BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

2
2002

SỐ 296 - NĂM THỨ 39 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

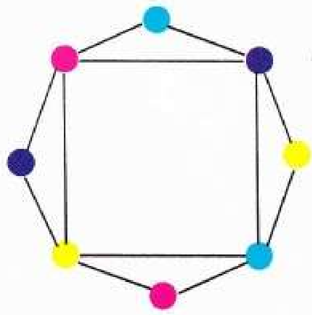
Tổ Toán của Trường

Trường THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

SẮP XẾP ĐÈN TRANG TRÍ

Có 8 chiếc đèn với các màu Đỏ, Vàng, Lam, Tím, mỗi màu có 2 chiếc đèn. Để đón mừng năm mới bạn cần sắp xếp 8 chiếc đèn vào các đỉnh của một khung hình bát giác đều sao cho 2 đèn kề nhau (nghĩa là có đoạn thẳng nối chúng như ở hình 1) thì không cùng màu. Hai cách sắp xếp màu đèn coi là giống nhau nếu như khi quay cách sắp xếp này đi một bội của 45^o quanh tâm hình bát giác thì được cách sắp xếp kia.



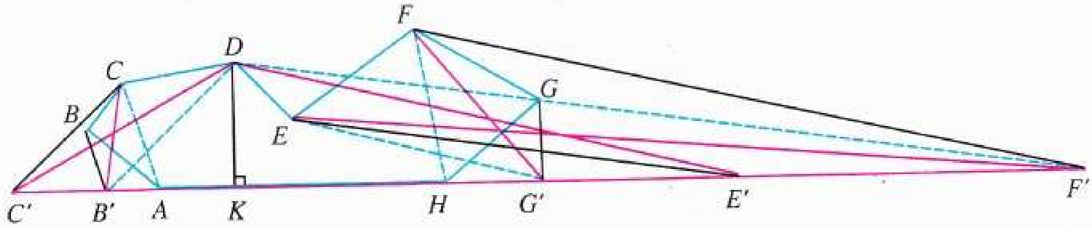
Hình 1

DÀNH CHO BẠN ĐỌC

Có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp màu đèn khác nhau ?
Bạn hãy mô tả hoặc vẽ các cách sắp xếp màu đèn như thế.

Giải đáp : ĐO DIỆN TÍCH HÌNH ĐA GIÁC

Để chỉ có rất ít phép đo và tính toán ta chuyển việc đo diện tích hình đa giác *ABCDEFGH* về đo diện tích hình tam giác *DC'E'* (h.2) như sau :



Hình 2

Kẻ $DK \perp AH$. Nối CA. Kẻ $BB'//CA$ với B' thuộc đường thẳng AH thì $S(ABC) = S(AB'C) \Rightarrow S(KDCBA) = S(KDCB')$. Nối DB'. Kẻ $CC'//DB'$ với C' thuộc đường thẳng AH thì $S(DCB') = S(DC'B') \Rightarrow S(KDCB') = S(KDC')$.

Vậy $S(KDCBA) = S(KDC')$ (1)

Làm tương tự ta có $S(KDEFGH) = S(KDEFG') = S(KDEF') = S(KDE')$ (2)

Từ (1) và (2) có $S(ABCDEFGH) = S(KDCBA) + S(KDEFGH) = S(KDC') + S(KDE') = S(DC'E')$

Tính $S(DC'E') = \frac{1}{2}DK.C'E' \approx \frac{1}{2}.16,5.96\ (m^2) = 792\ (m^2)$

Vì 1mm trên bản đồ bằng 1000 mm = 1m trên thực tế nên diện tích thửa đất *ABCDEFGH* trên thực tế bằng khoảng $792m^2$.

Trong số nhiều bạn gửi lời giải chỉ có 1 bạn nêu đúng phương pháp đo như trên và được nhận tặng phẩm :

Nguyễn Bá Thành, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, **Hải Dương**

PHI PHI

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 39
Số 296 (2-2002)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648. FAX : 04.5142648
Email : toantt@hotmail.com

TRONG SỐ NÀY

2 **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Nguyễn Đức Trường – Ứng dụng của một hệ thức về tỉ số diện tích

4 **Diễn đàn dạy học toán – Math teaching Forum**
Hoàng Cường – Sử dụng phương pháp xác định miền giá trị của hàm số để giải toán

6 Đề thi tuyển sinh môn Toán khối D, ĐHQG Hà Nội và Học viện Ngân hàng năm 2001

8 *Vũ Đình Hòa* – Lời giải bài thi toán quốc tế lần thứ 42 năm 2001

10 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Trần Thị Nga - Vài phương pháp giải phương trình hàm

12 **Đề ra kì này – Problems in this Issue**
T1/296, ..., T10/296, L1, L2/296

14 **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 292

22 **Tiếng Anh qua các bài toán – English through Math Problems**
Ngô Việt Trung – Bài số 50

23 **Lịch sử toán học – History of Math**
Nguyễn Văn Thiêm – Jacob Steiner - Nhà hình học lớn

24 **Câu lạc bộ – Math Club**
Sai lầm ở đâu? Where's the Mistakes?

Bìa 2 : **Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics**
Sắp xếp đèn trang trí

Bìa 3 : **Giải trí toán học – Math Recreation**

Bìa 4 : Trường THCS chuyên Hùng Vương, Phú Thọ

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

ỨNG DỤNG CỦA MỘT HỆ THỨC VỀ TỈ SỐ DIỆN TÍCH

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
(*GV THCS Đa Tốn – Gia Lâm, Hà Nội*)

Trong bài viết này, chúng ta sẽ đề cập đến một ứng dụng của một hệ thức hình học xuất phát từ công thức tính diện tích $S(ABC) = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$ và được phát biểu như sau :

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh AB, AC của tam giác ABC tại B', C' thì :

$$\frac{S(AB'C')}{S(ABC)} = \frac{AB'.AC'}{AB.AC} \quad (1)$$

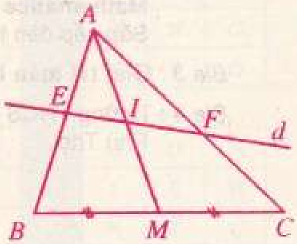
Việc chứng minh hệ thức (1) khá dễ dàng và xin nhường cho bạn đọc. Dưới đây thông qua một số bài toán, chúng tôi muốn chỉ ra rằng sử dụng hệ thức (1) có thể giải được một số bài toán hình học khá ngắn gọn.

Bài 1. *Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến. Một đường thẳng d cắt cạnh AB, AC và AM lần lượt tại E, F và I. Chứng minh rằng*

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AC}{AF} = 2\frac{AM}{AI}$$

Lời giải. (hình 1)

Do $S(ABC) = 2S(ABM) = 2S(ACM)$ nên sử dụng hệ thức (1) có :



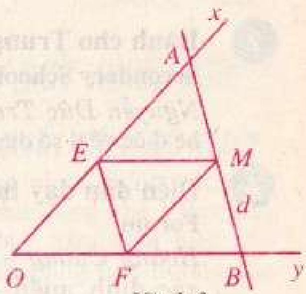
Hình 1

$$\frac{2AE.AF}{AB.AC} = \frac{2S(AEF)}{S(ABC)} = \frac{2S(AEI)}{2S(ABM)} + \frac{2S(AIF)}{2S(ACM)} = \frac{AE.AI}{AB.AM} + \frac{AF.AI}{AC.AM}$$

Từ đó $\frac{AI.AC}{AM.AF} + \frac{AI.AB}{AM.AE} = 2$. Suy ra đpcm.

Bài 2. *Cho góc xOy nhọn và điểm M nằm trong góc đó. Đường thẳng d đi qua M cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B. Xác định đường thẳng d để S(OAB) đạt giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải. Qua M kẻ $ME//Oy$ và cắt Ox tại E, kẻ $MF//Ox$ và cắt Oy tại F thì E, F cố định. (h.2) Theo hệ thức (1) và sử dụng bất đẳng thức : $4xy \le (x+y)^2$ có:



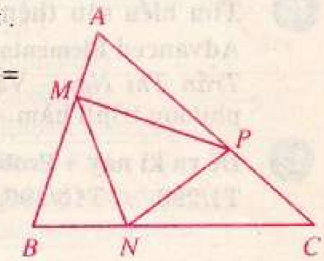
Hình 2

$$\frac{S(OEF)}{S(OAB)} = \frac{OE}{OA}.\frac{OF}{OB} \le \frac{1}{4}.\left(\frac{OE}{OA} + \frac{OF}{OB}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{BM}{AB} + \frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow S(OAB) \ge 4.S(OEF)$,

mà $S(OEF)$ không đổi nên $S(OAB)$ nhỏ nhất bằng $4S(OEF)$ khi $\frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB}$ hay $d//EF$.

Bài 3. *Trên ba cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lần lượt lấy M, N, P sao cho* $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = k$. *Tìm k để* $S(MNP) = \frac{5}{8}S(ABC)$.



Hình 3

Lời giải. (hình 3)

Từ giả thiết có

$$\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CA} = \frac{k}{k+1}$$

và $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{BC} = \frac{PA}{AC} = \frac{1}{k+1}$

Từ hệ thức (1) có

$$\frac{S(AMP)}{S(ABC)} = \frac{AM}{AB}.\frac{AP}{AC} = \frac{k}{(k+1)^2}$$

Tương tự ta có : $\frac{S(BMN)}{S(ABC)} = \frac{k}{(k+1)^2}$;

$\frac{S(CNP)}{S(ABC)} = \frac{k}{(k+1)^2}$. Từ đó : $\frac{S(MNP)}{S(ABC)} =$

$$\frac{S(ABC)-S(AMP)-S(BMN)-S(CNP)}{S(ABC)}$$

$$=1-3\frac{k}{(k+1)^2}.$$

Để có $\dfrac{S(MNP)}{S(ABC)}=\dfrac{5}{8}$ thì $1-\dfrac{3k}{(k+1)^2}=\dfrac{5}{8}$

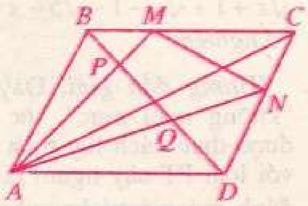
$\Leftrightarrow (k+1)^2=8k \Leftrightarrow k^2-6k+1=0$

Bài toán có 2 nghiệm $k_1=3+2\sqrt{2}$ và $k_2=3-2\sqrt{2}$.

Bài 4. *Cho hình bình hành ABCD. Trên các cạnh BC, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho* $\dfrac{BM}{CM}=\dfrac{CN}{2DN}=k$. *Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm của AM, AN với BD.*

a) So sánh diện tích của PMNQ và APQ

b) Tính diện tích tam giác AMN theo k và theo diện tích của ABCD.



Hình 4

Lời giải. (h.4)

a) Áp dụng hệ thức (1) có

$$\frac{S(AMN)}{S(APQ)}=\frac{AM.AN}{AP.AQ}=$$

$$\frac{AP+PM}{AP}\cdot\frac{AQ+QN}{AQ}=\left(1+\frac{PM}{AP}\right)\left(1+\frac{QN}{AQ}\right) \quad (2)$$

Theo giả thiết có

$$\frac{BC}{BM}=\frac{BM+CM}{BM}=1+\frac{1}{k}=\frac{k+1}{k} \quad (3)$$

$$\frac{DC}{DN}=\frac{DN+CN}{DN}=1+2k \quad (4)$$

Theo định lí Talet và (3), (4) thì

$$\frac{PM}{AP}=\frac{BM}{AD}=\frac{BM}{BC}=\frac{k}{k+1} \text{ và}$$

$$\frac{QN}{AQ}=\frac{DN}{AB}=\frac{DN}{DC}=\frac{1}{2k+1}$$

Thay vào (2) được

$$\frac{S(AMN)}{S(APQ)}=\left(1+\frac{k}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{2k+1}{k+1}\cdot\frac{2(k+1)}{2k+1}=2$$

suy ra $S(PMNQ)=S(APQ)$

b) Chú ý rằng $S(ABCD)=2S(ABC)=$
$=2S(ADC)=2S(CBD)$

Áp dụng hệ thức (1) và (3) có

$$\frac{S(ABM)}{S(ABC)}=\frac{BA.BM}{BA.BC}=\frac{BM}{BC}=\frac{k}{k+1}$$

$$\frac{S(ADN)}{S(ADC)}=\frac{DA.DN}{DA.DC}=\frac{DN}{DC}=\frac{1}{2k+1}$$

Ta có $\dfrac{CB}{CM}=1+k$, $\dfrac{DC}{CN}=\dfrac{2k+1}{2k}$

Từ đó và từ hệ thức (1) có :

$$\frac{S(AMN)}{S(ABCD)}$$

$$=\frac{S(ABCD)-S(ABM)-S(ADN)-S(CMN)}{S(ABCD)}$$

$$=1-\frac{S(ABM)}{2S(ABC)}-\frac{S(ADN)}{2S(ADC)}-\frac{S(CMN)}{2S(CBD)}$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{2k}{(k+1)(2k+1)}\right)$$

$$=\frac{2k^2+2k+1}{2(k+1)(2k+1)}.$$

Sử dụng hệ thức (1) sẽ thuận lợi khi giải một số bài tập sau :

Bài tập 1. Cho hình bình hành *ABCD*. Gọi *E, F, G, K* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB, BC, CD, DA*. Tính diện tích đa giác là phần chung của các tứ giác *AGCF, BGDK, CEAK, DEBF* theo diện tích của hình bình hành.

Bài tập 2. Trên các cạnh *AB, BC* của tam giác *ABC* lần lượt lấy các điểm *E, F* (khác các đỉnh). Gọi *D* là giao điểm của *AF* và *CE*. Chứng minh rằng $\dfrac{S(BEF)}{S(ABC)}=\dfrac{S(DEF)}{S(DAC)}$.

Bài tập 3. Trên cạnh *AB, BC, CD, DA* của tứ giác *ABCD* lần lượt lấy các điểm *P, Q, R, S* sao cho $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{CR}{RD}=\dfrac{DS}{SA}=k$. Xác định *k* sao cho $S(PQRS)=\dfrac{5}{9}S(ABCD)$.

Bài tập 4. Cho góc *xOy* và điểm *M* nằm trong đó, một đường thẳng *d* qua *M* cắt *Ox, Oy* theo thứ tự tại *A, B*. Chứng minh rằng $\dfrac{S(OMA).S(OMB)}{S(OAB)}$ có giá trị không phụ thuộc vào cách chọn đường thẳng *d*. /.

Diễn đàn
DẠY VÀ HỌC TOÁN

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH MIỀN GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ ĐỂ GIẢI TOÁN

HOÀNG CƯỜNG
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $X \subseteq R$. Ta gọi tập $Y = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ là tập giá trị hay miền giá trị (MGT) của hàm $y = f(x)$ trên tập X. Để tìm MGT của một hàm số có thể sử dụng các phương pháp (PP) : sử dụng định nghĩa, PP bảng biến thiên, PP lượng giác. Việc nắm vững bản chất cũng như ý nghĩa của MGT giúp cho học sinh hiểu sâu thêm các tính chất của hàm số và nếu biết sử dụng nó thì có thể dẫn đến những lời giải gọn gàng, dễ hiểu hơn so với một số PP khác. Ở bài báo này chúng tôi muốn minh chứng cho điều đó, thông qua việc khảo sát MGT của hàm số để giải một số dạng toán như : tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN), giá trị lớn nhất (GTLN) của một biểu thức; tìm điều kiện của tham số để một phương trình (PT), bất phương trình (BPT) hay một hệ phương trình (HPT) có nghiệm thông qua một số ví dụ.

