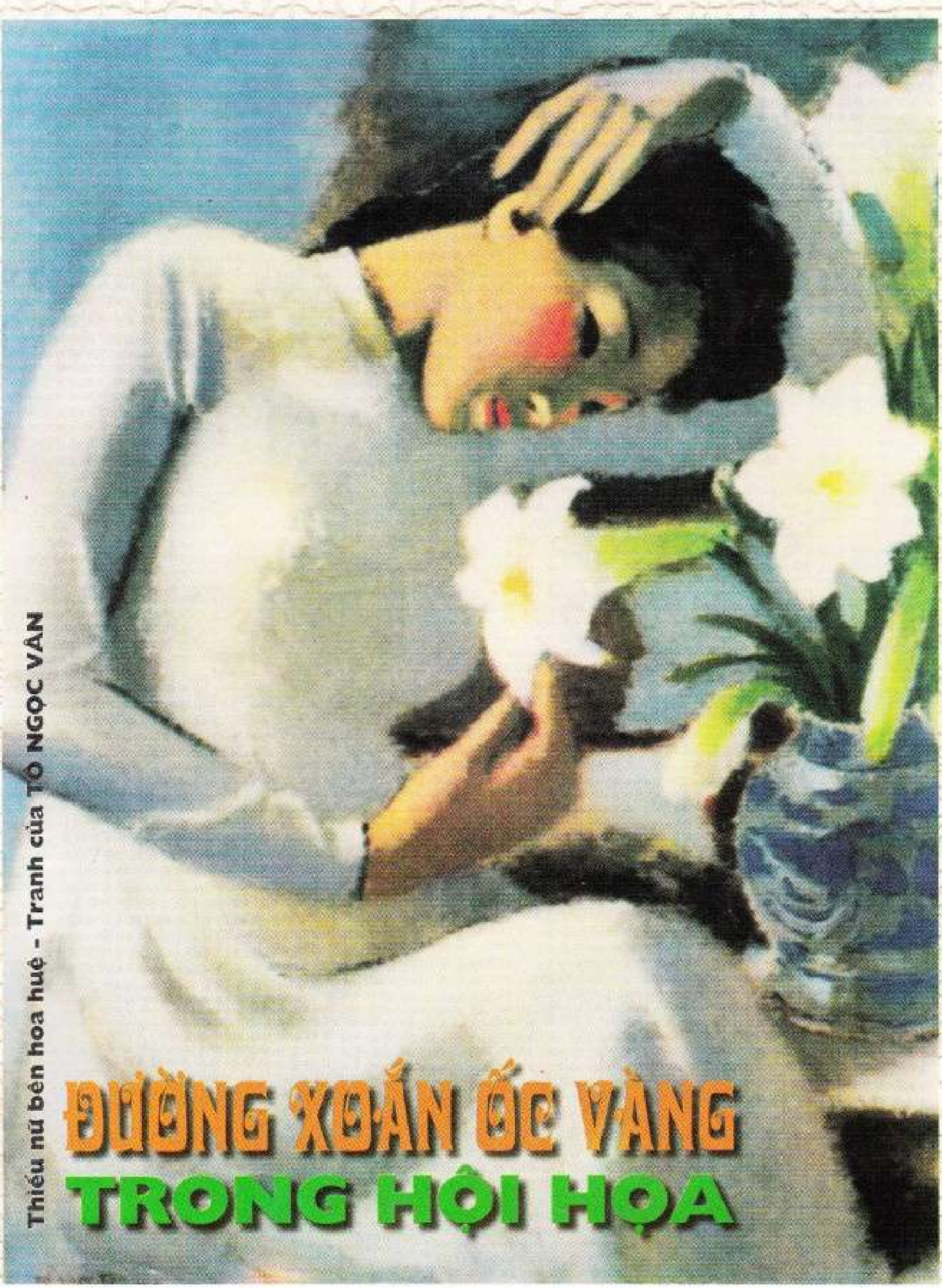
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

7
2001

SỐ 289 - NĂM THỨ 38 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

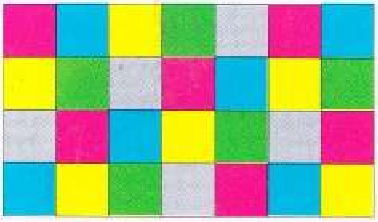


Thiếu nữ bên hoa huệ - Tranh của TÔ NGỌC VÂN

ĐƯỜNG XOẮN ỐC VÀNG TRONG HỘI HỌA

MÀU NÀO CHO HỢP

Cứ tưởng các bạn "hoa mắt" bởi 5 màu đan xem nhau thì khó mà nhận ra được lôgic của sự bố trí các màu.



Ai ngờ, bạn *Nguyễn Đức Thao*, 7A, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, **Thanh Hóa** đã nêu ra 19 cách lí luận khác nhau để xếp đúng 4 màu vào 4 ô trống như hình bên. Cách đơn giản nhất là các bạn cứ đi lần lượt các ô ở mỗi hàng từ trái sang phải, theo thứ tự từ trên xuống dưới sẽ thấy sự "tuần hoàn" của các màu. Nhiều bạn còn nhận xét được : các ô cùng màu được bố trí thành đường đi của quân mã trên bàn cờ.

Tất cả đều đúng, nhưng chỉ khen được các nhà vô địch về số cách lí luận

Sau bạn Nguyễn Đức Thao là các bạn : *Trần Cảnh Tùng*, 10 Tin, THPT NK **Hưng Yên**, *Nguyễn Thế Anh*, Phương Mỹ, Mỹ Hưng, Thanh Oai, **Hà Tây**, *Thùy Trang*, tổ 50, An Cư, Hải Bắc, quận Sơn Trà, Tp. **Đà Nẵng**, *Phan Thành Việt*, 6D, THCS Lương Thế Vinh, thị xã Tuy Hòa, **Phú Yên**.

NGỌC MAI

Kết quả : NHỮNG CON SỐ ĐẸP

Nhiều bạn, tuy không nói ra được lời giải, nhưng cho thêm 3 số đẹp như số 153 là :

$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$
$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$$
$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$$

Một số bạn trình bày lời giải khá phức tạp (có một vài lời giải sai nên không đưa ra những con số đẹp).

Các bạn *Trương Phước Giang*, 10T,THPT Bến Tre, Bến Tre; *Lê Đăng Tâm*, 11C, THPT Đông Hà, Quảng Trị; *Nguyễn Quang Tùng*, 9H, THCS Trưng Vương, Hà Nội đã "giải quyết khá đơn giản" nhờ sự "cần cù" của máy tính qua ngôn ngữ lập trình Pascal.

```
Program Tim số ;
Var a, b, c : Tinteger
Begin
  For a : = 1 to 9 do
    For b : = 0 to 9 do
      For c : = 0 to 9 do
```

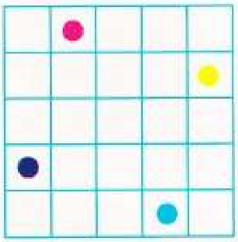
(Xem tiếp trang 23)

CUỘC THI VUI HÈ 2001

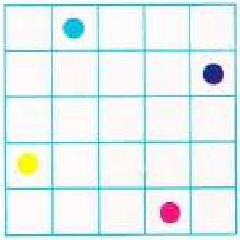
ĐỀ THI VÒNG THỨ HAI

Bài 1. CHUYỂN QUÂN

Trên một bàn cờ như hình 1 có 4 quân cờ Đỏ, Vàng, Lam, Tím. Mỗi quân có có thể chuyển (một



Hình 1

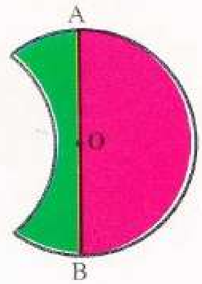


Hình 2

bước) từ ô này sang ô trống khác theo đường chéo của hình chữ nhật 3 × 4 ô hoặc 4 × 3 ô. Hỏi cần ít nhất là bao nhiêu bước để chuyển 4 quân từ hình 1 sang hình 2 và hãy chỉ ra cách chuyển.

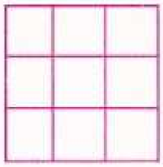
Bài 2. VƯỜN HOA

Một khu vườn hình trăng khuyết tạo bởi hai cung của hai đường tròn bằng nhau (xem hình). Một con đường nhỏ đi từ A đến B qua tâm O của hình tròn chia vườn thành hai phần : nửa hình tròn bên phải trồng hoa, phần bên trái trồng rau. Biết tổng độ dài đường dao quanh vườn và đường AB là 348m. Hỏi diện tích trồng hoa là bao nhiêu mét vuông ?



Bài 3. ĐIỀN SỐ

Hãy điền đủ các số 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 vào các ô vuông của hình bên sao cho tích các số theo các hàng ngang, hàng dọc và đường chéo đều bằng nhau.



Hạn nhận bài là không chậm hơn ngày 31.8.2001 (căn cứ vào dấu bưu điện). Kết quả cuộc thi sẽ công bố trên THTT số 292 ra ngày 15.10.2001. Phía trên mỗi bài giải, bạn cần ghi đầy đủ địa chỉ nơi ở và địa chỉ lớp, trường, huyện, tỉnh hoặc cơ quan mình. Ngoài phong bì cần ghi rõ :

DỰ THI VUI HÈ
Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
187 phố Giảng Võ,
Hà Nội

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 38
Số 289 (7-2001)

Tòa soạn : Ngõ 187, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648 – 04.5142650. FAX : 04.5142648
Email : toantt@hotmail.com

TRONG SỐ NÀY

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT HƯỚNG TỔNG QUÁT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC NESBIT

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Tp. Hồ Chí Minh)

Chắc các bạn đã biết bất đẳng thức sau do nhà toán học Anh Nesbit (Nashbitt) đưa ra năm 1905 : "Với các số dương a, b, c thì

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\text{"}$$

Trong cuốn sách "500 bài toán chọn lọc về bất đẳng thức" của PGS. Phan Huy Khải, tôi gặp bài toán tổng quát :

Bài toán 1. *Cho các số dương a, b, c và số nguyên dương n, chứng minh rằng*

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\ge\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}\quad(*)$$

Ta coi $x^0=1$ với $x\ne0$

Tác giả đã sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki mở rộng để giải bài toán này.

Tôi thử tìm một lời giải khác, sử dụng kiến thức lớp 9 và thật tuyệt vời khi phát hiện ra kết quả tốt hơn :

Bài toán 2. *Cho các số dương a, b, c và số nguyên dương n, chứng minh rằng*

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\ge\frac{1}{2}(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})\quad(**)$$

Lời giải.

a) Nếu $n=1$ ta có bất đẳng thức Nesbit.

b) Nếu $n\ge2$ vì $a, b>0$ nên

$$(a^{n-2}-b^{n-2})(a-b)\ge0$$

$$\Rightarrow a^{n-1}-a^{n-2}b-ab^{n-2}+b^{n-1}\ge0$$

$$\Rightarrow a^{n-1}+b^{n-1}\ge a^{n-2}b+b^{n-2}a\quad(1)$$

Tương tự có

$$b^{n-1}+c^{n-1}\ge b^{n-2}c+c^{n-2}b\quad(2)$$

$$a^{n-1}+c^{n-1}\ge a^{n-2}c+c^{n-2}a\quad(3)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, ta có

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{a^{n-2}(b+c)}{4}\ge2\sqrt{\frac{a^n}{b+c}\cdot\frac{a^{n-2}(b+c)}{4}}$$

$$\Rightarrow\frac{a^n}{b+c}+\frac{a^{n-2}b+a^{n-2}c}{4}\ge a^{n-1}\quad(4)$$

Tương tự, có

$$\frac{b^n}{c+a}+\frac{b^{n-2}c+b^{n-2}a}{4}\ge b^{n-1}\quad(5)$$

$$\frac{c^n}{a+b}+\frac{c^{n-2}a+c^{n-2}b}{4}\ge c^{n-1}\quad(6)$$

Từ (1), (2), (3), (4), (5), (6) có

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}+\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{4}+$$

$$+\frac{b^{n-1}+c^{n-1}}{4}+\frac{c^{n-1}+a^{n-1}}{4}\ge a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}$$

suy ra

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}\ge\frac{1}{2}(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})$$

(đpcm).

Bạn đọc hãy chứng minh bất đẳng thức sau bằng quy nạp và dựa vào (1) :

$$a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\ge3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}$$

Từ đó bất đẳng thức (**) chặt hơn bất đẳng thức (*)

Tôi thật sự sung sướng, nhưng ... lại *phát hiện* trong quyển sách "10000 bài toán sơ cấp bất đẳng thức" của PGS Phan Huy Khải có một kết quả chặt hơn nữa như sau :

Bài toán 3. *Cho các số dương a, b, c và số nguyên dương n, chứng minh rằng :*

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\ge\frac{3}{2}\left(\frac{a^n+b^n+c^n}{a+b+c}\right)\quad(***)$$

Lời giải. Vai trò a, b, c như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $a \le b \le c$.

Ta có $a + b \le a + c \le b + c$ và

$$\frac{c^n}{a+b} \ge \frac{b^n}{a+c} \ge \frac{a^n}{b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Trêbưsép ta có

$$[(a+b)+(a+c)+(b+c)]\left(\frac{c^n}{a+b}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{a^n}{b+c}\right) \ge 3(a^n+b^n+c^n)$$

$$\Rightarrow \frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a^n+b^n+c^n}{a+b+c}\right)$$

Mà theo (1), (2), (3) khi thay n bởi n+1 thì

$3\left(\frac{a^n+b^n+c^n}{a+b+c}\right) \ge a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}$ nên bất đẳng thức (***) chặt hơn bất đẳng thức (**)

Lời giải thật độc đáo, tuy nhiên bất đẳng thức Trêbưsép không được học ở trường phổ thông nên để có lời giải trên phải giải bài toán phụ là chứng minh bất đẳng thức Trêbưsép. Do vậy lời giải bài toán trở nên dài dòng và khó khăn.

Đặc biệt, từ lời giải bài toán 2, tôi đã tìm được lời giải khác của bài toán 3 như sau :

Cho $a, b, c > 0$ và n nguyên dương. Thay n bởi n+1 trong (4) ta có :

$$\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{a^{n-1}b+a^{n-1}c}{4} \ge a^n$$

$$\Rightarrow \frac{a^n(b+c)}{b+c}+\frac{a^{n+1}}{b+c}+\frac{a^{n-1}b+a^{n-1}c}{4} \ge a^n+a^n$$

$$\Rightarrow \frac{a^n(a+b+c)}{b+c}+\frac{a^{n-1}b+a^{n-1}c}{4} \ge 2a^n \quad (7)$$

Tương tự

$$\frac{b^n(a+b+c)}{c+a}+\frac{b^{n-1}c+b^{n-1}a}{4} \ge 2b^n \quad (8)$$

$$\frac{c^n(a+b+c)}{a+b}+\frac{c^{n-1}a+c^{n-1}b}{4} \ge 2c^n \quad (9)$$

Từ (7), (8), (9) với chú ý rằng theo (1) có $a^n + b^n \ge a^{n-1}b + b^{n-1}a$, $b^n + c^n \ge b^{n-1}c + c^{n-1}b$, $c^n + a^n \ge c^{n-1}a + a^{n-1}c$, suy ra

$$(a+b+c)\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}\right) \ge$$

$$\ge \frac{3}{2}(a^n+b^n+c^n)$$

$$\Rightarrow \frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a^n+b^n+c^n}{a+b+c}\right)$$

Như vậy, chúng ta đã tìm được một hướng tổng quát của bất đẳng thức Nesbit chỉ bằng kiến thức toán của THCS :

Với các số dương a, b, c và số nguyên dương n thì

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a^n+b^n+c^n}{a+b+c}\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}) \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}$$

Lời Tòa soạn : * *Bài viết trên cho chúng ta một hướng tổng quát bất đẳng thức Nesbit. Bài toán 2 đã được phát biểu trong cuốn "Các bài giảng luyện thi môn Toán", tập I, NXB Giáo dục, 1993.*

* *Một hướng tổng quát khác đã được giới thiệu trên THTT năm 1979 là :*

"Phải chăng với $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ thì

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2} \ge \frac{n}{2} \quad ?"$$

Câu hỏi đó nêu ra từ năm 1908 và 50 năm sau, nhà toán học Anh Mođen (Mordel) mới chứng minh được đối với n = 4, 5, 6.

Trên THTT (1/1976) tác giả Lê Quốc Hán chứng minh với n = 4, các tác giả Ngô Cảnh Hưng, Trần Quang, Lê Thống Nhất đã chứng minh với n = 4, 5, 6 (THTT 1/1979) Các bạn có thể tìm thấy các lời giải này trong quyển Bất đẳng thức của PGS Phan Đức Chính , NXB GD - 1993.

Đến nay người ta đã khẳng định được :

1) Kết quả đúng với $n \le 12$

2) Kết quả không đúng với số chẵn $n \ge 14$ và số lẻ $n \ge 27$.

CÂU LẠC BỘ THTT

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ MỚI

Mời các bạn tham gia cuộc chơi hàng tháng

ĐOÁN TUỔI VÀ BIẾT AI QUA ẢNH

Bạn hãy cắt phiếu cuộc chơi và *dán ở bên ngoài phong bì* gửi Tòa soạn THTT sau khi đã điền câu trả lời. Bên trong phong bì bạn có thể viết cảm tưởng về cuộc chơi nhưng không gửi bài khác. Nhớ ghi địa chỉ của bạn !

THAM GIA CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ

Người trong ảnh ?

Họ và tên :

. . . .

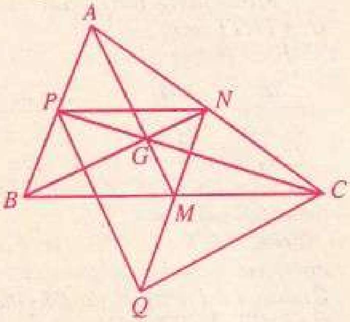
Ảnh chụp khi . . . . tuổi.

ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PTÔLÊMÊ ĐỂ THIẾT LẬP BẤT ĐẲNG THỨC MỚI

TRẦN TUẤN ANH
(SV lớp Toán – Tin 2000 – ĐHKHTN – ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

Bất đẳng thức Ptôlêmê là bất đẳng thức rất hay trong hình học. Việc chứng minh bất đẳng thức này đã được đề cập trong nhiều sách, trên Toán học và Tuổi trẻ (THTT số 263/ 5–1999). Ở đây tôi xin trình bày một số áp dụng của nó để thiết lập các bất đẳng thức khác.

A. Trước hết ta xét ΔABC có các trung tuyến AM, BN, CP và trọng tâm G. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AM = m_a$, $BN = m_b$, $CP = m_c$ (hình vẽ). Gọi Q là điểm đối xứng của N qua M. Dễ thấy ΔPQC có các cạnh chính là các trung tuyến của ΔABC với độ dài các trung tuyến lần lượt là $\frac{3}{4}a$, $\frac{3}{4}b$, $\frac{3}{4}c$.



Hình 1

Áp dụng BĐT Ptôlêmê vào tứ giác $BPNC$ ta có : $PC.NB \le BC.PN + BP.NC$ hay

$$m_b m_c \le \frac{a^2}{2} + \frac{bc}{4} \Rightarrow 4m_b m_c \le 2a^2 + bc$$

Tương tự ta có : $4m_a m_b \le 2c^2 + ab$

$4m_a m_c \le 2b^2 + ac$ (1)

Từ (1) suy ra $(4m_a^2)(4m_c^2)(4m_c^2) \le$
$\le (2a^2 + bc)(2b^2 + ac)(2c^2 + ab)$

Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta được

$$(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2) \le$$
$$\le (2a^2 + bc)(2b^2 + ac)(2c^2 + ab) \quad \text{(A1)}$$

Dựa vào cách thiết lập bằng hình học, ta có thể chứng minh BĐT (A1) bằng đại số như sau :

$$(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2) - (2a^2 + bc)^2$$
$$= (2a^2)^2 + 2a^2(b^2 + c^2) + (2c^2 - b^2)(2b^2 - c^2) -$$
$$- 2a^2.2bc - (bc)^2 - (2a^2)^2 =$$
$$= 2a^2(b^2 + c^2 - 2bc) - 2(b^2 - c^2)^2$$
$$= 2(b-c)^2[a^2 - (b+c)^2] \le 0 \text{ (vì } b + c > a)$$

Do đó :

$$(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2) \le (2a^2 + bc)^2$$

Tương tự :

$$(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2) \le (2c^2 + ac)^2$$
$$(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2) \le (2b^2 + ac)^2$$

Nhân theo từng vế các BĐT trên với chú ý

$2a^2 + 2b^2 - c^2 \ge (a + b)^2 - c^2 > 0$

$2a^2 + 2c^2 - b^2 > 0$, $2b^2 + 2c^2 - a^2 > 0$ ta được BĐT cần chứng minh.

• Từ (1) suy ra $4(m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a) \le$
$\le 2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca)$

Chú ý $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ ta thu được

$$4(m_a + m_b + m_c)^2 \le 7(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$$
$$\Rightarrow 2(m_a + m_b + m_c) \le$$
$$\le \sqrt{7(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)} \quad \text{(A2)}$$

• Áp dụng (1) cho ΔPQC ta được :

$$4\left(\frac{3}{4}b\right)\left(\frac{3}{4}c\right) \le 2m_a^2 + m_a m_b$$

Đón đọc THTT SỐ 290 (8-2001)

Các bạn hãy đón xem những thông tin về :

- Cuộc thi Toán quốc tế lần thứ 42 (7/2001) tại Mỹ.
- Giải đáp một số thắc mắc về các bài toán thi Đại học (7/2001) để rút kinh nghiệm cho các bạn dự thi năm sau.
- Một sai lầm phổ biến khi xét phương trình có đúng 1 nghiệm trong một khoảng.
- Khai thác bất đẳng thức Ptôlêmê cùng với định lí Mênêlauyt.
- Định lí Ơle của tứ giác nội tiếp
- Lí thuyết tương đối được xây dựng trên cơ sở toán học nào ?

và các mục Câu lạc bộ, Giải trí toán học... thường lệ.

THTT

$\Rightarrow 9bc \le 8m_a^2 + 4m_bm_c$

Tương tự : $9ac \le 8m_b^2 + 4m_am_c$

$9ab \le 8m_c^2 + 4m_am_b$ (2)

Từ (2) có $9(ab + bc + ca) \le 8(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$ $+ 4(m_am_b + m_bm_c + m_cm_a)$

$\Rightarrow 4(m_am_b + m_bm_c + m_cm_a) \ge$

$\ge 9(ab+bc+ca) - 8(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) =$

$= 9(ab+bc+ca) - 6(a^2+b^2+c^2)$

$\Rightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 =$

$= m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + 2(m_am_b + m_bm_c + m_cm_a)$

$\ge \dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) + \dfrac{9}{2}(ab+bc+ca) - 3(a^2+b^2+c^2)$

$= \dfrac{9}{4}[2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)]$

$\Rightarrow 2(m_am_b + m_bm_c + m_cm_a)$

$\ge 3\sqrt{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}$ (A2)

Vậy :

Trong tam giác có ba cạnh là a, b, c và 3 trung tuyến tương ứng là m_a, m_b, m_c ta có các bất đẳng thức sau :

(A1) $(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2+2c^2-b^2)(2b^2+2c^2-a^2) \le$
$\le (2a^2 + bc)(2b^2 + ac)(2c^2 + ab)$

(A2) $3\sqrt{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)} \le$
$\le 2(m_a + m_b + m_c) \le$
$\le \sqrt{7(a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca)}$

(A3) $\dfrac{1}{4}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \le$
$\le (m_a - m_b)^2 + (m_b - m_c)^2 + (m_c - m_a)^2 \le$
$\le \dfrac{9}{4}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

Việc chứng minh (A3) dành cho bạn đọc

B. Áp dụng BĐT Ptôlêmê cho tứ giác *APGN* (h.1) ta có : $AG.PN \le AP.GN + AN.GP$

$\Rightarrow 2am_a \le bm_c + cm_b$

Tương tự : $2bm_b \le am_c + cm_a$

$2cm_c \le am_b + bm_a$ (3)

Suy ra : $2am_a^2 \le bm_cm_a + cm_bm_a$,

$2bm_b^2 \le am_cm_b + cm_am_b$,

$2cm_c^2 \le am_bm_c + bm_am_c$

Cộng theo từng vế các BĐT trên ta được :

$am_bm_c + bm_am_c + cm_am_b \ge$
$\ge am_a^2 + bm_b^2 + cm_c^2$

Từ (3) có : $2a^2m_a \le ab\,m_c + ac\,m_b$

$2b^2 m_b \le ab\,m_c + bc\,m_a$

$2c^2 m_c \le ac\,m_b + bc\,m_a$

Cộng theo từng vế các BĐT trên ta được :

$abm_c + bcm_a + cam_b \ge a^2m_a + b^2m_b + c^2m_c$

Từ đó và do (3) $abm_c + ac\,m_b \ge 2a^2m_a$ có

$abm_c + acm_b + bcm_a \ge (2a^2 + bc)\,m_a \ge$
$\ge 4\,m_bm_cm_a$ (vì $4\,m_bm_c \le 2a^2 + bc$)

$$\Rightarrow \frac{ab}{m_am_b} + \frac{bc}{m_bm_c} + \frac{ca}{m_cm_a} \ge 4$$

Áp dụng BĐT này cho tam giác ΔPQC ta thu được BĐT :

$$\frac{m_am_b}{ab} + \frac{m_bm_c}{bc} + \frac{m_cm_a}{ca} \ge \frac{9}{4}$$

Tóm lại :

Trong tam giác có 3 cạnh là a, b, c và 3 trung tuyến tương ứng là m_a, m_b, m_c ta có các bất đẳng thức sau :

(B1) $\dfrac{ab}{m_am_b} + \dfrac{bc}{m_bm_c} + \dfrac{ca}{m_cm_a} \ge 4$

(B2) $\dfrac{m_am_b}{ab} + \dfrac{m_bm_c}{bc} + \dfrac{m_cm_a}{ca} \ge \dfrac{9}{4}$

(B3) $am_am_b + bm_am_c + cm_am_b \ge$
$\ge am_a^2 + bm_b^2 + cm_c^2$

(B4) $abm_c + bcm_a + cam_b \ge$
$\ge a^2m_a + b^2m_b + c^2m_c$

Mời các bạn vận dụng bất đẳng thức Ptôlêmê để giải một số bài tập sau :

Bài tập: Chứng minh rằng trong ΔABC với 3 cạnh là *a, b, c* và 3 trung tuyến tương ứng là m_a, m_b, m_c ta có các bất đẳng thức

1) $(a^2 + b^2 + (n-1)c^2)(a^2 + c^2 + (n-1)b^2)(b^2 + c^2 + (n-1)a^2) \le$
$\le (a^2 + nbc)(b^2 + nac)(c^2 + nab)$ với $0 \le n \le \dfrac{1}{2}$

(xem bài T8/285)

2) $\dfrac{3}{4}[6abc - (a^3+b^3+c^3)] \le am_bm_c + bm_am_c +$
$+ cm_am_b \le \dfrac{3}{4}abc + \dfrac{1}{2}(a^3 + b^3 + c^3)$

3) $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \ge 2\sqrt{3}$

4) $\dfrac{m_a}{a} + \dfrac{m_b}{b} + \dfrac{m_c}{c} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Diễn đàn
DẠY VÀ HỌC TOÁN

Về cách giải một bài toán
VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

NGUYỄN ĐỨC HỒNG
(GV trường THPT Yên Mỹ, Hưng Yên)

Trong sách giáo khoa Hình học lớp 12 xuất bản năm 2000 có bài tập 10 mục 9, chương II :

Bài tập : Viết phương trình của đường thẳng qua điểm M (0, 1, 1) vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 được cho bởi các phương trình sau :

$$(d_1)\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1};\ (d_2)\begin{cases}x+y-z+2=0\\x+1=0\end{cases}$$

Sách bài tập đã hướng dẫn giải như sau :

Gọi d là đường thẳng cần tìm thì $d = (\alpha) \cap (\beta)$, trong đó (α) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d_1, còn (β) là mặt phẳng đi qua M và chứa đường thẳng d_2.

Lời giải trên là đầy đủ nếu trong đề bài có ngụ ý tồn tại duy nhất đường thẳng d, tuy nhiên trong trường hợp tổng quát chưa chứng tỏ chắc chắn rằng d tồn tại và d cắt d_2 : có thể $d // d_2$ trong mặt phẳng (β) hoặc $(\alpha) // (\beta)$ hoặc (α) trùng với (β).

Nếu xét thêm vị trí tương đối của d và d_2 thì lời giải trở nên "cồng kềnh" và đôi khi cách làm trên tỏ ra không hiệu lực trong trường hợp bài toán có vô số nghiệm (khi $d_2 \in (\alpha)$ tức là (α) trùng với (β)) hoặc bài toán vô nghiệm (khi $d_2 // (\alpha)$ tức là $(\alpha) // (\beta)$)

Tôi xin đưa ra cách giải quyết bài toán trên trong trường hợp tổng quát như sau :

Phương pháp 1. Mặt phẳng (α) đi qua điểm M (0, 1, 1) và vuông góc với d_1 sẽ nhận véctơ chỉ phương của d_1 là $\vec{u} = (3, 1, 1)$ làm véctơ pháp tuyến nên phương trình (α) có dạng :

$3(x - 0) + 1(y-1) + 1(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + y + z - 2 = 0.$

Gọi d là đường thẳng cần tìm.

Gọi $N = d \cap (\alpha)$ thì tọa độ của N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x+y+z-2=0\\x+y-z+2=0\\x+1=0\end{cases}\quad(1)$$

Giải hệ (1) có nghiệm là $x = -1$, $y = 2$, $z = 3$.

Đường thẳng d cần tìm đi qua M, N và nhận $\overrightarrow{MN} = (-1, 1, 2)$ làm véctơ chỉ phương nên d có phương trình là :

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$$

Phương pháp 2. Gọi d là đường cần tìm. Giả sử $P\ (x_o, y_o, z_o)$ là giao điểm của d và d_2 thì ta có $P \in d_2$ nên

$$\begin{cases}x_o+y_o+z_o+2=0\\x_o+1=0\end{cases}\quad(2)$$

Vì $M \notin d_2$ nên $M \neq P \Rightarrow \overrightarrow{MP} = (x_o, y_o-1, z_o-1)$ là một véctơ chỉ phương của d. Véc tơ chỉ phương của d_1 là $\vec{u} = (3, 1, 1)$. Mà $d \perp d_1$ nên $\vec{u} \perp \overrightarrow{MP}$ hay $\vec{u}.\overrightarrow{MP} = 0$

$\Leftrightarrow 3x_o + 1(y_o - 1) + 1(z_o - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x_o + y_o + z_o - 2 = 0 \quad (3)$

Từ (2) và (3) ta có :

$$\begin{cases}3x_o+y_o+z_o-2=0\\x_o+y_o-z_o=0\\x_o+1=0\end{cases}\quad(4)$$

Giải (4) có nghiệm là $x_o = -1$, $y_o = 2$, $z_o = 3$ nên tìm được $M(-1, 2, 3) \Rightarrow \overrightarrow{MP} = (-1, 1, 2)$

Vậy phương trình d là:

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$$

Trong cả 2 phương pháp trên hệ phương trình (1) hoặc (4) có thể vô nghiệm, có 1 nghiệm, có vô số nghiệm suy ra bài toán có thể vô nghiệm, có 1 nghiệm, có vô số nghiệm.

Chẳng hạn với các bài toán sau cách giải theo hướng dẫn của sách bài tập là không hiệu quả.

KẾT QUẢ KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2000-2001

NGUYỄN KHẮC MINH
(Vụ Trung học Phổ thông)

Kì thi chọn học sinh giỏi toán Quốc gia lớp 12 THPT năm học 2000-2001 đã diễn ra trong hai ngày 12/3 và 13/3/2001. Tham dự kì thi có 274 thí sinh ở Bảng A và 227 thí sinh ở Bảng B. Trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh phải làm 03 bài toán thi trong thời gian 180 phút.

Về chất lượng làm bài thi của các thí sinh trong kì thi năm nay, các giám khảo nhất trí nhận định:*"Nhiều thí sinh tỏ ra chưa nắm vững các kiến thức cơ bản trong phạm vi chương trình THPT hiện hành"*.

Kết quả của kì thi: ở Bảng A có 91 thí sinh đạt giải (gồm 01 thí sinh đạt giải nhất, 22 thí sinh đạt giải nhì, 38 thí sinh đạt giải ba và 30 thí sinh đạt giải khuyến khích), đạt tỉ lệ 33,2%; ở Bảng B có 99 thí sinh đạt giải (gồm 01 thí sinh đạt giải nhất, 22 thí sinh đạt giải nhì, 43 thí sinh đạt giải ba và 33 thí sinh đạt giải khuyến khích), đạt tỉ lệ 43,6%. Dưới đây là danh sách các thí sinh đạt giải.

BẢNG A

Giải nhất: *Lưu Tiến Đức* (khối PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội).

Giải nhì: *Bùi Duy Hiếu, Lê Anh Vinh* (khối PTCT-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội); *Phạm Gia Vĩnh Anh, Vũ Hoàng Hiệp* (khối PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội); *Đỗ Việt Cường, Nguyễn Minh Đức* (THPT Nguyễn Huệ, Hà Tây); *Phan Mỹ Tiến* (THPT NK, Hà Tĩnh); *Phạm Minh Đức, Nguyễn Anh Quân* (THPT NK Trần Phú, Hải Phòng); *Phạm Đình Quốc Hưng, Vũ Thanh Tùng* (THPT Lê Hồng Phong, Nam Định); *Nguyễn Kiên Cường, Nguyễn Tất Thắng* (THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ); *Nguyễn Thanh Bình, Lê Thành Công, Bùi Việt Hà, Vũ Thị Đức Hạnh* (nữ), *Trần Thế Hùng, Lưu Thị Linh Nhâm* (nữ), *Phạm Lê Minh, Đào Quang Tuấn* (THPT Chuyên, Thái Bình); *Phan Văn Tiến* (THPT Lam Sơn, Thanh Hoá).

Giải ba: *Lê Minh Hoàng, Phạm Hồng Việt* (khối PTCT-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội); *Nguyễn Anh Hào* (THPT Lê Quí Đôn, Đà Nẵng); *Trần Đình Tuấn* (THPT Chuyên, Hà Nam); *Phạm Quang Bình, Vũ Ngọc Minh, Trần Khánh Toàn* (khối PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội); *Nguyễn Hoàng Dũng, Nguyễn Hải Đăng, Phan Vũ Toàn* (THPT Hà Nội-Amsterdam, Hà Nội); *Nguyễn Thành Khiêm, Phan Lạc Linh, Nguyễn Văn Viên* (THPT Nguyễn Huệ, Hà Tây); *Dương Tuấn Anh, Trương Quốc Hải, Nguyễn Nhật Tân* (THPT NK, Hà Tĩnh); *Nguyễn Xuân Cường, Tô Minh Hoàng, Trần Vĩnh Lộc, Phùng Văn Thuỷ, Phạm Tiến Toàn* (THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương); *Vũ Thành Nam* (THPT NK Trần Phú, Hải Phòng); *Trần Trung Hiếu, Đoàn Thái Sơn* (THPT Lê Hồng Phong, Nam Định); *Nguyễn Hữu Giang, Mai Thanh Hoàng, Phan Đăng Khoa, Lê Tất Thắng, Võ Đình Tùng* (khối PTCT-Tin, ĐHSP Vinh); *Lê Thị Minh Hạnh* (nữ), *Nguyễn Việt Hải* (THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình); *Đào Ngọc Vũ* (THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ); *Nguyễn Hải Sơn* (THPT Chuyên, Quảng Ninh); *Lê Hoàng, Lê Đình Hùng, Lưu Đức Thi, Lê Quang Thuận* (THPT Lam Sơn, Thanh Hoá); *Nguyễn Đình Hoằng* (PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh).

Bài 1. Viết phương trình của đường thẳng đi qua $M\ (1, 3, 0)$ vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 được xác định bởi các phương trình sau :

$$(d_1): \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2},\quad (d_2): \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-2t \\ z = -1-t \end{cases}$$

Kết quả : có vô số đường thẳng $d \in (\alpha)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, các đường thẳng này có phương trình dạng $\begin{cases} x = 1+at \\ y = 3+bt \\ z = ct \end{cases}$ với $a+2b-2c = 0$ và $a : b : c \neq (-2) : 2 : 1$.

Bài 2. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M\ (2, 1, 1)$, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 được xác định bởi các phương trình sau :

$$(d_1): \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1},\ (d_2): \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 3+2t \\ z = 2+5t \end{cases}$$

Kết quả : không tồn tại đường thẳng theo yêu cầu bài toán (bài toán vô nghiệm)./.

Giải khuyến khích: *Nguyễn Đắc Trung* (THPT Yên Phong I, Bắc Ninh), *Nguyễn Đức Hạnh, Trần Minh Quân, Vũ Thái Sơn* (khối PTCT-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội); *Phạm Thị Mai Hoà* (nữ) (THPT Lương Thế Vinh, Đồng Nai); *Nguyễn Xuân Lộc* (khối PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội); *Nguyễn Đình Hà, Nguyễn Hoài Anh* (THPT Hà Nội-amsterdam, Hà Nội); *Trần Ngọc Diệp, Phạm Văn Thắng, Nghiêm Xuân Toàn* (THPT Nguyễn Huệ, Hà Tây); *Đào Văn Huy* (THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương); *Phạm Đức Hiệp, Hoàng Thanh Tùng* (THPT NK Trần Phú, Hải Phòng); *Đoàn Chiến Thắng* (THPT Lê Hồng Phong, Nam Định); *Nguyễn Thái Hà* (THPT Phan Bội Châu, Nghệ An); *Nguyễn Lượng Sáng, Nguyễn Đức Trường* (khối PTCT-Tin, ĐHSP Vinh); *Lê Mạnh Cường, Nguyễn Đình Hoà, Lại Minh Trí* (THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ); *Hoàng Xuân Lĩnh* (PTNK, Quảng Bình); *Trần Thái An Nghĩa* (THPT Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi); *Mai Nguyên Dũng* (THPT Chuyên, Thái Nguyên); *Nguyễn Khắc Tháp* (THPT Lam Sơn, Thanh Hoá); *Ngô Trung Hiếu, Nguyễn Văn Thắng* (THPT Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh); *Trần Huy Lập, Hà Thúc Việt* (Quốc học, Huế); *Lê Mạnh Hùng* (THPT Chuyên, Vĩnh Phúc).

BẢNG B

Giải nhất: *Trần Quốc Tuấn* (THPT Chuyên, Bạc Liêu).

Giải nhì: *Nguyễn Minh Hải, Trần Quang Vinh* (THPT Lê Quí Đôn, Vũng Tàu); *Nguyễn Anh Tuấn* (THPT Chuyên, Bạc Liêu); *Nguyễn Tạ Toàn Khoa* (Quốc học, Bình Định); *Thiều Quang Trung, Tạ Hoàng Thông* (THPT Trần Hưng Đạo, THPT Phan Bội Châu - Bình Thuận); *Võ Quốc Việt* (THPT Bến Tre, Bến Tre); *Hồ Thị Thanh Trang* (nữ) (THPT Chuyên Nguyễn Du, Daklak); *Nguỵ Đức Thuận, Ngô Minh Trí* (THPT Cao Lãnh, THPT Sa Đec - Đồng Tháp); *Hoàng Việt Cường* (THPT Hùng Vương, Gia Lai); *Dương Thị Hương* (nữ) (THPT Hoàng Văn Thụ, Hoà Bình); *Nguyễn Trung Hiền, Nguyễn Thị Liên Chi* (nữ), *Nguyễn Thái Vinh, Nguyễn Đình Long Vân* (nữ), *Nguyễn Khánh Minh, Lê Anh Tuấn* (THPT Chuyên, Lâm Đồng); *Nguyễn Tiến Quang* (THPT Lào Cai, Lào Cai); *Nguyễn Chí Trung Kiên* (THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long); *Nguyễn Việt Hằng* (nữ), *Lê Đình Thịnh* (THPT Chuyên, Yên Bái).

Giải ba: *Lương Đăng Kỳ, Trần Thanh Tuyển* (Quốc học, Bình Định); *Phạm Lê Phương Duy, Trần Hiếu Nam* (THPT Trần Hưng Đạo, Bình Thuận); *Phạm Hoài An, Thái Anh Đức, Trần Quốc Nam* (THPT Lộc Thuận, THPT Bến Tre - Bến Tre); *Trần Vũ Khanh* (THPT Chuyên Phan Ngọc Hiển, Cà Mau); *Nguyễn Thị Kim Liên* (nữ) (THPT Lý Tự Trọng, Cần Thơ); *Trần Viễn Phương* (THPT Sa Đec, Đồng Tháp); *Lê Tiến Hoàng, Huỳnh Vy Quang, Nguyễn Minh Tuân* (THPT Hùng Vương, Gia Lai); *Nguyễn Kim Cương* (THPT Chuyên, Hà Giang); *Nguyễn Xuân Bách, Phạm Thanh Nhàn* (nữ), *Đào Mạnh Tùng* (THPT Hoàng Văn Thụ, Hoà Bình); *Phan Thị Thanh Vân* (nữ), *Bảo Thuận* (THPT Chuyên, Lâm Đồng); *Bùi Mạnh Huấn* (THPT Lào Cai, Lào Cai); *Nông Tuấn Linh, Nguyễn Mạnh Tuấn, Bùi Thanh Tuấn, Bùi Đức Trung* (THPT Chu Văn An, Lạng Sơn); *Trần Quốc Tuấn* (THPT Tân An, Long An); *Đào Đại Dương* (THPT Chu Văn An, Ninh Thuận); *Lục Bích Phượng* (nữ), *Chu Tiến Dũng* (THPT NK, Sơn La); *Lê Thị Ngọc Bích* (nữ), *Lê Thành Dương, Hoàng Thị Lan Phương* (nữ), *Tạ Đức Phương, Nguyễn Văn Quảng, Nguyễn Thái Quang, Phạm Đức Sinh, Nguyễn Thanh Tùng* (THPT Chuyên, Tuyên Quang); *Phan Huy Nhựt* (THPT Trương Định, Tiền Giang); *Nguyễn Thị Mỹ Hạnh* (nữ) (THPT Chuyên, Trà Vinh); *Võ Huy Minh, Trần Xuân Trường* (THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long); *Triệu Thanh Hải, Nguyễn Khánh, Lê Đình Minh* (THPT Chuyên, Yên Bái).

Giải khuyến khích: *Liễu Thái Chương* (THPT Thoại Ngọc Hầu, An Giang); *Nguyễn Hoàng Anh, Trần Văn Thành* (THPT Chuyên, Bạc Liêu); *Phạm Ngọc Huy* (THPT Trần Hưng Đạo, Bình Thuận); *Lê Mai Phương* (nữ), *Nguyễn Ngọc ái Vân* (nữ), *Nguyễn Văn Tài* (THPT Bến Tre, Bến Tre); *Nguyễn Thị Hồng Hạnh* (nữ), *Tăng Thị Hà Yên* (nữ) (THPT Chuyên Nguyễn Du, Daklak); *Lê Nguyễn Minh Tuấn* (THPT Sa Đec, Đồng Tháp); *Hoàng Đức Nguyên* (THPT Chuyên, Hà Giang); *Nguyễn Mạnh Cường, Hoàng Ngọc Dũng, Nguyễn Lâm Tuyền* (THPT Hoàng Văn Thụ, Hoà Bình); *Đỗ Lư Công Minh* (THPT Châu Thành, Kiên Giang); *Vũ Thị Thanh* (nữ), *Lê Nguyễn Bá Duy* (THPTChuyên, Kon Tum); *Nguyễn Đức Cường, Trần Tuấn Anh, Đào Ngọc Mạnh* (THPT Lào Cai, THPT Cam Đường, Lào Cai); *Nông Quang Duy, Tô Ngọc Long, Hoàng Hồng Mai* (nữ), *Mông Thanh Thủy* (THPT Chu Văn An, Lạng Sơn); *Bùi Thị Thiện Mỹ* (nữ) (THPT Lê Quí Đôn, Long An); *Nguyễn Xuân Thắng* (THPT Tô Hiệu, Sơn La); *Trần Quốc Trung* (THPT Hoàng Lê Kha, Tây Ninh); *Nguyễn Quốc Chí, Phạm Trường Huy, Đinh Nguyễn Anh Trung, Nguyễn Lê Quốc Dũng* (THPT Chuyên, THPT Nguyễn Đình Chiểu, Tiền Giang); *Nguyễn Hải Long* (THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long); *Lục Trí Tuyên* (THPT Chuyên, Yên Bái).

BẠN CÓ BIẾT

GIẢI THƯỞNG WOLF

VIỆT TIẾN
(ĐH An Ninh, Hà Nội)

Thế giới có nhiều giải thưởng dành cho các nhà toán học. Giải thưởng Fields là giải thưởng lớn nhất trao cho các nhà toán học xuất sắc không quá 40 tuổi. Có lẽ giải thưởng lớn thứ hai trao cho các nhà toán học là giải thưởng Wolf (không hạn chế tuổi).

Quỹ tài trợ Wolf bắt đầu hoạt động từ năm 1976 với ngân quỹ ban đầu là 10 triệu USD. Toàn bộ số tiền này do dòng họ Wolf cống hiến. Tiến sĩ Ricardo Subirana Lobo Wolf và bà Francisca (vợ ông) là những người thành lập và tài trợ chính cho quỹ. Số tiền trên được đầu tư và dùng thu nhập hàng năm để trao giải, cấp học bổng và trang trải các khoản chi phí cho quỹ.

Mỗi năm có 5 hoặc 6 giải thưởng Wolf được trao cho các nhà khoa học hoặc nghệ sĩ không phân biệt quốc tịch, sắc tộc, tôn giáo, giới tính hoặc quan điểm chính trị, vì những cống hiến phục vụ loài người và vì tình hữu nghị giữa các dân tộc. Các lĩnh vực khoa học được xét trao giải là : nông nghiệp, hóa học, toán học, y học và vật lí. Các lĩnh vực nghệ thuật được xét trao giải luân phiên hằng năm là : âm nhạc, hội họa, điêu khắc và kiến trúc. Giải thưởng cho mỗi lĩnh vực gồm có bằng và 10 nghìn USD.

Những người được giải thưởng Wolf do một hội đồng giải thưởng quốc tế lựa chọn. Hội đồng này gồm 3 hoặc 5 thành viên là những nhà khoa học và chuyên môn nổi tiếng trong mỗi lĩnh vực. Mỗi năm có một hội đồng giải thưởng mới được chỉ định. Công việc của hội đồng, biên bản và nhận xét của mỗi thành viên được giữ hoàn toàn bí mật. Chỉ công bố công khai tên của những người được giải và lí do dẫn đến quyết định của hội đồng. Các quyết định của hội đồng giải thưởng là tối cao và không được thay đổi.

Buổi chính thức giới thiệu giải thưởng được tổ chức tại tòa nhà Quốc hội Israel và đích thân tổng thống nhà nước Israel trao giải thưởng tận tay những người được giải trong một buổi lễ trọng thể.

Tính từ năm 1978 đến năm 1997 đã có 165 người được nhận giải thưởng Wolf, trong số đó có 33 người thuộc lĩnh vực toán học.

Quỹ tài trợ Wolf còn cấp học bổng, trợ cấp cho sinh viên và các nhà khoa học Israel.

Tiến sĩ Ricardo Wolf sinh năm 1887 tại Hanover, Đức, là một trong 14 người con của Moritz Wolf, người trụ cột của cộng đồng Do Thái ở thành phố này. Tôn trọng giáo dục, đạo lí và các giá trị thẩm mỹ là di sản quý giá mà người cha để lại cho các con. Ricardo Wolf đã giữ gìn di sản này trong suốt cuộc sống rất thọ của ông.

Ricardo Wolf tốt nghiệp đại học hóa học ở Đức và trước chiến tranh thế giới lần thứ nhất ông di cư sang Cuba, đất nước này đã trở thành quê hương thứ hai của ông. Năm 1924 ông lấy bà Francisca Subirana, nữ vô địch quần vợt của những năm 1920.

Suốt gần 20 năm Ricardo Wolf làm việc để phát triển quá trình lấy sắt ra từ chất thải của quá trình luyện kim. Cuối cùng ông đã thành công và phát kiến của ông được dùng trong các nhà máy thép trên toàn thế giới. Điều này mang lại cho Ricardo Wolf một nguồn thu nhập lớn.

Ngay từ buổi đầu của cách mạng Cuba, Fidel Castro thường trao đổi thư từ với ông. Năm 1961, theo yêu cầu của tiến sĩ Ricardo Wolf, Fidel Castro cử ông làm đại sứ Cuba ở Israel. Ông giữ chức vụ này cho đến năm 1973, thời kì đó Cuba có quan hệ khăng khít với Israel. Sau khi hoàn thành nhiệm vụ ngoại giao của mình, tiến sĩ Ricardo Wolf quyết định ở lại Israel và sống đến cuối đời ở đó.

Quỹ tài trợ Wolf do ông lập ra năm 1975. Đối với tiến sĩ Ricardo Wolf đây là một dự án hoạt động từ thiện vì loài người không phân biệt chủng tộc, điều này không nằm ngoài lẽ sống của ông.

Tháng hai năm 1981 tiến sĩ Ricardo Wolf từ trần tại biệt thự của ông ở Herzlia và gần một tháng sau vợ ông, bà Francisca cũng qua đời.

NHẮN TIN

* Đề bài toán T5/287 trên THTT tháng 5-2001 xin sửa lại như sau : *Đường thẳng EF cắt đường thẳng AH tại K* (thay cho *EF cắt AC tại K* như đã in). Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

* Các bạn có trong danh sách được nhận tặng phẩm trên mục *Toán học muôn màu* và *Câu lạc bộ* mà thay đổi địa chỉ xin gửi địa chỉ chính xác về Tòa soạn. Cảm ơn.

THTT

Nhìn ra thế giới

KÌ THI OLYMPIC TOÁN SINGAPORE 2001

ĐỀ THI CHUNG CHO HỌC SINH CHƯA VÀO ĐẠI HỌC TỪ 16 TUỔI TRỞ LÊN

Thời gian : 180 phút. Ngày thi : 30 tháng 5 năm 2001
Trả lời tất cả các câu hỏi. Không được sử dụng máy tính

PHẦN A

Mỗi câu trong phần A được 4 điểm
Ở phần A này chỉ cần viết đáp số cho từng câu hỏi

1. Cho $a_1 = 2000$, $a_2 = 2001$ và

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3$

với $n = 1, 2, 3, \ldots$ Tìm giá trị của a_{100}.

2. Tìm số các số nguyên dương có ba chữ số $\overline{abc}$ thỏa mãn $a \le b \le c$.

3. Tìm giá trị của $384\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$.

4. Mỗi ô vuông trong số 48 ô vuông nhỏ của một tấm bìa chữ nhật 8×6 được tô màu đen hoặc màu trắng và số ô vuông được tô đen trong mỗi hàng và mỗi cột đều là số chẵn. Gọi N là số cách mà tấm bìa hình chữ nhật có thể được tô. Tìm giá trị của $\log_2 N$.

5. Cho a, b là hai số thực. Giả sử rằng phương trình bậc hai $x^2 + ax + b - 2 = 0$ với ẩn số x có một nghiệm thực α sao cho $\alpha \ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể được của $100(a^2 + b^2)$.

6. Giả sử x và n là các số nguyên dương sao cho x^4 được biểu diễn là 777 khi viết trong hệ cơ số n. Tìm giá trị nhỏ nhất của n (ví dụ 45 được biểu diễn là 231 trong hệ cơ số 4, vì $45 = 2\times4^2 + 3\times4 + 1$).

7. Gọi x là số thực thỏa mãn phương trình

$$\sqrt{4x-7-12\sqrt{x-4}} + \sqrt{4x-16\sqrt{x-4}} = \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{25}{4}\right)$$

Tìm giá trị của $x + \dfrac{1}{4}$.

8. Có 12 cái hộp rỗng phân biệt được đánh số từ 1 đến 12 tương ứng. Tìm số cách phân chia 8 quả bóng giống nhau vào 12 cái hộp khác nhau đó sao cho tổng số bóng trong các hộp 1, 2 và 3 là chẵn và tổng số bóng trong các hộp 4, 5 và 6 là lẻ.

9. Tìm số các số nguyên N sao cho $1 \le N \le 1400$ và $N = [2x] + [4x] + [6x] + [8x]$ với một số thực x nào đó. Ở đây $[a]$ kí hiệu số nguyên lớn nhất $\le a$.

10. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất N sao cho 4 chữ số tận cùng của N^2 là 6004.

PHẦN B

Mỗi câu trong phần B được 15 điểm
Ở phần B này phải trình bày đầy đủ lời giải cho từng câu hỏi

1. Trong hình bình hành $ABCD$, các đường cao hạ từ A xuống BC và CD cắt các đoạn BC và CD tại các điểm E và F tương ứng. Giả sử $AC = 37$cm và $EF = 35$cm. Gọi H là trực tâm ΔAEF. Tìm độ dài của AH bằng cm. Trình bày các bước tính toán. (Nhớ rằng trực tâm của tam giác là giao điểm của các đường cao hạ từ các đỉnh của tam giác).

2. Cho n là một số nguyên dương và cho a_1, a_2, a_3, ... a_n là n số thực dương sao cho $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 1$. Hỏi bất đẳng thức sau có đúng không

$$\frac{a_1^4}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^4}{a_2^2 + a_3^2} + \frac{a_3^4}{a_3^2 + a_4^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}^4}{a_{n-1}^2 + a_n^2} + \frac{a_n^4}{a_n^2 + a_1^2} \ge \frac{1}{2n} \ ?$$

Hãy giải thích.

3. Giả sử có 2001 quả bóng gôn được ghi số từ 1 đến 2001 tương ứng và một số quả trong số đó được đặt trong một cái hộp. Biết rằng hiệu của hai số trên hai quả bóng bất kì trong hộp không phải là 5 và 8. Hỏi có thể có nhiều nhất bao nhiêu quả bóng gôn trong hộp. Hãy giải thích.

4. Một số nguyên dương n được gọi là có *tính chất (A)* nếu tồn tại một số nguyên dương N sao cho N^2 có thể được viết thành tổng của các bình phương của n số nguyên dương liên tiếp. Hỏi có phải có vô hạn các số nguyên dương có *tính chất (A)* ? Hãy giải thích. (Ví dụ số $n = 2$ có *Tính chất A* vì $5^2 = 3^2 + 4^2$).

VŨ KIM THỦY

OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC

PHẠM THẾ LONG
(Tổng thư kí Hội Toán học VN)

Bắt đầu từ năm 1993, ngọn lửa Olympic Toán sinh viên đã được nhóm lên lần đầu tiên tại Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội (nay là Trường đại học Khoa học Tự nhiên thuộc Đại học Quốc gia Hà Nội).

Olympic Toán sinh viên toàn quốc lần thứ 9 năm nay do trường Đại học Ngoại thương đăng cai dưới sự đồng bảo trợ về mặt tổ chức của Hội Toán học Việt Nam, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Hội Sinh viên Việt Nam. Đây cũng là năm thứ 3 Olympic được tổ chức đồng thời tại 2 khu vực: Hà Nội và Tp. Hồ Chí Minh. Với 35 trường và gần 570 sinh viên dự thi (mỗi trường được cử 2 đội dự thi 2 môn Giải tích và Đại số, số thí sinh chính thức mỗi đội không quá10 người), Olympic Toán sinh viên lần này đã thu hút số lượng trường và số sinh viên dự thi đông nhất từ trước đến nay. Năm nay đã xuất hiện thêm nhiều gương mặt mới như Đại học An ninh, Học viện Quân Y, Đại học Đà Nẵng, Đại học Cần Thơ, ĐHSP Thái Nguyên... trong đó có cả một trường Cao đẳng là Cao đẳng Sư phạm Hà Nội.

Do một trong những mục đích chính của kỳ thi là khuyến khích, động viên phong trào học toán trong sinh viên, nhất là sinh viên các trường đại học kỹ thuật, kinh tế... nên chương trình thi đã được cô đọng tới mức tối đa, phạm vi kiến thức giới hạn trong năm thứ nhất các trường đại học nhằm thu hút ngày càng nhiều sinh viên của các trường đại học khác nhau trong cả nước. Theo truyền thống, Olympic năm nay cũng gồm 2 môn thi: Giải tích và Đại số. Nội dung thi môn Giải tích xoay quanh những kiến thức cơ bản về giới hạn, liên tục, vi phân, tích phân hàm một biến. Môn Đại số nhằm kiểm tra những kiến thức cốt lõi về ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính, giá trị riêng của đa thức đặc trưng của ma trận. Giải thưởng đã được trao riêng cho từng môn thi và, theo thông lệ như các kì thi Toán quốc tế, khoảng 50% số sinh viên dự thi sẽ được trao các giải nhất, nhì, ba và khuyến khích theo thứ tự điểm từ cao xuống thấp.

Sự tham gia đông đảo của sinh viên nhiều trường đại học hai miền Nam Bắc cùng sự chuẩn bị chu đáo của cơ sở đăng cai tổ chức - Trường Đại học Ngoại thương - đã làm cho Olympic Toán sinh viên lần này thành công tốt đẹp. Hy vọng ngọn lửa Olympic Toán sinh viên ngày một được toả sáng hơn, lan rộng hơn, thu hút nhiều hơn sự tham gia của các trường đại học trong cả nước và sự quan tâm, khuyến khích, ủng hộ, động viên cả về tinh thần và vật chất của các cơ quan chức năng.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 43

Problem. Teams $T_1, T_2,...,T_n$ take part in a tournament in which every team plays every other team just once. One point is awarded for each win, and it is assumed that there are no draws. Let $s_1, s_2,..., s_n$ denote the scores of $T_1, T_2, ..., T_k$ respectively. Show that, for $1 < k < n$,

$$s_1 + s_2 + ... + s_n \leq nk - \frac{1}{2}k(k+1).$$

Solution. The teams $T_1, T_2,...,T_k$ play $\frac{1}{2}k(k-1)$ games among themselves and $k(n-k)$ games against the other teams $T_{k+1}, T_{k+2},...,T_n$. The score won by $T_1, T_2,..., T_k$ for the games among themselves is exactly $\frac{1}{2}(k-1)$. Therefore, their total score is greatest when they win all the $k(n-k)$ games against the other teams. This implies

$$s_1+s_2+...+s_n \leq \frac{1}{2}k(k-1) + k(n-k) = nk - \frac{1}{2}k(k+1).$$

Từ mới :

team	= đội
take part	= tham gia (động từ)
tournament	= cuộc thi đấu
play	= chơi, đấu (động từ)
once	= chỉ một lần (phó từ)
point	= điểm
award	= thưởng (động từ)
win	= trận thắng
assume	= giả sử (động từ)
draw	= trận hòa
denote	= ký hiệu (động từ)
score	= điểm số
respectively	= tương ứng (phó từ)
game	= trận đấu
against	= chống lại (giới từ)
exactly	= chính xác (phó từ)
imply	= suy ra (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/289. Tìm mọi số nguyên n thỏa mãn

$$(n+5)^2 = (4(n-2))^3$$

PHẠM HÙNG
(Hà Nội)

Bài T2/289. Giải phương trình

$$x^2 + \sqrt{2-x} = 2x^2.\sqrt{2-x}$$

PHẠM CÔNG MINH
(GV THPT Hồng Quang, Hải Dương)

Bài T3/289. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau, trong đó x là số thực :

$$\frac{(x^2+1)^{2001}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(x^2+\frac{1}{2001}\right)(x^2+1.2.3\ldots2001)}$$

ĐẶNG THANH HẢI
(GV Học viện Phòng không - Không quân Sơn Tây, Hà Tây)

Bài T4/289. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, G là điểm trên cạnh AB sao cho $GB = 2GA$. Các đường thẳng GM và CA cắt nhau tại D. Đường thẳng qua M vuông góc với CG tại E và cắt AC tại K. Gọi P là giao điểm của DE và GK. Chứng minh rằng :

a) DE = BC ; b) PG = PE.

THÁI NHẬT PHƯƠNG
(GV THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T5/289. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC, P là giao điểm của AN và BM, Q là giao điểm của DN và CM. Chứng minh rằng :

$$\frac{PA}{PN} + \frac{PB}{PM} + \frac{QC}{QM} + \frac{QD}{QN} \geq 4$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

HỒ QUANG VINH
(GV khối PTC Toán - Tin ĐHSP Vinh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/289. Cho các số nguyên dương a_1, a_2, ..., a_n $(n \geq 2)$ lớn hơn 1. Đặt tích

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i^2 - 1) = A$$

Biết rằng tổng $\sum_{i=1}^{n}\frac{A}{(a_i^2-1)(a_i+1)}$ là một số tự nhiên. Chứng minh rằng số $\frac{A}{(a_i^2-1)(a_i+1)}$ cũng là số tự nhiên với mỗi $i = 1, 2, ..., n$.

LÊ QUANG NẪM
(SV ĐHKHTN-ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T7/289. Giải phương trình

$$3^x + 3^{x^2} = 2^x + 4^{x^2}$$

TẠ MINH ĐỨC
(SV 26G khoa Toán ĐHSP Hà Nội 2)

Bài T8/289. Cho hai dãy số dương (x_n), (y_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ được xác định bởi :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1} \quad \text{với mọi } n = 1, 2, 3, \ldots \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1 - 4x_{n+1}^2} \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy (x_n) và dãy (y_n) .

KIỀU PHƯƠNG CHI
(Cao học 8 ĐH Vinh, Nghệ An)

Bài T9/289. Trên mặt phẳng cho tam giác ABC và một đường thẳng d. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu (vuông góc) của A, B, C trên đường thẳng d. Gọi A_2, B_2, C_2 là hình chiếu của A_1, B_1, C_1 trên đường thẳng BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

HẠ VŨ ANH
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T10/289. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp một mặt cầu tâm O. Gọi M là một điểm nằm trong tứ diện. Các tia AM, BM, CM, DM cắt mặt cầu lần nữa ở các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 tương ứng.

Chứng minh rằng :

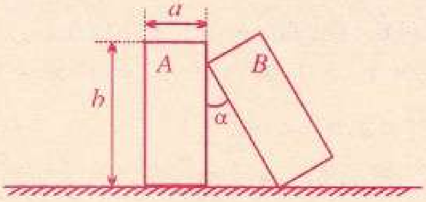
$$\frac{V(A_1B_1C_1D_1)}{V(ABCD)} = \frac{MA_1.MB_1.MC_1.MD_1}{MA.MB.MC.MD}$$

trong đó kí hiệu $V(XYZT)$ là thể tích khối tứ diện $XYZT$.

THÁI VIẾT THẢO
(GV THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

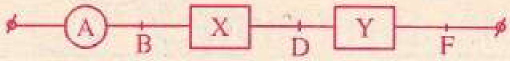
Bài L1/289. Hai khối gỗ hình hộp giống nhau A và B đặt trên mặt phẳng ngang như hình vẽ, góc giữa 2 mặt bên là α. Hệ số ma sát trượt giữa 2 khối và mặt phẳng ngang đều là k.



Tìm điều kiện của α theo a, b và k để hệ cân bằng (bỏ qua ma sát giữa hai khối)

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/289. Một mạch điện xoay chiều như sơ đồ bên. Trong mỗi hộp X và Y chỉ có một linh kiện hoặc là điện trở, hoặc là cuộn cảm hoặc là tụ điện. Ampe kế nhiệt A trỏ 1 ampe, $U_{BD} = U_{DF} = 10V$; $U_{BF} = 10\sqrt{3}$ V. Công suất tiêu thụ



của đoạn mạch BF là $P = 5\sqrt{6}$ W. Hãy xác định linh kiện trong X và Y và độ lớn của các đại lượng đặc trưng của các linh kiện đó. Cho biết tần số dòng điện xoay chiều là $f = 50$Hz.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/289. Find all integers n satisfying

$$(n+5)^2 = (4(n-2))^3$$

T2/289. Solve the equation

$$x^2 + \sqrt{2-x} = 2x^2.\sqrt{2-x}$$

T3/289. Find the greatest value of the expression

$$\frac{(x^2+1)^{2001}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{3}\right)...\left(x^2+\frac{1}{2001}\right)(x^2+1.2.3...2001)}$$

where x is arbitrary real number.

T4/289. Let ABC be an isosceles right triangle, right at A. Let M be the midpoint of BC, G be the point of BC, G be the point on side AB such that $GB = 2GA$. The lines GM and CA intersect at D. The line passing through M, perpendicular to CG, cuts CG at E and cuts AC at K. The lines DE and GK intersect at P. Prove that :

a) $DE = BC$; b) $PG = PE$

T5/289. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral, M and N be the midpoints respectively of AD and BC, P be the point of intersection of AN and BM, Q be the point of intersection of DN and CM. Prove that :

$$\frac{PA}{PN} + \frac{PB}{PM} + \frac{QC}{QM} + \frac{QD}{QN} \ge 4$$

When does equality occur ?

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/289. Let be given positive integers $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \ge 2)$ greater than 1. Put

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i^2 - 1) = A$$

Knowing that the sum $\sum_{i=1}^{n}\frac{A}{(a_i^2-1)(a_i+1)}$ is a natural number, prove that the numbers $\frac{A}{(a_i^2-1)(a_i+1)}$ are also natural numbers ($i = 1, 2, ..., n$).

T7/289. Solve the equation

$$3^x + 3^{x^2} = 2^x + 4^{x^2}$$

T8/289. Let be given two sequences of positive numbers (x_n), (y_n) $(n = 1, 2, 3,...)$ defined by :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1} & (n = 1,2,3,...) \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1 - 4x_{n+1}^2} \end{cases}$$

Find the limits of (x_n) and of (y_n).

T9/289. In plane, let be given a triangle ABC and a line d. Let A_1, B_1, C_1 be respectively the orthogonal projections of A, B, C on the line d. Let A_2, B_2, C_2 be the orthogonal profections of A_1, B_1, C_1 respectively on the lines BC, CA, AB. Prove that the lines A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 are concurrent.

T10/289. Let be given a tetrahedron $ABCD$ inscribed in a sphere with center O and let M a point inside the tetrahedron. The rays AM, BM, CM, DM cut again the sphere respectively at A_1, B_1, C_1, D_1. Prove that

$$\frac{V(A_1B_1C_1D_1)}{V(ABCD)} = \frac{MA_1.MB_1.MC_1.MD_1}{MA.MB.MC.MD}$$

where $V(XYZT)$ denots the volume of tetrahedron $XYZT$.

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Bài T1/285. *Cho số tự nhiên lẻ p và các số nguyên a, b, c, d, e thỏa mãn các điều kiện : tổng a+b+c+d+e và tổng $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ đều chia hết cho p. Chứng minh rằng số $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ cũng chia hết cho p.*

Lời giải. Xét đa thức

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e).$$

Ta đặt

$$f(x) = x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - abcde \ (*)$$

với $A = a + b + c + d + e$,

$B = ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de$

Lưu ý rằng

$$2B = (a+b+c+d+e)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$$

là bội của p, và do p là số lẻ, cho nên B là bội của p.

Thay $x = a, b, c, d, e$ vào (*) và cộng theo vế, chú ý rằng $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = f(e) = 0$ được :

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 - 5abcde =$$
$$= A(a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4) -$$
$$- B(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3) +$$
$$+ C(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) - D(a+b+c+d+ e)$$

Do các hệ số A, B, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$, $a + b + c + d + e$ là bội của p, nên vế trái cũng là bội của p (đpcm).

Nhận xét. Có ít bạn giải được bài toán này, các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn tương tự như trên.

Vĩnh Phúc: *Trần Thị Tố Linh*, 8B, THCS Yên Lạc; **Hà Nam:** *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên; **Nam Định:** *Nguyễn Đức Tâm*, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh, Tp Nam Định; **Phú Yên:** *Nguyễn Kim Duân*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, Tuy Hòa; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Tân Việt*, 9B, THCS Thái Nguyên, Tp. Nha Trang; **Thanh Hóa:** *Trần Thanh Hưng*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Quảng Ngãi:** *Phạm Minh Vương*, 8/3, THCS Bình Châu, Bình Sơn.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T2/285. *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} x^5 - x^4 + 2x^2y = 2 & (1) \\ y^5 - y^4 + 2y^2z = 2 & (2) \\ z^5 - z^4 + 2z^2x = 2 & (3) \end{cases}$$

Lời giải. Thấy ngay x, y, z khác 0.

* Nếu $x > 1$ thì $x^5 - x^4 = x^4(x - 1) > 0$

$$\Rightarrow 2x^2y < 2 \Rightarrow y < \frac{1}{x^2} < 1$$

$$\Rightarrow y^5 - y^4 = y^4(y - 1) < 0 \Rightarrow 2y^2z > 2$$

$$\Rightarrow z > \frac{1}{y^2} > 1 \Rightarrow z^5 - z^4 = z^4(z - 1) > 0$$

$$\Rightarrow 2z^2x < 2 \Rightarrow x < \frac{1}{z^2} < 1, \text{ mâu thuẫn.}$$

* Nếu $x < 1$ thì tất cả các bất đẳng thức ở trên cùng đổi chiều nên cũng mâu thuẫn.

* Nếu $x = 1$ thì dễ dàng có $y = 1$ và $z = 1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = 1$.

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn đều giải đúng. Một số bạn xét hàm $f(t) = \dfrac{-t^5 + t^4 + 2}{2t^2}$ quá phức tạp. Nhiều bạn xét quá nhiều khả năng.

2) Các bạn lập luận chặt chẽ và giải ngắn gọn là : *Bùi Đăng Lương*, 9B, THCS Bạch Liên, Yên Thành, và *Phan Thị Ngọc Mai*, 8A, THCS Lí Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**, *Nguyễn Đức Duy*, 8B, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Tiến Việt*, 9[13], THCS Thái Nguyên, Nha Trang, **Khánh Hòa**; *Phạm Văn Hoàng* và *Trần Thị Sinh*, 8B, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Đức Tâm*, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh, **Nam Định**; *Văn Bằng*, 8A, THCS Thạch Thất, **Hà Tây**; *Nguyễn Anh Tuấn*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên, **Hà Nam**.

3) Xin lưu ý một số lập luận mắc sai lầm :

\+ Xét hai trường hợp $x = y = z$ và $x \neq y \neq z \neq x$ (*nếu $x = y \neq z$ thì sao ?*)

\+ Xét $x = y = z = 1$ thỏa mãn, còn lại trường hợp $x \neq 1$; $y \neq 1$; $z \neq 1$ (*$x = 1$; $y \neq 1$; $z \neq 1$ thì sao ?*)

\+ Do vai trò bình đẳng nên $x = y = z$ (?)

LTN

Bài T3/285. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{2x^2 + 3y^2}{2x^3 + 3y^3} + \frac{2y^2 + 3x^2}{2y^3 + 3z^3} \le \frac{4}{x + y}$$

trong đó x, y là các số dương. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. của *Nguyễn Thanh Tùng B*, 7A1, THCS Láng Thượng, Hà Nội.

$$\frac{2x^2 + 3y^2}{2x^3 + 3y^3} + \frac{2y^2 + 3x^2}{2y^3 + 3z^3} \le \frac{4}{x + y} \quad (1)$$

Đặt $\dfrac{x}{y} = t$. Do $x, y > 0 \Rightarrow t > 0$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2t^2 + 3}{2t^3 + 3} + \frac{2 + 3t^2}{2 + 3t^3} \le \frac{4}{t + 1}$$

$\Leftrightarrow (t+1)(12t^5+13t^3+13t^2+12) \le 4(6t^6+13t^3+6)$
$\Leftrightarrow 12(t^6-t^5-t+1)-13t^2(t^2-2t+1) \ge 0$
$\Leftrightarrow 12(t-1)^2(t^4+t^3+t^2+t+1)-13t^2(t-1)^2 \ge 0$
$\Leftrightarrow (t-1)^2[12(t^4+t^3+t^2+t+1)-13t^2] \ge 0$ (2)

Nhưng ta có

$12(t^4+t^3+t^2+t+1)-13t^2$
$=12t^4+12t(t-1)^2+11t^2+12>0$

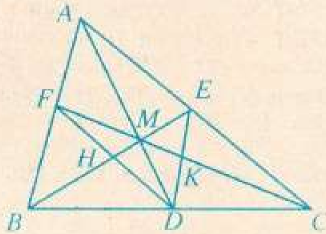
Vậy (2) đúng với mọi x, y dương. Từ đó suy ra (1) đúng với mọi x, y dương. Đẳng thức ở (2), (1) xảy ra khi $t=1 \Leftrightarrow x=y$.

Nhận xét. Có rất nhiều lời giải đúng gửi đến tòa soạn.

TỐ NGUYÊN

Bài T4/285. *Cho tam giác ABC với điểm M nằm trong tam giác. Các tia AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Gọi K là giao điểm của DE và CM, gọi H là giao điểm của DF và BM. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BK, CH đồng quy.*

Lời giải. Áp dụng định lí Mênêlauyt cho ΔAMC (với bộ ba điểm thẳng hàng E, K, D) và ΔBMC (với bộ ba điểm thẳng hàng F, H, D) ta có :



$$\frac{KM}{KC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{DA}{DM}=1\ ,\ \frac{BH}{HM}\times\frac{DM}{DA}\times\frac{FA}{FB}=1$$

Suy ra

$$\frac{KM}{KC}=\frac{EA}{EC}\times\frac{DM}{DA}\ ,\frac{BH}{HM}=\frac{FB}{FA}\times\frac{DA}{DM}\quad(1)$$

Áp dụng định lí Xêva cho ΔABC với bộ ba đường thẳng đồng quy AD, BE, CF :

$$\frac{CD}{BD}\times\frac{BF}{FA}\times\frac{AE}{EC}=1.$$

Từ đó $\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{FA}{BF}\times\dfrac{EC}{AE}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{KM}{KC}\times\dfrac{BH}{HM}\times\dfrac{CD}{BD}=1$.

Vậy theo phần đảo của định lí Xêva BK, CH, MD đồng quy tức AD, BK, CH đồng quy.

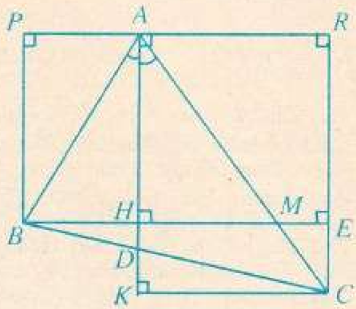
Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn : **Phú Thọ:** *Lai Trường Xuân*, 8A2, THCS Giấy, Phong Châu; **Hải Dương:** *Lê Đình Huy*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Hải Phòng:** *Phạm Anh Minh*, 8A, THPT NK Trần Phú; **Nam Định:** *Trần Trung Kiên*, *Nguyễn Đăng Hợp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Nghệ An:** *Bùi Danh Nam*, 8B, THCS thị trấn Nam Đàn; *Nguyễn Thị Nhung*, 9H, THCS thị trấn Quỳ Hợp; **Hà Tĩnh:** *Lê Minh Quang*, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/285. *Cho tam giác ABC. Gọi MN, PR, QS là hình chiếu vuông góc của AB, BC, CA lên các đường phân giác ngoài của các góc C, A, B tương ứng. Gọi S, r lần lượt là diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh rằng* $MN+PR+QS \ge 6\sqrt[3]{Sr}$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Tiến Việt*, 9/13, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, **Khánh Hòa**)



Gọi AD là đường phân giác trong của ΔABC và AP, AR là đường phân giác ngoài. Dễ thấy $PR \perp AD$. Đặt $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, $2p=a+b+c$.

Giả sử $AC \ge AB$. Từ B kẻ $BE \perp CR$ tại E, BE cắt AC tại M. Dễ thấy $AB=AM$ và $CM=AC-AB=b-c$ (nếu $AB>AC$ thì kẻ $CF \perp BP$)

Áp dụng định lí Pitago được :

$PR^2=BE^2=BC^2-CE^2 \ge BC^2-CM^2=$
$=a^2-(b-c)^2=4(p-b)(p-c)$ hay
$PR \ge 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$. Tương tự có
$MN \ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$,
$QS \ge 2\sqrt{(p-a)(p-c)}$, do đó

$$MN+PR+QS \ge 2(\sqrt{(p-a)(p-b)}+\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{(p-c)(p-a)})$$
$$\ge 6\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}=6\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}=$$
$$=6\sqrt[3]{S.\frac{S}{p}}=6\sqrt[3]{Sr}\ \text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$(p-a)(p-b)=(p-b)(p-c)=(p-c)(p-a) \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. 1) Một số bạn làm cách khác dài hơn hoặc phải sử dụng các công thức phụ. Chẳng hạn : Kẻ BH và CK vuông góc với đường phân giác trong AD. Ta có $PR = AP + AR = BH + CK = \dfrac{2S}{AD}$ (*).

Thay công thức độ dài đường phân giác $AD = \dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)} \le \sqrt{p(p-a)}$ vào (*) được $PR \ge \dfrac{2S}{\sqrt{p(p-a)}}$. Tương tự, ta có $MN.PR.QS \ge \dfrac{8S^3}{\sqrt{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}} = \dfrac{8S^2}{p}$. Từ đó

$$MN + PR + QS \ge 3\sqrt[3]{MN.PR.QS} \ge 6\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}} = 6\sqrt[3]{Sr}.$$

2) Các bạn sau có lời giải tương đối gọn :

Bắc Ninh: Nguyễn Chí Bảo, THCS Đại Lai, Gia Bình; **Nam Định:** Trần Trung Kiên, Nguyễn Đăng Hợp, Lương Hữu Long, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Hải Dương:** Lê Đình Huy, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, Phạm Huy Hoàng, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp Hải Dương; **Hà Tây :** Phan Lạc Dũng, 8A, THCS Thạch Thất, Nguyễn Trung Nghĩa, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Thanh Hóa:** Trương Nho Đại, Trần Thanh Hưng, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc.

VIỆT HẢI

Bài T6/285. *Tìm số nguyên dương k sao cho dãy số sau gồm toàn số nguyên :* $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{ka_n^2 - 8}$ *với mọi* $n = 1, 2, 3, \ldots$

Lời giải. (của *Nguyễn Tuấn Dương*, lớp 11A Toán, ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội)

Ta có : $a_2 = 5 + \sqrt{k-8}$.

Đặt $\sqrt{k-8} = t$ ($t \in \mathbf{N}$) và khi đó

$a_3 = 5(5+t) + \sqrt{(t^2+8)(5+t)^2 - 8}$

Để $a_3 \in \mathbf{Z}$ thì phải có

$$f(t) = (t^2+8)(5+t)^2 - 8 = q^2 \ (q \in \mathbf{N}).$$

Ta có : $f(t) = t^4 + 10t^3 + 33t^2 + 8t + 192$

$(t^2 + 5t + 4)^2 < f(t) < (t^2 + 5t + 14)^2$ và $f(t) \vdots 2$

$\Rightarrow q = t^2 + 5t + v$ ($5 \le v \le 13$, $v \in \mathbf{N}$).

Suy ra $v \in \{6, 8, 10, 12\}$. Thử trực tiếp ta được $v = 8$ và $q = t^2 + 5t + 8 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow k = 24$.

Ngược lại, với $k = 24$ thì

$a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 - 8}$

$\Rightarrow a_{n+1}^2 - 10a_na_{n+1} + a_n^2 + 8 = 0$ (*)

Thay n bởi $n+1$ ta có :

$a_{n+2}^2 - 10a_{n+1}a_{n+2} + a_{n+1}^2 + 8 = 0$ (**)

Trừ theo vế (*) và (**) ta được

$(a_n - a_{n+2})(a_{n+2} + a_n - 10a_{n+1}) = 0$ (***)

Do $\{a_n\}$ là dãy tăng nên $a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$ với $a_1 = 1$, $a_2 = 9$.

Do vậy dãy $\{a_n\}$ gồm toàn số nguyên $\Leftrightarrow k=24$

Nhận xét. Có thể tổng quát hóa bài toán như sau: "Cho $a, b \in \mathbf{Z}$. Tìm số nguyên k sao cho dãy sau gồm toàn số nguyên :

$a_1 = 1$; $a_{n+1} = aa_n + \sqrt{ka_n^2 - b}$; $n = 1, 2, 3\ldots$

Đa số các bạn gửi bài đều có lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn hơn cả :

Nguyễn Hoàng Hải, 10CT, THPT Lê Hồng Phong, *Phạm Tuấn Anh*, 12T, ĐHKHTN **Tp HCM**; *Phạm Quang Nhật, Phạm Văn Hùng*, 11A, Chuyên toán ĐHSP, **Hà Nội**; *Vũ Đình Đẩu*, 11T, THPT Trần Phú, **Hải Phòng** ; *Lê Văn Bắc*, 8A, THCS Quảng Lĩnh, **Thanh Hóa** ; *Đặng Ngọc Mạnh, Phạm Văn Hùng*, 11CT, THPT Nguyễn Trãi, *Bùi Bắc Phong*, $10A_{12}$, THPT Hồng Quang, **Hải Dương** ; *Hà Nhật Sang*, 11T, THPT NK tỉnh **Quảng Bình** ; *Ngô Quý Hòa*, 10A1, THPT Yên Phong I, **Bắc Ninh** ; *Hà Ngọc Quỳnh Hương*, 11T1, THPT Lương Thế Vinh, **Đồng Nai** ; *Dương Minh Sơn*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Tây** ; *Nguyễn Xuân Trường, Nguyễn Việt Linh, Phan Bá Lê Biên, Cao Việt Dũng, Nguyễn Đức Phùng*, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/285. *Xét dãy số* (x_n) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *được xác định bởi :*

$x_1 = a \ge 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 - 2\{x_n\}^2}{[x_n]^2}$, *trong đó* $[x]$ *là phần nguyên của x và* $\{x\}$ *là phần thập phân của x. Chứng minh rằng dãy số* (x_n) *có giới hạn khi n tăng vô hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. (của *Trần Võ Huy*, 10T, THPT NK Tp Hồ Chí Minh và một số bạn khác).

Ta xét hai trường hợp sau :

Trường hợp 1: a là số nguyên. Trong trường hợp này $x_n = 1\ \forall n \ge 2$.

Nói riêng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Trường hợp 2: Số a không nguyên. Ta có

$$x_2 = \frac{([a]+\{a\})^2 - 2\{a\}^2}{[a]^2} = 2 - \left(1 - \frac{\{a\}}{[a]}\right)^2$$

thuộc khoảng $(1, 2)$ vì $0 < \dfrac{\{a\}}{[a]} < 1$

Chứng minh bằng quy nạp theo n được

$1 < x_n < 2$ với mọi $n = 2, 3, 4, ...$

Từ đó $\forall n \geq 2$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2(x_n - 1)^2}{1}.$$

Suy ra $2 - x_{n+1} = (2 - x_n)^2 = ...$

$= (2 - x_2)^{2^{n-1}} \to 0$ do $0 < 2 - x_2 < 1$

Vậy khi a không nguyên thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Nhận xét. Tòa soạn nhận được lời giải của hơn 100 bạn, hầu hết các bạn giải đúng. Do không lập luận cẩn thận một số bạn chỉ có một kết luận $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ (trong mọi trường hợp !).

Các bạn sau có lời giải tốt : **Bắc Ninh:** *Lại Đắc Khải, Nguyễn Văn Thảo*, 10T, THPT NK Hàn Thuyên; **Hà Nội:** *Đinh Ngọc Thắng, Nguyễn Hữu Thuần*, 10A, ĐHKHTN – ĐHQG, *Đặng Đình Khánh*, 10A1, ĐHSP1; **Ninh Bình:** *Trịnh Mỹ Châu*, 10T, THPT Lương Văn Tụy; **Thanh Hóa:** *Trần Anh Quang, Lê Hữu Tuấn*, 10T1, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** *Phạm Thái Khánh Hiệp, Trương Bình Nguyên*, 10A, ĐHSP Vinh; **Quảng NGãi:** *Nguyễn Văn Thắng, Phạm Văn Trung*, 10T, THPT Lê Khiết ; **Phú Yên:** *Phan Thành Nam*, 10T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, v.v...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/285. *Tìm tất cả các giá trị thực của x sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số không âm a, b, c*

$$[a^2+b^2+(x-1)c^2] \times [a^2+c^2+(x-1)b^2] \times [b^2+c^2+(x-1)a^2]$$
$$\leq (a^2 + bcx)(b^2 + acx)(c^2 + abx)$$

Lời giải. (của bạn *Phan Thành Nam*, 10T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**).

Cho $a = b$, $c = 0$ ta có

$2x^2a^6 \leq xa^6 \Leftrightarrow 2x^2 \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Đảo lại giả sử $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Không giảm tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$.

Đặt $b^2 + c^2 + (x-1)a^2 = A$, $a^2 + xbc = A_1$

$a^2 + c^2 + (x-1)b^2 = B$, $b^2 + xac = B_1$

$a^2 + b^2 + (x-1)c^2 = C$, $c^2 + xab = C_1$

Dễ thấy $B, C, A_1, B_1, C_1 \geq 0$

Nếu $A \leq 0$ thì BĐT ở đề bài đúng nên chỉ cần xét trường hợp $A > 0$.

Ta có $AB - C_1^2 = (a-b)^2[xc^2 + (x-1)(a+b)^2] \leq 0$ vì $xc^2 \leq (1-x)c^2 \leq (1-x)(a+b)^2$

Vậy $AB \leq C_1^2$ (1)

Tương tự

$AC - B_1^2 = (a-c)^2[xb^2 + (x-1)(a+c)^2] = k \leq 0$ (2)

$BC - A_1^2 = (b-c)^2[xa^2 + (x-1)(b+c)^2]$ (3)

Ta sẽ chứng minh $BC - A_1^2 \leq -k$ (4)

hay vế phải của (3) $\leq -k$

Thật vậy vì $0 \leq x \leq 1-x \Rightarrow xa^2 \leq (1-x)(a+c)^2$, $xb^2 \leq (1-x)(b+c)^2$. Do đó

$xa^2 + (x-1)(b+c)^2 \leq (1-x)(a+c)^2 - xb^2$

Hơn nữa $a-c \geq b-c \geq 0$

mà $(1-x)(a+c)^2 \geq (1-x)b^2 \geq xb^2$

do đó $(b-c)^2[xa^2 + (x-1)(b+c)^2] \leq$

$(a-c)^2[(1-x)(a+c)^2 - xb^2] = -k$

Thành thử từ (2), (4) có

$AC.BC \leq (B_1^2 + k)(A_1^2 - k) =$

$= A_1^2B_1^2 + kA_1^2 - kB_1^2 - k^2 \leq A_1^2B_1^2$

(do $A_1 \geq B_1 \geq 0 \geq k$) (5)

Nhân (1) và (5) theo từng vế ta có đpcm.

Đáp số : $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Nhận xét. Đây là một bài toán khó về mặt kĩ thuật. Phần lớn các lời giải gửi đến đều làm sai. Ngoài lời giải ngắn gọn và đẹp đẽ ở trên, các bạn sau cũng có lời giải đúng : *Nguyễn Tuấn Dương*, 11A, ĐHKHTN, *Kim Đình Thái*, 11A, ĐHSP **Hà Nội**; *Phạm Tuấn Anh*, 12T, PTNK – ĐHQG **Tp. Hồ Chí Minh**.

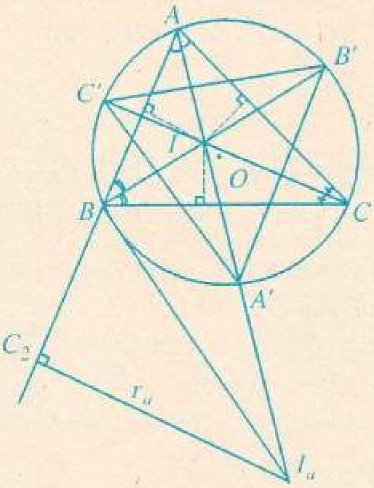
ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/285. *Gọi I và O lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của một tam giác ABC. Các tia AI, BI và CI cắt lại đường tròn tâm O tương ứng ở A', B' và C'. Gọi r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC ứng với các góc A, B, C. Gọi r'_a, r'_b, r'_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp của tam giác A'B'C' ứng với các góc A', B', C'. Chứng minh rằng :*

$$r'_a + r'_b + r'_c \geq r_a + r_b + r_c \ (*)$$

Lời giải. (của *Phạm Trung Hiếu*, 11A1, PTCT–T, ĐHSP Vinh, **Nghệ An**)

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC ; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp (chung) của hai tam



giác ABC và $A'B'C'$. Trên hình vẽ ta kí hiệu I_a là tâm và C_2 là tiếp điểm trên tia AB của đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC ứng với góc A thì : $I_aC_2 = r_a$ và $AC_2 = p$.

Ta có hệ thức : $r_a = p\,\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}$ (1)

Vì $A + B + C = \pi$, áp dụng định lí hàm số sin và các công thức góc nhân đôi, công thức biến đổi tổng thành tích, tích thành tổng, ta được :

$$r_a = p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C)\,\mathrm{tg}\frac{A}{2} =$$

$$= R\left(2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= R\left(2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow r_a = R(1 - \cos A + \cos B + \cos C) \qquad (2)$$

Chứng minh tương tự, ta được :

$$r_b = R(1 + \cos A - \cos B + \cos C) \qquad (3)$$

và $r_c = R(1 + \cos A + \cos B - \cos C)$; (4)

Cộng theo vế các đẳng thức (2), (3) và (4), ta được :

$$r_a + r_b + r_c = R(3 + \cos A + \cos B + \cos C)\ ; \quad (5)$$

Đối với tam giác $A'B'C'$ nội tiếp đường tròn (O, R) ta cũng có hệ thức tương tự :

$$r_a' + r_b' + r_c' = R(3 + \cos A' + \cos B' + \cos C') \quad (5')$$

Đối chiếu (5) và (5') ta thấy rằng BĐT (*) cần chứng minh tương đương với BĐT (**) sau đây :

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \cos A' + \cos B' + \cos C' \quad (**)$$

Nhưng dễ thấy rằng : $\widehat{A}' = \dfrac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C})$,

$$\widehat{B}' = \frac{1}{2}(\widehat{C} + \widehat{A}) \text{ và } \widehat{C}' = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B}) \qquad (6)$$

Từ đó suy ra : $\cos A' = \sin\dfrac{A}{2}$, $\cos B' = \sin\dfrac{B}{2}$

và $\cos C' = \sin\dfrac{C}{2}$; (7)

Mặt khác,

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \le$$

$$\le 2\cos\frac{A+B}{2} = 2\sin\frac{C}{2} \qquad (8)$$

Chứng minh tương tự, ta được hai BĐT nữa :

$$\cos B + \cos C \le 2\sin\frac{A}{2} \qquad (9)$$

$$\cos C + \cos A \le 2\sin\frac{B}{2} \qquad (10)$$

Cộng theo vế các BĐT (8), (9), (10) rồi đối chiếu với các hệ thức (7) ta thu được BĐT (**) cần tìm, và do đó được (*) (đpcm).

Dấu đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi dấu đẳng thức xảy ra ở (**). Muốn vậy, các BĐT (8), (9) và (10) đều trở thành đẳng thức, nghĩa là :

$$\cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{C-A}{2} = 1$$

và do đó : $A - B = B - C = C - A = 0$, hay là $A = B = C$ và tam giác ABC là một tam giác đều.

Nhận xét. 1) Trong số 260 lời giải gửi đến tòa soạn, chỉ có lời giải nêu trên đây của bạn Hiếu vừa ngắn gọn nhất, vừa chỉ sử dụng kiến thức cơ bản trong SGK để đến được kết quả cần tìm.

Một số bạn khác cũng có lời giải ngắn gọn nhưng có sử dụng hệ thức sau đây giữa các góc của một tam giác ABC bất kì :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

2) Cũng có nhiều bạn sử dụng hoặc chứng minh hệ thức sau giữa các bán kính r, R, r_a, r_b và r_c của các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp và bàng tiếp các góc A, B và C của một tam giác ABC bất kì :

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

Từ đó suy ra BĐT (*) cần chứng minh tương đương với BĐT sau đây :

$$r' \ge r \qquad (***)$$

trong đó r' là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$.

Tuy nhiên, các bạn này đều phải sử dụng (không chứng minh lại) hệ thức sau đây liên hệ giữa r, R và các góc của tam giác ABC :

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Đáng tiếc, có một bạn đã huy động cả hệ thức Ơle ($OI^2 = R^2 - 2Rr$) để chứng minh BĐT (***) mà vẫn giải sai. Chú ý rằng: đường thẳng Ơle của tam giác chứa trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn Ơle chứ không chứa tâm đường tròn nội tiếp.

3) Các bạn sau đây cũng có lời giải tương đối ngắn gọn :

Hà Nội: *Trần Anh Tuấn*, 10B Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Hải Dương:** *Tạ Ngọc Anh*, $11A_6$, THPT Chí Linh, *Lưu Văn Hiển*, *Nguyễn Xuân Hòa*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng:** *Vũ Đình Đẩu*, 11T, THPT NK Trần Phú; **Ninh Bình:** *Nguyễn Quang Vinh*, 8C, THCS Trương Hán Siêu, Tx. Ninh Bình; **Nghệ An:** *Lê Trung Kiên*, 10N, THPT Quỳnh Lưu I; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hồng Phong*, 11D, THPT Hải Lăng; **Quảng Ngãi:** *Phạm Văn Trung*, 10T, *Nguyễn Thiện Tâm*, $11A_4$, **Phú Yên:** *Phùng Trọng Thực*, $10T_2$, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Phạm Tuấn Anh*, 12T, PTNK – ĐHQG Tp HCM.

4) Ngoài ra một số bạn đã đề xuất và chứng minh đúng một số BĐT khác có liên quan đến r_a, r_b, r_c và r_a', r_b', r_c'. Chẳng hạn :

$r_a' r_b' r_c' \ge r_a r_b r_c$ (Phạm Trung Hiếu, Nguyễn Xuân Hòa, Phạm Văn Trung).

$r_a'r_b' + r_b'r_c' + r_c'r_a' \ge r_ar_b + r_br_c + r_cr_a$ (Hiếu, Trung)

$\frac{1}{r_a'} + \frac{1}{r_b'} + \frac{1}{r_c'} \le \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ (Trung)

Riêng bạn Lưu Văn Hiển còn tổng quát hóa bài toán T9/285 như sau :

Gọi A' là điểm trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của đường tròn (ABC) sao cho $\widehat{BAA'} = k\widehat{BAC}$ (với k là một số hữu tỉ, và $0 \le k \le 1$) ; $B' \in \overset{\frown}{CA}$ không chứa B ; $C' \in \overset{\frown}{AB}$ không chứa C sao cho : $\widehat{CBB'} = k\widehat{CBA}$ và $\widehat{ACC'} = k\widehat{ACB}$. Thế thì ta cũng có BĐT (*) như bài toán đã nêu ra.

Khi $k = \frac{1}{2}$, ta thu được kết quả đã nêu trong bài toán T9/285. Sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp, bạn Hiển đã chứng minh đúng BĐT sau đây :

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\alpha_k\right) \le \sin\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{n}\right) ;\ (\forall k,\ 0 < \alpha_k < \frac{\pi}{2})$$

Sau đó áp dụng vào bài toán mà bạn đề xuất, đặt $k = \frac{x}{y}$ ($x < y$ và $x, y \in N^*$) suy ra rằng :

$$\sin\frac{(1-k)A + kB}{2} \ge (1-k)\sin\frac{A}{2} + k\sin\frac{B}{2}$$

Từ đó, sử dụng BĐT Côsi, cuối cùng chứng minh được BĐT :

$$\sin\frac{(1-k)A + kB}{2}.\sin\frac{(1-k)B + kC}{2}.\sin\frac{(1-k)C + kA}{2} \ge$$
$$\ge \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

rồi suy ra BĐT (*) cần tìm.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/285. *Cho 5 điểm phân biệt A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 không đồng phẳng nhưng cùng nằm trên một mặt cầu. Chứng minh rằng các mặt phẳng, mỗi mặt đi qua trọng tâm của tam giác có các đỉnh là 3 trong 5 điểm nói trên và vuông góc với đường thẳng nối hai điểm còn lại, thì đồng quy.*

Lời giải. (dựa theo lời giải của các bạn *Cao Việt Dũng, Hoàng Xuân Quang*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**). Ta kí hiệu như sau :

O là tâm của mặt cầu nói trong đề bài, G là trọng tâm của hệ năm điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5,

G_{ij} là trọng tâm của tam giác nói trong đề bài và không nhận A_i, A_j là đỉnh ($1 \le i \ne j \le 5$),

(P_{ij}) là mặt phẳng qua G_{ij} và vuông góc với A_iA_j ($1 \le i \ne j \le 5$), H_{ij} là trung điểm đoạn A_iA_j ($1 \le i \ne j \le 5$). Với mọi i, j sao cho $1 \le i \ne j \le 5$ ta có :

$$(5\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OG_{ij}})\overrightarrow{A_iA_j} =$$
$$= \left(\sum_{1\le k\le 5}\overrightarrow{OA_k} - \left(\sum_{1\le k\le 5}\overrightarrow{OA_k} - \left(\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}\right)\right)\right)\overrightarrow{A_iA_j}$$
$$= \left(\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}\right)\overrightarrow{A_iA_j} = 2\overrightarrow{OH_{ij}}.\overrightarrow{A_iA_j} = 0 \quad (1)$$

vì $OH_{ij} \perp A_iA_j$.

Lấy điểm X sao cho $\overrightarrow{OX} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OG}$, ta có :

$$5\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OG_{ij}} = 5\overrightarrow{OG} - 3(\overrightarrow{XG_{ij}} - \overrightarrow{XO}) =$$
$$= (5\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OX}) - 3\overrightarrow{XG_{ij}} = 3\overrightarrow{G_{ij}X} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra : $\overrightarrow{G_{ij}X}.\overrightarrow{A_iA_j} = 0$

$$\Rightarrow G_{ij}X \perp \overrightarrow{A_iA_j} \Rightarrow X \in (P_{ij})$$

Từ đó suy ra các mặt phẳng (P_{ij}) đồng quy tại điểm X.

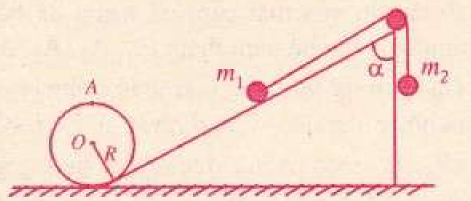
Nhận xét. 1) Ngoài lời giải bằng véctơ như đã nêu trên, một số bạn đã cho lời giải thuần túy bằng phương pháp tổng hợp. Bạn Nguyễn Tiến Linh, 10T, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng** đã cho một lời giải tốt theo hướng này. Một số bạn khác đã cho những lời giải mà trong đó có sự phối hợp của hai phương pháp : véctơ và tổng hợp. Đặc biệt có vài bạn còn dùng phương pháp hình học giải tích.

2) Bạn Phạm Văn Hùng, 11A$_1$, PTCTT–ĐHSP **Hà Nội** cùng một số bạn khác đã đề xuất bài toán tổng quát cho trường hợp n điểm

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Bắc Ninh:** Đỗ Đức Lâm, 12T, THPT NK Hàn Thuyên; **Quảng Bình:** Hà Nhật Sang, 11T, THPT NK Quảng Bình; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Xuân Trường, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **ĐHSP Hà Nội:** Kim Đình Thái, 11A1, PTCTT ; **ĐHQG Tp Hồ Chí Minh:** Trần Việt Cường, 11T, PTNK ; **ĐHQG Hà Nội** : Ngô Quốc Anh, 12A, PTTC–Tin; **Bạc Liêu:** Nguyễn Văn Tâm, 11A1, THPT Giá Rai...

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/285. *Máng nghiêng gồm phần thẳng và phần hình tròn bán kính R như hình vẽ : góc*



$\alpha = 60^o$. Hai quả cầu $m_1 = 1,2kg$, $m_2 = 0,8kg$ nối với nhau bằng sợi dây vắt qua ròng rọc cố định. Lúc đầu m_2 cách sàn một khoảng $h = 5,2m$ và m_1 ở thấp hơn m_2 một khoảng $h_o = 1,6m$. Sau khi 2 quả cầu bắt đầu chuyển động được 2 giây thì m_2 đột ngột bị tuột khỏi dây nối. Bỏ qua mọi ma sát, khối lượng dây, ròng rọc và kích thước của vật. Lấy $g = 10m/s^2$. Tính trị số lớn nhất của R để quả cầu m_1 không rời máng khi chuyển động.

Lời giải. Ta kí hiệu $\vec{T}$ là lực căng của dây. Chọn chiều dương hướng lên phía trên, dọc theo phần thẳng của máng, và áp dụng định luật II Niutơn cho m_1 và m_2 ta có :

$$T - m_1 g\cos\alpha = m_1 a \; ; \; m_2 g - T = m_2 a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 g - m_1 g\cos\alpha}{m_1 + m_2} = 1m/s^2 .$$

Ta thấy $a > 0$ nên m_1 đi lên ; sau 2s, m_1 đi lên dọc theo phần thẳng của máng được một đoạn $x = \frac{at^2}{2} = 2\text{m}$, nghĩa là, theo phương thẳng đứng độ cao của m_1 tăng thêm : $\Delta h = x\cos\alpha = 1\text{m}$. Vận tốc của m_1 khi dây đứt : $v = at = 2(\text{m/s})$. Chọn gốc thế năng tại chân máng, cơ năng của m_1 khi dây đứt là :

$$E = \frac{m_1 v^2}{2} + m_1 g(h - h_o + \Delta h) = 57,6 \text{ (J)}.$$

Muốn m_1 không rời khỏi máng, m_1 phải lên tới đỉnh A của phần tròn của máng, muốn vậy phải có :

$\frac{m_1 v_1^2}{R} \geq m_1 g$, hay $v_1^2 \geq Rg$ (1), với v_1 là vận tốc của m_1 tại A. Mặt khác, theo định luật bảo toàn cơ năng : $\frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g.2R = E$ (2).

Từ (1) và (2) rút ra : $R \leq \frac{2E}{5mg} = 1,92(\text{m})$.

Nghĩa là $R_{max} = 1,92\text{m}$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn :

Hà Nội: *Trần Xuân Anh*, B$_o$, 10A, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, *Phùng Thúy Nhung*, 10 Lí 1, Hà Nội Amsterdam , *Nguyễn Thúy Nhung*, 10A2, PTCTT–ĐHSP Hà Nội ; **Hải Phòng:** *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT NK Hải Phòng; **Thừa Thiên – Huế;** *Vũ Phương Nam*, 10 chuyên Lí, THPT Quốc học Huế; **Tuyên Quang:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 12C2, THPT chuyên Tuyên Quang; **Yên Bái :** *Vũ Lê Duy*, 10P, THPT Nguyễn Huệ, *Nguyễn Thị Nam*, 10A2, *Phan Kim Hoa*, 10A1, THPT chuyên Yên Bái; **Hà Tĩnh:** *Lê Đức Đạt*, *Nguyễn Văn Đức*, 10 Lí, THPT NK tỉnh Hà Tĩnh; **Phú Thọ:** *Nguyễn Kim Ngọc*, *Vũ Văn Trung*, 10B1, THPT chuyên Hùng Vương, *Bùi Tiến Linh*, 10A5, *Hoàng Tuấn Anh*, 12H, THPT Công nghiệp Việt Trì; **Hà Tây:** *Trần Văn Chính*, 11 Lí 2, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Lê Hồng Sinh*, 11A7, *Trần Duy Khiêm*, 10 Lí, *Nguyễn Văn Thắng*, 10T, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Nam:** *Huỳnh Nguyên Toán*, 10/4, THPT Trần Quý Cáp, Hội An, *Trần Đình Hùng*, 10/1, THPT Đỗ Đăng Truyền, Đại Lộc; **Tiền Giang:** *Trần Tấn Lộc*, 12 Lí, *Huỳnh Minh Thảo*, 10 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Đồng Nai:** *Ma Nam*, 11 Lí 1, THPT Lương Thế Vinh, Biên Hòa; **Nam Định:** *Trần Vũ Diệu*, 10 Toán 1, THPT Lê Hồng Phong ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 11 Lí, THPT Hàn Thuyên, *Ngô Quý Hoàn*, 10A, THPT Yên Phong I; **Hưng Yên:** *Đào Ngọc Thủy*, 11 Lí, THPT NK Hưng Yên; **Hải Dương:** *Nguyễn Anh Ngọc*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, *Hoàng Thao*, 10A1, THPT Tuệ Tĩnh, Cẩm Giàng; **Thanh Hóa:** *Vũ Thị Nga*, 10F, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** *Hồ Quốc Huy*, 10A7, *Đặng Hồng Lê*, 10 Lí, *Nguyễn Thị Thu Hiền, Nguyễn Quốc Việt, Phạm Cung Sơn, Nguyễn Việt Hùng, Lê Đình Nam*, 10A3, *Hồ Việt Hùng*, K28 Lí, THPT Phan Bội Châu, Vinh, *Bùi Song Toàn*, 10M, THPT Đô Lương; **Vĩnh Phúc:** *Lương Anh Tài*, 10A3, *Trần Bá Bách*, 11A2, *Dương Quốc Huy, Dương Mạnh Cường, Trần Minh Khuê*, 11A3, *Kiều Ngọc Thanh*, 10B3, *Dương Ngọc Quang*, 11B2, THPT chuyên Vĩnh Phúc , *Nguyễn Văn Dũng*, 11A8, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch

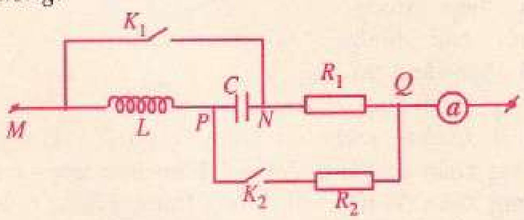
MAI ANH

Bài L2/285. *Cho một mạch điện như sơ đồ bên : $R_1 = 10\Omega$, $C = 100\mu F$, cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L; $R_a \approx 0$; $u_{MQ} = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V). Tìm R_2 và L, biết rằng ampe kế đều chỉ 10A khi :*

a) khóa K_1 và K_2 đều mở

b) khóa K_1 đóng, K_2 mở.

Tìm số chỉ ampe kế khi khóa K_1 và K_2 đều đóng.



Hướng dẫn giải. $Z_C = \dfrac{100}{\pi}$ *(Ω). Khi khóa* K_1 *và* K_2 *mở, tổng trở của mạch bằng :* $Z = \dfrac{U}{I} = \dfrac{100}{10} = 10$; *mặt khác* $Z = \sqrt{R_1^2 + (Z_L - Z_C)^2}$, *với* $R_1 = 10\Omega$. *Suy ra* $Z_L = Z_C = \dfrac{100}{\pi}$ *(Ω) và* L $= \dfrac{Z_L}{\omega} = \dfrac{1}{\pi^2} \approx 0,1$ (H). *Khi khóa* K_1, K_2 *đều đóng do* $Z_L = Z_C$ *nên* $I_L = I_C \Rightarrow \vec{I_L} = -\vec{I_C} \Rightarrow \vec{I_2} = \vec{I_L} + \vec{I_C} = \vec{0}$, *nghĩa là không có dòng điện qua* R_2, *do đó số chỉ ampe kế bây giờ là :* $I_a = I_1 = \dfrac{U_{MQ}}{R_1} = 10A$. *Ta thấy trong cả 3 trường hợp đều không có dòng điện qua* R_2, *như vậy các kết quả trên là đúng với mọi giá trị của* R_2 *(!).*

Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng :

Tiền Giang: *Trần Tấn Lộc*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Nghệ An :** *Hồ Việt Hùng*, K28 Lí, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Hà Nội:** *Nguyễn Hữu Thuấn*, $B_0$10A, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Lê Hồng Anh*, 11A7, THPT Lê Khiết; **Hải Phòng:** *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú; **Đồng Nai:** *Nguyễn Kim Huy, Ma Nam, Trần Hữu Hiếu*, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa.

MAI ANH

Kết quả NHỮNG CON SỐ ĐẸP *(Tiếp bìa 3)*

```
If (100*a + 10*b + c = a*a*a + b*b*b + c*c*c)
then
  Writeln ('a = ', a, 'b = ', b, 'c = ', c) ;
                    end ;
                edn ;
          end ;
      Readln ;
    End.
```

Kết quả chạy chương trình là 153; 370 ; 371 ; 407.

Bạn *Trần Đức Phương*, K24E Toán Tin, ĐHSP Hà Nội II còn giải quyết một loạt bài toán tương tự : "Tìm số $x_1x_2...x_n$ thỏa mãn : $x_1x_2...x_n = x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n$ với $n \geq 3$; $n \in N$" và cho kết quả :

* $n = 4$: 1634 ; 8208 ; 9474
* $n = 5$: 54748 ; 92727 ; 93084
* $n = 6$: 548834
* $n = 7$: 1741725 ; 4210818 ; 9800817 ; 9926315
* $n = 8$: 24678050 ; 24678051 ; 88593477
* $n = 9$: 146511208; 472335975; 534494836 ; 912985153
* $n = 10$: 4679307774

Các bạn *Nguyễn Thanh Thủy*, 10E, trường Dân tộc nội trú Tân Kỳ, Nghệ An; *Trần Trung Dũng*, 9A, THCS Định Công, Yên Định, Thanh Hóa; *Nguyễn Đức Việt*, xóm chợ Khu, xã Xuân Vinh, Thọ Xuân, Thanh Hóa; *Trần Đăng Ngọc*, khu tập thể quân nhân, tổ 7B, miền 1A, phường Trường Thi, Tp. Nam Định; *Ngô Ngọc Hưng*, 11A6, THPT Lê Hoàn, Thọ Xuân Thanh Hóa đã phát hiện thêm một lí thú để tìm ra các con số đẹp : "Nếu lấy một số tự nhiên bất kì và tính tổng các lập phương các chữ số, tiếp tục tính tổng các lập phương các chữ số của kết quả, cứ thế cho đến khi nào dừng lại, thì sẽ dừng lại ở các con số 1, 407, 153, 370, 371 hoặc đi vào chu kì 919 → 1459, 135 → 244 ; 55 ↔ 250 ↔ 133 ↔ 55 ; 16 ↔ 127 ↔ 252 ↔ 16. Trong toán học, người ta gọi những chu kì tuần hoàn này là những "hố đen" không thoát ra được.

Cảm ơn các bạn đã có nhiều suy nghĩ về bài toán giải trí rất thú vị này.

NGỌC MAI

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

ĐƯỜNG XOẮN ỐC VÀNG TRONG HỘI HỌA

"Hãy đo tất cả những gì có thể đo được và thậm chí cả những cái không thể đo được"

GALIÊÔ GALILÊ

PHÙNG HỒNG KỔN
(Hà Nội)

Tiếp theo bài "Tỉ lệ vàng trong hội họa" xin giới thiệu với các bạn về "Đường xoắn ốc vàng trong hội họa".

Trước hết mời các bạn thưởng thức bức tranh sơn dầu nổi tiếng *Thiếu nữ bên hoa huệ* do họa sĩ Tô Ngọc Vân vẽ năm 1943. Trong màu trắng phớt xanh, phớt hồng, cô gái nhìn hơi nghiêng, đầu ngả trên cánh tay đang ngắm hoa. Dáng mềm mại của cô gái được tôn thêm bằng tư thế đặc biệt của hai tay : Cánh tay trái vòng qua đầu, đặt hờ lên mái tóc ; cánh tay phải co tự nhiên, bàn tay hơi khum, ngón tay đỡ lấy cánh hoa nâng niu, gượng nhẹ. Gương mặt cô gái như phảng phất một nỗi buồn man mác. Màu xanh ở các sắc độ cùng với trắng ngả xanh gây cho người xem cảm giác hơi buồn, lạnh. Hai bông huệ to (huệ tây - loa kèn), nổi bật bởi màu trắng tinh khiết như mang theo hương thơm thoang thoảng cùng cái thanh tao, huyền diệu của loài hoa này. Toàn bộ bức tranh như thầm thì kể với người xem về một cô gái trong trắng, thơ ngây nhưng cũng đầy ưu tư, day dứt trước cuộc sống.

Trước Tô Ngọc Vân, và cả sau này, các họa sĩ vẽ thiếu nữ với hoa rất nhiều, nhiều bức rất đẹp - như các bức của Trần Văn Cẩn, Nguyễn Sáng, Mai Trung Thứ v.v... nhưng không có một thiếu nữ trong tranh nào có tư thế lạ như thiếu nữ trong tranh bên hoa huệ của Tô Ngọc Vân.

Hình dáng khác thường này có lẽ liên quan đến *Đường xoắn ốc vàng.*

Đường xoắn ốc là đường vạch trên mặt phẳng của một chất điểm chuyển động xa dần điểm gốc trên một tia, theo một quy tắc nhất định, khi chính tia này cũng quay quanh điểm gốc đó.

Nếu chất điểm chuyển động xa dần gốc theo hàm số mũ : $r = ke^{s\varphi}$ (*k, s* là tham số) thì ta sẽ có đường xoắn ốc lôgarit. Đường xoắn ốc này do nhà toán học Pháp Đềcác (Descartes) tìm ra vào năm 1638, nó có tính chất kì diệu : Dù bạn phóng to hay thu nhỏ đường xoắn ốc lôgarit thì hình dạng của nó không hề thay đổi - cũng như ta không thể phóng to hay thu nhỏ một góc vậy.

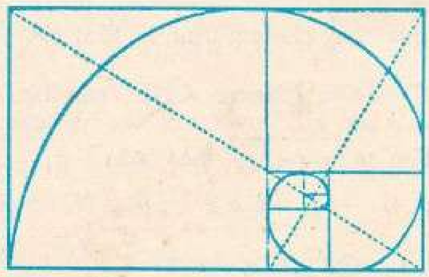
Nhà toán học Thụy Sỹ Đanôli (Danoly) rất thích thú với đường xoắn ốc lôgarit, ông đã cho làm trên mộ của ông một tấm bia có đường xoắn ốc lôgarit và dòng chữ : "Eadem mutata resurgo" có nghĩa là : "Ta sẽ lấy nguyên hình dạng cũ (hình 1).

Hình 1

Khi đường xoắn lôgarit đi qua 3 trong số 4 đỉnh của các hình chữ nhật vàng liên tiếp trong chuỗi các hình chữ nhật vàng thì đường cong được gọi là *Đường xoắn ốc vàng* (hình 2). Trong đường xoắn ốc vàng, 3 giao điểm liên tiếp của đường xoắn ốc này với đường thẳng bất kì qua gốc tạo thành 2 đoạn thẳng tỉ lệ với nhau theo tỉ lệ vàng.

Bây giờ chúng ta cùng tìm hiểu bố cục kì lạ của bức tranh *Thiếu nữ bên hoa huệ.*

Trên bức tranh, tay hãy vạch một đường cong tự nhiên theo cơ thể cô gái và qua các điểm : một ở nhụy bông hoa bên phải, một ở đài nụ



Hình 2

CHÚC MỪNG GS. NGUYỄN THÚC HÀO.... (Tiếp bìa 4)

... Thưa thầy, có lẽ hạnh phúc lớn lao của một người thầy là khi học trò của mình thành đạt. Đối với thầy, học trò không phải chỉ giới hạn là người trực tiếp học Toán với thầy, mà còn là tất cả những học sinh trường ĐHSP Vinh khi thầy là hiệu trưởng. Không ai trong họ tự dám cho mình là người thành đạt, nhưng cái tập thể học trò đó của Thầy, có quyền tự hào rằng họ rất xứng đáng ở sự trông đợi của Thầy..."

Kết thúc bài phát biểu PGS. Văn Như Cương đọc một bài thơ Đường mừng NGND GS Nguyễn Thúc Hào. Chúng tôi xin mời bạn đọc xa gần cùng họa bài thơ này và gửi về tòa soạn.

MỘT THỜI ĐỂ NHỚ

Mới đó mà Thầy đã chín mươi
Thì ra thời khắc chẳng ngừng trôi.
Nghệ An ngày ấy bom cày đất,
Thanh Hóa năm nao đạn xé trời
Hiệu trưởng nhiều kì đâu có nản
"Cảm tình" mấy khóa dễ gì thôi ?
Học trò lứa ấy về hưu hết.
Gặp lại Thầy Cô : Nhớ một thời !

CÁC BÀI HỌA

MỪNG THỌ

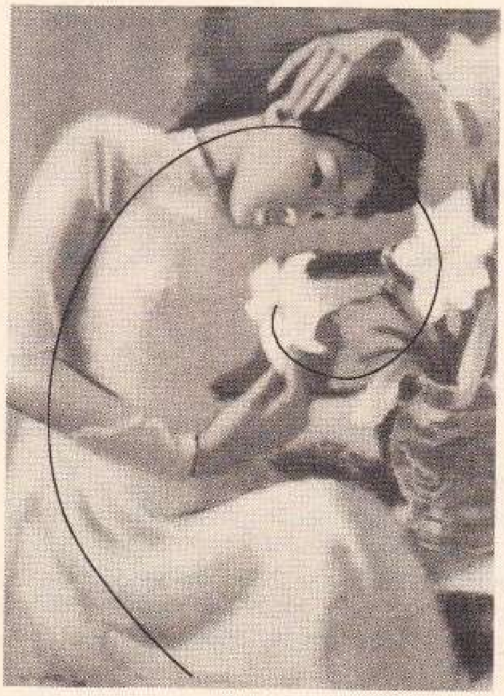
Vàng son một khối vẹn mười mươi,
Chín chục xuân kìa, quá vội trôi.
Vách nứa Quỳnh Văn giăng gió biển,
Nhà tranh Ân Đỗ đón sao trời.
Da mồi, vối nước, công không giảm,
Tóc bạc, vì dân, việc chẳng thôi.
Ngọc sáng ngàn năm ngời ánh tỏa,
Gương trong soi bóng sáng muôn thời

PHẠM NGỌC BỘI
(Khoa Toán, ĐH Vinh)

THƯỚC NGỌC

Kính chúc Thầy sang tuổi chín mươi,
Đẹp đời nghề giáo chẳng ngừng trôi.
Thời xưa Quốc học tròn danh tiết,
Thủa ấy trường Vinh vẹn đạo trời.
Vạn thế môn sinh yêu quý mãi,
Trăm đời bạn hữu nhớ không thôi.
Gương trong để lại ngày thêm sáng,
Thước ngọc Thầy gieo tỏa một thời

TẠ QUANG HẢI
(ĐH Vinh)



Hình 3

cong xuống, một ở đầu ngón tay phải, và điểm cuối cùng ở trung tâm bố cục có ý nghĩa nhất của bức tranh đó là nhụy bông hoa ở giữa. Đường cong vừa tạo ra chính là *Đường xoắn ốc vàng* (Golden Spiral) (hình 3).

Chính bố cục xoắn ốc vàng đã tạo nên hiệu quả thẩm mĩ của tác phẩm. *Tính xoắn ốc* của đường cong cho ta cảm nhận tâm trạng ưu tư, day dứt của cô gái ; còn *Tỉ lệ vàng* là tỉ số quy định độ mở của đường xoắn ốc đó cho ta cảm giác hài hòa, cân đối của bức tranh mặc dù tư thế của cô gái có thể nói là hiếm thấy.

Chúng ta không biết khi vẽ bức tranh *Thiếu nữ bên hoa huệ*, họa sĩ Tô Ngọc Vân có hình dung ra đường xoắn ốc vàng không nhưng đường xoắn ốc vàng trên bức tranh giúp ta cảm thụ bức tranh một cách đầy đủ hơn và do đó thấy được sâu hơn vẻ đẹp của tác phẩm.

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỶ

Quá nhiều bạn nhận ra chân dung của GS. TSKH Hà Huy Khoái (Viện trưởng Viện toán học Việt Nam). Ưu thế nghiêng hẳn về các bạn sinh viên các trường Đại học ở Huế vì các bạn vừa được giao lưu với giáo sư vào dịp cuối tháng 4. Bạn Nguyễn Văn Hạnh, đội 13, An Lộc, Bình Trị, Bình Sơn, Quảng Ngãi không những đoán trúng tên, trúng tuổi 55 của giáo sư lại đoán đúng cả người chụp ảnh (vì người chụp ảnh cũng tham gia cuộc giao lưu thú vị này).

Ngoài bạn Hạnh xin trao thưởng cho các bạn đoán đúng 1000‰ :

1) *Hà Chí Công* (chuyển qua bác Nguyễn Tấn, Bảo hiểm Xã hội huyện Nghĩa Hành, Quảng Ngãi)

2) *Lê Văn Hùng*, Toán 3A, ĐHSP Huế

3) Đặng Thị Hải Yến, 88/2 Phan Bội Châu, Huế.

4) *Phạm Đăng Minh*, Toán 1A, ĐHSP Huế

5) *Nguyễn Thu Phương*, 5/62 Nguyễn Du, Tp. Nam Định, 10A, THPT Nguyễn Khuyến, Nam Định.

6) *Bùi Thị Nga*, 137A Bà Triệu, Huế.

Bạn Hạnh còn tâm sự : "Lần đầu tiên được nghe bài giảng của GS. Hà Huy Khoái, em mới cảm nhận được một năng lực sư phạm tuyệt vời của thầy. Xin bái phục và xin tôn thầy là ĐẠI SƯ PHỤ !"

Cảm ơn các bạn, nào hãy tiếp tục với cuộc chơi kì này nhé !

CLB.

Kết quả : SƠ HỞ GÌ KHÔNG ?

Có bạn "kết tội" oan cho lời giải : Làm gì có $\{x_n\}$ gồm các số vô tỉ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o$ hữu tỉ (!).

Giả sử p_i là số nguyên dương thứ i không phải là số chính phương thì ta có $\{x_n\}$ với $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{p_n}}$ gồm các số vô tỉ $\left(x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,;\ \ldots\right)$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ hữu tỉ. Một thí dụ khác : $x_n = \sqrt[2n]{2}$ vô tỉ nhưng $\{x_n\} \to 1$. Vậy "căn bệnh" của lời giải ở đâu ? Đó chính là lập luận : "$f(x_n)$ hữu tỉ, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ là số hữu tỉ" ! Thật vậy, nhiều dãy số gồm các số hữu tỉ nhưng giới hạn lại là số vô tỉ, chẳng hạn $\{x_n\}$ với $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ hữu tỉ nhưng $\{x_n\} \to e$ là số vô tỉ, hoặc $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n}$ hữu tỉ nhưng $\{x_n\} \to \ln 2$ vô tỉ.

Lời giải đúng của bài toán này như thế nào ? Trong tay KIHIVI đang có 3 lời giải của bài toán này, nhưng ... xin treo giải thưởng cho bạn nào có lời giải đúng và hay nhất ! Nào các bạn gửi gấp về cho KIHIVI và ghi rõ ngoài phong bì là : "Gửi gấp cho KIHIVI" nhé ! Lần này thật sự chưa khen được ai. Tiếc quá !

KIHIVI

HƯỚNG DẪN ĐÚNG HAY SAI ?

Trong cuốn sách "Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp THCS năm học 2000–2001 – môn Toán" có hướng dẫn giải bài toán : "*Với giá trị nào của x thì* $A = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$ *đạt giá trị nhỏ nhất*" như sau :

A nhỏ nhất khi $\sqrt{x}(1-\sqrt{x})$ đạt giá trị lớn nhất.

Đặt $t = \sqrt{x}$ ta có $t(1-t) = -t^2 + t = -(t^2 - t)$

$$= -\left(t^2 - t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$

với $t \geq 0$ và $t \neq 1$

Dễ thấy rằng $-\left[\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\right]$ lớn nhất khi $\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$ nhỏ nhất, khi đó $t = \dfrac{1}{2}$ hay $\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$.

Từ đó tính được $x = \dfrac{1}{4}$; $A = 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 4.

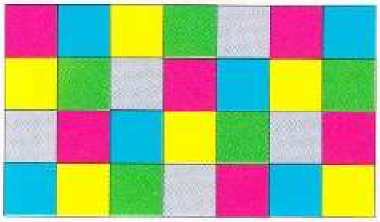
Theo các bạn, hướng dẫn trên đúng hay sai ? Sai ở đâu ? Giải đúng phải như thế nào ?

Cảm ơn phát hiện của thầy giáo Nguyễn Phước, trường THCS Kim Long, thành phố Huế và bạn Hoàng Tuấn Đức, lớp 9, trường THCS Lê Lợi, Vinh, Nghệ An

KIHIVI

MÀU NÀO CHO HỢP

Cứ tưởng các bạn "hoa mắt" bởi 5 màu đan xem nhau thì khó mà nhận ra được lôgic của sự bố trí các màu.



Ai ngờ, bạn *Nguyễn Đức Thao*, 7A, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, **Thanh Hóa** đã nêu ra 19 cách lí luận khác nhau để xếp đúng 4 màu vào 4 ô trống như hình bên. Cách đơn giản nhất là các bạn cứ đi lần lượt các ô ở mỗi hàng từ trái sang phải, theo thứ tự từ trên xuống dưới sẽ thấy sự "tuần hoàn" của các màu. Nhiều bạn còn nhận xét được : các ô cùng màu được bố trí thành đường đi của quân mã trên bàn cờ.

Tất cả đều đúng, nhưng chỉ khen được các nhà vô địch về số cách lí luận

Sau bạn Nguyễn Đức Thao là các bạn : *Trần Cảnh Tùng*, 10 Tin, THPT NK **Hưng Yên**, *Nguyễn Thế Anh*, Phương Mỹ, Mỹ Hưng, Thanh Oai, **Hà Tây**, *Thùy Trang*, tổ 50, An Cư, Hải Bắc, quận Sơn Trà, Tp. **Đà Nẵng**, *Phan Thành Việt*, 6D, THCS Lương Thế Vinh, thị xã Tuy Hòa, **Phú Yên**.

NGỌC MAI

Kết quả : NHỮNG CON SỐ ĐẸP

Nhiều bạn, tuy không nói ra được lời giải, nhưng cho thêm 3 số đẹp như số 153 là :

$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$$

$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$$

Một số bạn trình bày lời giải khá phức tạp (có một vài lời giải sai nên không đưa ra những con số đẹp).

Các bạn *Trương Phước Giang*, 10T,THPT Bến Tre, Bến Tre; *Lê Đăng Tâm*, 11C, THPT Đông Hà, Quảng Trị; *Nguyễn Quang Tùng*, 9H, THCS Trưng Vương, Hà Nội đã "giải quyết khá đơn giản" nhờ sự "cần cù" của máy tính qua ngôn ngữ lập trình Pascal.

```
Program Tim số ;
Var a, b, c : Tinteger
Begin
  For a : = 1 to 9 do
    For b : = 0 to 9 do
      For c : = 0 to 9 do
```

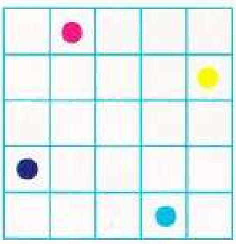
(Xem tiếp trang 23)

CUỘC THI VUI HÈ 2001

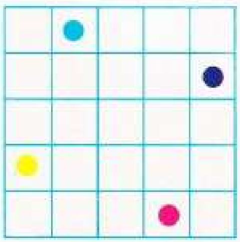
ĐỀ THI VÒNG THỨ HAI

Bài 1. CHUYỂN QUÂN

Trên một bàn cờ như hình 1 có 4 quân cờ Đỏ, Vàng, Lam, Tím. Mỗi quân có có thể chuyển (một bước) từ ô này sang ô trống khác theo đường chéo của hình chữ nhật 3 × 4 ô hoặc 4 × 3 ô. Hỏi cần ít nhất là bao nhiêu bước để chuyển 4 quân từ hình 1 sang hình 2 và hãy chỉ ra cách chuyển.



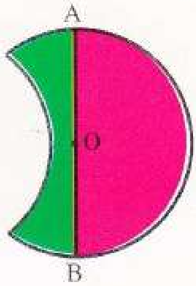
Hình 1



Hình 2

Bài 2. VƯỜN HOA

Một khu vườn hình trăng khuyết tạo bởi hai cung của hai đường tròn bằng nhau (xem hình). Một con đường nhỏ đi từ A đến B qua tâm O của hình tròn chia vườn thành hai phần : nửa hình tròn bên phải trồng hoa, phần bên trái trồng rau. Biết tổng độ dài đường dạo quanh vườn và đường AB là 348m. Hỏi diện tích trồng hoa là bao nhiêu mét vuông ?



Bài 3. ĐIỀN SỐ

Hãy điền đủ các số 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 vào các ô vuông của hình bên sao cho tích các số theo các hàng ngang, hàng dọc và đường chéo đều bằng nhau.

Hạn nhận bài là không chậm hơn ngày 31.8.2001 (căn cứ vào dấu bưu điện). Kết quả cuộc thi sẽ công bố trên THTT số 292 ra ngày 15.10.2001. Phía trên mỗi bài giải, bạn cần ghi đầy đủ địa chỉ nơi ở và địa chỉ lớp, trường, huyện, tỉnh hoặc cơ quan mình. Ngoài phong bì cần ghi rõ :

DỰ THI VUI HÈ
Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
187 phố Giảng Võ,
Hà Nội

CHÚC MỪNG GIÁO SƯ NGUYỄN THÚC HÀO THƯỢNG THỌ 90

Sáng 1.7.2001 tại Hà Nội, các cán bộ giáo viên trường ĐH Vinh, ĐHSP Hà Nội 1, các cựu sinh viên Khóa 1, 2 Khoa Toán, Khoa Văn, các cựu học sinh Chuyên Toán ĐHSP Vinh đã tổ chức buổi gặp gỡ mừng Nhà giáo Nhân dân GS. Nguyễn Thúc Hào thượng thọ 90 tuổi.

PGS Văn Như Cương, học trò cũ của GS Nguyễn Thúc Hào đã thay mặt các thế hệ học trò phát biểu chúc mừng thầy học của mình. Dưới đây chúng tôi xin trích đăng một số đoạn trong bài phát biểu này.

"... Thầy Nguyễn Thúc Hào là một nhà giáo lão thành, đã cống hiến cả cuộc đời cho sự nghiệp giáo dục của đất nước ta. Thầy quy tụ được những đức tính cao đẹp nằm trong một chữ Thầy đơn giản, mà nhân dân ta bao giờ cũng tôn vinh, như là một biểu tượng của một Trí tuệ cao, một Nhân cách lớn, một Tâm hồn trong sáng...

Thầy bước vào nghề dạy học lúc 23 tuổi tại Trung học Khải Định Huế, đó là vào năm 1935. Sau Cách mạng tháng Tám 1945, thầy vừa dạy học tại trường Khải Định, vừa giữ chức vụ Giám đốc Vụ Trung học Trung bộ, thành viên Hội đồng Học chính của Bộ Quốc gia Giáo dục. Tháng 8 năm 1946 thầy rời Huế chuyển hẳn ra Thủ đô, nhận chức Tổng thư kí kiêm Quyền Giám đốc Đại học Khoa học Hà Nội.

... Chỉ vài tháng sau tiếng súng đầu tiên trường kì kháng chiến, tại một miền quê của tỉnh Nghệ, đã ra đời một trường Đại học khá lạ lùng, không thể có ở bất cứ nơi đâu trên thế giới: trường chỉ có một lớp, một thầy và 5 sinh viên. Đó là Khóa 1. Các khóa 2, 3, 4 về sau mỗi khóa có trên 20 sinh viên... Trong lịch sử ngành giáo dục Đại học của nước Việt Nam dân chủ cộng hòa, cái nhà thờ họ bé nhỏ của cụ Nguyễn Thạc Phi phải được xếp là giảng đường đầu tiên... Từ năm 1951 đến 1954, trường Dự bị Đại học, rồi trường Sư phạm cao cấp được mở ra ở vùng tự do liên khu 4, và thầy được cử là thành viên của ban Giám đốc.

Hòa bình lập lại, miền Bắc được giải phóng, thầy trở về Hà Nội, dạy ở trường đại học Khoa học, và sau đó làm hiệu trưởng trường ĐHSP Hà Nội.

Giai đoạn từ 1959 đến 1974 có lẽ là thời kì đáng ghi nhớ trong cuộc đời hoạt động của thầy. Đó là thời gian thầy được cử làm Hiệu trưởng trường ĐHSP Vinh, trường ĐHSP đầu tiên không đặt tại Hà Nội. Mọi công việc lại bắt đầu từ chấm xuất phát với biết bao công việc bộn bề và khó khăn. Trong 15 năm ấy một nửa thời gian là lo xây dựng ngôi trường từ đống đổ nát của thành Vinh qua cuộc kháng chiến chống Pháp, nửa sau là từ giã ngôi trường vừa mới xây xong để sơ tán về vùng nông thôn của tỉnh Nghệ, rồi tiếp đến tỉnh Thanh. Ngôi trường vừa mới xây tạm xong đã trở thành mục tiêu đánh phá của máy bay Mỹ và nhanh chóng trở thành đổ nát. Trách nhiệm của thầy thật là nặng nề : lo tổ chức dạy và học, lo ăn lo ở cho thầy và trò, lo bảo vệ tính mạng và tài sản cho mọi người, lo tuyển quân cung cấp cho chiến trường... Như vậy, Thầy đâu chỉ đơn thuần là một nhà giáo, một nhà toán học. Sự kết hợp giữa các phẩm chất của một người thầy và phẩm chất của một nhà toán học, điều mà không phải ai cũng có thể làm được, đã làm cho thầy trở thành một nhà quản lí năng động, sáng tạo, thông minh, nhạy bén, cương trực và nhân ái. Đó là điều mà các thế hệ cán bộ và học trò trường ĐHSP Vinh đều cảm nhận được.

(Xem tiếp trang 23)

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT91M1
Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, ngõ 187 phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2001
Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng