrt{1+y^2}.\qquad (4)$$

Xét hàm $f(t)=t-t\sqrt{1+t^2}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có

$$f'(t)=1-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}-\sqrt{1+t^2}<0 \text{ với mọi } t\in(0;+\infty).$$

Suy ra hàm f nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó phương trình (4) tương đương với $\frac{1}{x}=y\Leftrightarrow xy=1$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}(1+x^2)=m \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=m-2.$$

Phương trình có nghiệm x hay hệ đã cho có nghiệm $(x;\ y)$ khi và chỉ khi $m-2\geq 2 \Leftrightarrow m\geq 4$.

Ví dụ 18. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}(x+y)xy=x^2+y^2-xy\\ \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=m^2\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $x, y\neq 0$.

Ta có

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=m^2 \Leftrightarrow \frac{x^3+y^3}{x^3y^3}=m^2 \Leftrightarrow \frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{x^3y^3}=m^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2xy}{x^3y^3}=m^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2=m^2. \qquad (1)$$

Đặt $t=x+y$. Khi đó từ phương trình thứ nhất ta có

$xyt=t^2-3xy \Leftrightarrow xy(t+3)=t^2$, và $xy\neq 0,\ t\neq 0,\ t+3\neq 0$ nên

$$xy=\frac{t^2}{t+3}\leq\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{t^2}{4}.$$

Suy ra $t^2-\dfrac{4t^2}{t+3}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{t-1}{t+3}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\geq 1\\ t<-3.\end{array}\right.$

Mặt khác $(x+y)xy=\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2>0$, nên $\dfrac{x+y}{xy}>0$.

Do đó ta có $\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{t+3}{t}$. Suy ra $(1)\Leftrightarrow\left(\dfrac{t+3}{t}\right)^2=m^2$. $\qquad$ (2)

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+3}{t}$ trên $(-\infty;\ -3)\cup[1;\ +\infty)$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{3}{t^2}$; $f'(t)<0$ với mọi $t\in(-\infty;\ -3)\cup[1;\ +\infty)$.

Suy ra bảng biến thiên

t	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$				$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	0		4	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\left[\begin{array}{l} 0 < m^2 < 1 \\ 1 < m^2 \le 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in [-2; 2] \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Ví dụ 19. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2xy - 2x = 1 \\ x^3 - 3x - 3xy = a + 2 \end{cases}$

Lời giải. Đặt $z = \sqrt{y+1}$, $z \ge 0$ hệ trở thành $\begin{cases} x^2 z - 2xz^2 = 1 \\ x^3 - 3xz^2 = a + 2 \end{cases}$

Rõ ràng $z = 0$ không thỏa mãn hệ. Với $z > 0$, đặt $x = tz$ hệ trở thành

$$\begin{cases} z^3(t^2 - 2t) = 1 & (1) \\ z^3(t^3 - 3t) = a + 2 & (2) \end{cases}$$

Do $z > 0$ nên từ (1) suy ra $t^2 - 2t > 0$ hay $t < 0$ hoặc $t > 2$.

Từ hệ (1) và (2) ta có $a + 2 = \dfrac{t^2 - 3}{t - 2}$, $t < 0$ hoặc $t > 2$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 - 3}{t - 2}$, $t \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^2 - 4t + 3}{(t-2)^2} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le 1 \\ t \ge 3 \end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

t	$-\infty$		0	1	2		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$				$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$		$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+2\geq 6 \\ a+2<\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} a\geq 4 \\ a<-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Bài tập

Bài 1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} 2x-y-m=0 \\ x+\sqrt{xy}=1 \end{cases}$

Bài 2. Tìm m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} x-yz=2-4z \\ xz+y=3z+1 \\ x^2+y^2-2x=m \end{cases}$

Bài 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y+4=2xy \\ 2^{x+y}=m\left(\sqrt{x^2+x+y^2+y+5}+x+y\right). \end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $x\geq 1, y\geq 1$.

Bài 4. Biện luận số nghiệm thực của hệ phương trình với ẩn x, y

$$\begin{cases} x^3y-y^4=a^2 \\ x^2y+2xy^2+y^3=b^2. \end{cases}$$

(Học sinh giỏi Quốc gia, 1996)

Hướng dẫn giải bài tập

Bài 1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} 2x-y-m=0 \\ x+\sqrt{xy}=1 \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $xy\geq 0$

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x-y-m=0 \\ x+\sqrt{xy}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-m \\ \sqrt{x(2x-m)}=1-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-m \\ x\leq 1 \\ x(2x-m)=(1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-m \\ x\leq 1 \\ x^2-(m-2)x-1=0 \end{cases} \quad (1)$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng một nghiệm nhỏ hơn hoặc bằng 1

Ta có $x=0$ không là nghiệm của (1).

Với $x \neq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x}=m-2$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ với $0 \neq x \leq 1$.

Ta có $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$; $f'(x)>0$ với mọi $0 \neq x \leq 1$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	0

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x)=m-2$ có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi $m-2>0 \Leftrightarrow m>2$.

Bài 2. Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x-yz=2-4z \\ xz+y=3z+1 \\ x^2+y^2-2x=m \end{cases}$$

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x-yz=2-4z \\ xz+y=3z+1 \end{cases}$ xem x, y là biến và z là tham số. Khi đó

vì $D=\begin{vmatrix} 1 & -z \\ z & 1 \end{vmatrix}=1+z^2 \neq 0$ nên với mọi $z \in \mathbb{R}$ luôn tồn tại x và y.

Phương trình thứ ba của hệ tương đương với $(x-1)^2+y^2=m+1$. (1)

Ta có $\begin{cases} x-yz=2-4z \\ xz+y=3z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left((x-1)-yz\right)^2=(1-4z)^2 \\ \left((x-1)z+y\right)^2=(2z+1)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+z^2y^2-2z(x-1)y=16z^2-8z+1 \\ (x-1)^2z^2+y^2+2z(x-1)y=4z^2+4z+1 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình của hệ trên ta được

$$\left(z^2+1\right)\left((x-1)^2+y^2\right)=20z^2-4z+2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=\frac{20z^2-4z+2}{z^2+1}. \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có $\frac{20z^2-4z+2}{z^2+1}=m+1 \Leftrightarrow \frac{19z^2-4z+1}{z^2+1}=m. \qquad (3)$

Xét hàm số $f(z)=\frac{19z^2-4z+1}{z^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(z)=\frac{4\left(z^2+9z-1\right)}{\left(z^2+1\right)^2}$; $f'(z)=0 \Leftrightarrow z=\frac{-9\pm\sqrt{85}}{2}$.

Suy ra bảng biến thiên

u	$-\infty$		$\frac{-9+\sqrt{85}}{2}$		$\frac{-9+\sqrt{85}}{2}$		$+\infty$
$f'(u)$		+	0	−	0	+	
$f(u)$	19	↗	$10+\sqrt{85}$	↘	$10-\sqrt{85}$	↗	19

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(z)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $10-\sqrt{85}\le m\le 10+\sqrt{85}$.

Bài 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y+4=2xy \\ 2^{x+y}=m\left(\sqrt{x^2+x+y^2+y+5}+x+y\right). \end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $x\ge 1, y\ge 1$.

Lời giải. Do $x\ge 1, y\ge 1$ ta có $(x-1)(y-1)\ge 0 \Leftrightarrow xy-(x+y)+1\ge 0$.

Suy ra $x+y+4-2(x+y)+2\ge 0$, hay $x+y\le 6$.

Mặt khác, từ phương trình

$$x+y+4=2xy \text{ ta có } x+y+4\le\frac{1}{2}(x+y)^2 \text{ hay } x+y\ge 4.$$

Đặt $x+y=t, 4\le t\le 6$. Khi đó từ hệ phương trình đã cho ta được

$$2^t=m\left(\sqrt{t^2+1}+t\right) \text{ hay } 2^t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)=m,\ 4\le t\le 6.$$

Hệ đã cho có nghiệm $(x;\ y)$ thỏa mãn $x\ge 1,\ y\ge 1$ khi và chỉ khi phương trình $2^t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)=m$ có nghiệm $t\in[4;\ 6]$.

Xét hàm số $f(t)=2^t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)$, $4\le t\le 6$.

Ta có $f'(t)=2^t\ln 2.\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)+2^t\left(\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}-1\right)$

$$=2^t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right).\left(\ln 2-\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)>0 \text{ với mọi } t\in[4;\,6].$$

Suy ra $f(4)\le m\le f(6)$, hay $16\left(\sqrt{17}-4\right)\le m\le 64\left(\sqrt{37}-6\right)$.

CHƯƠNG 3
TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1 Biểu thức một biến

1.1 Xét hàm trực tiếp

Khi gặp bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm một biến, đầu tiên ta nghĩ đến việc xét hàm số với biến đã cho. Việc xét hàm trực tiếp có thể thực hiện được nếu biểu thức của hàm số không quá phức tạp.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x+3}}{x-1}$ trên $(1;\,6]$.

Lời giải. Ta có $y'=\dfrac{(x-1)\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}-\left(1+\sqrt{x+3}\right)}{(x-1)^2}=\dfrac{-x-7-2\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}(x-1)^2}$;

$y'<0$ với mọi $x\in(1;\,6]$. Do đó hàm nghịch biến trên $(1;\,6]$.

Ta có $f(6)=\dfrac{4}{5}$, $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$.

Suy ra bảng biến thiên

x	1		6
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{4}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(1;\,6]} y = y(6) = \dfrac{4}{5}$; không tồn tại giá trị lớn nhất của y trên $(1;\,6]$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x+1)\sqrt{1-x^2}$.

Phân tích lời giải. Khi đề bài yêu cầu giá trị tìm lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số mà không nói rõ tìm trên tập hợp nào có nghĩa là chúng ta phải tìm trên tập xác định.

Tập xác định của hàm số là $[-1;\,1]$. Ta có

$$y' = (x+1).\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} = \frac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(x+1)(1-2x)}{\sqrt{1-x^2}};\ y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Suy ra bảng biến thiên

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y			$\frac{3\sqrt{3}}{4}$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max y = y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$; $\min y = y(-1) = y(1) = 0$.

Từ Ví dụ 1, Ví dụ 2 trên đây, ta rút ra các bước tiến hành giải bài toán

+ Tìm tập xác định (nếu đề bài không nói tìm trên tập hợp nào);
+ Khảo sát sự biến thiên của hàm số trên khoảng xác định của biến; Tính các giới hạn (nếu có);
+ Lập bảng biến thiên;
+ Từ bảng biến thiên kết luận bài toán.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{-x^2+4x+21} - \sqrt{-x^2+3x+10}.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối D, 2010)

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} -x^2+4x+21 \ge 0 \\ -x^2+3x+10 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 7 \\ -2 \le x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 5.$

Suy ra tập xác định: $[-2;\,5]$.

Ta có $y' = \dfrac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x+21}} - \dfrac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x+10}}$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow (-2x+4)\sqrt{-x^2+3x+10} = (-2x+3)\sqrt{-x^2+4x+21}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2x+4)(-2x+3) \geq 0 \\ (x+2)^2\left(\dfrac{49}{4} - \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2\right) = \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2\left(25-(x-2)^2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)\left(x-\dfrac{3}{2}\right) \geq 0 \\ 25\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{49}{4}(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Suy ra bảng biến thiên

x	-2		$\frac{1}{3}$		5
y'		$-$	0	$+$	
y	3	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	4

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min y = y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \sqrt{2}$.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải khác như sau

Tập xác định: $[-2; 5]$.

Ta có $(-x^2+4x+21) - (-x^2+3x+10) = x + 11 > 0$.

Suy ra $y > 0$.

$$y^2 = (x+3)(7-x) + (x+2)(5-x) - 2\sqrt{(x+3)(7-x)(x+2)(5-x)}$$

$$= \left(\sqrt{(x+3)(5-x)} - \sqrt{(x+2)(7-x)}\right)^2 + 2 \geq 2.$$

Suy ra $y \geq \sqrt{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $\sqrt{2}$, đạt khi $x = \dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}} \text{ trên } (0; +\infty).$$

Lời giải.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{11}{2x^2} - \dfrac{14}{x^3\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}} = \dfrac{2x^2\sqrt{x^2+7} - 11\sqrt{x^2+7} - 28}{2x^2\sqrt{x^2+7}}$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2\sqrt{x^2+7} - 11\sqrt{x^2+7} - 28 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+7}$, $t > \sqrt{7}$. Khi đó $x^2 = t^2 - 7$ và phương trình trở thành

$$2(t^2-7)t - 11t - 28 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - 25t - 28 = 0 \Leftrightarrow t = 4. \text{ Suy ra } x = 3.$$

Ta có bảng biến thiên

x	0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{15}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} y = y(3) = \dfrac{15}{2}$; không tồn tại giá trị lớn nhất của y trên $(0; +\infty)$.

Nhận xét. Chúng ta có thể tìm giá trị nhỏ nhất của y bằng cách sử dụng đánh giá bất đẳng thức như sau

Áp dụng bất đẳng thức $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$, ta có

$$\left(3+\frac{7}{x}\right)^2 = \left(3.1+\sqrt{7}.\frac{\sqrt{7}}{x}\right)^2 \le (9+7)\left(1+\frac{7}{x^2}\right) = 16\left(1+\frac{7}{x^2}\right).$$

Suy ra $\sqrt{4\left(1+\dfrac{7}{x^2}\right)} \ge \dfrac{1}{2}\left(3+\dfrac{7}{x}\right)$.

Do đó $y \ge x + \dfrac{11}{2x} + \dfrac{1}{2}\left(3+\dfrac{7}{x}\right) = \dfrac{3}{2} + x + \dfrac{9}{x} \ge \dfrac{3}{2} + 2\sqrt{x.\dfrac{9}{x}} = \dfrac{3}{2} + 6 = \dfrac{15}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 3$. Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y = \dfrac{15}{2}$, đạt khi $x = 3$.

Ví dụ 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$.

(Tuyển sinh Đại học Khối B, 2003)

Lời giải. Tập xác định: $[-2; 2]$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$

Suy ra bảng biến thiên

x	-2		$\sqrt{2}$		2
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max y = y\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$, $\min y = y(-2) = -2.$

Ví dụ 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

(Tuyển sinh Đại học Khối D, 2003)

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - (x+1)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{1-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Suy ra bảng biến thiên

x	-1		1		2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{[-1;\,2]} y = y(1) = \sqrt{2}$, $\min\limits_{[-1;\,2]} y = y(-1) = 0.$

Ví dụ 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sin^5 x + \sqrt{3}\cos x.$$

Lời giải. Do $y = \sin^5 x + \sqrt{3}\cos x$ là hàm số tuần hoàn, chu kỳ 2π nên ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Ta có $y' = 5\sin^4 x\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin\left(5\sin^3 x\cos x - \sqrt{3}\right)$;

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & (1) \\ 5\sin^3 x\cos x - \sqrt{3} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Mà $x\in[0;\,2\pi]$ nên $x=0,\ x=\pi,\ x=2\pi$.

Xét hàm số $g(x)=5\sin^3 x\cos x-\sqrt{3}$, với $x\in[0;\,2\pi]$. Ta có

$$g'(x)=5\left(3\sin^2 x\cos^2 x-\sin^4 x\right)=5\sin^2 x\left(3\cos^2 x-\sin^2 x\right);$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \tan x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\ x=\pi,\ x=2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3},\ x=\dfrac{2\pi}{3},\ x=\dfrac{4\pi}{3},\ x=\dfrac{5\pi}{3}.\end{array}\right.$$

Với các giá trị trên thì $g(x)$ nhận giá trị âm.

Do đó $g(x)<0$ với mọi $x\in[0;\,2\pi]$, hay phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm trên $[0;\,2\pi]$.

Ta có $y(0)=\sqrt{3},\ y(\pi)=-\sqrt{3},\ y(2\pi)=\sqrt{3}$.

Suy ra $\max y=\sqrt{3}$, đạt khi $x=k2\pi$; $\min y=-\sqrt{3}$, đạt khi $x=\pi+k2\pi$.

Nhận xét. Để chứng minh phương trình $5\sin^3 x\cos x-\sqrt{3}=0$ vô nghiệm ta có thể áp dụng bất đẳng thức Côsi như sau

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\left(\sin^3 x\cos x\right)^2=\frac{1}{3}\sin^2 x.\sin^2 x.\sin^2 x.3\cos^2 x\le\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4<\frac{3}{25}.$$

Suy ra $\sin^3 x\cos x<\dfrac{\sqrt{3}}{5}$, hay phương trình $5\sin^3 x\cos x-\sqrt{3}=0$ vô nghiệm.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng $e^x+\cos x\ge 2+x-\dfrac{x^2}{2}$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với $e^x+\cos x+\dfrac{x^2}{2}-x-2\ge 0$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(x)=e^x+\cos x+\dfrac{x^2}{2}-x-2$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=e^x-\sin x+x-1$; $f''(x)=e^x-\cos x+1$.

Vì $f''(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên $f'(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác

$$f'(0)=0,\ \text{nên } f'(x)=0\Leftrightarrow x=0.$$

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $\left[1;e^3\right]$.

(Tuyển sinh Đại học Khối B, 2004)

Lời giải. Ta có $y'=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\ln x=0\\ \ln x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=e^2\end{array}\right.$

và $y(1)=0,\ y\left(e^2\right)=\dfrac{4}{e^2},\ y\left(e^3\right)=\dfrac{9}{e^3}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của y là $\dfrac{4}{e^2}$, đạt khi $x=e^2$; giá trị nhỏ nhất của y là 0, đạt khi $x=1$.

Ví dụ 10. Chứng minh rằng $1+x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\ge\sqrt{x^2+1}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với $1+x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}$ với $x\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=x.\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=0\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-x\ge 0\\ x^2+1=(1-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=0.$$

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Bất đẳng thức được chứng minh, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Ví dụ 11. Chứng minh rằng $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) < \dfrac{1}{x} + \ln x$ với mọi $x > 0$.

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln x - \dfrac{1}{x} < 0$ với mọi $x > 0$.

Xét hàm số $f(x) = \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln x - \dfrac{1}{x}$ với $x > 0$.

Ta có
$$f'(x) = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x^2\sqrt{1+x^2}} > 0 \text{ với mọi } x > 0.$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mặt khác

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Từ đó suy ra $f(x) < 0$ với mọi $x > 0$, điều phải chứng minh.

Nhận xét. Chúng ta trình bày một cách giải khác

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) - \frac{1}{x} < 0 \text{ với mọi } x > 0.$$

Đặt $t = \dfrac{1}{x}$, khi đó $t > 0$ và bất đẳng thức trở thành

$$\ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) - t < 0 \text{ với mọi } t > 0.$$

Xét hàm số $g(t)=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)-t<0$ với $t\ge 0$.

Ta có $g'(t)=\dfrac{1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}-1=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}-1<0$ với mọi $t>0$.

Do đó hàm số $g(t)$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$.

Suy ra $g(t)<g(0)=0$ với mọi $t>0$.

Do đó ta có điều phải chứng minh.

Trong ví dụ trên, ta thấy cách giải thứ hai đơn giản hơn. Có được điều đó là nhờ chúng ta đã đổi biến và xét hàm biến t. Trong nhiều trường hợp, khi cần tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một hàm số mà biểu thức của nó quá phức tạp thì việc xét hàm trực tiếp sẽ gặp nhiều khó khăn.

Khi đó ta sẽ đi tìm một đặc điểm của biểu thức đó, chẳng hạn biểu thức là đơn giản hơn khi xem nó là một hàm số của biến khác, chúng ta đổi biến để xét hàm của biến mới.

1.2 Đổi biến

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^6+4\left(1-x^2\right)^3$ trên đoạn $[-1;1]$.

Phân tích và lời giải. Hàm số đã cho là hàm bậc 6 đối với biến x, tuy nhiên là hàm bậc 3 của biến x^2. Do đó thay vì xét hàm trực tiếp của biến x, ta sẽ xét hàm với biến x^2.

Đặt $t=x^2$. Ta có $x\in[-1;1]$ suy ra $t\in[0;1]$. Khi đó

$$y=t^3+4(1-t)^3=-3t^3+12t^2-12t+4.$$

Ta có $y'=-9t^2+24t-12$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2}{3} \\ t=2\notin[0;1]. \end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

x	0		$\frac{2}{3}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	4	$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của y là 4, đạt khi $t=0 \Leftrightarrow x=0$; giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{4}{9}$, đạt khi $t=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Nhận xét. Khi tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn chúng ta có thể bỏ qua bước lập bảng biến thiên. Trong ví dụ trên, xét hàm số $f(t)=-3t^3+12t^2-12t+4$ với $t\in[0;1]$, ta có kết quả

$$\max_{[0;1]} f(t)=\max\left\{f(0),\ f(1),\ f\left(\frac{2}{3}\right)\right\}=f(0)=4;$$

$$\min_{[0;1]} f(t)=\min\left\{f(0),\ f(1),\ f\left(\frac{2}{3}\right)\right\}=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$.

Phân tích và lời giải. Trong biểu thức chứa $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$, do đó việc xét trực tiếp hàm lượng giác là không nên. Ở đây chúng ta sẽ đặt $t=\sin^2 x$ với $t\in[0;1]$ và xét hàm bậc 2 của biến t trên $[0;1]$. Khi đó

$$y=t^2+(1-t)+2=t^2-t+3 \text{ với } t\in[0;1].$$

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		1
y	3	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{11}{4}$, đạt khi $\sin^2 x=\frac{1}{2}$; giá trị lớn nhất của y là 3, đạt khi $\sin^2 x=0$ hoặc $\sin^2 x=1$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y=\dfrac{3\cos^4 x+4\sin^2 x}{3\sin^4 x+2\cos^2 x}$.

Lời giải. Đặt $t=\sin^2 x$, khi đó $t\in[0;1]$ và

$$y=\frac{3(1-t)^2+4t}{3t^2+2(1-t)}=\frac{3t^2-2t+3}{3t^2-2t+2}=1+\frac{1}{3t^2-2t+2}.$$

Ta có $y'=\dfrac{-(6t-2)}{\left(3t^2-2t+2\right)^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$.

Suy ra bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{3}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{8}{5}$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{4}{3}$, đạt khi $\sin^2 x = 1$; giá trị lớn nhất của y là $\frac{8}{5}$, đạt khi $\sin^2 x = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{\sin x} + 2^{\sin^2 x}$ với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải. Đặt $t = \sin x$, khi đó với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $t \in [0; 1]$ và hàm số trở thành $y = f(t) = 2^t + 2^{t^2}$.

Ta có $f'(t) = 2^t + 2^{t^2}.2t.\ln 2 > 0$ với mọi $t \in [0; 1]$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; 1]$. Suy ra

$$\max y = \max_{[0;1]} f(t) = f(1) = 4;\ \min y = \min_{[0;1]} f(t) = f(0) = 2.$$

Ví dụ 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{\cos 2x} - 4^{\cos x}$.

Lời giải. Ta có $y = 2^{2\cos^2 x - 1} - 4^{\cos x}$. Đặt $t = \cos x$, khi đó $t \in [-1; 1]$ và hàm số trở thành $y = f(t) = 2^{2t^2 - 1} - 4^t$.

Ta có $f'(t) = 2^{2t^2-1}.4t.\ln 2 - 4^t \ln 4 = \left(t2^{2t^2} - 2^{2t}\right)\ln 4 < 0$ với mọi $t \in (-1; 1)$.

Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$. Suy ra

$$\max y = \max_{[0;1]} f(t) = f(-1) = \frac{7}{4};\ \min y = \min_{[0;1]} f(t) = f(1) = -2.$$

Ví dụ 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|}$.

Lời giải. Đặt $t = |\sin x|$, $0 \le t \le 1$. Khi đó $y = 2^t + 2^{\sqrt{1-t^2}}$, $0 \le t \le 1$. Ta có

$$y' = 2^t \ln 2 - 2^{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} . \ln 2; \ \ y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1 \\ \dfrac{2^t}{t} = \dfrac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$$

Xét hàm số $f(z) = \dfrac{2^z}{z}$ với $z \in (0; 1)$.

Ta có $f'(z) = \dfrac{2^z}{z^2}(z \ln 2 - 1) < 0$ với mọi $z \in (0; 1)$.

Do đó $f(z)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Vì vậy hệ trên tương đương với

$$\begin{cases} 0 < t < 1 \\ t = \sqrt{1-t^2} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta có $y(0) = y(1) = 3$, $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2.2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Suy ra $\max y = 2.2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\approx 3,27)$, đạt khi $|\sin x| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\min y = 3$, đạt khi $|\sin x| = 0$ hoặc $|\sin x| = 1$.

Ví dụ 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4^{|\sin x|} + 2^{|\cos x| + 2}$.

Lời giải. Đặt $|\sin x| = t$, $0 \le t \le 1$.

Khi đó $y = 4^t + 2^{\sqrt{1-t^2}+2}$, $0 \le t \le 1$. Ta có

$$y' = 4^t \ln 4 + 2^{\sqrt{1-t^2}+2} . \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \ln 2;$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4^t = 2^{\sqrt{1-t^2}} . \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}} \Leftrightarrow \frac{2^{2t}}{2t} = \frac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}, \ 0 < t < 1. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(u) = \dfrac{2^u}{u}$, $0 < u < 2$. Ta có

$$f'(u) = \frac{u2^u \ln 2 - 2^u}{u^2} = \frac{2^u (u \ln 2 - 1)}{u^2}, \ 0 < u < 2.$$

$$f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{\ln 2}; \ f'(u) < 0 \Leftrightarrow 0 < u < \frac{1}{\ln 2}.$$

Chú ý rằng $1 < \dfrac{1}{\ln 2} < 2$ và $f(1) = f(2) = 2$. Suy ra $f(u) \le 2$, với mọi $u \in [1;2)$ và $f(u) > 2$, với mọi $u \in (0;1)$.

Do đó, nếu $1 \le 2t < 2$ thì $\frac{2^{2t}}{2t} \le 2 < \frac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}$, nên (1) không thỏa mãn.

Vậy $0 < 2t < 1$. Do $f(u)$ nghịch biến trên $(0;1)$ và $2t, \sqrt{1-t^2} \in (0;1)$ nên phương trình (1) tương đương với $2t = \sqrt{1-t^2}, 0 < t < \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ta có $y(0) = 9$, $y(1) = 8$, $y\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 5.4^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của y là 8, đạt khi $\cos x = 0$; giá trị lớn nhất của y là $5.4^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$, đạt khi $|\sin x| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{5-4a} - \sqrt{1+a}}{\sqrt{5-4a} + 2\sqrt{1+a} + 6},$$

trong đó a là số thực với $-1 \le a \le \frac{5}{4}$.

Lời giải. Đặt $A = \sqrt{5-4a}; B = \sqrt{1+a}$ thì $A^2 + 4B^2 = 9; A, B \ge 0$

Do đó tồn tại $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $A = 3\sin x;\ 2B = 3\cos x$. Khi đó:

$$P = \frac{A - B}{A + 2B + 6} = \frac{3\sin x - \frac{3}{2}\cos x}{3\sin x + 3\cos x + 6} = \frac{2\sin x - \cos x}{2\sin x + 2\cos x + 4}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2\sin x - \cos x}{2\sin x + 2\cos x + 4}$, với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $f'(x) = \frac{6 + 4\sin x + 8\cos x}{(2\sin x + 2\cos x + 4)^2} > 0$ với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Suy ra hàm $f(x)$ đồng biến trên đoạn $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Do đó

$$\min_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f(0) = -\frac{1}{6};\ \max_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{6}$, đạt khi $a = \frac{5}{4}$; giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{3}$, đạt khi $a = -1$.

Nhận xét. 1. Ở ví dụ này chúng ta không tìm được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2\sin x-\cos x}{2\sin x+2\cos x+4}$ bằng cách đưa về xét điều kiện có nghiệm của phương trình $(2P-2)\sin x+(2P+1)\cos x=-4P$ vì ở đây $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Từ $A^2+4B^2=9; A,B\ge 0$ nên tồn tại $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho $A=3\sin x$; $2B=3\cos x$. Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}$, khi đó $t\in[0;1]$ và $A=3.\dfrac{2t}{1+t^2}$, $B=\dfrac{3}{2}.\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Ta có $P=\dfrac{A-B}{A+2B+6}=\dfrac{3.\dfrac{2t}{1+t^2}-\dfrac{3}{2}.\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{3.\dfrac{2t}{1+t^2}+3.\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+6}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{3t^2+12t-3}{3t^2+6t+9}$.

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{3t^2+12t-3}{3t^2+6t+9}$ với $t\in[0;1]$ ta cũng có kết quả như trên.

3. Có thể xét trực tiếp hàm số theo biến a

$$f(a)=\frac{\sqrt{5-4a}-\sqrt{1+a}}{\sqrt{5-4a}+2\sqrt{1+a}+6},\ \text{với}\ -1\le a\le\frac{5}{4}.$$

Ta có $f'(a)<0$ với mọi $a\in\left[-1;\dfrac{5}{4}\right]$, suy ra hàm $f(a)$ nghịch biến trên đoạn $\left[-1;\dfrac{5}{4}\right]$, từ đó thu được kết quả như trên.

Ví dụ 9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{x-\sqrt{x(x-1)}+2}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1}.$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$.

Đặt $t=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$. Khi đó $t^2=2x-2\sqrt{x(x-1)}-1$ nên $x-\sqrt{x(x-1)}=\dfrac{t^2+1}{2}$.

Ta có $A=\dfrac{t^2+5}{2t+2}$.

Tìm điều kiện của t. Xét hàm $g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ trên $[1;+\infty)$, ta có

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}<0,\ \text{ với mọi } t>1;$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=0.$$

Suy ra bảng biến thiên

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $t\in(0;1]$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{t^2+5}{2t+2}$ trên $(0;1]$. Ta có

$$f'(t)=\frac{2t^2+4t-10}{(2t+2)^2}<0,\ \text{ với mọi } t\in(0;1].$$

Suy ra bảng biến thiên

t	0		1
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min A=\min\limits_{(0;1]} f(t)=f(1)=\dfrac{3}{2}$; không tồn tại giá trị lớn nhất của A.

Ví dụ 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=\frac{\cos x}{\sin^2 x(2\cos x-\sin x)}\ \text{ với } x\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right].$$

Lời giải. Ta có $y=\dfrac{\cos x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\sin^2 x(2\cos x-\sin x)}=\dfrac{\tan^2 x+1}{\tan^2 x(2-\tan x)}$.

Đặt $t=\tan x$, khi đó với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ thì $t\in\left(0;\sqrt{3}\right]$ và $y=\dfrac{t^2+1}{-t^3+2t^2}$.

Ta có $y'=\dfrac{t^4+3t^2-4t}{\left(-t^3+2t^2\right)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0\notin\left(0;\sqrt{3}\right] \\ t=1\end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

t	0		1		$\sqrt{3}$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất của y là 2, đạt khi $t=1$ hay $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Nhận xét. Đối với biểu thức lượng giác của sinx và cosx, nếu chênh nhau 2 bậc thì ta cũng xem như cùng bậc hay đẳng cấp vì $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Ta cũng sử dụng tính chất đẳng cấp của sinx và cosx để đưa về tanx trong các dạng: giải phương trình lượng giác, tính tích phân, …

Ví dụ 11. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y=2\cos^5 x+\sin^3 x+3\sin x.$$

Lời giải. Ta có $|y|\le 2\left|\cos^5 x\right|+\left|\sin^3 x\right|+3\left|\sin x\right|\le 2\cos^2 x+\left|\sin^3 x\right|+3\left|\sin x\right|$

$$=\left|\sin^3 x\right|-2\sin^2 x+3\left|\sin x\right|+2. \qquad (1)$$

Đặt $t=|\sin x|,\ 0\le t\le 1$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-2t^2+3t+2$ trên $[0;1]$. Ta có

$$f'(t)=3t^2-4t+3;\ f'(t)>0 \text{ với mọi } t\in[0;1].$$

Suy ra $f(t)\le f(1)=4$, với mọi $t\in[0;1]$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $|y|\le 4$, hay $-4\le y\le 4$.

* $y=4$ khi $\sin x=1$.
* $y=-4$ khi $\sin x=-1$.

Vậy $\min y=-4;\ \max y=4$.

Ví dụ 12. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2+1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x).f(1-x)$ trên $[-1;1]$.

Lời giải. Ta có $g(x)=f(x).f(1-x)=\dfrac{x^2(1-x)^2+8x(1-x)-2}{x^2(1-x)-2x(1-x)+2}$.

Đặt $t=x(1-x)$. Khi đó với $t\in[-1;1]$ thì $t\in\left[-2;\dfrac{1}{4}\right]$ và $g(x)$ trở thành

$$h(t)=\frac{t^2+8t-2}{t^2-2t+2} \text{ với } t\in\left[-2;\frac{1}{4}\right].$$

Ta có $h(t)=1+\dfrac{10t-4}{t^2-2t+2}$; $h'(t)=\dfrac{-2\left(5t^2-4t-6\right)}{\left(t^2-2t+2\right)^2}$; $h'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2-\sqrt{34}}{5}$.

Suy ra bảng biến thiên

Bài tập

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+2}{(x+1)^2+1}$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+2\cos\frac{x}{2}}{\cos x+2\sin\frac{x}{2}}$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^x-\sin x+\dfrac{x^2}{2}$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}+2\sqrt{3-x}+2}{2\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}+1}$.

Bài 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}$ với $x>0$.

(Học sinh giỏi Tỉnh An Giang, 2013 - 2014)

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=x\left(2013+\sqrt{2015-x^2}\right).$$

(Học sinh giỏi Quốc gia, 1993)

Hướng dẫn giải bài tập

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$.

Lời giải. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-(x+1)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}=\dfrac{2-x}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=2$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	$\frac{3}{\sqrt{6}}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max y=y(2)=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$, không tồn tại giá trị nhỏ nhất của y.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+2}{(x+1)^2+1}$.

Lời giải. Ta có $y'=\dfrac{2x\left((x+1)^2+1\right)-2(x+1)\left(x^2+2\right)}{\left((x+1)^2+1\right)^2}$;

$y'=0\Leftrightarrow x(x+1)^2+x=2x+2+x^2(x+1)\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	$\frac{4}{(1-\sqrt{2})^2+1}$	$\searrow$	$\frac{4}{(1+\sqrt{2})^2+1}$	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\min y=y\left(\sqrt{2}\right)=\frac{4}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1};$$

$$\max y=y\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{4}{\left(1-\sqrt{2}\right)^2+1}.$$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+2\cos\frac{x}{2}}{\cos x+2\sin\frac{x}{2}}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải. Ta có

$$y'=\frac{\left(\cos x+2\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos x-\sin\frac{x}{2}\right)-\left(\sin x+2\cos\frac{x}{2}\right)\left(-\sin x+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos x+2\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sin\frac{3x}{2}-1}{\left(\cos x+2\sin\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Suy ra $y'\le 0$ với mọi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Do đó hàm số nghịch biến trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Suy ra $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=y(0)=2$; $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^x-\sin x+\dfrac{x^2}{2}$.

Lời giải. Ta có $y'=e^x-\cos x+x$; $y''=e^x-\sin x+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.
Suy ra y' đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $y'(0)=0$, suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất của y là 1, đạt khi $x=0$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}+2\sqrt{3-x}+2}{2\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}+1}$.

Lời giải. Tập xác định: $[-1;3]$.

Vì $\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\left(\sqrt{3-x}\right)^2=4$ nên tồn tại số thực $t\in[0;1]$ sao cho $\sqrt{x+1}=\dfrac{4t}{1+t^2}$ và $\sqrt{3-x}=\dfrac{2\left(1-t^2\right)}{1+t^2}$. Khi đó $y=\dfrac{2t^2-4t-6}{t^2-8t-3}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t^2-4t-6}{t^2-8t-3}$ với $t\in[0;1]$. Ta có

$$f'(t)=\frac{-12t^2-36}{\left(t^2-8t-3\right)^2};\ f'(t)<0 \text{ với mọi } t\in[0;1].$$

Do đó $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[0;1]$. Suy ra $\max y=\max\limits_{[0;1]} f(t)=f(0)=2$, đạt khi $x=-1$; $\min y=\min\limits_{[0;1]} f(t)=f(1)=\dfrac{4}{5}$, đạt khi $x=3$.

Nhận xét. Chúng ta cũng có thể giải tương tự Ví dụ 8, đưa về xét hàm lượng giác bằng cách đặt $\sqrt{x+1}=2\sin t$ và $\sqrt{3-x}=2\cos t$ với $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

t	-2		$\frac{2-\sqrt{34}}{5}$		$\frac{1}{4}$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	$\frac{7}{5}$	$\searrow$	$4-\sqrt{34}$	$\nearrow$	$\frac{1}{25}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\max_{[-1;1]} g(x)=\max_{\left[-2;\frac{1}{4}\right]} h(t)=h\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{25};$$

$$\min_{[-1;1]} g(x)=\min_{\left[-2;\frac{1}{4}\right]} h(t)=h\left(\frac{2-\sqrt{34}}{5}\right)=4-\sqrt{34}$$

2 Biểu thức hai biến

2.1 Thế biến

Khi gặp bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một biểu thức hai biến, trong đó hai biến đã cho có liên hệ đẳng thức mà việc rút biến này theo biến kia và việc thế vào biểu thức đã cho không quá khó khăn để đưa về biểu thức một biến thì ta có thể đưa về hàm một biến và khảo sát sự biến thiên.

Các bước thực hiện

+ Rút một biến theo biến kia (chọn biến nào biểu thức đơn giản);

+ Theo điều kiện, tìm khoảng xác định của biến số dùng để xét hàm (nếu có);

+ Thế vào biểu thức đã cho;

+ Xét hàm một biến với điều kiện (nếu có) và từ đó kết luận bài toán.

Sau đây ta xét các ví dụ

Ví dụ 1. Cho a, b không âm thỏa mãn $a+3b=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{1+a}+\frac{3b}{1+b}.$$

Lời giải. Ta có $a+3b=4 \Leftrightarrow a=4-3b$. Do a, b không âm nên $0\le b\le\frac{4}{3}$.

Khi đó $P=\frac{4-3b}{5-3b}+\frac{3b}{1+b}=4-\frac{1}{5-3b}-\frac{3}{1+b}$.

Xét hàm $f(b)=4-\frac{1}{5-3b}-\frac{3}{1+b}$ trên $\left[0;\frac{4}{3}\right]$.

Ta có $f'(b)=\frac{3}{(5-3b)^2}-\frac{3}{1+b}$; $f'(b)=0\Leftrightarrow(5-3b)^2=(1+b)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\ b=3.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

b	0		1		$\frac{4}{3}$
$f'(b)$		$-$	0	$+$	
$f(b)$	$\frac{4}{5}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{12}{7}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{4}{5}$, đạt khi $b=0$, $a=4$; giá trị nhỏ nhất của P là 2, đạt khi $b=1$, $a=1$.

Ví dụ 2. Cho x, y không âm thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}$.

Lời giải. Từ giả thiết x, y không âm thỏa mãn $x+y=1$ ta có $y=1-x$ và $x\in[0;1]$.

Khi đó: $P = \dfrac{x}{2-x} + \dfrac{1-x}{x+1}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{2-x} + \dfrac{1-x}{x+1}$ trên $[0;1]$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{2}{(2-x)^2} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = (2-x)^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{2}{3}$, đạt khi $x = y = \dfrac{1}{2}$; giá trị lớn nhất của P là 1, đạt khi $x = 1,\ y = 0$ hoặc $x = 0,\ y = 1$.

Nhận xét. Ta có cách giải bằng đánh giá bất đẳng thức như sau

Ta có $P = \dfrac{x^2+x+y^2+y}{(y+1)(x+1)} = \dfrac{x^2+y^2+1}{xy+2} = \dfrac{(x+y)^2-2xy+1}{xy+2} = \dfrac{6}{xy+2} - 2$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $P \geq \dfrac{6}{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2+2} - 2 = \dfrac{2}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{2}{3}$, đạt khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Mặt khác, vì $xy \geq 0$ nên ta có $P = \dfrac{6}{xy+2} - 2 \leq \dfrac{6}{2} - 2 = 1$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $xy = 0$ hay $x = 1,\ y = 0$ hoặc $x = 0,\ y = 1$.

Ví dụ 3. Cho các số dương x, y thỏa mãn $x + y = \dfrac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{4y}$.

Lời giải. Từ giả thiết x, y dương thỏa mãn $x+y=\frac{5}{4}$ ta có $y=\frac{5}{4}-x$ và $x\in\left(0;\frac{5}{4}\right)$.

Khi đó $S=\frac{4}{x}+\frac{1}{5-4x}$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{4}{x}+\frac{1}{5-4x}$ trên $\left(0;\frac{5}{4}\right)$.

Ta có $f'(x)=-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{(5-4x)^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2=(5-4x)^2\Leftrightarrow x=1$.

Suy ra bảng biến thiên

x	0		1		$\frac{5}{4}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất của S là 5, đạt khi $x=1$, $y=\frac{1}{4}$.

Ví dụ 4. Cho các số thực x, y thỏa mãn $2x-y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}$.

(Học sinh giỏi Quốc gia, 1998)

Lời giải. Ta có $y=2x-2$, suy ra $P=\sqrt{5x^2-4x+1}+\sqrt{5x^2-20x+25}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{5x^2-4x+1}+\sqrt{5x^2-20x+25}$ trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(x)=\frac{5x-2}{\sqrt{5x^2-4x+1}}+\frac{5x-10}{\sqrt{5x^2-20x+25}};$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}(5x-2)(5x-10)\le 0\\ \left(\dfrac{5x-2}{\sqrt{5x^2-4x+1}}\right)^2=\left(\dfrac{5x-10}{\sqrt{5x^2-20x+25}}\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{5}\le x\le 2\\ 24x^2-16x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$$

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{5}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $2\sqrt{5}$, đạt khi $x=\frac{2}{3}, y=-\frac{2}{3}$.

Ví dụ 5. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2-xy+3=0$ và $2x+3y\le 14$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=3x^2y-xy^2-2x(x^2-1).$$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} y=\dfrac{x^2+3}{x} \\ 2x+3.\dfrac{x^2+3}{x}\le 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x^2+3}{x} \\ 1\le x\le \dfrac{9}{5}. \end{cases}$

Khi đó $P=3x^2\left(\dfrac{x^2+3}{x}\right)-x\left(\dfrac{x^2+3}{x}\right)^2-2x\left(x^2-1\right)=5x-\dfrac{9}{x}$.

Xét hàm số $f(x)=5x-\dfrac{9}{x}$ trên $\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$. Ta có

$$f'(x)=5+\frac{9}{x^2}>0 \text{ với mọi } x\in\left(1;\frac{9}{5}\right). \text{ Do đó hàm đồng biến trên } \left[1;\frac{9}{5}\right].$$

Suy ra $\min\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]} f(x)=f(1)=-4;\ \max\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]} f(x)=f\left(\dfrac{9}{5}\right)=4.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -4, đạt khi $x=1$, $y=4$; giá trị lớn nhất của P là 4, đạt khi $x=\dfrac{9}{5}, y=\dfrac{52}{15}$.

Ví dụ 6. Cho các số thực x, y thỏa mãn $\sqrt{2x+3}+\sqrt{y+3}=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{x+2}+\sqrt{y+9}$.

Lời giải. Đặt $\sqrt{2x+3}=a$, $\sqrt{y+3}=b$. Ta có

$$a+b=4,\ a\ge 0,\ b\ge 0. \qquad (1)$$

Khi đó $P=\sqrt{\dfrac{a^2-3}{2}+2}+\sqrt{b^2-3+9}=\sqrt{\dfrac{a^2+1}{2}}+\sqrt{b^2+6}$

$$=\sqrt{\dfrac{a^2+1}{2}}+\sqrt{(4-a)^2+6}.$$

Từ (1) ta có $0\le a\le 4$.

Xét hàm số $f(a)=\sqrt{\dfrac{a^2+1}{2}}+\sqrt{(4-a)^2+6}$, $0\le a\le 4$.

Ta có $f'(a)=\dfrac{a}{\sqrt{2(a^2+1)}}-\dfrac{4-a}{\sqrt{(4-a)^2+6}}$, $0\le a\le 4$.

$$f'(a)=0\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{2(a^2+1)}}=\frac{4-a}{\sqrt{(4-a)^2+6}},\ 0\le a\le 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0\le a\le 4\\ a^2(4-a)^2+6a^2=2(a^2+1)(4-a)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0\le a\le 4\\ a^4-8a^3+12a^2-16(a-2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0\le a\le 4\\ (a-2)(a^3-6a^2-16)=0\end{cases}\Leftrightarrow a=2.$$

Ta có $f(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{22}$; $f(2)=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$; $f(4)=\dfrac{\sqrt{34}}{2}+\sqrt{6}$.

Suy ra $\max P=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{22}$, đạt khi $x=-\dfrac{3}{2}$, $y=13$;

$\min P=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$, đạt khi $x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$.

2.2 Đổi biến

Khi gặp bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức hai biến mà trong đó việc thực hiện phép thế để đưa về xét hàm một biến khó thực hiện. Hơn nữa trong biểu thức lại có nhiều dấu hiệu liên quan tới các phép đặt ẩn phụ như: biểu thức đối xứng đối với x, y; biểu thức đẳng cấp đối với x, y; … Khi đó ta sẽ sử dụng các phép đặt ẩn phụ tương ứng.

Các bước thực hiện

+ Xác định biểu thức thích hợp để đổi biến;
+ Tìm điều kiện của biến mới (thường xét hàm số, hoặc dùng bất đẳng thức);
+ Chuyển biểu thức đã cho về hàm một biến (biến mới);
+ Xét hàm số một biến đó với điều kiện tìm được ở trên.

Sau đây chúng ta sẽ lần lượt xét các ví dụ với những phép đổi biến thường gặp.

2.2.1 Đổi biến đối xứng

Ví dụ 1. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + \frac{1}{xy}$.

Phân tích và lời giải. Giả thiết và biểu thức P đều là biểu thức đối xứng của hai biến x, y. Trước hết ta nghĩ đến việc sẽ đặt $t = xy$. Khi đó $0 < t = xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$ và biểu thức P được viết lại thành $P = t + \frac{1}{t}$. Cuối cùng chúng ta xét hàm một biến $f(t) = t + \frac{1}{t}$ trên $\left(0; \frac{1}{4}\right]$.

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$; $f'(t) < 0$ với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$.

Suy ra $\min\limits_{\left(0;\frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{4}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{17}{4}$, đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Với bài toán đơn giản này ta có thể sử dụng bất đẳng thức Côsi như sau

$$P = xy + \frac{1}{xy} = xy + \frac{1}{16xy} + \frac{15}{16xy} \ge 2\sqrt{xy.\frac{1}{16xy}} + \frac{15}{16\frac{(x+y)^2}{4}} = \frac{17}{4}.$$

Chú ý khi sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta phải đặc biệt lưu ý đến việc xảy ra dấu đẳng thức.

Ví dụ 2. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x+y=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1+xy} + xy.$$

Phân tích và lời giải. Giả thiết và biểu thức P đều là biểu thức đối xứng của hai biến x, y. Vì đã có tổng của x và y nên ta đặt $t = xy$. Khi đó $0 < t = xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = 1$ và biểu thức P được viết lại thành $P = t + \frac{1}{t+1}$.

Xét hàm một biến $f(t) = t + \frac{1}{t+1}$ trên $(0; 1]$.

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2}$; $f'(t) > 0$ với mọi $t \in (0; 1]$.

Suy ra $\max\limits_{(0;1]} f(t) = f(1) = \frac{3}{2}$. Do đó giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$, đạt được khi $x = y = 1$. Vì không tồn tại $\min\limits_{(0;1]} f(t)$ nên P không đạt giá trị nhỏ nhất.

Nhận xét. Khác với Ví dụ 1, ở Ví dụ 2 này chúng ta không thể áp dụng bất đẳng thức Côsi một cách tương tự để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 3. Cho x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$.

(Tuyển sinh Cao Đẳng, 2008)

Phân tích và lời giải. Giả thiết và biểu thức P đều là biểu thức đối xứng của hai biến x, y. Do đó chúng ta sẽ chọn đặt ẩn phụ $t = x + y$ hoặc $t = xy$. Trước hết ta biến đổi P, ta có

$$P = 2(x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) - 3xy = 2(x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) - 3xy$$

và từ giả thiết $x^2 + y^2 = 2$ ta có $(x+y)^2 = 2xy + 2$.

Như vậy, nếu đặt $t = xy$ thì $x + y$ chưa thể rút theo t ngay được vì $x + y$ có nhận cả giá trị âm và giá trị dương.

Do đó ta đặt $t = x + y$, khi đó

$$P = 2t\left(t^2 - 3\frac{t^2 - 2}{2}\right) - 3\frac{t^2 - 2}{2} = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3.$$

Ta có $t^2 = (x+y)^2 \le 2(x^2 + y^2) = 4$.

Suy ra $-2 \le t \le 2$.

Xét hàm số $f(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$ trên $[-2; 2]$.

Ta có $f'(t) = -3t^2 - 3t + 6$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2. \end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

t	-2		1		2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	-7	$\nearrow$	$\frac{13}{2}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến ta có giá trị lớn nhất của P là $\frac{13}{2}$, đạt khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Giá trị nhỏ nhất của P là -7, đạt khi $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-1.$

Ví dụ 4. Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=(4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy$.

(Tuyển sinh Đại học Khối D, 2009)

Lời giải. Do $x+y=1$ nên

$$S=16x^2y^2+12\left(x^3+y^3\right)+9xy+25xy$$

$$=16x^2y^2+12\left((x+y)^3-3xy(x+y)\right)+34xy=16x^2y^2-2xy+12.$$

Đặt $t=xy$. Khi đó $S=16t^2-2t+12$

và $0\le xy\le\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{1}{4}$ suy ra $t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

Xét hàm số $f(t)=16t^2-2t+12$ trên đoạn $\left[0;\frac{1}{4}\right]$. Ta có

$$f'(t)=32t-2;\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{16} \text{ và } f(0)=12,\ f\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{191}{16},\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{2}.$$

Suy ra $\max\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{2};\ \min\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{191}{16}.$

Do đó giá trị lớn nhất của S là $\frac{25}{2}$, đạt khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.$

Giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{191}{16}$, đạt khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}, y=\frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}, y=\frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$

Ví dụ 5. Cho x, y thỏa mãn $x^2+y^2+xy=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^4+y^4+4xy-x^3y^3$.

Phân tích và lời giải. Giả thiết và biểu thức A đều là biểu thức đối xứng của x, y nên ta nghĩ đến việc sẽ đặt $t=x+y$ hoặc $t=xy$. Việc chọn ẩn phụ như thế nào chúng ta cần kiểm tra cụ thể, với yêu cầu là việc thay các biểu thức theo ẩn phụ phải đơn giản nhất.

Ta có $x^2+y^2+xy=3 \Leftrightarrow (x+y)^2-xy=3$ và

$$A=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+4xy-x^3y^3=(3-xy)^2-2x^2y^2+4xy-x^3y^3.$$

Như vậy ta nên đặt $t=xy$. Việc tiếp theo là tìm điều kiện hay khoảng xác định của biến t.

Từ giả thiết ta có $3+t=(x+y)^2 \geq 4xy=4t$. Suy ra $t\leq 1$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$.

Hoặc $x^2+y^2+xy=3 \Leftrightarrow (x-y)^2+3xy=3$.

Từ đó suy ra $3t=3-(x-y)^2\leq 3$. Hay $t\leq 1$.

Trong bài ra x, y là các số thực nên ta lại có đánh giá $t=(x+y)^2-3\geq -3$, dấu bằng xảy ra khi $x=-y=\pm\sqrt{3}$. Vậy $t\in[-3;1]$.

Ta có $A=(3-t)^2-2t^2+4t-t^3=-t^3-t^2-2t+9$.

Xét hàm số $f(t)=-t^3-t^2-2t+9$ trên $[-3;1]$.

Ta có $f'(t)=-3t^2-2t-2$; $f'(t)<0$ với mọi $t\in[-3;1]$.

Suy ra $\max\limits_{[-3;1]} f(t)=f(-3)=33$; $\min\limits_{[-3;1]} f(t)=f(1)=5$.

Do đó giá trị lớn nhất của A là 33, đạt khi

$$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=-y=\pm\sqrt{3};$$

giá trị nhỏ nhất của A là 5, đạt khi $x=y=1$.

Chú ý: Dạng này ta thường sử dụng hai bất đẳng thức $(x+y)^2\geq 0$ và $(x-y)^2\geq 0$ để có đánh giá kẹp hai chiều cho biến mới t.

Ví dụ 6. Cho x, y là các số thực thoả mãn $x^2 - xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Lời giải. Đặt $t = xy$. Khi đó từ $x^2 - xy + y^2 = 1$ ta có

$$(x+y)^2 - 3xy = 1 \Leftrightarrow xy = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(x+y)^2 \geq -\frac{1}{3}.$$

Mặt khác, $x^2 - xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-y)^2 + xy = 1 \Leftrightarrow xy = 1 - (x-y)^2 \leq 1$. Do đó $-\frac{1}{3} \leq t = xy \leq 1$. Ta có

$$P = \frac{(x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{(1+t)^2 - 2t^2 + 1}{t+2} = \frac{-t^2 + 2t + 2}{t+2}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t^2 + 2t + 2}{t+2}$ trên $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Ta có $f'(t) = \frac{-t^2 - 4t + 2}{(t+2)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2 + \sqrt{6}$.

Suy ra bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{3}$		$-2+\sqrt{6}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{11}{15}$	$\nearrow$	$6-2\sqrt{6}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\min_{\left[-\frac{1}{3};1\right]} f(x) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{15};\ \max_{\left[-\frac{1}{3};1\right]} f(x) = f\left(-2+\sqrt{6}\right) = 6 - 2\sqrt{6}.$$

Suy ra giá trị lớn nhất của P là $6 - 2\sqrt{6}$; giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{11}{15}$.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải khác

Đặt $t = x^2 + y^2$. Ta có

$x^2 - xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 + xy \leq 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$. Suy ra $x^2 + y^2 \leq 2$.

$x^2 - xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 + xy \geq 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$. Suy ra $x^2 + y^2 \geq \frac{2}{3}$.

Do đó $t \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$. Khi đó

$$P = \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{t^2 - 2(t-1)^2 + 1}{t+1} = \frac{-t^2 + 4t - 1}{t+1}.$$

Xét hàm số $g(t) = \frac{-t^2 + 4t - 1}{t+1}$ trên $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$.

Ta có $g'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 5}{(t+1)^2}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1 + \sqrt{6}$.

Suy ra bảng biến thiên

t	$\frac{2}{3}$		$-1+\sqrt{6}$		2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{11}{15}$	↗	$6-2\sqrt{6}$	↘	1

Từ đó ta có giá trị lớn nhất của P là $6 - 2\sqrt{6}$; giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{11}{15}$.

Ví dụ 7. Cho x, y thỏa mãn $\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2 + 3x^2y^2 + 1 = 4x^2 + 5y^2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Lời giải. Ta có $\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2 + 3x^2y^2 + 1 = 4x^2 + 5y^2$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)^2 - 3\left(x^2 + y^2\right) + 2 = -x^2 - 3x^2y^2. \qquad (1)$$

Đặt $t = x^2 + y^2$, vì $-x^2 - 3x^2y^2 \leq 0$ nên từ (1) ta có $t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2$.

Khi đó $P = \frac{t^2 - t + 2}{t+1}$ với $t \in [1; 2]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - t + 2}{t+1}$ với $t \in [1; 2]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}>0$ với mọi $t\in(1;\,2)$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1;\,2]$. Suy ra $\min\limits_{[1;\,2]} f(t)=f(1)=1$, $\max\limits_{[1;\,2]} f(t)=f(2)=\dfrac{4}{3}$. Từ đó ta có giá trị nhỏ nhất của P là 1, đạt khi $x=0$, $y=\pm 1$; giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{4}{3}$, đạt khi $x=0$, $y=\pm\sqrt{2}$.

Ví dụ 8. Cho x, y thỏa mãn $0<x,\ y\le 1$ và $x+y=4xy$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=x^2+y^2-7xy$.

Phân tích và lời giải. Đặt $t=x+y$. Khi đó $t=4xy\le(x+y)^2=t^2$. Suy ra

$$t^2-t\ge 0\Leftrightarrow t(t-1)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 1\\ t\le 0\end{array}\right.$$

Suy ra $t\ge 1$ vì x, y dương.

Như vậy ta mới chặn được t ở một phía. Thông thường muốn tìm được cả giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì ta phải xét hàm số trên 1 đoạn, tức chặn được t ở cả hai phía. Ở đây ta đang còn giả thiết $x,\ y\le 1$ chưa sử dụng. Ta khai thác giả thiết này bằng cách sử dụng đánh giá $(1-x)(1-y)\ge 0$. Khai triển ta được

$$1-(x+y)+xy\ge 0\Rightarrow t=x+y=1+xy=1+\frac{x+y}{4}=1+\frac{t}{4}.\ \text{Suy ra } t\le\frac{4}{3}.$$

Vậy $t\in\left[1;\,\dfrac{4}{3}\right]$. Ta có $M=(x+y)^2-9xy=t^2-\dfrac{9}{4}t$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-\dfrac{9}{4}t$, với $t\in\left[1;\,\dfrac{4}{3}\right]$. Ta có bảng biến thiên

t	1		$\frac{9}{8}$		$\frac{4}{3}$
$f(t)$	$-\frac{5}{4}$	$\searrow$	$-\frac{81}{64}$	$\nearrow$	$-\frac{11}{9}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị lớn nhất của M là $-\dfrac{11}{9}$, đạt khi $x=1$, $y=\dfrac{1}{3}$ hoặc $x=\dfrac{1}{3}$, $y=1$.

Giá trị nhỏ nhất của M là $-\frac{81}{64}$, đạt khi $x = 2y = \frac{3}{4}$ hoặc $y = 2x = \frac{3}{4}$.

Ví dụ 9. Cho x, y thỏa mãn $x, y \geq 1$ và $3(x+y) = 4xy$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^3 + y^3 + 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right).$$

Lời giải. Đặt $x + y = a$. Khi đó $xy = \frac{3a}{4}$, $a > 0$.

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - at + \frac{3a}{4} = 0$ (1)

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 3a \geq 0 \Rightarrow a \geq 3$.

Vì $x, y \geq 1$ nên $(x-1)(y-1) \geq 0$.

Hay là $xy - (x+y) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3a}{4} - a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 4$. Vậy ta có $3 \leq a \leq 4$.

Mặt khác, từ giả thiết ta lại có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3}$.

Suy ra $P = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{6}{xy} = a^3 - \frac{9}{4}a^2 - \frac{8}{a} + \frac{16}{3}$.

Xét hàm số $f(a) = a^3 - \frac{9}{4}a^2 - \frac{8}{a} + \frac{16}{3}$, $3 \leq a \leq 4$.

Ta có $f'(a) = 3a^2 - \frac{9}{2}a + \frac{8}{a^2} = 3a\left(a - \frac{3}{2}\right) + \frac{8}{a^2} > 0$, với mọi $a \in [3; 4]$.

Bảng biến thiên

a	3		4
$f'(a)$		$+$	
$f(a)$	$\frac{113}{12}$	$\nearrow$	$\frac{94}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min P = \frac{113}{12}$, đạt khi

$$a = 3 \Leftrightarrow x = y = \frac{3}{2};\ \max P = \frac{94}{3}, \text{ đạt khi } a = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1,\ y = 3 \\ x = 3,\ y = 1. \end{array}\right.$$

Ví dụ 10. Cho x, y khác 0 thỏa mãn $(x+y)xy = x^2+y^2-xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2006)

Lời giải. Ta có

$$A = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3} = \frac{x^3+y^3}{x^3y^3} = \frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{x^3y^3} = \frac{(x+y)^2xy}{x^3y^3} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2.$$

Đặt $t = x+y$. Khi đó từ giả thiết ta có $xyt = t^2-3xy \Leftrightarrow xy(t+3) = t^2$, và $xy \neq 0, t \neq 0, t+3 \neq 0$ nên $xy = \dfrac{t^2}{t+3} \leq \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{t^2}{4}$.

Suy ra $t^2 - \dfrac{4t^2}{t+3} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{t-1}{t+3} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 1 \\ t < -3. \end{array}\right.$

Mặt khác $(x+y)xy = \left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2 > 0$, nên $\dfrac{x+y}{xy} > 0$.

Do đó ta có $\sqrt{A} = \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{t+3}{t}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t+3}{t}$ trên $(-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = -\dfrac{3}{t^2}$; $f'(t) < 0$ với mọi $t \in (-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$.

Suy ra bảng biến thiên

t	$-\infty$		-3	1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$			$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	0	4	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của $\sqrt{A}$ là 4, suy ra giá trị lớn nhất của A là 16, đạt khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải khác như sau

Ta có $(x+y)xy = x^2+y^2-xy \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{xy}$.

Đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}$.

Khi đó $a, b \neq 0$ và

$$a+b=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab \geq (a+b)^2-\frac{3}{4}(a+b)^2=\frac{1}{4}(a+b)^2.$$

Suy ra $(a+b)^2-4(a+b)\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq a+b\leq 4$.

Khi đó $A=a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=(a+b)^2\leq 16$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2 \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là 16, đạt khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 11. Cho các số thực dương x và y thỏa mãn điều kiện

$$(xy+1)\left(9\sqrt{xy}-2xy\right)=7\left(x^2+y^2\right)-2xy+2.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=xy+\sqrt{xy}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{xy}$.

Ta có $x^2+y^2\geq 2xy$ nên $7\left(x^2+y^2\right)-2xy+2\geq 12xy+2$.

Kết hợp giả thiết suy ra

$$(t^2+1)(9t-2t^2)\geq 12t^2+2 \Leftrightarrow -2t^4+9t^3-14t^2+9t-2\geq 0$$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(2-t)(2t-1)\geq 0$. Suy ra $\frac{1}{2}\leq t\leq 2$.

Khi đó $P=t^2+t+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}$ trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Ta có $f'(t)=2t+1-\frac{2}{t^3}-\frac{1}{t^2}=\frac{(t^2-1)(2t^2+t+2)}{t^3}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Suy ta bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{27}{4}$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{27}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(t)=f(1)=4$; $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(t)=\frac{27}{4}$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là 4, đạt khi $x=y=1$; giá trị lớn nhất của P là $\frac{27}{4}$, đạt khi $x=y=2$ hoặc $x=y=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 12. Cho x, y không âm thỏa mãn $x+y+xy=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2+y^2-\frac{3x}{y+1}-\frac{3y}{y+1}-\frac{xy}{x+y}.$$

Lời giải. Ta có

$$P=x^2+y^2-\frac{3x^2+3y^2+3x+3y}{xy+x+y+1}-\frac{xy}{x+y}$$

$$=(x+y)^2-2xy-\frac{3\left((x+y)^2-2xy\right)+3(x+y)}{4}-\frac{xy}{x+y}$$

$$=(3-xy)^2-2xy-\frac{3\left((3-xy)^2-2xy\right)+3(3-xy)}{4}-\frac{xy}{3-xy}$$

$$=\frac{1}{4}(xy)^2-\frac{5}{4}xy-\frac{xy}{3-xy}.$$

Đặt $t=xy$. Khi đó $P=\frac{1}{4}t^2-\frac{5}{4}t-\frac{t}{3-t}$.

Ta có $x+y+xy=3$ suy ra $3=xy+x+y\geq xy+2\sqrt{xy}$.

Do đó $t+2\sqrt{t}-3\leq 0 \Leftrightarrow -3\leq\sqrt{t}\leq 1$. Suy ra $t\in[0;1]$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{4}t^2-\frac{5}{4}t-\frac{t}{3-t}$ trên $[0;1]$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{2}t-\frac{5}{4}-\frac{3}{(3-t)^2}$; $f'(t)<0$ với mọi $t\in[0;1]$.

Suy ra $\max\limits_{[0;1]} f(t)=f(0)=0$, $\min\limits_{[0;1]} f(t)=f(1)=-\frac{3}{2}$.

Do đó giá trị lớn nhất của P là 0, đạt khi $x=0, y=3$ hoặc $x=3, y=0$; giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{3}{2}$, đạt khi $x=y=1$.

Ví dụ 13. Cho các số thực x, y thỏa mãn $\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=xy+\frac{64}{4-x-y}.$$

Đặt $a=\sqrt{x+1}$, $b=\sqrt{y+1}$. Khi đó $a\geq 0, b\geq 0$ và $a+b=4$. Đặt $t=ab$, ta có $0\leq t\leq 4$ và $a^2+b^2=16-2t$.

Khi đó $P=(a^2-1)(b^2-1)+\frac{64}{6-(a^2+b^2)}$

$$=a^2b^2-(a^2+b^2)+1+\frac{64}{6-(a^2+b^2)}=t^2+2t+\frac{32}{t-5}-15.$$

Xét hàm số $f(x)=t^2+2t+\frac{32}{t-5}-15$ với $t\in[0;4]$.

Ta có $f'(x)=2t+2-\frac{32}{(t-5)^2}=\frac{2(t-3)(t^2-6t-3)}{(t-5)^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow t=3$.

Vì $f(0)=-\frac{107}{5}$, $f(3)=-16$, $f(4)=-23$ nên ta suy ra

$\max P=-16$, đạt khi $t=3$ hay $x=0, y=8$ hoặc $x=8, y=0$;

$\min P=-23$, đạt khi $t=4$ hay $x=y=3$.

Ví dụ 14. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}.$$

Lời giải. Điều kiện $x\geq 1, y\geq -1$. Suy ra $x+y\geq 0$.

Sử dụng bất đẳng thức $(au+bv)^2\leq (a^2+b^2)(u^2+v^2)$ ta có

$$(x+y)^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}\right)^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}.\sqrt{y+1}\right)^2\leq 3(x+y).$$

Suy ra $x+y\le 3$. Đặt $t=x+y$. Khi đó $t\in[0;\,3]$ và

$$P=(x+y)^2+2(x+y)+8\sqrt{4-(x+y)}+2=t^2+2t+8\sqrt{4-t}+2.$$

Xét hàm $f(t)=t^2+2t+8\sqrt{4-t}+2$ trên $[0;\,3]$.

Ta có $f'(t)=2t+2-\dfrac{4}{\sqrt{4-t}}$; $f''(t)=2-\dfrac{2}{\left(\sqrt{4-t}\right)^3}>0$, với mọi $t\in[0;\,3]$. Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $[0;\,3]$. Do đó $f'(t)>f'(0)=0$ với mọi $t\in(0;\,3)$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $[0;\,3]$. Do đó

$\max P=\max\limits_{[0;\,3]} f(t)=f(3)=25$, đạt khi $t=3$ hay $x=2,\ y=1$;

$\min P=\min\limits_{[0;\,3]} f(t)=f(0)=18$, đạt khi $t=0$ hay $x=1,\ y=-1$.

Ví dụ 15. Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right).$$

(Tuyển sinh Đại học Khối B, 2011)

Lời giải. Với a, b dương, ta có $2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2)$

$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2)+ab=a^2b+ab^2+2(a+b)\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 2\sqrt{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}.$$

Suy ra $2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+1\ge 2\sqrt{2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)}$.

Đặt $t=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$. Khi đó ta có

$$2t+1\ge 2\sqrt{2(t+2)}\Leftrightarrow (2t+1)^2\ge 8(t+2)\Leftrightarrow 4t^2-4t-15\ge 0.$$

Suy ra $t\ge\dfrac{5}{2}$. Biểu thức P được viết lại thành

$$P=4(t^3-3t)-9(t^2-2)=4t^3-9t^2-12t+18.$$

Xét hàm số $f(t)=4t^3-9t^2-12t+18$ với $t\ge\dfrac{5}{2}$.

Ta có

$f'(t) = 6(2t^2 - 3t - 2) > 0$ với mọi $t \geq \frac{5}{2}$.

Suy ra $\min\limits_{\left[\frac{5}{2};+\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{23}{4}$, đạt khi $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5}{2}$ và $a + b = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ hay $(a;\, b) = (2;\, 1)$ hoặc $(a;\, b) = (1;\, 2)$.

Nhận xét. Để tìm điều kiện của biến $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, chúng ta có thể đánh giá như sau

Ta có $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$ suy ra

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(\sqrt{ab} + \frac{2}{\sqrt{ab}}\right) \geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right).$$

Do đó $2\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 - 3 - 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \geq 0$.

Suy ra $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Vì vậy $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{5}{2}$, hay $t \geq \frac{5}{2}$.

Ví dụ 16. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x + y + 2 = 3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x - y)^2\left(\frac{x^2}{y^4} + \frac{y^2}{x^4} - \frac{3}{xy}\right)$.

(Học sinh giỏi Tỉnh Hà Tĩnh, 2013 - 2014)

Lời giải. Từ giả thiết ta có

$$3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = (x + y) + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 2 \geq 2\sqrt{3(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} + 2$$

$$= 2\sqrt{3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6} + 2.$$

Suy ra $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq \frac{10}{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x+y=3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, y=1 \\ x=1, y=3 \end{array}\right.$

Ta có $P=(x^2-2xy+y^2)\left(\dfrac{x^2}{y^4}+\dfrac{y^2}{x^4}-\dfrac{3}{xy}\right)$

$$=\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}\right)-2\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\right)+\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6.$$

Đặt $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=t$, khi đó $t\ge\dfrac{10}{3}$ và $P=t^4-2t^3-3t^2+3t+6$.

Xét hàm số $f(t)=t^4-2t^3-3t^2+3t+6$ với $t\ge\dfrac{10}{3}$.

Ta có $f'(t)=4t^3-6t^2-6t+3=2t^2(t-3)+2t(t^2-3)+3>0$ với mọi $t\ge\dfrac{10}{3}$.

Do đó $f(t)\ge f\left(\dfrac{10}{3}\right)=\dfrac{2596}{81}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $t=\dfrac{10}{3}$ hay $\left[\begin{array}{l} x=3, y=1 \\ x=1, y=3 \end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\dfrac{2596}{81}$, đạt khi $x=3,\ y=1$ hoặc $x=1,\ y=3$.

Ví dụ 17. Cho các số thực dương x, y. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}+\frac{5\sqrt{xy}}{x+y}.$$

Lời giải. Ta có $P=2+\dfrac{2x^2y^2}{(x+y)^4}-\dfrac{6xy}{(x+y)^2}+\dfrac{5\sqrt{xy}}{x+y}$.

Đặt $t=\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$. Khi đó $0<t\le\dfrac{1}{2}$ và $P=2t^4-6t^2+5t+2$.

Xét hàm số $f(t)=2t^4-6t^2+5t+2$ với $0<t\le\dfrac{1}{2}$.

Ta có $f'(t)=8t^3-12t+5=(2t-1)\left(4t^2+2t-5\right)$.

Vì $4t^2+2t-5<0$ với mọi $t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ nên $f'(t)>0$ với mọi $t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Suy ra $\max\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$.

Từ đó ta có giá trị lớn nhất của P là $\frac{7}{2}$, đạt khi $x=y$.

2.2.2 Đổi biến đẳng cấp

Ví dụ 18. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A=\dfrac{2xy+y^2}{3x^2+2xy+y^2}$ với $x^2+y^2\neq 0$.

Phân tích và lời giải. Biểu thức A là biểu thức đẳng cấp bậc 2 của x, y (cả tử và mẫu đều có bậc 2). Khi gặp biểu thức đẳng cấp, cách giải ta thường sử dụng là chia và đặt ẩn phụ để xét hàm 1 biến.

+ Nếu $y=0$ thì $x\neq 0$ và $A=0$.

+ Nếu $y\neq 0$, ta chia cả tử và mẫu cho y^2.

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$. Khi đó $t\in\mathbb{R}$ và $A=\dfrac{2t+1}{3t^2+2t+1}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t+1}{3t^2+2t+1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-6t(t+1)}{(3t^2+2t+1)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-1\end{array}\right.$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(t)=0$.

Suy ra bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị lớn nhất của A là 1, đạt khi $x=0$, $y\in\mathbb{R}^*$; giá trị nhỏ nhất của A là $-\frac{1}{2}$, đạt khi $x=-y\neq 0$.

Ví dụ 19. Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối B, 2008)

Lời giải. Ta có $P=\dfrac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}=\dfrac{2(x^2+6xy)}{x^2+2xy+3y^2}$.

Nếu $y=0$ thì $x^2=1$. Suy ra $P=2$.

Xét $y\neq 0$. Đặt $t=\dfrac{x}{y}$. Khi đó $t\in\mathbb{R}$ và $P=\dfrac{2t^2+12t}{t^2+2t+3}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t^2+12t}{t^2+2t+3}$ trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t)=\frac{-8t^2+12t+36}{(t^2+2t+3)^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\text{ và }\lim_{x\to+\infty}f(t)=\lim_{x\to-\infty}f(t)=2.$$

Suy ra bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị lớn nhất của P là 3, đạt được khi

$$\begin{cases}x=3y\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{\sqrt{10}},\ y=\frac{1}{\sqrt{10}}\text{ hoặc } x=-\frac{3}{\sqrt{10}},\ y=-\frac{1}{\sqrt{10}};$$

giá trị nhỏ nhất của P là -6, đạt khi

$$x=\frac{3}{\sqrt{13}},\ y=-\frac{2}{\sqrt{13}}\text{ hoặc } x=-\frac{3}{\sqrt{13}},\ y=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Ví dụ 20. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $4x^2+2xy+y^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+2xy-y^2$.

Lời giải. Ta có $\dfrac{P}{3}=\dfrac{x^2+2xy-y^2}{4x^2+2xy+y^2}$.

Nếu $y=0$, từ giả thiết suy ra $x\neq 0$. Do đó $P=\dfrac{3}{4}$.

Với $y\neq 0$, chia cả tử và mẫu cho y^2 và đặt $t=\dfrac{x}{y}$. Khi đó $t\in\mathbb{R}$ và

$$\frac{P}{3}=\frac{t^2+2t-1}{4t^2+2t+1}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+2t-1}{4t^2+2t+1}$ trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t)=\frac{-6t^2+10t+4}{(4t^2+2t+1)^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\text{ và }\lim_{x\to+\infty}f(t)=\lim_{x\to-\infty}f(t)=\frac{1}{4}.$$

Suy ra bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{\mathbb{R}} f(t)=f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-2;\ \max\limits_{\mathbb{R}} f(t)=f(2)=\dfrac{1}{3}$.

Kết hợp các trường hợp, ta có giá trị lớn nhất của P là 1, giá trị nhỏ nhất của P là -6.

Ví dụ 21. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $x^2+xy+y^2\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=x^2-xy-3y^2$.

Lời giải. Đặt $f(x, y)=x^2+xy+y^2$.

* Nếu $y=0$ thì từ giả thiết ta có $0\le x^2\le 3$. Suy ra $P=x^2\in[0; 3]$.
* Với $y\ne 0$, ta có $0<f(x, y)=x^2+xy+y^2\le 3$. Khi đó

$$P=f(x, y).\frac{x^2-xy-3y^2}{x^2+xy+y^2}.$$

Đặt $x=ty$, ta có $P=f(x, y).\dfrac{t^2-t-3}{t^2+t+1}$.

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t^2-t-3}{t^2+t+1}$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(t)=\dfrac{2(t^2+4t+1)}{(t^2+t+1)^2};\ g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2-\sqrt{3}\\ t=-2+\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{-3+4\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	$\frac{-3-4\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\dfrac{-3-4\sqrt{3}}{3} \le g(t) \le \dfrac{-3+4\sqrt{3}}{3}$, với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Vì $0 < f(x, y) \le 3$ nên $-3-4\sqrt{3} \le P = f(x, y).g(t) \le -3+4\sqrt{3}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $-3-4\sqrt{3}$, đạt khi $\begin{cases} x = \left(-2-\sqrt{3}\right)y \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$ và giá trị lớn nhất của P là $-3+4\sqrt{3}$, đạt khi $\begin{cases} x = \left(-2+\sqrt{3}\right)y \\ x^2+xy+y^2=3. \end{cases}$

Ví dụ 22. Tìm giá trị lớn nhất của $y = \dfrac{xy^2}{\left(x+\sqrt{x^2+4y^2}\right)^3}$ với $x, y > 0$.

Lời giải. Đặt $t = \dfrac{x}{y}$. Khi đó $t > 0$ và $P = \dfrac{t}{\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)^3}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t}{\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)^3}$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{\sqrt{t^2+4}-3t}{\sqrt{t^2+4}\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)^3}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+4} = 3t \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{32}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của hàm số là $\frac{1}{32}$, đạt khi $y=\sqrt{2}x>0$.

Ví dụ 23. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $xy \le y-1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}.$$

(*Tuyển sinh Đại học Khối D, 2013*)

Lời giải. Do $x>0,\ y>0$ và $xy \le y-1$ nên

$$0<\frac{x}{y}\le\frac{y-1}{y^2}=\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4}-\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}.$$

Đặt $t=\frac{x}{y}$, suy ra $0<t\le\frac{1}{4}$. Khi đó $P=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$, với $0<t\le\frac{1}{4}$.

Ta có $f'(t)=\frac{7-3t}{2\sqrt{(t^2-t+3)^3}}-\frac{1}{2(t+1)^2}$.

Với $0<t\le\frac{1}{4}$ ta có $t^2-t+3=t(t-1)+3<3;\ 7-3t>6$ và $t+1>1$. Do đó

$\frac{7-3t}{2\sqrt{(t^2-t+3)^3}}>\frac{7-3t}{6\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{3}}$ và $-\frac{1}{2(t+1)^2}>-\frac{1}{2}$. Suy ra $f'(t)>\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}>0$,

với mọi $t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$. Do đó $P=f(t)\le f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{1}{2},\ y=2$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$.

2.3 Đánh giá kết hợp đổi biến

Trong nhiều bài toán tìm giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của biểu thức F mà các biến bị ràng buộc nhau bởi điều kiện dưới dạng bất đẳng thức, hoặc bản thân biểu thức F không có tính đối xứng, đẳng cấp; hoặc biểu thức F và điều kiện của bài toán chứa nhiều đại lượng phức tạp,...thì chúng ta cần "xử lý" biểu thức F qua một số đánh giá.

Ví dụ 1. Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=x^3+y^3+3(xy-1)(x+y-2).$$

(*Tuyển sinh Đại học Khối D, 2012*)

Lời giải. Ta có

$$(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32 \Leftrightarrow (x+y)^2-8(x+y)\le 0 \Leftrightarrow 0\le x+y\le 8.$$

Đặt $t=x+y$. Khi đó $t\in[0;8]$ và

$$A=(x+y)^3-3(x+y)-6xy+6$$

$$\ge (x+y)^3-\frac{3}{2}(x+y)^2-3(x+y)+6=t^3-\frac{3}{2}t^2-3t+6.$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-\frac{3}{2}t^2-3t+6$ trên $[0;8]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-3t-3$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$

và $f(0)=6$, $f\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)=\dfrac{17-5\sqrt5}{4}$, $f(8)=398$. Suy ra $A\ge\dfrac{17-5\sqrt5}{4}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=\dfrac{1+\sqrt5}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\dfrac{17-5\sqrt5}{4}$.

Ví dụ 2. Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x+y)^3+4xy\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=3(x^4+y^4+x^2y^2)-2(x^2+y^2)+1.$$

(*Tuyển sinh Đại học Khối B, 2009*)

Phân tích và lời giải. Giả thiết và biểu thức A đều là biểu thức đối xứng của x, y. Do đó ta nghĩ đến việc đặt $t=x+y$ hoặc $t=xy$ hoặc biểu thức đối xứng khác.

Trước hết, từ giả thiết ta có $2\le (x+y)^3+4xy\le (x+y)^3+(x+y)^2$.

Đặt $t=x+y$. Khi đó $t^3+t^2\ge 2\Leftrightarrow (t-1)(t^2+2t+2)\ge 0$. Suy ra $t\ge 1$.

Bây giờ nếu ta biến đổi biểu thức A theo t thì biểu thức thu được có bậc 4 đối với t, do đó việc xét hàm rất khó khăn. Ta lại thấy

$$A=3(x^4+y^4+x^2y^2)-2(x^2+y^2)+1=3(x^2+y^2)^2-3x^2y^2-2(x^2+y^2)+1$$

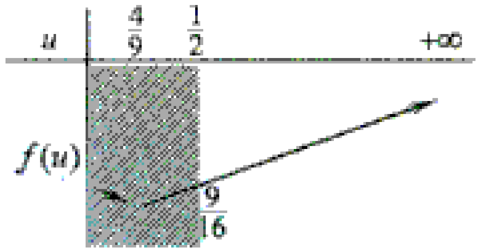
$$\ge 3(x^2+y^2)^2-3\frac{(x^2+y^2)^2}{4}-2(x^2+y^2)+1$$

$$=\frac{9}{4}(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)+1.$$

Như vậy, A là biểu thức bậc 2 của biến x^2+y^2. Ta đặt $u=x^2+y^2$. Khi đó

$$u=x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}\ge\frac{1}{2}\text{ và }A\ge\frac{9}{4}u^2-2u+1.$$

Xét hàm $f(u)=\frac{9}{4}u^2-2u+1$ với $u\ge\frac{1}{2}$. Ta có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(u)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}$. Suy ra $A\ge\frac{9}{16}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{9}{16}$, đạt khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 3. Cho các số thực x,y thỏa mãn $x^6+y^6\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x(y+1)^2+y(x+1)^2$.

Lời giải. Đặt $x+y=t$. Ta có $t^6=(x+y)^6\le 2^3(x^2+y^2)^3\le 2^5(x^6+y^6)=2^6$, nên $|t|\le 2$.

Mặt khác: $xy\le\frac{1}{4}(x+y)^2=\frac{t^2}{4}$. Khi đó

$$P=xy(x+y+4)+x+y=xy(t+4)+t\le\frac{t^2}{4}(t+4)+t=\frac{t^3}{4}+t^2+t$$

Khảo sát hàm số $f(t)=\frac{t^3}{4}+t^2+t$ trên $[-2;2]$ ta được $f(t)\le f(2)=8$

Vậy $P\le 8$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$.

Do đó $\max P=8$, đạt khi $x=y=1$.

Ví dụ 4. Cho các số thực x,y thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối B, 2006)

Lời giải. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, xét các vec tơ

$$\vec{a}=(1-x;\ y),\ \vec{b}=(x+1;\ y).$$

Ta có $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\Leftrightarrow\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}\ge 2\sqrt{1+y^2}$.

Suy ra $A\ge 2\sqrt{1+y^2}+|y-2|$.

Xét hàm số $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+|y-2|$.

* Với $y\ge 2$, ta có $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+y-2\ge 2\sqrt{1+y^2}\ge 2\sqrt{5}$.

* Với $y<2$, ta có $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+2-y$;

$$f'(y)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1=\frac{2y-\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}};$$

$$f'(y)=0\Leftrightarrow\sqrt{1+y^2}=2y\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\1+y^2=4y^2\end{cases}\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Suy ra bảng biến thiên

y	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		2
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$		$\searrow$	$2+\sqrt{3}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(-\infty;\ 2)} f(y)=f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=2+\sqrt{3}$.

Vì $2\sqrt{5}>2+\sqrt{3}$ nên từ hai trường hợp trên ta có giá trị nhỏ nhất của A là $2+\sqrt{3}$, đạt khi $x=0,\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Nhận xét. Ta có thể chứng minh $2\sqrt{1+y^2}+2-y\ge 2+\sqrt{3}$ bằng bất đẳng thức như sau

Áp dụng bất đẳng thức $(ax+by)^2\le\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$ ta có

$$\left(y+\sqrt{3}\right)^2\le\left(y^2+1\right)(1+3).$$

Suy ra $2\sqrt{1+y^2}\ge y+\sqrt{3}\Leftrightarrow 2\sqrt{1+y^2}+2-y\ge 2+\sqrt{3}$.

Ví dụ 5. Cho x, y dương thỏa mãn $x+y=6xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{3x+1}{9y^2+1}+\frac{3y+1}{9x^2+1}+(3x+y)(3y+x).$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{3x+1}{9y^2+1}+\frac{(3x+1)(9y^2+1)}{4}\geq 3x+1;$$

$$\frac{3y+1}{9x^2+1}+\frac{(3y+1)(9x^2+1)}{4}\geq 3y+1.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{3x+1}{9y^2+1}+\frac{3y+1}{9x^2+1}+\frac{(3x+1)(9y^2+1)}{4}+\frac{(3y+1)(9x^2+1)}{4}\geq 3(x+y)+2.$$

Suy ra

$$P\geq -\frac{(3x+1)(9y^2+1)}{4}-\frac{(3y+1)(9x^2+1)}{4}+3(x+y)+2+(3x+y)(3y+x)$$

$$=-\frac{27}{4}xy(x+y)+\frac{9}{4}(x+y)+10xy+\frac{3}{4}(x^2+y^2)+\frac{3}{2}$$

$$=-\frac{27}{4}xy.6xy+\frac{9}{4}.6xy+10xy+\frac{3}{4}\left((x+y)^2-2xy\right)+\frac{3}{2}$$

$$=-\frac{27}{2}(xy)^2+22xy+\frac{3}{2}.$$

Đặt $t=xy$. Từ $x+y=6xy$ ta có $6=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{2}{\sqrt{xy}}$. Suy ra $t=xy\geq\frac{1}{9}$.

Xét hàm số $f(t)=-\frac{27}{2}t^2+22t+\frac{3}{2}$ với $t\geq\frac{1}{9}$. Ta có

$f'(t)=-27t+22>0$ với mọi $t\geq\frac{1}{9}$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{9};+\infty\right)$.

Do đó $\min\limits_{\left[\frac{1}{9};+\infty\right)} f(t)=f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{34}{9}$.

Suy ra $P\geq\frac{34}{9}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{34}{9}$, đạt khi $x=y=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 6. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{2-x^2}=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=(x+y)^3-12(x-1)(y-1)+\sqrt{xy}$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức $ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$ với mọi a, b, ta có

$$x\sqrt{2-y^2}\le\frac{x^2+2-y^2}{2},\ y\sqrt{2-x^2}\le\frac{y^2+2-x^2}{2}. \qquad (*)$$

Suy ra $2=x\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{2-x^2}\le 2$. Do đó (*) xảy ra dấu đẳng thức. Điều đó tương đương với $x=\sqrt{2-y^2}$ và $y=\sqrt{2-x^2}$. Suy ra $x, y\ge 0$ và $x^2+y^2=2$.

Đặt $t=x+y$. Khi đó $t\le\sqrt{2(x^2+y^2)}=2$. Ta có

$$P=(x+y)^3+12(x+y)-12xy-12+\sqrt{xy}$$
$$\le(x+y)^3+12(x+y)-12.\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}-12+\frac{x+y}{2}$$
$$\le t^3+12t-6t^2+1=t^3-6t^2+12t+1.$$

Xét hàm $f(t)=t^3-6t^2+12t+1$ trên $[0; 2]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-12t+12=3(t-2)^2>0$, với mọi $t\in(0; 2)$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0; 2]$. Do đó $f(t)\le f(2)=9$. Suy ra $P\le 9$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=2$ hay $x=y=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 9, đạt khi $x=y=1$.

Nhận xét. Với cách giải trên chúng ta không tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức P. Để tìm cả giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P ta có thể giải theo cách sau.

Tương tự như trên ta có $x, y\ge 0$ và $x^2+y^2=2$. Đặt $t=x+y$.

Khi đó $t\le\sqrt{2(x^2+y^2)}=2$.

Mặt khác $t^2=(x+y)^2\ge x^2+y^2=2$. Suy ra $t\ge\sqrt{2}$.

Do đó $t\in\left[\sqrt{2}; 2\right]$.

Ta có $xy=\dfrac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=\dfrac{t^2}{2}-1$.

Suy ra

$$P=(x+y)^3+12(x+y)-12xy-12+\sqrt{xy}$$

$$=(x+y)^3+12(x+y)-12\left(\frac{t^2}{2}-1\right)-12+\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}$$

$$=t^3-6t^2+12t+\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}.$$

Xét hàm $f(t)=t^3-6t^2+12t+\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}$ trên $\left[\sqrt{2};2\right]$.

Ta có $f'(t)=3t^2-12t+12+\dfrac{t}{2\sqrt{\left(\frac{t^2}{2}-1\right)^3}}>0$, với mọi $t\in\left(\sqrt{2};2\right)$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{2};2\right]$. Suy ra

$$\max_{[\sqrt{2};2]} f(t)=f(2)=9;\quad \min_{[\sqrt{2};2]} f(t)=f\left(\sqrt{2}\right)=14\sqrt{2}-12.$$

Ví dụ 7. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $3xy+3=x^4+y^4+\frac{2}{xy}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=x^2y^2+\frac{16}{x^2+y^2+2}.$$

Lời giải. Đặt $xy=t>0$. Từ giả thiết ta có

$$3xy+3=x^4+y^4+\frac{2}{xy}\ge 2x^2y^2+\frac{2}{xy}, \text{ hay}$$

$$3t+3\ge 2t^2+\frac{2}{t}\Leftrightarrow 2t^3-3t^2-3t+2\le 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(2t-1)(t-2)\le 0\Leftrightarrow \frac{1}{2}\le t\le 2, \text{ vì } t>0.$$

Ta lại có $P\le x^2y^2+\dfrac{16}{2xy+2}=t^2+\dfrac{8}{t+1}$. (1)

Xét hàm số $f(t)=t^2+\dfrac{8}{t+1}$, $\dfrac{1}{2}\le t\le 2$.

Ta có $f'(t)=2t-\dfrac{8}{(t+1)^2}$, $\dfrac{1}{2}\le t\le 2$;

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \le t \le 2 \\ t(t+2)^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \le t \le 2 \\ (t-1)(t^2+3t+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1.$$

Ta có $f(1)=5,\ f(2)=\frac{20}{3},\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{67}{12}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P \le \frac{20}{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} xy=2 \\ x=y>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\sqrt{2}.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{20}{3}$, đạt khi $x=y=\sqrt{2}$.

Ví dụ 8. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^4+y^4+\frac{1}{xy}=xy+2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+y^2}-\frac{3}{1+2xy}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $xy+2 \ge 2x^2y^2+\frac{1}{xy}$. Đặt $xy=t>0$ ta được

$$t+2 \ge 2t^2+\frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t^3-t^2-(2t-1) \le 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-1)(2t-1) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le t \le 1.$$

Với $x, y>0$ và $xy \le 1$ ta có $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2} \le \frac{2}{1+xy}$. (1)

Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \le 0$, đúng do $x, y>0$ và $xy \le 1$.

Khi đó ta có $P \le \frac{4}{1+xy}-\frac{3}{1+2xy}=\frac{4}{1+t}-\frac{3}{1+2t}$. (2)

Xét hàm số $f(t)=\frac{4}{1+t}-\frac{3}{1+2t}$ trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Ta có $f'(t)=\frac{-4}{(1+t)^2}+\frac{6}{(1+2t)^2}=-2.\frac{5t^2+2t-1}{(1+t)^2(1+2t)^2}<0$ với mọi $t \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

Suy ra $f(t) \le f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. (3)

Từ (2) và (3) ta có $P \le \frac{7}{6}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $xy = \frac{1}{2}$ và $x = y$ $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{7}{6}$, đạt được khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 9. Cho các số thực a, b thuộc khoảng $(0; 1)$ thỏa mãn điều kiện $(a^3 + b^3)(a+b) - ab(a-1)(b-1) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + 5ab - (a+b)^2.$$

Lời giải. Ta có

$(a^3 + b^3)(a+b) - ab(a-1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{(a^3+b^3)(a+b)}{ab} = (1-a)(1-b)$. (1)

Vì $\frac{(a^3+b^3)(a+b)}{ab} = \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right)(a+b) \ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{ab} = 4ab$

và $(1-a)(1-b) = 1 - (a+b) + ab \le 1 - 2\sqrt{ab} + ab$

nên từ (1) suy ra $4ab \le 1 - 2\sqrt{ab} + ab$. (2)

Đặt $t = ab$, khi đó (2) trở thành $4t \le 1 - 2\sqrt{t} + t \Leftrightarrow 3t + 2\sqrt{t} - 1 \le 0 \Leftrightarrow 0 < t \le \frac{1}{9}$.

Ta có $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \le \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \le 0$, luôn đúng vì $a, b \in (0; 1)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le \sqrt{2\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}\right)} \le \sqrt{2.\frac{2}{1+ab}} = \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$$

và $5ab - (a+b)^2 = ab - (a-b)^2 \le ab$ nên suy ra

$$P \le \frac{2}{\sqrt{1+ab}} + ab = \frac{2}{\sqrt{1+t}} + t.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}+t$ với $t\in\left(0;\dfrac{1}{9}\right]$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{1}{(1+t)\sqrt{1+t}}+1>0$ với mọi $t\in\left(0;\dfrac{1}{9}\right]$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left(0;\dfrac{1}{9}\right]$. Suy ra $P\le\max\limits_{\left(0;\frac{1}{9}\right]}f(t)=f\left(\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{6}{\sqrt{10}}+\dfrac{1}{9}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=b\\ ab=\dfrac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{6}{\sqrt{10}}+\dfrac{1}{9}$, đạt được khi $a=b=\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 10. Cho các số thực dương a, b phân biệt thỏa mãn điều kiện $ab\le 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2}{a^4}+\dfrac{2}{b^4}+\dfrac{3}{(a-b)^2}$.

Lời giải. Từ giả thiết $0<ab\le 4$ ta có

$$P\ge\frac{a^2b^2}{16}\left(\frac{2}{a^4}+\frac{2}{b^4}\right)+\frac{ab}{4}\cdot\frac{3}{(a-b)^2}=\frac{1}{8}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}.$$

Đặt $t=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$. Khi đó $t\ge 2$ và $P\ge\dfrac{1}{8}(t^2-2)+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{t-2}=\dfrac{1}{8}t^2+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{4}$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{1}{8}t^2+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{4}$ trên $(2;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{4}t-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{(t-2)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t(t-2)^2=3\Leftrightarrow t=3$.

Vì $\lim\limits_{t\to 2^+}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$ nên $\min\limits_{(0;+\infty)}f(t)=f(3)=\dfrac{13}{8}$.

Suy ra $P\ge\dfrac{13}{8}$, dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}ab=4\\ t=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=4\\ a+b=2\sqrt{5}\end{cases}\text{ hay }\left[\begin{array}{l}a=\sqrt{5}-1,\ b=\sqrt{5}+1\\ a=\sqrt{5}+1,\ b=\sqrt{5}-1.\end{array}\right.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{13}{8}$.

2.4 Xét hàm lần lượt từng biến; xét hàm đại diện

Ví dụ 1. Cho các số thực $x,\ y \in [0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2\left(x^3 + y^3\right) - x^2y - y^2 - x.$$

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = 2\left(x^3 + y^3\right) - x^2y - y^2 - x$ với $x \in [0;1]$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 2yx - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{6}\left(y - \sqrt{y^2+6}\right) = x_1 < 0 \\ x = \frac{1}{6}\left(y + \sqrt{y^2+6}\right) = x_2 \in (0;1) \end{array}\right.$

và $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x = x_2$. Do đó

$$f(x) \le \max\{f(0),\ f(1)\} = \max\left\{2y^3 - y^2,\ 2y^3 - y^2 - y + 1\right\} = 2y^3 - y^2 - y + 1.$$

Xét hàm số $g(y) = 2y^3 - y^2 - y + 1$ trên $[0;1]$. Ta có

$g'(y) = 6y^2 - 2y - 1$; $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1+\sqrt{7}}{6}$ và $g'(y)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm. Suy ra $g(y) \le \max\{g(0),\ g(1)\} = 1$. Từ đó suy ra $P \le 1$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1,\ y = 0$ hoặc $y = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1, đạt được khi $x = 1,\ y = 0$ hoặc $y = 1$.

Ví dụ 2. Cho các số thực $a,\ b \in \left[\frac{1}{4};1\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2+3a} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+1}.$$

Lời giải. Xét hàm số $f(a) = \frac{1}{2+3a} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+1}$ với $a \in \left[\frac{1}{4};1\right]$.

Ta có $f'(a) = -\frac{3}{(2+3a)^2} + \frac{b}{(a+b)^2}$.

Vì $b(2+3a)^2 - 3(a+b)^2 = 9a^2b + 6ab + 4b - 3a^2 - 3b^2$

$$\ge 15a^2b + 4b - 3a^2 - 3b^2 = 3a^2(5b-1) + b(4-3b) > 0 \text{ với mọi } a,\ b \in \left[\frac{1}{4};1\right]$$

nên $f'(a) > 0$ với mọi $a \in \left[\frac{1}{4};1\right]$. Suy ra $f(a)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

Do đó: $f(a) \ge f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{11} + \frac{1}{1+4b} + \frac{b}{b+1}$.

Xét hàm số $g(b) = \frac{4}{11} + \frac{1}{1+4b} + \frac{b}{b+1}$ với $b \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. Ta có

$g'(b) = \frac{-4}{(1+4b)^2} + \frac{1}{(b+1)^2}$; $g'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$ và $g'(b)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm. Suy ra $g(b) \ge g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{34}{33}$, hay $P \ge \frac{34}{33}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{34}{33}$, đạt được khi $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 3. Cho các số dương a, b, x, y thỏa mãn $a^5 + b^5 = 2$ và $x, y \le 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + 2y^2 + 24}{xy\left(a^2 + b^2\right)}$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$a^5 + a^5 + 1 + 1 + 1 \ge 5a^2;\ b^5 + b^5 + 1 + 1 + 1 \ge 5b^2.$$

Suy ra $2a^5 + 2b^5 + 6 \ge 5\left(a^2 + b^2\right)$, hay $a^2 + b^2 \le 2$.

Do đó $P \ge \frac{x^2 + 2y^2 + 24}{2xy} = \frac{x}{2y} + \frac{y}{x} + \frac{12}{xy}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{2y} + \frac{y}{x} + \frac{12}{xy}$ với $x \in (0; 4]$ và y là tham số.

Ta có $f'(x) = \frac{x^2 - 2y^2 - 24}{2x^2y} \le \frac{4^2 - 2.0^2 - 24}{2x^2y} = \frac{-8}{2x^2y} < 0$ với mọi $x, y \in (0; 4]$.

Suy ra $f'(x)$ nghịch biến trên $(0; 4]$. Do đó $f(x) \ge f(4)$.

Suy ra $P \ge f(4) = \frac{2}{y} + \frac{y}{4} + \frac{3}{y} = \frac{5}{y} + \frac{y}{4}$.

Xét hàm số $g(y) = \frac{5}{y} + \frac{y}{4}$ với $y \in (0; 4]$.

Ta có $g'(y) = -\frac{5}{y^2} + \frac{1}{4} \le -\frac{5}{16} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{16} < 0$ với mọi $y \in (0; 4]$.

Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 4]$. Suy ra $g(y) \ge g(4) = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$.

Suy ra $P \ge \frac{9}{4}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 4$, $a = b = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{4}$, đạt khi $x = y = 4$, $a = b = 1$.

Ví dụ 4. Cho n và k là các số nguyên dương thỏa mãn $n \ge 7$ và $2 \le k < n$. Chứng minh rằng $k^n > 2n^k$.

(Học sinh giỏi Quốc gia, 1997)

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$n \ln k > k \ln n + \ln 2 \Leftrightarrow n \ln k - k \ln n - \ln 2.$$

Xét hàm số $f(x) = n \ln x - x \ln n - \ln 2$ với $x \in [2; n-1]$.

Ta có $f'(x) = \frac{n}{x} - \ln n$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{n}{\ln n}$.

Ta sẽ chứng minh nghiệm $x = \frac{n}{\ln n} \in [2; n-1]$ với mọi $n \ge 7$.

Rõ ràng $\frac{n}{\ln n} < n - 1$ với mọi $n \ge 7$. Ta có $\frac{n}{\ln n} > 2 \Leftrightarrow e^n > n^2$.

Xét hàm số $g(x) = e^x - x^2$, với $x \ge 7$. Ta có

$$g'(x) = e^x - 2x;\ g''(x) = e^x - 2;\ g''(x) > 0 \text{ với mọi } x \ge 7.$$

Suy ra $g'(x) > g'(7) = e^7 - 14 > 0$. Do đó $g(x) > g(7) = e^7 - 49 > 0$.

Từ đó ta có $x = \frac{n}{\ln n} \in [2; n-1]$ với mọi $n \ge 7$ và $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua nghiệm. Suy ra $f(x) \ge \min\{f(2), f(n-1)\}$.

Ta chứng minh $\min\{f(2), f(n-1)\} \ge 0$.

Ta có $f(2) \ge 0 \Leftrightarrow 2^{n-1} \ge n^2$, điều này đúng với mọi $n \ge 7$.

Ta có $f(n-1) \ge 0 \Leftrightarrow (n-1)^n \ge 2n^{n-1} \Leftrightarrow t > 2\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$, (*)

trong đó $t = n - 1 \ge 6$.

Vì $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < e < 3$ nên $2\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < 6 \le t$. Suy ra (*) đúng.

Từ đó ta có bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5. Cho các số thực dương a, b. Chứng minh rằng

$$(a+1)\ln(a+1)+e^b \geq (a+1)(b+1).$$

(Học sinh giỏi Tỉnh Nam Định, 2006)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$(a+1)\ln(a+1)+e^b-(a+1)(b+1) \geq 0.$$

Xét hàm số $f(a)=(a+1)\ln(a+1)+e^b-(a+1)(b+1)$ với $a>0$. Ta có

$f'(a)=1+\ln(a+1)-(b+1)=\ln(a+1)-b$; $f'(a)=0 \Leftrightarrow a=e^b-1$ và $f'(a)$ đổi dấu từ âm sang dương khi a đi qua nghiệm e^b-1.

Suy ra $f(a) \geq f\left(e^b-1\right)=e^b b+e^b-e^b(b+1)=0$ với mọi $a>0$. Do đó bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=e^b-1$.

Ví dụ 6. Cho các số thực không âm x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt[3]{4\left(e^{3x}+e^{3y}\right)}-\frac{2\sqrt[4]{(1+2x)^3(1+2y)^3}}{3}.$$

Lời giải. Ta có $\left(e^x+e^y\right)\left(e^x-e^y\right)^2 \geq 0$. Suy ra $e^{3x}+e^{3y} \geq e^x e^y\left(e^x+e^y\right)$. Do đó

$$4\left(e^{3x}+e^{3y}\right) \geq e^{3x}+e^{3y}+3e^x e^y\left(e^x+e^y\right)=\left(e^x+e^y\right)^3.$$

Suy ra $\sqrt[3]{4\left(e^{3x}+e^{3y}\right)} \geq e^x+e^y$.

Mặt khác ta có $\sqrt[4]{(1+2x)^3(1+2y)^3} \leq \dfrac{\sqrt{(1+2x)^3}+\sqrt{(1+2y)^3}}{2}$.

Suy ra $P \geq e^x+e^y-\dfrac{\sqrt{(1+2x)^3}+\sqrt{(1+2y)^3}}{3}$.

Xét hàm số $f(t)=e^t-\dfrac{\sqrt{(1+2t)^3}}{3}$ với $t \geq 0$. Ta có

$$f'(t)=e^t-\frac{\frac{3}{2}(1+2t)^{\frac{1}{2}}.2}{3}=e^t-\sqrt{1+2t},$$

$$f''(t)=e^t-\frac{1}{\sqrt{1+2t}}=\frac{e^t\sqrt{1+2t}-1}{\sqrt{1+2t}} \geq \frac{e^0\sqrt{1+2.0}-1}{\sqrt{1+2t}}=0, \text{ với mọi } t \geq 0.$$

Do đó $f'(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Suy ra $f'(t)>f'(0)=0$ với mọi $t>0$.

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Suy ra $f(t) \ge f(0) = \frac{2}{3}$ với mọi $t \ge 0$.

Từ đó ta suy ra $P = f(x) + f(y) \ge \frac{4}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{4}{3}$, đạt khi $x = y = 0$.

Ví dụ 7. Cho các số thực $a \ge b > 0$. Chứng minh rằng

$$\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \le \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a.$$

(*Tuyển sinh Đại học Khối D, 2007*)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(1+4^a\right)^b \le \left(1+4^b\right)^a \Leftrightarrow \frac{\ln\left(1+4^a\right)}{a} \le \frac{\ln\left(1+4^b\right)}{b}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln\left(1+4^x\right)}{x}$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = \frac{4^x \ln 4^x - \left(1+4^x\right)\ln\left(1+4^x\right)}{x^2\left(1+4^x\right)}$; $f'(x) < 0$ với mọi $x > 0$.

Suy ra hàm $f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Khi đó, vì $a \ge b > 0$ nên ta có $f(a) \le f(b)$, điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải khác sử dụng tính chất của lũy thừa

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(1 + \frac{1}{4^a}\right)^b \le \left(1 + \frac{1}{4^b}\right)^a.$$

Vì $0 < b \le a$ nên $1 < 1 + \frac{1}{4^a} \le 1 + \frac{1}{4^b}$. Do đó $\left(1+\frac{1}{4^a}\right)^b \le \left(1+\frac{1}{4^a}\right)^a \le \left(1+\frac{1}{4^b}\right)^a$.

Bất đẳng thức được chứng minh, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài tập

Bài 1. Cho a, b không âm thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh rằng $ab^2 \le \frac{4}{27}$.

Bài 2. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 11$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + xy^2$.

Bài 3. Cho x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = x + y$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$.

Bài 4. Cho x, y thỏa mãn $x, y \ge 1$ và $x + y + xy = 8$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^2 + y^2 + x^2y^2$.

Bài 5. Cho x, y thỏa mãn $x, y \ge 1$ và $3(x + y) = 4xy$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^3 + y^3 - 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right).$$

Bài 6. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y - 1 = \sqrt{2x-4} + \sqrt{y+1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (x+y)^2 - \sqrt{9-x-y} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}.$$

Bài 7. Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $6(a^2 + b^2) + 20ab = 5(a+b)(ab+3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 9\left(\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4}\right) - 16\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) + 25\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Bài 8. Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\left(a^2 + 2b^2\right)^2 + 3a^2b^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)\left(a^2 + 2b^2\right).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3 + b^3}{b^3} + \frac{8b^3}{a^3} + \frac{\left((a+b)^2 + 2a^2 + 5b^2\right)\left((a-b)^2 + 2a^2 + 5b^2\right)}{ab\left(a^2 + 2b^2\right)}.$$

Bài 9. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $x^2 - xy + y^2 \le 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + xy - 2y^2$.

Bài 10. Cho các số thực x, y thỏa mãn $xy \ge 0$ và $x + y > 0$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2y - 4y^3}{x^3 + 8y^3}.$$

Bài 11. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3 + y^3 - x^2 - y^2}{(x-1)(y-1)} + 2(x^2 + y^2) - 16\sqrt{xy}.$$

Bài 12. Cho các số dương a, b phân biệt thỏa mãn $a^2+2b=12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{4}{a^4}+\frac{4}{b^4}+\frac{5}{8(a-b)^2}.$$

Bài 13. Cho các số thực x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}.$$

(Học sinh giỏi Quốc gia, 1997)

Bài 14. Xét các số thực a, b sao cho phương trình $ax^3-x^2+bx-1=0$ có ba nghiệm thực dương (các nghiệm có thể bằng nhau). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{5a^2-3ab+2}{a^2(b-a)}$.

(Học sinh giỏi Quốc gia, 1999)

Hướng dẫn giải bài tập

Bài 1. Cho a, b không âm thỏa mãn $a+b=1$. Chứng minh rằng $ab^2\le\dfrac{4}{27}$.

Lời giải. Từ giả thiết a, b không âm thỏa mãn $a+b=1$ ta có $a=1-b$ và $b\in[0;\,1]$. Khi đó bất đẳng thức trở thành $(1-b)b^2\le\dfrac{4}{27}\Leftrightarrow b^3-b^2+\dfrac{4}{27}\ge0.$

Xét hàm số $f(b)=b^3-b^2+\dfrac{4}{27}$ trên $[0;\,1]$.

Ta có $f'(b)=3b^2-2b$; $f'(b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

b	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(b)$		−	0	+	
$f(b)$	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗	$\frac{4}{27}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $f(b)\ge0$, với mọi $b\in[0;\,1]$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=\frac{2}{3}$, $a=\frac{1}{3}$.

Nhận xét. Để chứng minh bất đẳng thức $(1-b)b^2 \le \frac{4}{27}$ ta có thể áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm như sau

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$(1-b)b^2=\frac{1}{2}(2-2b).b.b \le \frac{1}{2}\left(\frac{2-2b+b+b}{3}\right)^3=\frac{4}{27}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2-2b=b \Leftrightarrow b=\frac{2}{3}$.

Bài 2. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2=11$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+xy^2$.

Lời giải. Từ giả thiết $x^2+y^2=11$ ta có $y^2=11-x^2$ và $x\in\left[-\sqrt{11};\sqrt{11}\right]$. Khi đó

$$P=x+x\left(11-x^2\right)=-x^3+12x.$$

Xét hàm số $f(x)=-x^3+12x$ trên $\left[-\sqrt{11};\sqrt{11}\right]$.

Ta có $f'(x)=-3x^2+12$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\sqrt{11}$		-2		2		$\sqrt{11}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\sqrt{11}$	↘	-16	↗	16	↘	$\sqrt{11}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị lớn nhất của P là 16, đạt khi $x=2$, $y=\pm\sqrt{7}$; giá trị nhỏ nhất của P là -16, đạt được khi $x=-2$, $y=\pm\sqrt{7}$.

Bài 3. Cho x, y thỏa mãn $x^2+y^2=x+y$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=x^3+y^3+x^2y+xy^2$.

Lời giải. Đặt $t=x+y$.

Khi đó $t^2=(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)=2t$, suy ra $t^2-2t\le 0 \Leftrightarrow 0\le t\le 2$.

Ta có $(x+y)^2 - 2xy = x + y$ nên $xy = \dfrac{t^2 - t}{2}$. Do đó

$$M = (x+y)\left(x^2 + y^2 - xy\right) + xy(x+y) = t\left(t - \frac{t^2 - t}{2}\right) + \frac{t^2 - t}{2}t = t^2.$$

Xét hàm số $f(t) = t^2$ trên $[0; 2]$.

Ta có $\min\limits_{[0;\,2]} f(t) = f(0) = 0$; $\max\limits_{[0;\,2]} f(t) = f(2) = 4$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của M là 0, đạt khi $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = x + y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$;

giá trị lớn nhất của M là 4, đạt khi $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = x + y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Bài 4. Cho x, y thỏa mãn $x, y \geq 1$ và $x + y + xy = 8$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^2 + y^2 + x^2y^2$.

Lời giải. Đặt $t = x + y$. Khi đó $8 = x + y + xy \leq x + y + \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$. Suy ra

$$\frac{t^2}{4} + t - 8 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 32 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 4 \\ t \leq -8 \text{ (ktm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t \geq 4.$$

Mặt khác vì $x, y \geq 1$ nên $(x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy - (x+y) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x + y \leq \dfrac{9}{2}$.

Suy ra $t \in \left[4; \dfrac{9}{2}\right]$.

Ta có $P = (x+y)^2 - 2xy + x^2y^2 = t^2 - 2(8-t) + (8-t)^2 = 2t^2 - 14t + 48$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 14t + 48$ trên $\left[4; \dfrac{9}{2}\right]$.

Ta có bảng biến thiên

t	$\frac{7}{2}$	4		$\frac{9}{2}$
$f(t)$		24	$\nearrow$	$\frac{51}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{51}{2}$, đạt khi $x+y=\frac{9}{2}$ và $xy=\frac{7}{2}$

Giá trị nhỏ nhất của P là 24, đạt khi $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2.$

Bài 5. Cho x, y thỏa mãn $x,\ y \ge 1$ và $3(x+y)=4xy$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^3+y^3-3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right).$$

Lời giải. Đặt $t=x+y$. Khi đó $xy=\frac{3t}{4}$, $t>0$ và từ giả thiết ta có

$$3(x+y)=4xy \le (x+y)^2 \text{ suy ra } t \ge 3.$$

Vì $x,\ y \ge 1$ nên $(x-1)(y-1)\ge 0$. Hay là

$$xy-(x+y)+1 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{3t}{4}-t+1 \ge 0 \Leftrightarrow t \le 4.$$

Vậy ta có $3 \le t \le 4$. Mặt khác, từ giả thiết ta lại có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3}$.

Suy ra $P=(x+y)^3-3xy(x+y)-3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2+\frac{6}{xy}=t^3-\frac{9}{4}t^2+\frac{8}{t}-\frac{16}{3}.$

Xét hàm số $f(t)=t^3-\frac{9}{4}t^2+\frac{8}{t}-\frac{16}{3}$, với $3 \le t \le 4$.

Ta có $f'(t)=3t^2-\frac{9}{2}t-\frac{8}{t^2}=\frac{1}{t^2}\left(t^3\left(2t-\frac{9}{2}\right)+\left(t^4-8\right)\right)>0$ với mọi $t\in[3;\ 4]$.

Bảng biến thiên

t	3		4
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$\frac{65}{12}$	$\nearrow$	$\frac{74}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min P=\frac{65}{12}$, đạt khi

$$t=3 \Leftrightarrow x=y=\frac{3}{2};\ \max P=\frac{74}{3}, \text{ đạt khi } a=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,\ y=3 \\ x=3,\ y=1. \end{array}\right.$$

Bài 6. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y-1=\sqrt{2x-4}+\sqrt{y+1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(x+y)^2-\sqrt{9-x-y}+\frac{1}{\sqrt{x+y}}.$$

Lời giải. Điều kiện $x\ge 2,\ y\ge -1,\ 0<x+y\le 9$.

Ta có $(x+y-1)^2=\left(\sqrt{2x-4}+\sqrt{y+1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\sqrt{x-2}+\sqrt{y+1}\right)^2\le 3(x+y-1)$.

Suy ra $0\le x+y-1\le 3\Leftrightarrow 1\le x+y\le 4$.

Đặt $t=x+y$, khi đó $t\in[1;\,4]$ và $P=t^2-\sqrt{9-t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-\sqrt{9-t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ với $t\in[1;\,4]$.

Ta có $f'(t)=2t+\dfrac{1}{2\sqrt{9-t}}-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}>0$ với mọi $t\in[1;\,4]$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[1;\,4]$.

Suy ra $\min\limits_{[1;\,4]} f(t)=f(1)=2-2\sqrt{2}$; $\max\limits_{[1;\,4]} f(t)=f(4)=\dfrac{33-2\sqrt{5}}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{33-2\sqrt{5}}{2}$, đạt khi $x=4,\ y=0$; giá trị nhỏ nhất của P là $2-2\sqrt{2}$, đạt khi $x=2,\ y=-1$.

Bài 7. Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$6(a^2+b^2)+20ab=5(a+b)(ab+3).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=9\left(\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}\right)-16\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)+25\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Lời giải. Ta có

$$6(a^2+b^2)+20ab=5(a+b)(ab+3)\Leftrightarrow 6\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+20=5(a+b)+15\frac{a+b}{ab}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$5(a+b)+15\frac{a+b}{ab}\ge 2\sqrt{\frac{75(a+b)^2}{ab}}=10\sqrt{3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}.$$

Suy ra $6\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+20\ge 10\sqrt{3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}$.

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, bất đẳng thức trở thành $6t+20\ge 10\sqrt{3(t+2)}$. Suy ra $t\ge\frac{10}{3}$.

Ta có $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=t^2-2$, $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}=t\left(t^2-3\right)$, $\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}=\left(t^2-2\right)^2$ nên suy ra

$$P=9t^4-16t^3-11t^2+48t-32.$$

Xét hàm số $f(t)=9t^4-16t^3-11t^2+48t-32$ với $t\ge\frac{10}{3}$.

Ta có $f'(t)=36t^3-48t^2-22t+48$; $f'(t)>0$ với mọi $t\ge\frac{10}{3}$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left[\frac{10}{3};+\infty\right)$. Do đó $\min\limits_{\left[\frac{10}{3};+\infty\right)} f(t)=f\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{14156}{27}$.

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{14156}{27}$, đạt khi $a=1, b=3$ hoặc $a=3, b=1$.

Bài 8. Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\left(a^2+2b^2\right)^2+3a^2b^2=2\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+2b^2\right).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3+b^3}{b^3}+\frac{8b^3}{a^3}+\frac{\left((a+b)^2+2a^2+5b^2\right)\left((a-b)^2+2a^2+5b^2\right)}{ab\left(a^2+2b^2\right)}.$$

Lời giải. Ta có $\left(a^2+2b^2\right)^2+3a^2b^2=2\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+2b^2\right)\ge 4ab\left(a^2+2b^2\right)$.

Suy ra $\left(\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\right)^2+3\ge 4\left(\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\right)\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\ge 3$.

Ta có $P=\left(\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\right)^3-6\left(\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\right)+9\left(\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\right)-\frac{4}{\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}}+1$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\right)^3+3\left(\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\right)-\frac{4}{\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}}+1.$$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}$, khi đó $t\geq 3$ và $P=t^3+3t-\frac{4}{t}+1$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t-\frac{4}{t}+1$ với $t\geq 3$.

Ta có $f'(t)=3t^2+\frac{4}{t^2}+3>0$ với mọi $t\geq 3$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[3;+\infty)$.

Suy ra $f(t)\geq f(3)=\frac{97}{3}$ với mọi $t\geq 3$.

Do đó $P\geq\frac{97}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{97}{3}$, đạt được khi $a=b=1$.

Bài 9. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $x^2-xy+y^2\leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+xy-2y^2$.

Lời giải. Đặt $f(x,y)=x^2-xy+y^2$.

* Nếu $y=0$ thì từ giả thiết ta có $0\leq x^2\leq 3$. Suy ra $P=x^2\in[0;3]$.

* Với $y\neq 0$, ta có $0<f(x,y)=x^2-xy+y^2\leq 3$. Khi đó

$$P=f(x,y).\frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-xy+y^2}.$$

Đặt $x=ty$, ta có $P=f(x,y).\frac{t^2+t-2}{t^2-t+1}$.

Xét hàm số $g(t)=\frac{t^2+t-2}{t^2-t+1}$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(t)=\frac{-2t^2+6t-1}{(t^2-t+1)^2}$; $g'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra bảng biến thiên

t	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{7}}{2}$		$\frac{3-\sqrt{7}}{2}$		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	1	↘	$\frac{-1-2\sqrt{7}}{3}$	↗	$\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}$	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\dfrac{-1-2\sqrt{7}}{3} \le g(t) \le \dfrac{-1+2\sqrt{7}}{3}$, với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Vì $0 < f(x, y) \le 3$ nên $-1-2\sqrt{7} \le P = f(x, y).g(t) \le -1+2\sqrt{7}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $-1-2\sqrt{7}$, đạt khi $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ và giá trị lớn nhất của P là $-1+2\sqrt{7}$, đạt khi $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3+\sqrt{7}}{2} \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$

Bài 10. Cho các số thực x, y thỏa mãn $xy \ge 0$ và $x + y > 0$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2 y - 4y^3}{x^3 + 8y^3}.$$

Lời giải. Từ giả thiết của bài toán ta có $y \ge 0,\ x \ge 0$.

TH 1. Với $y = 0$ ta có $P = 0$.

TH 2. Với $y > 0$ ta có $P = \dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 4}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^3 + 8}$.

Đặt $t = \dfrac{x}{y}, t \ge 0$, ta được $P = \dfrac{(t+2)^2 - 4(t+2)}{t^3+8} = \dfrac{t-2}{t^2 - t + 4}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t-2}{t^2 - 2t + 4}$ trên nửa khoảng $[0, +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t(4-t)}{(t^2 - 2t + 4)^2} > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 4$.

Suy ra kết quả $P_{\max} = f(4) = \dfrac{1}{6}$, $P_{\min} = f(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Bài 11. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3 + y^3 - x^2 - y^2}{(x-1)(y-1)} + 2(x^2 + y^2) - 16\sqrt{xy}.$$

Lời giải. Đặt $x+y=t>2$. Suy ra $xy\le\dfrac{t^2}{4}$, $2(x^2+y^2)\ge t^2$.

Khi đó $P=\dfrac{t^3-t^2-xy(3t-2)}{xy+1-t}+2(x^2+y^2)-16\sqrt{xy}$

$$\ge\frac{t^3-t^2-\frac{t^2}{4}(3t-2)}{\frac{t^2}{4}-t+1}+t^2-8t=\frac{t^2}{t-2}+t^2-8t.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2}{t-2}+t^2-8t$, $t>2$ ta được $f(t)\ge f(4)=-8$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -8 đạt khi $x=y=2$.

Bài 12. Cho các số dương a, b phân biệt thỏa mãn $a^2+2b=12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{4}{a^4}+\dfrac{4}{b^4}+\dfrac{5}{8(a-b)^2}$.

Lời giải. Từ giả thiết và áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$16=(a^2+4)+2b\ge 4a+2b\ge 2\sqrt{4a.2b}.$$

Suy ra $0<ab\le 8$. Do đó

$$P=\frac{4}{a^4}+\frac{4}{b^4}+\frac{5}{8(a-b)^2}\ge\frac{a^2b^2}{64}\left(\frac{4}{a^4}+\frac{4}{b^4}\right)+\frac{ab}{8}.\frac{5}{8(a-b)^2}$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{5}{64}.\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}.$$

Đặt $t=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$. Khi đó $t>2$ và $P\ge\dfrac{1}{16}(t^2-2)+\dfrac{5}{64}.\dfrac{1}{t-2}=\dfrac{1}{16}t^2+\dfrac{5}{64}.\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{8}$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{1}{16}t^2+\dfrac{5}{64}.\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{8}$ trên $(2;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{8}t-\dfrac{5}{64}.\dfrac{1}{(t-2)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t(t-2)^2=\dfrac{5}{8}\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}$, vì $t>2$.

Vì $\lim\limits_{t\to 2^+}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$ nên $\min\limits_{(2;+\infty)}f(t)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{27}{64}$.

Suy ra $P\ge\dfrac{27}{64}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=2$, $b=4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{27}{64}$, đạt được khi $a=2$, $b=4$.

3 Biểu thức ba biến

Đây là dạng phổ biến nhất của các bài toán chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức. Khi muốn sử dụng phương pháp khảo sát hàm số với các biểu thức ba biến số, chúng ta có những định hướng để xét hàm một biến như sau.

3.1 Đổi biến đối xứng

Khi trong biểu thức ba biến số có chứa các biểu thức đối xứng cơ bản, với những điều kiện của giả thiết chúng ta có thể đưa về biểu thức một biến qua phép đổi biến. Khi đó bài toán có thể giải quyết được bằng xét hàm số.

Các bước giải

+ Phát hiện một biểu thức có thể chọn làm biến mới;

+ Đổi biến;

+ Tìm điều kiện của biến mới;

+ Xét hàm số và đưa ra kết luận.

Sau đây chúng ta sẽ trình bày các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Cho x, y, z không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A=xy+yz+zx+\dfrac{5}{x+y+z}$.

Lời giải. Đặt $t=x+y+z \Rightarrow t^2=3+2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx=\dfrac{t^2-3}{2}$.

Ta có $0 \le xy+yz+zx \le x^2+y^2+z^2=3$ nên $3 \le t^2 \le 9 \Rightarrow \sqrt{3} \le t \le 3$ vì $t>0$.

Khi đó $A=\dfrac{t^2-3}{2}+\dfrac{5}{t}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{5}{t}-\dfrac{3}{2}$, $\sqrt{3} \le t \le 3$.

Ta có $f'(t)=t-\dfrac{5}{t^2}=\dfrac{t^3-5}{t^2}>0$ vì $t \ge \sqrt{3}$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{3};3\right]$. Do đó $f(t) \le f(3)=\dfrac{14}{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=3 \Leftrightarrow x=y=z=1$; $f(t) \ge f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=\sqrt{3} \Leftrightarrow$ trong ba số có hai số bằng 0 và số còn lại bằng $\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{14}{3}$, đạt được khi $x = y = z = 1$; giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{5}{\sqrt{3}}$, đạt được khi trong ba số có hai số bằng 0 và số còn lại bằng $\sqrt{3}$.

Ví dụ 2. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = xy + yz + zx + \frac{4}{xy + yz + zx + 2}.$$

Lời giải. Đặt $t = xy + yz + zx$.

Khi đó $t = xy + yz + zx \le x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Mặt khác, từ $(x+y+z)^2 \ge 0$ suy ra $t = xy + yz + zx \ge -\frac{1}{2}$.

Do đó ta có

$$P = t + \frac{4}{t+2} \text{ với } t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right].$$

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{4}{t+2}$ với $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{4}{(t+2)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Suy ra bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		0		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{13}{6}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{7}{3}$, đạt khi $t = 1$ hay $x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; giá trị nhỏ nhất của P là 2, đạt khi $t = 0$ hay trong ba số có hai số bằng 0, số còn lại bằng ± 1.

Ví dụ 3. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$3(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca=12.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+ab+bc+ca.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có

$$12\ge 3(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le 4;$$

$$12\le 3(a^2+b^2+c^2)+a^2+b^2+c^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3.$$

Suy ra $a^2+b^2+c^2\in[3;4]$.

Cũng từ giả thiết ta có $a+b+c=\sqrt{24-5(a^2+b^2+c^2)}$. Do đó

$$P=\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{24-5(a^2+b^2+c^2)}}+12-3(a^2+b^2+c^2).$$

Đặt $t=\sqrt{24-5(a^2+b^2+c^2)}$. Khi đó $t\in[2;3]$ và

$$P=\frac{\frac{1}{5}(24-t^2)}{t}+12-3.\frac{24-t^2}{5}=\frac{1}{5}\left(3t^2-t+\frac{24}{t}\right)-\frac{12}{5}.$$

Xét hàm $f(t)=3t^2-t+\frac{24}{t}$ trên $[2;3]$.

Ta có $f'(t)=6t-1-\frac{24}{t^2}=(t-1)+\left(5t-\frac{24}{t^2}\right)>0$ với mọi $t\in[2;3]$.

Suy ra $\max\limits_{[2;3]}f(t)=f(3)=32;\ \min\limits_{[2;3]}f(t)=f(2)=22$.

Suy ra $2\le P\le 4$ và $P=2\Leftrightarrow t=2$ khi $a=2, b=c=0$ và $P=4\Leftrightarrow t=3$ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 4, đạt khi $a=b=c=1$; giá trị nhỏ nhất của P là 2, đạt khi $a=2,\ b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 4. Cho các số thực $a, b, c\in[0;2]$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}-(ab+bc+ca).$$

Lời giải. Từ giả thiết $a, b, c\in[0;2]$ ta có $(a-2)(b-2)(c-2)\le 0$. Khai triển ta được $abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8\le 0$.

Suy ra

$$ab + bc + ca \ge \frac{abc + 4(a+b+c) - 8}{2} \ge \frac{12-8}{2} = 2.$$

Đặt $t = ab + bc + ca$, ta có $t = ab + bc + ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 3$. Do đó $2 \le t \le 3$.

Mặt khác, $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9 - 2(ab + bc + ca).$$

Khi đó ta có $P = \frac{9-2t}{t} - t$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{9-2t}{t} - t$, với $t \ge 2$.

Ta có $f'(t) = -\frac{9}{t^2} - 1 < 0$ với mọi $t \ge 2$. Do đó $f(t)$ nghịch biến trên [2; 3].

Suy ra $\max\limits_{[2;\,3]} f(t) = f(2) = \frac{1}{2}$; $\min\limits_{[2;\,3]} f(t) = f(3) = -2$.

Từ đó ta có giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$, đạt được khi $a = 2, b = 1, c = 0$ hoặc các hoán vị; giá trị nhỏ nhất của P là -2, đạt được khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2 + 3}.$$

Lời giải. Ta có

$$P = \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 + 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2 + 3}$$

$$= \frac{2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 + 5\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 9}{2\left(a^2 + b^2 + c^2 + 3\right)}.$$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$. Khi đó từ $3 = \frac{(a+b+c)^2}{3} \le a^2 + b^2 + c^2 < (a+b+c)^2 = 3$ ta suy ra $t \in [3; 9)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t^2 + 5t + 9}{2t + 6}$ với $t \in [3; 9)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{4\left(t^2+6t+3\right)}{(2t+6)^2}$; $f'(t)>0$ với mọi $t\in[3;9)$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[3;9)$. Do đó $\min\limits_{[3;9)} f(t)=f(3)=\dfrac{7}{2}$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{7}{2}$, đạt khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 6. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1-16xyz}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{3\sqrt[3]{xyz}+4xyz}{1+4\left(x^2+y^2+z^2\right)}.$$

Lời giải. Ta có

$$P=\frac{3\sqrt[3]{xyz}+4xyz}{1+4\left(x^2+y^2+z^2\right)}=\frac{3\sqrt[3]{xyz}+4xyz}{2(1-8xyz)}.$$

Mặt khác, theo giả thiết và áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$1-16xyz=4\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 12\sqrt[3]{x^2y^2z^2}. \qquad (1)$$

Đặt $t=\sqrt[3]{xyz}$, khi đó $t>0$ và từ (1) suy ra

$$16t^3+12t^2-1\leq 0 \Leftrightarrow \left(t-\frac{1}{4}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\leq 0 \Leftrightarrow t\leq \frac{1}{4}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{3t+4t^3}{2\left(1-8t^3\right)}$ với $t\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{3(2t+1)\left(8t^2-2t+1\right)}{2\left(1-8t^3\right)^2}$; $f'(t)>0$ với mọi $t\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$. Do đó $\max\limits_{\left(0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{13}{28}$. Suy ra $P\leq\dfrac{13}{28}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất là $\dfrac{13}{28}$, đạt được khi $x=y=z=\dfrac{1}{4}$.

Ví dụ 7. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(xy+yz+2zx)^2-\frac{8}{(x+y+z)^2-xy-yz+2}.$$

Lời giải. Ta có $P=(xy+yz+2zx)^2-\dfrac{8}{xy+yz+2zx+1}$.

Vì $0\le(x+y+z)^2=1+2(xy+yz+zx)$ nên

$$xy+yz+2zx\ge-\frac{1}{2}+xz\ge-\frac{1}{2}-\frac{x^2+y^2}{2}=-1+\frac{y^2}{2}\ge-1,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y=0$ và $x=-z=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $t=xy+yz+2zx$, khi đó $t\ge-1$ và $P=t^2-\dfrac{8}{t+3}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-\dfrac{8}{t+3}$ với $t\ge-1$.

Ta có $f'(t)=2t+\dfrac{8}{(t+3)^2}=\dfrac{2(t+1)^2(t+4)}{(t+3)^2}>0$ với mọi $t>-1$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-1;+\infty)$. Suy ra $P=f(t)\ge f(-1)=3$ với mọi $t\ge-1$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y=0$ và $x=-z=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3, đạt được khi $y=0$ và $x=-z=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 8. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=4$ và $xyz=2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=x^4+y^4+z^4$.

(Học sinh giỏi Quốc gia, 2004)

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}P&=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\\&=\left((x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\right)^2-2\left((xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\right)\\&=\left(16-2(xy+yz+zx)\right)^2-2\left((xy+yz+zx)^2-16\right)\\&=2(xy+yz+zx)^2-64(xy+yz+zx)+288.\end{aligned}$$

Đặt $t=xy+yz+zx$. Khi đó $P=2t^2-64t+288$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} y+z=4-x \\ yz=\dfrac{2}{x} \end{cases}$ suy ra $(4-x)^2 \ge \dfrac{8}{x}$.

Do đó $(x-2)\left(x^2-6x+4\right) \ge 4$, suy ra $3-\sqrt{5} \le x \le 2$.

Ta có $t = xy+yz+zx = x(y+z)+yz = x(4-x)+\dfrac{2}{x} = -x^2+4x+\dfrac{2}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = -x^2+4x+\dfrac{2}{x}$ trên $\left[3-\sqrt{5};\, 2\right]$.

Ta có $f'(x) = -2x+4-\dfrac{2}{x^2}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$3-\sqrt{5}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{5\sqrt{5}-1}{2}$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{5}-1}{2}$	$\searrow$	5

Từ bảng biến thiên ta suy ra $t = f(x) \in \left[5;\, \dfrac{5\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

Xét hàm số $g(t) = 2t^2 - 64t + 288$ trên $\left[5;\, \dfrac{5\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

Ta có $g'(t) = 4t - 64 < 0$ với mọi $t \in \left[5;\, \dfrac{5\sqrt{5}-1}{2}\right]$. Suy ra hàm $g(t)$ nghịch biến trên $\left[5;\, \dfrac{5\sqrt{5}-1}{2}\right]$. Do đó giá trị lớn nhất của P bằng $g(5)=18$, đạt khi $x=1,\, y=1,\, z=2$ và các hoán vị; giá trị nhỏ nhất của P là $g\left(\dfrac{5\sqrt{5}-1}{2}\right) = 383-165\sqrt{5}$, đạt khi $x=3-\sqrt{5}$, $y=z=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ và các hoán vị.

Ví dụ 9. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)^2+\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\geq 4\sqrt{3abc(a+b+c)}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức là thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh khi $a+b+c=1$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$1+\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\geq 4\sqrt{3abc}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{abc}}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\geq 4\sqrt{3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq 3\sqrt[6]{abc}$. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{abc}}+3\sqrt[6]{abc}\geq 4\sqrt{3}.$$

Đặt $t=\sqrt[6]{abc}$, khi đó $t=\sqrt[6]{abc}\leq\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{t^3}+3t$ với $0<t\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có $f'(t)=-\frac{3}{t^4}+3$; $f'(t)<0$ với mọi $t\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Do đó $f(t)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Suy ra $f(t)\geq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=4\sqrt{3}$. Từ đó ta có bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 10. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}+8\sqrt[3]{abc}\leq 9.$$

Lời giải. Ta có $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)\leq 27-24abc$.

Suy ra $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}+8\sqrt[3]{abc}\leq\sqrt[3]{9-8abc}+8\sqrt[3]{abc}$.

Đặt $t=abc$, khi đó ta có $0<t=abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$. Suy ra $0<t\leq 1$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt[3]{9-8t}+8\sqrt[3]{t}$ với $t\in(0;1]$.

Ta có $f'(t)=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{(9-8t)^2}}\right)$.

Vì $(9-8t)^2 - t^2 = 9(1-t)(9-7t) > 0$ với mọi $t \in (0;1)$ nên suy ra $f'(t) > 0$ với mọi $t \in (0;1)$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $(0;1]$. Suy ra $f(t) \le f(1) = 9$. Từ đó suy ra bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 11. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

Lời giải. Ta có $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) - \frac{1}{2}(x+y+z)^2\right) = 1.$$

Đặt $t = x+y+z$. Khi đó $t > 0$ và $P = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{3t} + \frac{t^2}{3}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3t}$ trên $(0;+\infty)$. Ta có

$$f'(t) = \frac{2}{3}t - \frac{2}{3t^2};\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ và } \lim_{x\to 0^+} f(t) = \lim_{x\to+\infty} f(t) = +\infty;\ f(1) = 1.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(1) = 1$, đạt khi trong ba số có 1 số bằng 1 và hai số bằng 6.

Ví dụ 12. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và thỏa mãn điều kiện $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5 \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Lời giải. Đặt $x = b+c-a$, $y = c+a-b$, $z = a+b-c$. Khi đó x, y, z là các số dương thỏa mãn $xyz = 1$ và ta có $a = \frac{y+z}{2}$, $b = \frac{z+x}{2}$, $c = \frac{x+y}{2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^5 \ge \frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $xy + yz + zx \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3$. Suy ra

$$\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6} = \frac{(x+y+z)^2}{6} - \frac{xy+yz+zx}{6} \le \frac{(x+y+z)^2}{6} - \frac{1}{2}.$$

Ta sẽ chứng minh $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^5 \ge \frac{(x+y+z)^2}{6} - \frac{1}{2}$.

Đặt $t = \dfrac{x+y+z}{3}$. Khi đó $t \ge 1$ và bất đẳng thức trở thành $t^5 \ge \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = t^5 - \dfrac{3}{2}t^2 + \dfrac{1}{2}$ trên $[1; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 5t^4 - 3t$; $f'(t) > 0$ với mọi $t \in [1; +\infty)$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Suy ra $f(t) \ge f(1) = 0$ với mọi $t \in [1; +\infty)$, hay bất đẳng thức cần chứng minh là đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x+y+z) = 3yz$, ta có

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \le 5(y+z)^3.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2009)

Phân tích và lời giải. Ta nhận thấy đẳng thức giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh là các biểu thức đẳng cấp và đối xứng với y và z. Vì vậy ta có biến đổi

Giả thiết $x(x+y+z) = 3yz \Leftrightarrow 1 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{x} = 3\dfrac{y}{x}.\dfrac{z}{x}$ và bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^3 + \left(1+\dfrac{z}{x}\right)^3 + 3\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\left(1+\dfrac{z}{x}\right)\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}\right) \le 5\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}\right)^3$.

Đặt $a = \dfrac{y}{x}$, $b = \dfrac{z}{x}$. Khi đó a, b là các số dương thỏa mãn $1 + a + b = 3ab$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(1+a)^3 + (1+b)^3 + 3(1+a)(1+b)(a+b) \le 5(a+b)^3$$

$$\Leftrightarrow 2 + 6a + 6b + 6a^2 + 6b^2 + 6ab \le 4a^3 + 12a^2b + 12ab^2 + 4b^3$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3(a+b) + 3(a+b)^2 - 3ab \le 2(a+b)^3$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b) + 3(a+b)^2 \le 2(a+b)^3$$

$$\Leftrightarrow 2 + 3(a+b) \le 2(a+b)^2. \qquad (1)$$

Đặt $t = a + b$. Khi đó từ $1 + a + b = 3ab$ ta suy ra

$$1 + t \le 3\frac{t^2}{4} \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 4 \ge 0 \Leftrightarrow t \ge 2.$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 \ge 0 \Leftrightarrow (t-2)(2t+1) \ge 0$, đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1 \Leftrightarrow x = y = z$.

Nhận xét. Bài toán này có nhiều cách giải khác

Cách 2. Đặt $a = y + z$, $b = z + x$ và $c = x + y$. Điều kiện $x(x+y+z) = 3yz$ trở thành $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$b^3 + c^3 + 3abc \le 5a^3$$

$$\Leftrightarrow (b+c)(b^2 - bc + c^2) + 3abc \le 5a^3$$

$$\Leftrightarrow (b+c)a^2 + 3abc \le 5a^3$$

$$\Leftrightarrow (b+c)a + 3bc \le 5a^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c)a + 3bc \le 2a^2 + 3(b^2 - bc + c^2)$$

$$\Leftrightarrow a(2a - b - c) + 3(b-c)^2 \ge 0. \qquad (2)$$

Mặt khác, từ $a^2 = b^2 + c^2 - bc \ge \dfrac{b^2 + c^2}{2} \ge \dfrac{(b+c)^2}{4}$ suy ra $2a \ge b + c$. Do đó bất đẳng thức (2) đúng. Dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$ hay $x = y = z$.

Cách 3. Đặt $t = y + z$. Suy ra $yz = \dfrac{x^2 + xt}{3}$. Vì $x(x+y+z) = 3yz \le \dfrac{3}{4}(y+z)^2$ nên $x^2 + tx \le \dfrac{3}{4}t^2 \Rightarrow (2x+t)^2 \le 4t^2 \Rightarrow 2x \le t$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(2x+y+z)^3 - 3(x+y)(x+z)(2x+y+z) + 3(x+y)(x+z)(y+z) \le 5(y+z)^3$$

$$\Leftrightarrow (2x+y+z)^3 - 6x\left(x^2 + x(y+z)\right) \le 5(y+z)^3.$$

Thay $t = y + z$, $yz = \dfrac{x^2 + xt}{3}$ và biến đổi, ta được $t(2x-t)(x+2t) \le 0$. Bất đẳng thức này đúng với $x > 0$, $t > 0$, $2x \le t$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$, $2x = t$ hay $x = y = z$.

Ví dụ 14. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 = c^3$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 - c^2 > 6(c-a)(c-b).$$

(Học sinh giỏi Ấn Độ, 2009)

Lời giải. Từ a, b, c dương và $a^3 + b^3 = c^3$ suy ra $c > a$ và $c > b$.

Ta có $a^3 + b^3 = c^3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{c}\right)^3 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^3 = 1.$

Đặt $x = \dfrac{a}{c}$, $y = \dfrac{b}{c}$, khi đó $0 < x,\ y < 1$ và $x^2 + y^2 = 1$.

Đặt $t = x + y$, khi đó $1 < t \le \sqrt[3]{4}$.

Ta có $t^3 - 3xyt = 1$ suy ra $xy = \dfrac{t^3 - 1}{3t}$ và $x^2 + y^2 = \dfrac{t^3 + 2}{3t}$. Do đó

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{(c-a)(c-b)} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(1-x)(1-y)} = \frac{t^3 - 3t + 2}{(t-1)^3} = \frac{t+2}{t-1}.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t+2}{t-1}$ với $1 < t \le \sqrt[3]{4}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{-3}{(1-t)^2}$; $f'(t) < 0$ với mọi $t \in \left(1; \sqrt[3]{4}\right)$.

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $\left(1; \sqrt[3]{4}\right]$. Do đó $f(t) \ge f\left(\sqrt[3]{4}\right) = \dfrac{\sqrt[3]{4} + 2}{\sqrt[3]{4} - 1} > 6$.

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 15. Cho các số dương a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện $ab + bc = 2c^2$ và $2a \le c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a}.$$

Lời giải. Từ giả thiết $ab + bc = 2c^2$ và $2a \le c$ suy ra $\dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{c} + 1\right)$ và $\dfrac{a}{c} \le \dfrac{1}{2}$.

Do đó $0 < \dfrac{c}{b} \le \dfrac{3}{4}$. Mặt khác $ab + bc = 2c^2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{c} = 2\dfrac{c}{b} - 1$.

Đặt $x = \dfrac{c}{b}$, $0 < x \le \dfrac{3}{4}$. Khi đó $\dfrac{a}{c} = 2x - 1$ và

$$P = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{a}{c} - \frac{b}{c}} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{c} - 1} + \frac{1}{1 - \frac{a}{c}} = \frac{2x^2 - x}{2x^2 - x - 1} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2-2x} = 1 - \frac{2}{3(2x+1)} + \frac{7}{6(1-x)}.$$

Xét hàm số

$$f(x) = 1 - \frac{2}{3(2x+1)} + \frac{7}{6(1-x)} \text{ với } 0 < x \le \frac{3}{4}.$$

Ta có $f'(x) = \dfrac{4}{3(2x+1)^2} + \dfrac{7}{6(1-x)^2} > 0$ với mọi $0 < x \le \dfrac{3}{4}$.

Suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\left(0; \dfrac{3}{4}\right]$. Do đó $f(x) \le f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{27}{5}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}3b=4c\\c=2a\end{cases}\Leftrightarrow 8a=3b=4c.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{27}{5}$, đạt được khi $8a=3b=4c>0.$

3.2 Đánh giá kết hợp đổi biến

3.2.1 Đánh giá ba biến đối xứng

Ví dụ 1. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2.$$

Phân tích và lời giải. Trước hết ta có $3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\ge(ab+bc+ca)^2$ nên $M\ge(ab+bc+ca)^2+3(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2$.

Chúng ta sẽ lựa chọn một biểu thức để đặt ẩn phụ và xét hàm. Ở đây ta sẽ chọn đặt $t=ab+bc+ca$. Chú ý rằng, với giả thiết a, b, c không âm thì $t=ab+bc+ca\ge 0$, dấu đẳng thức khi và chỉ có ít nhất hai trong ba số bằng 0.

Vì $a+b+c=1$ nên $t=ab+bc+ca\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}$, dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Đến đây, chúng ta sẽ biểu diễn $a^2+b^2+c^2$ theo ẩn t. Có ba cách để làm việc này. Thứ nhất, đánh giá $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}$, dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. Khi đó $M\ge t^2+3t+\frac{1}{3}$.

Với $t\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$ thì biểu thức $t^2+3t+\frac{1}{3}$ đạt giá trị nhỏ nhất $\frac{1}{3}$ khi $t=0$.

Suy ra $M\ge\frac{1}{3}$, nhưng dấu đẳng thức không xảy ra.

Thứ hai, đánh giá $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2=\frac{t}{3}$, dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. Khi đó $M\ge t^2+\frac{10}{3}t$.

Với $t\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$ thì biểu thức $t^2+\frac{10}{3}t$ đạt giá trị nhỏ nhất 0 khi $t=0$.

Suy ra $M\ge 0$, nhưng dấu đẳng thức không xảy ra.

Thứ ba, biến đổi

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=1-2(ab+bc+ca)=1-2t.$$

Khi đó $M \ge t^2+t+1$. Với $t \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$ thì biểu thức t^2+t+1 đạt giá trị nhỏ nhất 1 khi $t=0$. Suy ra $M \ge 1$, dấu đẳng thức xảy ra khi trong hai ba số a, b, c bằng 0, số còn lại bằng 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 1, đạt được khi trong hai ba số a, b, c bằng 0, số còn lại bằng 1.

Như vậy, việc lựa chọn biến mới là rất quan trọng. Trong nhiều trường hợp chúng ta không thể chọn ngay được mà phải dùng phép thử sai để lựa chọn.

Ví dụ 2. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối B, 2010)

Lời giải. Ta có $M \ge (ab+bc+ca)^2+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{1-(ab+bc+ca)}$.

Đặt $t=ab+bc+ca$, ta có $0 \le t \le \dfrac{(a+b+c)^2}{3}=\dfrac{1}{3}$.

Xét hàm $f(t)=t^2+3t+2\sqrt{1-2t}$ trên $\left[0;\frac{1}{2}\right)$.

Ta có $f'(t)=2t+3-\dfrac{2}{\sqrt{1-2t}}$, $f''(t)=2-\dfrac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}} \le 0$, dấu bằng chỉ xảy ra tại $t=0$. Suy ra $f'(t)$ nghịch biến trên $\left[0;\frac{1}{2}\right)$.

Xét trên đoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ ta có $f'(t) \ge f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{3}-2\sqrt{3}>0$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Do đó $f(t) \ge f(0)=2$ với mọi $t \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Vì vậy $M \ge f(t) \ge 2$ với mọi $t \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$.

$M=2$ khi $ab=bc=ca$, $ab+bc+ca=0$ và $a+b+c=1 \Leftrightarrow (a;\, b;\, c)$ là một trong các bộ số $(1;\,0;\,0)$, $(0;\,1;\,0)$, $(0;\,0;\,1)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 2, đạt khi $(a;\, b;\, c)$ là một trong các bộ số $(1;\,0;\,0)$, $(0;\,1;\,0)$, $(0;\,0;\,1)$.

Ví dụ 3. Cho các số thực $x,\, y,\, z \in (0;\,1)$ thỏa mãn $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

Lời giải. Ta có $\quad xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$

$$\Leftrightarrow xyz=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx=2xyz-1+(x+y+z).$$

Suy ra $\quad (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=2-2(x+y+z)+(x+y+z)^2-4xyz.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $xyz \le \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$.

Suy ra $x^2+y^2+z^2 \ge 2-2(x+y+z)+(x+y+z)^2-4\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$.

Đặt $t=x+y+z$, khi đó $0<t<3$ và $P \ge -\dfrac{4}{27}t^3+t^2-2t+2$.

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{4}{27}t^3+t^2-2t+2$ với $t \in (0;\,3)$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{4}{9}t^2+2t-2$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2} \\ t=3. \end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

t	1		$\frac{3}{2}$		3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{4}$, đạt được khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 4. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \ge b \ge c$ và $a^2+b^2+c^2=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca).$$

Lời giải. Ta tìm giá trị lớn nhất của

$$Q=-P=(a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca).$$

Nếu $ab+bc+ca \le 0$ thì $Q \le 0$.

Xét $ab+bc+ca>0$. Đặt $ab+bc+ca=x>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $(a-b)(b-c) \le \left(\dfrac{a-b+b-c}{2}\right)^2=\dfrac{(a-c)^2}{4}$.

Suy ra $(a-b)(b-c)(a-c) \le \dfrac{(a-c)^3}{4}$. (1)

Mặt khác ta lại có

$$4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=2(a-c)^2+2(a-b)^2+2(b-c)^2$$
$$\ge 2(a-c)^2+((a-b)+(b-c))^2=3(a-c)^2.$$

Suy ra $4(5-x) \ge 3(a-c)^2$. Từ đó ta có

$$x \le 5 \text{ và } a-c \le \sqrt{\frac{4}{3}(5-x)}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$Q \le \frac{1}{4}x\sqrt{\left(\frac{4}{3}(5-x)\right)^3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5-x)^3}. \quad (3)$$

Xét hàm số $f(x)=x\sqrt{(5-x)^3}$ trên $(0,5]$.

Ta có $f'(x)=\sqrt{5-x}\left(5-\dfrac{5}{2}x\right)$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2, x=5$ và $f(2)=6\sqrt{3}$,

$f(0)=f(5)=0$. Suy ra $\max\limits_{x\in[0,5]} f(x)=f(2)=6\sqrt{3}$. (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra giá trị lớn nhất của Q là 4, đạt khi $a=2, b=1, c=0$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là -4, đạt khi $a=2, b=1, c=0$.

Ví dụ 5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{3+ab+bc+ca}+\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$ ta có

$(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) = 9abc > 0$. Suy ra $ab+bc+ca \ge 3\sqrt{abc}$.

Ta có $(1+a)(1+b)(1+c) \ge \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$. Thật vậy

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc$$
$$\ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{(abc)^2}+abc = \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3.$$

Khi đó $P \le \dfrac{2}{3(1+\sqrt{abc})} + \dfrac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}$.

Đặt $t = \sqrt[6]{abc}$. Khi đó, vì $0 < abc \le \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1$, nên $t \in (0;1]$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2}{3(1+t^3)} + \dfrac{t^2}{1+t^2}$ trên $(0;1]$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{2t(t-1)(t^3-1)}{(1+t^3)^2(1+t^2)^2} > 0$ với mọi $t \in (0;1)$.

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0;1]$. Suy ra $\max\limits_{(0;1]} f(t) = f(1) = \dfrac{1}{6}$. Do đó $P \le \dfrac{1}{6}$, dấu đẳng thức khi $a=b=c=1$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{1}{6}$, đạt khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 6. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x+y+z-1)^2}{x^2y+y^2z+z^2x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) = (x^3+xy^2)+(y^3+yz^2)+(z^3+zx^2)+x^2y+y^2z+z^2x$$
$$\ge 3(x^2y+y^2z+z^2x).$$

Suy ra $x^2y+y^2z+z^2x \le x+y+z$. Do đó $P \ge \dfrac{(x+y+z-1)^2}{x+y+z} + \dfrac{1}{x+y+z}$.

Đặt $t = x+y+z$. Ta có $x^2+y^2+z^2 < (x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$.

Suy ra $t = x + y + z \in (\sqrt{3};\, 3]$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{(t-1)^2}{t} + \dfrac{1}{t} = t + \dfrac{10}{t} - 2$ trên $(\sqrt{3};\, 3]$.

Ta có $f'(t) = 1 - \dfrac{10}{t^2}$; $f'(t) < 0$ với mọi $t \in (\sqrt{3};\, 3]$.

Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $(\sqrt{3};\, 3]$. Do đó $\min\limits_{(\sqrt{3};\, 3]} f(t) = f(3) = \dfrac{13}{3}$.

Suy ra $P \geq \dfrac{13}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{13}{3}$, đạt khi $x = y = z = 1$.

Ví dụ 7. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 + \dfrac{324}{a + b + c}$.

Lời giải. Đặt $t = a + b + c$, khi đó ta có $t = a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)} = 3$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 + 9 \geq 6\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 6\left(t^2 - 6\right).$$

Suy ra $P \geq 6t^2 + \dfrac{324}{t} - 45$.

Xét hàm số $f(t) = 6t^2 + \dfrac{324}{t} - 45$ với $t \geq 3$. Ta có

$$f'(t) = 12t - \frac{324}{t^2};\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3;\ f'(t) > 0 \Leftrightarrow t > 3.$$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[3; +\infty)$. Do đó $f(t) \geq f(3) = 117$.

Suy ra $P \geq 117$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 117, đạt khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 8. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + \dfrac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq 4$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} 3(a^2 + b^2 + c^2) &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta lại có

$$a^3+ab^2\ge 2a^2b;\ b^3+bc^2\ge 2b^2c \text{ và } c^3+ca^2\ge 2c^2a.$$

Suy ra $3(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)>0.$

Do đó $VT\ge a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=a^2+b^2+c^2+\dfrac{9-(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}.$

Đặt $t=a^2+b^2+c^2$, khi đó $t=a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{1}{3}(a+b+c)^2=3$ và

$$VT\ge t+\frac{9-t}{2t}=t+\frac{9}{2t}-\frac{1}{2}.$$

Xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{9}{2t}-\dfrac{1}{2}$ trên $[3;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=1-\dfrac{9}{2t^2}>0$ với mọi $t\in[3;+\infty)$.

Suy ra $\min\limits_{[3;+\infty)}f(t)=f(3)=4$. Do đó $VT\ge 4=VP$, điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 9. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a+b)(b+c)(c+a)+\frac{72}{\sqrt{a+b+c+1}}.$$

Lời giải. Ta có $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-1$.

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$ ta có

$$(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c).$$

Suy ra $ab+bc+ca\ge\sqrt{3(a+b+c)}$.

Do đó ta có $P\ge(a+b+c)\sqrt{3(a+b+c)}+\dfrac{72}{\sqrt{a+b+c+1}}-1.$

Đặt $t=a+b+c$. Khi đó $t=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$.

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{3t}+\dfrac{72}{\sqrt{t+1}}-1$ trên $[3;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{3\sqrt{3t(t+1)^3}-72}{2\sqrt{(t+1)^3}}$; $f'(t)>0$ với mọi $t>3$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[3;+\infty)$. Do đó $\min\limits_{[3;+\infty)}f(t)=f(3)=44$.

Suy ra $P \ge 44$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 44, đạt khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 10. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{16}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 1}} + \frac{xy + yz + zx + 1}{x + y + z}.$$

Lời giải. Ta có $P = \dfrac{32}{\sqrt{2\left(9 - (x^4 + y^4 + z^4)\right) + 4}} + \dfrac{(x + y + z)^2 - 1}{2(x + y + z)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$x^4 + x + x \ge 3x^2,\ y^4 + y + y \ge 3y^2,\ z^4 + z + z \ge 3z^2.$$

Suy ra $x^4 + y^4 + z^4 \ge 9 - 2(x + y + z)$.

Do đó ta có $P \ge \dfrac{32}{\sqrt{4(x + y + z) + 4}} + \dfrac{(x + y + z)^2 - 1}{2(x + y + z)}$.

Đặt $t = x + y + z$, khi đó $t \in \left[\sqrt{3}; 3\right]$ và $P \ge \dfrac{16}{\sqrt{t + 1}} + \dfrac{t^2 - 1}{2t}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{16}{\sqrt{t + 1}} + \dfrac{t^2 - 1}{2t}$ với $t \in \left[\sqrt{3}; 3\right]$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{2t^2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{8}{\sqrt{(t + 1)^3}} \le \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{8}{\sqrt{4^3}} < 0$ với mọi $t \in \left[\sqrt{3}; 3\right]$.

Suy ra $\min\limits_{\left[\sqrt{3}; 3\right]} f(t) = f(3) = \dfrac{28}{3}$. Do đó $P \ge \dfrac{28}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{28}{3}$, đạt khi $x = y = z = 1$.

Ví dụ 11. Cho các số thực a, b, $c \in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = abc + \frac{1}{1 + a^3} + \frac{1}{1 + b^3} + \frac{1}{1 + c^3}.$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh với $0 \le x,\ y \le 1$ thì $\dfrac{1}{1 + x^2} + \dfrac{1}{1 + y^2} \le \dfrac{2}{1 + xy}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ hoặc $xy = 1$.

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với $(xy-1)(x-y)^2 \le 0$, đúng.

Áp dụng bất đẳng thức trên với $a,\ b,\ c \in [0;\ 1]$ ta có

$$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3} \le \frac{2}{1+\sqrt{a^3b^3}} \text{ và } \frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+abc} \le \frac{2}{1+\sqrt{abc^4}}.$$

Do đó $\dfrac{1}{1+a^3}+\dfrac{1}{1+b^3}+\dfrac{1}{1+c^3}+\dfrac{1}{1+abc} \le 2\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{a^3b^3}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{abc^4}}\right) \le \dfrac{4}{1+abc}$.

Suy ra $\dfrac{1}{1+a^3}+\dfrac{1}{1+b^3}+\dfrac{1}{1+c^3} \le \dfrac{3}{1+abc}$. Do đó

$$P \le abc + \frac{3}{1+abc}.$$

Đặt $t = abc$, với $t \in [0;\ 1]$.

Xét hàm số $f(t) = t + \dfrac{3}{1+t}$ trên $[0;\ 1]$.

Ta có $f'(t) = 1 - \dfrac{3}{(1+t)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}-1$.

Suy ra bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{3}-1$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	$2\sqrt{3}-1$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P \le 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=0$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 3, đạt khi $a=b=c=0$.

Ví dụ 12. Cho các số dương $a,\ b,\ c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-2} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Lời giải. Ta có

$$P = \sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-2} + \frac{8}{\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)}$$

$$\ge \sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-2}+\frac{8.27}{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\right)^3}.$$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3$. Khi đó $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}+3=6$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t-5}+\frac{8.27}{t^3}$ trên $[6;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{5-t}}-\frac{3.8.27}{t^4}=\frac{t^4-6^4.\sqrt{t-5}}{2t^4\sqrt{t-5}}$.

Vì $\sqrt{t-5}\le\frac{t-5+1}{2}=\frac{1}{8}2.2.(t-4)\le\frac{1}{8.27}(t-4+2+2)^3=\frac{t^3}{6^3}$

nên $6^4.\sqrt{t-5}\le 6t^3\le t^4$ với mọi $t\ge 6$.

Do đó $f'(t)\ge 0$ với mọi $t\ge 6$. Suy ra $\min\limits_{[6;+\infty)} f(t)=f(6)=2$. Do đó ta có $P\ge 2$, dấu đẳng thức khi $a=b=c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2, đạt khi $a=b=c$.

Ví dụ 13. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2\le 2(y+1)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{2xy}+\sqrt{2yz}+\frac{1}{x+y+z+1}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có

$$2(y+1)+6\ge(x^2+1)+(y^2+4)+(z^2+1)\ge 2x+4y+2z.$$

Suy ra $4\ge x+y+z>0$. Đặt $x+y+z=t$, $0<t\le 4$.

Khi đó ta có $P\le x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+z+\frac{1}{x+y+z+1}=x+y+z+\frac{1}{x+y+z+1}$

$$=t+\frac{1}{t+1}, 0<t\le 4. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t+\frac{1}{t+1}, 0<t\le 4$ ta được $f(t)\le f(4)=\frac{21}{5}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{21}{5}$, đạt khi $x=z=1, y=2$.

Ví dụ 14. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=5(a+b+c)-2ab$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a+b+c+48\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b+c}}\right).$$

Lời giải. Ta có $a^2+b^2+c^2=5(a+b+c)-2ab \Leftrightarrow (a+b)^2+c^2=5(a+b+c)$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $(a+b)^2+c^2 \ge \frac{1}{2}(a+b+c)^2$.

Suy ra $\frac{1}{2}(a+b+c)^2 \le 5(a+b+c)$. Do đó $0<a+b+c\le 10$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\sqrt{\frac{a+10}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+10}{3}.4}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a+10}{3}+4\right)=\frac{a+22}{12}.\text{ Suy ra }\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}}\ge\frac{12}{a+22}.$$

$$\sqrt[3]{b+c}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{(b+c).8.8}\le\frac{1}{4}.\frac{b+c+8+8}{3}=\frac{b+c+16}{12}.$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt[3]{b+c}}\ge\frac{12}{b+c+16}$.

Do đó $P\ge a+b+c+48.12\left(\frac{1}{a+22}+\frac{1}{b+c+16}\right)$

$$\ge a+b+c+48.12.\frac{4}{a+b+c+38}=a+b+c+\frac{2304}{a+b+c+38}.$$

Đặt $t=a+b+c$, khi đó $t\in(0;10]$ và $P\ge t+\frac{2304}{t+38}$.

Xét hàm số $f(t)=t+\frac{2304}{t+38}$ với $t\in(0;10]$.

Ta có $f'(t)=1-\frac{2304}{(t+38)^2}=\frac{(t-10)(t+86)}{(t+38)^2}$; $f'(t)<0$ với mọi $t\in(0;10)$. Do đó $f(t)$ nghịch biến trên $(0;10]$. Suy ra $f(t)\ge f(10)=58$ với mọi $t\in(0;10]$.

Do đó $P\ge 58$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a+b+c=10\\a+b=c\\\frac{a+10}{3}=4\\b+c=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=5\end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 58, đạt được khi $a=2, b=3, c=5$.

Ví dụ 15. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a\ge b\ge c$ và điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=2ab+3bc+3ca+\frac{6}{a+b+c}.$$

Lời giải. Ta có $P=(a+b+c)^2-3+c(a+b)+\dfrac{6}{a+b+c}$.

Từ giả thiết a, b, c không âm thỏa mãn $a\ge b\ge c$ và $a^2+b^2+c^2=3$ suy ra $c\le 1$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có

$$0\le c(a+b)=\frac{1}{2}.2c.(a+b)\le\frac{1}{2}\left(\frac{2c+a+b}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}\left(\frac{a+b+c+1}{2}\right)^2.$$

Suy ra

$$(a+b+c)^2-3+\frac{6}{a+b+c}\le P\le(a+b+c)^2+\frac{1}{8}(a+b+c+1)^2-3+\frac{6}{a+b+c}.$$

Đặt $t=a+b+c$, khi đó $3=a^2+b^2+c^2\le(a+b+c)^2\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=9$ nên suy ra $\sqrt{3}\le t\le 3$ và

$$t^2+\frac{6}{t}-3\le P\le t^2+(t+1)^2+\frac{6}{t}-3.$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+\dfrac{6}{t}-3$ với $\sqrt{3}\le t\le 3$.

Ta có $f'(t)=2t-\dfrac{6}{t^2}=\dfrac{2\left(t^3-3\right)}{t^2}>0$ với mọi $t\in\left[\sqrt{3};3\right]$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{3};3\right]$. Suy ra $P\ge\min\limits_{[\sqrt{3};3]}f(t)=f\left(\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c=b=0$, $a=\sqrt{3}$.

Xét hàm số $g(t)=t^2+(t+1)^2+\dfrac{6}{t}-3$ với $\sqrt{3}\le t\le 3$.

Ta có $g'(t)=4t+1-\dfrac{6}{t^2}=\dfrac{2\left(2t^3-3\right)}{t^2}+1>0$ với mọi $t\in\left[\sqrt{3};3\right]$. Do đó hàm $g(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{3};3\right]$. Suy ra $P\le\max\limits_{[\sqrt{3};3]}g(t)=g(3)=10$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $2\sqrt{3}$, đạt khi $c=b=0$, $a=\sqrt{3}$; giá trị lớn nhất của P là 10, đạt khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 16. Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}-\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$a^2+b^2+c^2+1\ge\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(c+1)^2\ge\frac{1}{4}(a+b+c+1)^2,$$

$$(a+1)(b+1)(c+1)\le\left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3.$$

Suy ra $P\le\dfrac{2}{a+b+c+1}-\dfrac{54}{(a+b+c+3)^3}$.

Đặt $t=a+b+c+1,\ t>1$. Khi đó ta có $P\le\dfrac{2}{t}-\dfrac{54}{(t+2)^3}$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{54}{(t+2)^3}$ trên $(1;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{54.3}{(t+2)^4}=0\Leftrightarrow 9t=(t+2)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=4\end{array}\right.$; $f'(t)>0\Leftrightarrow 1<t<4$.

Suy ra bảng biến thiên

t	1		4		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $P\le\dfrac{1}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=4\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{1}{4}$, đạt được khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 17. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối B, 2013)

Lời giải. Ta có

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}\le(a+b)\frac{a+b+4c}{2}=\frac{a^2+b^2+2ab+4ac+4bc}{2}$$
$$\le 2(a^2+b^2+c^2).$$

Đặt $t=\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}$. Khi đó $t>2$ và $P\le\frac{4}{t}-\frac{9}{2(t^2-4)}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{4}{t}-\frac{9}{2(t^2-4)}$, với $t>2$.

Ta có $f'(t)=-\frac{4}{t^2}+\frac{9t}{(t^2-4)^2}=\frac{-(t-4)(4t^3+7t^2-4t-16)}{t^2(t^2-4)^2}$.

Với $t>2$ ta có $4t^3+7t^2-4t-16=4(t^3-4)+t(7t-4)>0$.

Do đó $f'(t)=0\Leftrightarrow t=4$.

Suy ra bảng biến thiên

t	2		4		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{5}{8}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P\le\frac{5}{8}$. Khi $a=b=c=2$ ta có $P=\frac{5}{8}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{8}$.

Nhận xét. Bài toán này có thể giải bằng nhiều cách khác, sau đây ta giới thiệu thêm một cách giải.

Ta có $a^2+b^2+c^2+4\ge\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(c+2)^2\ge\frac{1}{4}(a+b+c+2)^2$;

$$3(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}\le(3a+3b)\left(\frac{a+b+4c}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{4a+4b+4c}{2}\right)^2.$$

Suy ra $P\le\frac{8}{a+b+c+2}-\frac{27}{2(a+b+c)^2}$.

Đặt $t=a+b+c$ với $t>0$. Khi đó $P\le\frac{8}{t+2}-\frac{27}{2t^2}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{8}{t+2}-\frac{27}{2t^2}$ trên $(0;+\infty)$ ta được $\max\limits_{(0;+\infty)}f(t)=f(6)=\frac{5}{8}$. Suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{8}$, đạt khi $a=b=c=2$.

Ví dụ 18. Cho các số dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}-\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}.$$

(Học sinh giỏi Tỉnh Nghệ An, 2013)

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}=a+\frac{1}{2}\sqrt{a.4b}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{a.4b.16c}$$

$$\le a+\frac{1}{2}.\frac{a+4b}{2}+\frac{1}{4}.\frac{a+4b+16c}{3}=\frac{4}{3}(a+b+c).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=4b=16c$.

Suy ra $P\ge\dfrac{3}{2(a+b+c)}-\dfrac{3}{\sqrt{a+b+c}}$.

Đặt $t=a+b+c$. Khi đó $t>0$ và $P\ge\dfrac{3}{2t}-\dfrac{3}{\sqrt{t}}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{3}{2t}-\dfrac{3}{\sqrt{t}}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{3}{2t\sqrt{t}}-\dfrac{3}{2t^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\dfrac{3}{2t\sqrt{t}}=\dfrac{3}{2t^2}\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t)=f(1)=-\dfrac{3}{2}$. Do đó $P\ge-\dfrac{3}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a+b+c=1\\ a=4b=16c\end{cases}\Leftrightarrow a=\dfrac{16}{21}, b=\dfrac{4}{21}, c=\dfrac{1}{21}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\dfrac{3}{2}$, đạt khi $a=\dfrac{16}{21}, b=\dfrac{4}{21}, c=\dfrac{1}{21}$.

Ví dụ 19. Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2a+b+\sqrt{8bc}}-\frac{8}{\sqrt{2b^2+2(a+c)^2+3}}.$$

Lời giải. Ta có $\sqrt{8bc}=2\sqrt{b.2c}\le b+2c$. Suy ra $\dfrac{1}{2a+b+\sqrt{8bc}}\ge\dfrac{1}{2(a+b+c)}$.

Mặt khác, $\sqrt{2(a+c)^2+2b^2}\ge(a+c)+b$. Suy ra

$$\frac{-8}{3+\sqrt{2(a+c)^2+2b^2}}\ge\frac{-8}{3+a+b+c}.$$

Do đó $P\ge\dfrac{1}{2(a+b+c)}-\dfrac{8}{3+a+b+c}$. (1)

Đặt $a+b+c=t$, $t>0$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{2t}-\dfrac{8}{3+t}$, $t>0$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{1}{2t^2}+\dfrac{8}{(3+t)^2}=\dfrac{3(t-1)(5t+3)}{2t^2(3+t)^2}$, $t>0$. Suy ra $f'(t)\ge0\Leftrightarrow t\ge1$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t)\ge f(1)=-\dfrac{3}{2}$ với mọi $t>0$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $P\ge-\dfrac{3}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a+b+c=1\\ b=2c\\ b=a+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c=\dfrac{1}{4}\\ b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\dfrac{3}{2}$, đạt được khi $a=c=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 20. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1+a^2}{1+b^2}+\frac{1+b^2}{1+c^2}+\frac{1+c^2}{1+a^2}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a,b,c\}$.

Khi đó $\frac{1}{3} \le a \le 1$ và ta có

$$\frac{1+b^2}{1+c^2}+\frac{1+c^2}{1+a^2} \le \frac{1+b^2}{1+c^2}+\frac{c^2}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}=\frac{1+b^2+c^2}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}$$
$$\le 1+(b+c)^2+\frac{1}{1+a^2}.$$

Suy ra $P \le \frac{1+a^2}{1+b^2}+1+(b+c)^2+\frac{1}{1+a^2} \le 2+a^2+(1-a)^2+\frac{1}{1+a^2}.$

Xét hàm số $f(t)=t^2+(1-t)^2+\frac{1}{1+t^2}$ trên $\left[\frac{1}{3};1\right]$. Ta có

$$f'(t)=4t-2-\frac{2t}{(1+t)^2};\ f''(t)=\frac{4(1+t^2)^3+6t^2-2}{(1+t^2)^3}>0 \text{ với mọi } t \in \left[\frac{1}{3};1\right]$$

và $f'(1).f\left(\frac{1}{3}\right)<0$. Suy ra tồn tại duy nhất $t_0 \in \left(\frac{1}{3};1\right)$ thỏa mãn $f'(t_0)=0$.

Suy ra bảng biến thiên

t	$\frac{1}{3}$		t_0		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{131}{90}$	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $P \le 2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=1, b=c=0$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{7}{2}$, đạt được khi trong ba số có hai số bằng 0, số còn lại bằng 1.

Nhận xét. 1. Chúng ta có cách giải chuyển về xét hàm bậc hai như sau

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a, b, c\}$.

Khi đó $\frac{1}{3} \le a \le 1$ và ta có

$$P=\frac{1+a^2}{1+b^2}+\frac{1+b^2}{1+c^2}+\frac{1+c^2}{1+a^2} \le 1+a^2+1+b^2+\frac{c^2}{1+a^2}+\frac{1}{1+a^2}$$

$$\le 2+a^2+b^2+c^2+\frac{1+a^2-a^2}{1+a^2}\le 2+a^2+(b+c)^2+1-\frac{a^2}{1+a^2}$$

$$\le 3+a^2+(1-a)^2-\frac{a^2}{2}=\frac{3}{2}a^2-2a+4.$$

Xét hàm số $f(a)=\frac{3}{2}a^2-2a+4$ trên $\left[\frac{1}{3};1\right]$. Ta có bảng biến thiên

a	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1
$f(a)$	$\frac{7}{2}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{7}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P\le\frac{7}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=1,\ b=c=0$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{7}{2}$, đạt được khi trong ba số có hai số bằng 0, số còn lại bằng 1.

2. Ta cũng có thể đánh giá bằng bất đẳng thức

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Khi đó, ta có

$$\frac{a^2+1}{b^2+1}=a^2+1-\frac{b^2\left(a^2+1\right)}{b^2+1}\le a^2+1-\frac{b^2\left(a^2+1\right)}{2}.$$

Làm tương tự với hai biểu thức còn lại ta được

$$P\le a^2+b^2+c^2+3-\frac{a^2\left(b^2+1\right)+b^2\left(c^2+1\right)+c^2\left(a^2+1\right)}{2}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}{2}+3$$

$$\le\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{2}+3=\frac{7}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a;b;c)$ là hoán vị của $(1;0;0)$.

3. Bằng các cách tương tự ta chứng minh được kết quả tổng quát sau

Với các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$, ta có

$$\frac{1+a^k}{1+b^k}+\frac{1+b^k}{1+c^k}+\frac{1+c^k}{1+a^k}\le\frac{7}{2}.$$

4. Ta có bài toán tương tự sau

Cho các số thực x, y, z thuộc đoạn $[0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3+3}{y^2+2}+\frac{y^3+3}{z^2+2}+\frac{z^3+3}{x^2+2}.$$

Lời giải. Vì $a, b\in[0; 1]$ nên ta có

$$\frac{a^3+3}{b^2+2}\le\frac{a^2+3}{b^2+2}=(a^2+3).\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2}{b^2+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+3)-\frac{1}{2}(a^2+3).\frac{b^2}{b^2+2}$$

$$\le\frac{1}{2}(a^2+3)-\frac{1}{2}(a^2+3).\frac{b^2}{3}=\frac{1}{2}(a^2-b^2)+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}a^2b^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a, b\in\{0, 1\}$.

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{b^3+3}{c^2+2}\le\frac{1}{2}(b^2-c^2)+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}b^2c^2;$$

$$\frac{c^3+3}{a^2+2}\le\frac{1}{2}(c^2-a^2)+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}c^2a^2.$$

Suy ra $P\le\frac{9}{2}-\frac{1}{2}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\le\frac{9}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a, b, c\in\{0, 1\}$ và $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=0$ hay trong ba số a, b, c có nhiều nhất một số bằng 1, các số còn lại bằng 0.

Suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{9}{2}$, đạt được khi trong ba số a, b, c có nhiều nhất một số bằng 1, các số còn lại bằng 0.

Ví dụ 21. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn các điều kiện $a>b>c$ và $3ab+5bc+7ca\le 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{32}{(a-b)^4}+\frac{1}{(b-c)^4}+\frac{1}{(c-a)^4}.$$

(Học sinh giỏi Tỉnh Nghệ An, 2013 - 2014)

Lời giải. Vì $a>b>c\ge 0$ nên từ giả thiết suy ra $3ab\le 3ab+5bc+7ca\le 9$.

Suy ra $ab\le 3$ và $P\ge\frac{32}{(a-b)^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{a^4}$.

Suy ra $P \geq \frac{a^2b^2}{9}\left(\frac{32}{(a-b)^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{a^4}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{32a^2b^2}{\left(a^2+b^2-2ab\right)^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{32}{\left(\frac{a^2+b^2}{ab}-2\right)^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{32}{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)^2}+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-2\right).$$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, khi đó $t>2$ và $P \geq \frac{1}{9}\left(\frac{32}{(t-2)^2}+t^2-2\right)$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{32}{(t-2)^2}+t^2-2$ với $t>2$.

Ta có $f'(t)=-\frac{64}{(t-2)^3}+2t$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t(t-2)^3=32 \Leftrightarrow t=4$.

Suy ra bảng biến thiên

t	2		4		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	10	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $P \geq \frac{10}{9}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=4$ hay $ab=3$ và $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4$.

Ví dụ 22. Cho các số thực không âm phân biệt a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right).$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a>b>c\geq 0$. Đặt $x=a-b$, $y=b-c$. Khi đó

$$(x+y)^2+y^2=a^2+b^2+c^2-c\left((2(a+b)-c\right)\leq a^2+b^2+c^2.$$

Suy ra $P \geq \left((x+y)^2+y^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right)$.

$$= 2 + \frac{(x+y)^2}{x^2} + \frac{(x+y)^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$= 2 + (1+t)^2 + \frac{(1+t)^2}{t^2} + t^2 + \frac{t^2}{(1+t)^2}$$

$$= 3 + 2t(t+1) + \frac{(1+t)^4 + t^4}{t^2(1+t)^2}$$

$$= 3 + 2t(t+1) + \frac{2t^2(t+1)^2 + 4t(t+1) + 1}{t^2(1+t)^2}$$

$$= 5 + 2t(t+1) + \frac{4}{t(t+1)} + \frac{1}{t^2(1+t)^2}, \text{ với } t = \frac{y}{x} > 0.$$

Đặt $u = t(t+1)$, $u > 0$. Khi đó $P \geq 5 + 2u + \frac{4}{u} + \frac{1}{u^2}$.

Xét hàm $f(u) = 5 + 2u + \frac{4}{u} + \frac{1}{u^2}$, $u > 0$.

Ta có $f'(x) = 2 - \frac{4}{u^2} - \frac{2}{u^3}$; $f'(u) = 0 \Leftrightarrow (u+1)(u^2 - u - 1) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra bảng biến thiên

u	0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(u)$		$-$	0	$+$	
$f(u)$		$\searrow$	$\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P \geq \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $c = 0$, và

$$\frac{b}{a-b}\left(\frac{b}{a-b} + 1\right) = \frac{ab}{(a-b)^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{5}+3}{2} + \sqrt{\frac{3\sqrt{5}-1}{2}}}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét. Ta có cách giải khác như sau

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$.

Khi đó $a \ge a - c > 0$, $b \ge b - c > 0$. Suy ra

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right) \ge \left(a^2+b^2\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

Ta có $\left(a^2+b^2\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) = \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2}+\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$

$$= \frac{(a-b)^4+4ab(a-b)^2+4a^2b^2}{a^2b^2}+\frac{(a-b)^2+2ab}{(a-b)^2}$$

$$= 5+\left(\frac{(a-b)^2}{ab}\right)^2+\frac{4(a-b)^2}{ab}+\frac{2ab}{(a-b)^2}.$$

Đặt $t = \frac{(a-b)^2}{ab}$. Khi đó $t > 0$ và $P \ge t^2+4t+\frac{2}{t}+5$.

Xét hàm số $f(t) = t^2+4t+\frac{2}{t}+5$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = 2t+4-\frac{2}{t^2} = \frac{2(t+1)(t^2+t-1)}{t^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Và $f'(t)$ đổi dấu từ âm sang dương khi t đi qua $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Do đó $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $P \ge \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $c = 0$ và $\frac{(a-b)^2}{ab} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ví dụ 23. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+ab-2bc-2ca = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

Lời giải. Ta có $a^2+b^2+c^2+ab-2bc-2ca = 0 \Leftrightarrow (a+b-c)^2 = ab$

và $(a+b)\sqrt{ab} \ge 2\sqrt{ab}\sqrt{ab} = 2ab$. Suy ra $\frac{\sqrt{ab}}{a+b} \ge \frac{2ab}{(a+b)^2}$.

Khi đó $P \geq \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{(a+b)^2}$

$$= \frac{c^2}{2ab} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{(a+b)^2} + \frac{c^2}{2ab} \geq \frac{4c^2}{(a+b)^2} + \frac{2c}{a+b}.$$

Ta có $(a+b-c)^2 = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, suy ra $\left(1-\frac{c}{a+b}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = 4t^2 + 2t$ trên $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. Ta có hàm $f(t)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ nên giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ là $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

Do đó $P \geq 2$, dấu đẳng thức khi $a = b = c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2, đạt khi $a = b = c$.

Ví dụ 24. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thuộc đoạn [0; 2]. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $0 \leq c < b < a \leq 2$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{1}{(a-b)^2} + (a-b) + (a-b) \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(a-b)^2}.(a-b).(a-b)} = 3;$$

$$\frac{1}{(b-c)^2} + (b-c) + (b-c) \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(b-c)^2}.(b-c).(b-c)} = 3.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên ta được $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + 2(a-c) \geq 6$.

Suy ra $P \geq \frac{1}{(a-c)^2} - 2(a-c) + 6$.

Đặt $t = a - c$, khi đó $t \in (0; 2]$ và $P \geq \frac{1}{t^2} - 2t + 6$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t^2} - 2t + 6$ trên $(0; 2]$.

Ta có $f'(t) = -\frac{1}{t^3} - 2 < 0$ với mọi $t \in (0; 2]$.

Suy ra $\min\limits_{[0;\,2]} f(t) = f(2) = \dfrac{9}{4}$.

Do đó $P \ge \dfrac{9}{4}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 2,\ b = 1,\ c = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{9}{4}$, đạt được khi $a = 2,\ b = 1,\ c = 0$ hoặc các hoán vị.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải các như sau

Không mất tính tổng quát, giả sử $0 \le a < b < c \le 2$.

Từ $0 < c - a \le 2$ suy ra $\dfrac{1}{(c-a)^2} \ge \dfrac{1}{4}$. (1)

Từ $0 < c - b \le 2 - b$ suy ra $\dfrac{1}{(b-c)^2} \ge \dfrac{1}{(2-b)^2}$. (2)

Từ $0 < b - a \le b$ suy ra $\dfrac{1}{(a-b)^2} \ge \dfrac{1}{b^2}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $P \ge \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{(2-b)^2} + \dfrac{1}{4}$.

Xét hàm số

$$f(b) = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(2-b)^2} + \frac{1}{4} \text{ với } b \in (0;\,2).$$

Ta có

$$f'(b) = -\frac{2}{b^3} + \frac{2}{(2-b)^3};\ f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = 1.$$

Suy ra bảng biến thiên

b	0		1		2
$f'(b)$		$-$	0	$+$	
$f(b)$		$\searrow$	$\dfrac{9}{4}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra

$$\min P = \min_{(0;\,2)} f(b) = f(1) = \frac{9}{4},$$

đạt được khi $(a;\,b;\,c) = (0;\,1;\,2)$ và các hoán vị.

3.2.2 Đánh giá hai biến đối xứng

Với mục đích đưa về xét hàm một biến, khi gặp biểu thức ba biến số, trong đó có hai biến vai trò giống nhau chúng ta có thể sử dụng các bất đẳng thức để đánh giá hai biến đó. Kết hợp với giả thiết ràng buộc giữa các biến, chúng ta đưa được về biểu thức một biến.

Ví dụ 25. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+xy}}+\frac{2\sqrt{3}}{1+z}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+xy}}\ge\frac{2}{\sqrt[4]{(x^2+xy)(y^2+xy)}}\ge\frac{2}{\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2+xy}{2}}}\ge\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Kết hợp giả thiết $x^2+y^2+z^2=1$ ta có

$$P\ge\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\sqrt{12}}{z+1}=\frac{2}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{\sqrt{12}}{z+1}.$$

Xét hàm $f(z)=\dfrac{2}{\sqrt{1-z^2}}+\dfrac{\sqrt{12}}{z+1}$ trên $(0;1)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{2z}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}-\dfrac{\sqrt{12}}{(1+z)^2}=\dfrac{2z(1+z)^2-\sqrt{12}(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}{(1+z)^2(1-z^2)\sqrt{1-z^2}}$,

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2z(1+z)^2-\sqrt{12}(1-z^2)\sqrt{1-z^2}=0\Leftrightarrow 4z^3-8z^2+9z-3=0$$

$$\Leftrightarrow(2z-1)(2z^2-4z+3)=0\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}.$$

Suy ra bảng biến thiên

z	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$		$\searrow$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P \ge \frac{8\sqrt{3}}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$x = y,\ z = \frac{1}{2},\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{3}}{2},\ z = \frac{1}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, đạt được khi $x = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 26. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)} + \frac{18}{a + b + 2c}.$$

Lời giải. Ta chứng minh $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right) \ge \left(\frac{2}{a+b} - 1\right)^2$. (*)

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \ge \frac{4}{(a+b)^2} - \frac{4}{a+b}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ab} - \frac{4}{(a+b)^2} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)^2} \ge \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(1 - a - b) \ge 0$, đúng vì $a + b < 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Áp dụng (*) và giả thiết $a + b + c = 1$ ta có

$$P \ge \frac{2}{a+b} - 1 + \frac{18}{a+b+2c} = \frac{2}{1-c} + \frac{18}{1+c} - 1.$$

Xét hàm $f(c) = \frac{2}{1-c} + \frac{18}{1+c} - 1$ trên $(0;\ 1)$.

Ta có $f'(c) = \frac{2}{(1-c)^2} - \frac{18}{(1+c)^2}$; $f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

c	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(c)$		$-$	0	$+$	
$f(c)$		$\searrow$	15	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P \geq 15$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 15, đạt được khi $a = b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Ta có thể đánh giá cách khác như sau

Áp dụng bất đẳng thức Côsi và giả thiết $a + b + c = 1$ ta có

$$\frac{(a+c)(b+c)}{ab} = \frac{ab + (a+b)c + c^2}{ab} = 1 + \frac{(1-c)c + c^2}{ab} = 1 + \frac{c}{ab}$$

$$\geq 1 + \frac{c}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = 1 + \frac{4c}{(1-c)^2} = \left(\frac{c+1}{1-c}\right)^2.$$

Suy ra

$$P = \sqrt{\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)} + \frac{18}{a+b+2c} = \sqrt{\frac{(a+c)(b+c)}{ab}} + \frac{18}{a+b+2c} \geq \frac{c+1}{1-c} + \frac{18}{1+c}.$$

Tiếp tục xét hàm như trên ta được kết quả.

Ví dụ 27. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Lời giải. Ta chứng minh với a, b, c dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$ thì

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Thật vậy, vì $ab + bc + ca = 1$ nên

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} = \frac{a(b+c) + b(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c)^2}} \leq \frac{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b \\ ab + bc + ca = 1. \end{cases}$

Suy ra $P \leq \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{3c}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{3c+1}{\sqrt{1+c^2}}$.

Xét hàm số $f(c)=\dfrac{3c+1}{\sqrt{1+c^2}}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(c)=\dfrac{3-c}{\left(1+c^2\right)\sqrt{1+c^2}}$; $f'(c)=0\Leftrightarrow c=3$.

Suy ra bảng biến thiên

c	0		3		$+\infty$
$f'(c)$		$+$	0	$-$	
$f(c)$		$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P\le\sqrt{10}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=b,\ c=3\\ ab+bc+ca=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=\sqrt{10}-3\\ c=3.\end{cases}$

Nhận xét. Chúng ta có cách giải khác bằng phương pháp lượng giác hóa

Từ điều kiện a,b,c dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$ ta có thể đặt

$$a=\tan\frac{A}{2},\ b=\tan\frac{B}{2},\ c=\tan\frac{C}{2},$$

với A,B,C là ba góc của một tam giác. Khi đó

$$P=\frac{1}{2}\sin A+\frac{1}{2}\sin B+3\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+3\sin\frac{C}{2}$$

$$\le\cos\frac{C}{2}+3\sin\frac{C}{2}\le\sqrt{10}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\cos\dfrac{A-B}{2}=1\\ \tan\dfrac{C}{2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=\sqrt{10}-3\\ c=3.\end{cases}$

Ví dụ 28. Cho các số thực không âm a,b,c với $a\ge b\ge c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{3}{(c+1)^2}+\frac{ab+bc+ca}{4}.$$

Lời giải. Ta chứng minh với các số thực không âm x,y thì

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\ge\frac{1}{1+xy}. \qquad (*)$$

Thật vậy, $(*)\Leftrightarrow xy(x-y)^2+(xy-1)^2\ge 0$, luôn đúng.

Dấu đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=1$.

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có

$$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+2\left(\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}\right)+\frac{ab+bc+ca}{4}$$

$$\ge\frac{1}{1+ac}+\frac{2}{1+bc}+\frac{ab+bc+ca}{4}=\left(\frac{1}{1+ac}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+bc}\right)+\frac{ab+bc+ca}{4}$$

$$\ge\frac{9}{ac+bc+bc+3}+\frac{ab+bc+ca}{4}.$$

Vì $a\ge b\ge c$ nên $P\ge\dfrac{9}{ab+bc+ca+3}+\dfrac{ab+bc+ca}{4}$.

Đặt $t=ab+bc+ca$. Khi đó $t>0$ và $P\ge\dfrac{9}{t+3}+\dfrac{t}{4}$.

Xét hàm

$$f(t)=\frac{9}{t+3}+\frac{t}{4} \text{ trên } (0;+\infty).$$

Ta có

$$f'(t)=-\frac{9}{(t+3)^2}+\frac{1}{4};\ f'(t)=0\Leftrightarrow(t+3)^2=36\Leftrightarrow t=3.$$

Suy ra bảng biến thiên

t	0		3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P\ge\dfrac{9}{4}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{9}{4}$, đạt khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 29. Cho các số thực x, y, z thuộc đoạn $[1; 4]$ thỏa mãn $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2011)

Phân tích và lời giải. Biểu thức P là thuần nhất, một phép biến đổi thường sử dụng là chia các biến sau đó đổi biến.

Ta có: $P = \dfrac{1}{2+3\dfrac{y}{x}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{z}{y}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{z}}$.

Đặt $a = \dfrac{y}{x}, b = \dfrac{z}{y}, c = \dfrac{x}{z}$.

Khi đó $a \in \left[\dfrac{1}{4}; 1\right], c \in [1; 4]$, $abc = 1$ và $P = \dfrac{1}{2+3a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c}$.

Vì $a \in \left[\dfrac{1}{4}; 1\right]$ và $abc = 1$ nên $1 \leq bc \leq 4$. Ở đây có sự xuất hiện biểu thức $\dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c}$ với điều kiện $bc \geq 1$, gợi cho ta một bất đẳng thức khá quen thuộc, đó là

$$\frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{2}{1+\sqrt{bc}}. \qquad (1)$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với $(\sqrt{bc}-1)(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \geq 0$, luôn đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$ hoặc $bc = 1$.

Áp dụng (1) và $abc = 1$, ta có

$$P \geq \frac{1}{2+3a} + \frac{2}{1+\sqrt{bc}} = \frac{1}{2+3a} + \frac{2}{1+\dfrac{1}{\sqrt{a}}} = \frac{1}{2+3a} + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}.$$

Đến đây công việc còn lại là xét hàm để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức. Để đơn giản hơn, ta có thể đặt $t = \sqrt{a}$ và xét hàm biến t.

Nhưng để rèn luyện tính toán, chúng ta xét trực tiếp hàm biến a.

Xét hàm $f(a) = \dfrac{1}{2+3a} + \dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$ trên $\left[\dfrac{1}{4}; 1\right]$.

Ta có $f'(a)=\frac{-3}{(2+3a)^2}+\frac{1}{(\sqrt{a}+1)^2.\sqrt{a}}=\frac{(2+3a)^2-3(\sqrt{a}+1)^2\sqrt{a}}{(2+3a)^2.(\sqrt{a}+1)^2.\sqrt{a}}$

$$=\frac{9a^2+3a+1+3(a+1)(1-\sqrt{a})}{(2+3a)^2.(\sqrt{a}+1)^2.\sqrt{a}}>0 \text{ với mọi } a\in\left[\frac{1}{4};1\right].$$

Suy ra $f(a)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{4};1\right]$. Do đó $f(a)\ge f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{34}{33}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{1}{4}$. Suy ra $P\ge\frac{34}{33}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{1}{4}$, $b=c$, $abc=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$, $b=c=2$, hay $x=4$, $y=1$, $z=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{34}{33}$, đạt được khi $x=4$, $y=1$, $z=2$.

Ví dụ 30. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x\ge z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}.$$

Lời giải. Ta có

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{y}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{z}}}.$$

Đặt $a=\frac{y}{x}$, $b=\frac{z}{y}$, $c=\frac{x}{z}$. Khi đó $abc=1$, $c\ge 1$ và

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}.$$

Vì $abc=1$, $c\ge 1$ nên $ab\le 1$. Ta chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+ab}}. \qquad (1)$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\sqrt{2\left(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\right)}.$$

Mặt khác, $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le\frac{2}{1+ab}\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}\ge 0$, đúng khi $ab\le 1$.

Suy ra (1) đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$ hoặc $ab=1$.

Áp dụng (1) và sử dụng giả thiết $abc=1$, ta có

$$P \le \frac{2}{\sqrt{1+ab}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{c}}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}=\frac{2\sqrt{c}+1}{\sqrt{1+c}}.$$

Xét hàm $f(c)=\dfrac{2\sqrt{c}+1}{\sqrt{1+c}}$ trên $[1;+\infty)$.

Ta có $f'(c)=\dfrac{2-\sqrt{c}}{2(1+c)\sqrt{c}.\sqrt{1+c}}$, $f'(c)=0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{c}=0 \Leftrightarrow c=4$.

Suy ra bảng biến thiên

c	1		4		$+\infty$
$f'(c)$		$+$	0	$-$	
$f(c)$		$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra $P \le \sqrt{5}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $c=4$, $a=b$, $abc=1$ $\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$, $c=4$. Hay $x=2y=4z$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{5}$, đạt được khi $x=2y=4z$.

Ví dụ 31. Cho $x>y>z>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{y}{x-y}+\frac{z}{y-z}+\frac{x^2}{8z(\sqrt{xz}-z)}.$$

Lời giải. Ta có $P=\dfrac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}+\dfrac{\frac{z}{y}}{1-\frac{z}{y}}+\dfrac{\left(\frac{x}{z}\right)^2}{8\left(\sqrt{\frac{x}{z}}-1\right)}$.

Đặt $a=\dfrac{y}{x}$, $b=\dfrac{z}{y}$, $c=\dfrac{x}{z}$. Khi đó $0<a, b<1, c>1, abc=1$ và

$$P=\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c^2}{8(\sqrt{c}-1)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{(1-a)(1-b)}} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{\frac{1}{2}(1-a+1-b)}=\frac{2\sqrt{ab}}{1-\frac{a+b}{2}} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}. \qquad (1)$$

Áp dụng (1) và sử dụng giả thiết $abc=1$ ta có

$$P \geq \frac{2\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}+\frac{c^2}{8(\sqrt{c}-1)}=\frac{2}{\sqrt{c}-1}+\frac{c^2}{8(\sqrt{c}-1)}=\frac{c^2+16}{8(\sqrt{c}-1)}.$$

Xét hàm $g(c)=\dfrac{c^2+16}{8(\sqrt{c}-1)}$ trên $(1;+\infty)$. Ta có

$$g'(c)=\frac{3c^2-4c\sqrt{c}-16}{16\sqrt{c}(\sqrt{c}-1)^2}=\frac{(\sqrt{c}-2)(3c\sqrt{c}+2c+4\sqrt{c}+8)}{16\sqrt{c}(\sqrt{c}-1)^2},\ g'(c)=0 \Leftrightarrow c=4.$$

Suy ra bảng biến thiên

c	1		4		$+\infty$
$g'(c)$		$-$	0	$+$	
$g(c)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

Dựa và bảng biến thiên ta có $P \geq 4$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a=b,\ abc=1,\ c=4 \Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2},\ c=4 \Leftrightarrow x=2y=4z.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4, đạt được khi $x=2y=4z$.

Ví dụ 32. Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{4c^3}{3(c+a)^3}.$$

Lời giải. Ta có $P=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{c}{b}\right)^2}+\dfrac{4}{3\left(1+\dfrac{a}{c}\right)^3}.$

Đặt $x=\dfrac{b}{a},\ y=\dfrac{c}{b},\ z=\dfrac{a}{c}$. Khi đó x, y, z dương thỏa mãn $xyz=1$ và

$$P=\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{4}{3(1+z)^3}.$$

Ta chứng minh $\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2}\ge\dfrac{1}{1+xy}$. (1)

Thật vậy, bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow xy(x-y)^2+(1-xy)^2\ge 0$, luôn đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=y\\ xy=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Áp dụng (1) và sử dụng $xyz=1$ ta có

$$P\ge\frac{1}{1+xy}+\frac{4}{3(1+z)^3}=\frac{z}{1+z}+\frac{4}{3(1+z)^3}.$$

Xét hàm $f(z)=\dfrac{z}{1+z}+\dfrac{4}{3(1+z)^3}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2}-\dfrac{4}{(1+z)^4}=\dfrac{(z-1)(z+3)}{(1+z)^4}$; $f'(z)=0\Leftrightarrow z=1$.

Suy ra bảng biến thiên

z	0		1		$+\infty$
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$		$\searrow$	$\dfrac{2}{3}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra $P\ge\dfrac{2}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x=y=1\\ z=1\end{cases}$ $\Leftrightarrow x=y=z=1$ hay $a=b=c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{2}$, đạt khi $a=b=c$.

Ví dụ 33. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy\ge 1$ và $z\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}+\frac{z^3+2}{3(xy+1)}.$$

Lời giải. Bằng biến đổi tương đương ta có

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\ge\frac{2}{1+\sqrt{xy}}\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy}-1\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0,$$

luôn đúng với $xy\ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có $z^3+2=z^3+1+1\ge 3\sqrt[3]{z.1.1}=3z\ge 3$.

Suy ra $\dfrac{z^3+2}{3(xy+1)}\ge\dfrac{1}{xy+1}$. Do đó ta có

$$P\ge\frac{x}{y+1}+1+\frac{y}{x+1}+1+\frac{1}{xy+1}-2$$

$$=(x+y+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)+\frac{1}{xy+1}-1\ge\left(2\sqrt{xy}+1\right)\frac{2}{1+\sqrt{xy}}+\frac{1}{xy+1}-2.$$

Đặt $t=\sqrt{xy}$, khi đó $t\ge 1$ và $P\ge\dfrac{2(2t+1)}{t+1}+\dfrac{1}{t^2+1}-2=\dfrac{2t}{t+1}+\dfrac{1}{t^2+1}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t}{t+1}+\dfrac{1}{t^2+1}$ với $t\ge 1$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2}{(t+1)^2}-\dfrac{2t}{\left(t^2+1\right)^2}=\dfrac{2(t-1)^2\left(t^2+t+1\right)}{(t+1)^2\left(t^2+1\right)^2}>0$ với mọi $t>1$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$. Suy ra $f(t)\ge f(1)=\dfrac{3}{2}$ với mọi $t\ge 1$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{2}$, đạt được khi $x=y=z=1$.

Ví dụ 34. Cho $x, y, z\ge 0$ thoả mãn $x+y+z>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3+y^3+16z^3}{(x+y+z)^3}$$

Phân tích và lời giải. Trước hết với các số thực không âm x, y ta có bất đẳng thức $x^3+y^3\ge\dfrac{(x+y)^3}{4}$.

Thật vậy, $x^3+y^3\ge\dfrac{(x+y)^3}{4}\Leftrightarrow(x+y)\left(4(x^2-xy+y^2)-(x+y)^2\right)\ge 0$

$$\Leftrightarrow 3(x+y)(x-y)^2\ge 0,\text{ đúng.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Suy ra $P\ge\dfrac{\dfrac{(x+y)^3}{4}+16z^3}{(x+y+z)^3}$.

Biểu thức này đẳng cấp đối với $x+y$ và z, do đó ta sẽ chia cho z^3.

Xét hai trường hợp

TH 1. $z=0$. Khi đó $P\geq\frac{1}{4}$.

TH 2. $z\neq0$. Đặt $t=\frac{x+y}{z}$, $t\geq0$. Khi đó $P\geq\frac{\frac{1}{4}t^3+16}{(t+1)^3}=\frac{t^3+64}{4(t+1)^3}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^3+64}{4(t+1)^3}$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\frac{3(t^2-64)}{4(t+1)^4}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=8$.

Suy ra bảng biến thiên

t	0		8		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{16}{81}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $P\geq\frac{16}{81}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x+y=8z>0$.

Từ hai trường hợp trên ta suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{16}{81}$, đạt được khi $x+y=8z>0$.

Nhận xét. 1. Để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\frac{\frac{(x+y)^2}{4}+16z^3}{(x+y+z)^3}$ ta có thể đặt $x+y+z=a$, $a>0$. Khi đó

$$4Q=\frac{(x+y)^3+64z^3}{a^3}=\frac{(a-z)^3+64z^3}{a^3}=(1-t)^3+64t^3,\text{ với } t=\frac{z}{a},\ 0\leq t\leq1.$$

Xét hàm số $f(t)=(1-t)^3+64t^3$ với $t\in[0;1]$.

Ta có $f'(t)=3\left(64t^2-(1-t)^2\right)$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{9}\in[0;1]$

Ta có $f(0)=1$, $f(1)=64$, $f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{64}{81}$. Do đó $\min\limits_{[0;1]} f(t)=f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{64}{81}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{16}{81}$, đạt được khi $x=y=4z>0$

2. Kỹ thuật chuyển bài toán về xét trong trường hợp $x+y+z=a$, $a>0$ như trên thường gọi là kỹ thuật chuẩn hóa.

Ví dụ 35. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2013)

Lời giải. Đặt $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$. Ta được $x>0$, $y>0$.

Điều kiện của bài toán trở thành $xy+x+y=3$. Khi đó

$$P=\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Với mọi $u>0$, $v>0$ ta có

$$u^3+v^3=(u+v)^3-3uv(u+v)\geq(u+v)^3-\frac{3}{4}(u+v)^3=\frac{(u+v)^3}{4}.$$

Do đó $\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}\geq 8\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3=8\left(\frac{(x+y)^2-2xy+3x+3y}{xy+3x+3y+9}\right)^3$.

Thay $xy=3-x-y$ vào biểu thức trên ta được

$$\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}\geq 8\left(\frac{(x+y-1)(x+y+6)}{2(x+y+6)}\right)^3=(x+y-1)^3.$$

Do đó $P\geq(x+y-1)^3-\sqrt{x^2+y^2}=(x+y-1)^3-\sqrt{(x+y)^2-2xy}$

$$=(x+y-1)^3-\sqrt{(x+y)^2+2(x+y)-6}.$$

Đặt $t=x+y$.

Suy ra $t>0$ và $P\geq(t-1)^3-\sqrt{t^2+2t-6}$.

Ta có $3=x+y+xy\leq(x+y)+\frac{(x+y)^2}{4}=t+\frac{t^2}{4}$ nên $(t-2)(t+6)\geq 0$.

Do đó $t \ge 2$.

Xét hàm số $f(t) = (t-1)^3 - \sqrt{t^2+2t-6}$ với $t \ge 2$.

Ta có $f'(t) = 3(t-1)^2 - \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}$.

Với $t \ge 2$ ta có $3(t-1)^2 \ge 3$ và $\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}} = \sqrt{1+\dfrac{7}{(t+1)^2-7}} \le \sqrt{1+\dfrac{7}{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,

nên $f'(t) \ge 3 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} > 0$. Suy ra $f(t) \ge f(2) = 1-\sqrt{2}$. Do đó $P \ge 1-\sqrt{2}$. Khi $a=b=c$ thì $P = 1-\sqrt{2}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $1-\sqrt{2}$.

Ví dụ 36. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - \frac{y^2(x+z)^2}{32x^2z^2}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} = \frac{xy}{(z^2+x^2)+(z^2+x^2)} + \frac{yz}{(x^2+y^2)+(x^2+z^2)}$$

$$\le \frac{xy}{2\sqrt{(z^2+x^2)(z^2+x^2)}} + \frac{yz}{2\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}}$$

$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{z^2+x^2} + \frac{y^2}{z^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{z^2}{x^2+z^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{y^2}{z^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \le \frac{1}{4}\left(1 + \frac{y^2}{2yz} + \frac{y^2}{2xy}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{y}{2z} + \frac{y}{2x}\right).$$

Suy ra $P \le \dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{y}{2z}+\dfrac{y}{2x}\right) - \dfrac{y^2(x+z)^2}{32x^2z^2} = \dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{y}{x}\right)\right) - \dfrac{1}{32}\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{y}{x}\right)^2$.

Đặt $t = \dfrac{y}{z} + \dfrac{y}{x}$, khi đó $t > 0$ và $P \le \dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{2}t\right) - \dfrac{1}{32}t^2 = -\dfrac{1}{32}t^2 + \dfrac{1}{8}t + \dfrac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t) = -\dfrac{1}{32}t^2 + \dfrac{1}{8}t + \dfrac{1}{4}$ với $t > 0$. Ta có $\max\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(2) = \dfrac{3}{8}$.

Suy ra $P \le \frac{3}{8}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{8}$, đạt khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 37. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a > b$ và $(a+c)(b+c) = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{6}{(b+c)^2} + \frac{12}{(c+a)^2}.$$

Lời giải. Đặt $x = a + c$, $y = b + c$, khi đó $x > y > 0$ thỏa mãn $xy = 1$ và

$$P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{6}{y^2} + \frac{12}{x^2} = \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} + 6x^2 + \frac{12}{x^2} = \frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^2} + 6x^2 + \frac{12}{x^2}.$$

Đặt $t = x^2$, khi đó vì $x > y$ và $xy = 1$ nên $x > 1 > y$, hay $t > 1$. Biểu thức P trở thành

$$P = \frac{t}{(t-1)^2} + 6t + \frac{12}{t}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{(t-1)^2} + 6t + \frac{12}{t}$ với $t > 1$.

Ta có $f'(t) = \frac{(t-1)^2 - t.2(t-1)}{(t-1)^4} + 6 - \frac{12}{t^2} = \frac{1-t^2}{(t-1)^4} + 6 - \frac{12}{t^2} = \frac{-t-1}{(t-1)^3} + 6 - \frac{12}{t^2}$;

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-t-1}{(t-1)^3} + 6 - \frac{12}{t^2} = 0 \Leftrightarrow (-t-1)t^2 + 6t^2(t-1)^3 - 12(t-1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6t^2\left(t^3 - 3t^2 + 3t - 1\right) - (t+1)t^2 - 12\left(t^3 - 3t^2 + 3t - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6t^5 - 18t^4 + 5t^3 + 29t^2 - 36t + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\left(6t^4 - 6t^3 - 7t^2 + 15t - 6\right) = 0.$$

Xét hàm số $g(t) = 6t^4 - 6t^3 - 7t^2 + 15t - 6$ với $t > 1$. Ta có

$g'(t) = 24t^3 - 18t^2 - 14t + 15 = 18t^2(t-1) + \left(6t^3 - 14t + 15\right) > 0$ với mọi $t > 1$.

Do đó $g(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$. Suy ra $g(t) > g(1) = 2 > 0$ với mọi $t > 1$. Do đó $g(t) = 0$ không có nghiệm $t > 1$.

Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Suy ra bảng biến thiên

t	1		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	20	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(t) \geq f(2) = 20$ với mọi $t > 1$. Suy ra $P \geq 20$, dấu đẳng thức xảy ra khi $t = 2$ hay $x = \sqrt{2},\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 20, đạt được khi $a + c = \sqrt{2},\ b + c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Nhận xét. Ta có thể chứng minh được biểu thức P chỉ đạt giá trị nhỏ nhất khi $a > b$. Thật vậy, ta có

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{6}{(b+c)^2} + \frac{12}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{6}{(a+c)^2} + \frac{12}{(c+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{(c+b)^2} \Leftrightarrow b > a.$$

Có nghĩa là khi $b > a$ thì ta thay (a, b, c) bởi (b, a, c) giá trị biểu thức giảm xuống.

Do đó ta có thể thay giả thiết $a > b$ bởi $a \neq b$.

Ví dụ 38. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2 + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \frac{2c^3 + 1}{27}.$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \qquad (1)$$

Thật vậy, ta có (1) $\Leftrightarrow \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \geq a\left(a^3 + (b+c)^3\right)$

$$\Leftrightarrow b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \geq a(b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(b^2 + c^2\right)\left(2a^2 + b^2 + c^2\right) \geq a(b+c)^3. \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$VT(2) \ge \frac{(b+c)^2}{2}\left(2a^2 + \frac{(b+c)^2}{2}\right) \ge \frac{(b+c)^2}{2}.2.a(b+c) = VP(2).$$

Suy ra (1) đúng, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b = c \\ 2a^2 = \dfrac{(b+c)^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} \ge \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad (3)$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Từ (1) và (3) ta suy ra

$$P \ge \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2c^3 + 1}{27} = \frac{c^2 + 1}{2c^2 + 1} + \frac{2c^3 + 1}{27}.$$

Xét hàm số $f(c) = \dfrac{c^2 + 1}{2c^2 + 1} + \dfrac{2c^3 + 1}{27}$ với $c > 0$.

Ta có $f'(c) = -\dfrac{2c}{(2c^2+1)^2} + \dfrac{2c^2}{9} = \dfrac{2c\left(c(2c^2+1)^2 - 9\right)}{9(2c^2+1)^2}$;

$f'(c) = 0 \Leftrightarrow c(2c^2+1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (c-1)\left(4c^4 + 4c^3 + 8c^2 + 8c + 9\right) = 0 \Leftrightarrow c = 1.$

Suy ra bảng biến thiên

c	0		1		$+\infty$
$f'(c)$		$-$	0	$+$	
$f(c)$		$\searrow$	$\frac{7}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} f(c) = f(1) = \dfrac{7}{9}$. Do đó $P \ge \dfrac{7}{9}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{7}{9}$, đạt được khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 39. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+xz}+\frac{\sqrt{xyz}}{z+xy}.$$

Lời giải. Vì $x+y+z=1$ nên $\frac{x}{x+yz}=\frac{x}{x(x+y+z)+yz}=\frac{x}{(x+y)(x+z)}$.

Từ đó ta có $\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+xz}=\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(x+y)(y+z)}$

$$=\frac{x+y-(x^2+y^2)}{(x+y)(1-x)(1-y)}=\frac{1}{x+y}.\frac{x+y-(x+y)^2+2xy}{1-(x+y)+xy}$$

$$\le\frac{1}{x+y}.\frac{x+y-(x+y)^2+\frac{(x+y)^2}{2}}{1-(x+y)+\frac{(x+y)^2}{4}}=\frac{2}{1+z}, \qquad (1)$$

vì $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$.

Mặt khác ta lại có

$$\frac{\sqrt{xyz}}{z+xy}=\frac{\sqrt{z}.\sqrt{xy}}{z+xy}\le\frac{\sqrt{z}.(x+y)}{2\left(z+\frac{(x+y)^2}{4}\right)}=\frac{2\sqrt{z}.(1-z)}{(z+1)^2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $P\le\frac{2}{1+z}+\frac{2\sqrt{z}.(1-z)}{(z+1)^2}$.

Đặt $\sqrt{z}=t, 0<t<1$. Xét hàm số $f(t)=\frac{2}{t^2+1}+\frac{2t(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$, $0<t<1$ ta được

$$f(t)\le f(2-\sqrt{3})=\frac{-8+5\sqrt{3}}{4\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{4+3\sqrt{3}}{4}$, đạt khi $x=y=2\sqrt{3}-3, z=7-4\sqrt{3}$.

Nhận xét. 1. Ở (1) chúng ta đã sử dụng bất đẳng thức $\frac{a+2u}{b+u}\le\frac{a+2v}{b+v}$ với $0<a<2b$ và $0<u\le v$.

Hay tính đồng biến của hàm $g(t)=\dfrac{2t+a}{t+b}$, $0<a<2b$ trên $(0;+\infty)$.

Ở (2) ta đã sử dụng bất đẳng thức $\dfrac{au}{a^2+u^2}\le\dfrac{av}{a^2+v^2}$ với $0<u\le v,\ a^2>uv$.

2. Chúng ta có cách giải khác bằng phương pháp lượng giác hóa

Ta có $P=\dfrac{1}{1+\dfrac{yz}{x}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{xz}{y}}+\dfrac{\sqrt{\dfrac{xy}{z}}}{1+\dfrac{xy}{z}}$.

Đặt $\sqrt{\dfrac{yz}{x}}=\tan\dfrac{A}{2}$, $\sqrt{\dfrac{zx}{y}}=\tan\dfrac{B}{2}$, $\sqrt{\dfrac{xy}{z}}=\tan\dfrac{C}{2}$, với $0<A,B,C<\pi$.

Khi đó

$$1=x+y+z=\sqrt{\frac{xy}{z}}\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{yz}{x}}\sqrt{\frac{xy}{z}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}\sqrt{\frac{yz}{x}}$$

$$\Leftrightarrow 1=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}.$$

Suy ra A, B, C là ba góc của một tam giác và

$$P=\frac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{B}{2}}+\frac{\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}=\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\sin C$$

$$=1+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\sin C).$$

Mặt khác

$$\cos A+\cos B+\sin C+\sin\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{C-\frac{\pi}{3}}{2}$$

$$\le 2\cos\frac{A+B}{2}+2\cos\frac{C-\frac{\pi}{3}}{2}\le 4\cos\frac{A+B+C-\frac{\pi}{3}}{2}=4\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}.$$

Do đó $P\le 1+\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} A=B \\ C+\dfrac{\pi}{3}=\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=\dfrac{\pi}{6} \\ C=\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{yz}{x}}=\sqrt{\frac{zx}{y}}=\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3},\ \sqrt{\frac{xy}{z}}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x=y=2\sqrt{3}-3,\ z=7-4\sqrt{3}.$$

3. Để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=1+\dfrac{1}{2}(\cos A+\cos B+\sin C)$ ta có thể thực hiện nhiều cách khác nhau

Cách 2. Ta có $P=1+\dfrac{1}{2}(\cos A+\cos B+\sin C)\le 1+\sin\dfrac{C}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\sqrt{1-\sin^2\dfrac{C}{2}}$.

Đặt $t=\sin\dfrac{C}{2}$ với $0<t<1$. Khi đó $P\le 1+t+t\sqrt{1-t^2}$.

Xét hàm số $f(t)=1+t+t\sqrt{1-t^2}$ trên $(0;1)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{\sqrt{1-t^2}+1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\sqrt{1-t^2}=2t^2-1\Leftrightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $f'(t)$ đổi dấu từ dương sang âm khi t đi qua $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\max\limits_{(0;1)} f(t)=f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Cách 3. Ta có $P=1+\dfrac{1}{2}(\cos A+\cos B+\sin C)\le 1+\sin\dfrac{C}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\sqrt{1-\sin^2\dfrac{C}{2}}$

$$=1+\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{C}{2}\sqrt{3-3\sin^2\frac{C}{2}}\le 1+\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin^2\frac{C}{2}+3-3\sin^2\frac{C}{2}}{2}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^2\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=1+\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\le 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ví dụ 40. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $z=\max\{x, y, z\}$ và $xy+yz+zx>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{y+z}+2\sqrt{\frac{y}{x+z}}+3\sqrt[3]{\frac{z}{x+y}}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $\dfrac{x}{y+z}+1\ge 2\sqrt{\dfrac{x}{y+z}}$.

Từ đó suy ra $P \geq 2\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{x+z}}\right)+3\sqrt[3]{\frac{z}{x+y}}-1.$

Giả sử $x \leq y$. Ta chứng minh $\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{x+z}} \geq \sqrt{\frac{x+y}{z}}$, với $x \leq y$ và $xy+yz+zx>0$. Thật vậy

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{x+z}} \geq \sqrt{\frac{x+y}{z}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{xz}{(x+y)(y+z)}}+\sqrt{\frac{yz}{(x+z)(x+y)}} \geq 1. \quad (*)$$

Ta có $\sqrt{\frac{xz}{(x+y)(y+z)}}=\frac{2xz}{2\sqrt{z(x+y).x(y+z)}} \geq \frac{2xz}{xy+yz+2zx}$;

$$\sqrt{\frac{yz}{(x+z)(x+y)}}=\frac{2yz}{2\sqrt{y(x+z).z(x+y)}} \geq \frac{2yz}{xy+zx+2yz}.$$

Suy ra $VT(*) \geq \frac{2xz}{xy+yz+2zx}+\frac{2yz}{xy+zx+2yz}$.

Mà $yz+2zx \geq zx+2yz$ và $yz \geq xy$ nên

$$VT(*) \geq \frac{2xz}{xy+yz+2zx}+\frac{2yz}{xy+zx+2yz} \geq \frac{2xz+2yz}{xy+yz+2zx} \geq \frac{2xz+yz+xy}{xy+yz+2zx}=1=VP(*).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hoặc $x=0$.

Suy ra $P \geq 2\sqrt{\frac{x+y}{z}}+3\sqrt[3]{\frac{z}{x+y}}-1$.

Đặt $t=\sqrt[6]{\frac{z}{x+y}}$. Khi đó $t \geq \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ và $P \geq \frac{2}{t^3}+3t^2-1$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{2}{t^3}+3t^2-1$ với $t \geq \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$.

Ta có $f'(t)=6t-\frac{6}{t^4}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$.

Suy ra bảng biến thiên

t	$\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $P \ge f(t) \ge 4$, dấu đẳng thức khi $t=1$ hay $x=0,\ y=z$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4, đạt khi $x=0,\ y=z$ hoặc $y=0,\ x=z$.

Ví dụ 41. Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 \le 18.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4^{\frac{x}{3}}+4^{\frac{y}{3}}+4^{\frac{z}{3}}-\frac{1}{108}(x+y+z)^4$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $0 \le x, y, z \le 3$.

Xét hàm số $g(t)=4^{\frac{t}{3}}-t-1,\ t\in[0;3]$. Ta có $g'(t)=4^{\frac{t}{3}}\frac{1}{3}\ln 4-1$.

Suy ra

$$g'(t)=0 \Leftrightarrow t=3\log_4\frac{3}{\ln 3}=t_0;\ g'(t)>0 \Leftrightarrow t>t_0 \text{ và } g'(t)<0 \Leftrightarrow t<t_0.$$

Vì $1<\frac{3}{\ln 4}<4$, nên $0<t_0<3$.

Suy ra bảng biến thiên

t	0		t_0		3
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Suy ra $g(t)\le 0, \forall t\in[0;3]$.

Hay $4^{\frac{t}{3}} \le t+1$ với mọi $t\in[0;3]$.

Từ đó ta có $P \le 3+(x+y+z)-\frac{1}{108}(x+y+z)^4$.

Đặt $x+y+z=u$, khi đó $u\ge 0$ và $P\le 3+u-\frac{1}{108}u^4$.

Xét hàm số $f(u)=3+u-\frac{1}{108}u^4$ với $u\ge 0$.

Ta có $f'(u)=1-\frac{1}{27}u^3$ và $f'(u)=0 \Leftrightarrow u=3$.

Suy ra bảng biến thiên

u	0		3		$+\infty$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		$\nearrow$	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(u) \le \frac{21}{4}$ với mọi $u \ge 0$.

Suy ra $P \le \frac{21}{4}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 3$, $y = z = 0$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{21}{4}$.

Ví dụ 42. Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn

$$5(x^2 + y^2 + z^2) = 6(xy + yz + zx).$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{2(x+y+z)} - (y^2 + z^2)$.

Bài giải. Ta có $5x^2 + \frac{5}{2}(y+z)^2 \le 5x^2 + 5(y^2 + z^2) = 6(xy + yz + zx)$

$$\le 6x(y+z) + 6.\frac{1}{4}(y+z)^2.$$

Vậy $5x^2 - 6x(y+z) + (y+z)^2 \le 0$, hay $\frac{y+z}{5} \le x \le y+z$.

Suy ra $x + y + z \le 2(y+z)$.

Khi đó $P \le \sqrt{2(x+y+z)} - \frac{1}{2}(y+z)^2$

$$\le \sqrt{4(y+z)} - \frac{1}{2}(y+z)^2 = 2\sqrt{y+z} - \frac{1}{2}(y+z)^2.$$

Đặt $\sqrt{y+z} = t$, khi đó $t \ge 0$ và $P \le 2t - \frac{t^4}{2}$. (1)

Xét hàm số $f(t) = 2t - \frac{1}{2}t^4$ với $t \ge 0$.

Ta có $f'(t) = 2 - 2t^3$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Suy ra bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(t) \le f(1) = \dfrac{3}{2}$ với mọi $t \ge 0$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $P \le \dfrac{3}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = z \\ y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{3}{2}$, đạt được khi $x = 1,\ y = z = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 43. Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; 4]$ thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}}.$$

Lời giải. Đặt $f(a, b, c) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+c}}$.

Nhận xét $f(a, b, c)$ đạt giá trị lớn nhất khi $c = \max\{a\ b, c\}$.

Thật vậy, nếu $c < \max\{a\ b, c\}$ thì ta có thể giả sử $a = \max\{a\ b, c\}$.

Khi đó $a \ge 1$, ta chứng minh

$$f(a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}} = f(c, b, a).$$

Điều này tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}} - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} > \frac{1}{\sqrt{1+c}} - \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}. \qquad (1)$$

Nếu $c < 1$ thì $VT(1) \geq 0 > VP(1)$, do đó (1) đúng.

Nếu $c \geq 1$ thì $1 \leq c \leq a \leq 4$. Xét hàm $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ trên $[1; 4]$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1+x}^3} + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}^3}$,

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}^3} > \frac{1}{2\sqrt{1+x}^3} \Leftrightarrow 4x^2(1+x)^3 > (1+x^2)^3. \qquad (2)$$

Với $x \in (1; 4)$ ta có $VT(2) > x^3(1+x)^3 = (x+x^2)^3 > (1+x^2)^3 = VP(2)$.

Suy ra $g'(x) > 0$ với mọi $x \in (1; 4)$. Hay $g(x)$ đồng biến trên $[1; 4]$. Suy ra $g(a) \geq g(c)$. Có nghĩa là (1) đúng.

Vậy ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của P trong trường hợp $c = \max\{a, b, c\}$.

Khi đó $c \geq 1$ và $ab \leq 1$. Ta chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}. \qquad (3)$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \sqrt{2\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}\right)}.$$

Mặt khác,

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0, \text{ đúng khi } ab \leq 1.$$

Suy ra (3) đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $ab = 1$.

Áp dụng (3) và sử dụng giả thiết $abc = 1$, ta có

$$P \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{c}}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} = \frac{2\sqrt{c}+1}{\sqrt{1+c}}.$$

Xét hàm $f(c) = \dfrac{2\sqrt{c}+1}{\sqrt{1+c}}$ trên $[1; +\infty)$.

Ta có $f'(c) = \dfrac{2-\sqrt{c}}{2(1+c)\sqrt{c}.\sqrt{1+c}}$, $f'(c) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{c} = 0 \Leftrightarrow c = 4$.

Suy ra bảng biến thiên

c	1		4		$+\infty$
$f'(c)$		$+$	0	$-$	
$f(c)$		$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra $P \le \sqrt{5}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $c = 4$, $a = b$, $abc = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{5}$, đạt được khi $a = b = \dfrac{1}{2}$, $c = 4$.

Ví dụ 44. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left(a^2 - ab + b^2\right)\left(b^2 - bc + c^2\right)\left(c^2 - ca + a^2\right).$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $0 \le a \le b \le c \le 3$.

Khi đó

$$\begin{cases} a(a-b) \le 0 \\ a(a-c) \le 0 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} a^2 - ab + b^2 \le b^2 \\ a^2 - ac + c^2 \le c^2. \end{cases}$$

Do đó $P \le b^2c^2\left(b^2 - bc + c^2\right) = b^2c^2\left((b+c)^2 - 3bc\right)$.

Từ $0 \le a \le b \le c \le 3$ và $a + b + c = 3$

Suy ra $b + c \le a + b + c = 3$ và $0 \le bc \le \left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2 \le \dfrac{9}{4}$.

Do đó

$$P \le b^2c^2\left((b+c)^2 - 3bc\right) \le b^2c^2(9 - 3bc) = -3(bc)^3 + 9(bc)^2.$$

Đặt $t = bc$, khi đó $0 \le t \le \dfrac{9}{4}$ và $P \le -3t^3 + 9t^2$.

Xét hàm số

$$f(t) = -3t^3 + 9t^2 \text{ trên } \left[0; \frac{9}{4}\right].$$

Ta có $f'(t) = -9t^2 + 18t$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2. \end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

t	0		2		$\frac{9}{4}$
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	12	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $P \le 12$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 12, đạt được khi $(a; b; c) = (0; 1; 2)$ và các hoán vị.

Ví dụ 45. Cho các số thực $a, b, c \ge 1$ thỏa mãn $a + b + c = 6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right).$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \ge b \ge c$.

Khi đó từ giả thiết ta có $6 = a + b + c \ge c + c + c$, vì vậy $c \le 2$ và $a + b \ge 4$.

Trước hết ta sẽ chứng minh $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right) \le \left(\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + 2\right)^2$. $\qquad$ (1)

Thật vậy $\quad (1) \Leftrightarrow a^2b^2 + 2a^2 + 2b^2 \le \dfrac{(a+b)^4}{16} + (a+b)^2$

$$\Leftrightarrow 16(a-b)^2 \le (a+b)^4 - 16a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow 16(a-b)^2 \le \left(a^2-b^2\right)^2 + 4ab(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow 16(a-b)^2 \le (a-b)^2\left((a+b)^2 + 4ab\right).$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì $(a+b)^2 \ge 16$.

Đặt $x = \dfrac{a+b}{2}$, khi đó ta có $P \le \left(x^2+2\right)^2\left(c^2+2\right) = \left(x^2+2\right)^2\left((6-2x)^2+2\right)$.

Vì $c \ge 1$ và $2x + c = 6$ nên $x \le \dfrac{5}{2}$. Suy ra $x \in \left[2; \dfrac{5}{2}\right]$.

Xét hàm số $f(x) = \left(x^2+2\right)^2\left((6-2x)^2+2\right)$ với $x \in \left[2; \dfrac{5}{2}\right]$.

Ta có $f(x) = 4x^6 - 25x^5 + 54x^4 - 96x^3 + 168x^2 - 96x + 152$;

$f'(x)=12\left(x^2+2\right)(x-2)\left(x^2-3x+1\right)$; $f'(x)<0$ với mọi $x\in\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

Do đó $f(x)$ nghịch biến trên $\left[2;\frac{5}{2}\right]$.

Suy ra $f(x)\le f(2)=216$ với mọi $x\in\left[2;\frac{5}{2}\right]$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 216, đạt khi $a=b=c=2$.

Ví dụ 46. Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng

$$6(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 27abc+10\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}.$$

(Học sinh giỏi Quốc gia, 2002)

Lời giải. Nếu $a^2+b^2+c^2=0$, thì $a=b=c=0$, bất đẳng thức đúng.

Với $a^2+b^2+c^2>0$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $|a|\le|b|\le|c|$ và $a^2+b^2+c^2=9$. Khi đó $c^2\ge 3$ và bất đẳng thức trở thành

$$2(a+b+c)-abc\le 10. \qquad (*)$$

Ta có

$$\left(2(a+b+c)-abc\right)^2=\left(2(a+b)+c(2-ab)\right)^2\le\left((a+b)^2+c^2\right)\left(4+(2-ab)^2\right)$$

$$=(9+2ab)\left(8-4ab+(ab)^2\right)=2(ab)^3+(ab)^2-20ab+72.$$

Đặt $t=ab$, từ $c^2\ge 3$ và $|t|=|ab|\le\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{9-c^2}{2}$ ta có $|t|\le 3$.

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t^2-20t+72$ với $|t|\le 3$.

Ta có $f'(t)=6t^2+2t-20$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\ t=\frac{5}{3}.\end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

x	-3		-2		$\frac{5}{3}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	87	$\nearrow$	100	$\searrow$		$\nearrow$	75

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(t)\le 100$ với mọi $t\in[-3;3]$. Suy ra bất đẳng thức (*) được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |a|\le|b|\le|c| \\ a^2+b^2+c^2=9 \\ \dfrac{a+b}{2}=\dfrac{c}{2-ab} \\ ab=-2 \\ 2(a+b+c)-abc\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-1 \text{ và } b=c=2.$$

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a;b;c)$ là hoán vị của bộ $(-t;2t;2t)$, trong đó t là số thực không âm.

3.3 Đánh giá xét hàm một biến

Ví dụ 1. Cho $0\le x,y,z\le 1$ thỏa mãn $x+y+z=\dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $0\le x\le y\le z\le 1$. Khi đó $\dfrac{1}{2}\le z\le 1$ và

$$P=x^2+y^2+z^2\le(x+y)^2+z^2=\left(\frac{3}{2}-z\right)^2+z^2=2z^2-3z+\frac{9}{4}.$$

Xét hàm số $f(z)=2z^2-3z+\dfrac{9}{4}$ trên $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$. Ta có bảng biến thiên

z	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1
$f(z)$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	$\frac{9}{8}$	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $P\le\dfrac{5}{4}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=0,\ y=\dfrac{1}{2},\ z=1$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{5}{4}$, đạt được khi $x=0,\ y=\dfrac{1}{2},\ z=1$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 \le a, b, c \le 4$ và $a+b+2c=8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a^3 + b^3 + 5c^3.$$

Lời giải. Ta có

$$P = a^3 + b^3 + 5c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + 5c^3 = (8-2c)^3 - 3ab(8-2c) + 5c^3$$
$$= -3c^3 + 96c^2 - 384c + 512 - 3ab(8-2c).$$

Vì $a, b \ge 1$ nên $(a-1)(b-1) \ge 0 \Leftrightarrow ab - (a+b) + 1 \ge 0$. Suy ra

$$ab \ge a+b-1 = 8-2c-1 = 7-2c > 0.$$

Suy ra

$$P = -3c^3 + 96c^2 - 384c + 512 - 3ab(8-2c)$$
$$\le -3c^3 + 96c^2 - 384c + 512 - 3(7-2c)(8-2c) = -3c^3 + 84c^2 - 294c + 344.$$

Từ giả thiết ta có $1 \le c \le 3$.

Xét hàm số $f(c) = -3c^3 + 84c^2 - 294c + 344$ với $1 \le c \le 3$.

Ta có $f'(c) = -9c^2 + 168c + 512$; $f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \dfrac{28 - 7\sqrt{10}}{3}$.

Vì $f(1) = 131$, $f\left(\dfrac{28-7\sqrt{10}}{3}\right) < f(3) = 137$ nên $\max\limits_{[1;\,3]} f(c) = f(3) = 137$. Suy ra giá trị lớn nhất của P là 137, đạt khi $a = 1, b = 1, c = 3$.

Ví dụ 3. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (x+2)(y+2)(z+2).$$

Lời giải. Từ giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ suy ra $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$. Do đó $x+2 > 0$, $y+2 > 0$, $z+2 > 0$, nên P đạt giá trị nhỏ nhất khi x, y, z đều âm.

Xét x, y, z âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $z \le y \le x \le 0$. Khi đó $-1 \le x \le 0$ và

$$P = (x+2)(y+2)(z+2) = \frac{1}{2}(x+2)\left((y+z+2)^2 + x^2 + 1\right) \ge \frac{1}{2}(x+2)(x^2+1).$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+2)(x^2+1)$ với $x \in [0; 1]$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + \dfrac{1}{2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

x	-1		$-\frac{1}{3}$		0
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{25}{27}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-1;\,0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{25}{27}$. Suy ra $P \geq \frac{25}{27}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = -\frac{5}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{25}{27}$, đạt khi $(x;\, y;\, z)$ bằng $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$ hoặc các hoán vị.

Nhận xét. Chúng ta có một cách phát biểu khác cho bài toán này

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$(2-x)(2-y)(2-z) \geq \frac{25}{27}.$$

Ví dụ 4. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $0 < a \leq b \leq c$. Vì $a + b + c = 3$ nên $a + b = 3 - c$ và $c \geq 1$. Mặt khác, $a + b > c$ nên $3 - c > c$, do đó $c < \frac{3}{2}$. Như vậy, $1 \leq c < \frac{3}{2}$.

Ta có $P = 3(a^2 + b^2) + 3c^2 + 4abc = 3(a+b)^2 - 6ab + 3c^2 + 4abc$

$$= 3(3-c)^2 + 3c^2 - 2(3-2c)ab.$$

Vì $c < \frac{3}{2}$ nên $3 - 2c > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ suy ra $ab \leq \left(\frac{3-c}{2}\right)^2$. Từ đó ta có

$$P \geq 3(3-c)^2 + 3c^2 - 2(3-2c)\left(\frac{3-c}{2}\right)^2 = c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2}.$$

Xét hàm số $f(c)=c^3-\frac{3}{2}c^2+\frac{27}{2}$ trên $\left[1;\frac{3}{2}\right)$.

Ta có $f'(c)=3c^2-3c$; $f'(c)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=0\\c=1.\end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

c	1		$\frac{3}{2}$
$f'(c)$	0	$+$	
$f(c)$	13	$\nearrow$	$\frac{27}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $P\geq 13$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 13, đạt khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải khác bằng sử dụng các bất đẳng thức

Trước hết ta có $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc,$ (*)

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Thay giả thiết $a+b+c=3$, ta có

$$(*)\Leftrightarrow(3-2c)(3-2b)(3-2a)\leq abc$$

$$\Leftrightarrow 9abc\geq 12(ab+bc+ca)-27\Leftrightarrow 4abc\geq\frac{16}{3}(ab+bc+ca)-12.$$

Suy ra $P=3(a^2+b^2+c^2)+4abc\geq 3(a^2+b^2+c^2)+\frac{16}{3}(ab+bc+ca)-12$

$$=3(a+b+c)^2-\frac{2}{3}(ab+bc+ca)-12.$$

Mặt khác, $ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}=3$. Do đó

$$P\geq 3(a+b+c)^2-\frac{2}{3}(ab+bc+ca)-12\geq 13.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 13, đạt khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 5. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=4$ và $xy+yz+zx=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\begin{cases} y+z=4-x \\ yz=5-x(4-x). \end{cases}$

Suy ra $(4-x)^2 \geq 4(5-x(4-x)) \Leftrightarrow 3x^2-8x+4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 2.$

Mặt khác $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$$=4\left((x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right)+3xyz$$

$$=4+3xyz.$$

Suy ra $P=(4+3xyz).\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{20}{xyz}+15=\frac{20}{x^3-4x^2+5x}+15.$

Xét hàm $f(x)=x^3-4x^2+5x$ trên $\left[\frac{2}{3};2\right]$ ta có

$$f'(x)=3x^2-8x+5,\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=\frac{5}{3} \text{ và}$$

$$f(1)=f(2)=2,\quad f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{50}{27},\ f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{50}{27}.$$

Suy ra $0<f(x)\leq 2$ với mọi $x\in\left[\frac{2}{3};2\right]$. Do đó $P\geq 25$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=2,\ y=z=1$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 25, đạt được khi $x=2,\ y=z=1$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 6. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $(x+y+z)^3=32xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}.$$

(Học sinh giỏi Quốc gia, 2004)

Lời giải. Với các biểu thức của bài toán ta chỉ cần xét các bộ (x, y, z) thỏa mãn $x, y, z>0$ và $x+y+z=4$. Khi đó $xyz=2$ và $P=\frac{1}{256}\left(x^4+y^4+z^4\right).$

Ta có $x^4+y^4+z^4=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$

$$=\left((x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\right)^2-2\left((xy+yz+zx)^2-2xyz(x+yz+z)\right)$$

$$=(16-2t)^2-2(t^2-2.2.4)=2\left(t^2-32t+144\right),$$

với $t=xy+yz+zx$.

Từ giả thiết $\begin{cases} x+y+z=4 \\ xyz=2 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} y+z=4-x \\ yz=\dfrac{2}{x}. \end{cases}$

Suy ra $(4-x)^2 \geq 4.\dfrac{2}{x} \Leftrightarrow x^3-8x^2+16-8 \geq 8$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-6x+4\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3+\sqrt{5} \text{ (ktm)} \\ 3-\sqrt{5} \leq x \leq 2. \end{array}\right.$$

Ta có $t = xy+yz+zx = x(y+z)+yz = 4(4-x)+\dfrac{2}{x} = -x^2+4x+\dfrac{2}{x}.$

Xét hàm số $f(x) = -x^2+4x+\dfrac{2}{x}$ trên $\left[3-\sqrt{5}; 2\right]$.

Ta được $\min f(x) = f(2) = 5$, $\max f(x) = f\left(3-\sqrt{5}\right) = \dfrac{5\sqrt{5}-1}{2}$.

Suy ra $t \in \left[5; \dfrac{5\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

Xét hàm số $g(t) = 2\left(t^2-32t+144\right)$ trên $\left[5; \dfrac{5\sqrt{5}-1}{2}\right]$ ta suy ra

$\min P = \dfrac{1}{256}\min g(t) = \dfrac{1}{256} g\left(\dfrac{5\sqrt{5}-1}{2}\right) = \dfrac{383-165\sqrt{5}}{256}$;

$\max P = \dfrac{1}{256}\max g(t) = \dfrac{1}{256} g(5) = \dfrac{9}{128}$.

Ví dụ 7. Cho các số thực a, b, c không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2 = 2(ab+bc+ca)$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}.$$

(Học sinh giỏi Tỉnh Nghệ An, 2010)

Lời giải. Từ giả thiết $a^2+b^2+c^2 = 2(ab+bc+ca)$ ta suy ra

$$(a+b+c)^2 = 2\left(a^2+b^2+c^2\right) \neq 0.$$

Đặt $x = \dfrac{4a}{a+b+c}, y = \dfrac{4b}{a+b+c}, z = \dfrac{4c}{a+b+c}$.

Khi đó ta có $\begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+zx=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=4-x \\ yz=x^2-4x+4 \end{cases}$

suy ra $(4-x)^2 \ge 4(x^2-4x+4) \Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{8}{3}$,

và $P=\dfrac{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b+c)^3}=\dfrac{1}{32}\left(3x^3-12x^2+12x+16\right)$ với $x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{32}\left(3x^3-12x^2+12x+16\right)$ trên $\left[0; \frac{8}{3}\right]$ ta được

$\min P=\min f(x)=f(0)=\frac{1}{2}$; $\max P=\max f(x)=f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{11}{18}$.

Ví dụ 8. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=x^5+y^5+z^5.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối B, 2012)

Lời giải. Với $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$ ta có

$$0=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2x(y+z)+2yz=1-2x^2+2yz,$$

nên $yz=x^2-\frac{1}{2}$.

Mặt khác $yz \le \dfrac{y^2+z^2}{2}=\dfrac{1-x^2}{2}$. Suy ra $x^2-\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1-x^2}{2}$, do đó $-\dfrac{\sqrt{6}}{3} \le x \le \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó $P=x^5+\left(y^2+z^2\right)\left(y^3+z^3\right)-y^2z^2(y+z)$

$$=x^5+\left(1-x^2\right)\left(\left(y^2+z^2\right)(y+z)-yz(y+z)\right)+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 x$$

$$=x^5+\left(1-x^2\right)\left(-x\left(1-x^2\right)+x\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\right)+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 x=\frac{5}{4}\left(2x^3-x\right).$$

Xét hàm $f(x)=2x^3-x$ trên $\left[-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$. Ta có

$$f'(x)=6x^2-1;\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6} \text{ và}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{9},\ f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

Do đó $f(x) \le \frac{\sqrt{6}}{9}$. Suy ra $P \le \frac{5\sqrt{6}}{36}$. Khi $x = \frac{\sqrt{6}}{3}, y = z = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5\sqrt{6}}{36}$.

Nhận xét. 1. Ta có cách giải khác như sau

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \le y \le z$. Khi đó $x \le 0 \le z$. Xét hai trường hợp

TH 1: $y \ge 0$. Khi đó từ $x + y + z = 0$ suy ra $x = -(y+z)$ và

$$P = -(y+z)^5 + y^5 + z^5 \le 0.$$

TH 2: $y < 0$. Đặt $a = -x, b = -y$, khi đó $a > 0, b > 0$ và $z = a + b > 0$. Ta có

$$P = -\left(a^5 + b^5\right) + z^5.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{a^5}{(a+b)^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} \ge 5.\frac{a}{2^4(a+b)};$$

$$\frac{b^5}{(a+b)^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} \ge 5.\frac{b}{2^4(a+b)}.$$

Suy ra

$$\frac{a^5}{(a+b)^5} + \frac{b^5}{(a+b)^5} + \frac{8}{2^5} \ge 5.\frac{a}{2^4(a+b)} + 5.\frac{b}{2^4(a+b)} \Leftrightarrow a^5 + b^5 \ge \frac{1}{16}(a+b)^5.$$

Suy ra $P \le -\frac{1}{16}(a+b)^5 + z^5 = z^5\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15z^5}{16}$. (1)

Mặt khác, ta có $1 = x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2} + z^2 = \frac{3z^2}{2}$. Suy ra $0 < z \le \sqrt{\frac{2}{3}}$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $P \le \frac{15}{16}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \frac{5\sqrt{6}}{36}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $z = \sqrt{\frac{2}{3}}, x = y = -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5\sqrt{6}}{36}$, đạt được khi trong ba số x, y, z có một số bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}$ và hai số bằng $-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

2. Tổng quát hơn ta có kết quả sau

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1},\text{ với } n\in\mathbb{N}^*$$

là $\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}$, đạt được khi trong ba số x, y, z có một số bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}$ và hai số bằng $-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Bạn đọc kiểm tra xem nên sử dụng cách giải nào!

Ví dụ 9. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn các điều kiện $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2b^2c^2$.

(Học sinh giỏi Ai Len, 2009)

Lời giải. Ta có $b+c=-a$ và $bc=\frac{(b+c)^2-\left(b^2+c^2\right)}{2}=\frac{a^2-\left(1-a^2\right)}{2}=a^2-\frac{1}{2}$.

Vì $(b+c)^2\ge 4bc$ nên $a^2\ge 4a^2-2$. Suy ra $a^2\le\frac{2}{3}$. Từ đó ta có

$$P=a^2b^2c^2=a^2\left(a^2-\frac{1}{2}\right)^2=a^6-a^4+\frac{1}{4}a^2.$$

Xét hàm số $f(x)=x^3-x^2+\frac{1}{4}x$ với $0\le x\le\frac{2}{3}$.

Ta có $f'(x)=3x^2-2x+\frac{1}{4}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ hoặc $x=\frac{1}{6}$.

Suy ra bảng biến thiên

x	1	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$
$f'(x)$		0		0		
$f(x)$	↗	$\frac{1}{54}$	↘	0	↗	$\frac{1}{54}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{\left[0;\frac{2}{3}\right]} f(x)=\frac{1}{54}$.

Suy ra $P\le\frac{1}{54}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=\sqrt{\frac{2}{3}}, b=c=-\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{54}$, đạt được khi $a=\sqrt{\frac{2}{3}}, b=c=-\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Ví dụ 10. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+2y}+\sqrt{1+2z}=5.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2x^3+y^3+z^3$.

Lời giải. Với hai số không âm a, b ta có

$$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\ge 1+\sqrt{1+a+b}. \qquad (1)$$

Thật vậy, $(1)\Leftrightarrow 2+a+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 2+a+b+2\sqrt{1+a+b}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+a+b+ab}\ge\sqrt{1+a+b}, \text{ luôn đúng.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=0$ hoặc $b=0$.

Áp dụng (1) ta có $5=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+2y}+\sqrt{1+2z}\ge 1+\sqrt{1+x^2+2y}+\sqrt{1+2z}$

$$\ge 2+\sqrt{1+x^2+2y+2z}.$$

Suy ra $x^2+2y+2z\le 8$, hay $y+z\le 4-\frac{x^2}{2}$. $\qquad (2)$

Khi đó $P\le 2x^3+(y+z)^3\le 2x^3+\left(4-\frac{x^2}{2}\right)^3$. $\qquad (3)$

Chú ý rằng, từ (2) và x, y, z không âm ta có $0\le x\le 2\sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(x)=2x^3+\left(4-\frac{x^2}{2}\right)^3$ trên $\left[0; 2\sqrt{2}\right]$. Ta có

$$f'(x)=6x^2-3x\left(4-\frac{x^2}{2}\right)^2=\frac{3}{4}x(x-2)\left(x\left(12-x^2\right)+2\left(16-x^2\right)\right).$$

Với $x\in\left[0; 2\sqrt{2}\right]$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2.\end{array}\right.$

Từ $f(0)=64$, $f(2)=24$, $f\left(2\sqrt{2}\right)=32\sqrt{2}$ suy ra

$$f(x)\le 64, \text{ với mọi } x\in\left[0; 2\sqrt{2}\right]. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $P\le 64$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=0, z=4$ hoặc $x=z=0, y=4$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 64, đạt được khi $x=y=0, z=4$ hoặc $x=z=0, y=4$.

Ví dụ 11. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2 \le 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}.$$

Lời giải. Trước hết, bằng biến đổi tương đương ta chứng minh được

$$\frac{1}{(x+1)^2}\ge -\frac{1}{8}(x^2-1)+\frac{1}{4} \text{ và } \frac{8}{(z+3)^2}\ge -\frac{1}{8}(z^2-1)+\frac{1}{2}.$$

Từ đó ta có

$$P\ge -\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{8}+\frac{4}{(y+2)^2}-\frac{1}{8}z^2+\frac{5}{8}=\frac{4}{(y+2)^2}+1-\frac{1}{8}\left(x^2+z^2\right)$$

$$\ge \frac{4}{(y+2)^2}+1-\frac{1}{8}\left(3y-y^2\right).$$

Từ giả thiết $x^2+y^2+z^2\le 3y$ suy ra $y^2\le 3y$. Do đó $0\le y\le 3$.

Xét hàm $f(y)=\dfrac{4}{(y+2)^2}+1-\dfrac{1}{8}\left(3y-y^2\right)$ trên $[0;3]$.

Ta có $f'(y)=\dfrac{(y-2)(2y^3+14y^2+34y+44)}{(y+2)^3}$, $f'(y)=0 \Leftrightarrow y=2$.

Lập bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[0;3]} f(y)=f(2)=1$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là 1, đạt khi $x=1, y=2, z=1$.

Nhận xét. Ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức như sau

Ta có $2x+4y+2z\le (x^2+1)+(y^2+4)+(z^2+1) = x^2+y^2+z^2+6\le 3y+6$.

Suy ra $x+\dfrac{y}{2}+z\le 3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=\dfrac{y}{2}=z=1$.

Chú ý rằng, với hai số dương a, b áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge \frac{8}{(a+b)^2}, \qquad (1)$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Áp dụng (1) ta được

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{\left(\frac{y}{2}+1\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}\ge \frac{8}{\left(x+1+\frac{y}{2}+1\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}$$

$$\geq \frac{64}{\left(x+\frac{y}{2}+2+z+3\right)^2}=\frac{64.4}{(2x+y+2z+10)^2}\geq\frac{64.4}{(6+10)^2}=1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=1, y=2, z=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1, đạt khi $x=1, y=2, z=1$.

Ví dụ 12. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $y+z=x\left(y^2+z^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}.$$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $x(y+z)^2\leq 2x\left(y^2+z^2\right)=2(y+z)$.

Do đó $y+z\leq\frac{2}{x}$.

Từ đó ta có $(1+y)(1+z)\leq\frac{1}{4}(2+y+z)^2\leq\frac{1}{4}\left(2+\frac{2}{x}\right)^2=\frac{(1+x)^2}{x^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$P\geq\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{2}{(1+y)(1+z)}+\frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$\geq\frac{2x^2+1}{(1+x)^2}+\frac{4x^2}{(1+x)^3}=\frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}.$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\frac{2(5x-1)}{(1+x)^4}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$.

Suy ra bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{91}{108}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[0;+\infty)} f(t)=\frac{91}{108}$.

Suy ra $P \ge \dfrac{91}{108}$, dấu đẳng thức khi $x = \dfrac{1}{5}$, $y = z = 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{91}{108}$, đạt khi $x = \dfrac{1}{5}$, $y = z = 5$.

Ví dụ 13. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{3x^2 + 7y} + \sqrt{5y + 5z} + \sqrt{7z + 3x^2}.$$

(Học sinh giỏi Tỉnh Vĩnh Phúc, 2013)

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức $(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, ta có

$$P^2 \le 3\left(6x^2 + 12(y+z)\right) \le 18\left(x^2 + 2\sqrt{2\left(y^2 + z^2\right)}\right) = 18\left(x^2 + 2\sqrt{2\left(3 - x^2\right)}\right).$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2\left(3 - x^2\right)}$ trên tập xác định $\left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$.

Ta có $f'(x) = 2x - \dfrac{4x}{\sqrt{2\left(3 - x^2\right)}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$2\sqrt{6}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{\left[-\sqrt{3};\, \sqrt{3}\right]} f(x) = 5$. Suy ra $P^2 \le 18.5 = 90$. Do đó

$P \le 3\sqrt{10}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $3\sqrt{10}$, đạt khi $x = y = z = 1$.

Ví dụ 14. Cho các số thực a, b, c với $0 \le c \le b \le a \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a^2(b - c) + b^2(c - b) + c^2(1 - c).$$

Lời giải. Do $b \ge c$ và $a^2 \le 1$ nên ta có $P \le b - c + b^2(c - b) + c^2(1 - c)$ hay

$$P \le (b - c)\left(1 - b^2\right) + c^2(1 - c).$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$(b-c)\left(1-b^2\right)=2.(b-c).\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1-b).\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+b)$$

$$\le 2\left(\frac{(b-c)+\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1-b)+\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+b)}{3}\right)^3=\frac{2}{27}\left(\sqrt{3}-c\right)^3.$$

Suy ra $P\le\frac{2}{27}\left(\sqrt{3}-c\right)^3+c^2(1-c).$

Xét hàm số $f(c)=\frac{2}{27}\left(\sqrt{3}-c\right)^3+c^2(1-c)$ với $c\in[0;1]$.

Ta có $f'(c)=-\frac{2}{9}\left(\sqrt{3}-c\right)^2+2c-3c^2=-\frac{29}{9}c^2+\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}+2\right)c-\frac{2}{3};$

và $f'(c)<0$ với mọi $c\in[0;1]$.

Suy ra $f(c)$ nghịch biến trên $[0;1]$. Do đó $f(c)\le f(0)=\frac{2\sqrt{3}}{9}.$

Suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, đạt khi $(a;b;c)=\left(1;\frac{1}{\sqrt{3}};0\right)$.

Ví dụ 15. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$

(Học sinh giỏi Rumani, 2006)

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)a^2b^2c^2.$$

Hơn nữa, với $a, b, c>0$ ta có $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abc(a+b+c)$.

Ta sẽ chứng minh $abc(a+b+c)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)a^2b^2c^2$. Hay

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)abc\le 3.$$

Xét hiệu

$$H=\left(a^2+\frac{(b+c)^2}{2}\right)a\frac{(b+c)^2}{4}-\left(a^2+b^2+c^2\right)abc$$

$$=a^3\left(\frac{(+c)^2}{4}-bc\right)+a\left(\frac{(b+c)^4}{8}-bc\left(b^2+c^2\right)\right)=\frac{a^3(b-c)^2}{4}+\frac{a(b-c)^4}{8}\ge 0.$$

Suy ra $\left(a^2+\dfrac{(b+c)^2}{2}\right)a\dfrac{(b+c)^2}{4}\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)abc.$

Ta sẽ chứng minh $\left(a^2+\dfrac{(b+c)^2}{2}\right)a\dfrac{(b+c)^2}{4}\leq 3$, hay

$$\left(a^2+\frac{(3-a)^2}{2}\right)a\frac{(3-a)^2}{4}\leq 3.$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với $\dfrac{3}{8}a^5-3a^4+9a^3-\dfrac{27}{2}a^2+\dfrac{81}{8}a\leq 3.$

Xét hàm số $f(a)=\dfrac{3}{8}a^5-3a^4+9a^3-\dfrac{27}{2}a^2+\dfrac{81}{8}a$ với $a\in(0;3)$. Ta có

$f'(a)=\dfrac{15}{8}a^4-12a^3+27a^2-27a+\dfrac{81}{8}=(a-1)(a-3)\left(\dfrac{15}{8}a-\dfrac{9}{2}a+\dfrac{27}{8}\right);$

$f'(a)=0\Leftrightarrow a=1.$

Suy ra bảng biến thiên

a	0		1		3
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra bất đẳng thức được chứng minh.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Bài toán rất đẹp này được tác giả Vasile Cirtoaje đề nghị trong kỳ thi quốc gia của Rumani năm 2006. Đến nay đã có khá nhiều lời giải cho bài toán này, sau đây ta giới thiệu ba cách giải khác để bạn đọc tham khảo.

Cách 2. Đặt $x=ab+bc+ca$. Khi đó $0<x\leq 3$ và $abc\leq\dfrac{x^2}{9}$. Ta có

$$VT=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{x^2}{a^2b^2c^2}-\frac{6}{abc}\text{ và } VP=9-2x.$$

Bất đẳng thức tương đương với $\dfrac{x^2}{a^2b^2c^2}-\dfrac{6}{abc}\geq 9-2x$

$$\Leftrightarrow x^2-6abc\geq(9-2x)a^2b^2c^2\Leftrightarrow x^2\geq 6abc+(9-2x)a^2b^2c^2.$$

Ta sẽ chứng minh $x^2 \geq 6.\frac{x^2}{9}+(9-2x)\frac{x^4}{81} \Leftrightarrow \frac{x^2(x-3)^2(2x+3)}{81} \geq 0$, đúng. Suy ra điều phải chứng minh.

Cách 3. Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{3}{abc}.$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{3}{abc} \geq a^2+b^2+c^2$. Bất đẳng thức tương đương với

$$abc\left(a^2+b^2+c^2\right) \leq 3. \qquad (*)$$

Lại áp dụng $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ ta có $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$.

Suy ra $abc \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{9}$. Từ đó suy ra

$$abc\left(a^2+b^2+c^2\right) \leq \frac{(ab+bc+ca)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{(a+b+c)^2}{3}\right)^3=3.$$

Hay (*) đúng, suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 4. Theo giả thiết $a, b, c>0$ nên $a^2+b^2+c^2<(a+b+c)^2=9$. Từ đó nếu có một trong ba số, giả sử $a<\frac{1}{3}$ thì $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}>9>a^2+b^2+c^2$, hay bất đẳng thức đúng.

Xét trường hợp $a, b, c \geq \frac{1}{3}$. Khi đó, vì $a+b+c=3$ nên $a, b, c \leq \frac{7}{3}$. Suy ra $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$. Ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}-a^2+\frac{1}{b^2}-b^2+\frac{1}{c^2}-c^2 \geq 0.$$

Xét hàm $f(x)=\frac{1}{x^2}-x^2$ với $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm $y=f(x)$ tại $x=1$ là $y=-4x+4$.

Ta có $f(x)-(-4x+4)=\frac{(x-1)^2\left(2-(x-1)^2\right)}{x^2} \geq 0$ với mọi $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$.

Do đó $f(x) \geq -4x+4$ với mọi $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$.

Từ đó ta có $f(a)+f(b)+f(c)\geq 0$ với $a, b, c\in\left[\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right]$, hay bất đẳng thức đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 16. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3.$$

Lời giải. Ta có

$$P=a\left(b^3-c^3\right)+b\left(c^3-a^3\right)+c\left(a^3-b^3\right)-3abc\left((b-c)+(c-a)+(a-b)\right)$$

$$=ab\left(b^2-a^2\right)+bc\left(c^2-b^2\right)+ca\left(a^2-c^2\right)=(b-c)(c-a)(a-b).$$

Đặt $f(a, b, c)=(a-b)(b-c)(c-a)$. Khi đó $f(-a,-b,-c)=-f(a, b, c)$. Điều đó có nghĩa miền giá trị của $f(a, b, c)$ là tập đối xứng qua 0. Do đó chúng ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của

$$|P|=|(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c\geq 0$. Khi đó vì $a+b+c=1$ nên $b\leq\frac{1}{2}$ và $a\leq 1-b$. Ta có

$$|P|=(a-b)(b-c)(a-c)\leq ab(a-b)\leq(1-b)b(1-2b)=2b^3-3b^2+b.$$

Xét hàm số $f(b)=2b^3-3b^2+b$ với $b\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Ta có $f'(b)=6b^2-6b+1$; $f'(b)=0\Leftrightarrow b=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Vì $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}$ nên $\max\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]}f(b)=f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}$.

Từ đó ta có giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{\sqrt{3}}{18}$, đạt được khi $a=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$, $b=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$, $c=0$; giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{\sqrt{3}}{18}$, đạt được khi $a=-\frac{3+\sqrt{3}}{6}$, $b=-\frac{3-\sqrt{3}}{6}$, $c=0$.

Nhận xét. Để tìm giá trị lớn nhất của $P=f(a, b, c)=(a-b)(b-c)(c-a)$ ta có thể giải như sau

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a, b, c\}$.

Khi đó nếu $b \ge c$ thì $P \le 0$.

Xét $a \ge c \ge b$. Đặt $x = a + b$, khi đó $c = 1 - x$ và

$$P = (a-b)(c-b)(a-c) \le (a+b)c(a+b-c) = x(1-x)(2x-1).$$

Xét hàm số $g(x) = x(1-x)(2x-1)$ với $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

Ta có $g'(x) = -6x^2 + 6x - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

Vì $g(1) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $g\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}$ nên suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{\sqrt{3}}{18}$.

Do miền giá trị của $f(a, b, c)$ là tập đối xứng qua 0 ta suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{\sqrt{3}}{18}$.

Ví dụ 17. Cho các số thực a, b, c, d thoả mãn $a^2 + b^2 = 1$ và $c - d = 3$. Chứng minh rằng $ac + bd - cd \le \frac{9+6\sqrt{2}}{4}$.

(Học sinh giỏi Tỉnh Nghệ An, 2007)

Lời giải. Ta có: $VT \le \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} - cd = \sqrt{2d^2+6d+9} - d^2 - 3d$.

Xét hàm số $f(d) = \sqrt{2d^2+6d+9} - d^2 - 3d$.

Ta có $f'(d) = (2d+3)\dfrac{1-\sqrt{2\left(d+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}}{\sqrt{2d^2+6d+9}}$.

Vì $\dfrac{1-\sqrt{2\left(d+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}}{\sqrt{2d^2+6d+9}} < 0$ nên $f'(d) = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{3}{2}$ và $f'(d) > 0 \Leftrightarrow d < -\frac{3}{2}$.

Suy ra $f(d) \le f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9+6\sqrt{2}}{4}$. Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = -\frac{1}{\sqrt{2}}, c = \frac{3}{2}, d = -\frac{3}{2}$.

Ví dụ 18. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $21ab + 2bc + 8ca \le 12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$.

(Chọn đội tuyển Việt Nam thi IMO, 2001)

Lời giải. Đặt $x=\frac{1}{a},\ y=\frac{2}{b},\ z=\frac{3}{c}$.

Khi đó x, y, z là các số dương thỏa mãn $2xyz\ge 2x+4y+7z$ và $P=x+y+z$.

Ta có $2xyz\ge 2x+4y+7z \Leftrightarrow z(2xy-7)\ge 2x+4y$.

Suy ra $2xy>7$ và $z\ge\frac{2x+4y}{2xy-7}$. Suy ra $P=x+y+z\ge x+y+\frac{2x+4y}{2xy-7}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$x+y+\frac{2x+4y}{2xy-7}=x+\frac{11}{2x}+\left(\frac{2xy-7}{2x}\right)+\frac{2x+\frac{14}{x}}{2xy-7}\ge x+\frac{11}{2x}+2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}.$$

Xét hàm số $f(x)=x+\frac{11}{2x}+2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}$ với $x>0$.

Ta có $f'(x)=1-\frac{11}{2x^2}-\frac{14}{x^2\sqrt{x^2+7}}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=3$.

Suy ra bảng biến thiên

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{15}{2}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P\ge\frac{15}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$x=3,\ y=\frac{5}{2},\ z=2$ hay $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{4}{5},\ c=\frac{3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{2}$, đạt được khi $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{4}{5},\ c=\frac{3}{2}$.

Ví dụ 19. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz+x+z=y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{x^2+1}-\frac{2}{y^2+1}-\frac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{3z}{\left(z^2+1\right)\sqrt{z^2+1}}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $x=\frac{y-z}{1+yz}$.

Suy ra $P=\dfrac{2(1+yz)^2}{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}-\dfrac{2}{y^2+1}-\dfrac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\dfrac{3z}{\left(z^2+1\right)\sqrt{z^2+1}}$

$$=\frac{2z\left(2y+(y^2+1)z\right)}{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}-\frac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{3z}{\left(z^2+1\right)\sqrt{z^2+1}}.$$

Do $\dfrac{2z\left(2y+(y^2+1)z\right)}{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}=\dfrac{2z\sqrt{\left(2y+(y^2+1)z\right)^2}}{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}$

$$\le\frac{2z\sqrt{\left(4y^2+(y^2+1)\right)\left(1+z^2\right)}}{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}=\frac{2z}{\sqrt{z^2+1}}$$

nên $P\le\dfrac{2z}{\sqrt{z^2+1}}-\dfrac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\dfrac{3z}{\sqrt{z^2+1}}\left(1-\dfrac{z^2}{z^2+1}\right).$

Đặt $t=\dfrac{z}{\sqrt{z^2+1}}$, khi đó $t\in(0;1)$ và $P\le-3t^3+t$.

Xét hàm số $f(t)=-3t^3+t$ trên $(0;1)$.

Ta có $f'(t)=-9t^2+1$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$ và $f'(t)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $t=\dfrac{1}{3}$. Suy ra $\max\limits_{(0;1)}f(t)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{9}$.

Do đó $P\le\dfrac{2}{9}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\sqrt{2}$, $z=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{2}{9}$, đạt được khi $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\sqrt{2}$, $z=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Ví dụ 20. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$ và không có hai số đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(a+b)(b+c)}+\frac{1}{(c+a)(a+b)}+(c+1)(a+b+3).$$

Lời giải.

Ta có $P=\dfrac{1+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}+(c+1)(4-c)\ge\dfrac{1+c}{(1-c).\dfrac{(1+c)^2}{4}}+(c+1)(4-c)$

$$=\frac{4}{1-c^2}+4-c^2+3c$$

Xét hàm số $f(c)=\frac{4}{1-c^2}+4-c^2+3c$ với $c\in[0;1]$.

Ta có $f'(c)=\frac{8}{(1-c^2)^2}-2c+3>0$ với mọi $c\in(0;1)$.

Do đó hàm $f(c)$ đồng biến trên $[0;1]$. Suy ra $P\ge\min\limits_{[0;1]}f(c)=f(0)=8$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c=0$, $a=b=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 8, đạt được khi $c=0$, $a=b=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 21. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+(a+b)c+4c^2=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a(b+c)^2}{a+c}+\frac{b(a+c)^2}{b+c}-\frac{1}{c}.$$

Lời giải. Đặt $a+c=x$, $b+c=y$, khi đó $a^2+b^2+(a+b)c+4c^2=4$

$$\Leftrightarrow (x-c)^2+(y-c)^2+(x+y-2c)c+4c^2=4$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-c(x+y)=4-4c^2. \qquad (1)$$

Mặt khác

$$P=\frac{y^2(x-c)}{x}+\frac{x^2(y-c)}{y}-\frac{1}{c}=x^2+y^2-c\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)-\frac{1}{c}. \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\ge x+y$ nên suy ra

$$-c\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)\le -c. \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $P\le x^2+y^2-c(x+y)-\frac{1}{z}=-4c^2-\frac{1}{c}+4$.

Xét hàm số $f(c)=-4c^2-\frac{1}{c}+4$ với $c>0$.

Ta có

$$f'(c)=-8c+\frac{1}{c^2};\ f'(c)=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}.$$

Suy ra bảng biến thiên

c	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(c)$		$+$	0	$-$	
$f(c)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $P \le \max\limits_{(0;+\infty)} f(c) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, dấu đẳng thức xảy ra khi $c = \frac{1}{2}$, $a = b = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1, đạt được khi $c = \frac{1}{2}$, $a = b = 1$.

Ví dụ 22. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a \le b \le c$ và $a^2 + 2b^2 + 4c^2 = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = ab^2 + 4bc^2 + ca^2 - abc - b^2 + 3b.$$

(Học sinh giỏi Tỉnh Quảng Ninh, 2013 - 2014)

Lời giải. Vì $0 \le a \le b \le c$ nên ta có $(b-a)(b-c) \le 0$

$$\Leftrightarrow b^2 + ac - bc - ab \le 0$$

$$\Leftrightarrow ab^2 + a^2c - abc - a^2b \le 0$$

$$\Leftrightarrow ab^2 + 4bc^2 + ca^2 - abc \le a^2b + 4bc^2$$

$$\Leftrightarrow ab^2 + 4bc^2 + ca^2 - abc \le b\left(a^2 + 4c^2\right).$$

Kết hợp với giả thiết $a^2 + 2b^2 + 4c^2 = 12$ ta có

$$P \le b\left(a^2 + 4c^2\right) - b^2 + 3b = b\left(12 - 2b^2\right) - b^2 + 3b = -2b^3 - b^2 + 15b.$$

Mặt khác, vì $a \le b \le c$ và $a^2 + 2b^2 + 4c^2 = 12$ nên $12 \ge 6b^2$. Suy ra $b \le \sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(b) = -2b^3 - b^2 + 15b$ với $0 \le b \le \sqrt{2}$.

Ta có $f'(b) = -6b^2 - 2b + 15$; $f'(b) > 0$ với mọi $b \in \left[0; \sqrt{2}\right]$.

Do đó hàm $f(b)$ đồng biến trên $\left[0; \sqrt{2}\right]$.

Suy ra $P \le \max\limits_{\left[0;\sqrt{2}\right]} f(b) = f\left(\sqrt{2}\right) = 11\sqrt{2} - 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{2}$, $a = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $11\sqrt{2} - 2$, đạt được khi $a = 0$, $b = c = \sqrt{2}$.

3.4 Xét hàm lần lượt từng biến

Ví dụ 1. Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \le 5abc.$$

Lời giải. Giả sử $1 \le c \le b \le a \le 2$. Khi đó bất đẳng thức tương đương với

$$a^3 - 5bca + b^3 + c^3 \le 0.$$

Xét hàm số $f(a) = a^3 - 5bca + b^3 + c^3$ trên $[1; 2]$.

Ta có $f'(a) = 3a^2 - 5bc$; $f''(a) = 6a > 0$ với mọi $a \in [1; 2]$.

Suy ra $f(a) \le \max\{f(1), f(2)\} = \max\{1 - 5bc + b^3 + c^3, 8 - 10bc + b^3 + c^3\}$.

Xét $g(b) = f(1) = b^3 - 5cb + c^3 + 1$ với $b \in [1; 2]$.

Ta có $g'(b) = 3b^2 - 5c$; $g''(b) = 5b > 0$ với mọi $b \in [1; 2]$.

Suy ra $g(b) \le \max\{g(1), g(2)\} = \max\{c^3 - 5c + 2, c^3 - 10c + 9\}$.

Ta có $c^3 - 5c + 2 = (c-2)(c^2 + 2c - 1) \le 0$ với mọi $c \in [1; 2]$;

và $c^3 - 10c + 9 = (c-1)(c^2 + c - 9) \le 0$ với mọi $c \in [1; 2]$.

Do đó $g(b) \le 0$ với mọi $b \in [1; 2]$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $h(b) = f(2) = b^3 - 10cb + c^3 + 8 \le 0$ với mọi $b \in [1; 2]$.

Từ đó ta suy ra $f(a) \le 0$ với mọi $a \in [1; 2]$. Bất đẳng thức được chứng minh.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c) = (2; 1; 1)$ và các hoán vị.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải bằng đánh giá bất đẳng thức như sau
Giả sử $1 \le c \le b \le a \le 2$. Khi đó ta có

$$a^3 + 2 \le 5a \Leftrightarrow (a-2)(a^2 + 2a - 1) \le 0; \quad (1)$$

$$5a + b^3 \le 5ab + 1 \Leftrightarrow (b-1)(b^2 + b + 1 - 5a) \le 0; \quad (2)$$

$$5ab + c^3 \le 5abc + 1 \Leftrightarrow (c-1)(c^2 + c + 1 - 5ab) \le 0. \quad (3)$$

Các bất đẳng thức trên đúng vì $a, b, c \in [1; 2]$ và

$$b^2 + b + 1 \le a^2 + a + 1 \le 2a + a + 1 \le 5a,$$

$$c^2 + c + 1 \le a^2 + a + 1 \le 5a \le 5ab.$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 2$, $b = c = 1$.

Ví dụ 2. Cho các số thực $a,b,c\in[1;2]$. Chứng minh rằng

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)\le(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Lời giải. Giả sử $1\le c\le b\le a\le 2$. Khi đó bất đẳng thức tương đương với

$$2a^3-(b+c)a^2-\left(b^2+c^2+3bc\right)a+2\left(b^3+c^3\right)-bc(b+c)\le 0.$$

Xét hàm số $f(a)=2a^3-(b+c)a^2-\left(b^2+c^2+3bc\right)a+2\left(b^3+c^3\right)-bc(b+c)$ với $a\in[1;\,2]$. Ta có

$$f'(a)=6a^2-2a(b+c)-(b+c)^2-bc;$$

$$f''(a)=12a-2(b+c)\ge 12a-2(a+a)=8a>0,\ \forall a\in[1;2].$$

Do đó $f(a)\le\max\{f(1);f(0)\}$.

Ta có $g(b)=f(1)=2b^3-(1+c)b^2-\left(c^2+3c+1\right)b+2c^3-c^2-c+2;$

$$g''(b)=2\left(6b-(1+c)\right)\ge 2\left(6b-(1+b)\right)=2(5b-1)>0,\ \forall b\in[1;2].$$

Do đó $g(b)\le\max\{g(1);g(0)\}$.

Ta có $\begin{cases} g(1)=2c^3-2c^2-5c+2=(c-2)\left(2c^2+2c-1\right)\le 0,\ \forall c\in[1;2] \\ g(2)=2c^3-3c^2-11c+12=(c-1)\left(2c^2-c-12\right)\le 0,\ \forall c\in[1;2]. \end{cases}$

Vì vậy $f(1)=g(b)\le 0$. Hoàn toàn tương tự ta có $f(2)\le 0$. Từ đó suy ra $f(a)\le 0$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a;\,b;\,c)=(2;\,1;\,1)$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét. Nếu ta sử dụng bất đẳng thức Jensen thì lời giải sẽ ngắn gọn hơn.

Ví dụ 3. Cho các số thực $x\ge y\ge z\ge 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}.$$

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)$. Ta có

$$f'(x)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{y}\right)-\left(\frac{y}{x^2}-\frac{z}{x^2}\right)=(y-z)\left(\frac{1}{yz}-\frac{1}{x^2}\right);\ f'(x)\ge 0 \text{ với mọi } x\ge y.$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến. Do đó $f(x)\ge f(y)=0$. Suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có ít nhất hai số bằng nhau.

Ví dụ 4. Cho các số thực $x,\,y,\,z\in[1;\,3]$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}\le\frac{26}{3}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $x \ge y \ge z$.

Xét hàm số $f(x)=\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)x+\frac{y+z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}$ với $x\in[y;\,3]$. Ta có

$f'(x)=\frac{(y+z)\left(x^2-yz\right)}{x^2yz}$; $f'(x)>0$ với mọi $x>y\ge z$. Do đó $f(x)$ đồng biến trên $[y;\,3]$. Suy ra $f(x)\le f(3)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{y}\right)z+\frac{3+y}{z}+\frac{3}{y}+\frac{y}{3}$.

Xét hàm số $g(z)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{y}\right)z+\frac{3+y}{z}+\frac{3}{y}+\frac{y}{3}$ với $z\in[1;\,y]$.

Ta có $g'(z)=\frac{(y+3)\left(z^2-3y\right)}{3yz^2}$; $g'(z)<0$ với mọi $z\in[1;\,y]$. Do đó $g(z)$ nghịch biến trên $[1;\,y]$. Suy ra $g(z)\le g(1)=\frac{4(y-1)(y-3)}{3y}+\frac{26}{3}\le\frac{26}{3}$.

Từ đó ta có $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}\le\frac{26}{3}$, điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=3,\ z=1,\ y=1$ hoặc $y=3$ và các hoán vị.

Nhận xét. 1. Ta có cách giải khác như sau

Không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z$. Khi đó

$$(x-y)(y-z)\ge 0\Leftrightarrow xy+yz\ge y^2+xz\Leftrightarrow\frac{x}{z}+1\ge\frac{y}{z}+\frac{x}{y};$$

$$xy+yz\ge y^2+xz\Leftrightarrow 1+\frac{z}{x}\ge\frac{y}{x}+\frac{z}{y}.$$

Do đó $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\le\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+2$.

Suy ra $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\le 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+2$. (1)

Đặt $t=\frac{x}{z}$, ta có $1\le t\le 3$ nên $(t-1)(t-3)\le 0\Leftrightarrow t^2-4t+3\le 0\Leftrightarrow t+\frac{3}{t}\le 4$.

Suy ra $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\le t+\frac{1}{t}\le 4-\frac{2}{t}\le 4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

2. Bất đẳng thức đã cho tương đương với $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le\frac{35}{3}$.

Ta có bất đẳng thức tổng quát

Cho các số thực $x_1, x_2, ..., x_n \in [a; b]$ $(a, b \ge 0)$. Chứng minh rằng

$$(x_1+x_2+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)\le n^2+k_n\frac{(a-b)^2}{4ab},$$

trong đó $k_n = n^2$ nếu n chẵn và n^2-1 nếu n lẻ.

Ví dụ 5. Cho các số thực $a, b, c \in [1; 3]$. Chứng minh rằng

$$5\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+12.$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với: $5\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge12.$

Xét hàm số $f(a)=5\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)$. Ta có

$f'(a)=\frac{(5c-b)\left(a^2-bc\right)}{a^2bc}$; $f'(a)=0 \Leftrightarrow a=\sqrt{bc}$ vì $5c>b$ do $b, c\in[1; 3]$.

Suy ra $f(a)\ge f\left(\sqrt{bc}\right)=10\sqrt{\frac{c}{b}}-\frac{c}{b}+5\frac{b}{c}-2\sqrt{\frac{b}{c}}$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{c}{b}}$, khi đó $t\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right]$ và $f(a)\ge10t-t^2+\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}$.

Xét hàm số $g(t)=10t-t^2+\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}$ với $t\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right]$. Ta có

$g'(t)=\frac{2\left(t^3-1\right)(5-t)}{t^3}$; $g'(t)=0\Leftrightarrow t=1$; $g'(t)>0\Leftrightarrow t\in\left(1; \sqrt{3}\right)$.

Suy ra $g(t)\ge g(1)=12$. Từ đó ta có $f(a)\ge12$, điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\sqrt{bc}$, $b=c$ hay $a=b=c$.

Ví dụ 6. Cho các số thực x, y, z thuộc đoạn $[1; 4]$ thỏa mãn $x\ge y$, $x\ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2011)

Lời giải. Xét hàm số $f(z)=\dfrac{x}{2x+3y}+\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{z}{z+x}$. Ta có

$$f'(z)=\frac{-y}{(z+y)^2}+\frac{x}{(z+x)^2}=\frac{(x-y)\left(z^2-xy\right)}{(z+y)^2(z+x)^2}.$$

Nếu $x=y$ thì $P=\dfrac{6}{5}$.

Xét $x>y$. Khi đó $f'(z)=0\Leftrightarrow z=\sqrt{xy}$ và $f'(z)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm. Suy ra $P=f(z)\geq f\left(\sqrt{xy}\right)=\dfrac{x}{2x+3y}+\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, khi đó $t\in(1;2]$ và $P\geq\dfrac{t^2}{2t^2+3}+\dfrac{2}{t+1}$.

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t^2}{2t^2+3}+\dfrac{2}{t+1}$ trên $(1;2]$.

Ta có $g'(t)=\dfrac{-\left(4t^3(t-1)+3\left(2t^2-t+3\right)\right)}{\left(2t^2+3\right)^2(t+1)^2}$; $g'(t)<0$ với mọi $t\in(1;2)$.

Suy ra $g(t)$ nghịch biến trên $(1;2]$. Do đó $g(t)\geq g(2)=\dfrac{34}{33}$. Từ đó suy ra $P\geq\dfrac{34}{33}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=4$, $y=1$, $z=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{34}{33}$, đạt được khi $x=4$, $y=1$, $z=2$.

Ví dụ 7. Cho các số thực x, y, $z\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)^2.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $x\geq y\geq z$.

Xét hàm số $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)(x+y+z)^2$. Ta có

$$f'(x)=(x+y+z)\left(\frac{xyz+\left(2x^2-yz\right)(y+z)}{x^2yz}\right);\ f'(x)>0 \text{ vì } 2x^2>yz.$$

Suy ra hàm $f(x)$ đồng biến. Do đó $f(x) \le f(1) = \left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(1+y+z)^2$.

Xét hàm số $g(y) = \left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(1+y+z)^2$. Ta có

$$g'(y) = \frac{(1+y+z)\left((2y^2+y-1)z+(2y^2-z^2)\right)}{y^2z};\ g'(y)>0 \text{ với mọi } y \in \left[\frac{1}{2};1\right].$$

Do đó $g(y) \le g(1) = \left(2+\frac{1}{z}\right)(2+z)^2$.

Xét hàm số $h(z) = \left(2+\frac{1}{z}\right)(2+z)^2$. Ta có $h'(z) = (2+z)^2\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}\right)$; $h'(z)>0$ với mọi $z \in \left(\frac{1}{2};1\right)$. Suy ra $h(z) \le h(1) = 27$. Do đó $P \le 27$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Nhận xét. 1. Bằng cách tương tự ta cũng tìm được giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{27}{2}$, đạt khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.

2. Chúng ta cũng có thể tìm giá trị lớn nhất của P như sau

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$P = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)^2 \le \frac{1}{27}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+2(x+y+z)\right)^3.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t+\frac{1}{t}$ trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Ta có $f'(t) = 2-\frac{1}{t^2}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(t) \le 3$. Từ đó suy ra $P \le 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Ví dụ 8. Cho các số thực $0 \le a \le b \le c \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left(a^2 - b^2\right)(b - c) + c^2(1 - c).$$

Lời giải. Xét hàm số $f(a) = \left(a^2 - b^2\right)(b - c) + c^2(1 - c)$ với $a \in [0; b]$. Ta có $f'(a) = 2(b - c)a$; $f'(a) \le 0$ với mọi $a \in [0; b]$. Suy ra

$$f(a) \le f(0) = -b^2(b - c) + c^2(1 - c).$$

Xét hàm số $g(b) = -b^2(b - c) + c^2(1 - c)$ với $b \in [0; c]$.

Ta có $g'(b) = -3b^2 + 2bc$; $g'(b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \dfrac{2c}{3}. \end{array}\right.$

Suy ra $g(b) \le g\left(\dfrac{2c}{3}\right) = -\dfrac{23}{27}c^3 + c^2$.

Xét hàm số $h(c) = -\dfrac{23}{27}c^3 + c^2$ với $c \in [0; 1]$.

Ta có $h'(c) = -\dfrac{23}{9}c^2 + 2c$; $h'(c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = \dfrac{18}{23}. \end{array}\right.$

Suy ra $h(c) \le h\left(\dfrac{18}{23}\right) = \dfrac{108}{529}$. Từ đó ta suy ra $P \le \dfrac{108}{529}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$, $b = \dfrac{12}{23}$, $c = \dfrac{18}{23}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{108}{529}$, đạt được khi $a = 0$, $b = \dfrac{12}{23}$, $c = \dfrac{18}{23}$.

Ví dụ 9. Cho các số thực dương $a \le b \le c$. Chứng minh rằng

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \le 3 + \frac{(c-a)^2}{a(c+a)}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{2}{\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}} + \frac{2\dfrac{b}{a}}{\dfrac{c}{a} + 1} + \frac{2\dfrac{c}{a}}{1 + \dfrac{b}{a}} \le 3 + \frac{\left(\dfrac{c}{a} - 1\right)^2}{\dfrac{c}{a} + 1}.$$

Đặt $x = \dfrac{c}{a}$, $y = \dfrac{b}{a}$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2y}{1+x}+\frac{2x}{1+y}\le 3+\frac{(x-1)^2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x+y}+\frac{2y}{1+x}+\frac{2x}{1+y}-\frac{x^2+x+4}{x+1}\le 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+4-\left(\frac{2(x+1)}{x+y}+\frac{2x(x+1)}{1+y}+2y\right)\ge 0.$$

Xét hàm số $f(x)=x^2+x+4-\left(\frac{2(x+1)}{x+y}+\frac{2x(x+1)}{1+y}+2y\right)$ với $x\ge y\ge 1$.

Ta có $f'(x)=2x+1-\frac{2(2x+1)}{y+1}-\frac{2(y-1)}{(x+y)^2}=(y-1)\left(\frac{2x+1}{y+1}-\frac{2}{(x+y)^2}\right)$;

$f'(x)\ge 0$ với mọi $x\ge y\ge 1$. Suy ra $f(x)$ đồng biến. Do đó

$$f(x)\ge f(y)=y^2-3y+3-\frac{1}{y}.$$

Ta có $f'(y)=2y-3+\frac{1}{y^2}=\frac{(y-1)^2(2y+1)}{y^2}>0$ với mọi $y>1$. Suy ra $f(y)$ đồng biến. Do đó $f(y)\ge f(1)=0$.

Từ đó ta có bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$ hay $a=b=c$.

Ví dụ 10. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b^2+c^3$.

Phân tích và lời giải. Trong bài toán này, các biến a, b, c bị ràng buộc với nhau bởi đẳng thức $a+b+c=3$. Vì vậy chúng ta không được xét hàm một biến, xem các biến còn lại là tham số. Để làm mất sự ràng buộc của các biến, chúng ta sẽ khử một biến bằng phép thế, khi đó hai biến còn lại không bị ràng buộc với nhau.

Ta có $a=3-b-c$, khi đó $P=3-b-c+b^2+c^3$.

Xét hàm số $f(b)=3-b-c+b^2+c^3$, với $b\in[0;3]$.

Ta có $f'(b)=2b-1$; $f'(b)=0\Leftrightarrow b=\frac{1}{2}$; $f'(b)>0\Leftrightarrow b>\frac{1}{2}$.

Suy ra $f(b)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)=c^3-c+\frac{11}{4}$.

Xét hàm số $g(c)=c^3-c+\frac{11}{4}$ với $c\in[0;3]$.

Ta có $g'(c)=3c^2-1$; $g'(c)=0 \Leftrightarrow c=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $g'(c)>0 \Leftrightarrow c\in\left(\frac{1}{\sqrt{3}};3\right)$.

Suy ra $g(c)\ge g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{11}{4}-\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Từ đó ta có $P\ge\frac{11}{4}-\frac{2}{3\sqrt{3}}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{5}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{11}{4}-\frac{2}{3\sqrt{3}}$, đạt khi $a=\frac{5}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 11. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c\le 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{3}{\sqrt{b}}+\frac{8}{\sqrt{3c+2a}}\ge\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $c\le 8-a-b$. Suy ra

$$VT\ge\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{3}{\sqrt{b}}+\frac{8}{\sqrt{24-a-3b}}.$$

Xét hàm số $f(a)=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{3}{\sqrt{b}}+\frac{8}{\sqrt{24-a-3b}}$ với $0<a<8$. Ta có

$$f'(a)=\frac{-1}{2a\sqrt{a}}+\frac{8}{2(24-a-3b)\sqrt{24-a-3b}}$$

$$f'(a)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{24-a-3b}\right)^3=\left(2\sqrt{a}\right)^3\Leftrightarrow a=\frac{24-3b}{5}\in(0;8)$$

và $f'(a)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm.

Suy ra $f(a)\ge f\left(\frac{24-3b}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{24-3b}}+\frac{3}{\sqrt{b}}+\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{96-12b}}=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{24-3b}}+\frac{3}{\sqrt{b}}$.

Xét hàm số $g(b)=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{24-3b}}+\frac{3}{\sqrt{b}}$ với $b\in(0;8)$. Ta có

$g'(b)=\frac{3.5\sqrt{5}}{2\sqrt{(24-3b)^3}}-\frac{3}{2\sqrt{b^3}}$; $g'(b)=0\Leftrightarrow b=3$ và $g'(b)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm.

Suy ra $g(b)\ge g(3)=\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Từ đó ta có bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=3, c=2$.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải bằng đánh giá bất đẳng thức như sau
Áp dụng bất đẳng thức Svacxo, ta có

$$VT=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{3}{\sqrt{b}}+\frac{8}{\sqrt{3c+2a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{9}{3\sqrt{b}}+\frac{16}{2\sqrt{3c+2a}}\ge\frac{(1+3+4)^2}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}+2\sqrt{3c+2a}}.$$

Mặt khác $\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}+2\sqrt{3c+2a}\right)^2=\left(\sqrt{a}+\sqrt{3}.\sqrt{3b}+2.\sqrt{3c+2a}\right)^2$

$$\le(1+3+4)(a+3b+3c+2a)\le 8.24$$

Từ đó suy ra $VT\ge\frac{8^2}{\sqrt{8.24}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=3,\ c=2$.

Ví dụ 12. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc+a+c=b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}.$$

(Học sinh giỏi Quốc gia, 2002)

Lời giải. Từ giả thiết ta có $b(1-ac)=a+c>0$. Suy ra $a<\frac{1}{c}$ và $b=\frac{a+c}{1-ac}$.

Khi đó

$$P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2(1-ac)^2}{(a+c)^2+(1-ac)^2}+\frac{3}{c^2+1}=\frac{2}{a^2+1}+\frac{2(a+c)^2}{\left(a^2+1\right)\left(c^2+1\right)}-2+\frac{3}{c^2+1}$$

$$=\frac{2\left(a^2+2ac+2c^2+1\right)^2}{\left(a^2+1\right)\left(c^2+1\right)}+\frac{3}{c^2+1}-2.$$

Xét hàm số $f(a)=\frac{2\left(a^2+2ac+2c^2+1\right)^2}{\left(a^2+1\right)\left(c^2+1\right)}+\frac{3}{c^2+1}-2$ với $0<a<\frac{1}{c}$. Ta có

$f'(a)=\frac{-4c\left(a^2+2ac-1\right)}{\left(a^2+1\right)^2\left(1+c^2\right)}$; $f'(a)=0\Leftrightarrow a=\sqrt{c^2+1}-c$; và $f'(a)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua nghiệm. Suy ra

$$f(a)\le f\left(\sqrt{c^2+1}-c\right)=\frac{2c}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{3}{c^2+1}.$$

Xét hàm số $g(c)=\frac{2c}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{3}{c^2+1}$ với $c>0$. Ta có

$g'(c)=\dfrac{2\left(1-8c^2\right)}{\left(c^2+1\right)^2\left(3c+\sqrt{c^2+1}\right)}$; $g'(c)=0\Leftrightarrow c=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ và $g'(c)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua nghiệm. Suy ra $g(c)\le g\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\dfrac{10}{3}$.

Từ đó ta suy ra $P\le\dfrac{10}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, b=\sqrt{2}, c=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải bằng phương pháp lượng giác hóa

Ta có $abc+a+c=b\Leftrightarrow ac+\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=1$. Từ đó ta có thể đặt

$a=\tan\dfrac{A}{2}, \dfrac{1}{b}=\tan\dfrac{B}{2}, c=\tan\dfrac{C}{2}$, với A, B, C là ba góc một tam giác.

Khi đó $P=2\cos^2\dfrac{A}{2}-2\sin^2\dfrac{B}{2}+3\cos^2\dfrac{C}{2}=\cos A+\cos B+3\left(1-\sin^2\dfrac{C}{2}\right)$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-3\sin^2\frac{C}{2}+3\le 2\sin\frac{C}{2}-3\sin^2\frac{C}{2}+3$$

$$=\frac{10}{3}-3\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{3}\right)^2\le\frac{10}{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}A=B\\ \sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, b=\sqrt{2}, c=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Sau đây chúng ta trình bày thêm một cách giải sử dụng bất đẳng thức

Từ giả thiết ta có $c=\dfrac{b-a}{1+ab}>0$. Khi đó

$$P=\frac{2}{1+a^2}-\frac{2}{1+b^2}+\frac{3(1+ab)^2}{(1+ab)^2+(b-a)^2}=\frac{2(b^2-a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}+\frac{3(1+ab)^2}{(1+a^2)(1+b^2)}$$

$$=\frac{2(b^2-a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}-\frac{3(a-b)^2}{(1+a^2)(1+b^2)}+3=\frac{(b-a)(5a-b)}{(1+a^2)(1+b^2)}+3.$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{(b-a)(5a-b)}{(1+a^2)(1+b^2)}=\frac{(3b-3a)(5a-b)}{3(1+a^2)(1+b^2)}\le\frac{(3b-3a+5a-b)^2}{12(1+a^2)(1+b^2)}$$

$$=\frac{(a+b)^2}{3(1+a^2)(1+b^2)}\le\frac{(a+b)^2}{3(a+b)^2}=\frac{1}{3}.$$

Suy ra $P \le \frac{10}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 3b-3a=5a-b \\ \frac{a}{1}=\frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}}, b=\sqrt{2}, c=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{10}{3}$.

3.5 Xét hàm độc lập các biến

Bây giờ ta xét loại biểu thức đối xứng, độc lập giữa các biến. Cụ thể ta xét bài toán

Cho $a_1, a_2, ..., a_n \in D$ thỏa mãn $g(a_1)+g(a_2)+...+g(a_n)=k$ (k là hằng số). Tìm giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của biểu thức

$$P=f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n).$$

Định hướng tìm cách giải: Ta thấy biểu thức P đối xứng với các biến nên nhiều khả năng P đạt giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) khi $a_1=a_2=...=a_n=a$.

Ta cần biểu diễn f qua g. Cụ thể nếu tìm giá trị lớn nhất của P thì ta sẽ đánh giá $f(t)\le r.g(t)+s$; nếu tìm giá trị nhỏ nhất của P thì ta sẽ đánh giá $f(t)\ge r.g(t)+s$ với điều kiện dấu đẳng thức xảy ra khi $t=a$.

Xét trường hợp tìm giá trị nhỏ nhất: Ta cần tìm r, s sao cho

$$f(t)\ge r.g(t)+s \text{ và dấu đẳng thức xảy ra khi } t=a.$$

Xét hàm số $h(t)=f(t)-r.g(t)$.

Tham số r được xác định sao cho $h(t)$ đạt cực tiểu tại $t=a$. Điều đó tương đương với $h'(a)=0$. Suy ra $r=\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Chúng ta xét một ví dụ khá quen thuộc

Ví dụ 1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Lời giải. Trong ví dụ này, $f(t)=\frac{t}{1-t^2}$, $g(t)=t^2$. Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Khi đó $r=\frac{f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{g'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, đồng thời khi đó $s=0$.

Có nghĩa là chúng ta sẽ chứng minh

$$\frac{t}{1-t^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}t^2 \text{ với mọi } t \in (0; 1), \text{ hay } t\left(1-t^2\right) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ với mọi } t \in (0; 1).$$

Đến đây chúng ta có nhiều cách để chứng minh.

Cách 1. Sử dụng hàm số:

Xét hàm số $u(t) = t(1-t^2)$ trên $(0; 1)$. Ta có

$$u'(t) = -3t^2 + 1;\ u'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } u'(t) > 0 \Leftrightarrow t \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Suy ra $u(t) \leq u\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ với mọi $x \in (0; 1)$. Do đó $\frac{t^2}{t\left(1-t^2\right)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}t^2$.

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức Côsi:

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\left(t\left(1-t^2\right)\right)^2 = \frac{1}{2}.2t^2.\left(1-t^2\right).\left(1-t^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}.$$

Suy ra $t\left(1-t^2\right) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Tương tự như trên ta cũng có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq 1.$$

Lời giải. Ta có $\frac{a}{1+bc} \geq \frac{a}{1+\frac{b^2+c^2}{2}} = \frac{2a}{3-a^2}$.

Ta sẽ chứng minh $\frac{2a}{3-a^2} \geq a^2$. (*)

Thật vậy, $(*) \Leftrightarrow a(a-1)^2(a+2) \geq 0$, luôn đúng.

Tương tự ta cũng có $\frac{b}{1+ca} \geq b^2$; $\frac{c}{1+ab} \geq c^2$. Do đó

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có hai số bằng 0 và số còn lại bằng 1.

Ví dụ 3. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{(y+z)^2}+\frac{y}{(z+x)^2}+\frac{z}{(x+y)^2}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$ ta có

$$P\ge\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y^2+z^2}+\frac{y}{z^2+x^2}+\frac{z}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3-x^2}+\frac{y}{3-y^2}+\frac{z}{3-z^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{x(3-x^2)}+\frac{y^2}{y(3-y^2)}+\frac{z^2}{z(3-z^2)}\right).$$

Vì x, y, z dương và $x^2+y^2+z^2=3$ nên $x\in(0;\sqrt{3})$.

Xét hàm số $f(x)=x(3-x^2)$ trên $(0;\sqrt{3})$. Ta có

$$f'(x)=-3x^2+3;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=1 \text{ và } f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(0;1).$$

Suy ra $f(x)\le f(1)=2$ với mọi $x\in\left(0;\sqrt{3}\right)$. Do đó $\dfrac{x^2}{x(3-x^2)}\ge\dfrac{x^2}{2}$.

Tương tự ta cũng có $\dfrac{y^2}{y(3-y^2)}\ge\dfrac{y^2}{2}$ và $\dfrac{z^2}{z(3-z^2)}\ge\dfrac{z^2}{2}$. Từ đó suy ra $P\ge\dfrac{1}{2}.\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}=\dfrac{3}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{4}$, đạt khi $x=y=z=1$.

Nhận xét. 1. Để chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{x^2}{x(3-x^2)}\ge\dfrac{x^2}{2}$ ta có thể sử dụng bất đẳng thức Côsi như sau:

Ta có $\left(x(3-x^2)\right)^2=x^2.(3-x^2)(3-x^2)=\dfrac{1}{2}.2x^2.(3-x^2)(3-x^2)$

$$\le\frac{1}{2}.\left(\frac{2x^2+3-x^2+3-x^2}{3}\right)^3=4.$$

Suy ra $x(3-x^2)\le 2$. Do đó $\dfrac{x^2}{x(3-x^2)}\ge\dfrac{x^2}{2}$.

2. Ta có bài toán tương tự sau

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $8^x + 8^y + 8^z = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{4^x}{3-4^x} + \frac{4^y}{3-4^y} + \frac{4^z}{3-4^z} \ge \frac{3}{2}.$$

Đặt $a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z \Rightarrow a, b, c > 0$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 3$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a^2}{3-a^2} + \frac{b^2}{3-b^2} + \frac{c^2}{3-c^2} \ge \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{a\left(3-a^2\right)} + \frac{b^3}{b\left(3-b^2\right)} + \frac{c^3}{c\left(3-c^2\right)} \ge \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 4. Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \ge \frac{3\sqrt{3}+9}{2}.$$

Lời giải. Vì a, b, c dương và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ nên $a, b, c \in (0; 1)$.

Xét hàm số $h(t) = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{9+6\sqrt{3}}{4}t^2$ với $t \in (0; 1)$.

Ta có $h'(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2} - \dfrac{9+6\sqrt{3}}{2}t$;

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{9+6\sqrt{3}}{2}t \Leftrightarrow 3\sqrt{3}t^3 - 6\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3}t - 4 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{6\sqrt{3} - 3 - \sqrt{36\sqrt{3} - 27}}{6\sqrt{3}} = t_1 \text{ hoặc } t = \frac{1}{\sqrt{3}} = t_2 \ (t_1 < t_2).$$

Suy ra bảng biến thiên

t	0		t_1		t_2		1
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(t)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $h(t) \ge \dfrac{3}{4}$ với mọi $t \in (0; 1)$.

Tức là $\frac{1}{1-t} \ge \frac{9+6\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{3}{4}$ với mọi $t \in (0;1)$.

Thay t lần lượt bởi a, b, c rồi cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \ge \frac{6\sqrt{3}+9}{4}(a^2+b^2+c^2) + \frac{9}{4},$$

hay $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \ge \frac{3\sqrt{3}+9}{2}$, điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 5. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a}} + \frac{b}{\sqrt{1+b}} + \frac{c}{\sqrt{1+c}} \ge \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} = 3$.

Trong ví dụ này, $g(t)=t$, $f(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t}}$, $r=\frac{f'(1)}{g'(1)}=f'(1)=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Xét hàm số $h(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t}}-\frac{3\sqrt{2}}{4}t$. Ta có

$$h'(t)=\frac{2+t}{\left(\sqrt{1+t}\right)^3}-\frac{3\sqrt{2}}{4};\ h'(t)=0 \Leftrightarrow 4(t+2)=3\sqrt{2}\left(\sqrt{1+t}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 8(t+2)^2=9(1+t)^3 \Leftrightarrow (t-1)(9t^4+36t^3+63t^2+62t+32)=0 \Leftrightarrow t=1.$$

Suy ra bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	↘		$-\frac{\sqrt{2}}{4}$		↗

Dựa vào bảng biến thiên ta có $h(t) \ge \frac{3\sqrt{2}}{4}t - \frac{\sqrt{2}}{4}$ với mọi $t \in (0;+\infty)$.

Từ đó suy ra $\frac{a}{\sqrt{1+a}} + \frac{a}{\sqrt{1+b}} + \frac{a}{\sqrt{1+c}} \ge \frac{3\sqrt{2}}{4}(a+b+c) - 3\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Bất đẳng thức được chứng minh, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Trong trường hợp $g(t)=t$ thì $y=r.g(t)+s=rt+s$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại điểm $t=a$. Như vậy, phương pháp tiếp tuyến là một trường hợp riêng của bài toán ban đầu.

Ví dụ 6. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5-2a^3+a}{b^2+c^2}+\frac{b^5-2b^3+b}{c^2+a^2}+\frac{c^5-2c^3+c}{a^2+b^2}\le\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Lời giải. Do $a, b, c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$ nên $a, b, c\in(0;1)$.

Ta có $\dfrac{a^5-2a^3+a}{b^2+c^2}=\dfrac{a\left(a^2-1\right)^2}{1-a^2}=-a^3+a.$

Tương tự $\dfrac{b^5-2b^3+b}{c^2+a^2}=-b^3+b;\ \dfrac{c^5-2c^3+c}{a^2+b^2}=-c^3+c.$

Do đó bất đẳng thức trở thành $\left(-a^3+a\right)+\left(-b^3+b\right)+\left(-c^3+c\right)\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$

Xét hàm số $f(x)=-x^3+x$ với $x\in(0;1)$. Ta có $f'(x)=-3x^2+1;\ f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Suy ra $\max\limits_{(0;1)} f(x)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}.$

Từ đó ta suy ra $f(a)+f(b)+f(c)\le 3.\dfrac{2\sqrt{3}}{9}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Ví dụ 7. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{4+\sqrt{x}}{4-x}+\dfrac{4+\sqrt{y}}{4-y}+\dfrac{4+\sqrt{z}}{4-z}\ge 5.$

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{4+\sqrt{x}}{4-x}$ trên $(0;3)$. Ta có $f'(1)=\dfrac{13}{18}$ nên suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm f tại $x=1$ là

$$y=\frac{13}{18}(x-1)+\frac{5}{3}\ \text{hay}\ y=\frac{13}{18}x+\frac{17}{18}.$$

Bằng biến đổi tương đương hoặc sử dụng đạo hàm ta chứng minh được $\dfrac{4+\sqrt{x}}{4-x}\ge\dfrac{13}{18}x+\dfrac{17}{18}$ với mọi $x\in(0;3)$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\frac{4+\sqrt{y}}{4-y}\ge\frac{13}{18}y+\frac{17}{18}$ và $\frac{4+\sqrt{z}}{4-z}\ge\frac{13}{18}z+\frac{17}{18}$.

Cộng 3 bất đẳng thức trên và sử dụng giả thiết $x+y+z=3$ ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải khác sử dụng bất đẳng thức Côsi

Ta có $$VT=2\left(\frac{1}{4-x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{4-z}\right)+\frac{2+\sqrt{x}}{4-x}+\frac{2+\sqrt{y}}{4-y}+\frac{2+\sqrt{z}}{4-z}$$

$$=2\left(\frac{1}{4-x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{4-z}\right)+\left(\frac{1}{2-\sqrt{x}}+\frac{1}{2-\sqrt{y}}+\frac{1}{2-\sqrt{z}}\right)\quad(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\left(\frac{1}{4-x}+\frac{4-x}{9}\right)+\left(\frac{1}{4-y}+\frac{4-y}{9}\right)+\left(\frac{1}{4-z}+\frac{4-y}{9}\right)\ge 2.$$

Suy ra $$\frac{1}{4-x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{4-z}\ge 2-\left(\frac{4-x}{9}+\frac{4-y}{9}+\frac{4-z}{9}\right)=1.\qquad(2)$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có $2\sqrt{a}\le a+1$. Áp dụng bất đẳng thức này ta được

$$\frac{1}{2-\sqrt{x}}+\frac{1}{2-\sqrt{y}}+\frac{1}{2-\sqrt{z}}=\frac{1}{2-\frac{2x}{2\sqrt{x}}}+\frac{1}{2-\frac{2y}{2\sqrt{y}}}+\frac{1}{2-\frac{2z}{2\sqrt{z}}}$$

$$\ge\frac{1}{2-\frac{2x}{1+x}}+\frac{1}{2-\frac{2y}{1+y}}+\frac{1}{2-\frac{2z}{1+z}}=\frac{x+1}{2}+\frac{y+1}{2}+\frac{z+1}{2}=3.\qquad(3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Ví dụ 8. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2+xy}{5-z^2}+\frac{y^2+yz}{5-x^2}+\frac{z^2+zx}{5-y^2}.$$

Lời giải. Ta có $x+y\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=\sqrt{2\left(3-z^2\right)}$. Suy ra

$$\frac{x^2+xy}{5-z^2}=\frac{x(x+y)}{5-z^2}\le\frac{x\sqrt{2\left(3-z^2\right)}}{5-z^2}.$$

Xét hàm $f(t)=\dfrac{3-t}{(5-t)^2}$ với $t\in(0;3)$. Ta có

$$f'(t)=\frac{1-t}{(5-t)^3};\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=1;\ f'(t)>0\Leftrightarrow t<1.$$

Do đó $f(t)=\dfrac{3-t}{(5-t)^2}\le f(1)=\dfrac{1}{8}$ với mọi $t\in(0;3)$.

Suy ra $f\left(z^2\right)=\dfrac{3-z^2}{\left(5-z^2\right)^2}\le\dfrac{1}{8}$. Do đó $\dfrac{x\sqrt{2\left(3-z^2\right)}}{5-z^2}\le\dfrac{x}{2}$.

Tương tự ta cũng có $\dfrac{y^2+yz}{5-x^2}\le\dfrac{y}{2}$, $\dfrac{z^2+zx}{5-y^2}\le\dfrac{z}{2}$.

Suy ra $P\le\dfrac{1}{2}(x+y+z)\le\dfrac{1}{2}\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}=\dfrac{3}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{3}{2}$, đạt khi $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 9. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=\dfrac{3}{2}$.

Chứng minh rằng: $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\ge\dfrac{125}{64}$.

Lời giải. Ta có $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\ge\dfrac{125}{64}$

$$\Leftrightarrow\ln\left(1+a^2\right)+\ln\left(1+b^2\right)+\ln\left(1+c^2\right)\ge3\ln\frac{5}{4}.$$

Xét hàm số $f(t)=\ln\left(1+t^2\right)-\dfrac{4}{5}t$ trên $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$. Ta có

$$f'(t)=\frac{2t}{1+t^2}-\frac{4}{5};\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\text{ và}$$

$$f(0)=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{5}{4}-\frac{2}{5},\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{13}{4}-\frac{6}{5}.$$

Suy ra $f(t)\ge\ln\dfrac{5}{4}-\dfrac{2}{5}$ với mọi $t\in\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$.

Do đó $\ln\left(1+a^2\right)+\ln\left(1+b^2\right)+\ln\left(1+c^2\right)-\frac{4}{5}(a+b+c)\geq 3\ln\frac{5}{4}-\frac{6}{5}$.

Suy ra $\ln\left(1+a^2\right)+\ln\left(1+b^2\right)+\ln\left(1+c^2\right)\geq 3\ln\frac{5}{4}$, điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Nhận xét. 1. Chúng ta có cách giải khác bằng sử dụng bất đẳng thức như sau

Ta có $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)=a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2c^2+1$.

Vì $a+b+c=\frac{3}{2}$ nên

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=\frac{9}{4}-2(ab+bc+ca) \text{ và}$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)=(ab+bc+ca)^2-3abc.$$

Suy ra

$$\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)=\frac{9}{4}-2(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)^2-3abc+a^2b^2c^2+1$$

$$=(ab+bc+ca-1)^2+\left(\frac{3}{2}-abc\right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{1}{8}$ nên $\frac{3}{2}-abc\geq\frac{11}{8}$, và

$ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{3}{4}$ nên $1-(ab+bc+ca)\geq\frac{1}{4}$. Từ đó suy ra

$$(ab+bc+ca-1)^2+\left(\frac{3}{2}-abc\right)^2\geq\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{11}{8}\right)^2=\frac{125}{64}.$$

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

2. Ta có kết quả tương tự trong tam giác như sau

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\cos^2 B\right)\left(1+\cos^2 C\right)\geq\frac{125}{64}.$$

(Học sinh giỏi Quốc gia, 1992)

Lời giải. Giả sử C là góc nhỏ nhất trong tam giác, ta có $0<C\leq\frac{\pi}{3}$.

Trước hết ta chứng minh $\left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\cos^2 B\right)\geq\left(1+\cos^2\frac{A+B}{2}\right)^2$. (1)

Thật vậy (1) $\Leftrightarrow \sin^2\frac{A-B}{2}\left(6\cos C-\cos(A-B)-1\right)\geq 0$.

Vì $0<C\leq\frac{\pi}{3}$ nên $\cos C\geq\frac{1}{2}$, do đó $6\cos C-\cos(A-B)-1>0$, hay bất đẳng thức đúng.

Suy ra: $\left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\cos^2 B\right)\left(1+\cos^2 C\right)\geq\left(1+\cos^2\frac{A+B}{2}\right)^2\left(1+\cos^2 C\right)$

$$=\left(1+\sin^2\frac{C}{2}\right)^2\left(1+\cos^2 C\right)=\left(1+\frac{1-\cos C}{2}\right)^2\left(1+\cos^2 C\right)$$

$$=\frac{1}{4}(3-\cos C)^2\left(1+\cos^2 C\right).\qquad (2)$$

Đặt $t=\cos C$, $\frac{1}{2}\leq t\leq 1$. Ta có

$$(3-\cos C)^2\left(1+\cos^2 C\right)=(3-t)^2\left(1+t^2\right)=t^4-6t^3+10t^2-6t+9.$$

Xét hàm số $f(t)=t^4-6t^3+10t^2-6t+9$ với $\frac{1}{2}\leq t\leq 1$. Ta có

$$f'(t)=4t^3-18t^2+20t-6=2(2t-1)(t-1)(t-3);\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{2}\\ t=1\end{array}\right.$$

Suy ra $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{125}{16}$. (3)

Từ (2) và (3) ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

3. Ta có bài toán với cách giải tương tự

Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\geq\left(\frac{10}{9}\right)^3.$$

Ví dụ 10. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $4(a+b+c)-9=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)\left(c+\sqrt{c^2+1}\right).$$

(Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ)

Lời giải. Ta có $\ln P=\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)+\ln\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)+\ln\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)$.

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ với $x>0$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{4}{5}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến của hàm số tại điểm $\left(\dfrac{3}{4};\ln 2\right)$ là $y=\dfrac{4}{5}x+\ln 2-\dfrac{3}{5}$.

Vì $f''(x)=\dfrac{-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$; $f''(x)<0$ với mọi $x>0$ nên đồ thị hàm số lồi trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó tiếp tuyến của đồ thị nằm phía trên đồ thị, hay

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\le\frac{4}{5}x+\ln 2-\frac{3}{5}\text{ với mọi } x>0.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên với a, b, c dương ta được

$$\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)+\ln\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)+\ln\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)\le\frac{4}{5}(a+b+c)+3\ln 2-\frac{9}{5}.$$

Suy ra $\ln P\le 3\ln 2$. Do đó $P\le 8$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{3}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 8, đạt được khi $a=b=c=\dfrac{3}{4}$.

Ví dụ 11. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $4(a+b+c)-9=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)^b\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)^c\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)^a.$$

Lời giải. Ta có $\ln P=b\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)+c\ln\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)+a\ln\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)$.

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ với $x>0$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{4}{5}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến của hàm số tại điểm $\left(\dfrac{3}{4};\ln 2\right)$ là $y=\dfrac{4}{5}x+\ln 2-\dfrac{3}{5}$.

Vì $f''(x)=\dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$; $f''(x)<0$ với mọi $x>0$ nên đồ thị hàm số lồi trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó tiếp tuyến của đồ thị nằm phía trên đồ thị, hay

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\le\frac{4}{5}x+\ln 2-\frac{3}{5} \text{ với mọi } x>0.$$

Suy ra $\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\le\frac{4}{5}a+\ln 2-\frac{3}{5}$, do đó

$$b\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\le\frac{4}{5}ab+\left(\ln 2-\frac{3}{5}\right)b.$$

Tương tự với hai số hạng còn lại, ta suy ra

$$\ln P\le\frac{4}{5}(ab+bc+ca)+\left(\ln 2-\frac{3}{5}\right)(a+b+c)\le\frac{9}{4}\ln 2.$$

Suy ra $P\le 4\sqrt[4]{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{3}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $4\sqrt[4]{2}$, đạt được khi $a=b=c=\frac{3}{4}$.

Ví dụ 12. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6x^2+6y^2+6z^2}.$$

(Tuyển sinh Đại học Khối A, 2012)

Lời giải. Đặt $a=|x-y|$, $b=|y-z|$, $c=|z-x|$, khi đó $a, b, c\ge 0$ và

$$a+b=|x-y|+|y-z|\ge|x-y+y-z|=|x-z|=c;\ b+c\ge a;\ c+a\ge b.$$

Từ $x+y+z=0$ suy ra $x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)$. Do đó

$$6x^2+6y^2+6z^2=4x^2+4y^2+4z^2-4(xy+yz+zx)$$
$$=2\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)=2\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Từ $a+b\ge c$, $b+c\ge a$, $c+a\ge b$ suy ra

$$(a+b)c+(b+c)a+(c+a)b\ge c^2+a^2+b^2$$
$$\Leftrightarrow(a+b+c)^2\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow a+b+c\ge\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Từ đó suy ra $P=3^a+3^b+3^c-\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge 3^a+3^b+3^c-(a+b+c)$.

Xét hàm số $f(t)=3^t-t$ với $t\ge 0$.

Ta có $f'(t)=3^t\ln 3-1$; $f'(t)>0$ với mọi $t\geq 0$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó $f(t)\geq f(0)=1$, hay $3^t-t\geq 1$ với mọi $t\geq 0$.

Do đó $P\geq 1+1+1=3$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay $x=y=z=0$.

Bài tập

Bài 1. Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{3}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2(xy+yz+zx)+\frac{3}{x+y+z}$.

Bài 2. Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=2+3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2+2y^2+3z^2.$$

Bài 3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}.$$

Bài 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}.$$

Bài 5. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+1\leq 2x+3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3+x^2+36}{2x+2}+\frac{y^3+y^2+36}{4y+4}+\frac{2z^3+z^2+9}{2z+1}.$$

Bài 6. Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{9}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}}-\frac{16}{\sqrt{1+a^2+b^2+c^2}}.$$

Bài 7. Cho các số dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{6\sqrt{ab}+7c+8\sqrt{ca}}-\frac{1}{9\sqrt{a+b+c}}.$$

Bài 8. Cho các số thực $x, y, z \in [0; 2]$ và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+xy+yz+zx.$$

Bài 9. Cho các số thực $a \geq b \geq c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\frac{24}{5\sqrt{5a+5b}}.$$

Bài 10. Cho các số thực x, y, z thuộc đoạn $[1; 9]$ thỏa mãn $x \geq y$, $x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}.$$

Bài 11. Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}.$$

Bài 12. Cho các số thực $x, y, z \in (0; 1]$ thỏa mãn $x+y \geq 1+z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{xy+z^2}.$$

Bài 13. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

Bài 14. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}+\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}.$$

Bài 15. Cho các số thực $x, y, z \in (0; 1)$ thỏa mãn $x+y+z=\frac{25}{24}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{y}{1-y}}+\sqrt{\frac{z}{1-z}} \geq \frac{15}{\sqrt{47}}$.

Bài 16. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 \leq a, b, c \leq 3$ và $a+b+2c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=a^3+b^3+5c^3$.

Bài 17. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện
$$5(x^2+y^2+z^2)=6(xy+yz+zx).$$
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Bài 18. Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+2y}+\sqrt{1+2z}=5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left(x^3+y^3\right)+z^3$.

Bài 19. Cho các số thực $a, b, c\in[1;3]$ thỏa mãn $a+2b+3c=12$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}.$$

Bài 20. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{1}{2\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}+1}+\frac{xy+yz+zx+1}{x+y+z}.$$

Bài 21. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a\ge b\ge c$ và $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=2ba+3ac+4cb+\frac{5}{a+b+c}.$$

Bài 22. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b=c+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\sqrt[3]{\frac{9a^2}{(b+c)^2+5bc}}+\sqrt[3]{\frac{9b^2}{(c+a)^2+5ca}}+\frac{a+b+c^2}{9}.$$

Bài 23. Cho các số thực $a, b, c\in\left[0;1\right]$ thỏa mãn $8^a+8^b+8^c=10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=a^3+b^3+c^3+3\left(a.2^a+b.2^b+c.2^c\right).$$

Bài 24. Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn $x+y+z=3$.

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=3(x^2+y^2+z^2)+4xyz$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3(x^2+y^2+z^2)+4xyz$.

Bài 25. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xz+y^2=2yz$. Tìm giá trị nhất của biểu thức
$$P=\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2y^2-xy^3+4y^4}}+\frac{2y^2+z^2}{\sqrt{y^2z^2-yz^3+4z^4}}.$$

Hướng dẫn giải bài tập

Bài 1. Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{3}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2(xy+yz+zx)+\frac{3}{x+y+z}$.

Lời giải. Đặt $x+y+z=t$. Khi đó $x^2+y^2+z^2\le(x+y+z)^2\le3(x^2+y^2+z^2)$ suy ra $\frac{2}{\sqrt{3}}\le t\le2$. Ta có

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left((x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2\right)=\frac{1}{2}\left(t^2-\frac{4}{3}\right) \text{ nên } P=t^2+\frac{3}{t}-\frac{4}{3}.$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+\frac{3}{t}-\frac{4}{3}$ trên $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3};2\right]$. Ta có

$$f'(t)=2t-\frac{3}{t^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \text{ (loại) và } f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2};\ f(2)=\frac{25}{6}.$$

Suy ra $\min P=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ khi $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow$ hai trong ba số x, y, z bằng 0, số còn lại bằng $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\max P=\frac{25}{6}$ khi $t=2\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}$.

Bài 2. Cho các số thực x, y, z không âm thỏa mãn điều kiện

$$x^3+y^3+z^3=2+3xyz.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+2y^2+3z^2$.

Lời giải. Từ giả thiết $x^3+y^3+z^3=2+3xyz$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=2$$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)\left[\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{2}(x+y+z)^2\right]=2.$$

Đặt $t=x+y+z$. Khi đó $t>0$ và $x^2+y^2+z^2=\frac{t^2}{3}+\frac{4}{3t}$.

Xét hàm $f(t)=\frac{t^2}{3}+\frac{4}{3t}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\frac{2}{3}t-\frac{4}{3t^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\sqrt[3]{2}$ và $\lim\limits_{t\to0^+}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$.

Do đó $\min\limits_{t\in(0;+\infty)} f(t) = f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$, đạt được khi $t = \sqrt[3]{2}$.

Ta có $P \ge x^2 + y^2 + z^2 \ge \sqrt[3]{4}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt[3]{2}$, $y = z = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt[3]{4}$, đạt được khi $x = \sqrt[3]{2}$, $y = z = 0$.

Nhận xét. Để chứng minh $\frac{t^2}{3} + \frac{4}{3t} \ge \sqrt[3]{4}$ ta có thể áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương. Thật vậy

$$\frac{t^2}{3} + \frac{4}{3t} = \frac{t^2}{3} + \frac{2}{3t} + \frac{2}{3t} \ge 3\sqrt[3]{\frac{t^2}{3}.\frac{2}{3t}.\frac{2}{3t}} = \sqrt[3]{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{t^2}{3} = \frac{2}{3t} \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{2}$.

Bài 3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 14\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}.$$

Lời giải. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta lại có

$$a^3 + ab^2 \ge 2a^2b;\ b^3 + bc^2 \ge 2b^2c \text{ và } c^3 + ca^2 \ge 2c^2a.$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \ge 3(a^2b + b^2c + c^2a) > 0$.

Do đó

$$P \ge 14\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{3(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} = 14\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{3\left(1 - (a^2 + b^2 + c^2)\right)}{2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}.$$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$, khi đó $t = a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = \frac{1}{3}$ và

$$P \ge 14t + \frac{3(1 - t)}{2t} = 14t + \frac{3}{2t} - \frac{3}{2}.$$

Xét hàm số $f(t) = 14t + \frac{3}{2t} - \frac{3}{2}$ trên $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Ta có $f'(t) = 14 - \frac{3}{2t^2} > 0$ với mọi $t \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Suy ra $\min\limits_{[3;+\infty)} f(t) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{23}{3}$. Do đó $P \geq \dfrac{23}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{23}{3}$, đạt khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Bài 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2}.$$

Lời giải. Ta có $\dfrac{a}{1+b^2} = a - \dfrac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \dfrac{ab^2}{2b} = a - \dfrac{ab}{2}$.

Tương tự, ta cũng có $\dfrac{b}{1+c^2} \geq b - \dfrac{bc}{2}$; $\dfrac{c}{1+a^2} \geq c - \dfrac{ca}{2}$.

Do đó $P \geq a + b + c - \dfrac{ab+bc+ca}{2}$.

Đặt $t = a + b + c$. Vì $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ nên $\sqrt{3} < t \leq 3$ và $ab + bc + ca = \dfrac{t^2 - 3}{2}$.

Suy ra $P \geq a + b + c - \dfrac{ab+bc+ca}{2} = t - \dfrac{t^2 - 3}{4} = \dfrac{1}{4}(-t^2 + 3t + 3)$.

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 4t + 3$ trên $\left(\sqrt{3}; 3\right]$.

Ta có $f'(t) = -2t + 4$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ và $f(\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$, $f(2) = 7$, $f(3) = 6$.
Do đó $\min\limits_{(\sqrt{3};3]} f(t) = f(3) = 6$.

Suy ra $P \geq \dfrac{3}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{2}$, đạt được khi $a = b = c = 1$.

Bài 5. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 1 \leq 2x + 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3 + x^2 + 36}{2x+2} + \frac{y^3 + y^2 + 36}{4y+4} + \frac{2z^3 + z^2 + 9}{2z+1}.$$

Lời giải. Ta có $P = \dfrac{18}{x+1} + \dfrac{9}{y+1} + \dfrac{9}{2z+1} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} + z^2$

$$=9\left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{2z+1}\right)+\frac{1}{4}\left(2x^2+y^2+4z^2\right).$$

Từ giả thiết ta có

$$2x+3y\ge x^2+y^2+z^2+1=\left(x^2+4\right)+\left(y^2+4\right)+\left(z^2+1\right)-8$$
$$\ge 4x+4y+2z-8.$$

Suy ra $0<2x+y+2z\le 8$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ với $a, b>0$, ta có

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{2z+1}=\frac{4}{2x+2}+\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{2z+1}\right)\ge\frac{4}{2x+2}+\frac{4}{y+2z+2}$$
$$\ge\frac{16}{2x+y+2z+4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(m^2+n^2+p^2\right)\ge(am+bn+cp)^2$, ta có

$$(2+1+1)\left(2x^2+y^2+4z^2\right)\ge(2x+y+2z)^2.$$

Suy ra $2x^2+y^2+4z^2\ge\frac{1}{4}(2x+y+2z)^2$.

Do đó ta có $P\ge\frac{9.16}{2x+y+2z+4}+\frac{1}{4.4}(2x+y+2z)^2$.

Đặt $t=2x+y+2z$, khi đó $t\in(0;8]$ và $P\ge\frac{144}{t+4}+\frac{1}{16}t^2$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{16}t^2+\frac{144}{t+4}$ trên $(0;8]$. Ta có $f'(t)=\frac{1}{8}t-\frac{144}{(t+4)^2}$;

$f'(t)=0\Leftrightarrow t(t+4)^2=8.144\Leftrightarrow(t-8)(t^2+16t+144)=0\Leftrightarrow t=8$

và $f'(t)<0$ với mọi $t\in(0;8)$. Suy ra $\min\limits_{(0;8]}f(t)=f(8)=16$. Do đó $P\ge16$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=8$ hay $x=y=2$, $z=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 16, đạt khi $x=y=2$, $z=1$.

Bài 6. Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{9}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}}-\frac{16}{\sqrt{1+a^2+b^2+c^2}}.$$

Lời giải. Ta có $1+a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{2}(1+a)^2+\frac{1}{2}(b+c)^2\ge\frac{1}{4}(1+a+b+c)^2$.

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2+c^2}} \le \dfrac{2}{1+a+b+c}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)} \le \frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+2c+b+2c}{2} = \frac{1}{4}(a+b)(a+b+4c)$$

$$= \frac{1}{12}.3(a+b).(a+b+4c)$$

$$\le \frac{1}{12}\cdot\frac{[3(a+b)+(a+b+4c)]^2}{4} = \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}} \ge \dfrac{3}{(a+b+c)^2}$.

Từ đó ta có $P \ge \dfrac{27}{(a+b+c)^2} - \dfrac{32}{1+a+b+c}$.

Đặt $t = a+b+c$. Khi đó $t > 0$ và $P \ge \dfrac{27}{t^2} - \dfrac{32}{t+1}$.

Xét hàm $f(t) = \dfrac{27}{t^2} - \dfrac{32}{t+1}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = -\dfrac{54}{t^3} + \dfrac{32}{(t+1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t-3)(16t^2+21t+9) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Do $f'(1) = -46 < 0$ nên $f'(t) < 0$ trên $(0; 3)$ và $f'(t) > 0$ trên $(3; +\infty)$.

Suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = -5$.

Do đó $P \ge -5$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -5, đạt khi $a = b = c = 1$.

Bài 7. Cho các số dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{6\sqrt{ab}+7c+8\sqrt{ca}} - \frac{1}{9\sqrt{a+b+c}}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$6\sqrt{ab} = 2\sqrt{a.9b} \le a+9b,$$

$$8\sqrt{ca} = 4\sqrt{c.4a} \le 2(c+4a).$$

Suy ra $6\sqrt{ab}+7c+8\sqrt{ca} \le 9(a+b+c)$. Do đó

$$P \ge \frac{1}{9(a+b+c)} - \frac{1}{9\sqrt{a+b+c}}.$$

Đặt $t=\sqrt{a+b+c}$, $t>0$. Xét hàm $f(t)=\dfrac{1}{9t^2}-\dfrac{1}{9t}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{2}{9t^3}+\dfrac{1}{9t^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$.

Suy ra bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$-\dfrac{1}{36}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P\ge f(2)=-\dfrac{1}{36}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a+b+c=4\\ a=9b\\ c=4a\end{cases}\Leftrightarrow a=\dfrac{18}{23},\ b=\dfrac{2}{23},\ c=\dfrac{72}{23}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\dfrac{1}{36}$, đạt khi $a=\dfrac{18}{23},\ b=\dfrac{2}{23},\ c=\dfrac{72}{23}$.

Bài 8. Cho các số thực $x,y,z\in[0;2]$ và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+xy+yz+zx.$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh với mọi số thực dương x,y,z thì

$$\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\le\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}+\frac{3}{2(x+y+z)}.$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)\le x+y+z+\frac{3(xy+yz+zx)}{2(x+y+z)}.$$

Chú ý rằng $\dfrac{xy+yz+zx}{y+z}=x+\dfrac{yz}{y+z}$, nên bất đẳng thức trở thành

$$\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}+\frac{xy}{x+y}\le\frac{3}{2}\cdot\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z>0$.

Khi đó ta có: $y+z \le z+x \le x+y$ và $\dfrac{1}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}} \le \dfrac{1}{\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}} \le \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$.

Do đó, theo bất đẳng thức Trêbusep, ta có

$$\left((y+z)+(z+x)+(x+y)\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+\frac{1}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}+\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right) \le 3\left(\frac{y+z}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+\frac{z+x}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}+\frac{x+y}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right)$$

Suy ra $\quad 2(x+y+z)\left(\dfrac{yz}{y+z}+\dfrac{zx}{z+x}+\dfrac{xy}{x+y}\right) \le 3(xy+yz+zx)$

$$\Leftrightarrow \frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}+\frac{xy}{x+y} \le \frac{3}{2}\cdot\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức trên và giả thiết $x+y+z=3$, ta có

$$P \le \frac{3}{xy+yz+zx}+xy+yz+zx+\frac{1}{2}.$$

Đặt $t=xy+yz+zx$, khi đó $t=xy+yz+zx \le \dfrac{(x+y+z)^2}{3}=3$.

Từ giả thiết $x, y, z \in [0; 2]$ và $x+y+z=3$, ta có $(2-x)(2-y)(2-z) \ge 0$.

Suy ra $8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-xyz \ge 0$.

Do đó $2(xy+yz+zx) \ge 4+xyz \ge 4$, nên $xy+yz+zx \ge 2$.

Vậy $2 \le t \le 3$ và $P \le \dfrac{3}{t}+t+\dfrac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{3}{t}+t+\dfrac{1}{2}$ với $t \in [2; 3]$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{3}{t^2}+1=\dfrac{t^2-3}{t^2}$; $f'(t)>0$ với mọi $t \in [2; 3]$.

Suy ra bảng biến thiên

t	2		3
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	4	$\nearrow$	$\dfrac{9}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{\left[\frac{5}{4};3\right]} f(t) = f(3) = \frac{9}{2}$.

Suy ra $P \le \frac{9}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{9}{2}$, đạt được khi $x = y = z = 1$.

Bài 9. Cho các số thực $a \ge b \ge c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \frac{24}{5\sqrt{5a+5b}}.$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} \ge 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}, \qquad (1)$$

với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b \ge 2c$.

Trước hết ta chứng minh với các số dương a, ,b, x, y, m, n thì

$$(a^3+b^3)(x^3+y^3)(m^3+n^3) \ge (axm+byn)^3. \qquad (2)$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{a^3}{a^3+b^3} + \frac{x^3}{x^3+y^3} + \frac{m^3}{m^3+n^3} \ge \frac{3axm}{\sqrt[3]{(a^3+b^3)(x^3+y^3)(m^3+n^3)}},$$

$$\frac{b^3}{a^3+b^3} + \frac{y^3}{x^3+y^3} + \frac{n^3}{m^3+n^3} \ge \frac{3byn}{\sqrt[3]{(a^3+b^3)(x^3+y^3)(m^3+n^3)}}.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên ta được $3 \ge \dfrac{3(axm+byn)}{\sqrt[3]{(a^3+b^3)(x^3+y^3)(m^3+n^3)}}$.

Suy ra (2) đúng.

Bây giờ áp dụng (2) ta có $\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}}\right)^2 \left(a^2(b+c) + b^2(c+a)\right) \ge (a+b)^3$.

Mặt khác

$$ab(a+b) + c(a^2+b^2) - \frac{(a+b)^3}{4} - \frac{c(a+b)^2}{2} = -\frac{(a-b)^2(a+b-2c)}{4} \le 0.$$

Do đó

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}}\right)^2 \ge \frac{(a+b)^3}{ab(a+b)+c(a^2+b^2)} \ge \frac{(a+b)^3}{\dfrac{(a+b)^3}{4} + \dfrac{c(a+b)^2}{2}} = \frac{4(a+b)}{a+b+2c}.$$

Suy ra (1) đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.
Áp dụng (1) và sử dụng giả thiết $a+b+c=1$, ta có

$$P \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}+\frac{24}{5\sqrt{5a+5b}}=\frac{2\sqrt{1-c}}{\sqrt{1+c}}+\frac{24}{5\sqrt{5}\sqrt{1-c}}.$$

Xét hàm $f(c)=\dfrac{2\sqrt{1-c}}{\sqrt{1+c}}+\dfrac{24}{5\sqrt{5}\sqrt{1-c}}$ trên $\left(0;\dfrac{1}{3}\right]$.

Ta có $f'(c)=\dfrac{-10\sqrt{5}(1-c)+12(1+c)\sqrt{1+c}}{5\sqrt{5}(1-c^2)\sqrt{1-c^2}}$,

$$f'(c)=0 \Leftrightarrow -10\sqrt{5}(1-c)+12(1+c)\sqrt{1+c}=0 \Leftrightarrow 36c^3-17c^2+358c-89=0$$

$$\Leftrightarrow (4c-1)(9c^2-2c+89)=0 \Leftrightarrow c=\frac{1}{4}.$$

Suy ra bảng biến thiên

c	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$
$f'(c)$		$-$	0	$+$	
$f(c)$		$\searrow$	$\frac{78}{5\sqrt{15}}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $P \geq \dfrac{78}{5\sqrt{15}}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c=\dfrac{1}{4}$, $a=b$, $a+b+c=1 \Leftrightarrow a=b=\dfrac{3}{8}$, $c=\dfrac{1}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{78}{5\sqrt{15}}$, đạt được khi $a=b=\dfrac{3}{8}$, $c=\dfrac{1}{4}$.

Nhận xét. Bất đẳng thức (2) là một trường hợp hay được sử dụng của bất đẳng thức Holder.

Bài 10. Cho các số thực x, y, z thuộc đoạn $[1; 9]$ thỏa mãn $x \geq y$, $x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}.$$

Lời giải. Ta có $P=\dfrac{1}{1+2\dfrac{y}{x}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{y}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{z}}$.

Đặt $a=\dfrac{y}{x},\ b=\dfrac{z}{y},\ c=\dfrac{x}{z}$. Khi đó $a\in\left[\dfrac{1}{9};1\right]$, $c\in[1;\,9]$, $abc=1$ và

$$P=\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}.$$

Vì $a\in\left[\dfrac{1}{9};1\right]$ và $abc=1$ nên $1\le bc\le 9$.

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{bc}}$ ta có: $P\ge\dfrac{1}{1+2a}+\dfrac{2}{1+\sqrt{bc}}$.

Đặt $t=\sqrt{bc}$, khi đó $1\le t\le 3$ và $P\ge\dfrac{t^2}{t^2+2}+\dfrac{2}{t+1}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2}{t^2+2}+\dfrac{2}{t+1}$ với $t\in[1;\,3]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-2\left(t^3-2\right)(t-2)}{\left(t^2+2\right)^2(t+1)^2}$ và $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\sqrt[3]{2}\end{array}\right.$

Suy bảng biến thiên

t	1		$\sqrt[3]{2}$		2		3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$\frac{29}{22}$

Ta có $f\left(\sqrt[3]{2}\right)>\dfrac{29}{22}=f(3)$ nên dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $P\ge\dfrac{29}{22}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=\dfrac{1}{9}\\ b=c=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\ y=1\\ z=3.\end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{29}{22}$, đạt khi $x=9,\ y=1,\ z=3$.

Bài 11. Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{7}{5}.$$

Lời giải. Ta có $VT = \dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{c}{b}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{a}{c}}$.

Đặt $x = \dfrac{b}{a}$, $y = \dfrac{c}{b}$, $z = \dfrac{a}{c}$. Khi đó, vì a, b, c thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{3}; 3\right]$ nên x, y, z thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{9}; 9\right]$ và $xyz = 1$. Bất đẳng thức trở thành $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} \ge \dfrac{7}{5}$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x = \min\{x, y, z\}$. Khi đó $x \in \left[\dfrac{1}{9}; 1\right]$ và $yz \ge 1$. Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \ge \frac{2}{1+\sqrt{yz}}, \text{ với } yz \ge 1, \text{ ta có}$$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \ge \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+\sqrt{yz}} = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{1+x} + \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

Đặt $t = \sqrt{x}$, $t \in \left[\dfrac{1}{3}; 1\right]$ và xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2} + \dfrac{2t}{1+t}$ trên $\left[\dfrac{1}{3}; 1\right]$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{2(t-1)^2(t^2+t+1)}{(1+t)^2(1+t^2)^2} \ge 0$, với mọi $t \in \left[\dfrac{1}{3}; 1\right]$.

Do đó $f(t) \ge f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{7}{5}$. Suy ra bất đẳng thức được chứng minh, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c) \in \left\{\left(\dfrac{1}{3}; 1; 3\right), \left(3; \dfrac{1}{3}; 1\right), \left(1; 3; \dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

Bài 12. Cho các số thực $x, y, z \in (0; 1]$ thỏa mãn $x + y \ge 1 + z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{xy+z^2}.$$

Lời giải. Vì $x, y \in (0; 1]$ nên $(x-1)(y-1) \ge 0$. Suy ra $xy + 1 \ge x + y$.

Do đó $xy \ge z$. Ta có: $P = \dfrac{\dfrac{x}{z}}{\dfrac{y}{z}+1} + \dfrac{\dfrac{y}{z}}{\dfrac{x}{z}+1} + \dfrac{\dfrac{1}{z}}{\dfrac{xy}{z^2}+1}$.

Đặt $a=\dfrac{x}{z}, b=\dfrac{y}{z}, c=\dfrac{1}{z}$. Khi đó $xy\ge z \Leftrightarrow \dfrac{x}{z}.\dfrac{y}{z}\ge\dfrac{1}{z}$, hay $ab\ge c\ge 1$ và

$$P=\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}+\frac{c}{1+ab}.$$

Ta có

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}\Leftrightarrow\left(\sqrt{ab}-1\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0, \text{ luôn đúng với } ab\ge 1.$$

Lại có

$$\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}=\left(\frac{a}{1+b}+1\right)+\left(\frac{b}{1+a}+1\right)-2=(a+b+1)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\right)-2$$

$$\ge\left(2\sqrt{ab}+1\right)\frac{2}{1+\sqrt{ab}}-2.$$

Suy ra $\dfrac{a}{1+b}+\dfrac{b}{1+a}\ge\dfrac{2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}}$.

Từ đó ta có: $P\ge\dfrac{2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}}+\dfrac{c}{1+ab}\ge\dfrac{2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{1+ab}$.

Đặt $t=\sqrt{ab}$, khi đó $t\ge 1$ và $P\ge\dfrac{2t}{1+t}+\dfrac{1}{1+t^2}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t}{1+t}+\dfrac{1}{1+t^2}$ với $t\ge 1$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2(t-1)^2\left(t^2+t+1\right)}{(1+t)^2\left(t^2+1\right)}$; $f'(t)>0$ với mọi $t\in(1;+\infty)$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$. Suy ra $\min\limits_{[1;+\infty)} f(t)=f(1)=\dfrac{3}{2}$. Từ đó ta suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{2}$, đạt được khi $a=b=c=1$ hay $x=y=z=1$.

Nhận xét. Chúng ta có cách giải khác như sau

Từ giả thiết $x, y, z\in\left[0;1\right]$ thỏa mãn $x+y\ge 1+z$ ta có $xy+z^2\le 1+z\le x+y$.

Từ đó suy ra $P=\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{xy+z^2}\ge\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}$.

Đến đây, áp dụng bất đẳng thức Netsbit, ta có

$$P\ge\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 13. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{a}{a^2+2}\le\frac{a}{2a+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2a+1)}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2a+1)}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2b+1)}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2c+1)}\right)\le 1,$$

hay $\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{1}{2b+1}+\dfrac{1}{2c+1}\ge 1.$

Giả sử $c=\min\{a, b, c\}$, ta có $ab\ge 1$. Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\ge\frac{2}{1+\sqrt{xy}},\ \text{với mọi } x,\ y>0,\ xy\ge 1$$

cho $x=2a,\ y=2b$, ta có

$$\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}\ge\frac{2}{2\sqrt{ab}+1}.$$

Khi đó ta chỉ cần chứng minh $\dfrac{2}{2\sqrt{ab}+1}+\dfrac{1}{2c+1}\ge 1.$

Đặt $t=\sqrt{ab}$, khi đó bất đẳng thức trở thành $\dfrac{2}{2t+1}+\dfrac{t^2}{2+t^2}\ge 1.$

Đến đây ta xét hàm $f(t)=\dfrac{2}{2t+1}+\dfrac{t^2}{2+t^2}$ với $t\ge 1$ để có điều phải chứng minh, hoặc biến đổi tương đương. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Bất đẳng thức $\dfrac{1}{2a+1}+\dfrac{1}{2b+1}+\dfrac{1}{2c+1}\ge 1$ có thể được chứng minh bằng nhiều cách khác

Cách 2. Đặt $a=x^3,\ b=y^3,\ c=z^3$, khi đó $xyz=1$ và ta có

$$\frac{1}{2a+1}=\frac{1}{2x^3+1}=\frac{xyz}{2x^3+xyz}=\frac{yz}{yz+2x^2},$$

nên bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{yz}{yz+2x^2}+\frac{zx}{zx+2y^2}+\frac{xy}{xy+2z^2}\ge 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Svacxơ, ta có

$$\frac{yz}{yz+2x^2}+\frac{zx}{zx+2y^2}+\frac{xy}{xy+2z^2}\ge\frac{(yz+zx+xy)^2}{yz\left(yz+2x^2\right)+zx\left(zx+2y^2\right)+xy\left(xy+2z^2\right)}=1.$$

Cách 3. Quy đồng và rút gọn, bất đẳng thức tương đương với

$$(2a+1)(2b+1)+(2b+1)(2c+1)+(2c+1)(2a+1)\ge(2a+1)(2b+1)(2c+1)$$

hay $a+b+c\ge 3$, đúng theo bất đẳng thức Côsi và $abc=1$.

Bài 14. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}+\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}.$$

Lời giải. Tìm giá trị lớn nhất:

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $0\le x\le y\le z\le 1$.

Khi đó $\frac{2}{3}\le z\le 1,\ 0\le x+y\le\frac{2}{3}<\frac{4}{5}$. Ta chứng minh

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\le 1+\sqrt{\frac{1-(x+y)}{1+(x+y)}}.$$

Thật vậy, bình phương hai vế, ta viết bất đẳng thức dạng

$$2\left(\sqrt{\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}}-\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}\right)\le 1+\frac{1-x-y}{1+x+y}-\frac{1-x}{1+x}-\frac{1-y}{1+y}.$$

Ta có $\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}-\frac{1-x-y}{1+x+y}=\frac{2xy(x+y)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)}\ge 0$ và

$$1+\frac{1-x-y}{1+x+y}-\frac{1-x}{1+x}-\frac{1-y}{1+y}=\frac{2xy(x+y+2)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)}.$$

Mặt khác, với mọi $a\ge b>0$ ta có $\sqrt{a}-\sqrt{b}\le\frac{a-b}{2\sqrt{b}}$, suy ra

$$\sqrt{\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}}-\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}\le\frac{\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}-\frac{1-x-y}{1+x+y}}{2\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}}$$

$$=\frac{xy(x+y)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2xy(x+y)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)\sqrt{\dfrac{1-x-y}{1+x+y}}} \le \frac{2xy(x+y+2)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)},$$

hay là $\sqrt{\dfrac{1-x-y}{1+x+y}} \ge \dfrac{x+y}{x+y+2}$.

Do $x+y \le \dfrac{2}{3}$ nên $\sqrt{\dfrac{1-x-y}{1+x+y}} - \dfrac{x+y}{x+y+2} \ge \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{2}{3}}{1+\dfrac{2}{3}}} - \dfrac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{2}{3}+2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{4} > 0.$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức khi và chỉ khi $xy = 0$.

Suy ra

$$P = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \le 1 + \sqrt{\frac{1-(x+y)}{1+x+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} = 1 + \sqrt{\frac{z}{2-z}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}.$$

Xét hàm số $f(z) = 1 + \sqrt{\dfrac{z}{2-z}} + \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$ với $\dfrac{2}{3} \le z \le 1$.

Ta có $f'(z) = \dfrac{1}{(2-z)^2\sqrt{\dfrac{z}{2-z}}} - \dfrac{1}{(1+z)^2\sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}}$.

$f'(z) = 0 \Leftrightarrow (1+z)^3(1-z) = (2-z)^3 z \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $\max f(z) = \max\left\{f\left(\dfrac{1}{3}\right), f(1), f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Từ đó suy ra $P \le 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$,

dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 0, y = z = \dfrac{1}{2}$ và các hoán vị.

Tìm giá trị nhỏ nhất:

Từ giả thiết x, y, z không âm thỏa mãn $x+y+z=1$ suy ra $x, y, z \in [0; 1]$. Khi đó ta có $(1-x)(1+x) = 1-x^2 \le 1$. Suy ra $\dfrac{1-x}{1+x} \ge (1-x)^2$. Do đó $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \ge 1-x$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}} \ge 1-y$, $\sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}} \ge 1-z$.

Suy ra $P \ge 1-x+1-y+1-z = 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi trong ba số có một số bằng 1, hai số còn lại bằng 0.

Bài 15. Cho các số thực $x, y, z \in (0; 1)$ thỏa mãn $x+y+z=\frac{25}{24}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{y}{1-y}}+\sqrt{\frac{z}{1-z}} \geq \frac{15}{\sqrt{47}}$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $z=\min\{x, y, z\}$.

Khi đó $x+y \geq \frac{2}{3}(x+y+z) > \frac{2}{3}$.

Ta có $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{y}{1-y}}=\sqrt{\frac{x^3}{x^2(1-x)}}+\sqrt{\frac{y^3}{y^2(1-y)}} \geq \sqrt{\frac{(x+y)^3}{x^2(1-x)+y^2(1-y)}}$.

Mặt khác $x^2+y^2-\left(x^3+y^3\right)-\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+y)^3}{4}=-\frac{(3x+3y-2)(x-y)^2}{4} \leq 0$

nên $x^2(1-x)+y^2(1-y) \leq \frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x+y)^3}{4}$.

Suy ra $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{y}{1-y}} \geq \sqrt{\frac{(x+y)^3}{\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x+y)^3}{4}}}=2\sqrt{\frac{25-24z}{23+24z}}$.

Do đó $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{y}{1-y}}+\sqrt{\frac{z}{1-z}} \geq 2\sqrt{\frac{25-24z}{23+24z}}+\sqrt{\frac{z}{1-z}}$.

Xét hàm số $f(z)=2\sqrt{\frac{25-24z}{23+24z}}+\sqrt{\frac{z}{1-z}}$ với $z \in (0; 1)$.

Ta có $f'(z)=-\frac{1152}{(23+24z)^2\sqrt{\frac{25-24z}{23+24z}}}+\frac{1}{2(1-z)^2\sqrt{\frac{z}{1-z}}}$;

$f'(z)=0 \Leftrightarrow 2304^2(1-z)^2 z=(23+24z)^3(25-24z) \Leftrightarrow z=\frac{25}{72}$,

và $f'(z)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm. Suy ra

$$\min_{(0;1)} f(z)=f\left(\frac{25}{72}\right)=\frac{15}{\sqrt{47}}.$$

Từ đó ta có bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{25}{72}$.

Nhận xét. Chúng ta có thể giải bằng phương pháp tiếp tuyến.

Bài 16. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 \le a, b, c \le 3$ và $a+b+2c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = a^3+b^3+5c^3$.

Lời giải. Vì $a, b \ge 1$ nên $(a-1)(b-1) \ge 0 \Leftrightarrow ab-(a+b)+1 \ge 0$. Suy ra

$$ab \ge a+b-1 = 6-2c-1 = 5-2c > 0.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= a^3+b^3+5c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)+5c^3 = (6-2c)^3 - 3ab(6-2c)+5c^3 \\ &\le (6-2c)^3 - 3(5-2c)(6-2c)+5c^3 \\ &= -3c^3+60c^2-150c+126. \end{aligned}$$

Từ giả thiết ta có $1 \le c \le 2$.

Xét hàm số $f(c) = -3c^3+60c^2-150c+126$ với $1 \le c \le 2$.

Ta có $f'(c) = -9c^2+120c-150$; $f'(c)=0 \Leftrightarrow c = \dfrac{20-5\sqrt{10}}{3}$.

Vì $f(1)=33$, $f\left(\dfrac{20-5\sqrt{10}}{3}\right) < f(2) = 42$ nên $\max\limits_{[1;\,2]} f(c) = f(2) = 42$.

Suy ra giá trị lớn nhất của P là 42, đạt khi $a=1, b=1, c=2$.

Bài 17. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$5(x^2+y^2+z^2) = 6(xy+yz+zx).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Lời giải. Với các biểu thức của bài toán ta chỉ cần xét các bộ (x, y, z) thỏa mãn $x, y, z > 0$ và $x^2+y^2+z^2=6$. Khi đó $xy+yz+zx=5$. Suy ra $x+y+z=4$.

Ta có hệ $\begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+zx=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=4-x \\ yz = 5-x(4-x) = x^2-4x+5. \end{cases}$

Do $(y+z)^2 \ge 4yz$ nên $(4-x)^2 \ge 4(x^2-4x+5) \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{2}{3}; 2\right]$.

Khi đó: $P = \dfrac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{xyz} = \dfrac{20}{x^3-4x^2+5x} = \dfrac{20}{f(x)}$.

Xét hàm số $f(x) = x^3-4x^2+5x$ trên $\left[\dfrac{2}{3}; 2\right]$ ta được

$$\max P = \frac{54}{5} \text{ khi } x=y=\frac{5}{3},\ z=\frac{2}{3};\ \min P = 10 \text{ khi } x=2, y=z=1.$$

Bài 18. Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+2y}+\sqrt{1+2z}=5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left(x^3+y^3\right)+z^3$.

Lời giải. Với hai số không âm a, b ta có

$$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\ge 1+\sqrt{1+a+b}. \qquad (1)$$

Thật vậy, $(1)\Leftrightarrow 2+a+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 2+a+b+2\sqrt{1+a+b}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+a+b+ab}\ge\sqrt{1+a+b}$, luôn đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=0$ hoặc $b=0$.

Áp dụng (1) ta có $5=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+2y}+\sqrt{1+2z}\ge 1+\sqrt{1+x^2+2y}+\sqrt{1+2z}$

$$\ge 2+\sqrt{1+x^2+2y+2z}.$$

Suy ra $x^2+2y+2z\le 8$, hay $y+z\le 4-\dfrac{x^2}{2}$. (2)

Khi đó $P=2x^3+2y^3+z^3\le 4x^3+2(y+z)^3\le 4x^3+2\left(4-\dfrac{x^2}{2}\right)^3$. (3)

Chú ý rằng, từ (2) và x, y, z không âm ta có $0\le x\le 2\sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(x)=4x^3+2\left(4-\dfrac{x^2}{2}\right)^3$ trên $\left[0;\,2\sqrt{2}\right]$.

Ta có $f'(x)=12x^2-6x\left(4-\dfrac{x^2}{2}\right)^2=\dfrac{3}{2}x(x-2)\left(x\left(12-x^2\right)+2\left(16-x^2\right)\right)$.

Với $x\in\left[0;\,2\sqrt{2}\right]$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2.\end{array}\right.$

Từ $f(0)=128$, $f(2)=24$, $f\left(2\sqrt{2}\right)=32\sqrt{2}$ suy ra

$$f(x)\le 128,\ \text{với mọi } x\in\left[0;\,2\sqrt{2}\right]. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $P\le 128$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=z=0$, $y=4$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 128, đạt được khi $x=z=0$, $y=4$.

Bài 19. Cho các số thực $a, b, c\in[1;\,3]$ thỏa mãn $a+2b+3c=12$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $c = \dfrac{12-a-2b}{3}$. Khi đó $P = \dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{12-a-2b}$.

Xét hàm số $f(a) = \dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{12-a-2b}$ trên $[1;\,3]$.

Ta có $f'(a) = -\dfrac{3}{a^2} + \dfrac{3}{(12-a-2b)^2} = \dfrac{3(12-2b)(2a+2b-12)}{a^2(12-a-2b)^2}$; $f'(a) < 0$ với mọi $a,\, b \in [1;\,3]$. Suy ra $f(3) \le f(a) \le f(1)$, hay

$$1 + \frac{2}{b} + \frac{3}{9-2b} \le P \le \frac{2}{b} + \frac{3}{11-2b}.$$

Xét hàm số $g(b) = 1 + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{9-2b}$ với $b \in [1;\,3]$. Ta có

$$g'(b) = -\frac{2}{b^2} + \frac{6}{(9-2b)^2} = \frac{2(3b^2 - (9-2b)^2)}{b^2(9-2b)^2};\ g'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{9}{2+\sqrt{3}} = b_1.$$

Suy ra bảng biến thiên

b	1		b_1		3
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
$g(b)$	$\frac{24}{7}$	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{8}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P \ge g(b) \ge \dfrac{8}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 3,\ c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{8}{3}$, đạt được khi $a = b = 3,\ c = 1$.

Tương tự ta tìm được giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{16}{3}$, đạt được khi $a = b = 1,\ c = 3$.

Bài 20. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 1}} + \frac{xy + yz + zx + 1}{x + y + z}.$$

Lời giải. Đặt $t = xy + yz + zx$. Khi đó $0 \le t \le 1$.

Ta có $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\le(xy+yz+zx)^2=t^2$, và

$$x+y+z=\sqrt{(x+y+z)^2}=\sqrt{1+2t}.$$

Suy ra $P\ge\dfrac{1}{2\sqrt{t^2+1}}+\dfrac{t+1}{\sqrt{1+2t}}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t^2+1}}+\dfrac{t+1}{\sqrt{1+2t}}$ với $0\le t\le1$. Ta có

$$f'(t)=\frac{-t}{2(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}+\frac{t}{(2t+1)\sqrt{2t+1}}=t\left(\frac{1}{(2t+1)\sqrt{2t+1}}-\frac{1}{2(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}\right)$$

Vì $2t+1\le\sqrt{2}\left(t^2+1\right)\Leftrightarrow\sqrt{2}t^2-2t+\sqrt{2}-1\ge0$, đúng, nên

$$0<(2t+1)\sqrt{2t+1}\le\sqrt{2}\left(t^2+1\right)\sqrt{\sqrt{2}\left(t^2+1\right)}<2\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}.$$

Do đó $\dfrac{1}{(2t+1)\sqrt{2t+1}}>\dfrac{1}{2\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}}$.

Suy ra $f'(t)>0$ với mọi $t\in(0;1)$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên [0; 1]. Suy ra $\min\limits_{[0;1]}f(t)=f(0)=\dfrac{3}{2}$. Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{2}$, đạt khi trong ba số có hai số bằng 0, số còn lại bằng 1.

Bài 21. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a\ge b\ge c$ và $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=2ba+3ac+4cb+\frac{5}{a+b+c}.$$

Lời giải. Ta có $P=(a+b+c)^2-3+c(a+2b)+\dfrac{5}{a+b+c}$.

Từ giả thiết a, b, c không âm thỏa mãn $a\ge b\ge c$, áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$0\le c(a+2b)=\frac{1}{3}.3c.(a+2b)\le\frac{1}{3}\left(\frac{3c+a+2b}{2}\right)^2\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

Suy ra

$$(a+b+c)^2-3+\frac{5}{a+b+c}\le P\le(a+b+c)^2+\frac{1}{3}(a+b+c)^2-3+\frac{5}{a+b+c}.$$

Đặt $t=a+b+c$, khi đó $3=a^2+b^2+c^2\le(a+b+c)^2\le3\left(a^2+b^2+c^2\right)=9$

nên suy ra $\sqrt{3} \le t \le 3$ và $t^2 + \frac{5}{t} - 3 \le P \le \frac{4}{3}t^2 + \frac{5}{t} - 3$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + \frac{5}{t} - 3$ với $\sqrt{3} \le t \le 3$.

Ta có $f'(t) = 2t - \frac{5}{t^2} = \frac{2t^3 - 5}{t^2} > 0$ với mọi $t \in \left[\sqrt{3}; 3\right]$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{3}; 3\right]$. Suy ra $P \ge \min\limits_{\left[\sqrt{3};3\right]} f(t) = f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{5}{\sqrt{3}}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = b = 0$, $a = \sqrt{3}$.

Xét hàm số $g(t) = \frac{4}{3}t^2 + \frac{5}{t} - 3$ với $\sqrt{3} \le t \le 3$.

Ta có $g'(t) = \frac{8}{3}t + 1 - \frac{5}{t^2} = \frac{8t^3 - 15}{3t^2} + 1 > 0$ với mọi $t \in \left[\sqrt{3}; 3\right]$. Do đó hàm $g(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{3}; 3\right]$. Suy ra $P \le \max\limits_{\left[\sqrt{3};3\right]} g(t) = g(3) = \frac{32}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{5}{\sqrt{3}}$, đạt khi $c = b = 0$, $a = \sqrt{3}$; giá trị lớn nhất của P là $\frac{32}{3}$, đạt khi $a = b = c = 1$.

Bài 22. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b = c + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[3]{\frac{9a^2}{(b+c)^2 + 5bc}} + \sqrt[3]{\frac{9b^2}{(c+a)^2 + 5ca}} + \frac{a+b+c^2}{9}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $(b+c)^2 \le 2\left(b^2 + c^2\right)$.

Suy ra $(b+c)^2 + 5bc \le 2\left(b^2 + c^2\right) + 5bc = (b+2c)(c+2b)$.

Do đó $\frac{9a^2}{(b+c)^2 + 5bc} \ge \frac{9a^2}{(b+2c)(c+2b)} = \frac{9a^3}{a(b+2c)(c+2b)}$.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$a(b+2c)(c+2b) = 9.a.\frac{b+2c}{3}.\frac{c+2b}{3} \le 9.\left(\frac{a + \frac{b+2c}{3} + \frac{c+2b}{3}}{3}\right)^3 = \frac{(a+b+c)^3}{3}.$$

Suy ra $\sqrt[3]{\dfrac{9a^2}{(b+c)^2+5bc}} \geq \sqrt[3]{\dfrac{9a^3}{a(b+2c)(c+2b)}} \geq \sqrt[3]{\dfrac{27a^3}{(a+b+c)^3}} = \dfrac{3a}{a+b+c}$.

Tương tự, ta cũng có $\sqrt[3]{\dfrac{9b^2}{(c+a)^2+5ca}} \geq \dfrac{3b}{a+b+c}$.

Suy ra $P \geq \dfrac{3(a+b)}{a+b+c} + \dfrac{a+b+c^2}{9} = \dfrac{3c+3}{2c+1} + \dfrac{c^2+c+1}{9}$.

Xét hàm số $f(c) = \dfrac{3c+3}{2c+1} + \dfrac{c^2+c+1}{9}$ với $c > 0$.

Ta có

$f'(c) = \dfrac{-3}{(2c+1)^2} + \dfrac{2c+1}{9} = \dfrac{(2c+1)^3-27}{9(2c+1)^2}$; $f'(c) = 0 \Leftrightarrow (2c+1)^3 = 27 \Leftrightarrow c = 1$.

Suy ra bảng biến thiên

c	0		1		$+\infty$
$f'(c)$		$-$	0	$+$	
$f(c)$		$\searrow$	$\dfrac{7}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} f(c) = f(1) = \dfrac{7}{3}$.

Suy ra $P \geq \dfrac{7}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{7}{3}$, đạt được khi $a = b = c = 1$.

Bài 23. Cho các số thực $a, b, c \in [0; 1]$ thỏa mãn $8^a + 8^b + 8^c = 10$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^3 + b^3 + c^3 + 3\left(a.2^a + b.2^b + c.2^c\right).$$

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = 2^x - x - 1$ với $x \in [0; 1]$.

Ta có

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 1;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{1}{\ln 2} = x_0 \in [0; 1].$$

Suy ra bảng biến thiên

x	0		x_0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên ta suy ra $f(x) \le 0$ với mọi $x \in [0; 1]$.

Hay $2^x - x - 1 \le 0$ với mọi $x \in [0; 1]$.

Mặt khác với mọi số thực $x,\ y,\ z$ ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right).$$

Do đó nếu

$$x + y + z \le 0 \text{ thì } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \le 0 \text{ hay } x^3 + y^3 + z^3 \le 3xyz.$$

Suy ra

$$8^x - x^3 - 1^3 = \left(2^x\right)^3 + (-x)^3 + (-1)^3 \le 3.2^x.(-x).(-1) = 3x2^x.$$

Do đó

$$8^x - 1 \le x^3 + 3x2^x \text{ với mọi } x \in [0; 1].$$

Suy ra

$$P = \left(a^3 + 3a2^a\right) + \left(b^3 + 3b2^b\right) + \left(c^3 + 3c2^c\right) \ge 8^a + 8^b + 8^c - 3 = 7,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 0,\ b = 0,\ c = 1$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 7, đạt tại $a = 0,\ b = 0,\ c = 1$ hoặc các hoán vị.

Bài 24. Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn $x + y + z = 3$.

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3(x^2 + y^2 + z^2) + 4xyz$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(x^2 + y^2 + z^2) + 4xyz$.

Lời giải.

a) Từ giả thiết suy ra $0 \le x, y, z \le 3$.

Ta có

$$P \le 3x^2 + 3(y+z)^2 + x(y+z)^2 = 3x^2 + 3(3-x)^2 + x(3-x)^2 = x^3 - 9x + 27.$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 9x + 27$ với $0 \le x \le 3$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 9;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$.

Suy ra bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{3}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	27	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x) \le 27$ với mọi $x \in [0; 3]$.

Suy ra $P \le 27$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 3, y = z = 0$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 27.

b) Không mất tính tổng quát ta giả thiết rằng $x \ge y \ge z$.

Kết hợp với giả thiết của bài toán ta có $2 \le x + y \le 3, 0 \le z \le 1$.

Trước hết ta chứng minh $P \ge \frac{3}{2}(x+y)^2 + 3z^2 + (x+y)^2 z$. (1)

Thật vậy, (1) tương đương với $(x-y)^2(3-2z) \ge 0$, đúng do $z \le 1$.

Đặt $x + y = t$, khi đó $2 \le t \le 3$ và $z = 3 - t$.

Từ (1) ta có $P \ge \frac{3}{2}t^2 + 3(3-t)^2 + t^2(3-t) = -t^3 + \frac{15}{2}t^2 - 18t + 27$. (2)

Xét hàm số

$$f(t) = -t^3 + \frac{15}{2}t^2 - 18t + 27 \text{ với } 2 \le t \le 3.$$

Ta có $f'(t) = -3t^2 + 15t - 18 = -3(t-2)(t-3) \ge 0$ với mọi $2 \le t \le 3$.

Suy ra $f(t) \ge f(2) = 13$ với mọi $2 \le t \le 3$. (3)

Từ (2) và (3) ta được $P \ge 13$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 13.

Mục lục

Nhà sách HỒNG ÂN
www.nhasachhongan.com.vn
Email: nhasachhongan@hotmail.com
20 Nguyễn Thị Minh Khai - Q.1 - TP.HCM
ĐT: 38246706 - 08083021 - 39107095 • Fax: 08083017

Điểm đến của tri thức

Mời bạn tìm đọc:

Bán tại

- NS MINH TÂM, 245 Trần Nguyên Hãn - HP * ĐT: (0313) 858699
- 29&31 Phan Bội Châu - Hải Phòng *ĐT: (0313) 839599
- 04 Lý Thái Tổ - TP. Đà Nẵng *ĐT: 0511.3823421
- 259 Lê Duẩn - TP. Vinh - ĐT: 0383.554777
- 39-41 Võ Thị Sáu - Cần Thơ * ĐT: (0710) 3818891
- 158 Tỉnh lộ 8 - TT.Củ Chi - TP.HCM *ĐT: (08) 37924216
- 51 Lý Thường Kiệt - TP Đồng Hới - QB * ĐT: (0523) 857868
- 66 Lý Thái Tổ - Thị xã Quảng Trị
- 3 Hàng Tre - Hà Nội * ĐT: (04) 38246605
- 67 Nguyễn Khoái - Hà Nội * ĐT: (04) 39845439
- 10 Chương Dương Độ - Hà Nội
- 828 Đường Láng - Hà Nội * ĐT: (04) 35575385

Để xác định sách chính phẩm, chúng tôi in chìm ở bìa 1 và 4 chữ: "NS. HỒNG ÂN"

ISBN: 978-604-934-176-7
8 935092 756028

Giá: 75.000đ