Ví dụ 1. *Tìm GTNN, GTLN của biểu thức* $P = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ *với* $x, y \in R$ *và* $x^2 + y^2 > 0$

Hướng dẫn giải. Việc khảo sát GTNN, GTLN của hàm hai biến ở trường phổ thông là vấn đề khó. Ta tìm cách chuyển bài toán về tìm GTNN, GTLN của hàm một biến.

Nhận xét rằng

- với $y = 0$ thì $P = 1$, $\forall x \neq 0$,
- với $y \neq 0$ đặt $t = \dfrac{x}{y}$ $(t \in (-\infty ; +\infty))$ biểu thức P được viết dưới dạng $P = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$ (1), $t \in R$

Để tìm GTNN, GTLN của $P = f(t)$, ta coi (1) là phương trình ẩn t với tham số P rồi tìm miền giá trị của tham số P. Ta sẽ xét xem với điều kiện nào của P thì $(P-1)t^2 + (P+1)t + (P-1) = 0$ có nghiệm

- Với $P = 1$ thì $t = 0$ là nghiệm của PT trên
- Với $P \neq 1$ thì PT trên có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 3P^2 - 10P + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \leq P \leq 3$. Tóm lại PT trên có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \leq P \leq 3$. Do đó GTNN của P là $\dfrac{1}{3}$, GTLN của P là 3.

Ví dụ 2. *Tìm m để PT :*

$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - \sqrt{5-x} - \sqrt{18-3x} = 2m + 1$ *(2) có nghiệm.*

Hướng dẫn giải. Đây là một loại PT dạng "không mẫu mực", tức là nó không thể giải được theo cách lũy thừa từng vế nhiều lần. Đối với loại PT này người ta thường giải bằng cách đánh giá giá trị hai vế của PT đó. Ở bài này chúng ta sẽ tìm MGT của hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - \sqrt{5-x} - \sqrt{18-3x}$ trên tập xác định [1, 5], từ đó suy ra GTNN, GTLN của hàm đó trên [1, 5]. Việc tìm m để PT (2) có nghiệm đến đây là hoàn toàn thực hiện được.

Ta có

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{3}{2\sqrt{18-3x}} > 0,$$

$\forall x \in (1, 5)$

Do hàm y liên tục và đồng biến trên [1, 5] nên MGT của hàm số đó là $[y(1), y(5)]$ hay $[\sqrt{2} - 2 - \sqrt{15}, 2 + \sqrt{6} - \sqrt{3}]$, suy ra $y_{\min} = \sqrt{2} - 2 - \sqrt{15}$, $y_{\max} = 2 + \sqrt{6} - \sqrt{3}$, $\forall x \in [1, 5]$. Tóm lại để PT (2) có nghiệm thì

$$\sqrt{2} - 2 - \sqrt{15} \leq 2m + 1 \leq 2 + \sqrt{6} - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2} - 3 - \sqrt{15}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{6} - \sqrt{3}}{2}$$

Ví dụ 3. *Tìm m để BPT*

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{2-x} + (m+1)\sqrt{(x-1)(2-x)} \geq m$$

(3) có nghiệm.

Hướng dẫn giải. Điều kiện $1 \leq x \leq 2$. Để ý rằng $(\sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{2-x})^2 = 1$, chúng ta nghĩ tới việc lượng giác hóa bài toán bằng cách đặt $\sqrt{x-1} = \cos\varphi$, $\sqrt{2-x} = \sin\varphi$ $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$.

BPT (3) trở thành $\cos\varphi - \sin\varphi + (m+1)\cos\varphi\sin\varphi \ge m$. Lại đặt $y = \cos\varphi - \sin\varphi = \sqrt{2}\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$.

BPT trên trở thành $(m+1)y^2 - 2y + m - 1 \le 0$.

$$\Leftrightarrow m \le \frac{-y^2 + 2y + 1}{y^2 + 1} \qquad (4)$$

Vì $\frac{\pi}{4} \le \varphi + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4}$, suy ra

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ hay $-1 \le y \le 1$. Vậy BPT (3) có nghiệm $x \Leftrightarrow$ BPT (4) có nghiệm $y \in [-1, 1]$. Ta đi tìm MGT của hàm số

$f(y) = \frac{-y^2 + 2y + 1}{y^2 + 1}$ trên $[-1\,;\,1]$. Nhận thấy

$f'(y) = \frac{-2(y^2 + 2y - 1)}{(y^2 + 1)^2}$, $\quad f'(y) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} y = -1 - \sqrt{2} \\ y = -1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên của hàm $f(y)$ trên $[-1, 1]$ chúng ta thấy MGT của hàm $f(y)$ trên đoạn đó là $[-1, \sqrt{2}\,]$, suy ra $f(y)_{\min} = -1$, $f(y)_{\max} = \sqrt{2}$. Do đó BPT (3) có nghiệm khi và chỉ khi $m \le \sqrt{2}$

Ví dụ 4. *Tìm các giá trị của m để hệ phương trình* $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = m \end{cases}$ *(5) có nghiệm.*

Hướng dẫn giải. Với $y = 0$, hệ trở thành $\begin{cases} 2x^2 = 1 \\ x^2 = m \end{cases}$. Hệ có nghiệm khi $m = \frac{1}{2}$.

Với $y \ne 0$, đặt $\frac{x}{y} = t$, hệ PT (5) trở thành

$$\begin{cases} 2t^2 + t - 1 = \frac{1}{y^2} \\ t^2 + t + 1 = \frac{m}{y^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 + t - 1 = \frac{1}{y^2} \\ t^2 + t + 1 = m(2t^2 + t - 1) \end{cases} \qquad (6)$$

Vậy hệ PT (5) có nghiệm (x, y) khi và chỉ khi hệ PT (6) có nghiệm (t, y).

Xét hệ (6), từ $2t^2 + t - 1 = \frac{1}{y^2}$ suy ra $2t^2 + t - 1 > 0 \Leftrightarrow t < -1$ hoặc $t > \frac{1}{2}$. Do đó hệ (6) có nghiệm $(t, y) \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + t + 1}{2t^2 + t - 1}$ có nghiệm t thuộc $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Xét hàm $f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{2t^2 + t - 1}$ trên $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Ta có $f'(t) = -\frac{t^2 + 6t + 2}{(2t^2 + t - 1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} t = -3 - \sqrt{7} \\ t = -3 + \sqrt{7} \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-3-\sqrt{7}$		-1		$-3+\sqrt{7}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(t)$	$1/2$	↘	$\frac{14+5\sqrt{7}}{28+11\sqrt{7}}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1/2$

Từ bảng biến thiên ta có MGT của hàm $f(t)$ trên $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ là $\left[\frac{14+5\sqrt{7}}{28+11\sqrt{7}}, +\infty\right)$.

Do đó hệ có nghiệm khi và chỉ khi

$$m \ge \frac{14 + 5\sqrt{7}}{28 + 11\sqrt{7}}.$$

Các bạn hãy thử rèn luyện phương pháp MGT bởi hai bài toán sau.

Bài 1. Tìm các giá trị của m để PT

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(x+3)(6-x)} = m$$

có nghiệm.

Bài 2. Cho các số thực không âm a, b sao cho $a^2 + b^2 = 1$. Tìm GTNN, GTLN của biểu thức

$$P = \frac{4b^2 + 2ab - 1}{2ab - 2a^2 + 3}\ ./.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI D, ĐHQG HÀ NỘI VÀ HỌC VIỆN NGÂN HÀNG NĂM 2001

Câu I. 1) Khảo sát (xét sự biến thiên, vẽ đồ thị) hàm số $y = \dfrac{x^2}{x-1}$. Gọi đồ thị là (C)

2) Tìm trên đường thẳng $y = 4$ tất cả các điểm mà từ mỗi điểm đó có thể kẻ tới đồ thị (C) hai tiếp tuyến lập với nhau một góc 45^o.

Câu II. Giải các phương trình sau đây :

1) $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$

2) $\sin 3x = \cos x.\cos 2x.(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg} 2x)$

3) $P_x A_x^2 + 72 = 6\left(A_x^2 + 2P_x\right)$

trong đó P_x là số hoán vị của x phần tử, A_x^2 là số chỉnh hợp chập 2 của x phần tử (x là số nguyên, dương).

Câu III. 1) Tùy theo giá trị của tham số m, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = (x + my - 2)^2 + (4x + 2(m-2)y - 1)^2$

2) Tìm họ nguyên hàm

$$I = \int \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\mathrm{cotg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)dx$$

Câu IV. Cho hình chóp $SABC$ đỉnh S, đáy là tam giác cân $AB = AC = 3a$, $BC = 2a$. Biết rằng các mặt bên (SAB), (SBC), (SCA) đều hợp với mặt phẳng đáy (ABC) một góc 60^o. Kẻ đường cao SH của hình chóp.

1) Chứng tỏ rằng H là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC và $SA \perp BC$.

2) Tính thể tích của hình chóp.

Câu V. Chứng minh rằng với mọi $x \geq 0$ và với mọi $\alpha > 1$ ta luôn có : $x^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha x$. Từ đó chứng minh rằng với ba số dương a, b, c bất kì thì

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải

2) Đường thẳng $y = 4$ tiếp xúc với (C) tại điểm (2, 4). Các điểm cần tìm là các giao điểm của đường thẳng y = 4 và tiếp tuyến (C) với hệ số góc bằng 1 hoặc –1.

• $y'(x) = 1 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = 1$ vô nghiệm $\Rightarrow$ (C) không có tiếp tuyến với hệ số góc bằng 1.

• $y'(x) = -1 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ y(x_1) = 2 + \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ x_2 = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ y(x_2) = 2 - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Có hai tiếp tuyến của (C) với hệ số góc bằng -1 là $y = -x + 3 + 2\sqrt{2}$ và $y = -x + 3 - 2\sqrt{2}$

Các điểm cần tìm có hoành độ thỏa mãn

$$\left[\begin{array}{l} -x + 3 + 2\sqrt{2} = 4 \Rightarrow x = -1 + 2\sqrt{2} \\ -x + 3 - 2\sqrt{2} = 4 \Rightarrow x = -1 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Đáp số. Có hai điểm thỏa mãn là $A(-1 + 2\sqrt{2}, 4)$; $B(-1 - 2\sqrt{2}, 4)$.

Câu II. 1) Điều kiện $x \geq \dfrac{1}{2}$. Phương trình được viết thành :

$$\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x+1} + \frac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{4x-1}+1}\right) = 0$$

vì $\forall x \geq \dfrac{1}{2}$ thì $\sqrt{2x+1} + \dfrac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{4x-1}+1} > 0$ nên phương trình chỉ có nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$. Thử lại đúng.

2) Bạn đọc tự giải. *Đáp số.* $x = k\pi$ ($k \in Z$)

3) $x \in N, x \geq 2$.

Phương trình được viết lại là :

$(P_x - 6)\left(A_x^2 - 12\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} P_x = 6 \Rightarrow x! = 6, \text{mà } x \in N \Rightarrow x = 3 \\ A_x^2 = 12 \Rightarrow (x-1)x = 12, \text{mà } x \in N \Rightarrow x = 4 \end{array}\right.$$

Câu III.

1) $P \geq 0$ và đẳng thức xảy ra khi $\exists(x, y)$ thỏa mãn $\begin{cases} x + my = 2 \\ 4x + 2(m-2)y = 1 \end{cases}$.

Giải ra hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m \neq -2$. Khi $m \neq -2$, GTNN $P = 0$. Với $m = -2$ thì

$$P = (x - 2y - 2)^2 + |4(x - 2y - 2) + 7|^2$$

Đặt $t = x - 2y - 2$; $t \in (-\infty, +\infty)$

$$P = t^2 + (4t+7)^2 = 7\left(t + \frac{28}{7}\right)^2 + \frac{49}{17} \geq \frac{49}{17}$$ và

đẳng thức xảy ra khi $t = -\dfrac{28}{17} \Leftrightarrow x - 2y = \dfrac{6}{17}$,

lúc đó GTNN $P = \dfrac{49}{17}$.

2) Đặt $u = x + \dfrac{\pi}{3}$, $v = x + \dfrac{\pi}{6}$ thì $u - v = \dfrac{\pi}{6}$.

Ta biến đổi như sau :

$$\text{tg}u\,\text{cotg}v = \frac{\sin u \cos v - \cos u \sin v}{\cos u \sin v} + 1$$

$$= \frac{\sin(u-v)}{\cos u \sin v} + 1 = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} \cdot \frac{\cos(u-v)}{\cos u \sin v} + 1$$

$$= \text{tg}\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\cos u \cos v + \sin u \sin v}{\cos u \sin v} + 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\cos v}{\sin v} + \frac{\sin u}{\cos u}\right) + 1$$

Chú ý rằng $du = dv = dx$, $d(\sin v) = \cos v.dv$, $d(\cos u) = -\sin u.du$

Từ đó $I = \int \text{tg}u\,\text{cotg}v\,dx =$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \right| + x + C$$

Câu IV. 1) Kẻ $HA' \perp BC$, $HB' \perp AC$, $HC' \perp AB$. Vì $HS \perp \text{mp}(ABC)$, theo định lí 3 đường vuông góc ta có : $SA' \perp BC$, $SB' \perp AC$, $SC' \perp AB$. Từ đó $\widehat{SA'H} = 60^o$, $\widehat{SB'H} = \widehat{SC'H} = 60^o$.

Ba tam giác vuông SHA', SHB', SHC' bằng nhau $\Rightarrow HA' = HB' = HC' \Rightarrow H$ cách đều 3 cạnh tam giác ABC, suy ra H là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

(Các bạn hãy chỉ ra một hình chóp SABC cũng thỏa mãn giả thiết mà H là tâm đường tròn bàng tiếp (!)).

Vì ΔABC là tam giác cân nên $AH \perp BC$, suy ra A, H, A' thẳng hàng. Vì $BC \perp \text{mp}(SAH) \Rightarrow BC \perp SA$.

2) Bạn đọc tự giải

Đáp số : $V_{SABC} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} a^3$.

Câu V. Xét $f(x) = x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1$, $(x \geq 0, \alpha > 1)$ có $f'(x) = \alpha(x^{\alpha - 1} - 1)$. Vì $f'(x) < 0$ khi $x < 1$, $f'(x) > 0$ khi $x > 1$, và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nên $\forall x \geq 0$ thì $f(x) \geq 0 = f(1)$ hay $x^{\alpha} + \alpha - 1 \geq \alpha x$.

BĐT cần chứng minh tương đương với :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{3/2} + \left(\frac{b}{c}\right)^{3/2} + \left(\frac{c}{a}\right)^{3/2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Áp dụng bất đẳng thức đã chứng minh với $\alpha = \dfrac{3}{2}$, ta có :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{3/2} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a}{b}\right); \quad \left(\frac{b}{c}\right)^{3/2} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^{3/2} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{b}{c}\right)$$

Lại có : $\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{3/2} + \left(\dfrac{b}{c}\right)^{3/2} + \left(\dfrac{c}{a}\right)^{3/2}\right] \geq \dfrac{3}{2}$

(theo bất đẳng thức Côsi)

Cộng theo từng vế của 4 bất đẳng thức trên ta suy ra điều phải chứng minh.

ĐÓN ĐỌC

THTT số 297 (3-2002)

- Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán trường ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội
- Phát triển một bài toán hình học
- Bài toán con kỳ nhông đổi màu
- Một số phương pháp giải phương trình hàm (tiếp theo)
- Đề thi chọn đội tuyển toán của Rumani
- Về bài toán số học trong kì thi Toán quốc tế lần thứ 36

Các bạn sẽ biết kết quả của các bài toán *Đường đi của quân mã*, Cuộc chơi *Ai biết nhiều hơn* kì thứ nhất, *Băn khoăn*, *Ô chữ*...

Mời các bạn tiếp tục đặt mua THTT quý II năm 2002.

THTT

LỜI GIẢI BÀI THI TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 42 - NĂM 2001

VŨ ĐÌNH HÒA

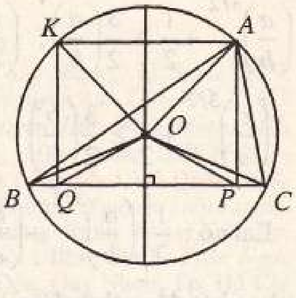
(Trưởng đoàn Việt Nam thi Toán quốc tế lần thứ 42)

Bài 1. *Cho ABC là một tam giác nhọn với tâm đường tròn ngoại tiếp O. Điểm P là chân đường cao hạ từ A xuống BC.*

Giả sử rằng $\widehat{BCA} \geq \widehat{ABC} + 30^o$

Hãy chứng minh rằng $\widehat{CAB} + \widehat{COP} < 90^0$.

Lời giải. Đặt $\alpha = \widehat{COP}$, $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{BCA}$. Gọi K và Q là điểm đối xứng của A và P tương ứng qua trung trực của BC. Gọi $R = OA = OB = OC = OK$. Ta có $QP = KA$ bởi vì $KQPA$ là hình chữ nhật. Lưu ý rằng $\widehat{AOK} = \widehat{AOB} - \widehat{KOB} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC} = 2\gamma - 2\beta \geq 60^o$.



Từ điều này và từ $OA = OK$ suy ra rằng $KA \geq R$ và $QP \geq R$. Do bất đẳng thức tam giác ta có $OP + R = OQ + OC > QC = QP + PC \geq R + PC$. Từ đó $OP > PC$, và do đó $\widehat{PCO} > \widehat{COP}$.

Bởi vì $\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}(180^o - 2\widehat{PCO}) = 90^o - \widehat{PCO}$, cho nên ta có $\widehat{CAB} + \widehat{COP} < \widehat{CAB} + \widehat{PCO} = 90^o$.

Bài 2. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

cho mọi số thực dương a, b và c.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \left(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right)^2 \geq a^{2/3}(a^2+8bc)$$

Từ BĐT Côsi, ta có

$$\left(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right)^2 - \left(a^{4/3}\right)^2 =$$
$$= \left(b^{4/3}+c^{4/3}\right)\left(a^{4/3}+a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right) \geq$$
$$\geq 2b^{2/3}c^{2/3}.4a^{2/3}b^{1/3}c^{1/3} = 8a^{2/3}bc$$

do đó

$$\left(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right)^2 \geq \left(a^{4/3}\right)^2 + 8a^{2/3}bc$$

$= a^{2/3}(a^2+8bc)$, suy ra (1)

Một cách tương tự, ta có

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \geq \frac{b^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}$$

và $$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{c^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}$$

Cộng theo từng vế ba BĐT này ta nhận được BĐT ở đề bài.

Bài 3. *Có hai mươi mốt thí sinh nữ và hai mươi mốt thí sinh nam tham gia một kỳ thi toán.*

Mỗi thí sinh đã giải được nhiều nhất là sáu bài toán.

Với mỗi thí sinh nữ và mỗi thí sinh nam, có ít nhất một bài toán được giải bởi cả hai thí sinh này.

Chứng minh rằng có một bài toán được giải bởi ít nhất ba thí sinh nữ và bởi ít nhất ba thí sinh nam.

Lời giải. Ta kí hiệu tập hợp các thí sinh nữ là G, tập hợp các thí sinh nam là B và tập hợp các bài toán là P. Với mỗi bài toán p ta kí hiệu $G(p)$ là tập hợp các thí sinh nữ giải được bài toán p và tương tự $B(p)$ là tập hợp các thí sinh nam giải được bài toán p.

Giả sử rằng với mỗi bài toán $p \in P$ hoặc $|G(p)| \leq 2$ hoặc $|B(p)| \leq 2$. Cho mỗi $p \in P$, ta quy ước p có màu đỏ nếu $|G(p) \leq 2$ và quy ước rằng p có màu đen nếu như ngược lại. Bằng cách đó, nếu p có màu đỏ thì $|G(p)| \leq 2$ và nếu p có màu đen thì $|B(p)| \leq 2$.

Xét một bàn cờ có 21 hàng và 21 cột, mỗi hàng tương ứng với một thí sinh nữ, và mỗi cột tương ứng với một thí sinh nam. Với mỗi $g \in G$ và $b \in B$, tô màu của ô tương ứng (g, b) bởi cách sau : chọn $p \in P(g) \cap P(b)$ và tô màu của p cho ô này. (Theo điều kiện thứ hai của đề bài ta luôn có một cách chọn như vậy). Ta gọi *phần nguyên trên* của số thực x là số nguyên nhỏ nhất mà không nhỏ hơn x, kí hiệu là $\lceil x \rceil$, nghĩa là $\lceil x \rceil - 1 < x \le \lceil x \rceil$. Theo nguyên lí Dirichlet, có một trong hai màu đen hoặc đỏ là màu của ít nhất $\left\lceil \frac{441}{2} \right\rceil = 221$ ô, không mất tổng quát là có ít nhất 221 ô màu đen. Khi đó có ít nhất một hàng có ít nhất $\left\lceil \frac{221}{21} \right\rceil = 11$ ô màu đen.

Giả sử rằng hàng tương ứng với $g \in G$ có ít nhất 11 ô màu đen. Khi đó cho mỗi một trong số 11 ô đen, số bài toán (màu đen) tương ứng với các ô này chỉ được giải bởi không quá 2 thí sinh nam. Bởi vì $\left\lceil \frac{11}{2} \right\rceil = 6$, cho nên số các bài toán khác nhau được giải bởi g đúng bằng 6. Theo điều kiện thứ nhất của đề bài, g chỉ giải được đúng 6 vấn đề này. Vì chỉ có không quá 2 nam giải được mỗi bài toán này, nên tổng số các thí sinh nam giải các bài toán giải được của g không vượt quá 12, mâu thuẫn với giả thiết thứ hai của đề bài. Cũng bằng cách tương tự, ta có một mâu thuẫn nếu như có ít nhất 221 ô màu đỏ. Do đó tồn tại $p \in P$ sao cho $|G(p)| \ge 3$ và $|B(p)| \ge 3$.

Lưu ý: Gốc của bài toán này chính là bài toán đồ thị về chỉ số Ramsey.

Bài 4. *Cho trước một số nguyên lẻ n lớn hơn 1 và các số nguyên $k_1, k_2, \dots, k_n$. Với mỗi hoán vị $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ trong số $n!$ hoán vị của $1, 2, \dots, n$, ta đặt*

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$$

Chứng minh rằng tồn tại hai hoán vị b và c, $b \neq c$, sao cho $n!$ là một ước số của $S(b) - S(c)$.

Lời giải. Gọi $\sum S(a)$ là tổng của $S(a)$ cho tất cả $n!$ các hoán vị $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Ta tính $\sum S(a)$ theo hai cách khác nhau, một cách dựa trên giả sử là kết luận của bài toán là sai, rồi suy ra mâu thuẫn khi n là số lẻ.

Cách thứ nhất. Trong tổng $\sum S(a)$, k_1 được tính lặp trong mỗi giai thừa với mỗi giá trị cố định $a_1 \in \{1, \dots, n\}$ đúng $(n-1)!$ lần. Vậy, hệ số của k_1 trong tổng $\sum S(a)$ là

$$(n-1)!(1 + 2 + \dots + n) = \frac{(n+1)!}{2}$$

Tương tự, với mỗi hệ số k_i ta có hệ số của k_i trong $\sum S(a)$ là $\frac{(n+1)!}{2}$.

Do đó $$\sum S(a) = \frac{(n+1)!}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i \qquad (1)$$

Cách thứ hai. Giả sử $n!$ không là một ước của $S(a) - S(b)$ cho mọi $a \neq b$, thì mỗi $S(a)$ phải có một số dư khác nhau trong phép chia cho $n!$. Do có đúng $n!$ hoán vị, nên các số dư này phải đúng bằng $0, 1, 2, \dots, n! - 1$. Do $0 + 1 + 2 + \dots + (n! - 1) = \frac{(n! - 1)n!}{2}$, nên

$$\sum S(a) \equiv \frac{(n!-1)n!}{2} \pmod{n!} \qquad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có

$$\frac{(n+1)!}{2} \sum_{i=1}^{n} k_i \equiv \frac{(n!-1)n!}{2} \pmod{n!} \qquad (3)$$

Bây giờ, cho n lẻ ($n > 1$), vế trái của (3) có số dư khi chia cho $n!$ bằng 0, trong khi đó với $n > 1$ vế phải không có số dư 0 trong phép chia này (chú ý $n! - 1$là số lẻ), ta có mâu thuẫn. Vậy điều giả sử ở cách thứ hai là sai.

Bài 5. *Trong một tam giác ABC có AP là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ (điểm P nằm trên cạnh BC) và BQ là phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$ (điểm Q nằm trên CA).*

Biết rằng $\widehat{BAC} = 60^0$ và $AB+BP=AQ+QB$.

Các góc của tam giác ABC có thể nhận những giá trị nào?

Lời giải. Kí hiệu các góc của tam giác ABC tại các đỉnh A, B lần lượt là $\alpha = 60^\circ$ và β. Kéo

(Xem tiếp trang 11)

VÀI PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

TRẦN THỊ NGA
(GVTHPT DL Nguyễn Trường Tộ, Vinh, Nghệ An)

Phương trình hàm (PTH) là phương trình có chứa ẩn dưới dạng hàm số chưa biết. Giải PTH là tìm hàm số chưa biết đó. Nếu xét dãy số như là hàm số xác định trên N thì bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy được cho bởi công thức quy nạp chính là giải PTH của nó.

Ta thường gặp PTH ở rất nhiều bài toán trên các báo toán và các kì thi học sinh giỏi trong và ngoài nước. Mặc dù là một loại toán khó, song phương pháp giải của nhiều dạng PTH không đòi hỏi những kiến thức vượt ra khỏi phạm vi chương trình toán phổ thông. Tùy theo dạng của PTH mà có cách giải phù hợp. Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một số phương pháp giải PTH thông qua các ví dụ cụ thể.

1. Phương pháp thế

Nội dung của phương pháp này là : ta chọn các dạng đặc biệt của đối số để thế vào PTH với mục đích dẫn việc tìm hàm số chưa biết về giải hệ phương trình đại số.

Ví dụ 1. *Hãy tìm tất cả các hàm số $f : R \to R$ thỏa mãn*

$2f(x) + f(1 - x) = x^2$ với mọi $x \in R$. (1)

Giải. Thay thế $x = t$ và $x = 1 - t$ vào (1) ta nhận được hệ

$$\begin{cases} 2f(t) + f(1-t) = t^2 \\ 2f(1-t) + f(t) = (1-t)^2 \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được $f(t) = \dfrac{t^2 + 2t - 1}{3}$. Do t là số thực tùy ý, ta có $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{3}$ là nghiệm duy nhất của (1).

Ta có thể áp dụng phương pháp thế vào (1) bằng một cách khác. Ta đặt $g(x) = 1 - x$, và xây dựng dãy số (x_n) như sau : $x_1 \in R$, $x_n = g(x_{n-1})$ với mọi $n \geq 2$.

Ta thấy ngay (x_n) là dãy tuần hoàn với chu kì 2 và (1) có dạng

$$2f(x) + f(g(x)) = x^2$$

Thay thế $x = x_1$ và $x = x_2 = g(x_1)$ vào phương trình trên ta nhận được hệ :

$$\begin{cases} 2f(x_1) + f(x_2) = x_1^2 \\ 2f(x_2) + f(x_1) = x_2^2 \end{cases}$$

Giải hệ này với ẩn $f(x_1)$ ta được

$$f(x_1) = \frac{2x_1^2 - x_2^2}{3}.$$

Do $x_2 = 1 - x_1$ nên $f(x_1) = \dfrac{x_1^2 + 2x_1 - 1}{3}$.

Do x_1 tùy ý nên nghiệm của (1) là

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{3}$$

Ví dụ 2. *Giải phương trình hàm*

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x$$

với mọi số thực x khác 0, 1 (2)

Giải. Đặt $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$ và lập dãy (x_n) được xác định bởi : $x_1 \in R \setminus \{0, 1\}$, $x_n = g(x_{n-1})$ với mọi $n \geq 2$.

Xét dãy x_1, $x_2 = \dfrac{x_1 - 1}{x_1}$, $x_3 = \dfrac{1}{1 - x_1}$, $x_4 = x_1$, ..., ta thấy (x_n) là dãy tuần hoàn chu kỳ 3. Thay thế $x = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ vào (2) ta được :

$$\begin{cases} f(x_1) + f(x_2) = 1 + x_1 \\ f(x_2) + f(x_3) = 1 + x_2 \\ f(x_3) + f(x_1) = 1 + x_3 \end{cases}$$

Giải hệ này với ẩn $f(x_1)$ ta được

$$f(x_1) = \frac{1 + x_1 - x_2 + x_3}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{1 - x_1}\right)$$

Do x_1 tùy ý nên nghiệm của (2) là

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x}\right)$$

2. Phương pháp chuyển qua giới hạn

Ví dụ 3. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : R \to R$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{2x}{3}\right)=\frac{3x}{5}$ với mọi $x \in R$. (3)

Giải. Đặt $g = \frac{2x}{3}$ và lập dãy (x_n) như sau :

$x_1 \in R, x_n = g(x_{n-1})$ với mọi $n \geq 2$.

Vì dãy (x_n) không tuần hoàn nên ta không thể đưa (3) về hệ phương trình đại số có hữu hạn phương trình. Nhưng vì $x_n = x_1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ nên dãy (x_n) là cấp số nhân lùi vô hạn. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ với bất kì $x_1 \in R$. Thay x bởi x_1, ..., x_{n-1} vào (3) ta được

$$f(x_1)+f(x_2)=\frac{3x_1}{5}, \quad f(x_2)+f(x_3)=\frac{3x_2}{5}, \ldots, f(x_{n-1})+f(x_n)=\frac{3x_{n-1}}{5}$$

Từ đó có $f(x_1) + (-1)^n f(x_n) =$

$= \frac{3}{5}(x_1 - x_2 + ... + (-1)^n x_{n-1})$. Suy ra

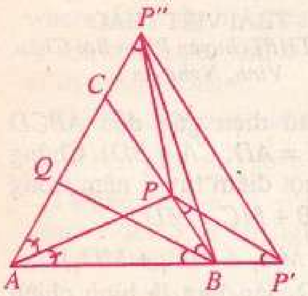
$$f(x_1) + (-1)^n f(x_n) = \frac{9}{25}x_1\left(1+(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$$

Do $f(x)$ là hàm liên tục và $f(0) = 0$ nên khi chuyển qua giới hạn thì $f(x_1) = \frac{9x_1}{25}$. Vậy nghiệm của (3) là $f(x) = \frac{9x}{25}$.

Chú ý. Các ví dụ trên là trường hợp riêng của phương trình hàm $af(x) + bf(g(x)) = c$, trong đó a, b, c là các số thực và hàm $g(x)$ đã biết. Để giải PTH này, ta lập dãy số (x_n) với x_1 thuộc tập xác định của hàm $f(x)$, $x_n = g(x_{n-1})$ với mọi $n \geq 2$. Nếu dãy (x_n) tuần hoàn thì có thể giải được PTH này nhờ phương pháp thế, nếu dãy hội tụ thì áp dụng phương pháp chuyển qua giới hạn.

(Kì sau đăng tiếp)

LỜI GIẢI BÀI THI TOÁN QUỐC TẾ... *(Tiếp trang 9)*



... dài AB tới điểm P' sao cho $BP' = BP$, và dựng P'' trên AQ sao cho $AP'' = AP'$. Khi đó $BP'P$ là một tam giác cân với góc đáy $\beta/2$. Từ $AQ + QP'' = AB + BP' = AB + BP = AQ + QB$, suy ra rằng $QP'' = QB$. Do $AP'P''$ là tam giác đều và AP là phân giác của góc A, ta có $PP' = PP''$.

Ta sẽ chứng minh các điểm B, P, P'' thẳng hàng.

Giả sử ngược lại rằng BPP'' là tam giác (không suy biến). Ta có $\widehat{PBQ} = \widehat{PP'B} = \widehat{PP''Q} = \beta/2$. Khi đó ta có hình trên (hoặc điểm P và điểm Q nằm về hai phía của BP''). Trong trường hợp nào cũng dẫn đến $BP = PP'' = PP'$, và tam giác BPP' là tam giác đều, do đó có $\beta/2 = 60^o$ và $\alpha + \beta = 60^o + 120^o = 180^o$. Điều này không xảy ra. Vậy các điểm B, P, P'' thẳng hàng và do đó P'' trùng với C.

Do tam giác BQC (tức là BQP'') là tam giác cân, ta có $120^o - \beta = \widehat{ACB} = \beta/2$, suy ra $\beta = 80^o$ và $\widehat{ACB} = 40^o$.

Bài 6. *Cho a, b, c, d là các số nguyên với $a > b > c > d > 0$. Giả sử rằng*

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Chứng minh rằng $ab + cd$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải. Đẳng thức

$ac + bd = (b+d+a-c)(b+d-a+c)$ tương đương với $a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$ (1)

Bằng biến đổi đơn giản từ (1) ta nhận được đẳng thức

$$(ac+bd)(a^2 - ac + c^2) = (ab + cd)(ad + bc) \quad (2)$$

Từ $(a-d)(b-c) > 0$ và $(a-b)(c-d) > 0$ suy ra

$$ab + cd > ac + bd > ad + bc \quad (3)$$

Giả sử rằng $ab + cd$ là số nguyên tố. Khi đó từ (3) ta có các số $ab + cd$ và $ac + bd$ nguyên tố cùng nhau. Từ (2) suy ra rằng $ac + bd$ là ước số của $ad + bc$. Điều này không thể xảy ra do (3). Vậy $ab + cd$ không thể là số nguyên tố./.

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/296. Cho số nguyên a lớn hơn 32. Hỏi tồn tại hay không số tự nhiên k thỏa mãn $a^{40} < k < a^{41}$ mà có ít nhất 61 chữ số 0 ở tận cùng ?

NGUYỄN HỮU BẰNG
(GV THCS Bến Thủy, Vinh, Nghệ An)

Bài T2/296. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{6} < \frac{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}} < \frac{5}{27}$$

trong đó biểu thức chứa căn có n dấu căn ở tử số và $n-1$ dấu căn ở mẫu số.

THỚI NGỌC ÁNH
(GV THCS Phổ Minh, Đức Phổ, Quảng Ngãi)

Bài T3/296. Giả sử phương trình $x^5-x^3+x-2=0$ có nghiệm thực x_o. Chứng minh rằng

$$\sqrt[6]{3} < x_o < \sqrt[6]{4}$$

TRẦN THỊ MAI LÂM
(GV THCS Minh Tân, Kiến Xương, Thái Bình)

Bài T4/296. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng với bất kì số nguyên $n > 1$ thì

$$a^n b(a-b) + b^n c(b-c) + c^n a(c-a) \geq 0$$

NGUYỄN LÁI
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tx. Tuy Hòa, Phú Yên)

Bài T5/296. Cho tam giác ABC với M là trung điểm của BC. Đường phân giác ngoài của góc A cắt đường thẳng BC tại điểm D. Đường tròn ngoại tiếp ΔADM cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt ở E và F. Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh rằng $MN \parallel AD$.

VI QUỐC DŨNG
(GV ĐHSP Thái Nguyên)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/296. Kí hiệu p_k là số nguyên tố thứ k. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì phương trình

$$2nx^2 + 9n(p_{n+1}+p_{n+2})x + 1945n^3 = 2001x^3$$

luôn có nghiệm dương không nhỏ hơn n.

NGUYỄN VIỆT HẰNG
(SV khoa Toán ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Bài T7/296. Giả sử $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dãy số (u_n) $(n = 1, 2, 3...)$ được xác định bởi : $u_1 > 0$ và

$$u_{n+1} = u_n \sin^2\alpha + \frac{2002\cos^2\alpha}{u_n^{\operatorname{tg}^2\alpha}} \quad \text{với } n = 1, 2, 3,...$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn khi $n \to \infty$ và tìm giới hạn đó.

NGUYỄN THẾ BÌNH
(Sở GD–ĐT Hà Giang)

Bài T8/296. Cho các số nguyên dương k, n sao cho $k < n$. Chứng minh rằng :

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(k+1)^{k+1}(n-k+1)^{n-k+1}} < \frac{n!}{k!(n-k)!} <$$

$$< \frac{n^n}{k^k(n-k+1)^{n-k}}$$

NGUYỄN VĂN HIỀN
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T9/296. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Một đường thẳng d đi qua điểm O lần lượt tạo với các đường thẳng OA, OB, OC các góc nhọn α, β, γ. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức

$$\sin 4A.\sin^2\alpha + \sin 4B.\sin^2\beta + \sin 4C.\sin^2\gamma$$

là không đổi khi đường thẳng d quay quanh điểm O.

THÁI VIẾT THẢO
(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)

Bài T10/296. Cho tứ diện gần đều $ABCD$ (nghĩa là $AB = CD$, $BC = AD$, $CA = BD$). Chứng minh rằng nếu M là một điểm tùy ý nằm trong tứ diện thì : $MA + MB + MC + MD \geq$

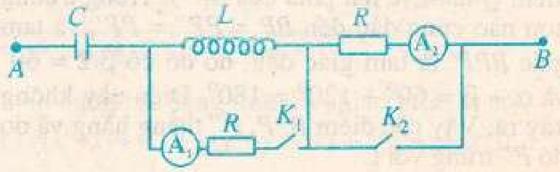
$$\geq 3(MA_1 + MB_1 + MC_1 + MD_1)$$

trong đó A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là hình chiếu của M trên các mặt BCD, CDA, DAB, ABC.

VŨ ĐỨC SƠN
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/296. Cho mạch điện như hình vẽ. $u_{AB} = 250\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V), $C = 20\mu F$, cuộn dây



thuần cảm. Khi K_1, K_2 đều đóng, ampe kế A_1 chỉ 1,57A. Khi K_1, K_2 đều mở ampe kế A_2 chỉ 1,57A. Bỏ qua điện trở của dây nối, các khóa K_1, K_2 và các ampe kế. Tìm R, L. Viết biểu thức dòng điện mạch chính khi K_1, K_2 đều đóng.

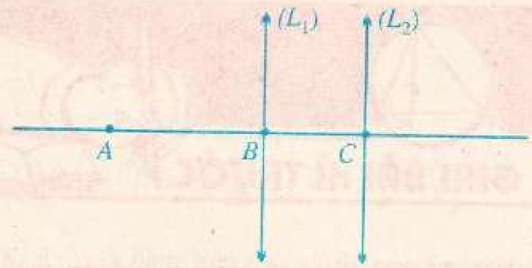
NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/296. Cho hệ hai thấu kính đồng trục L_1, L_2 với BC = 1m. Vật sáng MN vuông góc với trục chính của hệ.

Thấu kính L đặt tại A có thể thay thế hệ (L_1, L_2) sao cho với bất kì vị trí nào của MN đặt trước L đều cho độ phóng đại như của hệ.

Đặt MN tại A :

+ L_1, L_2 vẫn ở B, C ; sau đó đảo vị trí cho nhau ta được ảnh qua hệ sau khi đảo bằng 4 lần ảnh qua hệ khi chưa đảo. Hai ảnh ngược chiều nhau.



+ Chỉ dùng L_2 đặt tại B thì cho ảnh của MN tại C.

Tìm f, f_1, f_2 và AB.

TRẦN MẠNH HÙNG
(GV Khối chuyên Toán – Tin, ĐH Vinh, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/296. Let be given a natural number $a > 32$. Does there exist a natural number k, $a^{40} < k < a^{41}$ ending by at least 61 digits 0 ?

T2/296. Prove that

$$\frac{1}{6} < \frac{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}} < \frac{5}{27}$$

where there are n radical signs in the expression of the numerator and $n-1$ ones in the expression of the denominator.

T3/296. Suppose that the equation $x^5-x^3+x-2=0$ has a real root x_o. Prove that $\sqrt[6]{3} < x_o < \sqrt[6]{4}$

T4/296. Let a, b, c be the measures of the three sides of a triangle. Prove that for every natural number $n > 1$,

$$a^n b(a-b) + b^n c(b-c) + c^n a(c-a) \geq 0$$

T5/296. Let M be the midpoint of the side BC of a triangle ABC. The exterior angled–bisector of angle A cuts the side BC at D. The circumcircle of triangle ADM cuts again the lines AB and AC respectively at E and F. Let N be the midpoint of EF. Prove that MN is parallel to AD.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/296. Let p_k be the k^{th} prime number. Prove that for every positive integer n, the equation

$$2nx^2 + 9n(p_{n+1} + p_{n+2})x + 1945n^3 = 2001x^3$$

has a positive root not less than n.

T7/296. Let $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Consider the sequence of numbers (u_n) (n = 1, 2, 3...) defined by : $u_1 > 0$ and $u_{n+1} = u_n \sin^2\alpha + \dfrac{2002\cos^2\alpha}{u_n^{\mathrm{tg}^2\alpha}}$ for every n = 1, 2, 3,...

Prove that the sequence (u_n) has a limit when $n \to \infty$ and find this limit.

T8/296. Let be given two positive integers k, n such that $k < n$. Prove that

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(k+1)^{k+1}(n-k+1)^{n-k+1}} < \frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n^n}{k^k(n-k+1)^{n-k}}$$

T9/296. An acute angled triangle ABC is inscribed in a circle with center O. A line passing through O forms respectively with the lines OA, OB, OC the acute angles α, β, γ. Prove that the value of the expression

$$\sin 4A.\sin^2\alpha + \sin 4B.\sin^2\beta + \sin 4C.\sin^2\gamma$$

is constant when the line d moves around the point O.

T10/296. Let $ABCD$ be an equifaced tetrahedron (i.e. $AB = CD$, $BC = AD$, $CA = BD$). Prove that if M is a point inside the tetrahedron, then

$$MA + MB + MC + MD \geq 3(MA_1 + MB_1 + MC_1 + MD_1)$$

where A_1, B_1, C_1, D_1 are respectively the orthogonal projections of M on the faces BCD, CDA, DAB, ABC.

Bài T1/292. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình :*

$$\frac{3|3x-4y|+4|4x-3y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{1201} \quad (1)$$

Lời giải. (của bạn *Đoàn Duy Thuyết*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định**).

Cặp số $(x, y) = (0, 0)$ không là nghiệm của phương trình (1)

$(1) \Leftrightarrow |9x-12y|+|16x-12y|$

$=\sqrt{1201(x^2+y^2)} \quad (2)$

Dễ dàng chứng minh được công thức :

$$|A|+|B|=\begin{cases}|A+B| \text{ khi } A.B\ge 0\\ |A-B| \text{ khi } A.B<0\end{cases}$$

Áp dụng công thức vào (2) được :

1) Khi $(9x-12y)(16x-12y)\ge 0$ thì

$(2)\Rightarrow |25x-24y|=\sqrt{1201(x^2+y^2)}$

$\Leftrightarrow (24x+25y)^2=0$

$\Leftrightarrow 24x+25y=0$

$\Leftrightarrow 24x=-25y$

Vì $(24, 25) = 1$ nên phải có $x = 25k$ $(k\in Z, k\neq 0)$, $\Rightarrow y=-24k$

2) Khi $(9x-12y)(16x-12y)<0$ thì

$(2)\Rightarrow |7x|=\sqrt{1201(x^2+y^2)}$

$\Leftrightarrow 1152x^2+1201y^2=0$

Phương trình này chỉ có nghiệm $(x, y) = (0, 0)$ nhưng không là nghiệm của (1).

Vậy mọi nghiệm nguyên của phương trình (1) có dạng $x = 25k$, $y = -24k$ với k nguyên, $k \neq 0$.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn biến đổi (1) đến (2) rồi đặt ẩn phụ $t=\dfrac{x}{y}$ để chuyển việc giải phương trình 2 ẩn về phương trình 1 ẩn. Một số bạn bình phương hai vế của (2) rồi sử dụng BĐT Bunhiacôpxki để dẫn đến kết luận.

Một số bạn đã giải xong nhưng kết luận không chính xác như : phương trình (1) vô nghiệm, hoặc có 1 nghiệm, hoặc để nghiệm ở dạng phân số ... (!)

2) Bạn *Nguyễn Trường Thọ*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ** đã giải bài toán tổng quát hơn :

Tìm tất cả nghiệm nguyên của phương trình

$$\frac{a|ax-by|+b|bx-ay|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{(a^2+b^2)^2+4a^2b^2}$$

trong đó a, b là các số nguyên.

3) Các bạn sau cũng có lời giải tốt :

Yên Bái : *Nguyễn Hồng Phong*, 9I, THCS Lê Hồng Phong, Tx. Yên Bái ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Phương Dung*, 9A, THCS Thọ Sơn, Việt Trì ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thọ Khiêm, Bùi Hữu Đức*, 9A, THCS Vĩnh Yên, *Nghiêm Thị Ngân*, 9A, *Hà Thị Việt Hà*, 9B, THCS Yên Lạc. **Hà Tây :** *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 9A, THCS Thạch Thất; **Hà Nội:** *Nguyễn Thanh Tùng*, 8A1, THCS Láng Thượng, Q. Đống Đa ; **Bắc Ninh :** *Phan Tuấn Anh*, 8A, THCS Đức Giang, Yên Dũng ; **Hà Nam:** *Trần Phan Bình*, 9B, THCS Trần Phú, Tx. Phủ Lý ; **Nam Định:** *Phạm Duy Hiển, Vũ Khắc Kỳ*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định ; *Đinh Xuân Tuyên*, 8A2, *Phạm Kim Hùng, Dương Đỗ Nhuận*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Hải Dương:** *Lê Hải Thăng*, 9B, *Trần Quốc Hoàn*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà; *Lê Đình Huy*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, *Nguyễn Anh Tuấn*, 8/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp.Hải Dương ; **Hưng Yên:** *Doãn Thị Kim Huế*, 8C, THCS Phạm Huy Đông, Ân Thi ; **Hải Phòng:** *Phạm Huy Hoàng*, 8B, THPT NK Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Thu*, 8A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Nguyễn Ngọc Tú*, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định ; *Hoàng Quốc Hoàn*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa ; **Nghệ An:** *Quế Anh Lê*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Khánh Hòa:** *Võ Thông Thái*, 9/3, TH Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Hoàng Kim Trang*, 7A, THCS Lê Quý Đôn, Thủ Đức.

VIỆT HẢI

Bài T2/292. *Gọi x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện xyz = 1.*

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{x^2}{x+y+y^3z}+\frac{y^2}{y+z+z^3x}+\frac{z^2}{z+x+x^3y}$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^7+y^7}+\frac{y^2z^2}{y^2z^2+y^7+z^7}+\frac{z^2x^2}{z^2x^2+z^7+x^7}$$

Lời giải. a) (của bạn *Đoàn Duy Thuyết*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định**).

$$A=\frac{x^2}{x+y+y^3z}+\frac{y^2}{y+z+z^3x}+\frac{z^2}{z+x+x^3y}$$

$$=\frac{x^3}{x^2+yx+y^3zx}+\frac{y^3}{y^2+zy+z^3xy}+\frac{z^3}{z^2+xz+x^3yz}$$

$$=\frac{x^3}{x^2+yx+y^2}+\frac{y^3}{y^2+zy+z^2}+\frac{z^3}{z^2+xz+x^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có

$A.(x(x^2+xy+y^2)+y(y^2+yz+z^2)+z(z^2+xz+x^2))\ge$

$\ge (x^2+y^2+z^2)^2$

$$A(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \ge (x^2+y^2+z^2)^2$$

$$A \ge \frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z} \ge \frac{x+y+z}{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi có

$A \ge \frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz} = 1$. Giá trị nhỏ nhất A đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

b) (của nhiều bạn) Với hai số thực dương x, y ta có $(x^3 - y^3)(x^4 - y^4) \ge 0$ và do đó ta có $x^7 + y^7 \ge x^3y^3(x+y)$, với đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $x = y$. Sử dụng bất đẳng thức này và $xyz = 1$ ta có

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2 + x^7 + y^7} \le \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + x^3y^3(x+y)}$$

$$= \frac{1}{1 + xy(x+y)} = \frac{1}{xyz + xy(x+y)}$$

$$= \frac{1}{xy(x+y+z)} = \frac{z}{xyz(x+y+z)} = \frac{z}{x+y+z}$$

Tương tự với các số hạng khác của biểu thức B ở đề bài ta có

$$B \le \frac{z}{x+y+z} + \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z}$$

$$= \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$$

Giá trị lớn nhất $B = 1$ đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Nhận xét. Có tới hơn một trăm bạn giải đúng bài toán này, nhưng cũng có vài bạn chỉ giải một câu a) hoặc câu b). Nhiều bạn sử dụng bất đẳng thức $\frac{a^3}{a^3+ab+b^2} \ge \frac{2a-b}{3}$ mà không chứng minh.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/292. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} = x^2 - x + 2 \quad (1)$$

Lời giải.

Điều kiện $x^2 + x - 1 \ge 0, x - x^2 + 1 \ge 0$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho mỗi số hạng ở vế trái của phương trình (1) ta có

$$\sqrt{x^2+x-1} \le \frac{(x^2+x-1)+1}{2} = \frac{x^2+x}{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{x-x^2+1} \le \frac{(x-x^2+1)+1}{2} = \frac{x-x^2+2}{2} \quad (4)$$

Cộng theo từng vế của (3) và (4)

$$\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} \le x+1$$

Kết hợp với phương trình (1) ta được

$x^2 - x + x \le x + 1$ hay $(x-1)^2 \le 0$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Giá trị này thỏa mãn (2).

Thử giá trị này vào phương trình (1) ta thấy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Nhận xét. Có rất nhiều bạn có lời giải tốt.

TỐ NGUYÊN

Bài T4/292. *Cho tam giác ABC với AB < AC. Gọi AD và AM lần lượt là đường phân giác và đường trung tuyến của tam giác. Đường thẳng qua D và vuông góc với AD cắt cạnh AC ở điểm E. So sánh diện tích hai tam giác ADM và CEM.*

Lời giải. Kéo dài DE cắt AB kéo dài ở G. Từ E kẻ $Ex // AB$ cắt BC tại F. Dễ thấy $\Delta DGB = \Delta DEF$. Suy ra $BD = DF$. Xét 3 trường hợp sau :

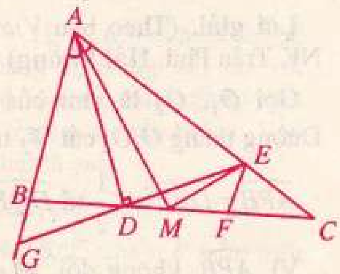
- $AE = EC \Rightarrow F$ trùng với M. Có $FC = BM = 2MD$.
- $AE > EC \Rightarrow FC = MC - MF = BM - MF = BD + DM - MF = DM + DF - MF = 2DM$
- $AE < EC \Rightarrow FC = FM + MC = FM + BM = FM + BD + DM = FM + DF + DM = 2DM$.

Trong cả 3 trường hợp đều có $FC = 2DM$.

Áp dụng định lí Talet ta có

$$\frac{EC}{AC} = \frac{FC}{BC}$$

$$= \frac{2MD}{2MC} = \frac{MD}{MC} \quad (1)$$



Mặt khác hai tam giác có chung đỉnh và đáy cùng nằm trên một đường thẳng thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy nên :

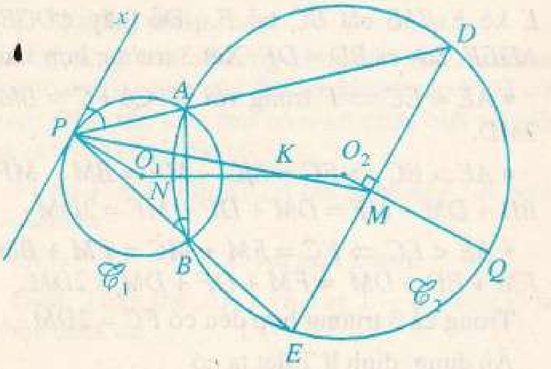
$$\frac{S_{MEC}}{S_{MAC}} = \frac{EC}{AC}; \frac{S_{ADM}}{S_{AMC}} = \frac{MD}{MC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{S_{MEC}}{S_{MAC}} = \frac{S_{ADM}}{S_{AMC}}$ hay $S_{MEC} = S_{ADM}$

Nhận xét. Đây là bài có nhiều cách giải. Nhiều bạn không xét đủ 3 trường hợp như lời giải trên. Một số bạn tính toán đại số hay dùng các công thức lượng giác để giải là các cách không hay lắm. Các bạn giải tốt bài này : **Phú Thọ :** *Ngô Vĩnh Thọ*, 9A2, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thị Thúy Hồng*, 9B, THCS Yên Lạc ; **Hải Phòng:** *Bùi Tuấn Anh, Phạm Anh Minh*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định:** *Vũ Khắc Kỳ*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, *Lưu Đức Ly, Phạm Văn Hải*, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh ; *Phạm Kim Hùng*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, ý Yên ; **Thanh Hóa :** *Trịnh Thị Thảo*, 9B, THCS Lê Đình Kiên ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Bách*, 8A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà ; **Đắc Lắc:** *Ngô Thị Huyền Trang*, 8A1, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuột

VŨ KIM THỦY

Bài T5/292. *Hai đường tròn $\mathscr{C}_1$ và $\mathscr{C}_2$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Một điểm P thay đổi trên đường tròn $\mathscr{C}_1$, P khác A và B. Các đường thẳng PA, PB lại cắt $\mathscr{C}_2$ theo thứ tự tại D và E. Gọi M là trung điểm DE. Chứng minh rằng đường thẳng PM đi qua một điểm cố định.*



Lời giải. (Theo bạn *Vương Anh Quyền*, 9A, NK Trần Phú, **Hải Phòng**)

Gọi O_1, O_2 là tâm của $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ tương ứng. Đường thẳng O_1O_2 cắt $\mathscr{C}_2$ tại điểm N. Ta có :

$$\widehat{APB} = \widehat{DPE} = \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{DQE} - \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{ANB}$$

Vì $\widehat{APB}$ không đổi, sđ $\overset{\frown}{ANB}$ không đổi nên sđ $\overset{\frown}{DQE}$ không đổi $\Rightarrow DE$ không đổi $\Rightarrow DM$ không đổi $\Rightarrow MO_2$ không đổi (1)

Qua P, kẻ tia $Px \perp PO_1$ sao cho tia PA nằm giữa hai tia Px và PB.

Ta có : $\widehat{ADE} = \widehat{ABP} = \widehat{APx} \Rightarrow Px // DE$.

Vậy : $PO_1 \perp DE$. Chú ý rằng : $MO_2 \perp DE$. Ta có : $PO_1 // MO_2$.

Gọi K là giao điểm của PM và O_1O_2. Theo định lí Talét, ta có : $\dfrac{KO_1}{KO_2} = \dfrac{PO_1}{MO_2}$ (2)

Từ (1), (2) với chú ý rằng PO_1 không đổi, ta có $\dfrac{KO_1}{KO_2}$ không đổi. Suy ra : K cố định. Vậy : đường thẳng PM luôn đi qua điểm K cố định.

Nhận xét. 1) Bài toán này chỉ có 24 bạn tham gia giải, quá ít !! Nguyên nhân của sự ít ỏi này là ở chỗ nhiều bạn cảm thấy mình không đủ sức giải quyết triệt để vấn đề "phép chứng minh không được phụ thuộc hình vẽ". Để giải quyết tốt vấn đề trên cần phải xét khá nhiều vị trí tương đối của 2 đường tròn và các đường thẳng, có kiến thức về góc định hướng nhưng điều sau nằm ngoài sự hiểu biết của học sinh THCS.

2) Lời giải của tất cả 24 bạn, kể cả bạn *Vương Anh Quyền* cũng vẫn phụ thuộc vào hình vẽ. Tuy nhiên, do sự hạn chế đối với học sinh THCS ta đành chấp nhận một lời giải như trên.

3) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt :

Hải Phòng : *Nguyễn Tiến Dũng, Phạm Anh Minh*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định:** *Nguyễn Đức Tâm, Nguyễn Quốc Khánh*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Kiều Thành Long*, 8B, THCS Vĩnh Yên ; *Nguyễn Việt Hà*, K27G, Toán - Tin , ĐHSP Hà Nội 2 ; **Hà Tây:** *Nguyễn Ngọc Thấu*, 9A, THCS Thạch Thất; **Thanh Hóa :** *Trịnh Thành Đông*, THCS Tây Đô ; **Cần Thơ:** *Nguyễn Minh Luân*, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T6/292. *Cho p là số nguyên tố lẻ và $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$ là p−1 số nguyên không chia hết cho p. Chứng minh rằng trong các tổng $T = k_1a_1 + k_2a_2 + ... + k_{p-1}a_{p-1}$, trong đó k_i (i = 1, 2, ..., p−1) bằng 1 hoặc bằng −1, có ít nhất một tổng chia hết cho p.*

Lời giải. (Của các bạn *Đặng Đình Khánh*, 11A1, PTCT-T, ĐHSP **Hà Nội**, *Nguyễn Xuân Trường*, 12A$_1$, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**)

Ta chứng minh bằng quy nạp nhận xét sau :

Tập hợp các số dạng $\sum_{i=1}^{m} k_ia_i$ có ít nhất $m+1$ số dư phân biệt khi chia cho p với $1 \le m \le p-1$.

Thật vậy với $m = 1$ khẳng định đúng do $a_1 \not\equiv -a_1 \pmod{p}$.

Giả sử khẳng định đúng với $m-1$: tồn tại m số $T_1, T_2, ..., T_m$ trong đó T_i có dạng $\sum_{i=1}^{m} k_ia_i$ với các k_i tương ứng và $T_i \not\equiv T_j$ (mod p). Xét hai tập hợp $A = \{T_i + a_m \mid i = 1,2,...,m\}$ và

$$B = \{T_j - a_m \mid i = 1,2,...,m\}$$

Nếu tồn tại j với $1 \le j \le m - 1$ sao cho $T_j - a_m \not\equiv T_i + a_m$ ($\forall i = 1, 2, ..., m - 1$) thì rõ ràng tập $\{T_i + a_m \mid i = 1,2,...m\} \cup T_j - a_m$ sẽ là $m + 1$ số phân biệt (mod p) có dạng $\sum_{i=1}^{m} k_i a_i$.

Giả sử trái lại khi đó $\sum_{i=1}^{m} (T_i + a_m) \equiv \sum_{j=1}^{m} (T_j - a_m) \Rightarrow 2ma_m \equiv 0$ (mop p). Vì $m \le p-1$, $a_m \not\equiv 0$ (mod p) nên điều này không xảy ra. Nhận xét được chứng minh.

Đặc biệt với $m = p-1$ thì theo nhận xét trên sẽ tồn tại một hệ thặng dư đầy đủ (mod p) gồm các số có dạng $\sum_{i=1}^{p-1} k_i a_i$. Do đó phải có một số dạng $\sum_{j=1}^{p-1} k_i a_i$ chia hết cho p.

Nhận xét. Bài toán này chỉ có ít bạn tham gia giải mà trong số các lời giải gửi đến có không ít lời giải sai hoặc chưa đầy đủ. Các bạn có lời giải tốt : *Nguyễn Minh Công*, 12T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Hoàng Thanh*, 11A1, PTCT–T, **ĐHSP Hà Nội** ; *Nguyễn Duy Thành, Phạm Văn Trung*, 11T, THPT Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Lê Phương*, 11, THPT Lương Thế Vinh, **Đồng Nai** ; *Nguyễn Lâm Hưng*, 11T, PTNK **ĐHQG Hồ Chí Minh.**

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/292. *Cho tam thức bậc hai $P(x) = x^2 + px + q$. Hãy tìm tất cả các đa thức bậc bốn $Q(x)$ có hệ số bậc cao nhất bằng 1 sao cho $P(Q(x)) = Q(P(x))$.*

Lời giải. (của bạn *Phan Thành Nam*, 11T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên** và một số bạn khác).

Ta thấy ngay đa thức $Q(x) = P(P(x))$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Chúng ta chứng minh bằng phản chứng rằng đa thức đó là đa thức duy nhất có các tính chất trên.

Giả sử tồn tại hai đa thức $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ khác nhau và cùng thỏa mãn đề bài. Đặt $f(x) = Q_1(x) - Q_2(x)$. Như vậy $f(x) \not\equiv 0$. Hơn nữa vì $Q_1(x)$ và $Q_2(x)$ có bậc bằng 4 và cùng có hệ số cao nhất bằng 1 nên bậc của f là $\deg f < 4$.

Ta có $f(P(x)) = Q_1(P(x)) - Q_2(P(x))$

$= P(Q_1(x)) - P(Q_2(x))$

$= (Q_1(x))^2 + p.Q_1(x) + q - (Q_2(x))^2 - pQ_2(x) - q$

$= f(x) . (Q_1(x) + Q_2(x) + p)$ (*)

Chú ý rằng nếu hai đa thức $\varphi(x)$ và $\Psi(x)$ cùng không đồng nhất bằng 0 thì $\deg\varphi(\Psi(x)) = \deg\varphi.\deg\Psi$ và $\deg(\varphi(x).\Psi(x)) = \deg\varphi + \deg\Psi$.

Do đó từ (*) ta có $2.\deg f = 4 + \deg f$ $\Rightarrow \deg f = 4$, mâu thuẫn với $\deg f < 4$. Vậy đa thức duy nhất thỏa mãn đề bài là

$Q(x) = P(P(x)) = x^4 + 2px^3 + (p^2 + p + 2q)x^2 + p(2q + p)x + q(p + q + 1)$.

Nhận xét. 1) Một số ít bạn do không nắm chắc kiến thức về đa thức nên đã có kết luận sai : không tồn tại đa thức $Q(x)$!. Một số bạn giải theo phương pháp so sánh bậc như trên, còn nhiều bạn giải theo phương pháp đồng nhất các hệ số (phải tính toán nhiều hơn). Có bạn nhận xét vui rằng : đây là một bài toán thi của Rumani và đây là lần thứ ba bạn đó giải bài này.

2) Các bạn sau có lời giải tốt : **Hòa Bình:** *Vũ Văn Dương, Vũ Hữu Phương*, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Văn Thảo*, 11T, THPT Hàn Thuyên; **Phú Thọ :** *Hoàng Ngọc Minh, Đinh Thái Sơn*, THPT Hùng Vương ; **Hà Nội :** *Trần Anh Tuấn*, 11A, ĐHKHTN – ĐHQG ; **Hải Dương :** *Ninh Tiến Thành*, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Thanh Hóa :** *Đặng Trọng Nam, Lê Mạnh Trung*, 11T, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An:** *Đinh Xuân Hải*, 10A1, PTCT, ĐH Vinh ; *Nguyễn Danh Tuấn*, 11A1, THPT Phan Bội Châu ; **Quảng Ngãi:** *Phạm Văn Trung*, 11T, THPT Lê Khiết ; **Đồng Nai:** *Lê Phương*, 11T, THPT Lương Thế Vinh ; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Tiến Việt*, 10T, THPT Lê Quý Đôn ; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 11T, THPT Sa Đéc ; **Phú Yên:** *Huỳnh Lâm Linh*, 11T2, THPT Lương Văn Chánh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/292. *Xét k số không âm $x_1, x_2, ..., x_k$*

a) Biết $x_1 + x_2 + ... + x_k \ge k$. Chứng minh rằng

$$x_1^a + x_2^a + ... + x_k^a \ge x_1 + x_2 + ... + x_k$$

với số thực $a \ge 1$.

b) Biết $x_1^b + x_2^b + ... + x_k^b \ge k$. Chứng minh rằng : $x_1^a + x_2^a + ... + x_k^a \ge x_1^b + x_2^b + ... + x_k^b$ với các số thực a, b thỏa mãn $a \ge b > 0$.

Lời giải. a) Áp dụng bất đẳng thức Becnuli mở rộng :

$$t^\alpha \ge \alpha t - \alpha + 1, \forall t > 0, \alpha \ge 1.$$

Khi đó :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^a \geq a\sum_{i=1}^{k} x_i - ka + k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i^a \geq \left(\sum_{i=1}^{k} x_i - k\right)(a-1) + \sum_{i=1}^{k} x_i \geq$$

$\geq \sum_{i=1}^{k} x_i$ (từ giả thiết $\left(\sum_{i=1}^{k} x_i - k\right)(a-1) \geq 0$).

b) Viết $x_i^a = \left(x_i^b\right)^\alpha$ với $x_i^b = y_i$; $\alpha = \frac{a}{b} \geq 1$, áp dụng kết quả câu a) ta được đpcm.

Nhận xét. 1) Các bạn có thể chứng minh bất đẳng thức Becnuli mở rộng bằng cách khảo sát hàm số $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$ và chứng minh $f(x) \geq f(1)$ với mọi $x \geq 0$ và $\alpha > 1$ (xem câu V trang 7).

2) Các bạn giải tốt bài này :

Bắc Ninh: *Nguyễn Thị Thùy Dương*, 11 Sinh, THPT NK Hàn Thuyên, **Hà Nội :** *Nguyễn Anh Tôn*, 11T, THPT Hà Nội – Amsterdam, *Nguyễn Hữu Bình Minh*, 10A Toán, *Đặng Đình Trường*, 10B Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Nam Định :** *Nguyễn Đình Quân*, 10K, THPT Giao Thủy A ; **Hải Phòng:** *Nguyễn Tiến Lượng*, 11T, PTNK Trần Phú ; **Quảng Ngãi:** *Phạm Tấn Độ*, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết ; **Bình Định:** *Trần Ngọc Trung*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Tp. Hồ Chí Minh** : *Võ Quy Nhơn*, 11CT, THPT Lê Hồng Phong.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/292. *Cho tam giác ABC với r là bán kính đường tròn nội tiếp. Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao với $h_a \leq h_b \leq h_c$. Chứng minh rằng :*

$$9r \leq h_a + h_b + h_c \leq 5r + 2r\left(\frac{\sin A}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A}\right) =$$

$$= 9r + 2r\left(\sqrt{\frac{\sin A}{\sin C}} - \sqrt{\frac{\sin C}{\sin A}}\right)^2 \quad (*)$$

Lời giải. (của *Hoàng Ngọc Minh*, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ** và nhiều bạn khác).

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác tương ứng với các đường cao có độ dài h_a, h_b, h_c, S là diện tích tam giác, ta có các hệ thức sau $2S = ah_a = bh_b = ch_c = (a+b+c)r =$

$$= bc\sin A = ab\sin C,$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

Từ các hệ thức đó suy ra BĐT (*) cần chứng minh tương đương với BĐT sau :

$$9 \leq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 5 + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= 9 + 2\left(\sqrt{\frac{a}{c}} - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 . \quad (**)$$

BĐT phía bên trái (**) dễ dàng thiết lập được nhờ BĐT Côsi, đẳng thức ở đây xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, nghĩa là ΔABC là đều.

Ta chỉ còn phải chứng minh BĐT phía bên phải của (**) :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 5 + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \leq 2 + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \quad (2)$$

$\Leftrightarrow a^2b + c^2b + 2abc \geq a^2c + b^2c + b^2a + c^2a$

$\Leftrightarrow (a^2b - b^2a) - (c^2a - c^2b) - (a^2c + b^2c^2 - 2abc \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(ab + bc - ca - c^2)$

$\Leftrightarrow (a+c)(a-b)(b-c) \geq 0 \quad (3)$

Vì $h_a \leq h_b \leq h_c$ hay $\frac{2S}{a} \leq \frac{2S}{b} \leq \frac{2S}{c}$ suy ra $a \geq b \geq c$ nên (3) đúng $\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Dấu đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi hoặc $a = b$, hoặc $b = c$ nghĩa là khi tam giác ABC cân ở C hoặc cân ở A.

Kết luận : Hai dấu đẳng thức ở (*) đạt được đồng thời khi và chỉ khi ABC là một tam giác đều.

Nhận xét. 1) Bài toán trên đây thuộc loại dễ, có trên 400 bạn tham gia giải bài tập này. Tuy nhiên, nhiều bạn giải còn rườm rà, đa số trình bày dài dòng, luộm thuộm.

2) Thực ra không cần phải chuyển qua độ dài các cạnh a, b, c vì có thể biểu thị $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a}$. Nhưng sử dụng h_a, h_b, h_c thì để chứng minh BĐT (2) dưới dạng tỉ số các đường cao ta phải mất thời gian viết gấp đôi do phải viết chỉ số. Hầu hết các bạn đã khôn ngoan trình bày lời giải như trên, không máy móc chuyển tỉ số các sin sang tỉ số các đường cao.

3) Ngoài bạn *Hoàng Ngọc Minh*, các bạn sau đây cũng có lời giải tương đối gọn gàng :

Hà Nội : *Đặng Đình Trường*, 10B Toán, *Nguyễn Phương Nhung*, 11A Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, *Nguyễn Mạnh Long*, 12N, THPT Thăng Long ; **Bắc Ninh :** *Ngô Quý Hoàn*, 11A1, *Nguyễn Tuấn Minh*, 10A1, *Nguyễn Văn Thích*, 12A1, THPT Yên

Phong I, *Bùi Văn Phúc*, 10T, *Lê Văn Nghĩa*, 11T, *Nguyễn Thị Thùy Dương*, 11 Sinh, THPT NK Hàn Thuyên ; **Vĩnh Phúc :** *Kiều Thanh Long*, 8B, THCS Vĩnh Yên, Tx. Vĩnh Yên ; *Bùi Văn Vũ*, 10A1, *Nguyễn Phong Hải*, 11A1, *Hoàng Vĩnh Hưng*, *Nguyễn Ngọc Minh*, *Chương Hà*, 11A3, *Nguyễn Duy Hưng*, 11B2, *Trần Thị Lan Anh*, 11B3, *Nguyễn Văn Giáp*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Lào Cai:** *Nguyễn Quốc Tuấn*, 12A, THPT Lào Cai ; **Hưng Yên:** *Phạm Ngọc Sáng*, 11T, THPT NK Hưng Yên ; **Hải Dương :** *Nguyễn Thành Nam*, *Phạm Thành Trung*, 11T, THPT Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng :** *Phạm Anh Minh*, 9A, *Lê Công Sơn*, 11T, THPT NK Trần Phú ; *Hoàng Đức Giang Nguyên*, 11A6, THPT Thái Phiên ; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyển*, 12T, *Hà Hữu Cao Trình*, 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Nam Định :** *Hoàng Văn Trường*, 10T, *Đinh Duy Tiên*, 10T2, *Nguyễn Văn Tiệp*, 10T3, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Văn Hoàng*, 11A, THPT Hoằng Hóa II, *Mai Văn Phú*, 11E, THPT Ba Đình, Nga Sơn, *Nguyễn Đức Tài*, 12T, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Phạm Đức Nhân*, 10A1, PTCT ĐH Vinh ; *Cao Đức Tuấn*, *Lê Bảo Trung*, 10A2, THPT Phan Bội Châu ; *Vũ Thanh Hải*, 11A1, THPT Nghi Lộc I; **Quảng Bình:** *Hoàng Đức Quang*, 11A, THPT Đào Duy Từ, Tx. Đồng Hới ; **Quảng Trị:** *Trần Tiến Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi:** *Phạm Văn Trung*, 11T, *Đoàn Văn Luân*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết ; **Bình Định:** *Trần Thanh Trình*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Phú Yên:** *Võ Nhật Linh*, 11A1, THPT Nguyễn Huệ, Tx. Tuy Hòa ; *Phan Thành Nam*, 11T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh ; **Bình Thuận:** *Nguyễn Phước Tài*, 11A2, THPT Trần Hưng Đạo, Phan Thiết ; **Đồng Nai:** *Lê Phương*, 11T1, *Lê Trung Hiếu*, *Nguyễn Hải Phong*, 12T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa ; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 10T, THPT Bến Tre.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/292. *Cho tứ diện ABCD có từng cặp cạnh đối diện bằng nhau. Gọi φ là số đo góc nhị diện cạnh AB của tứ diện. Chứng minh rằng :*

a) $\cos\varphi = 1 - 2\operatorname{cotg}A.\operatorname{cotg}B$.

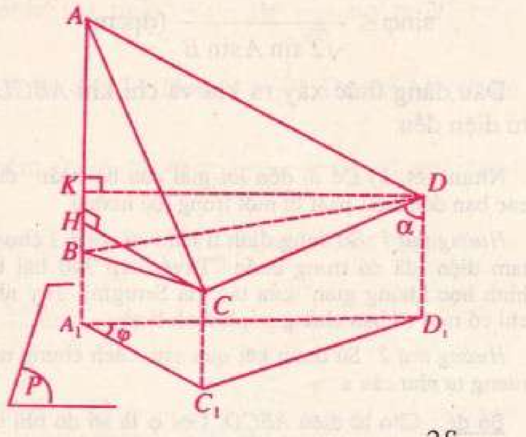
b) $\sin\varphi \le \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin A.\sin B}$

trong đó A, B là các góc của tam giác ABC.

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. a) Đặt $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $BC = AD = c$.

Giả sử S_0, R_0, α lần lượt là diện tích một mặt nào đó của tứ diện $ABCD$, bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, góc giữa AB và CD. Chiếu toàn bộ tứ diện $ABCD$ lên mp(P) vuông góc với AB. Gọi A_1 là hình chiếu của A, B lên mp(P), C_1, D_1 lần lượt là hình chiếu của C, D lên mặt phẳng đó. Gọi CH, DK là đường cao của ΔCAB, ΔDAB tương ứng.



Khi đó $\widehat{C_1A_1D_1} = \varphi$ và $A_1C_1 = CH = \dfrac{2S_0}{a}$,

$A_1D_1 = DK = \dfrac{2S_0}{a}$, $C_1D_1 = a.\sin\alpha$.

Áp dụng định lí hàm số côsin cho $\Delta A_1C_1D_1$ ta có $C_1D_1^2 = A_1C_1^2 + A_1D_1^2 - 2A_1C_1 . A_1D_1 .\cos\varphi$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2.\sin^2\alpha}{4} = \dfrac{2S_o^2(1-\cos\varphi)}{a^2}$ (1).

Sử dụng phương pháp hình hộp ngoại tiếp tứ diện ta nhận được hệ thức $\cos\alpha = \dfrac{|c^2 - b^2|}{a^2}$. Do đó từ (1) suy ra

$2S_o^2(1-\cos\varphi) = \dfrac{1}{4}(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$

$= a^2bc.\cos A.\cos B$ (2)

Từ $S_o = \dfrac{abc}{4R_o}$, $b = 2R_o\sin B$, $c = 2R_o\sin A$ và (2), ta nhận được $\sin A\sin B(1 - \cos\varphi) = 2\cos A\cos B$ $\Leftrightarrow 2\operatorname{cotg}A.\operatorname{cotg}B + \cos\varphi = 1$(đpcm)

b) Dựa theo *Nguyễn Xuân Trường*, 12A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**.

Sử dụng kết quả câu a, ta có

$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - (1 - 2\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B)^2$

$= 4\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B(1 - \operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B)$

$= \dfrac{8\cos A\cos B\cos C}{2\sin^2 A.\sin^2 B}$ (3)

Với mọi ΔABC ta có bất đẳng thức $\cos A.\cos B.\cos C \le \dfrac{1}{8}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều. Do đó từ (3) ta được

$$\sin\varphi \le \frac{1}{\sqrt{2}\sin A \sin B} \text{ (đpcm)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi *ABCD* là tứ diện đều.

Nhận xét. 1) Để đi đến lời giải của bài toán đa số các bạn đều xuất phát từ một trong hai hướng

Hướng thứ 1: Sử dụng định lí hàm số côsin I cho góc tam diện (đã có trong cuốn "Tuyển tập 340 bài toán hình học không gian" của tác giả Sarưgin). Tuy nhiên chỉ có một số bạn chứng minh định lí này.

Hướng thứ 2: Sử dụng kết quả sau, cách chứng minh tương tự như câu a :

Bổ đề : Cho tứ diện *ABCD*. Gọi φ là số đo nhị diện cạnh *AB* của tứ diện đó, α là góc giữa *AB* và *CD*. Khi đó ta có hệ thức

$$S_{ABC}^2 + S_{ABD}^2 - 2S_{ABC}.S_{ABD}.\cos\varphi = \left(\frac{AB.CD.\sin\alpha}{2}\right)^2$$

2) Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả :

Hà Nội : *Lê Hùng Việt Bảo,* 10A, PTCT-T, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội , *Nguyễn Trung Chính,* 12T, THPT Hà Nội- Amsterdam; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Nhật Huy,* 11A1, *Trần Bá Bách,* 12A2, *Nguyễn Xuân Trường* , 12A1, THPT chuyên ; **Yên Bái :** *Trần Bình Minh,* 11A1, THPT Nguyễn Tất Thành ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Thùy Dương,* 11 Sinh, *Nguyễn Văn Thảo, Lại Đắc Khải,* 11T, THPT NK Hàn Thuyên ; **Hải Dương :** *Nguyễn Thế Lộc, Phạm Thành Trung, Nguyễn Thành Nam, Nguyễn Anh Ngọc,* 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng:** *Nguyễn Tiến Lượng,* 11T, THPT NK Trần Phú ; **Hà Tây:** *Nguyễn Văn Trung,* 11A1, *Nguyễn Xuân Khánh,* 12A1, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, *Nguyễn Tiến Yết,* 11T1, THPT Nguyễn Huệ ; **Hòa Bình:** *Hà Hữu Cao Trình,* 11T, *Nguyễn Lâm Tuyển, Nguyễn Thái Ngọc,* 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Nam Định:** *Nguyễn Đức Tâm,* 9A7, THCS Trần Đăng Ninh ; **Ninh Bình:** *Trịnh Thùy Nhung, Lê Văn Lợi,* 11T, THPT Lương Văn Tụy ; **Thanh Hóa :** *Đặng Trọng Nam,* 11T2, *Nguyễn Đức Tài,* 12T, *Lê Mạnh Trung,* 11I, *Bùi Hồng Quân, Mai Quang Thành,* 11T1, THPT chuyên Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Trần Đình Trung, Lê Quốc Đô,* 11AT, *Nguyễn Đình Hưng,* 11A1, khối PTCT-T, ĐH Vinh, *Trần Quang Vũ, Lê Đình Chung,* 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu ; **Quảng Trị:** *Hồng Ngọc Bình, Trần Tiến Hoàng,* 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi:** *Phan Văn Trung,* 11T, *Trần Thái An Nghĩa, Nguyễn Huy Cung,* 12T2, THPT chuyên Lê Khiết, *Huỳnh Trung Nghĩa,* 11A8, THPT Đức Phổ ; **Phú Yên:** *Phùng Trọng Thực,* 11T2, THPT Lương Văn Chánh ; **Bình Định:** *Nguyễn Hoài Phương,* 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Tiến Việt,* 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Khắc Định, Trần Anh Hoàng,* 12T, PTNK, ĐHQG Tp. HCM; **Đồng Nai:** *Hà Đăng Khôi, Nguyễn Hải Phong,* 12T1, *Lê Phương,* 11T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh ; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc,* 11T, THPT thị xã Sa Đec ; **Bạc Liêu:** *Nguyễn Văn Tâm,* 12A1, THPT Giá Rai.

HỒ QUANG VINH

Bài L1/292. *Một chiếc thuyền khối lượng $m = 50kg$ chuyển động thẳng trên mặt nước với vận tốc đầu $v_o = 10m/s$, chịu lực cản của nước $\overrightarrow{F_C} = -\alpha\overrightarrow{V}$ với $\overrightarrow{V}$ là vận tốc của thuyền, α là hằng số dương.*

a) Biết quãng đường thuyền đi được khi vận tốc giảm từ v_o đến $v = 5m/s$ là 40m. Xác định α và thời gian thuyền đi được quãng đường đó.

b) Xác định quãng đường thuyền đi được đến khi dừng lại và thời gian đi quãng đường đó.

Lời giải. a) Chọn trục *Ox* hướng theo chiều chuyển động của thuyền. Áp dụng định luật II Niutơn ta có : $ma = m\dfrac{dv}{dt} = -\alpha v$ (1)

$$\Rightarrow dv = -\frac{\alpha}{m}dx \text{ (vì } v = \frac{dx}{dt})$$

$$\Rightarrow \int_{v_o}^{v} dv = \int_o^x -\frac{\alpha}{m}dx$$

$$\Rightarrow \alpha = m\frac{(v_o - v)}{x} = 50\frac{(10-5)}{40} = 6{,}25 \text{ (kg/s) (2)}$$

Ngoài ra, theo (1) : $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{\alpha}{m}dt$

$$\Rightarrow t = \frac{m}{\alpha}\ln\frac{v_o}{v} = 8\ln 2 \approx 5{,}5s \quad (3)$$

b) Theo (2) quãng đường lớn nhất mà thuyền đi được (ứng với $v = 0$) là $x_{\max} = \dfrac{m}{\alpha}v_o = 80$m.

Ngoài ra, từ (3) suy ra $v = v_o e^{-\frac{\alpha}{m}t}$. Do đó $v = 0$ ứng với $t = \infty$: sau khoảng thời gian rất lớn thuyền dừng lại. Trên thực tế thời gian đi là hữu hạn vì quy luật phụ thuộc vào vận tốc của lực cản không còn như trên.

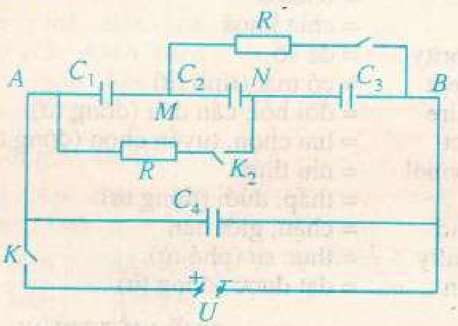
Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng :

Hải Dương: *Nguyễn Quốc Long,* 11 Lí, PTNK Nguyễn Trãi ; **Đồng Nai:** *Ma Nam,* 12 Lí 1, THPT Lương Thế Vinh ; **Thanh Hóa:** *Trịnh Minh Cảnh,* 12A, THPT Tống Duy Tân, Vĩnh Lộc ; **Thừa Thiên – Huế:** *Nguyễn Thanh Quang,* 12 Lí, Quốc học Huế ; **Bắc Ninh :** *Lê Xuân Thái,* 12 Lí, *Nguyễn Trọng Vượng,* 12 Lí, THPT NK Hàn Thuyên ; **Nam Định:** *Nguyễn Tuấn Anh,* 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong ;

Quảng Ngãi: *Bùi Minh Trí*, 11 Lí, THPT Lê Khuyết, *Đỗ Tấn Tài*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết ; **Phú Thọ:** *Lưu Quốc Tuấn*, 12B1, *Vũ Quốc Hiển*, 11B, *Nguyễn Kim Ngọc*, 11B1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Nghệ An:** *Hồ Quốc Huy*, 11A7, *Nguyễn Thị Bích Ngọc*, 12A3, *Trần Quang Vũ*, 11A7, *Thái Viết Cảnh*, 11A3, *Đặng Hồng Lê*, *Vũ Mạnh Linh*, *Phạm Cung Sơn*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thanh Phương*, *Chu Anh Dũng*, 11A3, *Đỗ Thành Trung*, *Nguyễn Duy Hưng*, *Nguyễn Ngọc Anh*, *Nguyễn Minh Kiên*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Xuân Đức*, *Lê Đức Đạt*, *Nguyễn văn Tí*, *Nguyễn Đức Việt*, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh.

MAI ANH

Bài L2/292. *Cho mạch điện như hình vẽ :* $C_1 = C_2 = C_3 = \frac{1}{2}C_4 = 45\mu F$; $U = 24V$; $R = 11\Omega$.



Ban đầu các khóa K, K_1, K_2 đều mở, các tụ chưa tích điện.

Đóng khóa K, các tụ tích điện hoàn toàn. Sau đó, mở khóa K và đóng đồng thời hai khóa K_1, K_2.

a) Tìm nhiệt lượng tổng cộng tỏa ra trên các điện trở cho đến khi trạng thái mạch điện đã ổn định.

b) Xác định cường độ dòng điện chạy qua các điện trở khi $U_{C_2} = \frac{1}{12}U$.

Lời giải. a) Khi K đóng, các tụ điện tích lũy năng lượng tổng cộng là :

$W_o = \frac{1}{2}2CU^2 + \frac{1}{2}\frac{CU^2}{3}v^3 = \frac{7}{6}CU^2$. Khi mở K và đóng đồng thời K_1, K_2 thì các tụ mắc song song. Áp dụng định luật bảo toàn điện tích, tính được hiệu điện thế U' trên các tụ điện :

$(3C + 2C)U' = \frac{CU}{3} + 2CU \Rightarrow U' = \frac{7U}{15}$. Lúc này năng lượng tổng cộng của các tụ điện là : $W = \frac{1}{2}5CU'^2 = \frac{49}{90}CU^2$. Nhiệt lượng tỏa ra trên các điện trở là $\Delta W = W_o - W = \frac{28}{45}CU^2 \approx 1{,}62.10^{-2}J$.

b) Mạch có tính đối xứng nên cường độ dòng điện qua các điện trở như nhau và luôn có $U_{C1} = U_{C3}$. Dòng điện qua các điện trở có cường độ I_1, I_2 ứng với khi $U_{MN} = \frac{1}{12}U$ và khi $U_{MN} = -\frac{1}{12}U$.

+ Tại thời điểm t_1 khi $U_{MN} = U_2 = \frac{1}{12}U$, áp dụng định luật bảo toàn điện tích tại nút A ta có:

$2U_1 + 2U_4 - U_2 = \frac{7}{3}U$ (1). Ngoài ra xét các mắt $AMNBA$ và $AMNA$ ta có : $2U_1 + U_2 - U_4 = 0(1)$ và $U_1 + U_2 - I_1R = 0$ (3).

Từ (1), (2), (3) tìm được $I_1 = \frac{11U}{24R} = 1$A.

+ Tương tự, tại thời điểm t_2 khi $U_{MN} = -\frac{1}{12}U$, ta có các phương trình : $2U'_1 + 2U'_4 + U'_2 = \frac{7}{3}U$ (4) ; $2U'_1 - U'_2 - U'_4 = 0$ (5) ; và $U'_1 - U'_2 - I_2R = 0$ (6)

Từ đó tìm được : $I_2 = \frac{23U}{72R} = \frac{23}{33} \approx 0{,}7$ (A)

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng :

Quảng Bình : *Dương Đức Anh*, 12 Lí, THPT NK Quảng Bình ; **Thanh Hóa :** *Lê Văn Dương*, 12A1, THPT Hậu Lộc I, Hậu Lộc ; **Hưng Yên:** *Đào Ngọc Thùy*, 12 Lí, THPT NK Hưng Yên ; **Nam Định :** *Nguyễn Văn Tuấn*, 11 Lí, THPT Lê Hồng Phong ; **Đồng Nai:** *Ma Nam*, 12 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh ; **Bắc Ninh:** *Lê Xuân Hùng*, *Lê Xuân Thái*, 12 Lí, THPT NK Hàn Thuyên ; **Hà Tĩnh :** *Lê Hữu Hà*, *Nguyễn Đức Việt*, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh ; **Vĩnh Phúc :** *Chu Anh Dũng*, 11A3, *Nguyễn Tuấn Linh*, *Nguyễn Ngọc Anh*, *Nguyễn Minh Kiên*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Yên Bái :** *Phan Thị Kim Hoa*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành ; **Nghệ An :** *Lê Công Trường*, K29 Lí ; *Nguyễn Quốc Việt*, *Nguyễn Thị Thu Hiền*, *Đặng Hồng Lê*, *Vũ Mạnh Linh*, *Phạm Cung Sơn*, *Lê Đình Nam*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh.

MAI ANH

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 50

Problem. A group of 11 scientists are working on a secret project, the materials of which are kept in a safe. The safe is provided with a number of different locks, and each scientist is given the keys to certain locks. The scientists can open the safe only when a majority of the group is present. How many locks are required and how many keys must each scientist have?

Solution. Given any 5 members of the group, there must be a lock for which none of them has the key. But each of the other 6 members must have this key since they form a majority of the group. Therefore the number of locks must be at least equal to the number of ways in which 5 people can be selected out of the 11 scientists, i.e., the binomial

$$\frac{11!}{5!9!} = 462.$$

Now let A be one of the scientists. We have just seen that given any set of 5 scientists selected among from the remaining 10, there is a lock which they can not open, and that A has a key to this lock. So A has at least a number of keys which equals the binomial

$$\frac{10!}{5!5!} = 252.$$

This lower bound can actually be attained by using 462 locks, one for each set of 5 scientists of the group. A majority of the group (with at least 6 scientists) can always open the safe since for any lock L there are only 5 scientists not having the keys to L.

Từ mới:

group = nhóm, tổ
scientist = nhà khoa học
secret = bí mật (tính từ)
project = chương trình, dự án
material = tài liệu, vật liệu
keep = giữ gìn (động từ)
safe = két sắt
provide = cung cấp (động từ)
lock = ổ khoá
key = chìa khoá
majority = đa số
present = có mặt (tính từ)
require = đòi hỏi, cần đến (động từ)
select = lựa chọn. tuyển chọn (động từ)
binomial = nhị thức
low = thấp, dưới (động từ)
bound = chặn, giới hạn
actually = thực sự (phó từ)
attain = đạt được (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

SAI LẦM Ở ĐÂU ? *(Tiếp trang 24)*

Bài toán đã "bất ổn" ngay từ giả thiết, mặc nhiên công nhận tồn tại $x \in R$ sao cho

$$\sqrt{x^2-4x+9} - \sqrt{x^2-4x+8} = 2 \quad (1)$$

Tuy nhiên chúng ta thấy rằng phương trình này vô nghiệm trên tập *R*.

Thật vậy, phương trình (1) tương đương với

$$\sqrt{x^2-4x+9} = 2 + \sqrt{x^2-4x+8}$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+9 = 4 + 4\sqrt{x^2-4x+8} + x^2 - 4x + 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+8} = -\frac{3}{4}.$$

Chính vì đã sử dụng một giả thiết không thể có nên dẫn đến các kết quả mâu thuẫn !

Các bạn có lời phân tích tốt hơn cả là :

Nguyễn Văn Hoan, 11 Toán, THPT Hàn Thuyên, **Bắc Ninh** ; *Nguyễn Phương Nhung*, 11A Toán, ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội** ; *Đặng Bảo Đức*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, **Nghệ An** ; *Trương Thị Thanh Phượng*, 11 Lý, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Lê Văn Phúc*, 11B3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc** ; *Hồ Khánh Nam*, 10 Hóa, THPT NK Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

KIHIVI

PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 CÓ 5 NGHIỆM ?

Trong cuốn sách "40 đề chọn lọc, Toán luyện thi lớp 9", XB năm 1996 có bài toán sau (đề số 22).

Giải phương trình

$$(x^2-6x-9)^2 = x.(x^2-4x-9) \quad (1)$$

Lời giải trong sách như sau :

Đặt $x^2-6x-9 = t$ (2), phương trình (1) có dạng $t^2 - x.(t+2x) = 0 \Leftrightarrow (t+x)(t-2x) = 0 \Rightarrow t = -x$; $t = 2x$

* Nếu $t = -x$, từ (1) có $(-x)^2 = x(x^2-4x-9)$

$\Leftrightarrow x(x^2-5x-9) = 0$ suy ra $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \dfrac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$.

* Nếu $t = 2x$, từ (1) có $4x^2 = x(x^2-4x-9)$

$\Leftrightarrow x(x^2-8x-9) = 0$ suy ra $x_1 = 0$; $x_4 = 9$; $x_5 = -1$

Tại sao phương trình bậc 4 có 5 nghiệm ? Các bạn có ý kiến gì ?

TRẦN XUÂN UY

(GV THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định)

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

JACOB STEINER – Nhà hình học lớn

Giacôp Stâyne (18/3/1796 - 1/4/1863) sinh ở bang Becnơ (Berne) nước Thụy Sĩ, con trai một chủ trang trại nên hồi nhỏ chỉ đi chăn cừu. Đến năm 14 tuổi anh mới được tới trường học ở Yvecđông (Yverdon) của nhà sư phạm nổi tiếng Petxtalôdi (Pestalozzi). Phương pháp giảng dạy theo hướng tìm tòi, gợi mở của Pestalozzi đã giúp Steiner bộc lộ những khả năng trực giác khác thường về hình học. Sau đó Steiner tiếp tục học và tốt nghiệp ở trường đại học Haiđenbơc (Heidelberg) (1821) nước Đức. Ông đi dạy tư ở Beclin (Berlin) thủ đô nước Đức trước khi được giảng dạy toán chính thức tại trường kĩ thuật Gewerbeakademie. Vào lúc đó (1826) nhà toán học, kĩ sư Ôguyxtơ Coren (Crelle A.) xuất bản một tạp chí về toán học thuần túy và ứng dụng. Steiner đã công bố nhiều công trình trên tạp chí này nên đã được các viện sĩ Viện Hàn lâm khoa học Berlin là Giacôbi, Coren, Humbôn (K.G. Jacobi, A.L. Crelle, A. Humboldt) tích cực ủng hộ để trở thành giáo sư trường đại học Berlin (từ 1835).

Các tác phẩm chính của Steiner là :

"Dựng hình bằng thước thẳng và một đường tròn không đổi" (1833).

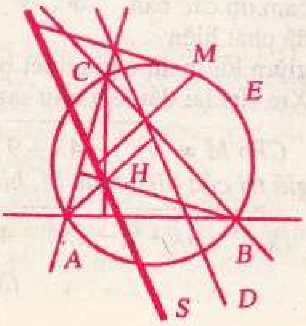
"Phát triển có hệ thống tính phụ thuộc lẫn nhau của các các hình dạng hình học" (1834).

"Về các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hình phẳng và mặt cầu" (1842).

Các công trình của ông liên quan đến hình học xạ ảnh. Khi nghiên cứu hình học Steiner không sử dụng phương pháp giải tích mà thiên về phương pháp tổng hợp, khảo sát phép biến đổi các tập hợp điểm.

Năm 1834, ông được bầu làm viện sĩ Viện hàn lâm khoa học Berlin. Về sau Viện HLKH Berlin đã lập giải thưởng Steiner.

Xin giới thiệu một số hình hoặc định lí mang tên ông.

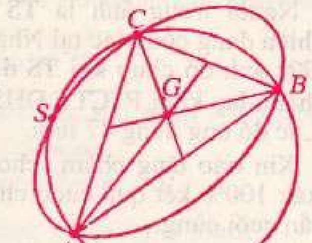


• *Đường thẳng Steiner*

Đường thẳng *Steiner* của một điểm *M* trên đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* là ảnh của đường thẳng *Simsơn* của *M* qua một phép vị tự tâm *M* và tỉ số là 2. Đường thẳng *Steiner* đi qua trực tâm *H* của tam giác *ABC* và đi qua điểm đối xứng của *M* qua các cạnh của tam giác.

• *Elip Steiner*

Elip *Steiner* của một tam giác *ABC* là elip ngoại tiếp với tam giác và có tâm trùng với trọng tâm của tam giác *ABC*.

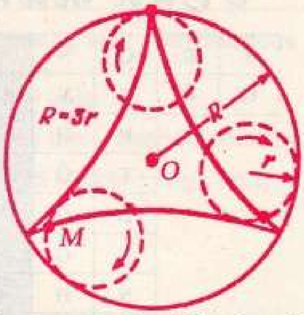


• *Điểm Steiner*

Điểm *Steiner* của một tam giác là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp với tam giác và elip *Steiner* của tam giác ấy (trong hình vẽ trên thì các điểm *Steiner* là *S, A, B, C*).

• *Đường cong Hipôxiclôit Steiner*

Đó là quỹ tích của những điểm *M* cố định của đường tròn bán kính *r* khi đường tròn này lăn không trượt mà luôn luôn tiếp xúc trong với đường tròn cố định tâm *O* bán kính $R = 3r$. Đường cong này tiếp xúc với tất cả các đường thẳng *Simsơn* của một tam giác nội tiếp đường tròn bán kính *R*.



• *Định lí Steiner*

Định lí này cho phép xác định đường elip như là tập hợp các giao điểm của một chùm đường thẳng với ảnh của một chùm đường thẳng khác qua phép biến đổi xạ ảnh (phép này giữ nguyên tính thẳng hàng của 3 điểm).

• *Định lí Pôngxolê – Stâyne* (Poncelet – Steiner)

Định lí khẳng định rằng không thể tìm được tâm của một đường tròn chỉ bằng thước thẳng qua một số hữu hạn các thao tác.

(Xem tiếp bìa 3)

Kết quả

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ

Người trong ảnh là TS Nguyễn Huy Đoan (hiện đang công tác tại Nhà xuất bản Giáo dục). Bức ảnh đó chụp khi TS dự lễ kỉ niệm 30 năm thành lập khối PTCTT ĐHSP – ĐHQG Hà Nội. Lúc đó ông đúng 47 tuổi.

Xin trao tặng phẩm cho hai bạn đoán chính xác 100% kết quả cuộc chơi đầu thiên niên kỉ lần cuối cùng.

1) *Trần Kiều Hưng*, 11 Toán, THPT chuyên Hàn Thuyên, **Bắc Ninh**

2) *Lương Tuấn Anh*, 90B Trần Hưng Đạo, Tp. **Nam Định**.

CLB

Kết quả :

Ô CHỮ MỪNG XUÂN

T	R	Ò	N	X	O	A	Y
G	Ó	C	V	U	Ô	N	G
		P	H	Â	N	S	Ố
		T	Ổ	N	G		
		L	Ớ	N	H	Ơ	N
		N	G	H	I	Ệ	M
		N	H	Â	N	T	Ử
		S	Ố	M	Ũ		
Đ	I	Ể	M	N	G	Ọ	N
T	R	Ọ	N	G	T	Â	M
			T	O	A	Đ	Ộ

Không ngờ "Ô chữ mừng xuân" của CLB lại được đông đảo các bạn tham gia đến như vậy, có hơn 1000 bài (trên khắp miền đất nước) gửi về TS. Tất cả các bạn đã đoán đúng cụm từ hàng dọc là "Xuân Nhâm Ngọ". Ở cụm từ hàng ngang thứ nhất đa số độc giả đoán ra là các hình "tròn xoay". Một số người điền vào hàng ngang này từ Elipxôit (nó cũng là một khối có trục đối xứng đấy !), cũng khá độc đáo phải không các bạn !

Giới thiệu với các bạn một cách điền ô chữ như hình bên, đồng thời xin trao tặng phẩm cho 5 bạn đã gửi bài sớm về TS :

Lê Đức Việt Thắng, 72/28, Bình Thới, Phường 14, Quận 11, **Tp. Hồ Chí Minh** ; *Trần Diệu Linh*, 6C, THCS Nguyễn Trãi, **Sơn La** ; *Đinh Xuân Hải*, 10A1, Khối PTCTT, ĐH Vinh, **Nghệ An** ; *Trần Minh Trí*, 10I, THPT Bắc Đông Quan, Đông Hưng, **Thái Bình** ; *Nguyễn Mạnh Cường*, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc.**

NGỌC HIỂN

Cuộc chơi mới 2002 : AI BIẾT NHIỀU HƠN ?

CÁC KÍ HIỆU PHÉP TÍNH XUẤT HIỆN LÚC NÀO ?

Lại một bảng thống kê chưa chính xác, các bạn hãy điều chỉnh lại cho đúng nhé ! Bạn hãy giới thiệu cho mọi người : năm xuất hiện của các kí hiệu phép tính, tên cùng quê hương của các tác giả lần đầu tiên đã sử dụng kí hiệu đó.

Kí hiệu	*Năm xuất hiện*	*Người đề xuất*	*Quê hương*
+, –	1557	Ôtrit W. (William Oughtred)	Anh
×	1633	Uytman J. (Jan Widman)	Anh
:	1631	Pen J. (John Pell)	Sec
÷	1637	Ricôđơ R. (Robert Recorde)	Pháp
=	1489	Đềcác R. (René Descartes)	Anh
x^2, x^3	1630	Giônxơn (Johnson)	?

NGỌC HIỂN

Kết quả :

CÓ SAO $M = \frac{1}{2}$?

Trước hết xin cảm ơn các bạn đã phát hiện giùm lỗi in ấn ở giả thiết bài toán. Xin sửa lại đầu bài như sau :

Cho $M = \sqrt{x^2 - 4x + 9} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$. *Tính giá trị của biểu thức M, biết rằng*

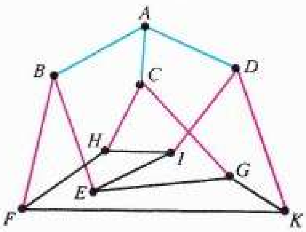
$$\sqrt{x^2 - 4x + 9} - \sqrt{x^2 - 4x + 8} = 2.$$

(Xem tiếp trang 22)

Kết quả :

THIẾT LẬP ĐƯỜNG BAY

Ta cần thiết lập các đường bay trực tiếp giữa 10 thành phố $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$. Giả sử thành phố A có 3 đường bay trực tiếp đến B, C, D (kí hiệu là $A-B$, $A-C$, $A-D$). Giữa A và 6 thành phố còn lại E, F, G, H, I, K phải có đường bay gián tiếp (nghĩa là giữa A và 6 thành phố đó phải có đường bay trực tiếp đến thành phố thứ ba), giả sử có $B–E$, $B–F$, $C–G$, $C–H$, $D–I$, $D–K$. Chỉ còn xét các đường bay trực tiếp giữa 6 thành phố nối trên. Giữa E và C, giữa E và D phải có đường bay gián tiếp, giả sử có $E–G$, $E–I$. Lập luận tương tự có $F–H$, $F–K$ và cuối cùng có $G–K$, $I–H$.



Hình bên biểu thị các đường bay phải tìm. Nếu thay đổi tên các thành phố ở hình bên ta có các hệ thống đường bay khác.

Các bạn có lời giải đúng và giải thích rõ ràng được nhận tặng phẩm :

Lương Tiến Dũng, 12A, THPT NK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang** ; *Nguyễn Thị Tiếp*, K26E Khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội 2, Xuân Hòa, **Vĩnh Phúc** ; *Chu Văn Phú*, 11E, THPT Quỳnh Lưu I, **Nghệ An** ; *Ngô Thanh Nguyên*, 11 Toán 1, THPT Lương Văn Chánh, **Phú Yên** ; *Bạch Giang Châu*, 11A9, THPT Tx. Bảo Lộc, **Lâm Đồng**.

HOÀNG NGUYỄN

ĐÓN XUÂN
GIẢI "PHƯƠNG TRÌNH CHỮ"

Bạn hãy thay các chữ cái giống nhau bởi các chữ số giống nhau, các chữ cái khác nhau bởi các chữ số khác nhau, để được các đẳng thức đúng :

a) TOAN – HOC = 2002 – TUOI + TRE

b) TET – NHAM + NGO + 2002 – TOAN + HOC + TRE = $-x$

biết x là một số chẵn trăm nào đó.

Mời các bạn hãy tham gia gỡ rối hai "phương trình chữ" này để đón mừng xuân mới nhé !

NGUYỄN THỊ ANH
*(Dân phố 10, Phú Thủy, Phan Thiết, **Bình Thuận**)*

JACOB STEINER... *(Tiếp trang 23)*

Cũng có lúc Steiner nhìn toán học theo kiểu trò chơi, chẳng hạn như ở bài toán sau đây.

Người ta tìm cách nối liền n thành phố bằng những đường đi thẳng và hai thành phố bất kì phải được nối với nhau. Mạng đường bộ được tạo thành như vậy phải ngắn nhất.

Nếu các thành phố là các đỉnh của một tam giác đều hoặc của một hình vuông thì theo ý bạn, mạng nào là tốt nhất ?

Bài toán mở Steiner : là bài toán nói về một câu hỏi mà câu trả lời cần phải khám phá ra. Nếu lời phát biểu bao gồm câu trả lời thì đó là định lí. Nếu người ta để cho bạn tưởng tượng ra câu trả lời thì đó là bài toán mở. Đây là dạng toán mà các nhà hình học Hy Lạp rất ưa thích. Chính ở trường Pestalozzi, Steiner đã làm quen với phương pháp luận này. Sau đây là một ví dụ.

Cho hai đường tròn đầu tiên đồng tâm. Dựng n đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn trên và đôi một tiếp xúc với nhau. Dãy n đường tròn này có thể tự đóng kín không, tức là đường tròn đầu tiên có tiếp xúc với đường tròn cuối cùng không ? Câu trả lời là : có thể được, nhưng phải chứng minh dựa vào việc vận dụng những tính chất tuyệt vời của phép biến hình nghịch đảo. Dãy n đường tròn cùng bán kính đó có tâm là các đỉnh của một hình đa giác đều n cạnh. Để dãy này đóng kín, phải có điều kiện $\sin(\pi/n) = (a-b) / (a+b)$ trong đó a và b chính là các bán kính của các đường tròn đồng tâm có được bằng phép biến hình nghịch đảo nói trên.

Nhà hình học Jacob Steiner

NGUYỄN VĂN THIÊM
(Theo *La Recherche* tháng 7 và 8 năm 2000)

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ

Ban Giám hiệu nhà trường. Từ trái sang phải:
Hiệu phó Nguyễn Xuân Lập
Hiệu trưởng Vũ Văn Viết
Hiệu phó Hoàng Văn Cường

Từ các lớp toán đặc biệt thuộc trường THPT Hùng Vương, tỉnh Vĩnh Phú trước đây, đến năm 1982 hệ chuyên toán được tách ra thành trường THPT chuyên Hùng Vương tỉnh Vĩnh Phú, của tỉnh Phú Thọ ngày nay. Trong 19 năm qua nhà trường đã liên tục phát triển cả về quy mô cũng như chất lượng giáo dục toàn diện, đặc biệt là từ khi trường chuyển địa điểm về thành phố Việt Trì. Từ chỗ chỉ có 6 lớp chuyên Văn, chuyên Toán với 133 học sinh, đến nay trường đã có 44 lớp của 6 hệ chuyên : Toán, Lý, Hóa, Văn, Tiếng Anh, Tiếng Pháp với gần 2000 học sinh. Số học sinh giỏi đạt giải quốc gia ngày càng tăng. Riêng năm học 2000-2001 đạt 61 giải trên 80 em dự thi. Tính đến năm học này nhà trường đã có 3469 giải cấp tỉnh, 312 giải quốc gia, 2 huy chương Hóa Quốc tế và 2 huy chương Toán Châu Á - Thái Bình Dương. Kể từ khi thành lập, trường liên tục đạt danh hiệu Trường tiên tiến xuất sắc, hai lần nhận cờ thi đua của Chính phủ và hai lần được tặng Huân chương Lao động.

Cùng với sự trưởng thành của nhà trường, Tổ Toán cũng không ngừng phát triển cả về số lượng và chất lượng. Từ năm 1994 chỉ có 7 giáo viên, tới nay đã có 17 người, trong đó có 4 giáo viên có trình độ thạc sĩ, nhiều giáo viên có khả năng giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi đạt hiệu quả cao và liên tục đạt danh hiệu giáo viên giỏi cấp tỉnh. Chất lượng đào tạo ngày càng được khẳng định. Từ năm 1995 trở lại đây số học sinh đạt giải quốc gia môn toán hàng năm từ 6-8 em trên tổng số 8 em dự thi, nhiều học sinh được tham gia thi vòng 2 chọn đội tuyển đi thi Quốc tế. Đến nay đã có 38 học sinh đạt giải quốc gia môn Toán và 2 học sinh đạt huy chương Olympic Toán Châu Á - Thái Bình Dương. Tổ Toán đã 2 lần được nhận bằng khen của Bộ GD&ĐT và của Thủ tướng Chính phủ.

Trong những năm qua tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ* luôn là người bạn thân thiết, là môi trường rèn luyện và thể hiện trí tuệ của thầy và trò trường THPT chuyên Hùng Vương. Nhiều thầy đã trở thành các cộng tác viên tích cực của báo như các thầy : Trần Văn Vàng, Đào Trường Giang, Hoàng Văn Cường. Phong trào giải bài trên báo đã trở thành một hoạt động ngoại khóa bổ ích thu hút được nhiều em tham gia và nhiều em đã đạt giải cao trong cuộc thi giải bài trên báo hàng năm như : Phan Quang Cường, Bùi Minh Mẫn, Trần Minh Phương, Đào Mạnh Thắng, Hoàng Ngọc Minh... Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ* đã trao giải đặc biệt cho Hoàng Ngọc Minh học sinh lớp 11A1 cùng với 3 em đạt giải nhất, nhì, ba của trường trong cuộc thi giải Toán Lý năm học 1999-2000. Bùi Minh Mẫn được nhận giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 1999.

Với sự trưởng thành khi bước vào tuổi 20 đầy sức trẻ, với một nền tảng truyền thống bằng những thành tích đã được khẳng định, nhà trường đang ngày càng trẻ hóa đội ngũ với lực lượng những người thầy tâm huyết, say mê và trí tuệ. Hi vọng rằng thành tích của thầy và trò trường THPT chuyên Hùng Vương sẽ có thêm những đỉnh cao mới.

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT98M2
Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2002
Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng