ĐỖ SANH - NGUYỄN VĂN VƯỢNG

CƠ HỌC ỨNG DỤNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

GS. TSKH. ĐỖ SANH - PGS. TS. NGUYỄN VĂN VƯỢNG

CƠ HỌC ỨNG DỤNG

(Tái bản lần thứ ba)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

04-2006/CXB/76-1860/GD

Mã số : 7B572T6 - DAI

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình CƠ HỌC ỨNG DỤNG nhằm trang bị các kiến thức cơ học nền tảng trong hệ thống kiến thức cung cấp cho các kỹ sư, đặc biệt cho các kỹ sư hoạt động trong các lĩnh vực khác nhau của công nghiệp. Đó là các nguyên lý hoạt động, các cơ sở tính toán máy và công trình.

Giáo trình được biên soạn theo ý tưởng xây dựng các kiến thức cơ học theo một cấu trúc thống nhất và phương pháp nhất quán nhằm phục vụ có hiệu quả cao nhất trong việc tạo tiềm năng khoa học cho người kỹ sư qua việc nghiên cứu hai mô hình rất quan trọng trong cơ học về lí thuyết ứng dụng : vật thể rắn và vật thể biến dạng.

Giáo trình được viết cho môn học với thời lượng từ 7 đến 9 học trình (tương đương với 105 ÷ 135 tiết) để giảng dạy cho sinh viên các ngành phi cơ khí, các kỹ sư thực hành và tại chức.

Giáo trình do GS. TSKH. Đỗ Sanh làm chủ biên và biên soạn từ chương 1 đến chương 13, PGS. TS. Nguyễn Văn Vượng biên soạn từ chương 14 đến chương 18.

Các tác giả cám ơn các thành viên bộ môn Cơ học ứng dụng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội đã góp nhiều ý kiến quý báu cho việc xây dựng giáo trình này.

Các tác giả mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp của các bạn đồng nghiệp, của các độc giả để quyển sách được hoàn thiện hơn trong lần xuất bản sau.

Các ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ : Ban Kỹ thuật đại học và Hướng nghiệp dạy nghề - Nhà Xuất bản Giáo dục 81 Trần Hưng Đạo Hà Nội.

Các tác giả xin chân thành cảm ơn

CÁC TÁC GIẢ

CƠ HỌC VẬT RẮN

Phần một

ĐỘNG HỌC

Chương 1

CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM

Động học chất điểm có nhiệm vụ

– Thiết lập phương trình chuyển động của chất điểm tại từng thời điểm đó là tập hợp các hệ thức xác lập mối quan hệ giữa các thông số vị trí của chất điểm (các thông số định vị) và thời gian, nhờ chúng có thể xác định vị trí của chất điểm tại từng thời điểm.

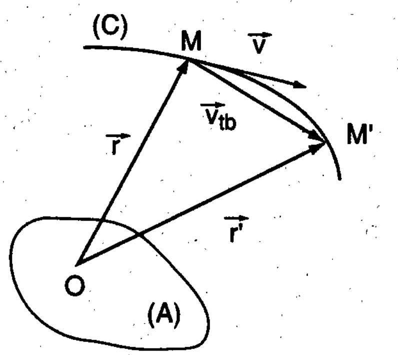
– Tìm các đặc trưng động học của chất điểm : vận tốc và gia tốc. Vận tốc là đại lượng cho biết phương, chiều và tốc độ của chất điểm, còn gia tốc cho biết sự thay đổi về phương, chiều và tốc độ của chất điểm.

Chuyển động của chất điểm là sự thay đổi vị trí của nó so với một vật chuẩn được chọn trước gọi là hệ quy chiếu. Tập hợp các vị trí của điểm trong không gian quy chiếu đã chọn được gọi là quỹ đạo của chất điểm trong hệ quy chiếu đó. Tùy thuộc quỹ đạo của chất điểm là đường thẳng hay đường cong mà chuyển động của nó được gọi là chuyển động thẳng hoặc chuyển động cong.

Để khảo sát động học của điểm có thể sử dụng nhiều phương pháp khác nhau. Sau đây sẽ trình bày một số phương pháp thường hay được dùng.

1.1. PHƯƠNG PHÁP VÉC TƠ

1.1.1. Phương trình chuyển động : Xét chất điểm M chuyển động đối với hệ quy chiếu (A) theo quỹ đạo C (hình 1–1).



Hình 1–1

a) Thông số định vị (hình 1–1) **:** Lấy điểm O gắn liền với hệ quy chiếu (A). Khi đó $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, xác định vị trí của chất điểm M đối với hệ quy chiếu (A), được gọi là véc tơ định vị của chất điểm M.

b) Phương trình chuyển động : Chất điểm M chuyển động nên $\vec{r}$ thay đổi theo thời gian :

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1\text{–}1)$$

được gọi là phương trình chuyển động của chất điểm M dạng véc tơ.

1.1.2. Vận tốc : Giả sử tại thời điểm t và thời điểm lân cận $t' = t + \Delta t$, vị trí của chất điểm M được xác định bằng các véc tơ định vị $\vec{r}$ và $\vec{r}'$ tương ứng. Qua khoảng thời gian Δt véc tơ định vị của chất điểm biến đổi một lượng $\overrightarrow{MM'} = \Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ (hình 1–1).

Đại lượng $\vec{v}_{tb} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ được gọi là vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian $\Delta t = t' - t$.

Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t được xác định như sau :

$$\vec{v} = \lim_{M' \to M} \vec{v}_{tb} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (1\text{–}2)$$

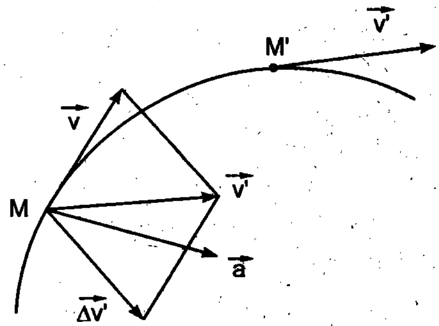
Như vậy vận tốc của chất điểm bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của véc tơ định vị của chất điểm. Véc tơ vận tốc của chất điểm hướng theo tiếp tuyến của quỹ đạo tại điểm M về phía chuyển động. Đơn vị của vận tốc là mét /giây, kí hiệu *m/s*.

1.1.3. Gia tốc : Giả sử tại thời điểm t và thời điểm lân cận $t' = t + \Delta t$, chất điểm M có vận tốc tương ứng $\vec{v}$ và $\vec{v}'$. Qua khoảng thời gian $\Delta t = t' - t$ vận tốc của chất điểm biến đổi một lượng $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ (hình 1–2).

Đại lượng $\vec{a}_{tb} = \dfrac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ được gọi là gia tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian $\Delta t = t' - t$.

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm t được xác định như sau :

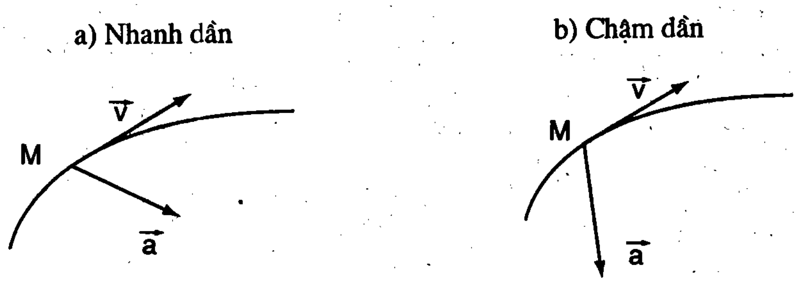
$$\vec{a} = \lim_{M' \to M} \vec{a}_{tb} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \qquad (1\text{–}3)$$



Hình 1–2

Như vậy gia tốc của chất điểm M bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vận tốc và bằng đạo hàm bậc hai theo thời gian của véc tơ định vị. Véc tơ gia tốc hướng về bề lõm của quỹ đạo. Đơn vị của gia tốc là mét /giây^2, kí hiệu là m/s^2.

1.1.4. Dấu hiệu về nhanh dần và chậm dần của chuyển động



Hình 1–3

Chuyển động của chất điểm được gọi là nhanh dần (chậm dần) nếu $|\vec{v}|$, hoặc tương đương với nó, $\frac{1}{2}v^2$ hay $\frac{1}{2}(\vec{v})^2$ tăng (giảm) theo thời gian.

– Chất điểm chuyển động nhanh dần nếu (hình 1–3) :

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\vec{v}^2) = \vec{v}\vec{a} > 0 \qquad (1\text{–}4a)$$

– Chất điểm chuyển động chậm dần nếu (hình 1–3) :

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\vec{v}^2) = \vec{v}\vec{a} < 0 \qquad (1\text{–}4b)$$

1.2. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC

1.2.1. Phương trình chuyển động

a) Thông số định vị : Gắn vào hệ quy chiếu (A) một hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Oxyz (hình 1–4).

Các thông số định vị của chất điểm là 3 tọa độ x, y, z của chất điểm.

b) Phương trình chuyển động : Khi chất điểm M chuyển động, các tọa độ x, y, z của nó biến đổi liên tục theo thời gian :

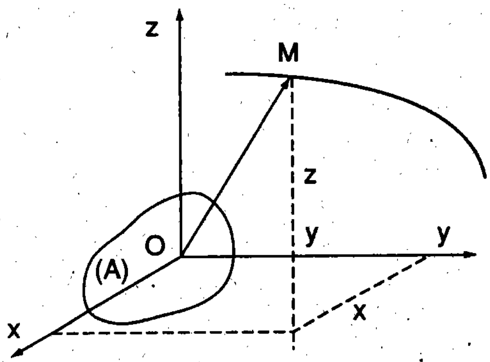
$$x = x(t);\ \ y = y(t);\ \ z = z(t) \qquad (1\text{–}5)$$

Các phương trình (1–5) được gọi là phương trình chuyển động của chất điểm M dạng tọa độ Đề các.

Chú ý rằng :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1\text{–}6)$$

trong đó $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị trên các trục tọa độ Đề các.



Hình 1–4

1.2.2. Vận tốc : Khi thay (1–6) vào (1–2) chú ý rằng :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0 \qquad (1\text{–}7)$$

ta có :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (1\text{–}8)$$

Khi chiếu hai vế của (1–8) lên các trục tọa độ ta nhận được :

$$v_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x};\quad v_y = \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y};\quad v_z = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z} \qquad (1\text{–}9)$$

Dựa vào (1–9) ta tìm được giá trị và phương chiều của véc tơ vận tốc :

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \qquad (1\text{–}10)$$

$$\cos(Ox, \vec{v}) = \frac{v_x}{v}; \quad \cos(Oy, \vec{v}) = \frac{v_y}{v}; \quad \cos(Oz, \vec{v}) = \frac{v_z}{v}$$

1.2.3. Gia tốc : Khi thay (1–8) vào (1–3) và chú ý đến (1–7) ta nhận được :

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad (1\text{–}11)$$

Khi chiếu đẳng thức (1–11) lên các trục tọa độ, ta nhận được:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \equiv \ddot{y}; \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \equiv \ddot{z} \qquad (1\text{–}12)$$

Giá trị và phương chiều của gia tốc được xác định theo các công thức sau:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \qquad (1\text{–}13)$$

$$\cos(Ox, \vec{a}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(Oy, \vec{a}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(Oz, \vec{a}) = \frac{a_z}{a}$$

1.2.4. Dấu hiệu nhanh dần, chậm dần của chuyển động : Dựa vào dấu hiệu (1–4) chuyển động là nhanh dần khi :

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} > 0 \qquad (1\text{–}14a)$$

và chuyển động là chậm dần khi:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} < 0 \qquad (1\text{–}14b)$$

Ví dụ 1–1 : Cho cơ cấu tay quay con trượt A = AB = l. Tay quay OA quay đều quanh trục O theo luật $\varphi = \omega_0 t$, ở đó ω_0 = const. Lập phương trình chuyển động của trung điểm I của thanh truyền AB (hình 1–5).

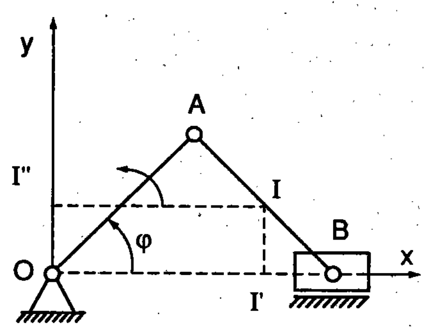
Bài giải : Chọn hệ trục tọa độ Đề các như trên hình (1–5). Trung điểm I của thanh truyền AB có tọa độ x = OI' ; y = OI''.

Từ hình vẽ ta tính được :

$$x = l\cos\omega_0 t + \frac{1}{2}l\cos\omega_0 t = \frac{3}{2}l\cos\omega_0 t$$

$$y = \frac{1}{2}l\sin\omega_0 t$$

Đó là phương trình chuyển động của trung điểm I của thanh truyền AB.



Hình 1-5

Gọi v_x, v_y lần lượt là hình chiếu của vận tốc điểm I lên các trục Ox và Oy. Theo công thức (1–9) ta tính được:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{3}{2}\omega_0 l \sin\omega_0 t;\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\omega_0 l \cos\omega_0 t$$

Giá trị và phương chiều của vận tốc điểm I được xác định như sau:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{l\omega_0}{2}\sqrt{9\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t}$$

$$\cos(Ox, \vec{v}) = \frac{v_x}{v} = -\frac{3\sin\omega_0 t}{\sqrt{9\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t}}$$

$$\cos(Oy, \vec{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\cos\omega_0 t}{\sqrt{9\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t}}$$

1.3. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN

1.3.1. Phương trình chuyển động

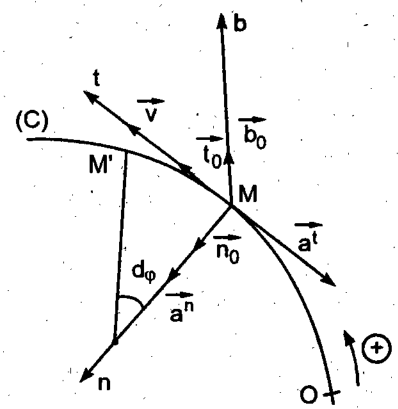
a) Thông số định vị : Xét chuyển động của chất điểm M dọc theo quỹ đạo (C). Chọn điểm O cố định trên quỹ đạo làm gốc và một chiều dương cho trước trên quỹ đạo (hình 1–6). Vị trí của chất điểm trên quỹ đạo được xác định nhờ thông số $\bar{s} = \overset{\frown}{OM}$ được gọi là thông số định vị của chất điểm.

b) Phương trình chuyển động : Khi chất điểm M chuyển động dọc theo quỹ đạo (C) thì $\bar{s}$ biến đổi liên tục theo thời gian.

Vì vậy

$$\bar{s} = \bar{s}(t) \qquad (1\text{–}15)$$

được gọi là phương trình chuyển động của chất điểm dọc theo quỹ đạo hoặc gọi là luật chuyển động của chất điểm trên quỹ đạo.



Hình 1-6

1.3.2. Vận tốc : Giả sử tại thời điểm t và thời điểm lân cận t' chất điểm có vị trí tương ứng là M và M'. Xét chuyển động của chất điểm từ M đến M' ($\overset{\frown}{MM'} = d\bar{s}$, $\overrightarrow{MM'} = d\vec{r}$)

Từ công thức (1–2) ta có:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{dt} = \frac{d\bar{s}}{dt}\vec{t}_o \qquad (1\text{–}16)$$

trong đó : $\vec{t}_o$ là véc tơ đơn vị trên phương tiếp tuyến có chiều thuận với chiều dương đã chọn trên quỹ đạo.

Gọi $\overline{v}_t$ là hình chiếu của véc tơ vận tốc trên phương tiếp tuyến của quỹ đạo. Ta có:

$$\overline{v}_t = \frac{d\overline{s}}{dt} \qquad (1\text{–}17)$$

1.3.3. Gia tốc : Từ (1–3) và (1–16) ta nhận được:

$$\vec{a} = \frac{d^2\overline{s}}{dt^2}\vec{t}_o + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}_o \qquad (1\text{–}18)$$

Để có biểu thức này ta đã sử dụng công thức :

$$\frac{d\vec{t}_o}{d\overline{s}} = \frac{\vec{n}_o}{\rho}$$

trong đó : $\vec{n}_o$ là véc tơ đơn vị trên phương pháp tuyến hướng về bề lõm của đường cong quỹ đạo, ρ bán kính cong của quỹ đạo tại điểm M (khi quỹ đạo là đường tròn thì $\rho = R$) .

Từ (1–18) ta nhận được các hình chiếu của gia tốc trên phương tiếp tuyến và pháp tuyến tương ứng là $\overline{a}^t$ và $\overline{a}^n$:

$$\overline{a}^t = \frac{d^2\overline{s}}{dt^2}; \qquad \overline{a}^n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a = \sqrt{(\overline{a}^t)^2 + (\overline{a}^n)^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2\overline{s}}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}\ ; \qquad tg\alpha = \frac{\left|\overline{a}^t\right|}{\overline{a}^n} \qquad (1\text{–}19)$$

Nhận xét : Chọn véc tơ đơn vị $\vec{b}_o$ vuông góc với mặt phẳng chứa các véc tơ $\vec{t}_o$ và $\vec{n}_o$ (mặt phẳng mật tiếp), sao cho $(\vec{t}_o, \vec{n}_o, \vec{b}_o)$ tạo thành một tam diện thuận. Hệ trục tọa độ có gốc tại M và ba trục hướng theo ba véc tơ $\vec{t}_o, \vec{n}_o, \vec{b}_o$ được gọi là hệ trục tọa độ tự nhiên. Trục Mt được gọi là trục tiếp, trục Mn – trục pháp tuyến chính, trục Mb – trục trùng pháp tuyến (hình 1–6).

- Véc tơ vận tốc hướng dọc theo trục tiếp Mt.
- Véc tơ gia tốc nằm trong mặt phẳng mật tiếp (mặt phẳng chứa trục tiếp tuyến và trục pháp tuyến chính), luôn luôn hướng về bề lõm của đường cong quỹ đạo. Do đó hình chiếu của gia tốc pháp trên trục pháp tuyến chính luôn luôn dương.

Trong chuyển động thẳng gia tốc pháp tuyến bằng 0 vì $\rho = \infty$.

1.4. MỘT SỐ CHUYỂN ĐỘNG THƯỜNG GẶP

1.4.1. Chuyển động đều là chuyển động mà vận tốc của chất điểm có giá trị không đổi :

$$v = const;\ \overline{a}^t = \frac{dv}{dt} = 0;\ \overline{a}^n = \frac{v^2}{\rho};\ \vec{a} = \vec{a}^n \qquad (1\text{–}20)$$

Trong chuyển động thẳng đều: $a^t = 0$; $a^n = 0$ nên $a = 0$.

Trong chuyển động cong đều: $\vec{a}^t = 0$; $a^n = \frac{v^2}{\rho}$; $\vec{a} = \vec{a}^n$

1.4.2. Chuyển động biến đổi đều là chuyển động mà gia tốc tiếp của chất điểm có giá trị không đổi. Nếu chọn chiều dương quỹ đạo thuận chiều chuyển động của chất điểm thì:

$$v = \pm at + v_0;\ s = \pm\frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0 \qquad (1\text{–}21)$$

lấy dấu "+" ứng với chuyển động nhanh dần đều và lấy dấu "–" ứng với chuyển động chậm dần đều.

Trong các công thức trên v_0 và s_0 lần lượt là vận tốc và tọa độ cong của chất điểm tại thời điểm đầu.

Ví dụ 1–2 : Xác định đoạn đường rơi thẳng đứng của một chất điểm có vận tốc ban đầu bằng không và khi chạm vào nền có vận tốc v = 49,05 m/s. Cho biết chất điểm rơi với gia tốc trọng trường a = 9,81 m/s^2.

Bài giải : Sử dụng công thức (1–21) trong đó lấy $v_0 = 0$. Chất điểm rơi nhanh dần nên :

$$v = at;\ s = \frac{1}{2}at^2$$

Sau khi khử t giữa hai biểu thức trên, ta có:

$$s = \frac{v^2}{2a}$$

Gọi h là đoạn đường rơi của chất điểm từ thời điểm ban đầu đến khi nó chạm vào nền (lúc đó v = 49,05 m/s), ta có :

$$h = \frac{(49{,}05)^2}{2\times 9{,}81} = 122{,}6m$$

Ví dụ 1–3 : Một chất điểm chuyển động trên một đoạn cung của đường tròn có bán kính R =1000m với vận tốc ban đầu v_0 = 54km/h. Sau khi đi được một đoạn đường có chiều dài 500m, vận tốc của chất điểm giảm xuống còn 36km/h. Cho biết chất điểm chuyển động chậm dần đều.

Tính gia tốc của chất điểm tại lúc xuất phát và lúc vận tốc có giá trị 36km/h.

Bài giải : Chọn chiều dương quỹ đạo thuận chiều chuyển động của chất điểm và chọn gốc tọa độ trùng với vị trí xuất phát của chất điểm ($s_0 = 0$).

Vì chất điểm chuyển động chậm dần đều nên theo (1–21) ta có :

$$v = -a^t t + v_0;\ s = -\frac{1}{2}a^t t^2 + v_0 t$$

trong đó : a^t là gia tốc tiếp tuyến của chất điểm.

Khử t từ hai phương trình trên, ta có :

$$a^t = \frac{(v_o - v)(v_o + v)}{2s}$$

Khi thay các giá trị: v_0 =15 *m/s* (ứng với 54*km/h*), v = 10*m/s* (ứng với 36 *km/h*), s = 500*m*, ta nhận được:

$$a^t = \frac{5\times 25}{1000} = 0{,}125\ m/s^2$$

Vì chuyển động là chậm dần đều nên gia tốc tiếp có giá trị như nhau tại mọi thời điểm ($a^t = 0{,}125\ m/s^2$), còn gia tốc pháp được tính theo công thức (1–19) :

– Gia tốc pháp tại thời điểm xuất phát :

$$a_o^n = \frac{v_o^2}{R} = \frac{15^2}{1000} = 0{,}225\ m/s^2$$

– Gia tốc pháp tại thời điểm vận tốc có giá trị 36 *km/h*.

$$a^n = \frac{v^2}{R} = \frac{10^2}{1000} = 0{,}1\ m/s^2$$

Vậy gia tốc toàn phần tại hai thời điểm này là :

$$a_o = \sqrt{(a_o^t)^2 + (a_o^n)^2} = \sqrt{0{,}125^2 + 0{,}225^2} = 0{,}258\ m/s^2$$

$$a = \sqrt{(a^t)^2 + (a^n)^2} = \sqrt{0{,}125^2 + 0{,}1^2} = 0{,}16\ m/s^2$$

Ví dụ 1–4 : Cho biết chất điểm M chuyển động theo quy luật

$$x = R\cos\omega t;\ y = R\sin\omega t;\ z = p\omega t$$

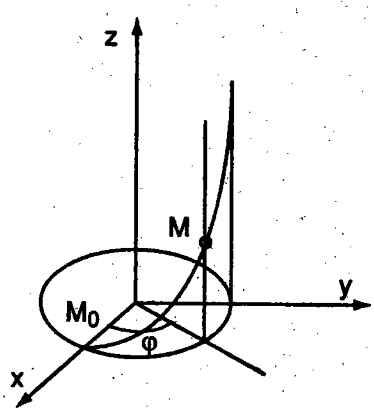
trong đó : R, ω, p là những hằng số.

Tìm vận tốc, gia tốc, của chất điểm M và bán kính cong quỹ đạo.

Bài giải : Đặt φ = ωt, phương trình chuyển động của chất điểm M có thể được viết như sau :

$$x = R\cos\varphi;\ y = R\sin\varphi;\ z = p\varphi$$

Quỹ đạo của chất điểm M là một đường đinh ốc, nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục đối xứng là trục Oz, bán kính bằng R. Khi góc φ thay đổi một lượng 2π thì chất điểm M di chuyển dọc trục z được một đoạn không đổi h = 2πp. Đoạn h được gọi là bước của đinh ốc, còn p là thông số của đinh ốc (hình 1–7).



Hình 1–7

Áp dụng phương pháp toạđộ Để các ta có :

$$v_x = \dot{x} = -R\omega\sin\omega t;$$

$$v_y = \dot{y} = R\omega\cos\omega t;$$

$$v_z = \dot{z} = p\omega$$

$$v = \sqrt{(-R\omega\sin\omega t)^2 + (R\omega\cos\omega t)^2 + (p\omega)^2} = \omega\sqrt{R^2 + p^2}$$

$$\cos(Ox, \vec{v}) = \frac{v_x}{v} = \frac{-R\omega\sin\omega t}{\omega\sqrt{R^2+p^2}} = -\frac{R}{\sqrt{R^2+p^2}}\sin\omega t$$

$$\cos(Oy, \vec{v}) = \frac{v_y}{v} = \frac{R\omega\cos\omega t}{\omega\sqrt{R^2+p^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+p^2}}\cos\omega t$$

$$\cos(Oz, \vec{v}) = \frac{v_z}{v} = \frac{p\omega}{\omega\sqrt{R^2+p^2}} = \frac{p}{\sqrt{R^2+p^2}}$$

Từ kết quả $v_z = p\omega = \text{const}$, ta kết luận rằng hình chiếu của chất điểm trên trục z chuyển động đều và vì $\cos(Oz, \vec{v}) = p/\sqrt{R^2+p^2} = \text{const}$ nên đường đinh ốc có độ nghiêng không đổi đối với trục z (đối với mặt phẳng xOy), còn chất điểm M chuyển động đều dọc đường đinh ốc (vì v = const). Khi tính gia tốc của chất điểm M ta nhận được :

$$a_x = \ddot{x} = -R\omega^2\cos\omega t;\ a_y = \ddot{y} = -R\omega^2\sin\omega t;\ a_z = \ddot{z} = 0$$

$$a = \sqrt{(-R\omega^2\cos\omega t)^2 + (-R\omega^2\sin\omega t)^2} = R\omega^2$$

$$\cos(Ox, \vec{a}) = \frac{a_x}{a} = \frac{-R\omega^2\cos\omega t}{R\omega^2} = -\cos\omega t$$

$$\cos(Oy, \vec{a}) = \frac{a_y}{a} = \frac{-R\omega^2\sin\omega t}{R\omega^2} = -\sin\omega t$$

$$\cos(Oz, \vec{a}) = \frac{a_z}{a} = 0$$

Do chất điểm M chuyển động đều nên $a^t = 0$ và $a^n = a$. Vậy chuyển động đã cho là một chuyển động cong đều, vận tốc làm với phương đứng Oz một góc không đổi, còn gia tốc nằm trong mặt phẳng ngang (vuông góc với trục Oz) và cắt trục Oz.

Bán kính cong của quỹ đạo là :

$$\rho = \frac{v^2}{a} = \frac{R^2+p^2}{R} = \text{const}$$

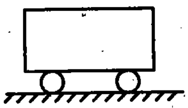
Đường đinh ốc có bán kính cong không đổi và do đó có độ cong k ($k = 1/\rho$) cũng không đổi. Đó là một đường cong đều.

Chương 2

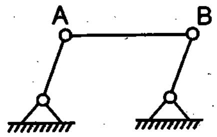
CÁC CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN

2.1. CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN CỦA VẬT RẮN

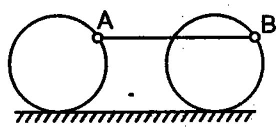
2.1.1. Định nghĩa : Chuyển động của vật rắn được gọi là chuyển động tịnh tiến khi một đoạn thẳng bất kỳ thuộc vật giữ phương không đổi trong quá trình chuyển động.



Hình 2–1



Hình 2–2



Hình 2–3

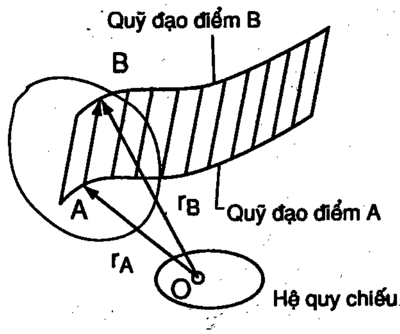
Ví dụ, chuyển động của thùng xe trên đoạn đường thẳng (hình 2–1), chuyển động của thanh truyền AB trong cơ cấu hình bình hành (hình 2–2), chuyển động của tay biên AB của tầu hoả (hình 2–3).

2.1.2. Định lí : Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, các điểm thuộc vật vẽ nên những quỹ đạo đồng nhất (tức có thể đặt trùng khít lên nhau), tại mỗi thời điểm các điểm thuộc vật có vận tốc bằng nhau và gia tốc bằng nhau.

Chứng minh : Lấy hai điểm A và B thuộc vật. Các véc tơ định vị của chúng liên hệ với nhau bằng hệ thức sau (hình 2–4) :

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \qquad (2–1)$$

trong đó $\overrightarrow{AB}$ có môđun không đổi (do tính chất của vật rắn tuyệt đối) và có phương chiều không đổi (do vật chuyển động tịnh tiến).



Hình 2–4

Vậy $\overline{AB}$ là véc tơ hằng trong quá trình vật chuyển động. Do đó vị trí của điểm B có được bằng cách trượt điểm A trên giá chứa véc tơ $\overline{AB}$ với véc tơ hằng $\overline{AB}$. Trong phép trượt trên quỹ đạo của điểm A sẽ đến trùng với quỹ đạo điểm B, tức là quỹ đạo của điểm A có thể đặt trùng khít lên quỹ đạo của điểm B (hình 2–4).

Do $\overrightarrow{AB}$ là véc tơ hằng nên khi đạo hàm theo thời gian hai vế của đẳng thức (2–1), ta có :

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \quad \text{hay} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A \qquad (2–2)$$

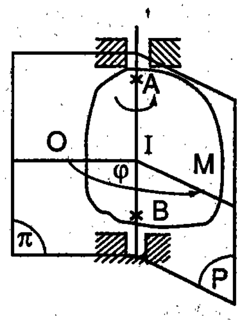
$$\frac{d^2\vec{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} \quad \text{hay} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A \qquad (2–3)$$

Vậy việc khảo sát chuyển động vật tịnh tiến được đưa về khảo sát chuyển động của một điểm bất kỳ thuộc vật. Nói khác đi, về mặt động học vật chuyển động tịnh tiến được thay thế bằng một chất điểm, phương pháp khảo sát chuyển động của nó đã được trình bày trong chương 1.

2.2. CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH

2.2.1. Định nghĩa : Chuyển động của vật rắn có hai điểm luôn luôn cố định được gọi là chuyển động quay quanh một trục cố định. Đường thẳng đi qua hai điểm cố định được gọi là trục quay (hình 2–5).

Khi một vật quay quanh một trục cố định, mỗi điểm thuộc vật sẽ chuyển động trên một đường tròn có tâm nằm trên trục quay, có bán kính bằng khoảng cách từ điểm đó đến trục quay được gọi là bán kính quay của điểm.



Hình 2-5

2.2.2. Khảo sát chuyển động của vật

a) Phương trình chuyển động

– *Thông số định vị :* Chọn trước một chiều quay dương (thường là ngược chiều quay kim đồng hồ). Qua trục quay dựng hai mặt phẳng : mặt phẳng π gắn liền với hệ quy chiếu, được gọi là mặt phẳng quy chiếu và mặt phẳng P gắn liền với vật quay. Vị trí của vật được xác định nhờ vị trí của mặt phẳng động P đối với mặt phẳng quy chiếu cố định π. Thông số định vị của vật có thể chọn là góc nhị diện $\overline{\varphi}$ giữa hai mặt phẳng (hình 2–5).

– *Phương trình chuyển động :* Khi vật chuyển động, góc $\overline{\varphi}$ thay đổi theo thời gian, vì vậy :

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t) \qquad (2\text{–}4)$$

được gọi là phương trình chuyển động của vật quay. Góc $\overline{\varphi}$ được tính bằng *radian*. Nếu tại thời điểm đầu mặt phẳng P trùng với mặt phẳng quy chiếu π thì $\overline{\varphi}$ là góc quay của vật. Góc quay của vật cũng có thể tính bằng số vòng quay N, $N = \varphi/2\pi$.

b) Vận tốc góc của vật, kí hiệu $\overline{\omega}$:

$$\overline{\omega} = \frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \dot{\overline{\varphi}} \qquad (2\text{–}5)$$

Như vậy vận tốc góc bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của góc định vị $\overline{\varphi}$ của vật.

Vận tốc góc là đại lượng đại số. Dấu của $\overline{\omega}$ cho biết chiều quay của vật : dấu dương ứng với chiều quay dương (ngược chiều quay của kim đồng hồ) và dấu âm khi vật quay theo chiều âm (thuận chiều quay của kim đồng hồ). Giá trị $|\overline{\omega}| = \omega$ cho biết độ nhanh của chuyển động quay. Giá trị của vận tốc góc càng lớn thì vật quay càng nhanh. Đơn vị của vận tốc góc là *radian/giây*, kí hiệu *rad/s* hoặc *1/s* .

Trong kỹ thuật người ta hay dùng đơn vị *vòng/phút*. Nếu gọi vận tốc góc là ω (*rad/s*) và tương ứng với nó, n (vòng/phút) thì: $\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0{,}1n$ *rad/s*.

Ví dụ : Một động cơ có tốc độ 1000 *vòng/phút* thì :

$$\omega = \frac{\pi 1000}{30} \approx 100 \ rad/s$$

c) Gia tốc góc, kí hiệu $\overline{\varepsilon}$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{d^2\overline{\varphi}}{dt^2} = \ddot{\overline{\varphi}} \qquad (2\text{–}6)$$

Như vậy gia tốc góc bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vận tốc góc và bằng đạo hàm bậc hai theo thời gian của góc định vị $\overline{\varphi}$.

Đơn vị của gia tốc góc là *radian/(giây)^2*, kí hiệu *rad/s^2* hoặc *1/s^2*.

Gia tốc góc đặc trưng cho sự biến thiên của vận tốc góc theo thời gian. Khi $\overline{\varepsilon} \equiv 0$ thì $\overline{\omega} = \text{const}$, tức là vật quay với vận tốc góc không đổi, được gọi là vật quay đều (góc quay trong một đơn vị thời gian tại bất kỳ thời điểm nào cũng bằng nhau và do đó vật sẽ quay được những góc bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau).

d) Dấu hiệu quay nhanh, chậm của vật : Khi $|\overline{\omega}| = \omega$ tăng (giảm) theo thời gian vật được gọi là quay nhanh (chậm) dần. Độ tăng giảm theo thời gian của đại lượng $|\overline{\omega}|$ được thay thế tương đương bằng sự tăng giảm theo thời gian của đại lượng $\frac{1}{2}\omega^2$ hay $\frac{1}{2}\overline{\omega}^2$. Từ đó ta có tiêu chuẩn sau :

+ Vật quay nhanh dần khi :

$$\overline{\omega}\overline{\varepsilon} > 0 \qquad (2\text{–}7)$$

+ Vật quay chậm dần khi :

$$\overline{\omega}\overline{\varepsilon} < 0 \qquad (2\text{–}8)$$

e) Một số dạng chuyển động quay đặc biệt :

– Chuyển động quay đều. Khi vận tốc góc có giá trị không đổi

$$\omega = \text{const}; \ \varepsilon \equiv 0; \ \overline{\varphi} = \pm\omega_0 t + \overline{\varphi}_0 \qquad (2\text{–}9)$$

lấy dấu "+" khi vật quay ngược chiều quay kim đồng hồ, lấy dấu "–" trong trường hợp ngược lại, $\overline{\varphi}_0$ là góc định vị ban đầu của vật.

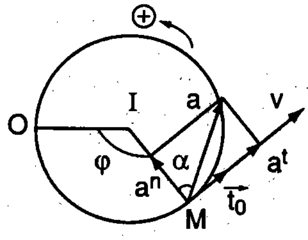
– Chuyển động quay biến đổi đều : Khi gia tốc góc có giá trị không đổi $|\overline{\varepsilon}| = \varepsilon_0 = \text{const}$. Nếu chọn chiều dương của chuyển động quay thuận chiều quay của vật thì :

$$\overline{\omega} = \pm\varepsilon_0 t + \omega_0; \overline{\varphi} = \pm\frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2 + \omega_0 t + \overline{\varphi}_0 \qquad (2\text{–}10)$$

lấy dấu "+" ứng với chuyển động quay nhanh dần đều, lấy dấu "–" trong trường hợp ngược lại.

2.2.3. Khảo sát chuyển động của các điểm thuộc vật : Xét một điểm M thuộc vật, nằm cách trục quay Δ một đoạn IM = R được gọi là bán kính quay của điểm M. Khi vật quay, điểm M sẽ chuyển động trên đường tròn tâm I, là giao điểm giữa trục quay và mặt phẳng vẽ qua M vuông góc với trục quay, với bán kính IM.

a) Phương trình chuyển động của điểm : Chọn giao điểm của mặt phẳng quy chiếu π với quỹ đạo tròn của điểm làm gốc quy chiếu trên quỹ đạo (hình 2–5). Các thông số định vị của điểm M là góc $\overline{\varphi}$ và bán kính IM = R, nó được gọi là bán kính quay của điểm M. Khi chọn chiều dương cho trước đối với quỹ đạo tròn phù hợp với chiều dương của chuyển động quay thì thông số định vị cũng có thể chọn là cung $\overset{\frown}{OM} = \overline{s} = R\overline{\varphi}$.



Hình 2-6

Vậy phương trình chuyển động của điểm M là (hình 2–6):

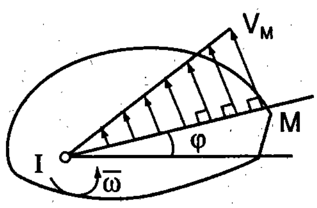
$$\overline{s} = R\overline{\varphi}(t) \qquad (2\text{–}11)$$

b) Vận tốc của điểm : Theo công thức (1–16) ta nhận được: ($\dot{\overline{\varphi}} = \overline{\omega}$):

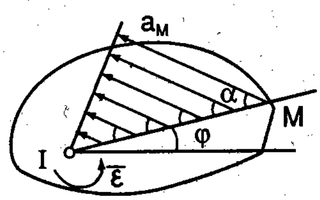
$$\vec{v} = R\overline{\omega}\vec{t}_o \qquad (2\text{–}12)$$

Vận tốc của điểm M có phương vuông góc với bán kính quay, có chiều thuận chiều quay, có giá trị bằng tích giữa vận tốc góc và bán kính quay (hình 2–6).

Các điểm nằm trên trục quay có vận tốc bằng không, các điểm nằm càng xa trục quay (tức là có bán kính quay càng lớn) thì có giá trị vận tốc càng lớn. Như vậy các điểm thuộc vật rắn quay quanh một trục cố định và nằm trong cùng một mặt phẳng vuông góc với trục quay có vận tốc được phân bố theo luật tam giác vuông (hình 2–7).



Hình 2–7



Hình 2–8

c) Gia tốc các điểm : Sử dụng các công thức (1–18), (1–19) trong đó chú ý (2–10), (2–11) và $\dot{\overline{\varphi}} = \overline{\omega}$; $\ddot{\overline{\varphi}} = \overline{\varepsilon}$ ta có :

Gia tốc tiếp $\overline{a}^t$ có phương vuông góc với bán kính quay, có chiều thuận hoặc ngược chiều quay của vật tuỳ thuộc vật quay nhanh dần hoặc chậm dần và có giá trị bằng tích số của gia tốc góc với bán kính quay (hình 2–6):

$$\overline{a}^t = R\overline{\varepsilon} = r\ddot{\overline{\varphi}} \qquad (2\text{–}13)$$

Chú ý rằng chiều của $\overline{a}^t$ thuận chiều với gia tốc góc $\overline{\varepsilon}$.

Gia tốc pháp $\overline{a}^n$ hướng từ điểm M vào tâm I, có giá trị bằng tích số của bán kính quay và bình phương vận tốc góc (hình 2–6) :

$$\vec{a}^n = R\omega^2 \quad (2-14)$$

Gia tốc toàn phần có giá trị bằng (hình 2–6) :

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (2-15)$$

và nghiêng với bán kính quay MI một góc α :

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (2-16)$$

Như vậy, các điểm nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay của vật rắn quay quanh một trục cố định có gia tốc được phân bố theo quy luật tam giác thường đồng dạng với tỉ số đồng dạng bằng $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ (hình 2–8).

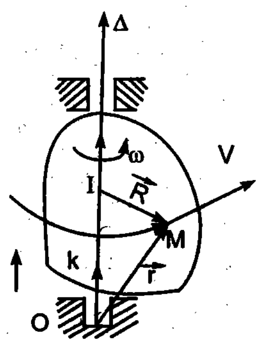
2.2.4. Biểu diễn véc tơ một chuyển động quay

a) Véc tơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ và véc tơ gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$

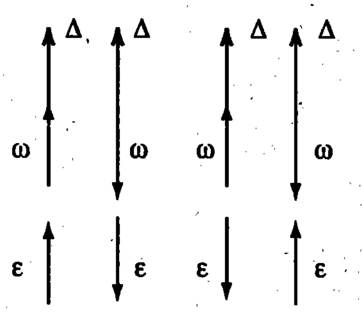
– Véc tơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ có phương dọc trục quay, có chiều khi nhìn từ mút xuống thấy vật quay ngược chiều kim đồng hồ, có môđun bằng giá trị của vận tốc góc (hình 2–9).

Vậy : $$\vec{\omega} = \bar{\omega}\vec{k} \quad (2-17)$$

trong đó : $\vec{k}$ là véc tơ đơn vị trên trục quay sao cho nhìn từ mút xuống thì chiều dương chọn trước của vật quay là chiều ngược chiều kim đồng hồ.



Hình 2–9



Hình 2–10

– Véc tơ gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}\vec{k}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt}\vec{k} = \bar{\varepsilon}\vec{k} \quad (2-18)$$

Vậy véc tơ gia tốc góc có phương dọc trục quay, cùng chiều hoặc ngược chiều với véc tơ vận tốc góc tuỳ thuộc vào vật quay nhanh dần hay chậm dần (hình 2–10).

b) Biểu thức véc tơ của vận tốc điểm và gia tốc điểm : Chọn một điểm O cố định trên trục quay. Véc tơ định vị của động điểm M là véc tơ $\overline{OM} = \vec{r}$. Ta có các công thức sau đây :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{2-19}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}^t &= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r};\ \vec{a}^n = \vec{\omega} \wedge \vec{v} \\ \vec{a} &= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} \end{aligned}\right\} \tag{2-20}$$

Để chứng minh chỉ cần chú ý rằng (hình 2-9) :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OI} + \vec{R}$$

trong đó $\overrightarrow{OI}$ đồng phương với $\vec{\omega}$ và là véc tơ hằng khi vật quay, còn $\vec{R}$ là véc tơ có môđun hằng.

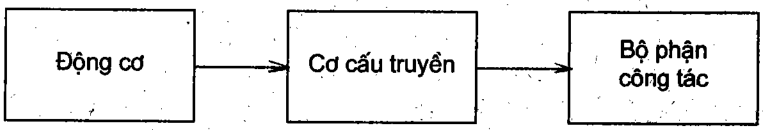
Vậy : $\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{OI} + \vec{R}) = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$.

Biểu thức $\vec{\omega} \wedge \vec{R}$ chính là vận tốc điểm M. Như vậy công thức (2–19) được chứng minh, nó có tên là công thức Ơle.

Công thức (2–20) được suy ra trực tiếp từ (2–19) khi chú ý đến công thức (2–18).

2.3. VÀI DẠNG TRUYỀN CHUYỂN ĐỘNG QUAY ĐƠN GIẢN

Một máy hoặc một tổ hợp máy thường gồm các bộ phận : động cơ, cơ cấu truyền động, bộ phận làm việc (hình 2–11).

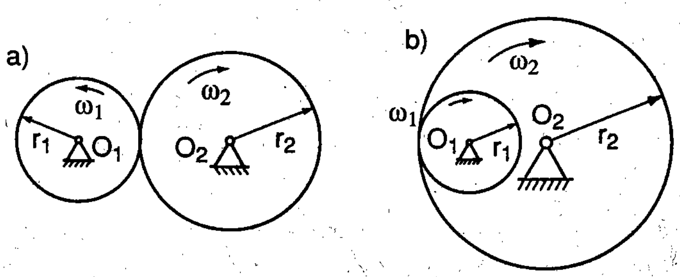


Hình 2–11

Cơ cấu truyền động có nhiệm vụ biến đổi một dạng chuyển động này sang một dạng chuyển động khác, ví dụ biến đổi một chuyển động quay quanh một trục cố định này sang chuyển động quay quanh một trục cố định khác hoặc biến đổi chuyển động tịnh tiến này thành chuyển động tịnh tiến khác hoặc biến đổi chuyển động quay sang chuyển động tịnh tiến và ngược lại.

Dưới đây là một vài loại truyền động đơn giản.

2.3.1. Truyền động bằng cơ cấu bánh răng, đai, xích : Để truyền chuyển động giữa hai trục cố định song song với nhau người ta dùng cơ cấu bánh răng (hình 2–12), đai truyền hoặc xích (hình 2–13).



Hình 2–12

Tỉ số truyền động bánh răng kí hiệu i_{12} :

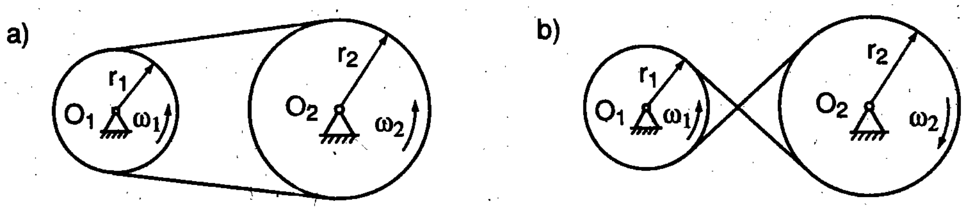
$$i_{12} = \frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_2} = \pm\frac{r_2}{r_1} = \pm\frac{z_2}{z_1} \qquad (2\text{–}21)$$

lấy dấu "+" đối với trường hợp ăn khớp trong (hình 2–12b) và lấy dấu "–" trong trường hợp ăn khớp ngoài (hình 2–12a), r_1 và r_2 lần lượt là bán kính của các bánh răng 1 và 2, còn z_1 và z_2 lần lượt là số răng tương ứng của chúng.

Tỉ số truyền động đai và xích:

$$i_{12} = \frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_2} = \pm\frac{r_2}{r_1} \qquad (2\text{–}22)$$

Lấy dấu "+" trong trường hợp đai được bắt thẳng (hình 2–13a) và lấy dấu "–" trong trường hợp bắt chéo (hình 2–13b).

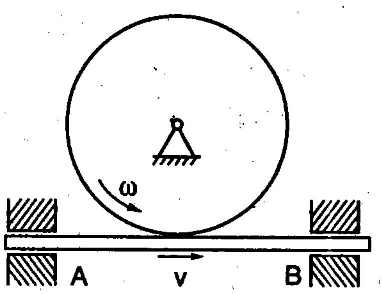


Hình 2–13

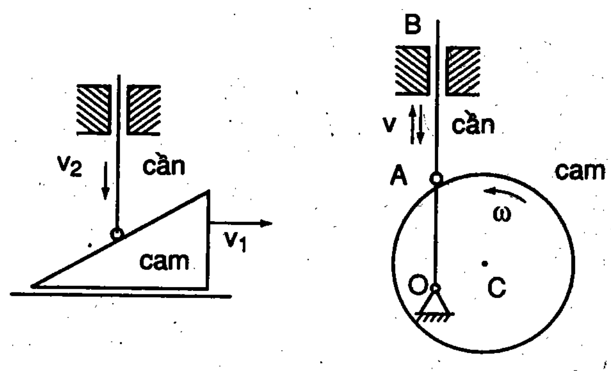
2.3.2. Truyền động bằng bánh răng – thanh răng : Để truyền động giữa một vật quay và vật tịnh tiến người ta sử dụng cơ cấu bánh răng – thanh răng, hoặc cơ cấu bánh – thanh ma sát (hình 2–14).

Tỉ số truyền động:

$$i = \frac{v}{\omega} = R \qquad (2\text{–}23)$$



Hình 2–14



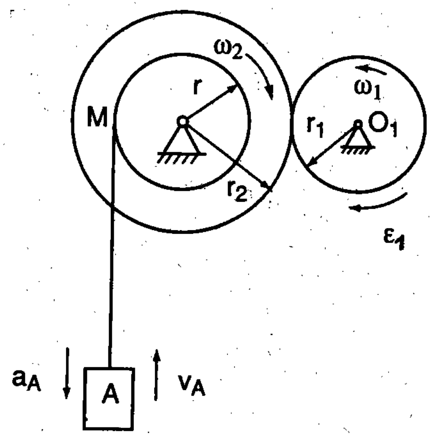
Hình 2–15

2.3.3. Truyền động bằng cơ cấu cam : Để truyền chuyển động tịnh tiến thành chuyển động tịnh tiến, chuyển động quay thành chuyển động tịnh tiến có thể sử dụng cơ cấu cam (hình 2–15).

Ví dụ 2–2 : Cho cơ cấu truyền động như hình 2–16. Trục I có bán kính r_1 chuyển động quay chậm dần quanh trục cố định O_1 với vận tốc góc ω_1 và gia tốc góc ε_1. Trục II là trục hai bậc có các bán kính r_2 và r. Tìm vận tốc và gia tốc của vật A.

Bài giải : Gọi $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2$ lần lượt là vận tốc góc của các bánh răng 1 và 2. Ta có:

$$i_{12} = \frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_2} = -\frac{r_2}{r_1}$$



Hình 2–16

Do đó: $\overline{\omega}_2 = -\frac{r_1}{r_2}\overline{\omega}_1$ và $\overline{\varepsilon}_2 = -\frac{r_1}{r_2}\overline{\varepsilon}_1$

Vậy trục II cũng quay chậm dần vì :

$$\overline{\omega}_2\overline{\varepsilon}_2 = (\frac{r_1}{r_2})^2\overline{\omega}_1\overline{\varepsilon}_1 < 0$$

Vận tốc và gia tốc vật A sẽ bằng:

$$v_A = v_M = r\omega_2 = \frac{rr_1}{r_2}\omega_1;$$

$$a_A = a_M^t = r\varepsilon_2 = \frac{rr_1}{r_2}\varepsilon_1$$

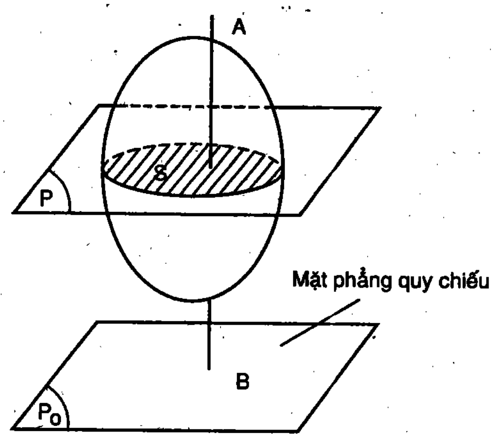
Vì trục II quay chậm dần nên vật A được kéo lên chậm dần.

Chương 3

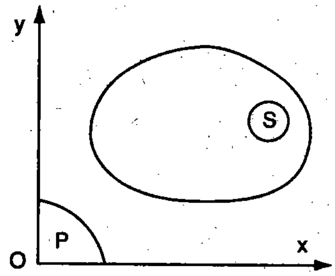
CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

3.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ MÔ HÌNH

3.1.1. Định nghĩa : Chuyển động của vật rắn được gọi là chuyển động song phẳng khi mỗi điểm thuộc vật luôn luôn di chuyển trong một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cố định được chọn trước gọi là mặt phẳng quy chiếu (hình 3–1).



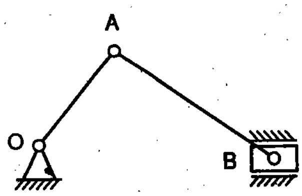
Hình 3–1



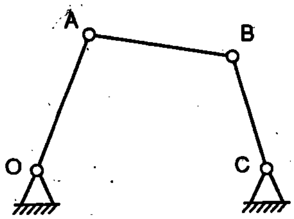
Hình 3–2

3.1.2. Mô hình của vật chuyển động song phẳng : Bài toán khảo sát chuyển động song phẳng của vật rắn trong không gian được đưa về bài toán khảo sát chuyển động của một tiết diện phẳng của nó trong mặt phẳng chứa tiết diện phẳng, song song với mặt phẳng quy chiếu (hình 3–2).

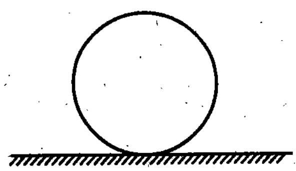
Trong các cơ cấu phẳng, các khâu của nó đều chuyển động song phẳng. Ví dụ: cơ cấu tay quay thanh truyền (hình 3–3), cơ cấu bốn khâu bản lề (hình 3–4), một bánh xe lăn trên một đường cong phẳng trong mặt phẳng chứa đường cong (hình 3–5). Sau đây chuyển động của một tiết diện phẳng ta gọi là chuyển động của hình phẳng trong mặt phẳng chứa nó.



Hình 3–3



Hình 3–4

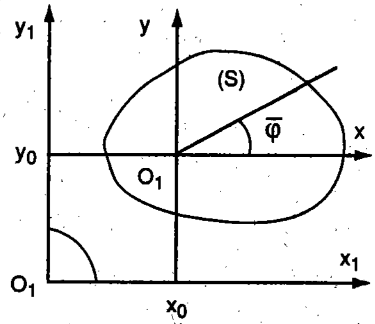


Hình 3–5

3.2. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA HÌNH PHẲNG

3.2.1. Phương trình chuyển động của hình phẳng S

a) Thông số định vị : Xét một hình phẳng S chuyển động trong mặt phẳng P. Trong mặt phẳng P chọn hệ trục cố định $O_1x_1y_1$, lấy một điểm O thuộc hình phẳng S và gắn vào đó một hệ trục Oxy có trục Ox luôn song song với trục O_1x_1; trục Oy luôn song song với trục O_1y_1. Như vậy, hệ trục Oxy chuyển động tịnh tiến đối với hệ trục cố định $O_1x_1y_1$. Chuyển động đó được xác định hoàn toàn qua chuyển động của điểm O được gọi là cực. Vị trí của hình phẳng S được xác định khi xác định được vị trí của nó đối với hệ trục Oxy (qua góc định vị $\overline{\varphi}$) và vị trí của hệ trục động $O_1x_1y_1$ (qua các thông số định vị của cực O, ví dụ : x_o và y_o).



Hình 3-6

Vậy các thông số định vị của hình phẳng đối với hệ trục cố định $O_1x_1y_1$ sẽ là x_o , y_o và $\overline{\varphi}$ (hình 3–6).

b) Phương trình chuyển động : Khi hình phẳng S chuyển động trong mặt phẳng P chứa nó thì x_o , y_o và $\overline{\varphi}$ thay đổi liên tục theo thời gian. Các đại lượng :

$$x_0 = x_o(t);\;\; y_o = y_o(t);\;\; \overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t) \qquad (3\text{–}1)$$

được gọi là phương trình chuyển động của hình phẳng S.

Chú ý là hai phương trình đầu mô tả chuyển động tịnh tiến của hệ trục động Oxy, còn phương trình cuối mô tả chuyển động quay của hình phẳng đối với hệ trục động Oxy quanh trục qua O và vuông góc với hình phẳng. Bằng cách như vậy chuyển động của hình phẳng S được phân tích thành hai chuyển động : chuyển động tịnh tiến cùng hệ trục động Oxy và chuyển động quay đối với hệ trục động Oxy.

3.2.2. Các yếu tố động học của chuyển động hình phẳng : Chuyển động của hệ trục động Oxy là chuyển động tịnh tiến cùng với cực O nên trạng thái động học của nó được xác định bằng vận tốc và gia tốc của cực O ($\vec{v}_o$; $\vec{a}_o$). Chuyển động quay của hình phẳng đối với hệ trục động Oxy được xác định bằng vận tốc góc $\overline{\omega} = \dot{\overline{\varphi}}$ và gia tốc góc $\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = \ddot{\overline{\varphi}}$.

Các đại lượng :

$$\vec{v}_o\,;\; \vec{a}_o\,;\; \overline{\omega}\,;\; \overline{\varepsilon} \qquad (3\text{–}2)$$

được gọi là các yếu tố động học của hình phẳng chuyển động song phẳng.

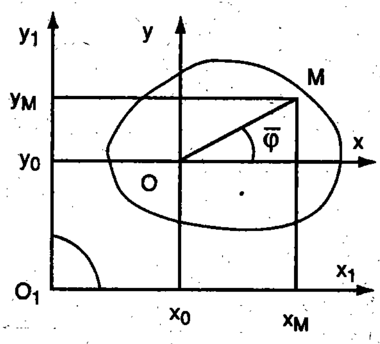
Các đại lượng $\vec{v}_o$, $\vec{a}_o$ phụ thuộc vào việc chọn cực, còn các đại lượng $\overline{\omega}$; $\overline{\varepsilon}$ không phụ thuộc vào việc chọn cực.

3.3. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CÁC ĐIỂM THUỘC HÌNH PHẲNG

3.3.1. Phương trình chuyển động của điểm

a) Thông số định vị : Xét một điểm M thuộc hình phẳng S nằm cách cực O một khoảng OM = R. Các thông số định vị của điểm M có thể được chọn là tọa độ x_M và y_M (hình 3–7).

$$\begin{cases} x_M = x_o + R\cos\overline{\varphi} \\ y_M = y_o + R\sin\overline{\varphi} \end{cases}$$



Hình 3–7

b) Phương trình chuyển động : Vì x_o, y_o và $\overline{\varphi}$ thay đổi liên tục theo thời gian, nên :

$$\begin{cases} x_M(t) = x_o(t) + R\cos\overline{\varphi}(t) \\ y_M(t) = y_o(t) + R\sin\overline{\varphi}(t) \end{cases} \tag{3–3}$$

được gọi là phương trình chuyển động của điểm M.

3.3.2. Vận tốc các điểm

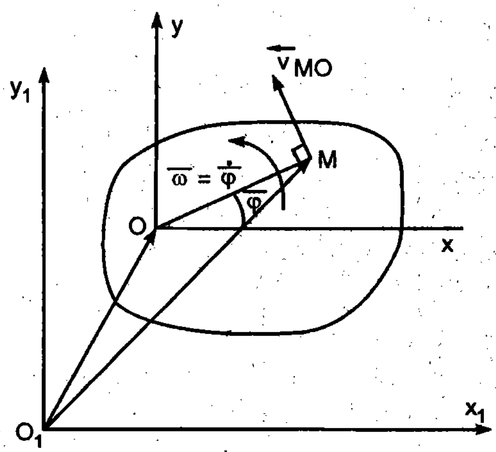
a) Biểu thức giải tích của vận tốc : Vận tốc của điểm M được xác định qua hình chiếu của nó trên hệ trục cố định $O_1x_1y_1$ (sử dụng công thức 1–9, chương 1) :

$$\vec{v}_M \begin{cases} v_{Mx} = \dfrac{dx_M}{dt} = \dot{x}_o - R\sin\overline{\varphi}\dot{\overline{\varphi}} = \dot{x}_o - R\overline{\omega}\sin\overline{\varphi} \\ v_{My} = \dfrac{dy_M}{dt} = \dot{y}_o + R\cos\overline{\varphi}\dot{\overline{\varphi}} = \dot{y}_o + R\overline{\omega}\cos\overline{\varphi} \end{cases} \tag{3–4}$$

b) Quan hệ vận tốc giữa hai điểm thuộc hình phẳng : Vì vận tốc của điểm cực O, tức $\vec{v}_o$ có các hình chiếu trên hệ trục cố định là $\dot{x}_o$ và $\dot{y}_o$, còn vận tốc của điểm M tính trong chuyển động của hình phẳng S quay quanh O đối với hệ trục Oxy, kí hiệu $\vec{v}_{MO}$ có các hình chiếu trên hệ trục cố định là $-R\overline{\omega}\sin\overline{\varphi}$ và $R\overline{\omega}\cos\overline{\varphi}$.

Từ (3–4) ta nhận được :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_o + \vec{v}_{MO} \tag{3–5}$$



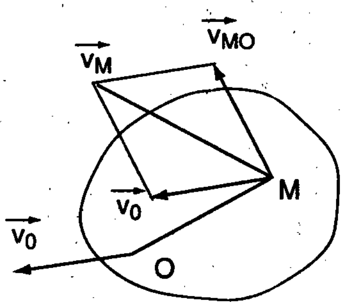
Hình 3–8

Định lí 3–1 : Vận tốc của một điểm M thuộc hình phẳng bằng tổng hình học của vận tốc cực O và vận tốc của nó khi hình phẳng quay (đối với hệ trục Oxy) quanh cực O.

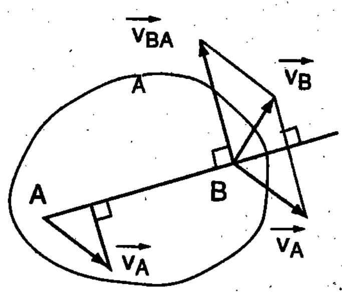
Với hai điểm A và B bất kì thuộc hình phẳng, ta có :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

trong đó $\vec{v}_{BA}$ là vận tốc của điểm B do hình phẳng S quay quanh A. Như vậy $\vec{v}_{BA}$ có phương



Hình 3–9



Hình 3–10

vuông góc với đoạn thẳng AB. Chiếu hai vế của đẳng thức vừa thiết lập lên đường thẳng qua hai điểm A, B (hình 3–10), ta có :

$$hc_{AB}\vec{v}_B = hc_{AB}\vec{v}_A \qquad (3\text{–}6)$$

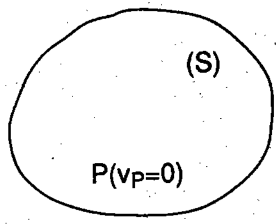
Từ đó ta nhận được định lí 3–2.

Định lí 3–2 : Hình chiếu vận tốc của hai điểm thuộc hình phẳng lên phương qua hai điểm đó bằng nhau.

c) Tâm vận tốc tức thời và sự phân bố vận tốc các điểm thuộc hình phẳng :

– Tâm vận tốc tức thời

Định nghĩa : Nếu tại thời điểm khảo sát tồn tại một điểm của hình phẳng có vận tốc bằng không thì điểm đó được gọi là tâm vận tốc tức thời của hình phẳng (hình 3–11).



Hình 3–11

Định lí 3–3 : Tại thời điểm vận tốc góc của hình phẳng khác không ($\vec{\omega} \neq 0$) thì tồn tại duy nhất một tâm vận tốc tức thời.

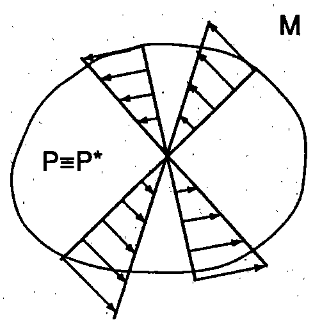
– Sự phân bố vận tốc của các điểm thuộc hình phẳng :

Xét trường hợp tồn tại tâm vận tốc tức thời P.

Chọn tâm vận tốc tức thời P làm cực. Sử dụng công thức (3–5) ta có :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP} = \vec{v}_{MP} \qquad (3\text{–}7)$$

tức là vận tốc điểm M bất kì thuộc hình phẳng S bằng vận tốc của nó trong chuyển động quay của hình phẳng quanh tâm vận tốc tức thời (hình 3–12). Điểm P^* thuộc mặt phẳng cố định trùng với tâm vận tốc tức thời P được gọi là tâm quay. Ta có định lí 3–4.



Hình 3–12

Định lí 3–4 : Tại thời điểm tồn tại tâm vận tốc tức thời, vận tốc các điểm thuộc hình phẳng được phân bố giống như trường hợp quay quanh tâm vận tốc tức thời P (hình 3–12).

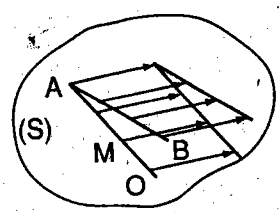
Trong trường hợp này người ta gọi hình phẳng quay quanh tâm quay tức thời P^*.

Trong trường hợp không tồn tại tâm vận tốc tức thời ($\vec{\omega} = 0$) thì trong công thức (3–5) thành phần vận tốc tính trong chuyển động quay quanh cực bằng không ($\vec{v}_{MO} = 0$). Khi đó :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO} = \vec{v}_O \qquad (3\text{–}8)$$

tức vận tốc mọi điểm thuộc hình phẳng đều bằng nhau và bằng vận tốc cực O. Ta nhận được định lí 3–5.

Định lí 3–5 : Tại thời điểm không tồn tại tâm vận tốc tức thời ($\vec{\omega} = 0$) thì mọi điểm thuộc hình phẳng có vận tốc bằng nhau.



Hình 3–13

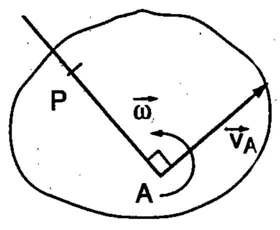
Trường hợp này hình phẳng được gọi là tịnh tiến tức thời (hình 3–13).

Chú ý : quỹ đạo của điểm P trên hình phẳng được gọi là tâm tích động, quỹ đạo của điểm P^* (tâm quay) trên mặt phẳng cố định được gọi là tâm tích cố định. Người ta đã chứng minh được định lí 3–6.

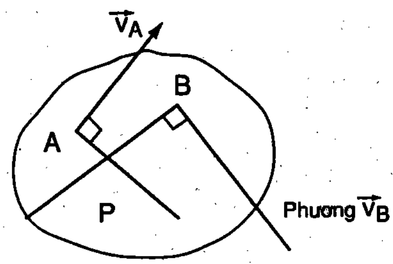
Định lí 3-6 : Chuyển động của hình phẳng được thực hiện bằng cách cho tâm tích động lăn không trượt dọc tâm tích cố định.

– Một số quy tắc tìm tâm vận tốc tức thời

Trường hợp 1 : Biết vận tốc điểm A và vận tốc góc của hình phẳng (hình 3–14). Tâm vận tốc tức thời nằm trên đường thẳng PA có được bằng cách quay $\vec{v}_A$ góc $\frac{\pi}{2}$ theo chiều quay $\vec{\omega}$ và $PA = \frac{v_A}{\omega}$.



Hình 3–14



Hình 3–15

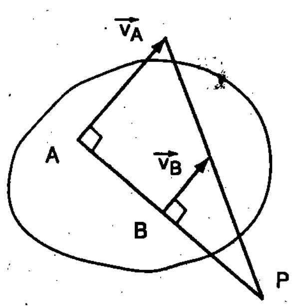
Trường hợp 2 : Biết vận tốc điểm A và phương vận tốc của điểm B cắt phương vận tốc của điểm A (hình 3–15).

Từ hai điểm A và B dựng hai đường vuông góc với các phương vận tốc của chúng. Giao điểm hai đường này là tâm vận tốc tức thời (hình 3–15).

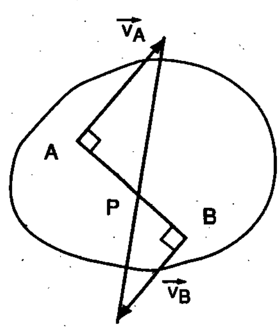
$$\omega = \frac{v_A}{AP} \text{ và } v_B = \omega PB = v_A \frac{PB}{PA}$$

Trường hợp 3 : Biết vận tốc hai điểm A, B và phương vận tốc của chúng song song với nhau.

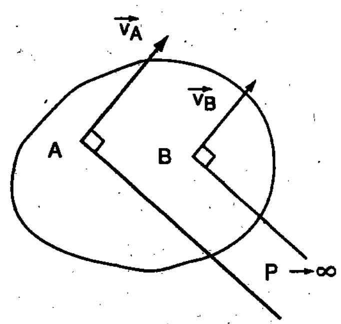
Nếu AB vuông góc với hướng vận tốc thì tâm vận tốc tức thời là giao điểm của phương chứa AB với đường thẳng nối các điểm mút của các vận tốc $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$.



Hình 3–16



Hình 3–17



Hình 3–18

· Trong trường hợp vận tốc hai điểm cùng chiều (hình 3–16) thì :

$$\omega = \frac{v_A - v_B}{AB}$$

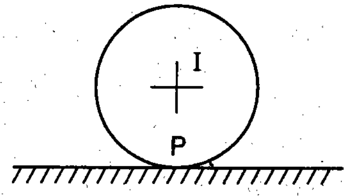
Đối với trường hợp vận tốc hai điểm ngược chiều nhau (hình 3–17) thì :

$$\omega = \frac{v_A + v_B}{AB}$$

Nếu AB không vuông góc với phương các vận tốc thì tâm vận tốc sẽ ở xa vô cùng (hình 3–18) và ta có :

$$\omega = 0;\ v_M = v_A = v_B$$

tức là hình phẳng chuyển động tịnh tiến tức thời.



Hình 3–19

Trường hợp 4 : Hình phẳng lăn không trượt trên một đường cong phẳng cố định (hình 3–19). Trong trường hợp này điểm tiếp xúc giữa hình phẳng và đường sẽ là tâm vận tốc tức thời.

Ví dụ 3–1 : Tay quay OA có chiều dài $r = 0{,}1m$ quay đều với vận tốc góc $\omega_o = 30\pi$ *rad/s*. Con trượt B chuyển động theo phương ngang. Cho chiều dài của thanh truyền AB là $l = r\sqrt{3}$. Tại thời điểm đang xét tay quay OA vuông góc với thanh truyền AB (hình 3–20). Tìm :

– Vận tốc con trượt B.

– Vận tốc góc thanh truyền AB.

Bài giải :

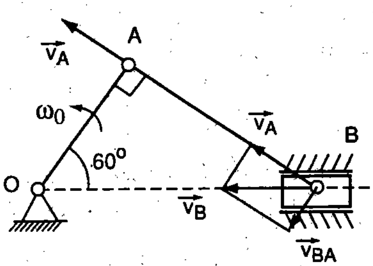
1. Phân tích : Khâu OA chuyển động quay quanh trục cố định O. Thanh truyền AB chuyển động song phẳng, còn con trượt B chuyển động tịnh tiến. Tay quay OA làm với hướng ngang một góc 60^o.

2. Vận tốc : Tính vận tốc điểm B. Viết công thức (3–5) cho điểm B khi chọn A làm cực :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \qquad \text{(a)}$$

Véc tơ $\vec{v}_A$ có chiều như trên hình 3 –20 và có giá trị :

$$v_A = \omega_o OA = \omega_o r$$



Hình 3–20

Các véc tơ $\vec{v}_B$ và $\vec{v}_{BA}$ chỉ biết được phương : $\vec{v}_B$ có phương dọc trục Ox còn $\vec{v}_{BA}$ có phương vuông góc với $\overrightarrow{BA}$ (tức phương $\overrightarrow{AB}$) : $\quad v_B \cos 30^o = v_A$

Do đó : $\quad v_B = \dfrac{v_A}{\cos 30^o} = \dfrac{\omega_o r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}\pi\ m/s$

Để tìm giá trị của $\vec{v}_{BA}$ ta chiếu hai vế của bất đẳng thức (a) lên phương vuông góc với $\vec{v}_B$, tức lên phương thẳng đứng :

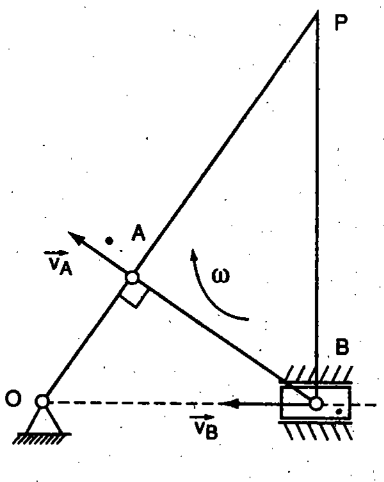
$$0 = v_A \cos 60^o - v_{BA} \cos 30^o$$

Từ đó ta tính được :

$$v_{BA} = v_A \frac{\cos 60^o}{\cos 30^o} = v_A \mathrm{tg} 30^o = \omega_o \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

Vận tốc góc của thanh AB bằng:

$$\omega = \frac{v_{BA}}{BA} = \frac{\omega_o r\sqrt{3}}{3l} = \frac{\omega_o}{3} = 10\pi \ rad/s$$



Hình 3–21

và tại thời điểm đang xét thanh AB quay thuận chiều kim đồng hồ.

Để tìm vận tốc điểm B cũng có thể sử dụng định lí hình chiếu vận tốc (định lí 3–2) :

$$hc_{AB}\vec{v}_B = hc_{AB}\vec{v}_A \rightarrow v_B \cos 30^o = v_A$$

Kết quả tìm được trùng với kết quả ở trên.

Để giải bài toán trên cũng có thể sử dụng phương pháp tâm vận tốc tức thời. Tâm vận tốc tức thời của thanh AB tại thời điểm khảo sát là giao điểm của OA với đường thẳng đứng qua B (hình 3–21).

Ta có :

$$\omega = \frac{v_{BA}}{PA} = \frac{\omega_o r}{l \mathrm{tg} 60^o} = \frac{\omega_o}{3} = 10\pi \ rad/s$$

Vận tốc điểm B được tính theo công thức :

$$v_B = \omega PB = \frac{\omega_o}{3}\frac{1}{\cos 60^o} = \frac{2\omega_o r\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\pi \ m/s$$

3.3.3. Gia tốc của điểm

a) Biểu thức giải tích : Sử dụng công thức (1–12) của chương 1, ta nhận được :

$$\vec{a}_M \begin{cases} a_{Mx} = \dfrac{d^2x_M}{dt^2} = \ddot{x}_O - R\varepsilon \sin\overline{\varphi} - R\omega^2 \cos\overline{\varphi} \\ a_{My} = \dfrac{d^2y_M}{dt^2} = \ddot{y}_O + R\overline{\varepsilon} \cos\overline{\varphi} - R\omega^2 \sin\overline{\varphi} \end{cases} \qquad (3\text{–}9)$$

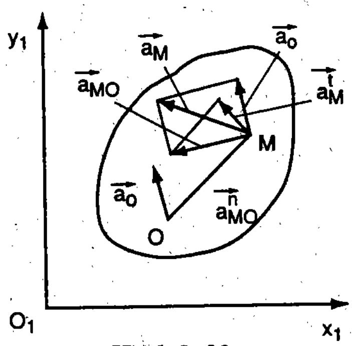
b) Quan hệ gia tốc giữa hai điểm : Từ (3–9) dễ dàng nhận thấy thành phần thứ nhất trong vế phải là các hình chiếu trên các trục tọa độ cố định của gia tốc cực O.

Thành phần thứ hai là hình chiếu trên các trục tọa độ cố định của gia tốc pháp của điểm M tính riêng trong chuyển động quay của S quanh O, kí hiệu $\vec{a}^n_{MO}$ hướng từ M đến cực O, có giá trị bằng $R\omega^2$.

Thành phần thứ ba là hình chiếu trên các trục tọa độ cố định của gia tốc tiếp của điểm M tính riêng trong chuyển động quay của S quanh cực O, kí hiệu $\vec{a}^t_{MO}$ có phương thẳng góc với MO, thuận chiều gia tốc góc $\overline{\varepsilon}$ và có giá trị bằng εR. Vậy (hình 3–22) :

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}^n_{MO} + \vec{a}^t_{MO} \qquad (3\text{–}10)$$

Ta có định lí 3–6.



Hình 3–22

Định lí 3–6 : Gia tốc của một điểm M thuộc hình phẳng bằng tổng hình học của gia tốc cực O và gia tốc của nó khi hình phẳng quay (đối với hệ trục Oxy) quanh cực O.

Chú ý rằng gia tốc của điểm M tính trong chuyển động của hình phẳng quay quanh cực O, kí hiệu $\vec{a}_{MO}$, gồm hai thành phần gia tốc tiếp và gia tốc pháp :

$$\vec{a}_{MO} = \vec{a}^n_{MO} + \vec{a}^t_{MO}$$

c) Tâm gia tốc tức thời

Định nghĩa : Tâm gia tốc tức thời là một điểm thuộc hình phẳng, tại thời điểm khảo sát có gia tốc bằng không.

Tương tự như trường hợp tâm vận tốc tức thời, ta có định lí 3–7.

Định lí 3–7 : Tại thời điểm vận tốc góc và gia tốc góc của hình phẳng không đồng thời triệt tiêu thì tồn tại duy nhất một tâm gia tốc.

Định lí 3–8 : Trong trường hợp tồn tại tâm gia tốc tức thời, sự phân bố gia tốc các điểm thuộc hình phẳng giống như sự phân bố của chúng khi hình phẳng quay quanh tâm gia tốc.

Chú ý rằng tâm gia tốc nói chung không trùng với tâm vận tốc.

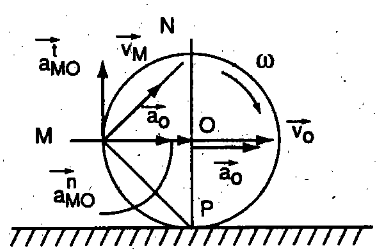
Ví dụ 3–2 : Một bánh xe bán kính R = 0,5 *m* lăn không trượt trên một đường thẳng cố định. Tính vận tốc và gia tốc của điểm M trên vành bánh xe tại thời điểm tâm của bánh xe có vận tốc và gia tốc hướng theo một chiều và có giá trị $v_o = 1$ *m/s*, $a_o = 1{,}5$ m/s^2 còn điểm M có vị trí tương ứng với OM nằm ngang (hình 3–23).

Bài giải : Vì bánh xe lăn không trượt trên một đường thẳng cố định nên tiếp điểm P là tâm vận tốc tức thời. Dựa vào định lí 3–4 ta tính được vận tốc góc ω của bánh xe :

$$\omega = \frac{v_O}{OP} = \frac{v_O}{R}$$

Nếu bánh xe lăn từ trái qua phải (ứng với hình chiếu của vận tốc tâm O lên trục ngang là dương) thì bánh xe quay quanh P (và cả quay quanh O) theo chiều thuận chiều kim đồng hồ (tức quay theo chiều âm) :

$$\overline{\omega} = -\frac{\overline{v}_O}{R} \qquad (a)$$



Hình 3–23

Gia tốc góc $\overline{\varepsilon}$ của bánh xe được tính theo công thức :

$$\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = -\frac{\dot{\overline{v}}_O}{R} = -\frac{\overline{a}_O}{R} \qquad \text{(b)}$$

Vậy chiều của $\overline{\omega}$ và $\overline{\varepsilon}$ thuận chiều kim đồng hồ ($\overline{\omega}\,\overline{\varepsilon} > 0$), nên tại thời điểm đang xét bánh xe quay nhanh dần. Thay các giá trị số đã cho ta được :

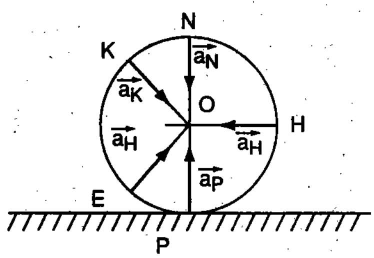
$$\overline{\omega} = -21\ rad/s \quad \text{và} \quad \overline{\varepsilon} = -31\ rad/s^2$$

Để tính vận tốc của điểm M ta sử dụng định lí 3–4. Vận tốc điểm M đang xét (hình 3–23) :

– Có phương vuông góc với $\overrightarrow{MP}$ tức phương vận tốc đi qua điểm N.

– Có chiều từ M đến N.

– Có giá trị bằng $\omega MP = 14{,}85\ m/s$.



Hình 3–24

Để tính gia tốc điểm M ta sử dụng định lí 3–6 (định lí liên hệ gia tốc hai điểm) :

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}^n_{MO} + \vec{a}^t_{MO} \qquad \text{(c)}$$

Thành phần gia tốc pháp của điểm M trong chuyển động quay quanh O ($\vec{a}^n_{MO}$) có :

– Phương chiều hướng từ M tới O.

– Giá trị bằng $\omega^2 MO = 21^2 \times 0{,}5 = 220{,}5\ m/s^2$

Thành phần gia tốc tiếp của điểm M trong chuyển động quay quanh O ($\vec{a}^t_{MO}$) có :

– Phương vuông góc với MO.

– Chiều thuận chiều $\overline{\varepsilon}$ (hướng thẳng lên).

– Có giá trị bằng $\varepsilon MO = 31 \times 0{,}5 = 15{,}5\ m/s^2$

Gia tốc toàn phần của điểm M được tìm qua hai hình chiếu của nó lên hai trục vuông góc. Khi chiếu hai vế của đẳng thức (c) lên hai trục nằm ngang và thẳng đứng ta có (hình 3–23) :

$$a_{Mx} = a_{Ox} + a^n_{MOx} + a^t_{MOx} = 1{,}5 + 220{,}5 = 222\ m/s^2$$

$$a_{My} = a_{Oy} + a^n_{MOy} + a^t_{MOy} = 15{,}5\ m/s^2$$

Trong trường hợp điểm O chuyển động thẳng đều ($v_o = \text{const}$, $a_o = 0$, $\omega = \text{const}$, $\varepsilon = 0$) thì O là tâm gia tốc. Trong trường hợp này gia tốc các điểm trên vành bánh xe được tính như khi bánh xe quay quanh O với vận tốc góc ω và gia tốc góc $\varepsilon = 0$. Như vậy gia tốc các điểm trên vành bánh xe đều hướng về tâm O. Tâm O là tâm gia tốc tức thời (còn tâm vận tốc tức thời là P có gia tốc hướng thẳng đứng lên, $a_P = a_N = \omega^2 R = 220{,}5 m/s^2$), (hình 3–24).

Ví dụ 3–3 : Trở lại ví dụ 3–1. Tính gia tốc của con trượt B và gia tốc góc của thanh AB.

Bài giải : Sử dụng định lí 3–6 để tính gia tốc điểm B :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{BA} + \vec{a}^t_{BA} \qquad (a)$$

Thành phần $\vec{a}_A$ hướng từ A đến O và có giá trị :

$$a_A = r\omega_o^2 = 0{,}1(30\pi)^2 = 90\pi^2 \ m/s^2$$

Thành phần $\vec{a}^n_{BA}$ hướng từ B đến A và có giá trị :

$$a^n_{BA} = \omega^2 BA = (10\pi)^2 0{,}1\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\pi^2 \ m/s^2$$

Thành phần $\vec{a}^t_{BA}$ hướng vuông góc với AB tại B, có chiều chưa biết (chọn một chiều xác định, nếu đáp số dương thì chiều đã chọn là đúng, nếu đáp số âm thì chiều đã chọn là sai, cần phải đổi lại chiều) và có giá trị :

$$a^t_{BA} = \varepsilon BA = \varepsilon r\sqrt{3} \ m/s^2$$

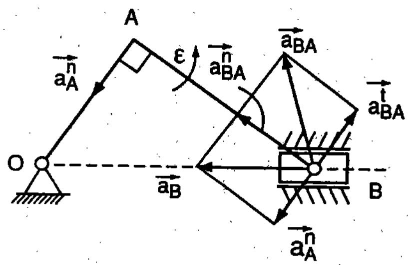
Phương chiều của các véc tơ trong đẳng thức (a) cho trên hình 3–25.

Để tìm giá trị của gia tốc điểm B ta chiếu đẳng thức (a) lên phương AB :

$$a_B \cos 30^o = a^n_{BA}$$

Từ đó :

$$a_B = \frac{a^n_{BA}}{\cos 30^o} = \frac{10\sqrt{3}\pi^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 20\pi^2 \ m/s^2$$



Hình 3-25

Khi chiếu đẳng thức (a) lên phương thẳng đứng (vuông góc với $\vec{a}_B$) ta nhận được :

$$0 = a^n_A \cos 30^o - a^n_{BA}\cos 60^o - a^t_{BA}\sin 60^o$$

Từ đó :

$$a^t_{BA} = a^n_A - a^n_{BA}\,tg30^o = 90\pi^2 - 10\pi^2 = 80\pi^2 \ m/s^2$$

Ta dễ dàng tìm được gia tốc góc của thanh AB :

$$\varepsilon = \frac{a^t_{BA}}{BA} = \frac{80\pi^2}{0{,}1\sqrt{3}} = \frac{800\sqrt{3}\pi^2}{3} rad/s^2$$

Chiều của gia tốc góc ε phù hợp với chiều của $\vec{a}^t_{BA}$, tại thời điểm khảo sát có chiều ngược chiều kim đồng hồ. Thanh AB tại thời điểm khảo sát chuyển động chậm dần.

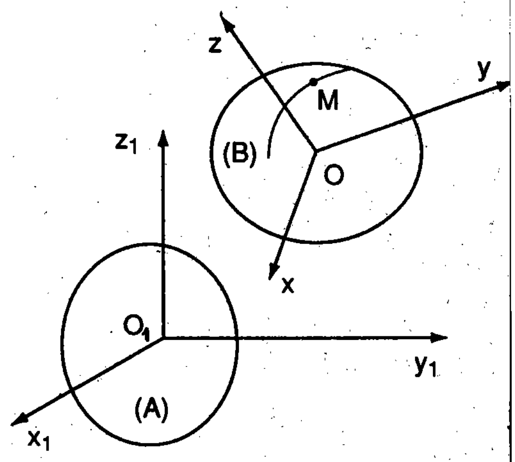
Chương 4

TỔNG HỢP CHUYỂN ĐỘNG

4.1.TỔNG HỢP CHUYỂN ĐỘNG CHẤT ĐIỂM

4.1.1. Bài toán tổng hợp chuyển động chất điểm

Có một chất điểm M chuyển động đối với hệ quy chiếu (B), còn hệ quy chiếu (B) chuyển động đối với hệ quy chiếu (A). Chuyển động của chất điểm M đối với hệ quy chiếu (A) được xem là tổng hợp từ hai chuyển động : chuyển động của chất điểm M đối với hệ quy chiếu (B) và chuyển động của hệ quy chiếu (B) đối với hệ quy chiếu (A). Để đơn giản ta coi hệ quy chiếu (A) là cố định.

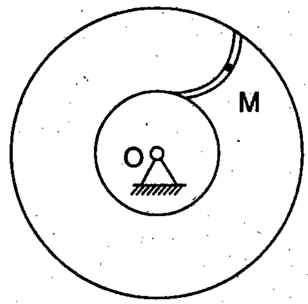


Hình 4–1

Chuyển động của chất điểm M đối với hệ quy chiếu (B) được gọi là chuyển động tương đối.

Chuyển động của hệ quy chiếu (B) đối với hệ quy chiếu (A) được gọi là chuyển động theo.

Chuyển động của chất điểm M đối với hệ quy chiếu (A) được gọi là chuyển động tuyệt đối (hình 4–1).



Hình 4–2

Ví dụ : Một hạt lỏng chuyển động trong rãnh cánh máy bơm là chuyển động tương đối, cánh máy bơm chuyển động đối với giá cố định là chuyển động theo, còn chuyển động của hạt đối với giá cố định là chuyển động tuyệt đối (hình 4–2).

4.1.2. Định lí hợp vận tốc

Định nghĩa : Vận tốc tuyệt đối của chất điểm M là vận tốc của nó được tính trong hệ quy chiếu (A), kí hiệu $\vec{v}_a$:

$$\vec{v}_a = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_1M})_{(A)} \tag{4–1}$$

Vận tốc tương đối của chất điểm M là vận tốc của nó được tính trong hệ quy chiếu (B), kí hiệu $\vec{v}_r$:

$$\vec{v}_r = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM})_{(B)} \tag{4–2}$$

Vận tốc theo : Xét điểm M^* thuộc hệ quy chiếu (B) mà tại thời điểm khảo sát trùng với chất điểm M. Vận tốc theo của chất điểm M, kí hiệu $\vec{v}_e$ là vận tốc của trùng điểm M^* của động chất điểm M.

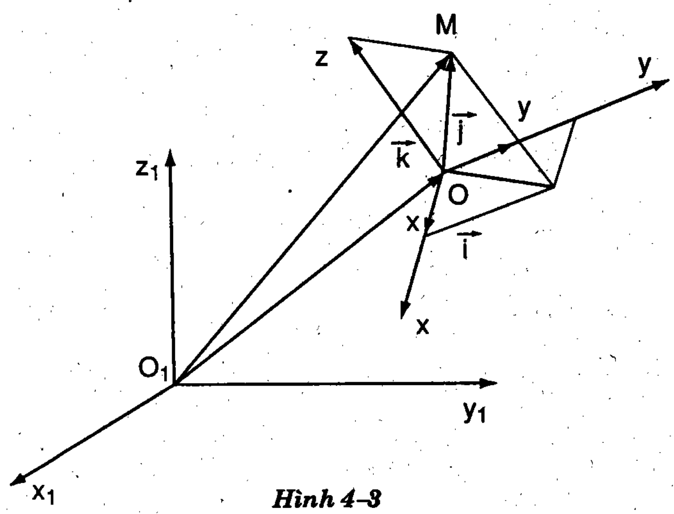
$$\vec{v}_e = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM^*})_{(A)} \tag{4–3}$$

Định lí 4–1 : Tại mỗi thời điểm, vận tốc tuyệt đối của chất điểm M bằng tổng hình học của vận tốc theo và vận tốc tương đối.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \qquad (4\text{–}4)$$

Chứng minh :

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị của hệ trục Oxyz gắn liền với hệ quy chiếu (B); x, y, z là tọa độ của chất điểm M trong hệ tọa độ Oxyz (hình 4–3).



Hình 4–3

Theo (4–1) ta có :

$$\vec{v}_a = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_1M})_{(A)} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM})_{(A)}$$

$$= \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_1O})_{(A)} + \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM})_{(A)} = \vec{v}_o + \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})_{(A)} \qquad (4\text{–}5)$$

$$= \vec{v}_o + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Dựa vào (4–2) với chú ý :

$$\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{(B)} = \left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{(B)} = \left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{(B)} = 0 \qquad (4\text{–}6)$$

ta tính được :

$$\vec{v}_r = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM})_{(B)} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})_{(B)}$$

$$\vec{v}_r = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (4\text{–}7)$$

Để tính vận tốc theo của chất điểm M ta lấy chất điểm M^* là trùng điểm của M tại thời điểm khảo sát, nó có các tọa độ đối với hệ trục tọa độ động Oxyz là x^*, y^*, z^*, chúng là hằng số vì chất điểm M^* gắn liền với hệ quy chiếu động Oxyz nên :

$$\left(\frac{dx^*}{dt}\right)_{(B)} = \left(\frac{dy^*}{dt}\right)_{(B)} = \left(\frac{dz^*}{dt}\right)_{(B)} = 0 \qquad (4\text{–}8)$$

Theo (4–3) ta có :

$$\vec{v}_e = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_1M^*})_{(A)} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM^*})_{(A)} = \vec{v}_o + \frac{d}{dt}(x^*\vec{i} + y^*\vec{j} + z^*\vec{k})_{(A)}$$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_o + x^*\frac{d\vec{i}}{dt} + y^*\frac{d\vec{j}}{dt} + z^*\frac{d\vec{k}}{dt} \qquad (4\text{–}9)$$

Khi so sánh (4–5), (4–7) và (4–9) với chú ý rằng tại từng thời điểm $x^* = x$; $y^* = y$; $z^* = z$, ta nhận được :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

Như vậy định lí 4–1 được chứng minh.

4.1.3. Định lí hợp gia tốc

Định nghĩa : Gia tốc tuyệt đối của chất điểm là gia tốc của nó được tính trong hệ quy chiếu (A), kí hiệu $\vec{a}_a$:

$$\vec{a}_a = \frac{d}{dt}(\vec{v}_a)_{(A)} \tag{4–10}$$

Gia tốc tương đối của chất điểm M là gia tốc của nó được tính trong hệ quy chiếu (B), kí hiệu $\vec{a}_r$:

$$\vec{a}_r = \frac{d}{dt}(\vec{v}_r)_{(A)} \tag{4–11}$$

Gia tốc theo của chất điểm M là gia tốc của trùng chất điểm M* được tính trong hệ quy chiếu (A), kí hiệu $\vec{a}_e$:

$$\vec{a}_e = \frac{d}{dt}(\vec{v}_e)_{(A)} \tag{4–12}$$

Định lí 4–2 : Tại mỗi thời điểm, gia tốc tuyệt đối bằng tổng hình học của gia tốc theo, gia tốc tương đối và gia tốc Côriôlic (kí hiệu $\vec{a}_c$) :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \tag{4–13}$$

Chứng minh : Khi thay (4–5) vào (4–10) ta được :

$$\vec{a}_a = \frac{d}{dt}(\vec{v}_a)_{(A)} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}_o + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} + \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}\right]_{(A)}$$

$$\begin{aligned} &= \vec{a}_o + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} + \vec{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k}\frac{d^2z}{dt^2} \\ &\quad + 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right) \end{aligned} \tag{4–14}$$

Còn thay (4–7) vào (4–11) với chú ý (4–6) ta có :

$$\vec{a}_r = \frac{d}{dt}(\vec{v}_r)_{(B)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right)_{(B)}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \tag{4–15}$$

Theo công thức (4–12) trong đó $\vec{v}_M^*$ được tính theo công thức (4–9) và chú ý đến (4–8) thì :

$$\vec{a}_e = \frac{d}{dt}(\vec{v}_M^*)_{(A)} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}_o + x^*\frac{d\vec{i}}{dt} + y^*\frac{d\vec{j}}{dt} + z^*\frac{d\vec{k}}{dt}\right]_{(A)}$$
$$= \vec{a}_o + x^*\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y^*\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z^*\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \qquad (4\text{–}16)$$

Khi so sánh (4–14) với (4–15) và (4–16) với chú ý rằng tại mọi thời điểm $x^* = x; y^* = y; z^* = z$, ta nhận được :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

trong đó :

$$\vec{a}_c = 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right) \qquad (4\text{–}17)$$

được gọi là gia tốc Côriôlic.

Công thức tính gia tốc Côriôlic $\vec{a}_c$: Trường hợp hệ động Oxyz (hệ quy chiếu B) chuyển động tịnh tiến $\left(\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0\right)$ thì $\vec{a}_c = 0$.

Vậy
$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r \qquad (4\text{–}18)$$

Định lí 4–3 : Khi chuyển động theo là tịnh tiến thì gia tốc tuyệt đối của chất điểm M bằng tổng hình học của gia tốc theo và gia tốc tương đối.

Trường hợp hệ động Oxyz quay quanh một trục cố định với véctơ vận tốc góc theo $\vec{\omega}_e$. Sử dụng công thức Ơle (2–19 ở chương 2), trong đó :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{i}\ ; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{j}\ ; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{k} \qquad (4\text{–}19)$$

và khi thay chúng vào (4–17) ta có :

$$\vec{a}_c = 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right) = 2\vec{\omega}_e \wedge \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right)$$

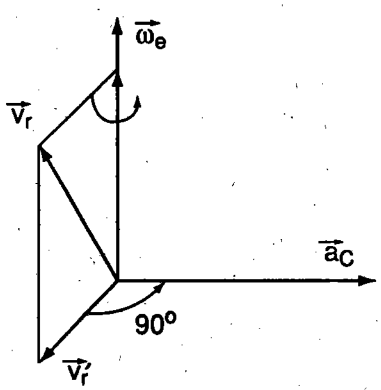
Vậy (hình 4–4) :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r \qquad (4\text{–}20)$$

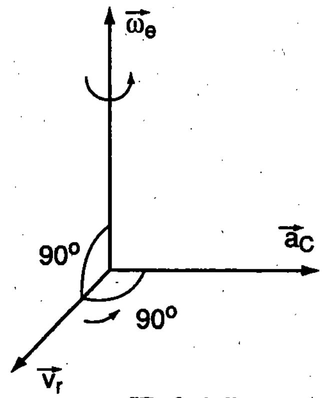
Công thức (4–20) còn đúng cho trường hợp hệ động Oxyz có chuyển động bất kì.

Chú ý rằng tại thời điểm khảo sát nếu $\vec{\omega}_e // \vec{v}_r$ hoặc $\vec{v}_r = 0$ hay $\vec{\omega}_e = 0$ thì tại thời điểm này $\vec{a}_c = 0$ và công thức tính gia tốc sẽ theo (4–18).

Chú ý, trong trường hợp $\vec{\omega}_e \perp \vec{v}_r$ (hình 4–5) thì có quy tắc tìm phương chiều của $\vec{a}_C$ như sau : quay $\vec{v}_r$ quanh gốc của nó theo chiều quay của hệ động quanh trục $\vec{\omega}_e$ một góc 90^o, ta có ngay chiều của $\vec{a}_C$, còn giá trị của nó bằng $2\omega_e v_r$.

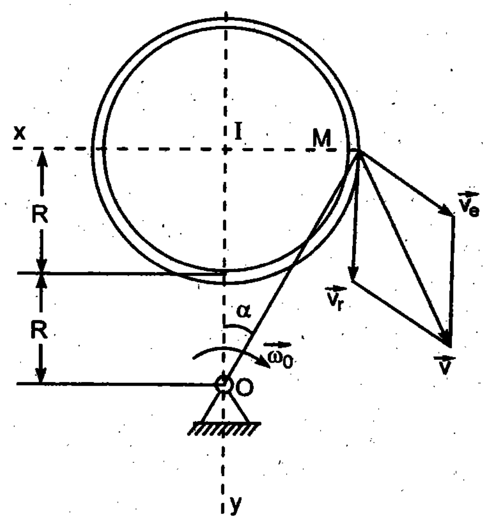


Hình 4–4



Hình 4–5

Ví dụ 4–1 : Một ống tròn bán kính R quay đều quanh trục O với vận tốc góc ω_0. Một hạt lỏng chuyển động đều trong ống với vận tốc không đổi u_0. Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của hạt lỏng khi nó ở vị trí như trên hình 4–6. Cho biết tâm của ống nằm cách trục quay một khoảng 2R.



Hình 4–6

Bài giải

1. Phân tích : Hạt lỏng chuyển động trong ống và ống quay quanh trục O, nên khi chọn ống làm hệ quy chiếu động thì :

– Chuyển động theo của hạt lỏng là chuyển động quay đều của ống quanh trục O, với vận tốc góc ω_0 .

– Chuyển động tương đối của hạt lỏng là chuyển động của hạt lỏng trong ống : đó là chuyển động tròn trên đường tròn tâm I bán kính R với vận tốc không đổi u_0.

– Chuyển động tuyệt đối của hạt lỏng là chuyển động của nó đối với giá cố định.

Như vậy các chuyển động theo và chuyển động tương đối được xác định hoàn toàn, cần xác định chuyển động tuyệt đối.

2. Vận tốc : Theo định lí 4–1, ta có $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$, trong đó $\vec{v}_r = \vec{u}_0$; $\vec{v}_e = \vec{v}^*$

Vận tốc $\vec{v}_e$ có phương vuông góc với OM, có chiều thuận chiều quay của ống và có giá trị như sau :

$$v_e = \omega_0 OM = \omega_0\sqrt{R^2 + 4R^2} = \omega_0 R\sqrt{5}$$

Vận tốc tuyệt đối sẽ được xác định qua hai thành phần của nó trên hai trục vuông góc, trục nằm ngang Ox và trục thẳng đứng Oy.

$$v_{ax} = -v_e \cos\alpha = -R\omega_o\sqrt{5}\frac{2}{\sqrt{5}} = -2R\omega_o$$

$$v_{ay} = -v_e \sin\alpha + u_o = -R\omega_o\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}} + u_o = -R\omega_o + u_o$$

Từ đó: $v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{u_o^2 + 5R^2\omega_o^2 + 2R\omega_o u_o}$

$$\cos(Ox, \vec{v}_a) = -\frac{2R\omega_o}{\sqrt{u_o^2 + 5R^2\omega_o^2 + 2R\omega_o u_o}}$$

$$\cos(Oy, \vec{v}_a) = \frac{-R\omega_o + u_o}{\sqrt{u_o^2 + 5R^2\omega_o^2 + 2R\omega_o u_o}}$$

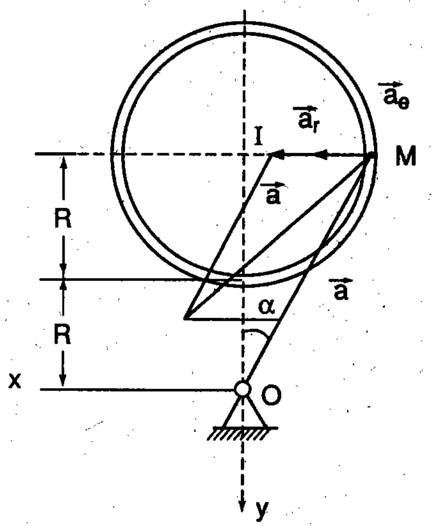
3. Gia tốc : Vì chuyển động theo là chuyển động quay nên (hình 4–7) :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

Vì ống quay đều nên $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n$, hướng từ M đến O và có giá trị :

$$a_e^n = \omega_o^2 R\sqrt{5}$$

Chuyển động tương đối là chuyển động tròn đều nên $\vec{a}_r = \vec{a}_r^n$ hướng từ M đến I và có giá trị : $a_r^2 = \dfrac{u_o^2}{R}$



Hình 4–7

Để tìm phương chiều của $\vec{a}_c$ ta quay $\vec{v}_r$ theo chiều quay của ống một góc 90^o. Như vậy $\vec{a}_c$ hướng từ M đến I và có giá trị bằng : $a_c = 2\omega_o u_o$

Để xác định $\vec{a}_M$ có thể bằng phương pháp cộng trực tiếp các véctơ $\vec{a}_e$, $\vec{a}_r$ và $\vec{a}_c$ từ hình 4–7, hoặc qua hai hình chiếu của nó trên hai trục vuông góc, ví dụ trục nằm ngang Ox và trục thẳng đứng Oy :

$$a_x = a_e^n \sin\alpha + a_r^n + a_c = \frac{u_o^2}{R} + 2u_o\omega_o + R\omega_o^2$$

$$a_y = a_e^n \cos\alpha = R\sqrt{5}\,\omega_o^2\frac{2}{\sqrt{5}} = 2R\omega_o^2$$

Từ đó : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\dfrac{u_o^2}{R} + 2u_o\omega_o + R\omega_o^2\right)^2 + 4R^2\omega_o^4}$

$$\cos(Ox, \vec{a}) = \frac{a_x}{a};\ \cos(Oy, \vec{a}) = \frac{a_y}{a}$$

Ví dụ 4–2 : Tay quay OA có độ dài bằng R, quay đều quanh trục O với vận tốc góc ω_o khi cơ cấu có vị trí như trên hình 4–8, tìm :

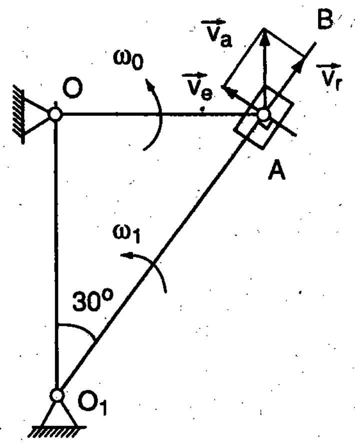
– Vận tốc tương đối của con trượt A đối với cần lắc O_1B, vận tốc góc ω_1 của con lắc O_1B ?

– Gia tốc tương đối của con trượt A đối với cần lắc O_1B, gia tốc góc ε_1 của cần lắc O_1B ?

Bài giải

1. Phân tích : Xem con trượt A là một chất điểm, ta có chất điểm A chuyển động dọc O_1B còn O_1B quay quanh O_1 gắn với giá cố định. Khi chọn O_1B làm hệ quy chiếu động thì :

– Chuyển động theo của chất điểm A là chuyển động của cần lắc quanh trục O_1 đối với giá cố định.



Hình 4-8

– Chuyển động tương đối của chất điểm A là chuyển động thẳng của nó dọc theo cần lắc O_1B.

– Chuyển động tuyệt đối của chất điểm A là chuyển động tròn đều (do tay quay OA quay đều) trên đường tròn tâm O, bán kính OA = R.

2. Vận tốc : Viết định lí 4–1 cho chất điểm A : $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

– $\vec{v}_a$ có phương vuông góc với OA, thuận chiều quay của tay quay OA (cùng chiều ω_o) và có giá trị : $v_a = R\omega_o$

– $\vec{v}_r$ hướng dọc trục O_1B, giá trị chưa xác định.

– $\vec{v}_e = \vec{v}_{A^*}$, A^* là điểm của O_1B trùng với chất điểm A. Vậy $\vec{v}_e$ có phương vuông góc với O_1B, giá trị chưa xác định.

Sử dụng quy tắc hình bình hành trong phép tính véctơ ta dễ dàng tìm được :

$$v_r = v_a \cos 30^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}\omega_o \ ; \quad v_e = v_a \sin 30^o = \frac{1}{2}R\omega_o$$

Vì $v_e = v_{A^*} = \omega_1 O_1 A^*$ nên :

$$\omega_1 = \frac{v_e}{O_1A^*} = \frac{R}{2}\frac{\omega_o}{2R} = \frac{\omega_o}{4} \ rad/s$$

Tại thời điểm khảo sát cần lắc quay ngược chiều kim đồng hồ, tức quay theo chiều dương ($\omega_1 > 0$).

3. Gia tốc : Vì chuyển động theo là chuyển động quay quanh một trục cố định nên (hình 4–9) : $\vec{a}_A = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

– $\vec{a}_A$ hướng từ A đến O, có giá trị : $a_A = R\omega_o^2$

Để tìm phương chiều của $\vec{a}_c$ ta quay $\vec{v}_r$ quanh A theo chiều ω_1 một góc 90^o, còn giá trị :

$$a_c = 2\omega_1 v_r = 2\frac{\omega_o}{4}\frac{R\sqrt{3}}{2}\omega_o = \frac{R\sqrt{3}}{4}\omega_o^2$$

– $\vec{a}_r$ có phương dọc O_1B, chiều và giá trị chưa xác định.

– $\vec{a}_e = \vec{a}_{A^*}$. Vì A là điểm trên cần lắc O_1B nên $\vec{a}_{A^*} = \vec{a}^n_{A^*} + \vec{a}^t_{A^*}$

– $\vec{a}^n_{A^*}$ hướng từ A đến O_1 và có giá trị : $a^n_{A^*} = \omega_1^2 O_1A^* = \frac{\omega_o^2}{8}R = a^n_e$

– $\vec{a}^t_{A^*}$ hướng vuông góc với AO tại A, có chiều và giá trị chưa xác định.

$$a^t_{A^*} = \varepsilon O_1A^* = 2R\varepsilon = a^t_e$$

Vậy (hình 4–9) : $\vec{a}_A = \vec{a}^n_e + \vec{a}^t_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

Trong phương trình véctơ này hai véctơ $\vec{a}^t_e$ và $\vec{a}^n_e$ có giá trị chưa được xác định. Để tìm chúng, chiếu hai vế của bất đẳng thức véctơ gia tốc trên phương $\overrightarrow{O_1B}$ (từ đó tìm được a_r) và trên phương vuông góc với O_1B (từ đó tìm được $\vec{a}^t_e$). Cụ thể ta có :

$$-a_A\cos 30^o = a^t_e - a_c$$
$$-a_A\sin 30^o = -a^n_e - a_r$$

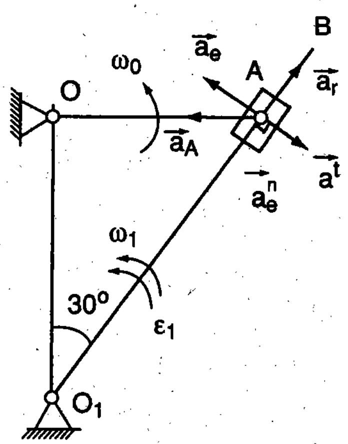
Từ đây tính được :

$$a_r = -\frac{3}{8}R\omega_o^2$$

(dấu "–" chỉ chiều đúng là chiều ngược với chiều đã chọn trên hình 4–9).

$$a^t_e = -\frac{R\sqrt{3}}{4}\omega_o^2$$

Chiều của $\vec{a}^t_e$ cũng là chiều ngược với chiều trên hình 4–9.



Hình 4–9

Gia tốc góc $\bar{\varepsilon}_1$ của cần lắc O_1B có giá trị :

$$\varepsilon_1 = \frac{a^t_e}{O_1A^*} = \frac{R\sqrt{3}}{8R}\omega_o^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}\omega_o^2 \ rad/s^2$$

và có chiều ngược chiều quay kim đồng hồ.

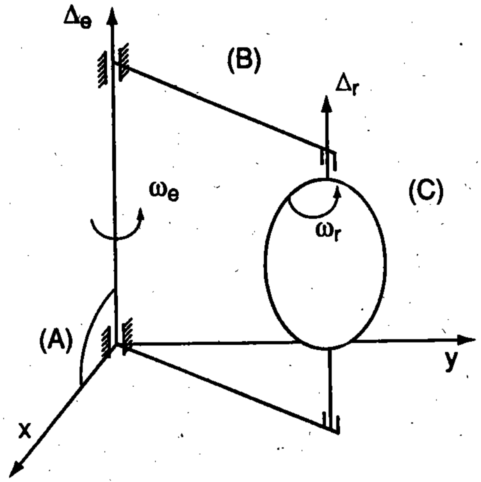
Tại thời điểm khảo sát cần lắc chuyển động nhanh dần, vì $\bar{\omega}_1 > 0$ và $\bar{\varepsilon}_1 > 0$, nên $\bar{\omega}_1\bar{\varepsilon}_1 > 0$.

4.2. TỔNG HỢP CHUYỂN ĐỘNG VẬT RẮN

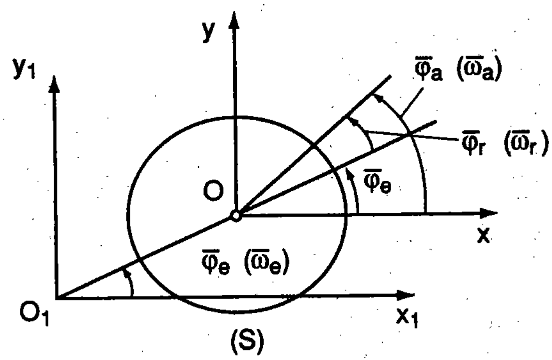
Tổng hợp hai chuyển động quay quanh hai trục song song : Xét vật (C) quay đối với khung (B) quanh trục Δr với vận tốc góc ω_r, khung (B) quay đối với giá cố định (A) quanh trục Δe song song với trục Δr với vận tốc góc ω_e. Xác định chuyển động của vật (C) đối với giá cố định (A) (hình 4–10).

Chuyển động của vật (C) đối với khung (B) được gọi là chuyển động tương đối. Chuyển động của vật (C) đối với giá cố định (A) được gọi là chuyển động tuyệt đối. Chuyển động của khung (B) đối với giá cố định (A) gọi là chuyển động theo.

Đầu tiên ta nhận xét rằng chuyển động tuyệt đối của vật (C) là chuyển động song phẳng với mặt phẳng quy chiếu vuông góc với trục quay (ví dụ mặt phẳng Oxy). Do đó thay cho việc khảo sát chuyển động của vật (C) ta khảo sát chuyển động của một hình phẳng S nằm trong mặt phẳng thẳng góc với các trục quay (hình 4–11). Gọi O_1O là khoảng cách hai trục.



Hình 4–10



Hình 4–11

Thanh O_1O quay đối với giá cố định với vận tốc góc $\overline{\omega}_e$ (với góc định vị $\overline{\varphi}_e$), còn hình phẳng S quay quanh trục O đối với tay quay O_1O với vận tốc góc $\overline{\omega}_r$ (với góc định vị $\overline{\varphi}_r$).

Vì chuyển động tuyệt đối của hình phẳng S là chuyển động song phẳng nên cần xác định :

– Tâm vận tốc tức thời của hình phẳng.

– Vận tốc góc tuyệt đối $\overline{\omega}_a$ của hình phẳng.

Đầu tiên ta tìm vận tốc góc tuyệt đối $\overline{\omega}_a$ của hình phẳng. Góc định vị của hình phẳng S trong chuyển động tuyệt đối, kí hiệu $\overline{\varphi}_a$, sẽ bằng (hình 4–11) :

$$\overline{\varphi}_a = \overline{\varphi}_e + \overline{\varphi}_r \tag{4–21}$$

Do đó :

$$\frac{d\overline{\varphi}_a}{dt} = \frac{d\overline{\varphi}_e}{dt} + \frac{d\overline{\varphi}_r}{dt}$$

Vậy :

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r \tag{4–22}$$

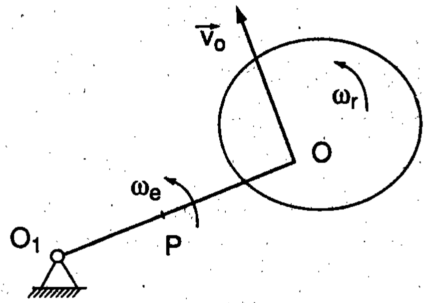
Để tìm tâm vận tốc tức thời P của hình phẳng S chúng ta lần lượt xét các trường hợp sau :

a) Trường hợp chuyển động quay theo và quay tương đối cùng chiều : ví dụ $\bar{\omega}_e > 0,\ \bar{\omega}_r > 0$. Vậy (hình 4–12) :

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r > 0$$

Xét điểm O thuộc hình phẳng S nằm trên tay quay O_1O, quay quanh trục O_1 với vận tốc góc ω_e nên :

$$v_o = \omega_e O_1 O$$



Hình 4–12

Dựa vào quy tắc tìm tâm vận tốc tức thời khi biết vận tốc một điểm ($\vec{v}_o$) và vận tốc góc của hình phẳng ($\bar{\omega}_a$); ta tìm tâm vận tốc tức thời như sau: quay $\vec{v}_o$ quanh O một góc 90^o theo chiều quay của $\bar{\omega}_a$. Trên nửa đường thẳng vuông góc với $\vec{v}_o$ ta lấy điểm P:

$$PO = \frac{v_o}{\omega_a} = \frac{\omega_e}{\omega_e + \omega_r} O_1 O < O_1 O$$

Vậy P là điểm chia trong của đoạn O_1O.

Ngoài ra chúng ta có :

$$PO = \frac{\omega_e}{\omega_e + \omega_r} O_1 O = \frac{\omega_e}{\omega_e + \omega_r}(O_1 P + PO)$$

Từ đây ta tìm được (định chiều dương từ O_1 đến O) :

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{PO_1}} = -\frac{\omega_e}{\omega_r} \qquad (4\text{–}23)$$

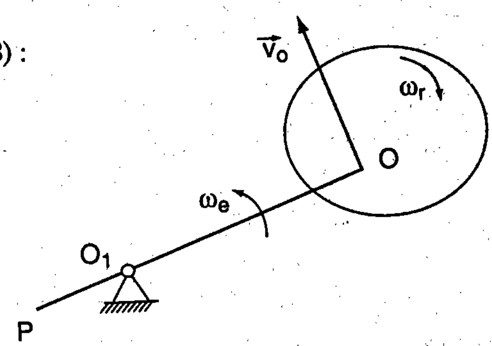
b) Trường hợp chuyển động quay theo và chuyển động quay tương đối quay ngược chiều nhau : ví dụ $\bar{\omega}_e > 0,\ \bar{\omega}_r < 0,\ |\bar{\omega}_e| > |\bar{\omega}_r|$.

Áp dụng công thức (4–22) ta tính được (hình 4–13) :

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r = \omega_e - \omega_r > 0$$

Vậy chuyển động tuyệt đối có chiều quay dương, tức cùng chiều với chuyển động thành phần có vận tốc góc lớn nhất về giá trị.

Tâm vận tốc tức thời trong trường hợp này được xác định như sau :



Hình 4–13

$$PO = \frac{v_o}{\omega_a} = \frac{\omega_e}{\omega_e - \omega_r} O_1 O > O_1 O$$

Vậy P nằm ngoài đoạn O_1O và nằm gần trục quay O_1 hơn trục quay O, tức nằm gần trục quay thành phần có vận tốc góc lớn nhất về giá trị. Như vậy ta có :

$$\overline{PO} = \frac{\omega_e}{\omega_e - \omega_r}\overline{O_1 O} = \frac{\omega_e}{\omega_e - \omega_r}(\overline{O_1 P} + \overline{PO})$$

Từ đây ta tìm được :

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{PO_1}} = \frac{\omega_e}{\omega_r} \qquad (4\text{–}24)$$

Các công thức (4–23) và (4–24) có thể viết trong cùng một công thức như sau :

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{PO_1}} = -\frac{\overline{\omega}_e}{\overline{\omega}_r} \qquad (4\text{–}25)$$

Vậy ta có định lí 4–4.

Định lí 4–4 : Tổng hợp hai chuyển động quay quanh hai trục song song của vật rắn, ta được một chuyển động quay có trục quay song song với các trục quay của hai chuyển động quay thành phần, đi qua điểm P là điểm chia đoạn vuông góc giữa hai trục quay theo tỉ số (4–25) với vận tốc góc tính được theo công thức (4–22).

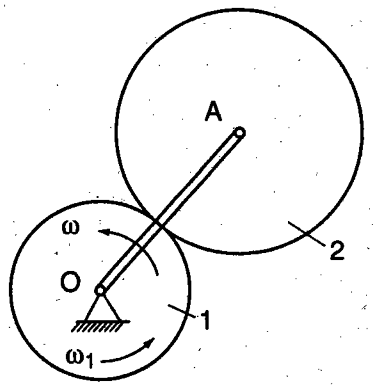
Chú ý : Khi $\overline{\omega}_e = -\overline{\omega}_r$ thì $\overline{\omega}_a = 0$, tức vật chuyển động tịnh tiến.

Ví dụ 4–3 : (Truyền động hành tinh vi sai phẳng). Bánh răng 2 lăn không trượt trên bánh răng 1 nhờ tay quay OA quay với vận tốc góc ω và bánh răng 1 quay quanh trục O (đối với giá cố định) với vận tốc góc ω_1 (hình 4–14). Tìm :

1) Vận tốc góc của bánh răng 2 đối với tay quay.

2) Vận tốc góc tuyệt đối của bánh răng 2 (đối với giá cố định).

Bài giải : Chọn tay quay OA làm hệ quy chiếu động. Chuyển động của bánh răng 2 đối với tay quay (quanh trục A) là chuyển động tương đối với vận tốc góc $\overline{\omega}_r$. Chuyển động của tay quay quanh O (đối với giá cố định) là chuyển động theo với góc $\overline{\omega}_e$ ($\overline{\omega}_e = \overline{\omega}_1$).



Hình 4–14

Công thức ăn khớp viết cho cặp bánh răng 1–2 (công thức ăn khớp tương đối) cho ta :

$$\frac{\overline{\omega}_{2r}}{\overline{\omega}_{1r}} = -\frac{r_1}{r_2} \qquad (a)$$

trong đó : $\overline{\omega}_{1r}, \overline{\omega}_{2r}$ lần lượt là vận tốc góc tương đối của các bánh răng 1 và 2 đối với tay quay OA (dấu "–" vì ăn khớp ngoài); r_1, r_2 lần lượt là bán kính của các bánh răng 1 và 2.

$$\overline{\omega}_{2r} = \overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_e = \overline{\omega}_2 - \overline{\omega} \qquad (b)$$

$\overline{\omega}_2$ vận tốc góc tuyệt đối của bánh răng 2.

Còn $\overline{\omega}_{1r}$ là vận tốc góc tương đối của bánh răng 1 đối với tay quay OA :

$$\overline{\omega}_{1r} = \overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_e = \overline{\omega}_1 - \overline{\omega} \qquad (c)$$

$\overline{\omega}_1$ vận tốc góc tuyệt đối của bánh răng 1.

Khi thay (b) và (c) vào (a) ta nhận được :

$$\frac{\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}}{\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}} = -\frac{r_1}{r_2} = -\frac{z_1}{z_2} \qquad \text{(d)}$$

z_1 và z_2 là số răng của các bánh răng 1 và 2 tương ứng.

Trong các công thức (a) và (d) có dấu "–" vì ăn khớp ngoài. Đối với trường hợp ăn khớp trong cần lấy dấu "+" trong các công thức trên.

Từ công thức (d) ta có :

$$\overline{\omega}_2 = -\frac{z_1}{z_2}\overline{\omega}_1 + \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)\overline{\omega} \qquad \text{(e)}$$

Khi bánh xe 1 quay với vận tốc góc $\overline{\omega}_1 \neq 0$ (có thể cùng chiều hay ngược chiều nhau) thì cơ cấu trên được gọi là cơ cấu vi sai, chuyển động của nó phụ thuộc vào hai khâu dẫn động (tay quay OA và bánh răng 1). Cơ cấu vi sai có hai bậc tự do.

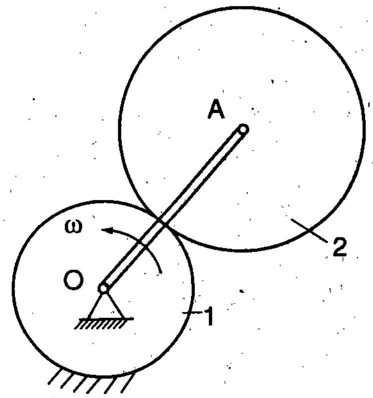
Khi bánh răng 1 được giữ cố định $\overline{\omega}_1 = 0$, cơ cấu trên được gọi là cơ cấu hành tinh, chuyển động của nó phụ thuộc vào một khâu dẫn động là tay quay OA. Cơ cấu hành tinh có một bậc tự do.

Vậy vận tốc góc tuyệt đối của bánh răng 2 được tính theo công thức (e), còn vận tốc góc tương đối của nó đối với tay quay OA được tính theo công thức (d) :

$$\overline{\omega}_{2r} = \overline{\omega}_2 - \overline{\omega} = -\frac{z_1}{z_2}(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}) \qquad \text{(f)}$$

Trong trường hợp cơ cấu hành tinh $\overline{\omega}_1 = 0$, ta có (hình 4–15) :

$$\overline{\omega}_2 = \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)\overline{\omega}, \quad \text{và} \quad \overline{\omega}_{2r} = \frac{z_1}{z_2}\overline{\omega}$$



Hình 4–15

Ví dụ 4–4 : Cho cơ cấu bốn khâu $OABO_1$. Tay quay OA quay với vận tốc góc ω_1. Tính vận tốc góc của cần lắc O_1B đối với tay quay OA, từ đó thiết lập tỉ số truyền động giữa hai khâu, hai khâu OA và O_1B được gọi là hai khâu nối giá vì chúng đều nối với giá (hình 4–16).

Bài giải : Vận tốc góc của cần lắc O_1B đối với tay quay OA là vận tốc góc tương đối của nó khi chọn tay quay OA làm hệ động. Chuyển động của khâu O_1B đối với tay quay OA là chuyển động song phẳng có tâm vận tốc tức thời P_{31}. Chú ý rằng tâm vận tốc tức thời của khâu 1 đối với khâu 3 là $P_{13} \equiv P_{31}$.

Tâm vận tốc tức thời của khâu 2 (AB) đối với khâu 4 (OO_1) là P_{24}, còn tâm vận tốc tức thời của khâu 4 đối với khâu 2 là $P_{42} \equiv P_{24}$.

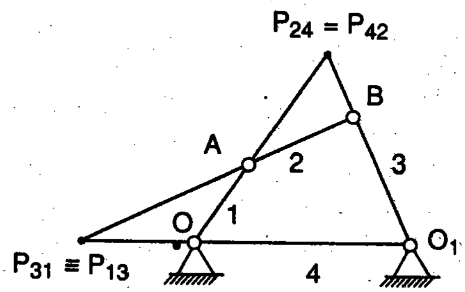
Có thể sử dụng các kết quả khảo sát về tổng hợp hai chuyển động quay của vật rắn quanh hai trục song song cho bài toán trên.

Gọi vận tốc góc của khâu 1 (OA) và khâu 3 (O_1B) đối với giá 4 (OO_1) là $\overline{\omega}_1$ và $\overline{\omega}_3$ tương ứng.

Chọn khâu 1 (OA) làm hệ động.

– Chuyển động tương đối của khâu 3 (O_1B) là chuyển động quay quanh trục P_{31} (trục quay tương đối).

– Chuyển động theo là chuyển động của khâu 1 (OA) quay quanh trục O (trục quay theo).



Hình 4–16

– Chuyển động tuyệt đối của khâu 3 (O_1B) là chuyển động quay quanh trục O_1 (trục quay tuyệt đối).

Vậy :

$$\overline{\omega}_e \equiv \overline{\omega}_1;\quad \overline{\omega}_a^{(3)} \equiv \overline{\omega}_3;\quad \overline{\omega}_r^{(3)} = \overline{\omega}_a^{(3)} - \overline{\omega}_e = \overline{\omega}_3 - \overline{\omega}_1$$

Trong trường hợp này trục quay tuyệt đối (tức O_1) nằm ngoài đoạn thẳng nối trục quay tương đối (P_B) và trục quay theo nên ta sử dụng công thức (4–25) trong đó P (trục quay tuyệt đối), O_1 (trục quay theo), O (trục quay tương đối) được thay tương ứng bằng O_1, O và P_{13}.

Vậy ta có :

$$\frac{\overline{O_1P_{13}}}{\overline{O_1O}} = -\frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_3 - \overline{\omega}_1}$$

Sau một vài phép biến đổi đơn giản ta nhận được :

$$\frac{\overline{P_{13}O_1}}{\overline{P_{13}O}} = \frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_3} = i_{13} \qquad \text{(a)}$$

Đại lượng i_{13} được gọi là tỉ số truyền động giữa khâu 1 và khâu 3.

Công thức (a) cho ta định lí 4–5.

Định lí 4–5. (định lí Vilit). Trong cơ cấu bốn khâu, đường truyền (tức đường AB) chia đường tâm (tức đường OO_1) thành hai đoạn tỉ lệ nghịch với vận tốc góc của hai khâu giá.

Chương 5

ĐỘNG HỌC CƠ CẤU

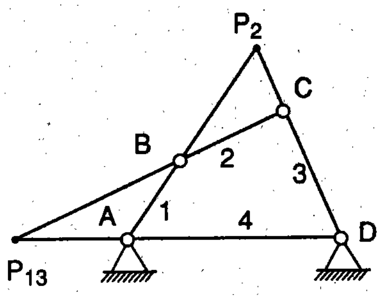
5.1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM

Cơ cấu là tập hợp các vật có chuyển động xác định, dùng để truyền động hoặc biến đổi chuyển động. Mỗi vật trong cơ cấu được gọi là khâu. Các khâu được nối với nhau bằng các khớp. Khi miền tiếp xúc giữa các khâu là một mặt thì khớp được gọi là khớp sơ cấp, còn khi miền tiếp xúc là một đường hay một điểm thì khớp gọi là khớp cao cấp. Khâu cố định được gọi là giá. Khâu nối giá có chuyển động cho trước được gọi là khâu dẫn, còn các khâu nối giá khác gọi là khâu bị dẫn.

5.2. CƠ CẤU BỐN KHÂU BẢN LỀ PHẲNG

5.2.1. Định nghĩa : Cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng là một cơ cấu phẳng gồm bốn khâu nối với nhau bằng các khớp quay. Khâu 4 gọi là giá, các khâu 1 và 3 nối giá được gọi là tay quay (nếu nó quay được toàn vòng) hay cần lắc (nếu nó không quay được toàn vòng) (hình 5-1).

Để xác định vị trí của cơ cấu bốn khâu chỉ cần một thông số định vị (góc định vị của khâu 1 hoặc khâu 3). Cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng có một bậc tự do.



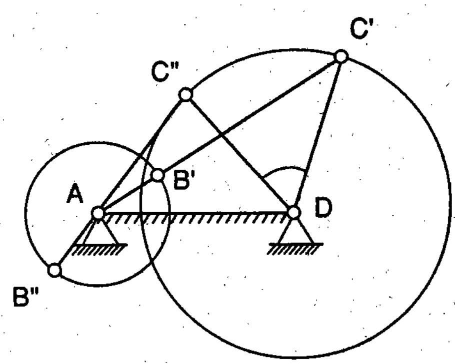
Hình 5–1

5.2.2. Tỉ số truyền, kí hiệu i_{13}

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3}$$

Theo định lí Vilit (định lí 4–5, chương 4) ta có :

$$i_{13} = \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_3} = \frac{\overline{P_{13}D}}{\overline{P_{13}A}}$$



Hình 5–2

Nhận xét :

1) Tỉ số truyền i_{13} là một đại lượng biến thiên, nó phụ thuộc vào góc định vị khâu dẫn : $i_{13} = i_{13}(\varphi_1)$. Nói khác đi nếu khâu dẫn quay đều thì khâu bị dẫn quay không đều.

2) Khi P_{13} là điểm chia ngoài của đoạn AD thì $i_{13} > 0$, hai khâu dẫn và bị dẫn quay cùng chiều. Khi P_{13} là điểm chia trong của đoạn AD thì $i_{13} < 0$,hai khâu dẫn và bị dẫn quay ngược chiều.

3) Tại thời điểm khi tay quay và thanh truyền duỗi thẳng hoặc gập vào nhau ($P_{13} \equiv A$) thì $i_{13} = \infty$ nên $\omega_3 = 0$, tức tại thời điểm này thanh lắc đổi chiều quay. Lúc đó vị trí DC' và DC" được gọi là vị trí biên của cần lắc (hình 5–2).

5.2.3. Điều kiện quay toàn vòng : Điểm B thuộc khâu 1 (B_1) chuyển động trên đường tròn tâm A bán kính l_1. Điểm B thuộc khâu 2 (B_2) sẽ chuyển động trong miền được giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm D, có các bán kính bằng (l_2+l_3) và $|l_3-l_2|$. Để khâu 1 quay được toàn vòng thì tại mọi thời điểm các điểm B_1 và B_2 phải trùng nhau ($B_1 \equiv B_2$), tức là đường tròn tâm A, bán kính l_1 nằm trong miền giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm D, có các bán kính tương ứng bằng (l_2+l_3) và $|l_3-l_2|$.

Như vậy các điều kiện quay toàn vòng sẽ là :

$$l_1+l_4 < l_2+l_3$$

$$|l_1-l_4| > |l_3-l_2|$$

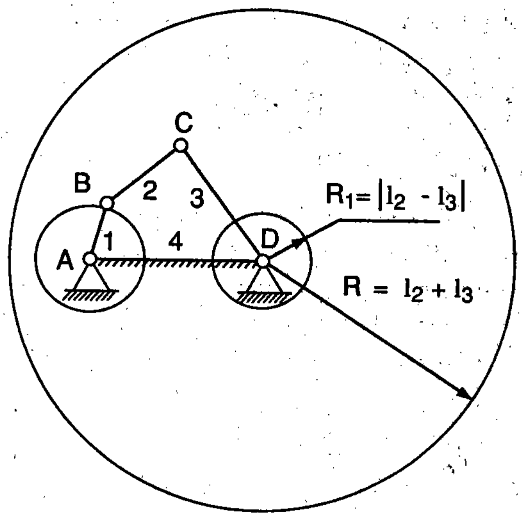
Quy tắc Graxnôp :

1) Nếu tổng chiều dài của khâu ngắn nhất và khâu dài nhất nhỏ hơn hoặc bằng tổng chiều dài hai khâu còn lại thì :

– Khi giá kề với khâu ngắn nhất thì khâu ngắn nhất là tay quay, còn khâu đối diện là cần lắc.

– Khi giá là khâu ngắn nhất thì cả hai khâu nối giá đều là tay quay.

– Khi giá đối diện với khâu ngắn nhất thì cơ cấu có hai thanh lắc.

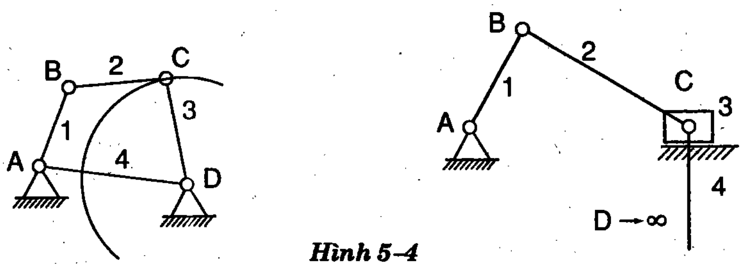


Hình 5–3

2) Nếu tổng chiều dài của khâu ngắn nhất và khâu dài nhất lớn hơn tổng chiều dài của hai khâu còn lại thì dù khâu nào làm giá cơ cấu cũng có hai cần lắc.

5.3. CÁC BIẾN THỂ CỦA CƠ CẤU BỐN KHÂU

5.3.1. Cơ cấu tay quay – con trượt : Xét cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng với tay quay 1 và thanh lắc 3. Giả sử chiều dài $l_3 \to \infty$ thì quỹ đạo điểm C biến thành đường thẳng và chuyển động lắc của khâu 3 biến thành chuyển động tịnh tiến qua lại của con trượt C. Cơ cấu này được gọi là cơ cấu tay quay – con trượt (hình 5–4).



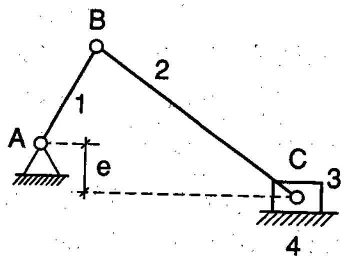
Hình 5–4

Khi e ≠ 0 thì ta có cơ cấu tay quay – con trượt lệch tâm (hình 5–5a), khi e = 0 ta có cơ cấu tay quay – con trượt chính tâm (hình 5–5b).

Tỉ số truyền : Theo định lí Vilit (định lí 4–5, chương 4) ta có :

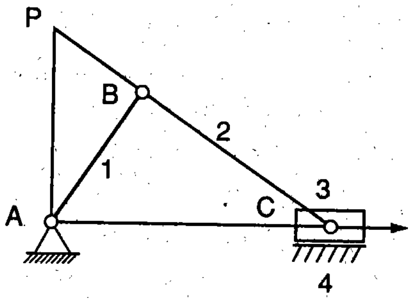
$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{PD}{PA}$$

Từ đó : $$\omega_1 = \frac{PD\omega_3}{PA} = \frac{v_{P_3}}{PA}$$



Hình 5–5a

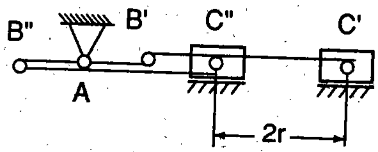
v_{P_3} là vận tốc điểm P_3 thuộc khâu 3. Vì khâu 3 chuyển động tịnh tiến nên $v_{P_3} = v_C$ (v_C là vận tốc của con trượt C). Chú ý rằng khi cơ cấu bốn khâu bản lề suy biến thành cơ cấu tay quay – con trượt thì đường thẳng AD suy biến thành đường thẳng vuông góc với trục Ax nằm ngang và do đó đường thẳng AP cũng vuông góc với trục Ax (hình 5–5b).



Hình 5–5b

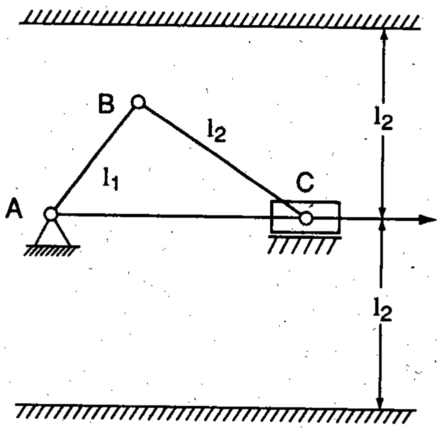
Vậy tỉ số truyền sẽ bằng : $i_{13} = \frac{v_C}{\omega_1} = PA$

Tỉ số truyền phụ thuộc vào vị trí của điểm P trên đường thẳng đứng qua A, nên dù tay quay quay đều thì con trượt C chuyển động tịnh tiến qua lại theo phương ngang không đều hoặc ngược lại, khi con trượt chuyển động đều thì tay quay quay không đều.

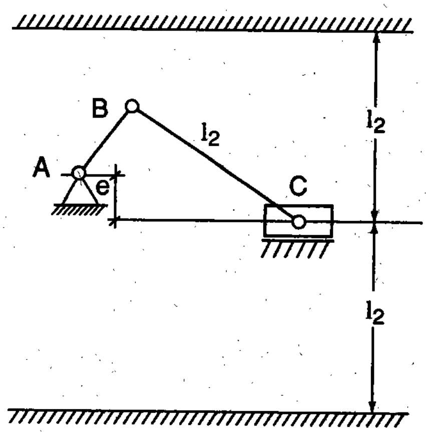


Hình 5–6

Khi tay quay và thanh truyền duỗi thẳng hoặc chập nhau thì P ≡ B nên PB = 0. Từ đó suy ra $v_C = 0$. Ứng với các vị trí này con trượt C dừng lại và đổi chiều chuyển động. Các vị trí C' và C" là hai vị trí biên của con trượt C, còn đoạn C'C" gọi là hành trình của con trượt (hình 5–6).



Hình 5–7



Hình 5–8

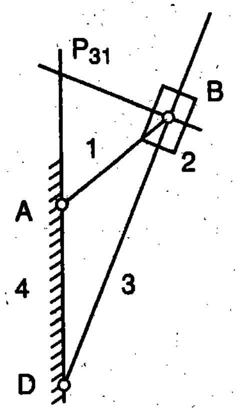
Điều kiện quay toàn vòng : Điểm B_1 trên khâu 1 chạy trên đường tròn tâm A, bán kính l_1, còn điểm B_2 trên khâu 2 chuyển động trong dải được giới hạn bởi hai đường song song với trục ngang Ax có chiều rộng $2l_2$. Đối với cơ cấu tay quay – con trượt chính tâm thì điều kiện để tay quay AB quay toàn vòng sẽ là : $l_1 < l_2$ (hình 5–7). Còn đối với cơ cấu tay quay – con trượt lệch tâm thì điều kiện quay toàn vòng của tay quay sẽ là (hình 5–8) : $l_1 + e < l_2$.

5.3.2. Cơ cấu culit : Từ cơ cấu tay quay – con trượt nếu đổi khâu 1 (hoặc khâu 2) làm giá thì ta được cơ cấu culit (hình 5–9).

Tỉ số truyền : Có thể áp dụng trực tiếp định lí Vilit (định lí 4–5, chương 4) để tìm tỉ số truyền. Muốn vậy ta xem cơ cấu culit như là biến thể của cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng trong đó khâu 2 biến thành con trượt. Tâm vận tốc tức thời của khâu 3 đối với khâu 1 (P_{31}) là giao điểm của đường giá AD và đường thẳng vuông góc với DB vẽ qua B.

Do đó : $$i_{13} = \frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_3} = \frac{P_{31}D}{P_{31}A}$$

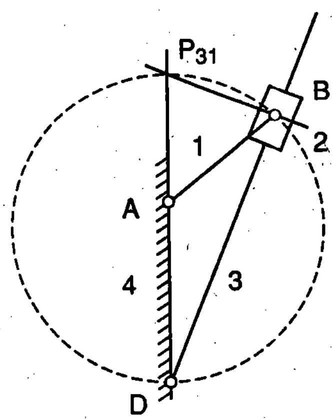
Tỉ số truyền i_{13} biến thiên theo vị trí của P_{31} trên đường thẳng AD. Khâu 1 dù quay đều thì khâu 3 vẫn quay không đều và ngược lại.



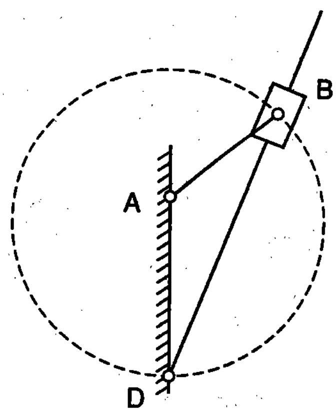
Hình 5-9

Khi $l_1 = l_4$ thì $AD = AP_{31}$ nên P_{31} là điểm duy nhất ở trên đường tròn tâm A bán kính l_1 (hình 5–10). Trong trường hợp này ta có : $i_{13} = \dfrac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_3} = 2$.

Điều kiện quay toàn vòng : Khâu 1 luôn luôn quay được toàn vòng vì B_1 chuyển động trên đường tròn tâm A bán kính l_1, còn B_2 (điểm B trên con trượt 2) chuyển động trong toàn mặt phẳng chứa mọi vị trí của B_1.



Hình 5–10

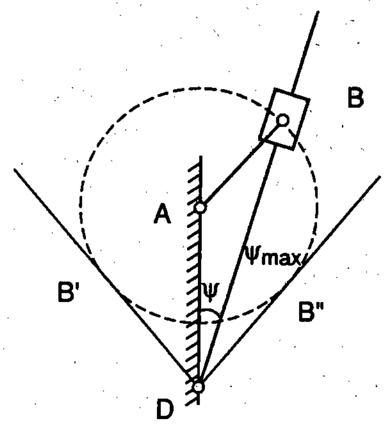


Hình 5–11

Đối với khâu 3 điểm B_3 thuộc khâu 3 đi qua D. Để cho culit BD quay toàn vòng thì mọi đường thẳng DB_3 phải cắt đường tròn B_1 (hình 5–11), tức là :

$$l_1 \geq l_4$$

Nếu $l_1 < l_4$ thì culit không quay toàn vòng được (hình 5–12), nó có hai vị trí tiếp xúc với đường tròn B_1 tại hai điểm B' và B". Góc $\psi = \angle B'DB''$ được gọi là góc hành trình của culit (hình 5–12).



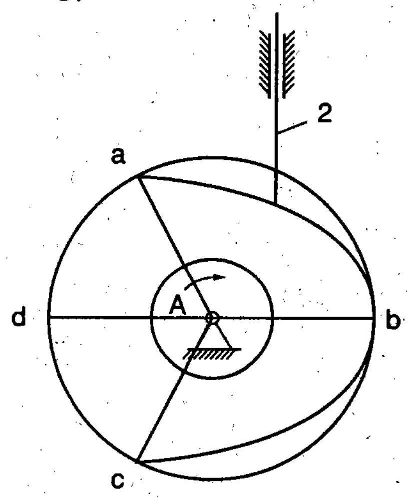
Hình 5–12

5.4. CƠ CẤU CAM

5.4.1. Định nghĩa : Cơ cấu cam là cơ cấu có khâu bị dẫn nối với khâu dẫn bằng khớp cấp cao và chuyển động với quy luật theo hình dạng của mặt tiếp xúc (biên dạng cam) của khâu dẫn. Trong cơ cấu cam khâu bị dẫn gọi là cần còn khâu dẫn gọi là cam.

Trên hình 5–13 giới thiệu lược đồ của một cơ cấu cam đơn giản .

Cho cam quay liên tục một chiều, cần 2 sẽ tịnh tiến qua lại trong rãnh trượt của giá khi tiếp xúc với phần biên dạng abc của cam và đứng yên khi tiếp xúc với phần biên dạng cda của cam (là cung tròn có tâm A).



Hình 5–13

5.4.2. Phân loại cơ cấu cam : Cơ cấu cam thường được phân loại như sau :

a) Cam quay hay cam đĩa (hình 5–14 a, b, c, d, e, f) : Cam có dạng là một hình phẳng quay quanh một trục cố định, còn cần thì hoặc chuyển động tịnh tiến qua lại trong rãnh của giá (gọi là cần đẩy) hoặc là một thanh lắc.

b) Cam tịnh tiến : Cam có chuyển động qua lại, còn cần có chuyển động tịnh tiến qua lại (gọi là cần đẩy) hoặc lắc qua lại (gọi là cần lắc) (hình 5–15 a, b). Cũng có trường hợp chuyển động của cần là chuyển động song phẳng.

Đầu cần (chỗ tiếp xúc với biên dạng cam) có nhiều loại : cần nhọn (hình 5–16a), cần có con lăn (hình 5–16c), cần đầu bằng (hình 5–16b), cần đầu lồi (hình 5–16d).

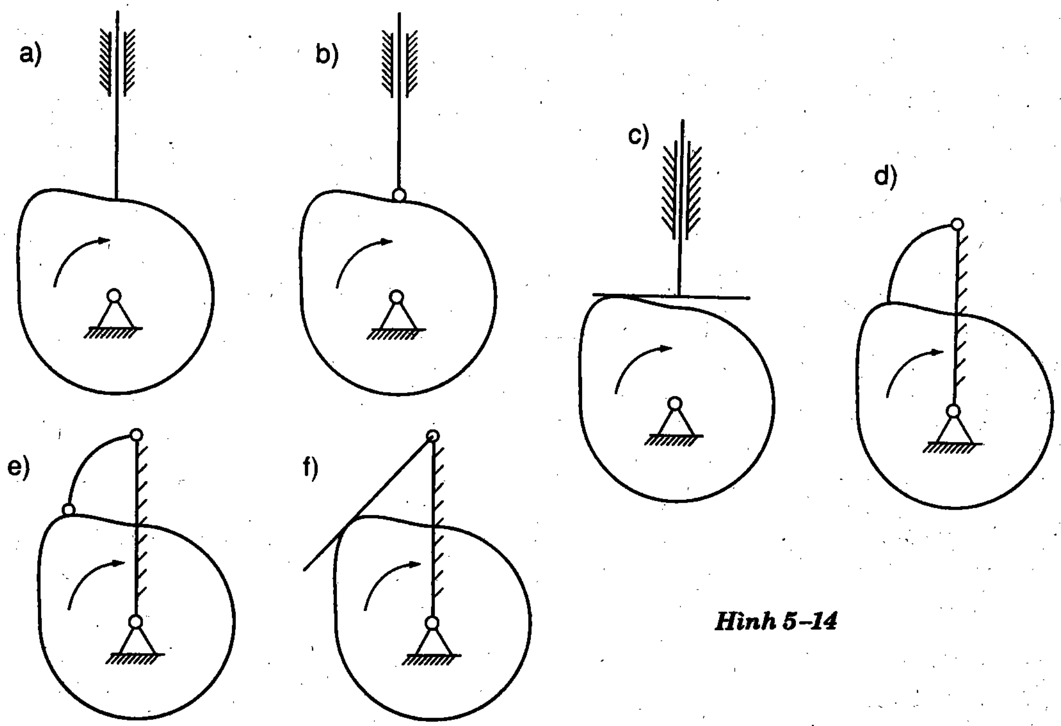
5.4.3. Ưu nhược điểm của cơ cấu cam

a) Ưu điểm

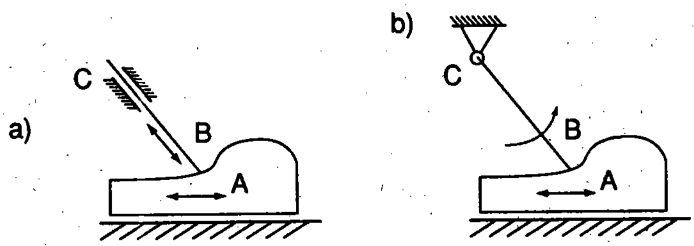
– Có thể thực hiện được hầu như bất kì quy luật nào của chuyển động bị dẫn nhờ chọn biên dạng cam thích hợp.

– Có năng suất cao nếu chọn một cách thích hợp quy luật chuyển động của khâu bị dẫn.

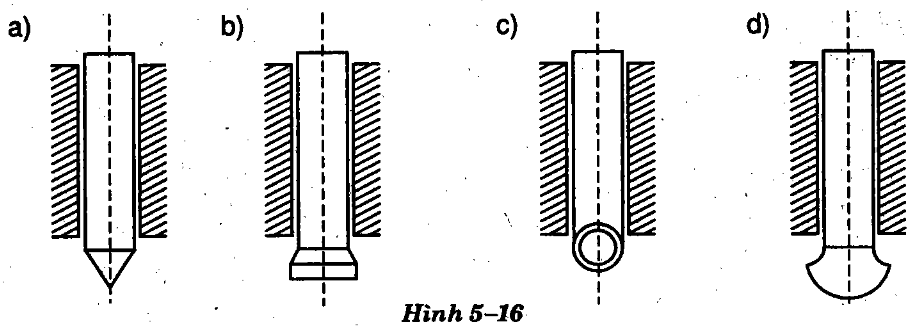
– Rất đắc dụng cho việc phối hợp nhiều động tác trong máy tự động.



Hình 5–14



Hình 5–15



Hình 5–16

b) Nhược điểm

– Áp lực trên mặt tiếp xúc thường lớn, máy chóng bị bào mòn, xảy ra hiện tượng va đập.

– Khó chế tạo chính xác, khó đảm bảo để tiếp xúc được liên tục giữa cam và cần.

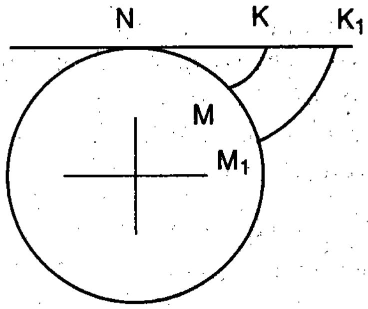
5.5. CƠ CẤU BÁNH RĂNG

Cơ cấu bánh răng được dùng để truyền chuyển động giữa hai trục với tỉ số truyền xác định. Thông thường cơ cấu bánh răng phẳng dùng để thực hiện tỉ số truyền không đổi. Theo định lí Vilit để đảm bảo tỉ số truyền không đổi, pháp tuyến chung của biên dạng bánh răng phải luôn luôn đi qua một điểm cố định trên đường nối tâm.

Có thể chứng minh rằng, có rất nhiều cặp đường cong dùng làm biên dạng bánh răng thỏa mãn định lí Vilit, nhưng chỉ có một số ít dạng đường cong có thể thực hiện về mặt kĩ thuật (dễ chế tạo, đảm bảo chất lượng ăn khớp tốt nhất). Dạng đường cong được sử dụng rộng rãi nhất hiện nay để làm biên dạng bánh răng là dạng đường thân khai của đường tròn (do Ơle tìm ra năm 1754).

5.5.1. Đường thân khai và các tính chất của nó

a) Định nghĩa : Khi một đường thẳng lăn không trượt trên một đường tròn, một điểm thuộc đường thẳng vẽ nên một đường cong được gọi là đường thân khai. Đường tròn từ đó dựng nên đường thân khai gọi là vòng cơ sở (hình 5 - 17).



Hình 5–17

b) Các tính chất của đường thân khai :

– Đường thân khai không có điểm nào nằm trong vòng cơ sở.

– Pháp tuyến của đường thân khai là tiếp tuyến của vòng cơ sở và ngược lại.

– Tâm cong N tại K của đường thân khai nằm trên vòng cơ sở. Bán kính cong ρ = NK bằng cung lăn NM.

– Các đường thân khai trên cùng một vòng cơ sở là những đường cách đều và có thể đặt khít lên nhau. Khoảng cách trên các pháp tuyến chung bằng chiều dài cung giữa hai gốc của chúng trên vòng cơ sở.

5.5.2. Biên dạng thân khai thỏa mãn định lí Vilit : Giả sử có hai đường thân khai tiếp xúc nhau tại K (được gọi là điểm vào khớp). Các vòng cơ sở của chúng có các bán kính lần lượt là r_{O_1} và r_{O_2}. Pháp tuyến chung qua K rõ ràng là tiếp tuyến chung của hai vòng cơ sở và cắt đường nối tâm hai vòng cơ sở tại P, nằm cách tâm hai vòng cơ sở theo tỉ số tỉ lệ với các bán kính của hai vòng cơ sở. Do đó, P cố định trên đường nối tâm của hai vòng cơ sở (hình 5–18).

Điểm P được gọi là tâm ăn khớp.

Các vòng tròn có tâm là tâm quay các bánh răng và bán kính của chúng bằng khoảng cách từ tâm ăn khớp đến tâm quay được gọi là các vòng lăn. Các bánh răng phẳng được gọi là ngoại tiếp hay nội tiếp tùy thuộc các vòng lăn ngoại tiếp hoặc nội tiếp. Góc giữa pháp tuyến chung của hai biên dạng tiếp xúc với tiếp tuyến chung của hai vòng lăn được gọi là góc ăn khớp α. Đối với bánh răng thân khai góc ăn khớp là hằng số.

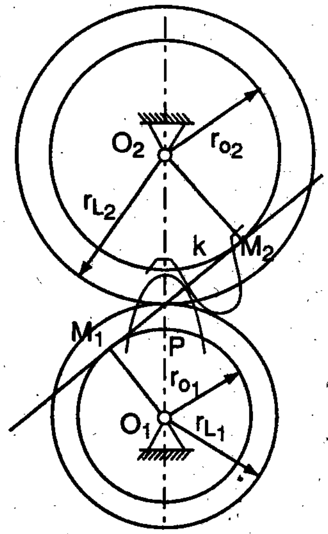
5.5.3. Tỉ số truyền

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{L_2}}{r_{L_1}}$$

trong đó : r_{L_1} và r_{L_2} là bán kính của các vòng lăn (hình 5–18).

Nhưng $r_{L_2} = \dfrac{r_{O_2}}{\cos\alpha}$; $\quad r_{L_1} = \dfrac{r_{O_1}}{\cos\alpha}$

nên $\quad i_{12} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{r_{L_2}}{r_{L_1}} = \dfrac{r_{O_2}}{r_{O_1}}$



Hình 5-18

Vì r_{O_1} và r_{O_2} không đổi nên tỉ số truyền i_{12} không phụ thuộc vào khoảng cách giữa hai bánh răng, nghĩa là nếu vì một lí do nào đó khoảng cách trục của hai bánh răng có thay đổi, tỉ số truyền của cặp bánh răng thân khai vẫn giữ nguyên. Đó là một ưu điểm nổi bật của ăn khớp bánh răng thân khai.

Ngoài ra, nếu gọi t_L là bước răng trên vòng lăn và z là số răng của bánh răng, ta còn có :

$$2r_{L_1}\pi = t_{L_1}z_1 \; ; \qquad 2r_{L_2}\pi = t_{L_2}z_2$$

Vì hai vòng lăn không trượt lên nhau, nên : $t_{L_1} = t_{L_2}$.

Từ đó $\dfrac{r_{L_2}}{r_{L_1}} = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Vậy tỉ số truyền sẽ bằng : $i_{12} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{r_{L_2}}{r_{L_1}} = \dfrac{r_{O_2}}{r_{O_1}} = \dfrac{z_2}{z_1}$

Công thức này cho phép tính tỉ số truyền qua số răng của hai bánh răng ăn khớp nhau.

5.5.4. Hệ bánh răng gồm một dãy nhiều bánh răng ăn khớp với nhau : Hệ bánh răng được chia làm hai loại : hệ bánh răng thường và hệ bánh răng vi sai. Hệ bánh răng thường gồm các bánh răng có trục quay cố định. Hệ bánh răng vi sai chứa trong nó ít nhất một bánh răng có trục quay di động.

a) Hệ bánh răng thường

– Hệ bánh răng phẳng là hệ có các trục bánh răng song song nhau (hình 5–19).

Tỉ số truyền : $i_{1n} = \dfrac{\omega_1}{\omega_n}$

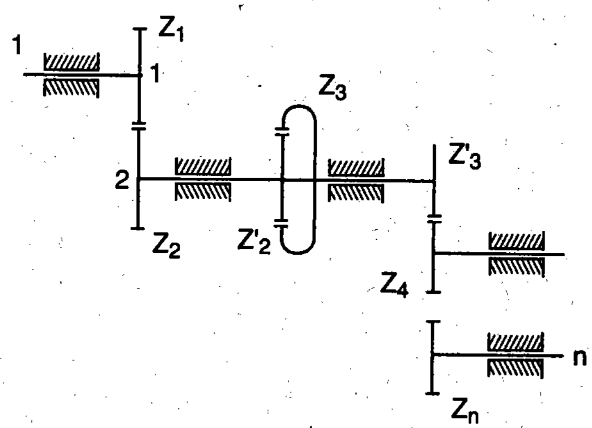
Dễ dàng suy ra :

$$i_{1n} = \frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_2}\frac{\overline{\omega}_2}{\overline{\omega}_3}\cdots\cdots\frac{\overline{\omega}_{n-1}}{\overline{\omega}_n} = i_{12}\, i_{23} \cdots i_{(n-1)n}$$

$$= (-1)^m \frac{z_2}{z_1}\frac{z_3}{z'_2}\cdots\cdots\frac{z_n}{z'_{n-1}}$$

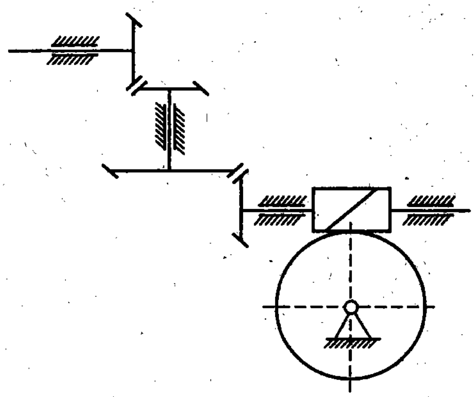
trong đó m là số cặp bánh răng ngoại tiếp trong hệ bánh răng. Vậy nếu trong hệ có số lẻ (m là số lẻ) cặp bánh răng ngoại tiếp thì trục vào và trục ra quay ngược chiều nhau, nếu m là số chẵn cặp bánh răng ăn khớp ngoại tiếp thì trục vào và trục ra quay cùng chiều nhau.

Từ công thức vừa nhận được ta thấy rằng, nếu có một bánh răng ăn khớp đồng thời với bánh răng ở trục trước và trục sau thì nó không ảnh hưởng gì đến tỉ số truyền (vì nó là bánh răng bị dẫn đối với trục trước và là bánh răng dẫn đối với trục sau), mà chỉ làm thay đổi quan hệ chiều quay giữa trục vào và trục ra. Các bánh răng này gọi là bánh răng nối không, không làm thay đổi giá trị của tỉ số truyền nhưng một lần thay đổi quan hệ chiều quay giữa trục vào và trục ra đối với một bánh nối không.



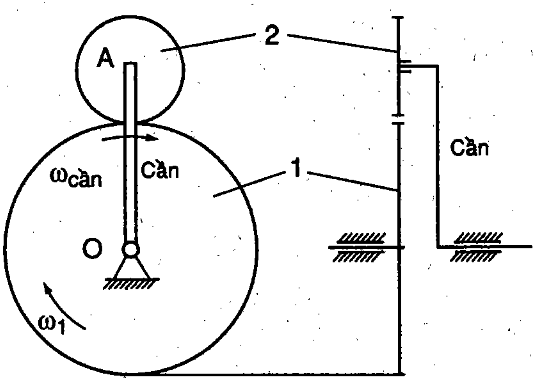
Hình 5–19

– Hệ bánh răng không gian : Khi trục các bánh răng không song song với nhau thì công thức tỉ số truyền về giá trị vẫn được tính như trong hệ bánh răng phẳng, chỉ không có ý nghĩa về quan hệ chiều quay giữa trục vào và trục ra. Để thiết lập mối quan hệ này cần phải bổ sung một số quy ước (hình 5–20).

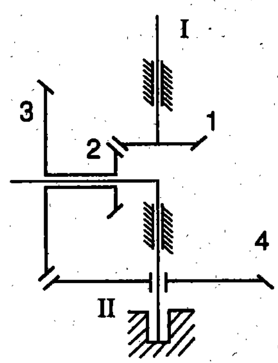


Hình 5–20

b) Hệ bánh răng vi sai : Trong hệ bánh răng vi sai, các bánh răng có trục quay cố định gọi là bánh trung tâm, bánh răng có trục quay di động được gọi là bánh vệ tinh, khâu mang bánh vệ tinh gọi là cần. Hệ bánh răng vi sai có một bánh trung tâm được gọi là hệ bánh hành tinh. Hệ bánh vi sai cũng được chia thành hệ bánh vi sai phẳng (được giới thiệu trong chương 4, ví dụ 4–3), nó có sơ đồ như trên hình 5–21 và hệ bánh răng vi sai không gian như trên hình 5–22 :



Hình 5–21



Hình 5–22

Phần hai

TĨNH HỌC

Chương 6

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ CÁC ĐỊNH LUẬT TĨNH HỌC

6.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

6.1.1. Vật rắn tuyệt đối : là một tập hợp vô hạn các chất điểm mà khoảng cách giữa hai chất điểm bất kì luôn luôn không đổi. Vật rắn tuyệt đối là mô hình đơn giản nhất của vật thể khi biến dạng của nó có thể bỏ qua được do bé quá hoặc không đóng vai trò quan trọng trong quá trình khảo sát. Vật rắn tuyệt đối gọi tắt là vật rắn.

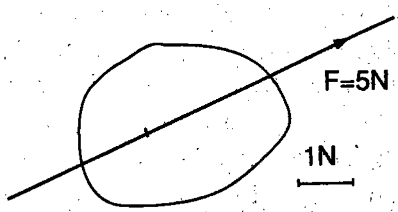
6.1.2. Cân bằng : là trạng thái đứng yên của vật rắn so với một vật rắn khác được chọn làm chuẩn (hệ quy chiếu). Trong tĩnh học hệ quy chiếu được chọn phải thỏa mãn định luật quán tính của Niutơn (hệ quy chiếu đứng yên tuyệt đối). Cân bằng như vậy được gọi là cân bằng tuyệt đối.

6.1.3. Lực : là tương tác giữa các vật mà kết quả của nó là gây ra sự biến đổi trạng thái chuyển động cơ học (tức là sự thay đổi vị trí, bao gồm cả biến dạng) mà cân bằng chỉ là trường hợp riêng. Kinh nghiệm và thực nghiệm xác minh rằng lực được đặc trưng bởi các yếu tố sau :

a) Điểm đặt của lực là điểm mà tại đó vật nhận được tác dụng từ vật khác.

b) Phương chiều của lực là phương chiều chuyển động của chất điểm (vật thể có kích thước vô cùng bé) từ trạng thái yên nghỉ dưới tác dụng cơ học.

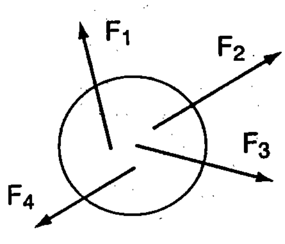
c) Cường độ của lực là số đo độ mạnh yếu của tương tác cơ học. Đơn vị của lực là Niutơn, kí hiệu là N, cùng các bội số của nó như kiloniutơn, kí hiệu là kN...



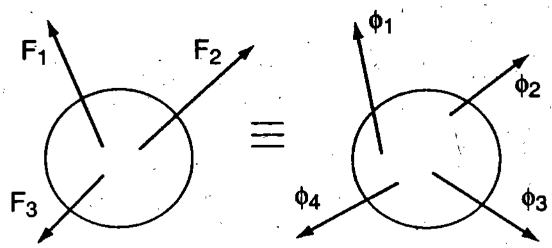
Hình 6-1

Mô hình toán học của lực là véctơ lực, kí hiệu $\vec{F}$. Điểm đặt của véctơ lực là điểm đặt của lực. Phương chiều của véctơ lực là phương chiều tác dụng của lực. Môđun của véctơ lực biểu diễn cường độ tác dụng của lực (với tỉ lệ xích được chọn trước). Giá mang véctơ lực được gọi là đường tác dụng của lực (hình 6–1).

6.1.4. Các định nghĩa khác



Hình 6-2



Hình 6-3

a) Hệ lực : là một tập hợp nhiều lực tác dụng lên một vật rắn, được kí hiệu : $\varphi(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_N)$ (hình 6–2).

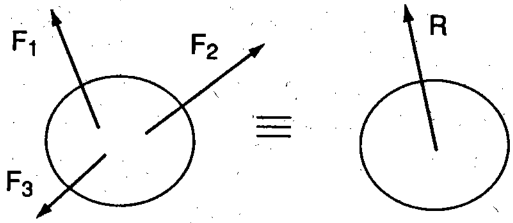
Hai hệ lực được gọi là tương đương khi chúng gây cho cùng một vật rắn các trạng thái chuyển động cơ học như nhau (hình 6–3), kí hiệu:

$$\varphi(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_N) \equiv \psi(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, ...\vec{\phi}_k)$$

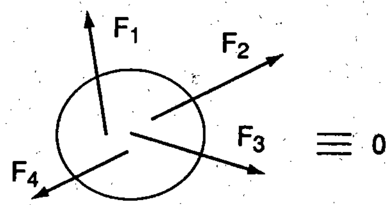
Hợp lực của hệ lực là một lực duy nhất tương đương với hệ lực. Gọi $\vec{R}$ là hợp lực của hệ lực $\varphi(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_N)$ thì (hình 6–4) :

$$\vec{R} \equiv \varphi(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_N)$$

Hệ lực cân bằng là hệ lực mà dưới tác dụng của nó vật rắn nằm ở vị trí cân bằng (hình 6–5) : $\varphi(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_N) \equiv 0$



Hình 6–4



Hình 6–5

b) Ngẫu lực : là một hệ lực gồm hai lực song song ngược chiều và cùng cường độ. Một ngẫu lực được đặc trưng bởi các yếu tố sau :

– Mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực là mặt phẳng P chứa hai lực thành phần của ngẫu lực được gọi tắt là mặt phẳng ngẫu lực (hình 6–6).

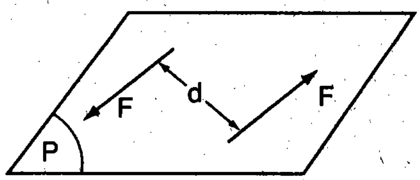
– Chiều quay của ngẫu lực trong mặt phẳng ngẫu lực.

– Cường độ tác dụng của ngẫu lực được đặc trưng bởi tích số Fd được gọi là trị số của mô men ngẫu lực, trong đó F là giá trị của các lực thành phần, d là khoảng cách vuông góc giữa hai lực thành phần được gọi là cánh tay đòn của ngẫu lực. Đơn vị ngẫu lực là Niutơn.mét, kí hiệu *Nm* và các bội của nó như kiloniutơn.mét (*kNm*).

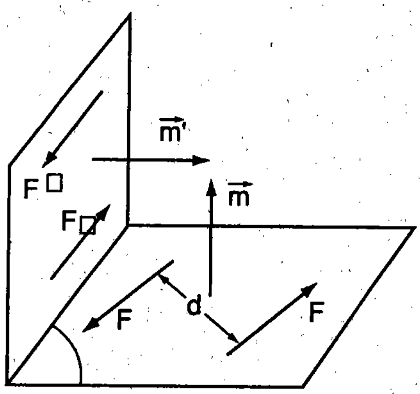
Trong không gian, ngẫu lực được biểu diễn bằng véctơ mô men ngẫu lực, kí hiệu là $\vec{m}$; được xác định như sau (hình 6–7):

– Phương vuông góc với mặt phẳng chứa ngẫu lực.

– Chiều : nhìn từ ngọn xuống thấy chiều quay của ngẫu lực ngược chiều kim đồng hồ.



Hình 6–6

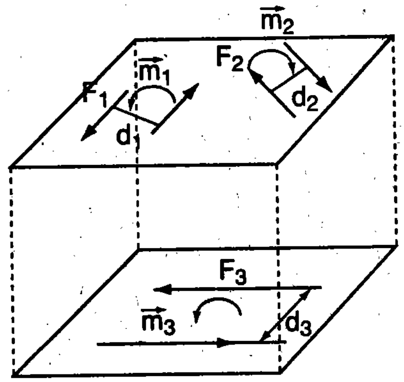


Hình 6–7

– Môđun của véctơ mô men ngẫu lực bằng trị số mô men ngẫu lực, tức bằng Fd.

Quy ước gốc của véctơ $\vec{m}$ nằm trên mặt phẳng ngẫu lực.

Trong trường hợp khi các ngẫu lực nằm trong một mặt phẳng hoặc trong các mặt phẳng song song nhau, ngẫu lực được biểu diễn qua mô men đại số ngẫu lực, kí hiệu : $\overline{m} = \pm Fd$, lấy dấu "+" khi chiều quay ngẫu lực ngược chiều kim đồng hồ và lấy dấu "–" trong trường hợp ngược lại. Ví dụ (hình 6–8),



Hình 6–8

$$\overline{m}_1 = +F_1d_1;\ \overline{m}_2 = -F_2d_2;\ \overline{m}_3 = +F_3d_3,$$

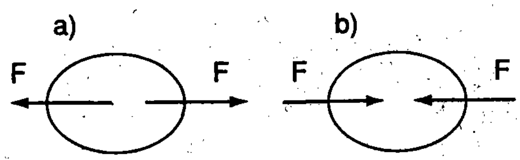
c) Liên kết và phản lực liên kết : Liên kết là những điều kiện cản trở di chuyển của vật. Trong tĩnh học các điều kiện đó được thực hiện bằng sự tiếp xúc trực tiếp giữa các vật. Vật bị cản gọi là vật không tự do. Lực tác dụng qua lại giữa các vật không tự do được gọi là lực liên kết. Các lực không phải là lực liên kết được gọi là lực đặt vào. Nếu khảo sát một vật nào đó thì lực liên kết do vật khác tác dụng lên nó gọi là phản lực liên kết, còn lực do nó tác dụng lên các vật khác được gọi là áp lực.

6.2. CÁC ĐỊNH LUẬT TĨNH HỌC

Định luật 1 : (định luật về hai lực cân bằng).

Điều kiện cần và đủ để một vật rắn nằm cân bằng dưới tác dụng của hai lực là hai lực có cùng đường tác dụng, ngược chiều nhau và cùng cường độ.

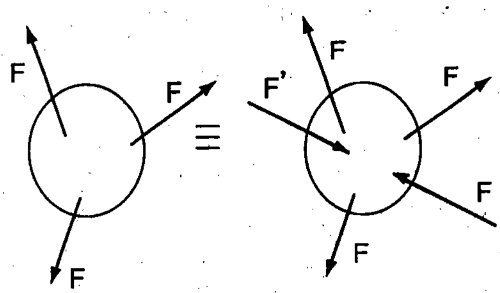
Hai lực thỏa mãn điều kiện này được gọi là hai lực cân bằng (hình 6–9a, b).



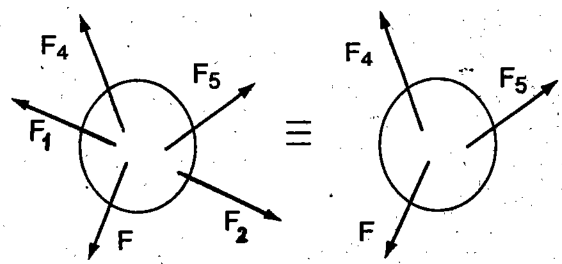
Hình 6–9

Định luật 2 : (định luật thêm bớt hai lực cân bằng).

Tác dụng của một hệ lực không thay đổi nếu thêm vào hoặc bớt đi hai lực cân bằng.



Hình 6–10a



Hình 6–10b

Như vậy nếu $(\vec{F}, \vec{F}')$ là hai lực cân bằng thì (hình 6–10a):

$$\varphi(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_N) \equiv \varphi'(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_N, \vec{F}, \vec{F}')$$

Hoặc hệ lực φ có hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ cân bằng thì (hình 6–10b) :

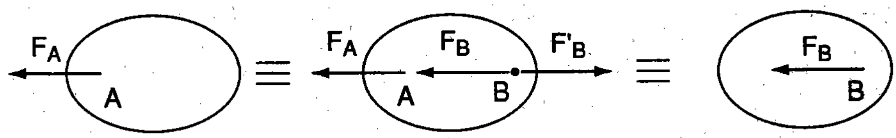
$$\varphi'(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_N) \equiv \varphi''(\vec{F}_3, \vec{F}_4, \ldots \vec{F}_N)$$

Hệ quả (định lí trượt lực).

Tác dụng của lực không thay đổi khi trượt lực trên đường tác dụng của nó.

Thực vậy thêm hai lực cân bằng nhau $(\vec{F}_B, \vec{F}'_B)$ tại B có cùng cường độ với lực $\vec{F}_A$, ta có (hình 6–11) :

$$(\vec{F}_A) \equiv (\vec{F}_B, \vec{F}'_B, \vec{F}_A) \equiv (\vec{F}_B)$$



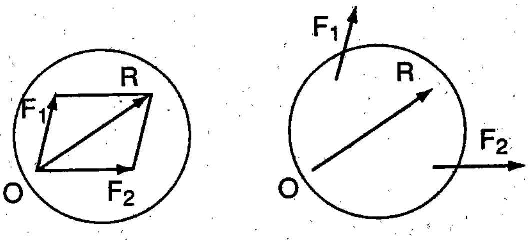
Hình 6–11

Như vậy trong trường hợp của lực tác dụng lên vật rắn (và chỉ đối với vật rắn) điểm đặt lực không quan trọng, chỉ có đường tác dụng là quan trọng. Lực trong tĩnh học vật rắn là véctơ trượt.

Định luật 3 : (định luật hình bình hành lực)

Hai lực tác dụng tại một điểm tương đương với một lực tác dụng tại cùng điểm đó và có véctơ lực bằng véctơ chéo của hình bình hành có hai cạnh là hai véctơ lực của các lực đã cho.

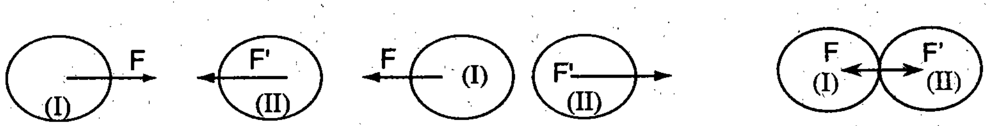
Nhờ định luật 3 phép cộng véctơ được sử dụng cho phép tính lực. Cần lưu ý rằng nhờ hệ quả trượt lực, điều kiện hai lực đặt tại một điểm có thể thay thế bằng điều kiện hai đường tác dụng của hai lực gặp nhau.



Hình 6–12

Định luật 4 : (định luật tác dụng và phản tác dụng).

Lực tác dụng và lực phản tác dụng giữa hai vật có cùng cường độ, cùng đường tác dụng và hướng ngược chiều nhau (hình 6–13).

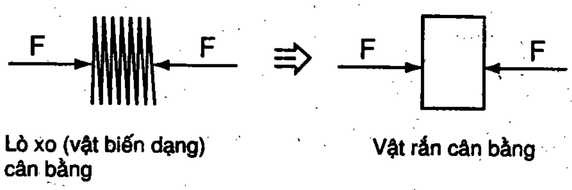


Hình 6–13

Chú ý rằng lực tác dụng và phản lực tác dụng không phải là hai lực cân bằng vì chúng không tác dụng lên cùng một vật rắn. Định luật tác dụng và phản tác dụng đúng cho mọi hệ quy chiếu (hệ quy chiếu quán tính và không quán tính) và là cơ sở cho phép mở rộng các kết quả đã khảo sát đối với bài toán một vật sang bài toán hệ vật.

Định luật 5 : (định luật hóa rắn).

Một vật biến dạng đã cân bằng dưới tác dụng của một hệ lực thì khi hóa rắn nó vẫn cân bằng (hình 6–14).

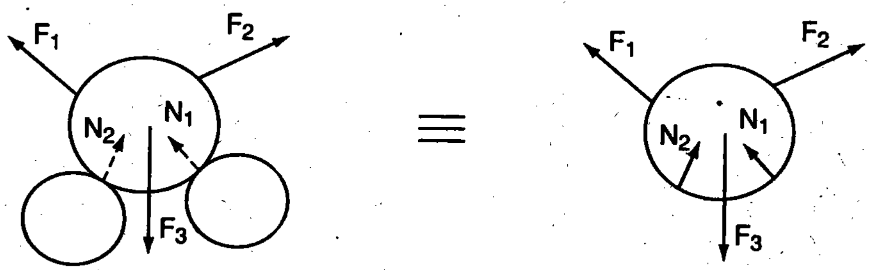


Hình 6–14

Vậy hệ lực tác dụng lên "vật biến dạng cân bằng" thỏa mãn các điều kiện như hệ lực tác dụng lên vật rắn cân bằng. Do đó có thể sử dụng các kết quả khảo sát đối với vật rắn cân bằng cho trường hợp vật rắn biến dạng cân bằng. Tuy nhiên nó chỉ là điều kiện cần chứ không phải là điều kiện đủ. Để khảo sát bài toán cân bằng vật rắn biến dạng ngoài các kết quả nhận được khi khảo sát vật rắn cân bằng cần thêm vào các giả thiết về biến dạng (ví dụ như định luật Húc trong sức bền vật liệu).

Định luật 6 : (định luật thay thế liên kết)

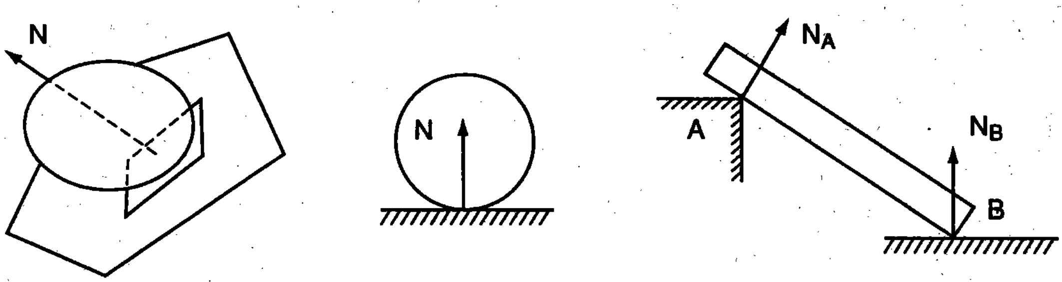
Vật không tự do cân bằng có thể được xem là vật tự do cân bằng bằng cách giải phóng tất cả các liên kết và thay thế tác dụng các liên kết được giải phóng bằng các phản lực liên kết thích hợp (hình 6–15).



Hình 6–15

Một số quy tắc tìm các đặc trưng của phản lực liên kết đối với một số liên kết thường gặp (các liên kết không ma sát).

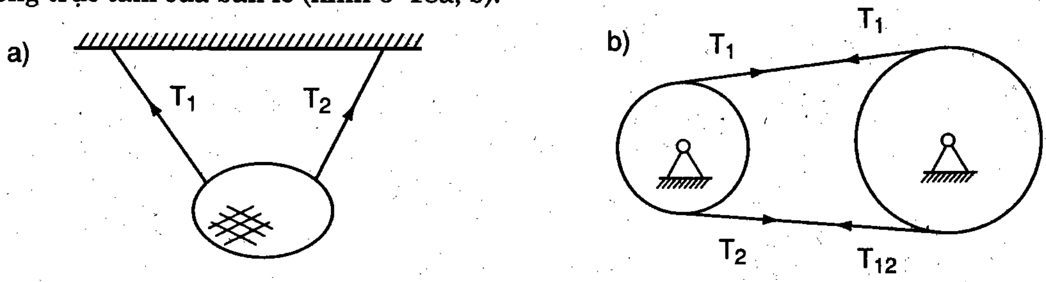
a) Liên kết tựa : hai vật tựa trực tiếp lên nhau, chỗ tiếp xúc là bề mặt hoặc đường hoặc điểm. Phản lực tựa có phương vuông góc với mặt tựa (hoặc đường tựa) (hình 6–16).



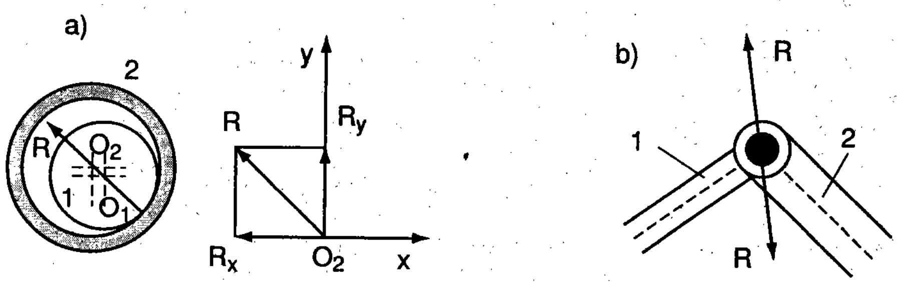
Hình 6–16

b) Liên kết dây mềm, thẳng và không dãn : phản lực của dây tác dụng lên vật khảo sát đặt vào điểm buộc dây và hướng vào dây. Phản lực của vật rắn tác dụng lên dây được gọi là sức căng dây, kí hiệu là T. Sức căng của dây hướng dọc dây và hướng ra đối với mặt cắt dây (hình 6–17a, b).

c) Liên kết bản lề : Hai vật có liên kết bản lề khi chúng có trục (chốt) chung. Trong trường hợp này hai vật tựa vào nhau theo đường nhưng điểm tựa chưa được xác định. Phản lực liên kết $\vec{R}$ đi qua tâm của trục và có phương chiều chưa xác định. Phản lực được phân thành hai thành phần vuông góc với nhau ($\vec{R}_x \perp \vec{R}_y$), nằm trong mặt phẳng thẳng góc với đường trục tâm của bản lề (hình 6–18a, b).

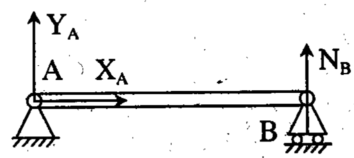


Hình 6–17

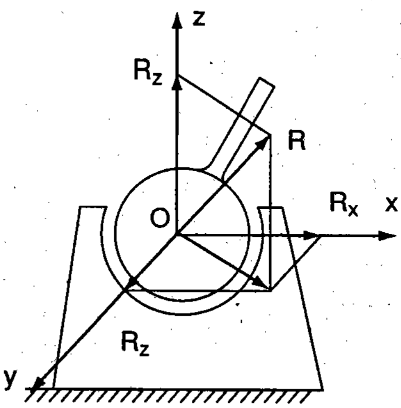


Hình 6–18

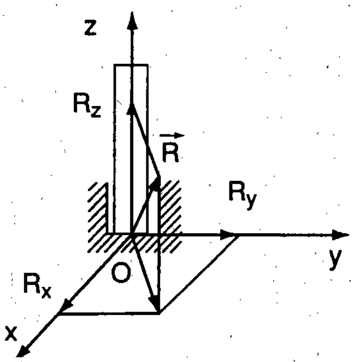
d) Liên kết gối : dùng để đỡ các dầm, khung... có loại gối cố định và gối có con lăn, phản lực liên kết của gối cố định được xác định như liên kết bản lề, còn phản lực liên kết của gối có con lăn được tìm theo quy tắc của phản lực liên kết tựa (hình 6–19).



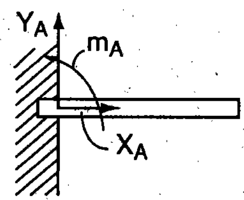
Hình 6–19



Hình 6–20



Hình 6–21

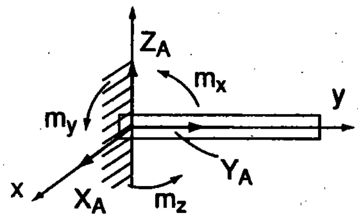


Hình 6–22

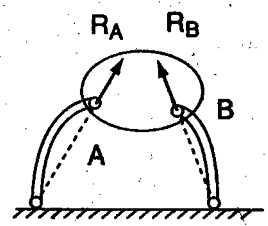
e) Liên kết gối cầu : được thực hiện nhờ một quả cầu gắn vào đầu của vật chịu liên kết và được đặt trong một vỏ cầu gắn liền với vật gây liên kết. Phản lực gối cầu đi qua tâm O của vỏ cầu, có phương, chiều chưa xác định. Thường phản lực gối cầu được phân thành

3 thành phần vuông góc ($\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$), (hình 6–20). Trường hợp tương tự liên kết gối cầu là liên kết cối (ổ chắn) (hình 6–21).

g) Liên kết ngàm : là liên kết khi vật được nối cứng vào một vật khác (ví dụ như hàn). Trong trường hợp ngàm phẳng phản lực liên kết gồm hai lực thẳng góc với nhau và một ngẫu lực nằm trong mặt phẳng chứa hai lực (hình 6–22). Đối với ngàm không gian, phản lực liên kết gồm 3 thành phần lực vuông góc với nhau (dọc 3 trục tọa độ) và 3 thành phần ngẫu lực trong 3 mặt phẳng tọa độ (hình 6–23).



Hình 6–23



Hình 6–24

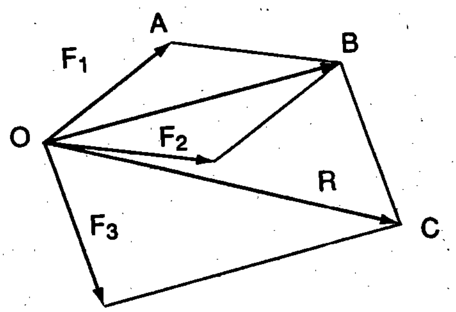
h) Liên kết thanh : được thực hiện nhờ các thanh thỏa mãn các điều kiện sau: chỉ có lực tác dụng ở hai đầu, còn dọc thanh không có lực tác dụng và trọng lượng thanh được bỏ qua (ví dụ các thanh không trọng lượng, liên kết bằng các liên kết trụ hoặc cầu). Phản lực có phương qua hai điểm chịu lực (hình 6–24).

Nói chung, liên kết có thể có kết cấu đa dạng. Xác định phương chiều của phản lực liên kết trong trường hợp chung theo quy tắc sau: tương ứng với hướng di chuyển thẳng bị ngăn trở có phản lực ngược chiều, tương ứng với hướng di chuyển quay bị ngăn trở có ngẫu phản lực ngược chiều.

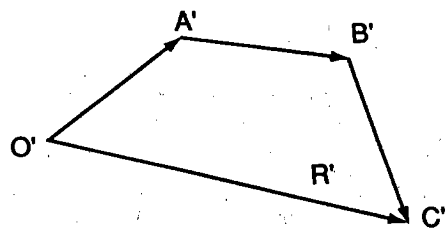
6.3. CÁC HỆ QUẢ

Từ các định luật đã nêu trên ta nhận được các kết quả sau.

6.3.1. Hợp các lực đồng quy : Giả sử có hệ lực đặt tại O (trường hợp có đường tác dụng gặp nhau tại O thì áp dụng hệ quả trượt lực để đưa về trường hợp này). Áp dụng trực tiếp định luật về hình bình hành lực ta tìm được hợp lực của hệ lực $\vec{R}$ của hệ lực (hình 6–25).



Hình 6–25



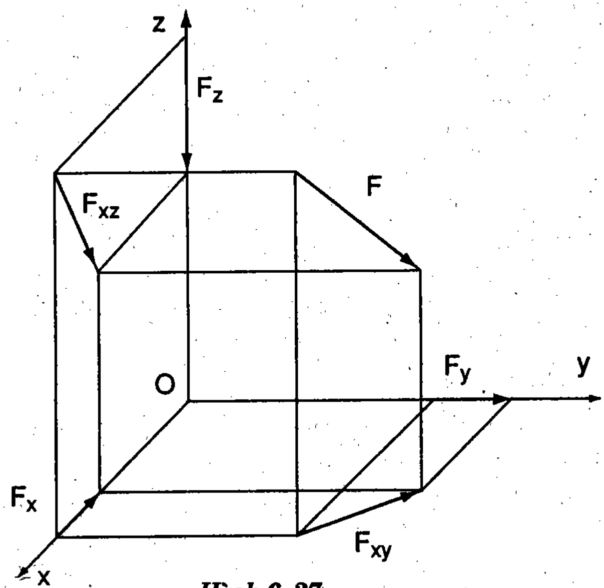
Hình 6–26

Hợp lực đi qua điểm đồng quy O và có véctơ lực :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N; \qquad \vec{R} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \tag{6–1}$$

Để xác định véctơ lực của hợp lực có thể sử dụng phương pháp vẽ hoặc phương pháp xác định hình chiếu của nó trên 3 trục vuông góc.

a) Phương pháp vẽ : Hợp lực được biểu diễn bằng véctơ khép kín của đa giác lực được xây dựng như sau: từ đầu mút của véctơ biểu diễn lực $\vec{F}_1$ vẽ véctơ $\overrightarrow{AB}$ song song và bằng véctơ lực $\vec{F}_2$, từ B vẽ véctơ $\overrightarrow{BC}$ song song và bằng véctơ lực $\vec{F}_3$ và cứ thế tiếp tục cho đến lực cuối cùng $\vec{F}_N$ (N=3). Đa giác lực OABC là đa giác lực của hệ 3 lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ cạnh $\overrightarrow{OC}$ là véctơ khép kín đa giác lực, nó biểu diễn hợp lực của 3 lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$.



Hình 6–27

Vì hợp lực phải đi qua điểm O, nên đa giác lực không cần thiết phải vẽ xuất phát từ điểm đồng quy O mà có thể từ một điểm O' tùy ý (hình 6–26). Vậy: Hợp lực của hệ lực đồng quy được biểu diễn bằng véctơ khép kín của đa giác lực đặt tại điểm đồng quy.

b) Phương pháp hình chiếu (hình 6–27): Khi chiếu hai vế của đẳng thức véctơ (6–1) lên 3 trục tọa độ vuông góc ta được :

$$\left.\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + .. + F_{Nx} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx} \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + .. + F_{Ny} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky} \\ R_z &= F_{1z} + F_{2z} + .. + F_{Nz} = \sum_{k=1}^{N} F_{kz} \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{–}2)$$

Đó là 3 hình chiếu của véctơ hợp lực lên ba trục tọa độ vuông góc. Từ đó có thể xác định được giá trị phương chiều của hợp lực :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos(Ox, \vec{R}) = \frac{R_x}{R}; \ \cos(Oy, \vec{R}) = \frac{R_y}{R}; \ \cos(Oz, \vec{R}) = \frac{R_z}{R} \qquad (6\text{–}3)$$

Véctơ khép kín $\vec{R}'$ của đa giác lực xuất phát từ một điểm O' bất kì được gọi là véctơ chính của hệ lực, kí hiệu là : $\vec{R}'$

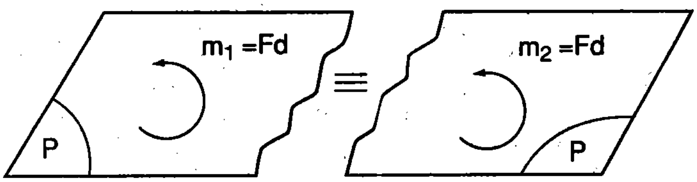
$$\vec{R}' = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \qquad (6\text{–}4)$$

Vậy ta có định lí 6–1.

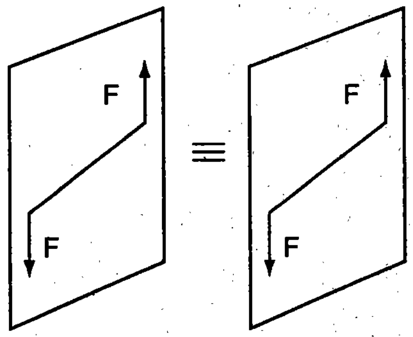
Định lí 6–1 : Hợp lực của hệ lực đồng quy được biểu diễn bằng véctơ chính của hệ lực đặt tại điểm đồng qui.

6.3.2. Các định lí biến đổi tương đương ngẫu lực : Ta có các định lí 6–2.

Định lí 6–2 : Hai ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng, có cùng chiều quay và cùng trị số mô men (tức cùng mô men đại số) thì tương đương nhau (hình 6–28).



Hình 6–28



Hình 6–29

Định lí 6–3 : Tác dụng của ngẫu lực không thay đổi khi nó dời đến những mặt phẳng song song (hình 6–29).

Chứng minh các định lí trên có thể tìm trong ví dụ [10].

Từ hai định lí trên suy ra định lí 6–4 :

Định lí 6–4 : Hai ngẫu lực có cùng véctơ mô men thì tương đương nhau (hình 6–30).

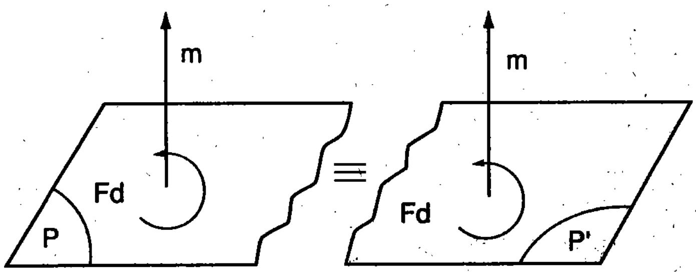
Như vậy, tác dụng của ngẫu lực lực hoàn toàn được đặc trưng bằng véctơ mô men ngẫu lực $\vec{m}$.

Trong trường hợp riêng khi xét tác dụng của ngẫu lực trong mặt phẳng thì tác dụng của nó hoàn toàn được đặc trưng bằng mô men đại số ngẫu lực $\bar{m} = \pm Fd$.

Do đó ta nhận được định lí 6–5.

Định lí 6–5 : Hợp các ngẫu lực được một ngẫu lực, có véctơ bằng tổng các véctơ mô men các ngẫu lực đã cho (hình 6–31) :

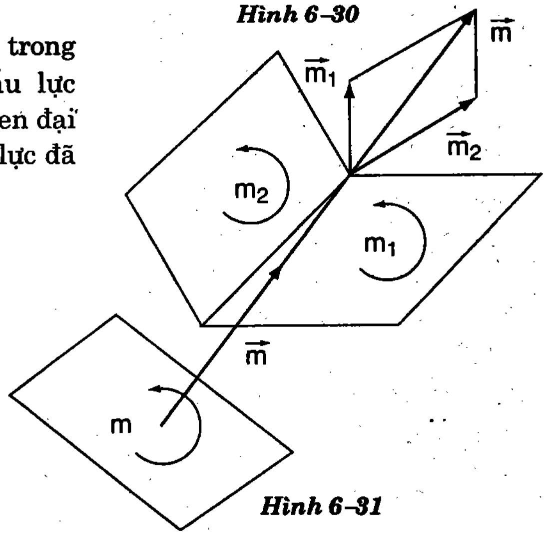
$$\vec{m} = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_k \qquad (6\text{–}5)$$



Hình 6–30

Định lí 6–6 : Hợp các ngẫu lực trong cùng một mặt phẳng được một ngẫu lực nằm trong mặt phẳng đã cho, có mô men đại số bằng tổng mô men đại số các ngẫu lực đã cho :

$$\bar{m} = \sum_{k=1}^{N} \bar{m}_k \qquad (6\text{–}6)$$



Hình 6–31

Chương 7

HỆ LỰC PHẲNG

Hệ lực phẳng là một tập hợp các lực tác dụng lên cùng một vật rắn và có đường tác dụng cùng nằm trong một mặt phẳng (hình 7-1).

7.1. VÉC TƠ CHÍNH VÀ MÔ MEN CHÍNH CỦA HỆ LỰC PHẲNG

7.1.1. Véctơ chính của hệ lực phẳng

Cho hệ lực phẳng $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N)$

a) Định nghĩa : véctơ chính của hệ lực, kí hiệu $\vec{R}'$ là véctơ tổng của các véctơ lực của hệ lực :

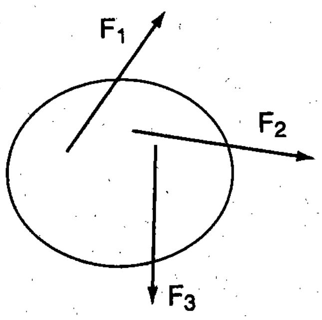
$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \quad (7-1)$$

b) Xác định véctơ chính có thể sử dụng phương pháp vẽ đa giác lực (chương 6 mục 6.31a). Trong trường hợp này đa giác lực là đa giác phẳng (hình 7-2), cũng có thể xác định véctơ chính qua các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ vuông góc theo công thức (6-2). Trong trường hợp này chỉ cần xác định hai hình chiếu của nó trên hai trục vuông góc với nhau, ví dụ:

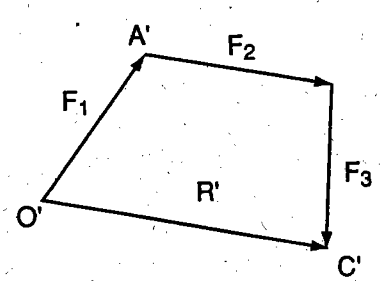
$$\begin{aligned} R'_x &= F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{Nx} = \sum_{k=1}^{N} F_{1x} \\ R'_y &= F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{Ny} = \sum_{k=1}^{N} F_{1y} \end{aligned} \quad (7-2)$$

Giá trị và phương chiều của véctơ chính được xác định theo công thức :

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y}; \ \cos(Ox, \vec{R}') = \frac{R'_x}{R'}; \ \cos(Oy, \vec{R}') = \frac{R'_y}{R'} \quad (7-3)$$



Hình 7-1



Hình 7-2

7.1.2. Mô men chính của hệ lực phẳng đối với một điểm

a) Mô men của một lực đối với một điểm : Mô men của một lực đối với điểm O, kí hiệu $\overline{m}_O(\vec{F})$, là một đại lượng đại số :

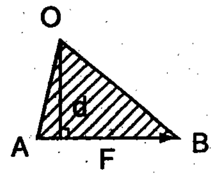
$$\overline{m}_O(\vec{F}) = \pm Fd \quad (7-4)$$

trong đó F là trị số của lực, d là khoảng cách thẳng góc từ O đến đường tác dụng của lực, lấy dấu "+" khi lực có chiều quay quanh O ngược với chiều kim đồng hồ và lấy dấu "–" trong trường hợp ngược lại. Trong trường hợp hình 7–3 thì :

$$\bar{m}_O(\vec{F}) = +Fd$$

Mô men của lực đối với điểm bằng không khi lực đi qua điểm lấy mô men. Về trị số mô men của lực đối với điểm bằng hai lần diện tích của tam giác có đỉnh là điểm lấy mô men, có cạnh đáy là véctơ lực :

$$\left|\bar{m}_O(\vec{F})\right| = 2\text{dt } \Delta OAB \qquad (7\text{–}5)$$

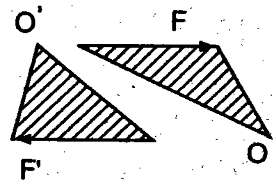


Hình 7–3

Chú ý:

– Mô men của ngẫu lực bằng mô men của một lực thành phần đối với điểm nằm trên đường tác dụng của lực thành phần kia, tức là (hình 7–4) :

$$\bar{m} = \bar{m}_O(\vec{F}) = \bar{m}_O(\vec{F}') \qquad (7\text{–}6)$$

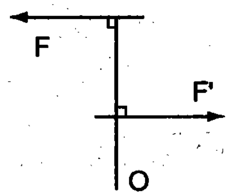


Hình 7–4

O nằm trên đường tác dụng của $\vec{F}'$, còn O' nằm trên đường tác dụng của $\vec{F}$.

– Mô men của ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F}')$ đối với một điểm O bất kì (tức là tổng mô men của lực $\vec{F}$ và $\vec{F}'$ đối với điểm O) chính bằng mô men của ngẫu lực, tức (hình 7–5):

$$\bar{m} = \bar{m}_O(\vec{F}') + \bar{m}_O(\vec{F}) \qquad (7\text{–}7)$$



Hình 7–5

b) Mô men chính của hệ lực phẳng đối với một điểm O : là đại lượng đại số, kí hiệu $\bar{m}^O$, bằng tổng mô men của các lực của hệ lực đối với điểm O:

$$\bar{m}^O = \bar{m}_O(\vec{F}_1) + \bar{m}_O(\vec{F}_2) + \ldots + \bar{m}_O(\vec{F}_N) = \sum_{k=1}^{N} \bar{m}_O(\vec{F}_k) \qquad (7\text{–}8)$$

c) Nhận xét :

– Véctơ chính là véctơ tự do, còn mô men chính phụ thuộc vào điểm lấy mô men, nghĩa là mô men chính lấy đối với hai điểm khác nhau sẽ khác nhau :

$$\bar{m}^{O'} = \bar{m}^O + \bar{m}_{O'}(\vec{R}_O) \qquad (7\text{–}9)$$

trong đó $\bar{m}^{O'}$ và $\bar{m}^O$ là mô men chính của hệ lực đối với các điểm O' và O tương ứng, còn $\bar{m}_{O'}(\vec{R}_O)$ là mô men đối với điểm O' của véctơ chính đặt tại O.

– Đối với hệ lực đồng quy thì mô men chính của hệ lực đối với điểm đồng quy bằng không. Đối với hệ ngẫu lực thì véctơ chính của hệ ngẫu lực luôn luôn bằng không, còn mô men chính của hệ ngẫu lực đối với điểm bất kì O nào cũng bằng mô men của ngẫu lực tổng cộng tức bằng tổng mô men các ngẫu lực thành phần của hệ ngẫu lực.

7.2. THU GỌN HỆ LỰC PHẲNG

7.2.1. Định lí dời lực song song

Định lí 7–1: Lực $\vec{F}$ đặt tại A tương đương với tác dụng của nó đặt tại O (lực $\vec{F}'$) và một ngẫu lực có mô men bằng mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O.

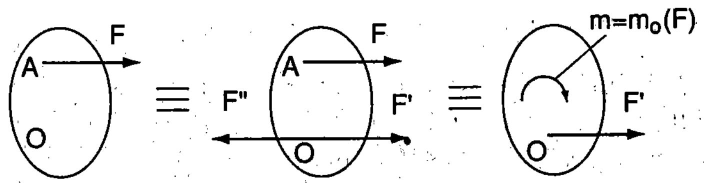
$$\vec{F} \equiv \vec{F}' \text{ và } \vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F}) \qquad (7\text{–}10)$$

Chứng minh : Đặt tại O hai lực cân bằng $(\vec{F}', \vec{F}'')$ có cùng trị số với lực $\vec{F}$. Theo định luật 2 (chương 6), ta có : $\vec{F} \equiv (\vec{F}', \vec{F}'', \vec{F}) \equiv \vec{F}'$ và $(\vec{F}, \vec{F}'')$

$(\vec{F}, \vec{F}'')$ là một ngẫu lực có mô men : $\vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F})$

theo (7–6).

Vậy (7–10) đã được chứng minh (hình 7–6).



Hình 7–6

7.2.2. Thu gọn hệ lực phẳng về tâm O : Lấy một điểm O trong mặt phẳng tác dụng của hệ lực gọi là tâm thu gọn. Sử dụng định lí dời lực song song để dời các lực về tâm O (hình 7–7) :

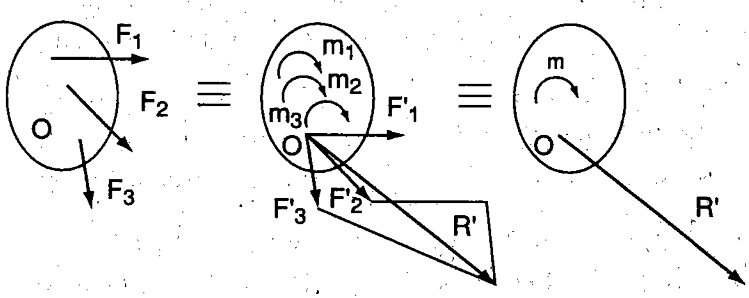
$\vec{F}_1 \equiv \vec{F}'_1$ và ngẫu lực $\vec{m}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1)$

$\vec{F}_2 \equiv \vec{F}'_2$ và ngẫu lực $\vec{m}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2)$

......

$\vec{F}_N \equiv \vec{F}'_N$ và ngẫu lực $\vec{m}_N = \vec{m}_O(\vec{F}_N)$

Như vậy, thu gọn hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N)$ về tâm O ta được hệ lực đồng quy tại O: $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, ..., \vec{F}'_N)$ và hệ ngẫu lực phẳng: $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_N)$.



Hình 7–7

Như đã biết hệ lực đồng quy có hợp lực qua O, được biểu diễn bằng véctơ chính của hệ lực đã cho đặt tại O (véctơ chính của hệ lực đồng quy thu về O và véctơ chính của hệ lực đã cho bằng nhau):

$$\vec{R}'_O = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}'_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k = \vec{R}' \qquad (7\text{–}11)$$

trong đó $\vec{R}'_O$ là hợp lực của hệ lực đồng quy thu về O, còn $\vec{R}'$ là véctơ chính của hệ lực phẳng đã cho.

Hệ ngẫu lực phẳng $(\overline{m}_1, \overline{m}_2, ..., \overline{m}_N)$, theo định lí 6–6 tương đương với một ngẫu lực $\overline{m}$, nằm trong mặt phẳng của hệ lực :

$$\overline{m} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2 + ... + \overline{m}_N = \overline{m}_O(\vec{F}_1) + \overline{m}_O(\vec{F}_2) + ... + \overline{m}_O(\vec{F}_N)$$

$$\overline{m} = \sum_{k=1}^{N} \overline{m}_O(\vec{F}_k) = \overline{m}^O \qquad (7\text{–}12)$$

khi dựa vào (7–8). Vậy ta có định lí 7–2.

Định lí 7–2 : Hệ lực phẳng bất kì tương đương với một lực và một ngẫu lực đặt tại một điểm tùy ý cùng nằm trong mặt phẳng tác dụng của hệ lực. Chúng được gọi là lực và ngẫu lực thu gọn. Lực thu gọn đặt tại tâm thu gọn có véctơ lực bằng véctơ chính của hệ lực, còn ngẫu lực thu gọn có mô men bằng mô men chính của hệ lực đối với tâm thu gọn.

Chú ý : Phương chiều và giá trị của lực thu gọn không phụ thuộc vào tâm thu gọn (vì véctơ chính là véctơ tự do) còn ngẫu lực thu gọn phụ thuộc vào tâm thu gọn (ngẫu lực thu gọn biến thiên theo tâm thu gọn và được tính theo công thức 7–9).

7.2.3. Các dạng chuẩn của hệ lực phẳng : Dạng chuẩn là dạng đơn giản nhất nhận được khi thu gọn hệ lực. Từ kết quả thu gọn hệ lực phẳng về một tâm ta nhận được các dạng chuẩn sau :

a) Hệ lực phẳng cân bằng khi véctơ chính và mô men chính triệt tiêu:

$$\vec{R}' = 0, \quad \overline{m}^O = 0 \rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N) \equiv 0$$

b) Hệ lực phẳng thu về một ngẫu lực khi véctơ chính triệt tiêu, còn mô men chính không triệt tiêu :

$$\vec{R}' = 0, \quad \overline{m}^O \neq 0 \rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N) \equiv \overline{m}^O$$

Trong hai trường hợp trên vì $\vec{R}' = 0$ nên theo công thức (7–9), mô men chính đối với mọi tâm đều bằng nhau, trong trường hợp a) bằng không đối với mọi tâm còn trong trường hợp b) bằng $\overline{m}^O$ đối với mọi tâm.

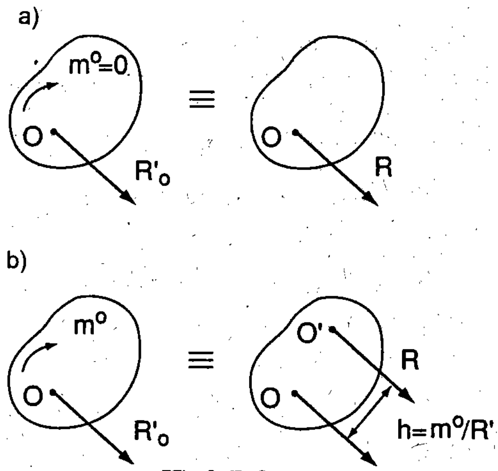
c) Hệ lực phẳng có hợp lực : Khi $\vec{R}' \neq 0$, $\overline{m}^O = 0$ thì $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N) \equiv \vec{R}'_O$ tức là hệ lực đã cho có hợp lực đặt tại O có véctơ lực bằng véctơ chính của hệ lực (hình 7–8a).

Khi $\vec{R}' \neq 0$, $\overline{m}^O \neq 0$, hệ lực thu về tâm O được một lực $(\vec{R}_O)$ và một ngẫu lực $\overline{m}^O$, theo định lí dời lực song song có thể đưa về một lực có phương chiều và giá trị bằng phương chiều và giá trị của véctơ chính nhưng đặt tại điểm O' khác O, cách O một đoạn :

$$h = \frac{m^O}{R'}$$

sao cho mô men của hợp lực $\vec{R}$ đối với điểm O bằng $\bar{m}^O$ (hình 7–8b), tức $\bar{m}_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{N} \bar{m}_O(\vec{F}_k)$.

Vậy trong trường hợp hệ lực có hợp lực ta có định lí Varinhông :



Hình 7–8

Định lí 7–3 : Trong trường hợp hệ lực có hợp lực, mô men của hợp lực đối với một điểm bất kì bằng tổng mô men của các lực của hệ lực đối với cùng điểm đó :

$$\bar{m}_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{N} \bar{m}_O(\vec{F}_k) \qquad (7\text{–}13)$$

Từ đây dễ dàng suy ra rằng :

Hệ lực đồng quy phẳng có hai dạng chuẩn sau :

– Cân bằng nếu véctơ chính của hệ lực triệt tiêu.

– Hợp lực nếu véctơ chính của hệ lực không triệt tiêu.

Hệ ngẫu lực phẳng có hai dạng chuẩn sau :

– Cân bằng nếu mô men chính của hệ ngẫu lực triệt tiêu.

– Ngẫu lực nếu mô men chính của hệ ngẫu lực không triệt tiêu.

Hệ lực song song phẳng cùng chiều chỉ có một dạng chuẩn là hợp lực vì véctơ chính không triệt tiêu.

Hệ lực song song phẳng ngược chiều có thể có ba dạng chuẩn: cân bằng, ngẫu lực và hợp lực.

7.3. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC PHẲNG

7.3.1. Điều kiện cân bằng

Định lí 7–4 : Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là véctơ chính và mô men chính của hệ lực đối với một điểm bất kì phải đồng thời triệt tiêu.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_1) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}' = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k = 0 \\ \bar{m}^O = \sum_{k=1}^{N} \bar{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (7\text{–}14)$$

Chứng minh : Điều kiện cần được chứng minh dựa vào các dạng chuẩn của hệ lực vì nếu điều kiện (7–14) không thỏa mãn thì hệ lực phẳng hoặc tương đương với một lực hoặc một ngẫu lực, không thỏa mãn định luật 1 (chương 6). Điều kiện đủ là hiển nhiên vì khi véctơ chính bằng không, hệ lực thu gọn về tâm O sẽ được một ngẫu lực, tức thu gọn về hai lực. Nếu ngẫu lực bằng không thì hai lực đó là hai lực cân bằng.

7.3.2. Các dạng phương trình cân bằng của hệ lực phẳng

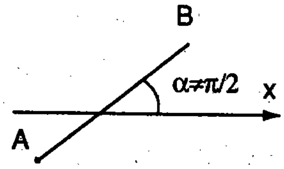
Điều kiện (7–14) có thể được viết dưới dạng các phương trình được gọi là các phương trình cân bằng. Có ba dạng phương trình cân bằng.

Dạng 1 : Điều kiện cần và đủ để hệ lực cân bằng là tổng hình chiếu các lực trên hai trục tọa độ vuông góc và tổng mô men các lực đối với một điểm bất kì đồng thời triệt tiêu.

$$\sum_{k=1}^{N} F_{kx} = 0; \ \sum_{k=1}^{N} F_{ky} = 0; \ \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \qquad (7\text{–}15)$$

Hai phương trình đầu tương đương với $\vec{R}' = 0$

Phương trình cuối tương đương với $\vec{m}^O = 0$



Hình 7–9

Dạng 2 : Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng hình chiếu các lực trên một trục và tổng mô men các lực đối với các tâm A và B tùy ý triệt tiêu, với điều kiện AB không vuông góc với trục chiếu (hình 7–9):

$$\sum_{k=1}^{N} F_{kx} = 0; \ \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_A(\vec{F}_k) = 0; \ \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_B(\vec{F}_k) = 0 \qquad (7\text{–}16)$$

Chứng minh : Điều kiện cần được chứng minh dựa vào dạng chuẩn : nếu một trong ba điều kiện trên không được thỏa mãn thì hệ đã cho tương đương với một lực hoặc một ngẫu lực, tức không thể cân bằng theo định luật 1 (chương 6).

Để chứng minh điều kiện đủ ta nhận xét rằng nếu ba điều kiện trên thỏa mãn thì hệ lực không có hợp lực, cũng không thể tương đương ngẫu lực. Thực vậy hệ lực không thể có hợp lực vì nếu hệ lực có hợp lực $(\vec{R} \neq 0)$ thì dựa vào hai điều kiện cuối và dựa vào định lí Varinhông (định lí 7–3) :

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{m}_A(\vec{F}_k) = \vec{m}_A(\vec{R}) = 0; \ \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_B(\vec{F}_k) = \vec{m}_B(\vec{R}) = 0$$

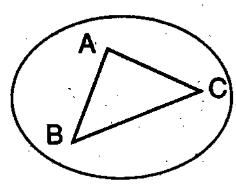
tức hợp lực $\vec{R}$ phải đi qua hai điểm A và B. Điều này mâu thuẫn với điều kiện đầu :

$$\sum F_{kx} = R_x = R\cos\alpha = 0$$

Vì $R \neq 0$; $\cos\alpha \neq 0$ (do AB không vuông góc với trục x) nên $R\cos\alpha$ không thể triệt tiêu.

Hệ lực cũng không thể tương đương với một ngẫu lực $\vec{m}^O$ nào khác không vì trong trường hợp này (do véctơ chính $\vec{R}'$ triệt tiêu) :

$$\vec{m}^O = \vec{m}^A = \sum \vec{m}_A(\vec{F}_k) = 0$$



Hình 7–10

Dạng 3 : Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng mô men của các lực đối với ba điểm A, B, C không thẳng hàng triệt tiêu (hình 7–10) :

$$\sum \vec{m}_A(\vec{F}_k) = 0; \ \sum \vec{m}_B(\vec{F}_k) = 0; \ \sum \vec{m}_C(\vec{F}_k) = 0 \qquad (7\text{–}17)$$

Chứng minh : Điều kiện cần là hiển nhiên vì nếu một trong ba điều kiện trên không thỏa mãn thì hệ lực tương đương với ngẫu lực khác không, sẽ không thỏa mãn định luật 1 (chương 6).

Để chứng minh điều kiện đủ, tương tự cách chứng minh cho dạng 2, nếu ba điều kiện được thỏa mãn thì hệ lực không có hợp lực cũng không thể tương đương với một ngẫu lực khác không.

Hệ lực không thể có hợp lực vì dựa vào định lí Varinhông (định lí 7–3) nếu ba điều kiện trên thỏa mãn thì hợp lực phải đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Điều này vô lí. Vậy $\vec{R} = 0$ tức $\vec{R}' = 0$. Hệ lực cũng không thể tương đương với một ngẫu lực $\vec{m}^O$ nào khác không vì khi $\vec{R}' = 0$ ta có :

$$\vec{m}^O = \vec{m}^A = \sum \vec{m}_A(\vec{F}_k) = 0$$

Ví dụ 7–1 : Cột OA = 2a, trọng lượng P thẳng đứng và được chôn sâu xuống nền đất (ngàm). Cột chịu tác dụng lực nằm ngang $\vec{F}$ đặt tại A và ngẫu lực *m*. Tìm :

– Phản lực tại ngàm.

– Trạng thái lực tại mặt cắt ngang cách chân trụ khoảng cách x.

Bài giải : Khảo sát cân bằng của cột AB dưới tác dụng của hệ lực gồm : trọng lượng $\vec{P}$, lực $\vec{F}$ và ngẫu lực $\vec{m}$, phản lực ngàm (gồm hai thành phần lực vuông góc $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$ và ngẫu lực $\vec{m}^O$) (hình 7–11). Vậy ta có :

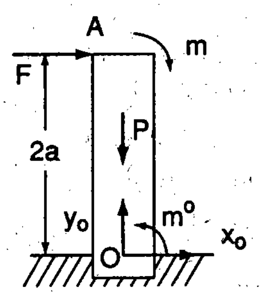
$$(\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{m}^O, \vec{P}, \vec{F}, \vec{m}) = 0$$

Viết các phương trình cân bằng của hệ lực theo dạng 1:

$$\sum F_x = X_O + F = 0$$

$$\sum F_y = Y_O - P = 0$$

$$\sum \vec{m}_O(\vec{F}) = m^O - m - 2Fa = 0$$



Hình 7–11

Khi giải ra ta nhận được :

$$X_O = -F; \ Y_O = P; \ m^O = m + 2aF$$

Trong các kết quả nhận được thì Y_O và m^O lấy giá trị dương, nên chiều đã sử dụng như trên hình 7–11 là chiều đúng, còn X_O lấy giá trị âm nên chiều đã giả sử như trên hình 7–11 là không đúng. Chiều đúng là chiều ngược lại.

Bây giờ để xác định trạng thái lực (nội lực) tại một tiết diện cách chân trụ một đoạn x, ta tưởng tượng cắt trụ bằng một mặt cắt vuông góc với trục y tại tiết diện x và xét một trong hai phần của trụ, ví dụ ta xét phần dưới (hình 7–12). Tác dụng của phần trên lên phần dưới được thay bằng một lực và một ngẫu lực (định lí 7–2).

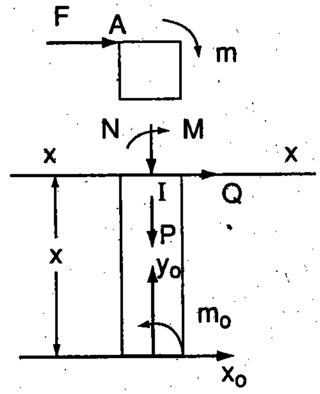
Lực được phân tích thành hai thành phần lực:

– Lực theo phương ngang, kí hiệu $\vec{Q}$, được gọi là lực cắt.

– Lực theo phương đứng (phương dọc trục của trụ), kí hiệu $\vec{N}$ được gọi là lực kéo (nếu hướng ra khỏi mặt cắt) hoặc lực nén (nếu hướng vào mặt cắt).

Ngẫu lực thu gọn, kí hiệu M, được gọi là mô men uốn.

Các đại lượng $\vec{N},\vec{Q},\bar{M}$ (hình 7–12) được gọi là các thành phần của nội lực tại tiết diện xx. Để tính chúng, ta có thể lập phương trình cân bằng cho hệ lực tác dụng lên phần dưới của cột:



Hình 7–12

$$(\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \bar{m}^O, \vec{P}_x, \vec{Q}, \vec{N}, \bar{M}) \equiv 0$$

trong đó P_x là trọng lượng phần cột dưới. Nếu xem cột là đồng chất và có tiết diện không đổi suốt chiều dài cột thì :

$$P_x = \frac{Px}{2a}$$

Phương trình cân bằng trong dạng 1 đối với hệ lực trên được viết như sau:

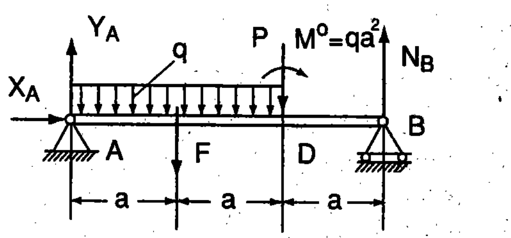
$$\sum F_x = -X_O + Q = 0$$
$$\sum F_y = Y_O - \frac{Px}{2a} - N = 0$$
$$\sum \bar{m}_I(\vec{F}) = -X_O x + m^O - M = 0$$

Giải các phương trình ta được:

$$Q = X_O = F; \quad N = Y_O - \frac{Px}{2a} = P(1 - \frac{x}{2a});$$
$$M = m^O - X_O x = m + 2aF - Fx = m + F(2a - x).$$

Ví dụ 7–2 : Cho một dầm AB có kích thước và chịu lực như hình 7–13. Xác định các phản lực tại A và B.

Bài giải: Đầu tiên ta thay thế lực phân bố trên đoạn AB bằng lực tập trung, kí hiệu F, có giá trị bằng 2aq, có hướng thẳng đứng xuống. Tại A phản lực có hai thành phần đứng và ngang $(\vec{Y}_A, \vec{X}_A)$ vì A là gối cố định, còn B là gối di động, ta đặt phản lực theo hướng thẳng đứng $\vec{N}_B$. Dầm AB cân bằng dưới tác dụng của hệ lực sau :



Hình 7–13

$$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{F}, \bar{M}^o, \vec{P}, \vec{N}_B) = 0$$

Khi viết phương trình cân bằng cho hệ lực này trong dạng 1, ta có :

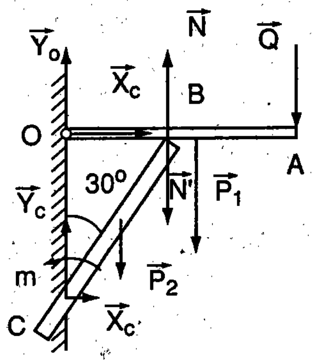
$$\sum F_x = X_A = 0$$
$$\sum F_y = Y_A - F - P + N_B = 0$$
$$\sum \vec{m}_A(\vec{F}) = -Fa - M^O - 2aP + 3aN_B = 0$$

Với $M^O = qa^2$, $P = qa$, $F = 2qa$, ta tìm được :

$$X_A = 0; N_B = \frac{5}{3}qa; Y_A = \frac{4}{3}qa$$

Chiều các phản lực được vẽ trên hình 7–13.

Ví dụ 7–3 : Thanh đồng chất OA = 6a, trọng lượng P_1 được gắn vào tường nhờ bản lề O và được đỡ nằm ngang nhờ thanh đồng chất BC = 4a, có trọng lượng P_2, bị ngàm ở C và nghiêng 30^o với tường. Điểm A chịu lực $\vec{Q}$ thẳng đứng hướng xuống. Tìm các phản lực tại O, B và C (hình 7–14).



Hình 7–14

Bài giải : Xét hệ hai thanh chịu lực như hình 7–14 :

Thanh OA chịu các lực $\vec{P}_1, \vec{Q}, \vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{N}$.

Thanh CB chịu các lực $\vec{P}_2, , \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{m}, \vec{N}'$.

Chú ý rằng các lực $\vec{N}$ và $\vec{N}'$ có môđun bằng nhau, kí hiệu N.

Hệ gồm hai thanh OA và BC. Ta xét trạng thái cân bằng của từng thanh và thiết lập phương trình cân bằng của hệ lực tác dụng lên mỗi thanh. Phương pháp này được gọi là phương pháp tách vật.

Thanh OA cân bằng dưới tác dụng của hệ lực :

$$(\vec{P}_1, \vec{Q}, \vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{N}) \equiv 0$$

Các phương trình cân bằng (dạng 1) đối với hệ lực này là :

$$\sum F_x = X_O = 0$$
$$\sum F_y = Y_O + N - P_1 - Q = 0$$
$$\sum \vec{m}_O(\vec{F}) = 2aN - 3aP_1 - 6aQ = 0$$

Rút ra được: $X_O = 0; N = \frac{3}{2}P_1 + 3Q; Y_O = -\frac{1}{2}P_1 - 2Q$

Thanh BC cân bằng dưới tác dụng của hệ lực :

$$(\vec{P}_2, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{m}, \vec{N}') \equiv 0$$

Các phương trình cân bằng (dạng 1) đối với hệ lực này là :

$$\sum F_x = X_C = 0$$
$$\sum F_y = Y_C - P_2 - N = 0$$
$$\sum \vec{m}_C(\vec{F}) = m - P_2a - 2aN = 0$$

Rút ra được :

$$X_C = 0;\ Y_C = P_2 + N = P_2 + \frac{3}{2}P_1 + 3Q;\ m = P_2a + 3aP_1 + 6aQ$$

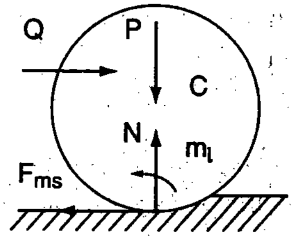
Chiều của thành phần thẳng đứng của phản lực tại O ngược lại với chiều trên hình 7–14 (vì đáp số Y_O mang dấu âm).

7.4. BÀI TOÁN HỆ LỰC PHẲNG VỚI LIÊN KẾT MA SÁT

Trước đây các liên kết được giả thiết là nhẵn, tức những liên kết không ma sát, ví dụ, đối với liên kết tựa ta giả thiết rằng phản lực liên kết có phương là pháp tuyến của mặt tựa hoặc đường tựa. Tuy nhiên, có nhiều trường hợp giả thiết như vậy là không cho phép (tức kết quả khảo sát theo giả thiết này sai lệch khá xa với thực tế). Để làm rõ vấn đề này ta xét mô hình như hình 7–15. Trong thực tế vật tiếp xúc với vật gây liên kết không phải tại một điểm mà theo một đường, do đó ta có một hệ các phản lực liên kết. Đây là một hệ lực phẳng. Sử dụng kết quả thu gọn hệ lực phẳng (định lí 7–3), hệ phản lực liên kết này có thể được thay (tương đương) bằng một lực và ngẫu lực nằm trong cùng mặt phẳng hệ lực. Lực thu gọn của các phản lực liên kết, gọi tắt là phản lực, có thể được phân ra hai thành phần vuông góc với nhau :

– Thành phần pháp tuyến mặt tựa có tác dụng chống lún, kí hiệu $\vec{N}$ được gọi là phản lực pháp tuyến.

– Thành phần tiếp tuyến với mặt tựa có tính chất cản trượt được gọi là lực ma sát trượt, kí hiệu $\vec{F}_{ms}$. Ngẫu lực thu gọn của hệ phản lực liên kết có tính chất cản chuyển động lăn, được gọi là ngẫu lực ma sát lăn, kí hiệu m_l (hình 7–15).



Hình 7–15

Hiển nhiên lực ma sát trượt có chiều ngược với chiều trượt hoặc có xu hướng trượt của vật, còn ngẫu lực ma sát lăn có chiều ngược với chiều lăn hoặc xu hướng lăn của vật.

Lực ma sát trượt (ngẫu lực ma sát lăn) chỉ xuất hiện khi vật trượt (lăn) hoặc có khuynh hướng trượt (khuynh hướng lăn) đối với vật khác. Ma sát xuất hiện khi vật chuyển động được gọi là ma sát động, còn ma sát khi vật chỉ có khuynh hướng chuyển động nhưng vẫn chưa chuyển động được gọi là ma sát tĩnh.

Thực nghiệm đã chỉ ra rằng trong trường hợp ma sát tĩnh các lực ma sát trượt và ngẫu lực ma sát lăn có thể lấy giá trị bất kì trong miền giá trị của chúng. Nói khác đi, trong bài toán cân bằng có ma sát vật không phải cân bằng tại một vị trí mà có cả một miền cân bằng :

$$0 \le F_{ms} \le F_{ms}^{max};\ 0 \le m_l \le m_l^{max}$$

F_{ms}^{max}, m_l^{max} là các giá trị lớn nhất của các lực ma sát trượt và ngẫu lực ma sát lăn. Thực nghiệm xác minh rằng chúng tỉ lệ với phản lực pháp tuyến :

$$F_{ms}^{max} = fN; \qquad m_l^{max} = kN;\ \ k << f$$

f, k được gọi là hệ số ma sát trượt và hệ số ma sát lăn tương ứng. Cần chú ý rằng hệ số ma sát trượt là hư số, còn hệ số ma sát lăn có thứ nguyên chiều dài, chúng phụ thuộc vào nhiều yếu tố như vật liệu, trạng thái bề mặt tiếp xúc như độ nhẵn, trạng thái nhiệt, ...

Như vậy, trong trường hợp không bỏ qua ma sát được (ví dụ, độ gồ ghề lớn, miền tiếp xúc rộng) thì hệ phản lực liên kết tại chỗ tiếp xúc ngoài phản lực pháp tuyến cần thêm lực ma sát trượt và ngẫu lực ma sát lăn :

$$F_{ms} \le fN; \quad m_l \le kN \tag{7–18}$$

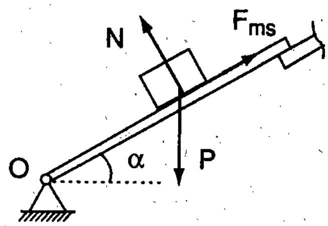
Bất đẳng thức đầu mang tên là định luật Culông.

Ví dụ 7–4 : Một vật rắn nằm trên mặt phẳng không nhẵn, có hệ số ma sát trượt f, nghiêng với mặt ngang một góc α. Xác định góc α để vật rắn cân bằng dưới tác dụng của trọng lực (hình 7–16).

Bài giải : Khảo sát vật rắn cân bằng dưới tác dụng của trọng lực (lực hoạt động). Vật rắn có xu hướng trượt xuống nên ngoài lực pháp tuyến $\vec{N}$, còn lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ hướng dọc mặt phẳng nghiêng. Như vậy vật rắn cân bằng dưới tác dụng của ba lực đồng quy : $(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}) \equiv 0$

Các phương trình cân bằng có dạng :

$$\sum F_x = F_{ms} - P\sin\alpha = 0$$
$$\sum F_y = N - P\cos\alpha = 0$$



Hình 7–16

Ngoài ra, định luật Culông cho ta: $F_{ms} \le fN$

Từ các phương trình cân bằng ta tìm được :

$$F_{ms} = P\sin\alpha; \quad N = P\cos\alpha$$

Thay các giá trị này vào bất đẳng thức ma sát trượt (định luật Culông) ta có : $\sin\alpha \le f\cos\alpha$ hay $tg\alpha \le f$.

Ta nhận được dấu đẳng thức khi vật sắp sửa trượt.

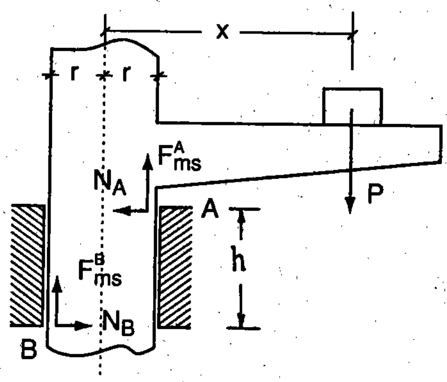
Giả sử ứng với trường hợp này góc α lấy giá trị α^* : $tg\alpha^* = f$.

Bằng cách như vậy ta có một phương pháp đơn giản để đo hệ số ma sát trượt.

Ví dụ 7–5 : Một thanh được giữ cân bằng nhờ ma sát. Tìm khoảng cách nhỏ nhất đặt vật P để thanh cân bằng. Bỏ qua trọng lượng của thanh (hình 7–17).

Bài giải : Dưới tác dụng của vật nặng thanh tì vào hai điểm A, B và có xu hướng trượt xuống, do đó các lực ma sát tại A và B hướng lên. Ta có :

$$(\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{F}^A_{ms}, \vec{N}_B, \vec{F}^B_{ms}) \equiv 0$$



Hình 7–17

Các phương trình cân bằng của hệ lực phẳng cho ta :

$$\sum F_x = -N_A + N_B = 0 \tag{a}$$

$$\sum F_y = F_{ms}^A + F_{ms}^B - P = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\sum \vec{m}_I(\vec{F}) = hN_A + rF_{ms}^A - rF_{ms}^B - Px = 0 \qquad \text{(c)}$$

Ngoài ra theo định luật Culông, ta có:

$$F_{ms}^A \le fN_A; \quad F_{ms}^B \le fN_B$$

Để giải hệ gồm các phương trình và bất phương trình ta viết các bất phương trình trong dạng phương trình :

$$F_{ms}^A = f_0 N_A; \quad F_{ms}^B = f_0 N_B \qquad \text{(d)}$$

trong đó $f_0 \le f$

Từ (a) ta có : $N_A = N_B = N$

Dựa vào (d) và (b) ta có $F_{ms}^A = F_{ms}^B = f_0 N = \dfrac{P}{2} \Rightarrow N = \dfrac{P}{2f_0}$

Từ (c) ta rút ra : $x = h\dfrac{N}{P} = h\dfrac{P}{2f_0}\dfrac{1}{P} = \dfrac{h}{2f_0} \ge \dfrac{h}{2f}$

Vậy $x_{min} = \dfrac{h}{2f}$

Ví dụ 7–6 : Trên mặt nằm ngang có bánh xe đồng chất, tâm O, bán kính R, trọng lượng P chịu tác dụng ngẫu lực $\vec{m}$ và lực $\vec{Q}$ như hình 7–18. Xác định trị số của mô men $\vec{m}$ và của lực $\vec{Q}$ để bánh xe có thể lăn không trượt. Cho biết hệ số ma sát trượt f và hệ số ma sát lăn k (hình 7–18).

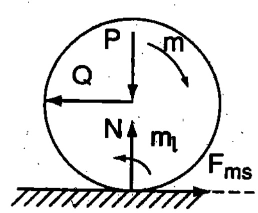
Bài giải : Khảo sát con lăn đang cân bằng và sắp sửa lăn.

Hệ lực tác dụng lên con lăn gồm ngẫu lực $\vec{m}$, trọng lực $\vec{P}$, lực $\vec{Q}$, phản lực pháp tuyến $\vec{N}$, lực ma sát trượt $\vec{F}$, ngẫu lực ma sát lăn $\vec{m}_l$ (hình 7–18). Con lăn cân bằng nên:

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{m}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, \vec{m}_l) \equiv 0$$

Các phương trình cân bằng sẽ là :

$$\sum F_x = F_{ms} - Q = 0$$
$$\sum F_y = N - P = 0$$
$$\sum \vec{m}_I(\vec{F}) = QR + m_l - m = 0$$



Hình 7–18

Điều kiện để con lăn lăn được : $m_l = kN$ nhưng không trượt :

$$F_{ms} < fN$$

Từ hệ ba phương trình cân bằng đầu ta nhận được :

$$F_{ms} = Q; \; N = P; \; m_l = m - QR$$

Thay các giá trị này vào điều kiện lăn không trượt của con lăn, ta có:

$$m - QR = kP; \qquad Q < fP$$

Từ đây : $$m = QR + kP \quad \rightarrow \quad Q = \frac{1}{R}(m - kP) < fP$$

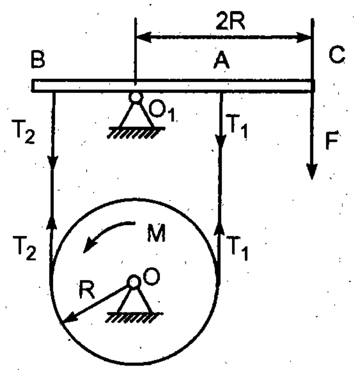
Nó cho ta : $$m < P(fR + k); \qquad Q < fP$$

Ví dụ 7-7 : Cho một cơ cấu hãm dùng đai như hình 7–19. Tác dụng lực $\vec{F}$ vuông góc với đầu đòn để hãm rôto, rôto chịu tác dụng ngẫu lực M. Bán kính của rôto là R và hệ số ma sát trượt giữa đai và bề mặt rôto là f. Xác định lực hãm $\vec{F}$ và sức căng trong các đai da (hình 7–19).

Bài giải : Để giải bài toán ta sử dụng công thức Ơle. Cho một trụ cố định và một đai dây cuốn trên mặt trụ như hình 7–20. Gọi sức căng của hai nhánh dây là $\vec{T}_1$ và $\vec{T}_2$, góc ôm của dây vào trục là α = AOB (rad) (cứ đai cuốn thêm một vòng thì tính góc ôm tăng một lượng 2π). Khi đai có xu hướng trượt trên bề mặt trụ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ do hiệu ứng cản chuyển động trượt của lực ma sát trượt giữa dây đai và mặt trụ (khi đai còn cân bằng) nên $T_1 > T_2$.

Điều kiện cân bằng của dây đai trên mặt trụ được viết trong dạng:

$$T_2 \le T_1 e^{f\alpha} \qquad (7\text{–}19)$$



Hình 7–19

trong đó f là hệ số ma sát trượt giữa dây đai và bề mặt trụ. Hệ thức (7 – 19) là công thức Ơle.

Bây giờ khảo sát cơ cấu hãm cân bằng ở trạng thái giới hạn. Cơ cấu gồm hai vật rắn cân bằng : đòn O_1C và rôto.

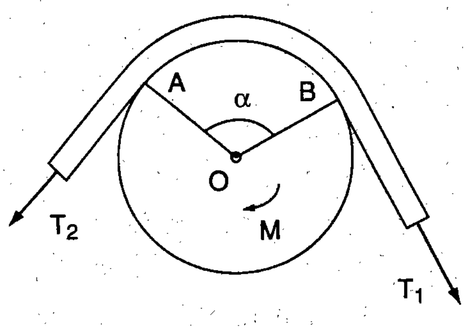
Vì không cần tính các phản lực tại O và O_1 nên đối với mỗi vật ta chỉ cần thành lập các phương trình mô men đối với trục quay O_1 (cho đòn O_1C) và đối với trục quay O (cho rôto) :

$$\sum \vec{m}_{O_1}(\vec{F}) = R(T_2 - T_1) - 2RF = 0$$
$$\sum \vec{m}_O(\vec{F}) = M - R(T_2 - T_1) = 0$$

Ngoài ra công thức Ơle cho ta : $T_2 \le T_1 e^{f\pi}$

Khi giải các phương trình trên ta được :

$$F = \frac{M}{2R}; \quad T_1 = \frac{M}{R(e^{f\pi} - 1)}; \quad T_2 = \frac{M}{R}\frac{e^{f\pi}}{(e^{f\pi} - 1)}$$



Hình 7–20

Dễ dàng nhận thấy ngay rằng giá trị bé nhất của lực $\vec{F}$ để hãm được rôto là : $F = \dfrac{M}{2R}$

Chương 8

HỆ LỰC KHÔNG GIAN

Hệ lực không gian là một tập hợp nhiều lực tác dụng lên cùng một vật rắn và có đường tác dụng nằm bất kì trong không gian.

8.1. VÉCTƠ CHÍNH VÀ VÉCTƠ MÔ MEN CHÍNH CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

8.1.1. Véctơ chính của hệ lực không gian : Cho hệ lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N)$.

a) Định nghĩa : Véctơ chính của hệ lực, kí hiệu $\vec{R}'$, là véctơ tổng của các véctơ lực của hệ lực :

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \qquad (8\text{–}1)$$

b) Xác định véctơ chính : có thể sử dụng phương pháp vẽ đa giác lực như trong các chương 6 và chương 7. Trong trường hợp này đa giác lực là đa giác ghềnh.

Cũng có thể xác định véctơ chính qua các hình chiếu của nó trên ba trục tọa độ vuông góc theo các công thức sau :

$$\left.\begin{aligned} R'_x &= F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{Nx} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx} \\ R'_y &= F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{Ny} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky} \\ R'_z &= F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{Nz} = \sum_{k=1}^{N} F_{kz} \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{–}2)$$

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z}; \qquad \cos(Ox, \vec{R}') = \frac{R'_x}{R'};$$

$$\cos(Oy, \vec{R}') = \frac{R'_y}{R'}; \qquad \cos(Oz, \vec{R}') = \frac{R'_z}{R'};$$

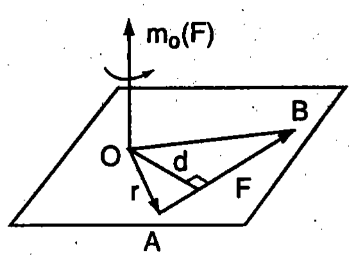
8.1.2. Mô men chính của hệ lực không gian đối với một điểm

a) Mô men của một lực đối với một điểm : Mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O, kí hiệu $\vec{m}_O(\vec{F})$ là véctơ có :

– Phương vuông góc với mặt phẳng qua O và chứa $\vec{F}$.

– Chiều : nhìn từ đầu mút xuống thấy $\vec{F}$ quay ngược chiều kim đồng hồ quanh O.

– Trị số bằng tích số của giá trị lực với tay đòn của lực đối với điểm O, tức bằng Fd (hình 8–1). Đơn vị của mô men là Niutơn mét, kí hiệu *Nm*.



Hình 8–1

Dễ dàng thấy rằng véctơ mô men của lực đối với một điểm không thay đổi khi lực trượt trên đường tác dụng của nó và triệt tiêu khi lực $\vec{F}$ đi qua điểm lấy mô men (d = 0). Trị số của mô men bằng hai lần diện tích tam giác ΔOAB (A là điểm đặt của lực, B là điểm mút của véctơ lực).

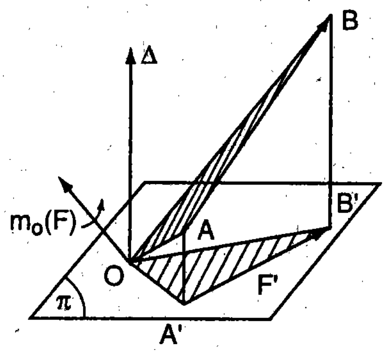
Từ định nghĩa đã nêu trực tiếp suy ra :

Véctơ mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O bằng tích có hướng (ngoại tích) của véctơ định vị điểm đặt lực $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ với véctơ lực $\vec{F}$:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad (8\text{–}3)$$

b) Mô men của một lực đối với một trục : Mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ, kí hiệu $\vec{m}_\Delta(\vec{F})$ là mô men đại số của lực $\vec{F}'$ đối với điểm O, ở đó $\vec{F}'$ là hình chiếu của lực $\vec{F}$ trên mặt phẳng π vuông góc với trục Δ, còn O là giao điểm của trục Δ với mặt phẳng π (hình 8–2) :

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = \vec{m}_O(\vec{F}') = \pm F'd' \qquad (8\text{–}4)$$



Hình 8–2

Rõ ràng khi $\vec{F} = 0$ hoặc khi $\vec{F}$ song song hay cắt trục Δ (lực và trục đồng phẳng) thì $\vec{m}_\Delta\vec{F} = 0$.

c) Định lí liên hệ giữa mô men của lực đối với một điểm và mô men của lực đối với một trục (định lí 8–1).

Định lí 8–1 : Mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ bằng hình chiếu trên trục ấy của véctơ mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O nằm trên trục.

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = \text{hch}_\Delta[\vec{m}_O(\vec{F})] \qquad (8\text{–}5)$$

Áp dụng công thức (8–5) cho trường hợp trục Δ lần lượt là trục Ox, Oy, Oz, mô men của lực $\vec{F}$ đối với ba trục là $\vec{m}_x(\vec{F})$, $\vec{m}_y(\vec{F})$, $\vec{m}_z(\vec{F})$, còn hình chiếu của mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O trên ba trục là $\vec{m}_{Ox}(\vec{F})$, $\vec{m}_{Oy}(\vec{F})$, $\vec{m}_{Oz}(\vec{F})$, ta có :

$$\vec{m}_O(\vec{F}) \begin{cases} \vec{m}_{Ox}(\vec{F}) = \vec{m}_x(\vec{F}) \\ \vec{m}_{Oy}(\vec{F}) = \vec{m}_y(\vec{F}) \\ \vec{m}_{Oz}(\vec{F}) = \vec{m}_z(\vec{F}) \end{cases} \qquad (8\text{–}6)$$

Vậy có thể thay thế việc tính hình chiếu trên một trục của véctơ mô men của lực $\vec{F}$ đối với một điểm O bằng tính mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục đó.

d) Véctơ mô men chính của hệ lực không gian đối với điểm O, kí hiệu $\vec{m}^O$, là một véctơ bằng tổng hình học các véctơ mô men của các lực đối với O.

$$\vec{m}^O = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \ldots\ldots + \vec{m}_O(\vec{F}_N) = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_O(\vec{F}_k) \qquad (8\text{–}7)$$

Véctơ mô men chính có thể được xác định bằng phương pháp đa giác véctơ (tương tự đa giác lực, ở đó các véctơ lực được thay thế bằng các véctơ mô men của lực), nhưng thuận tiện hơn, ta xác định các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ theo (8–6).

$$\vec{m}^{O} = \begin{cases} \vec{m}^{Ox} = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_{Ox}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_x(\vec{F}_k) \\ \vec{m}^{Oy} = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_{Oy}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_y(\vec{F}_k) \\ \vec{m}^{Oz} = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_{Oz}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_z(\vec{F}_k) \end{cases} \qquad (8\text{–}8)$$

Từ đó dễ dàng xác định giá trị và phương chiều của véctơ mô men chính.

d) Nhận xét :

1) Mô men chính của hệ lực đồng quy đối với điểm đồng quy bằng không.

2) Mô men chính của hệ ngẫu lực đối với bất kì điểm nào cũng bằng véctơ ngẫu lực tổng:

$$\vec{m}^{O} = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_k \qquad (8\text{–}9)$$

3) Véctơ chính là véctơ tự do, còn véctơ mô men chính thay đổi theo điểm lấy mô men :

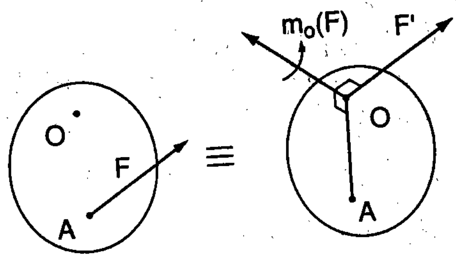
$$\vec{m}^{O_1} = \vec{m}^{O} + \vec{m}_{O_1}(\vec{R}'_O) \qquad (8\text{–}10)$$

8.2. THU GỌN HỆ LỰC KHÔNG GIAN

8.2.1. Định lí dời lực song song

Lực $\vec{F}$ đặt tại A tương đương với tác dụng của nó tại O (lực $\vec{F}'$) và một ngẫu lực có véctơ mô men bằng véctơ mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O (hình 8–3).

$$\vec{F} \equiv \vec{F}' \text{ và } \vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F}) \qquad (8\text{–}11)$$



Hình 8–3

Chứng minh định lí này giống như chứng minh cho trường hợp hệ lực phẳng, khi thay thế mô men đại số bằng véctơ mô men.

8.2.2. Thu gọn hệ lực không gian về tâm O

Lấy một điểm O tùy ý, gọi là tâm thu gọn. Sử dụng định lí dời lực song song để dời các lực về tâm O (hình 8–4).

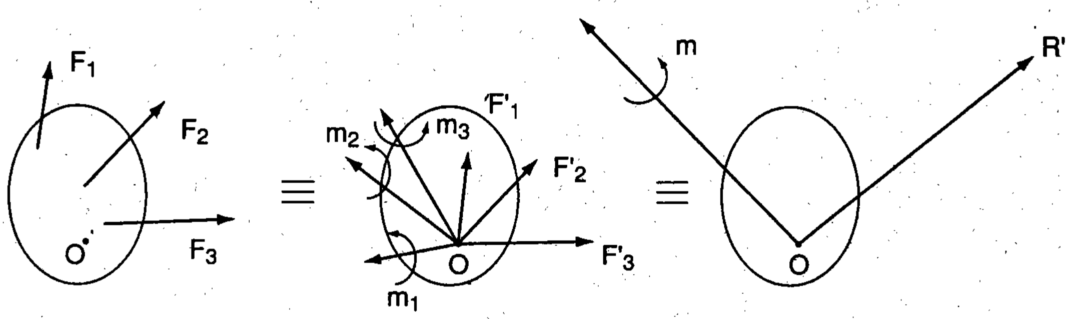
$$\vec{F}_1 \equiv \vec{F}'_1 \text{ và } \vec{m}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1)$$

$$\vec{F}_2 \equiv \vec{F}'_2 \text{ và } \vec{m}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2)$$

....

$$\vec{F}_N \equiv \vec{F}'_N \text{ và } \vec{m}_N = \vec{m}_O(\vec{F}_N)$$

Như vậy thu gọn hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N)$, về tâm O ta được một hệ lực đồng quy (không gian) tại O: $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, ..., \vec{F}'_N)$ và một hệ ngẫu lực (không gian): $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_N)$.



Hình 8–4

Hệ lực đồng quy có hợp lực qua O, kí hiệu $\vec{R}'_O$, được biểu diễn bằng véctơ chính của hệ lực đã cho đặt tại O (véctơ chính của hệ lực đồng quy tại O và véctơ chính của hệ lực đã cho bằng nhau) :

$$\vec{R}'_O \equiv \sum_{k=1}^{N} \vec{F}'_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k = \vec{R}' \qquad (8\text{–}12)$$

trong đó $\vec{R}'$ là véctơ chính của hệ lực đã cho.

Hệ ngẫu lực không gian $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_N)$, như đã biết (định lí 6–5) tương đương với một ngẫu lực $\vec{m}$:

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + ... + \vec{m}_N = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + ... + \vec{m}_O(\vec{F}_N)$$

$$\vec{m} = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = \vec{m}^O \qquad (8\text{–}13)$$

dựa vào (8–7).

Vậy ta có định lí 8–2.

Định lí 8–2 : Hệ lực không gian tương đương với một lực và một ngẫu lực đặt tại một điểm tùy ý, chúng được gọi là lực thu gọn và ngẫu lực thu gọn. Lực thu gọn đặt tại tâm thu gọn có véctơ lực bằng véctơ chính của hệ lực, còn ngẫu lực thu gọn có véctơ mô men bằng véctơ mô men chính của hệ lực đối với tâm thu gọn.

Nhận xét :

1) Phương chiều và giá trị của lực thu gọn không phụ thuộc vào tâm thu gọn. Sự biến đổi của ngẫu lực thu gọn theo tâm thu gọn phù hợp với công thức (8–10).

2) Đối với hệ lực không gian, lực thu gọn không nằm trong mặt phẳng của ngẫu lực thu gọn như trường hợp hệ lực phẳng (tức véctơ chính và véctơ mô men chính không vuông góc với nhau như trong trường hợp hệ lực phẳng). Đây là sự khác biệt cơ bản giữa hệ lực không gian và hệ lực phẳng.

8.3. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

8.3.1. Điều kiện cân bằng

Định lí 8–3 : Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian cân bằng là véctơ chính và véctơ mô men chính của hệ lực đối với một điểm bất kì triệt tiêu.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}' = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k = 0 \\ \vec{m}^0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (8\text{–}14)$$

Chứng minh : Điều kiện cần được chứng minh dựa vào dạng thu gọn của hệ lực không gian. Thực vậy nếu điều kiện (8–14) không được thỏa mãn thì hệ lực đã cho thu về một trong các dạng : ngẫu lực, hợp lực hoặc một lực và một ngẫu lực. Dễ dàng chỉ ra rằng không có một dạng nào trong đó thỏa mãn định luật 1 về cân bằng (chương 6).

Điều kiện đủ là hiển nhiên vì từ véctơ chính bằng không, hệ lực thu về một ngẫu lực có mô men bằng mô men chính của hệ lực đối với tâm thu gọn, nó bằng không thì chứng tỏ ngẫu lực thu gọn là hai lực cân bằng.

8.3.2. Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian : Để véctơ chính và véctơ mô men chính triệt tiêu thì các hình chiếu của chúng trên ba trục tọa độ vuông góc phải triệt tiêu:

$$\left.\begin{array}{lll} \sum_{k=1}^{N} F_{kx} = 0; & \sum_{k=1}^{N} F_{ky} = 0; & \sum_{k=1}^{N} F_{kz} = 0; \\ \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_x(\vec{F}_k) = 0; & \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_y(\vec{F}_k) = 0; & \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_z(\vec{F}_k) = 0; \end{array}\right\} \qquad (8\text{–}15)$$

Định lí 8–4 : Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian cân bằng là tổng hình chiếu của các lực trên ba trục vuông góc và tổng mô men của các lực đối với ba trục ấy đều triệt tiêu.

Các phương trình (8–15) được gọi là *các phương trình cân bằng* của hệ lực không gian.

Từ (8–15) có thể suy ra các phương trình cân bằng của các hệ lực đặc biệt: hệ lực đồng quy không gian; hệ ngẫu lực không gian; hệ lực song song không gian. Đối với các hệ lực này số phương trình cân bằng giảm xuống còn ba phương trình.

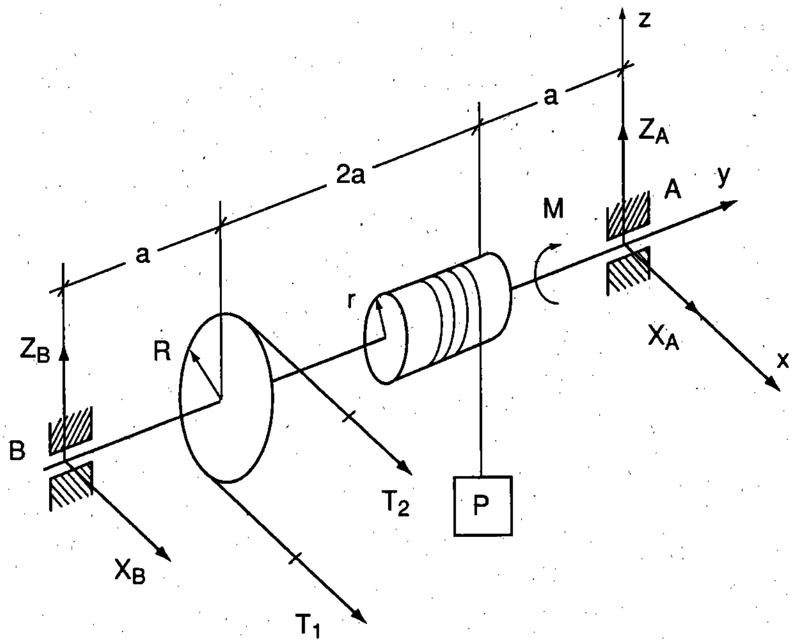
Ví dụ 8–1 : Một trục kéo AB có đường trục nằm ngang và được đỡ trên hai ổ trục (bản lề trụ) A và B. Hai nhánh đai của puli có đường kính D = 0,6m chịu các lực căng T_1 = 5kN, T_2 = 2kN. Vật được kéo có trọng lượng P = 5kN và tang tời có đường kính d = 0,3m. Trục tời chịu tác dụng ngẫu lực cản có mô men M.

Xác định ngẫu lực cản M cần thiết để trục cân bằng và các phản lực tại các gối trục A và B. Bỏ qua ma sát, các kích thước cho trên hình 8–5.

Bài giải : Trục kéo cân bằng dưới tác dụng của hệ lực :

$$(\vec{P}, \vec{M}, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B) \equiv 0$$

Với trục tọa độ như hình 8–5, các phương trình cân bằng của hệ lực có dạng :



Hình 8–5

$$\sum F_x = T_1 + T_2 + X_A + X_B = 0$$
$$\sum F_z = -P + Z_A + Z_B = 0$$
$$\sum \bar{m}_x(\vec{F}) = aP - 4aZ_B = 0$$
$$\sum \bar{m}_y(\vec{F}) = T_1\frac{D}{2} - T_2\frac{D}{2} - P\frac{d}{2} - M = 0$$
$$\sum \bar{m}_z(\vec{F}) = 3aT_1 + 3aT_2 + 4aX_B = 0$$

Thay các giá trị bằng số vào hệ phương trình trên và giải ra ta nhận được :

$X_A = -1,75kN;\ Z_A = 3,75kN;\ X_B = -5,25kN;$
$Z_B = 1,25kN;\ M = 0,15kN.$

Ở đây thành phần X_A và X_B có chiều ngược so với chiều trên hình vẽ.

Phần ba

ĐỘNG LỰC HỌC

Chương 9

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM

9.1. CÁC KHÁI NIỆM

9.1.1. Các mô hình của vật thể

a) Chất điểm là một điểm hình học có mang khối lượng. Chất điểm là mô hình của vật thể mà kích thước của nó có thể bỏ qua được do quá nhỏ so với các vật thể khác hoặc không đóng vai trò quan trọng trong chuyển động được khảo sát. Ví dụ, khi xác định tầm xa của viên đạn hoặc khi khảo sát chuyển động các vật tịnh tiến có thể xem chúng là những chất điểm. Có chất điểm tự do và chất điểm không tự do.

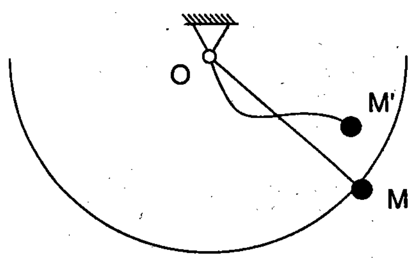
Chất điểm tự do là chất điểm mà tại thời điểm khảo sát các dị chuyển (vô cùng bé) của nó từ vị trí đang xét theo bất kì phương nào cũng không bị cản trở.

Chất điểm không tự do (còn được gọi là chất điểm chịu liên kết) là chất điểm mà tại thời điểm khảo sát các di chuyển (vô cùng bé) của nó từ vị trí đang xét bị cản trở dù chỉ theo một phương nào đó. Các điều kiện ràng buộc về vị trí và vận tốc đặt lên chuyển động của điểm được gọi là các liên kết. Các biểu thức toán học biểu thị các điều kiện ràng buộc đó được gọi là các phương trình liên kết. Ví dụ, đối với con lắc toán học (hình 9–1) điều kiện ràng buộc là điểm M chỉ có thể chuyển động trên biên hoặc bên trong mặt tròn có bán kính l (độ dài của con lắc toán học). Phương trình liên kết sẽ là:

$$x^2 + y^2 - l^2 \le 0 \tag{9–1}$$

Chất điểm không tự do có thể thay thế bằng chất điểm tự do (định luật thay thế liên kết, chương 6 – phần tĩnh học) do giải phóng liên kết và đặt thêm những phản lực liên kết.

b) Cơ hệ là một tập hợp hữu hạn hoặc vô hạn các chất điểm, trong đó chuyển động của một chất điểm bất kì phụ thuộc vào chuyển động của các chất điểm còn lại, tức là chuyển động của các chất điểm phụ thuộc vào nhau. Nói khác đi, giữa các chất điểm phụ thuộc lẫn nhau. Nói khác đi giữa các chất điểm của cơ hệ tồn tại các tương tác cơ học. Tùy thuộc vào bản chất của các tương tác cơ học giữa các chất điểm, cơ hệ được phân thành cơ hệ tự do và không tự do.



Hình 9–1

Cơ hệ tự do gồm các chất điểm tự do. Cơ hệ không tự do là một tập hợp các chất điểm trong đó có ít nhất một chất điểm không tự do. Cơ cấu máy là một cơ hệ không tự do. Vật rắn tuyệt đối cũng là một cơ hệ không tự do.

Cơ hệ không tự do có thể được khảo sát như cơ hệ tự do nhờ định luật thay thế liên kết hoặc khảo sát nó trong điều kiện bảo toàn các liên kết đặt lên cơ hệ (động lực học cơ hệ không tự do).

9.1.2. Lực : Khái niệm lực đã được định nghĩa trong phần tĩnh học. Trong tĩnh học chỉ đề cập đến các lực hằng. Trong động lực học, lực nói chung là các đại lượng biến đổi (cả về độ lớn và hướng) hàm theo thời gian, vị trí và vận tốc :

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) \qquad (9\text{–}2)$$

9.1.3. Các đặc trưng của lực tác dụng

a) Xung lượng của lực, gọi tắt là xung lực, là đại lượng dùng để đánh giá tác dụng của lực theo thời gian :

Xung lực nguyên tố, kí hiệu $d\vec{S}$:

$$d\vec{S} = \vec{F}\,dt \qquad (9\text{–}3)$$

Xung lực hữu hạn, kí hiệu $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt \qquad (9\text{–}4)$$

Xung lực của hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N)$:

$$\vec{S} = \sum_{k=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k\right) dt \qquad (9\text{–}5)$$

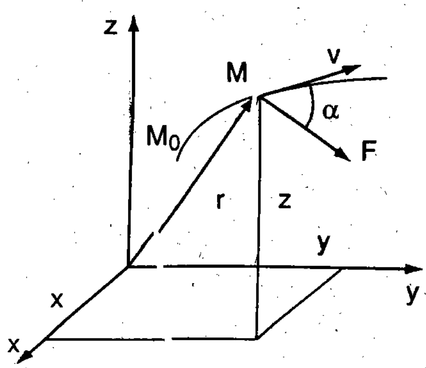
Đơn vị của xung lực được đo bằng Niutơn giây, kí hiệu (*Ns*).

b) Công và công suất của lực

– Công của lực là đại lượng dùng để đánh giá tác dụng của lực trong di chuyển.

Công nguyên tố, kí hiệu dA, của lực $\vec{F}$ trong di chuyển vô cùng bé là một đại lượng vô hướng:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (9\text{–}6)$$



Hình 9–2

trong đó $\vec{r}$ là véctơ định vị của điểm đặt của lực ; $d\vec{r}$ biểu diễn lượng di chuyển vô cùng bé của điểm đặt của lực; F_x, F_y, F_z là hình chiếu của lực trên ba trục tọa độ vuông góc; dx, dy, dz là ba thành phần của véctơ di chuyển vô cùng bé $d\vec{r}$ trên ba trục tọa độ (hình 9–2).

Biểu thức công nguyên tố cũng có thể được viết trong dạng sau :

$$dA = \vec{F}\vec{v}dt = (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})dt = \overline{F}_t d\overline{s} = F\cos\alpha ds \qquad (9\text{–}7)$$

trong đó, $\overline{F}_t$ là hình chiếu của lực lên phương tiếp tuyến của quỹ đạo điểm đặt; α là góc giữa lực và phương tiếp tuyến quỹ đạo.

Công hữu hạn của lực là công do lực sinh ra khi điểm đặt của lực di chuyển một đoạn (hữu hạn), kí hiệu A,

$$A = \int_{\overset{\frown}{M_0M}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{M_0M}} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{\overset{\frown}{M_0M}} F\cos\alpha ds \qquad (9\text{–}8)$$

Đơn vị công của lực là *Niutơn mét*, kí hiệu (*Nm*), còn gọi là *Jun* (J).

– Công suất của lực là công của lực sinh ra trong một đơn vị thời gian, kí hiệu W,

$$W = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{v} = F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z} = \overline{F}_t\overline{v}_t \qquad (9\text{–}9)$$

trong đó $\overline{F}_t, \overline{v}_t$ lần lượt là hình chiếu của lực và vận tốc của điểm đặt lực lên phương tiếp tuyến quỹ đạo (cùng phương vận tốc).

Đơn vị của công suất là *Niutơn mét / giây*, kí hiệu *Nm/s*, nó còn được gọi là watt (W) và các bội số của nó như kilowatt (kW),...

9.1.4. Hệ quy chiếu quán tính : Trong động lực học chuyển động được khảo sát đối với hệ quy chiếu quán tính là hệ quy chiếu mà trong đó định luật quán tính của Niutơn được nghiệm đúng. Trong kĩ thuật hệ quy chiếu gắn liền với Trái Đất được xem là hệ quy chiếu quán tính (hệ quy chiếu quán tính gần đúng).

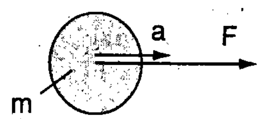
9.2. CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Định luật quán tính : Chất điểm không chịu tác dụng của lực nào thì đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

Trạng thái đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều của chất điểm được gọi là trạng thái quán tính của nó.

Như vậy, theo định luật này nếu không có lực tác dụng lên chất điểm (chất điểm như vậy được gọi là chất điểm cô lập) thì nó có trạng thái quán tính. Nói khác đi chất điểm cô lập sẽ bảo toàn trạng thái quán tính của mình cho đến khi chưa có lực buộc nó thay đổi trạng thái quán tính. Do đó định luật quán tính cho một tiêu chuẩn về hệ quy chiếu quán tính và khẳng định lực là nguyên nhân duy nhất làm biến đổi trạng thái chuyển động.

Định luật cơ bản của động lực học : *Trong hệ quy chiếu quán tính, dưới tác dụng của lực chất điểm chuyển động với gia tốc cùng hướng với lực và có trị số tỉ lệ với cường độ của lực* (hình 9–3).



Hình 9–3

Vậy $\vec{F} = m\vec{a}$ (9–10)

trong đó hệ số tỉ lệ m có giá trị không đổi, nó là số đo quán tính của chất điểm được gọi là khối lượng chất điểm.

Đẳng thức (9–10) được gọi là định luật cơ bản của động lực học.

Nếu $\vec{F} = 0$ thì $\vec{a} = 0$ (bao gồm cả trường hợp $\vec{v} = 0$) tức chất điểm có trạng thái quán tính.

Khi chất điểm rơi tự do trong trọng trường, ta có :

$$P = mg \qquad (9\text{–}11)$$

Đó là quan hệ giữa khối lượng và trọng lượng chất điểm, trong đó g là gia tốc trọng trường, $g = 9{,}81\ m/s^2$.

Để khảo sát bài toán động lực học ngoài hai định luật nêu trên ta còn sử dụng các định luật đã nêu trong tĩnh học : định luật tác dụng và phản tác dụng, định luật hợp lực theo quy tắc hình bình hành, định luật thay thế liên kết.

9.3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM

9.3.1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng véctơ : Như đã biết trong hệ quy chiếu quán tính phương trình cơ bản của động lực học có dạng (9–10). Nếu gọi $\vec{r}$ là véctơ định vị của chất điểm trong hệ quy chiếu quán tính ta có :

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \qquad (9\text{–}12)$$

Phương trình (9–12) được gọi là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng véctơ.

9.3.2. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng tọa độ Đề các : Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc gắn vào hệ quy chiếu quán tính. Khi chiếu hai vế của đẳng thức véctơ (9–10) lên các trục tọa độ, ta được :

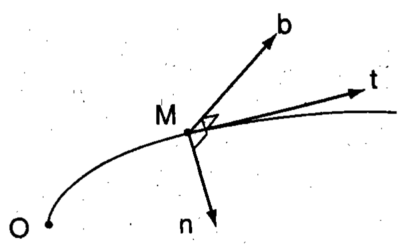
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \qquad (9\text{–}13)$$

Đó là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng tọa độ Đề các.

Khi chất điểm chuyển động trong mặt phẳng hoặc dọc theo đường thẳng thì số phương trình giảm xuống còn tương ứng hai hoặc một.

9.3.3. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng tọa độ tự nhiên : Khi chiếu hai vế của đẳng thức véctơ (9–10) lên các trục tọa độ tự nhiên và dựa vào các kết quả trong phần động học ta nhận được :

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_t \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n \\ 0 &= F_b \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{–}14)$$



Hình 9–4

trong đó s, v tương ứng là tọa độ cong và giá trị vận tốc của điểm, ρ là bán kính cong quỹ đạo; F_t, F_n, F_b lần lượt là hình chiếu của lực $\vec{F}$ trên các trục tiếp tuyến, pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến.

Hệ phương trình (9–14) được gọi là phương trình vi phân chuyển động của điểm dạng tọa độ tự nhiên.

9.4. HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM

Bài toán thứ nhất – Bài toán thuận : Cho biết chuyển động của chất điểm, hãy xác định lực tác dụng lên chất điểm.

Trong trường hợp biết chuyển động của chất điểm qua gia tốc (tức cho biết gia tốc) ta áp dụng trực tiếp phương trình cơ bản của động lực học.

Trong trường hợp biết chuyển động chất điểm không phải qua gia tốc mà qua luật chuyển động hoặc vận tốc của nó thì đầu tiên ta phải tìm gia tốc của chất điểm nhờ các công thức đã thiết lập ở phần động học (chương 1), sau đó áp dụng phương trình cơ bản của động lực học.

Ví dụ 9–1 : Kéo một vật nặng có trọng lượng P đi lên nhanh dần với gia tốc a. Hãy xác định sức căng của dây cáp (hình 9–5).

Bài giải : Khảo sát vật nặng, nó được xem như một chất điểm chịu tác dụng của trọng lực $\vec{P}$ hướng xuống, lực kéo $\vec{T}$ của dây cáp hướng lên.

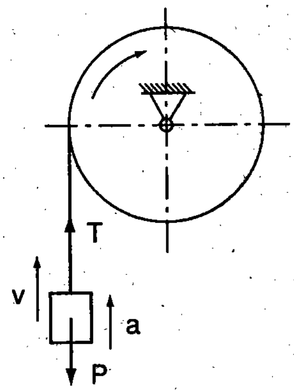
Viết phương trình cơ bản của động lực học chất điểm :

$$\frac{P}{g}\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$$

Khi chiếu hai vế của của đẳng thức trên lên trục thẳng đứng hướng lên, ta có :

$$\frac{P}{g}a = T - P$$

Suy ra : $T = P(1 + \frac{a}{g})$



Hình 9–5

Khi vật đi lên chậm dần hoặc đi xuống nhanh dần thì gia tốc sẽ hướng xuống và sức căng trong dây bằng :

$$T = P(1 - \frac{a}{g})$$

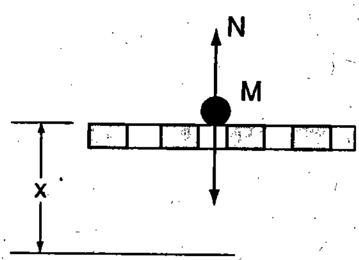
Khi vật đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều (trạng thái quán tính) thì $\vec{a} = 0$ và sức căng dây cáp T = P.

Ví dụ 9–2 : Một sàng vật liệu dao động thẳng đứng với biên độ a = 5 *cm*. Hãy xác định tần số dao động của sàng để cho hạt được bật lên khỏi sàng.

Bài giải : Khảo sát khi hạt nằm trên mặt sàng và do đó hạt chuyển động cùng mặt sàng, tức là hạt dao động điều hòa theo luật (hình 9–6) :

$$x = A\sin(\omega t + \alpha)$$

trong đó A được gọi là biên độ (hằng số), ω – tần số góc (hằng số), α – pha ban đầu (hằng số), (ωt + α) – pha dao động.



Hình 9–6

Lực tác dụng lên hạt gồm trọng lực và phản lực của sàng lên hạt.

Viết phương trình cơ bản của động lực học cho chất điểm ta được :

$$\frac{P}{g}\vec{a} = \vec{N} + \vec{P}$$

Khi chiếu hai vế của của đẳng thức trên lên trục thẳng đứng hướng lên, ta có :

$$\frac{P}{g}a = N - P$$

Từ đó : $$N = P(1 + \frac{a}{g})$$

Vì hạt nằm trên sàng nên gia tốc $\vec{a}$ của nó là gia tốc của mặt sàng :

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$$

Vậy : $$N = P\left[1 - \frac{A\omega^2}{g}\sin(\omega t + \alpha)\right]$$

Để hạt không dời mặt sàng thì $N > 0$. Vậy điều kiện để hạt dời được mặt sàng là $N \le 0$, tức là :

$$1 - \frac{A\omega^2}{g}\sin(\omega t + \alpha) \le 0$$

Điều kiện này được thỏa mãn khi :

$$\omega \ge \sqrt{\frac{g}{A}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,05}} = 14\,\text{Hz}$$

Vậy để hạt dời được khỏi mặt sàng thì sàng phải dao động với tần số bé nhất bằng 14 Hz.

Bài toán thứ hai – Bài toán ngược : Cho biết lực tác dụng lên chất điểm và các điều kiện đầu của chuyển động (vị trí ban đầu và vận tốc ban đầu). Hãy xác định chuyển động của chất điểm.

Như đã biết từ phương trình cơ bản của động lực học chất điểm, gia tốc có thể được xác định từ phương trình vi phân chuyển động chất điểm. Do đó để tìm chuyển động của chất điểm cần phải tích phân phương trình vi phân chuyển động. Nếu tìm được các tích phân, chúng sẽ chứa các hằng số tích phân, thì chỉ biết lớp chuyển động chứ chưa biết dạng chuyển động cụ thể. Muốn tìm dạng chuyển động cụ thể cần phải xác định các hằng số tích phân nhờ các điều kiện đầu (vị trí ban đầu và vận tốc ban đầu).

Ví dụ 9–3 : Một quả cầu khối lượng m rơi tự do từ điểm O, không vận tốc ban đầu dưới tác dụng của trọng lực, trong môi trường không cản. Tìm quy luật chuyển động của quả cầu (hình 9–7).

Bài giải: Xem quả cầu như một chất điểm chuyển động theo phương thẳng đứng xuống. Phương trình vi phân chuyển động của quả cầu sẽ là :

$$m\ddot{x} = P = mg \Rightarrow \ddot{x} = g$$

Khi tích phân lần lượt ta có :

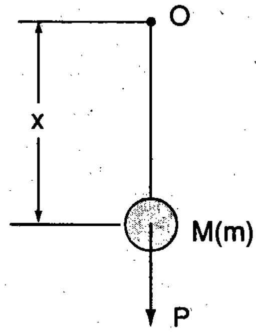
$$\dot{x} = gt + C_1;\ \ x = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

Sử dụng điều kiện đầu $x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = v(0) = 0$

ta tìm được : $C_1 = 0\ ;\ C_2 = 0$

Vậy phương trình chuyển động của quả cầu sẽ là : $x = \frac{1}{2}gt^2$

tức trong môi trường không cản quả cầu rơi nhanh dần đều với gia tốc $a = g = 9{,}8\ m/s^2$.



Hình 9–7

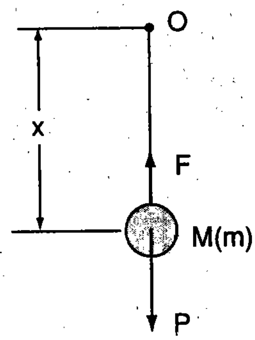
Ví dụ 9–4: Giải ví dụ 9–3 khi kể đến sức cản của môi trường tỉ lệ bậc nhất với vận tốc, hệ số tỉ lệ β không đổi (hình 9–8).

Bài giải : Trong trường hợp kể đến sức cản của môi trường $\vec{F} = -\beta\vec{v}$ phương trình vi phân chuyển động của quả cầu sẽ là :

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} + mg$$

Từ đó $\ddot{x} = g - n\dot{x}$ với $n = \frac{\beta}{m}$

Phương trình này viết dạng : $\frac{d\dot{x}}{g - n\dot{x}} = dt$



Hình 9–8

Khi tích phân phương trình trên với chú ý rằng lực cản không thể lớn hơn trọng lực, tức $\beta\dot{x} \leq P \rightarrow g - n\dot{x} > 0$, ta tìm được :

$$\dot{x} = \frac{g}{n} - C_1e^{-nt};\ \ x = \frac{g}{n}t + \frac{C_1}{n}e^{-nt} + C_2$$

trong đó C_1 và C_2 là các hằng số tích phân.

Nếu chọn gốc thời gian tương ứng với gốc tọa độ O thì :

$$x(0) = x_0 = 0\ ;\ \ \dot{x}(0) = v(0) = v_0 = 0$$

Các hằng số tích phân sẽ tìm được từ hệ phương trình :

$$0 = \frac{g}{n} - C_1;\ 0 = \frac{C_1}{n} + C_2$$

Từ đó : $C_1 = \frac{g}{n};\ C_2 = -\frac{g}{n^2}$

Vậy phương trình chuyển động của quả cầu sẽ là :

$$x = \frac{g}{n}t + \frac{g}{n^2}(e^{-nt} - 1)$$

Còn vận tốc của quả cầu được viết trong dạng :

$$v = \dot{x} = \frac{g}{n}(1 - e^{-nt})$$

Rõ ràng khi $t \to \infty, v \to \frac{g}{n} = \text{const}$, tức quả cầu sẽ chuyển động đều khi $t \to \infty$ với vận tốc được gọi là vận tốc tới hạn, kí hiệu v_∞ hoặc v_{gh}.

$$v_\infty = \frac{g}{n}$$

Ví dụ 9–5 : Một vật nặng có khối lượng m được treo vào đầu một lò xo có độ cứng c nằm cân bằng tại vị trí O. Khi kéo vật nặng dời khỏi vị trí cân bằng O với độ lệch x_0 và vận tốc ban đầu v_0 hướng về vị trí cân bằng O. tìm chuyển động của vật (hình 9–9).

Bài giải : Vật nặng được xem như một chất điểm chịu tác dụng của trọng lực và lực đàn hồi lò xo : $F_{ex} = c\delta$

ở đây : c = const gọi là hệ số cứng của lò xo ; δ – độ dãn của lò xo được kể từ vị trí không biến dạng.

Chọn trục Ox hướng thẳng xuống.

Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm sẽ là :

$$m\ddot{x} = P - c\delta = P - c(x + \delta_0)$$

δ_0 – độ dãn của lò xo ứng với vị trí cân bằng ; x – tọa độ của chất điểm kể từ vị trí cân bằng tĩnh O.

Khi chú ý rằng tại vị trí cân bằng ta có $P = c\delta_0$ thì phương trình trên rút gọn được :

$$\ddot{x} + k^2x = 0$$

trong đó : $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ được gọi là tần số riêng của dao động.

Phương trình vi phân trên có nghiệm dạng :

$$x = A\sin(kt + \alpha)$$

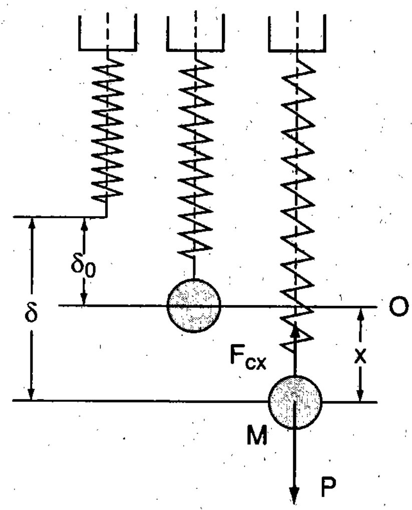
và $$v = \dot{x} = Ak\cos(kt + \alpha)$$

trong đó A và α là hai hằng số tích phân.

Chọn gốc thời gian ứng với thời điểm đầu $x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = v_0$

Ta có : $x_0 = A\sin\alpha;\ v_0 = Ak\cos\alpha$

Từ đó : $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}};\ \text{tg}\alpha = \frac{kx_0}{v_0}$



Hình 9–9

Vậy quả cầu dao động điều hòa với biên độ A và tần số k.

Chương 10

ĐỘNG LỰC HỌC CƠ HỆ

10.1. CÁC KHÁI NIỆM

10.1.1. Cơ hệ tự do và cơ hệ chịu liên kết : Cơ hệ tự do là một tập hợp các chất điểm mà tương tác cơ học giữa chúng được biểu hiện chỉ thuần túy qua lực tác dụng. Về mặt động học đó là một tập hợp các chất điểm tự do, là những chất điểm mà di chuyển (vô cùng bé) của chúng từ vị trí đang xét theo bất kì phương nào cũng không bị cản trở, ví dụ : Thái dương hệ là một cơ hệ tự do.

Cơ hệ không tự do, còn được gọi là cơ hệ chịu liên kết, là một tập hợp các chất điểm mà ngoài tương tác lực, vị trí và vận tốc của chúng còn bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học cho trước, được gọi là những liên kết. Cơ cấu máy là một ví dụ về cơ hệ chịu liên kết. Vật rắn tuyệt đối cũng là một cơ hệ chịu liên kết.

Nếu các điều kiện ràng buộc được biểu thị bằng các phương trình chỉ chứa các tọa độ của các chất điểm thì các liên kết đặt lên cơ hệ được gọi là liên kết hình học, giữ và dừng.

10.1.2. Di chuyển khả dĩ và số bậc tự do của cơ hệ : *Di chuyển khả dĩ*

Các liên kết đặt lên cơ hệ đã hạn chế một số khả năng di chuyển của cơ hệ. Tập hợp các khả năng di chuyển còn lại (các di chuyển vô cùng bé) mà cơ hệ còn khả năng thực hiện được gọi là những di chuyển khả dĩ. Ví dụ, xét một viên bi nằm trong ống thẳng có đường kính tiết diện bằng đường kính của viên bi. Viên bi chỉ có một khả năng di chuyển dọc ống sang phải hoặc sang trái từ vị trí đang xét, các khả năng di chuyển khác đều bị tước bỏ, chẳng hạn khả năng di chuyển theo phương pháp tuyến thành ống. Vậy, di chuyển khả dĩ của cơ hệ là một tập hợp các di chuyển vô cùng bé của các chất điểm thuộc cơ hệ từ vị trí đang xét sang một vị trí lân cận phù hợp với các liên kết đang xét. Trong trường hợp cơ hệ chịu liên kết hình học, giữ và dừng thì di chuyển thật trùng với một trong tập hợp các di chuyển khả dĩ.

Số bậc tự do của cơ hệ : Các di chuyển khả dĩ của cơ hệ không độc lập đối với nhau.

Ví dụ : viên bi đặt trong ống tuy có hai di chuyển khả dĩ (sang phải và sang trái) nhưng chỉ có một di chuyển khả dĩ là độc lập (ví dụ, di chuyển khả dĩ sang bên trái) còn di chuyển khả dĩ kia được suy ra từ di chuyển khả dĩ đầu bằng cách nhân với hệ số (–1). Nói khác đi số di chuyển khả dĩ độc lập của viên bi nằm trong ống bằng 1.

Số bậc tự do của cơ hệ được kí hiệu là k, là số tối đa các di chuyển khả dĩ độc lập tuyến tính của cơ hệ.

10.1.3. Tọa độ suy rộng cơ hệ : Tập hợp các thông số đủ để xác định được vị trí của cơ hệ trong một hệ quy chiếu xác định, được gọi là các tọa độ suy rộng của cơ hệ, kí hiệu $q_1, q_2, ..., q_m$. Các tọa độ suy rộng có thể là các tọa độ Đề các của chất điểm thuộc cơ hệ, có thể là góc quay của vật rắn,.. nên thứ nguyên của chúng có thể là độ dài và cũng có thể không là độ dài.

Vị trí của cơ hệ được xác định nhờ các tọa độ suy rộng, nên các tọa độ Đề các của chất điểm của cơ hệ có thể biểu diễn qua các tọa độ suy rộng :

$$\left.\begin{array}{l} x_k = x_k(q_1, q_2, ..., q_m) \\ y_k = y_k(q_1, q_2, ..., q_m) \\ z_k = z_k(q_1, q_2, ..., q_m) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_m) \quad (10\text{–}1)$$

Nếu các tọa độ suy rộng là độc lập ta có tọa độ suy rộng đủ: $q_1, q_2, ..., q_n$. Trường hợp ngược lại ta có tọa độ suy rộng thừa: $q_1, q_2, ..., q_m$ $(m > n)$.

Đã chứng minh được rằng đối với cơ hệ chịu liên kết hình học, số tọa độ suy rộng đủ bằng số bậc tự do.

Ví dụ, trong trường hợp vật rắn chuyển động tịnh tiến thì các tọa độ suy rộng đủ, có thể chọn là ba tọa độ Đề các của một chất điểm bất kì thuộc vật. Trong trường hợp vật rắn quay quanh một trục cố định thì tọa độ suy rộng có thể chọn là góc định vị $\overline{\varphi}$ của vật quay. Còn trong trường hợp vật rắn chuyển động song phẳng các tọa độ suy rộng có thể chọn là các thông số định vị hình phẳng $(x_0, y_0, \overline{\varphi})$.

10.1.4. Các đặc trưng hình học khối của vật rắn

a) Khối tâm của cơ hệ và vật rắn

– Khối tâm của cơ hệ : Xét một cơ hệ gồm N chất điểm M_k (k =1,2,..N), có khối lượng m_k, véctơ định vị $\vec{r}_k$. Điểm hình học C được gọi là khối tâm cơ hệ nếu vị trí của nó được xác định theo công thức sau, (hình 10–1a) :

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k} \quad (10\text{–}2)$$

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k}; \; y_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k}; \; z_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} z_k m_k}{\sum_{k=1}^{N} m_k} \quad (10\text{–}2')$$

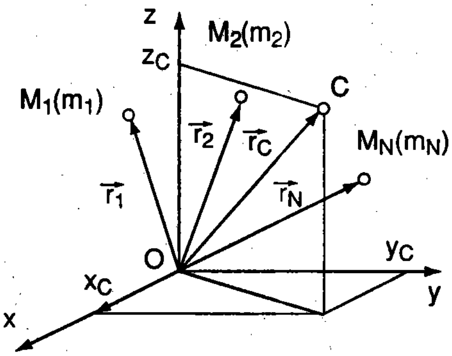
– Khối tâm của vật rắn : Xét một vật rắn và chia nó thành nhiều phần tử nhỏ M_k (số phần tử tiến đến vô tận), có khối lượng m_k, véctơ định vị $\vec{r}_k$.

Điểm hình học C mà vị trí của nó được xác định theo công thức :

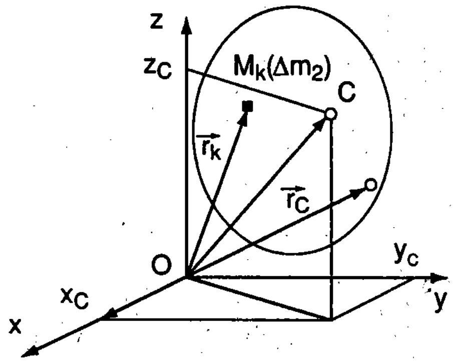
$$\vec{r}_c = \frac{\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \Delta m_k \vec{r}_k}{\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \Delta m_k} = \frac{1}{M} \int_{(V)} \vec{r} dm \quad (10\text{–}3)$$

được gọi là khối tâm của vật rắn (hình 10–1b).

trong đó $M = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \Delta m_k$ – khối lượng của vật rắn .



Hình 10-1a



Hình 10-1b

Từ đó ta nhận được các công thức xác định khối tâm của vật rắn :

$$x_c = \frac{\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k \Delta m_k}{M} = \frac{1}{M}\int\limits_{(V)} x dm$$

$$y_c = \frac{\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N} y_k \Delta m_k}{M} = \frac{1}{M}\int\limits_{(V)} y dm \qquad (10\text{–}3')$$

$$z_c = \frac{\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N} z_k \Delta m_k}{M} = \frac{1}{M}\int\limits_{(V)} z dm$$

Trong trường hợp vật rắn nằm gần Trái Đất thì khối tâm trùng trọng tâm (là điểm đặt của hợp lực của hệ trọng lực do Trái Đất tác dụng lên vật rắn).

Nếu vật là một khối đồng chất có thể tích V và có khối lượng riêng (khối lượng của một đơn vị thể tích) là ρ thì $M = \rho V$; $dm = \rho dV$. Do đó ta có :

$$\vec{r}_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} \vec{r} dV$$

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} x dV; \quad y_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} y dV; \quad z_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)} z dV \qquad (10\text{–}4)$$

Đặc biệt đối với một tấm phẳng đồng chất có tiết diện F thì :

$$x_c = \frac{1}{F}\iint\limits_{(F)} x dF = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{1}{F}\iint\limits_{(F)} y dF = \frac{S_x}{F} \qquad (10\text{–}5)$$

$$S_x = \iint\limits_{(F)} y dF; \qquad S_y = \iint\limits_{(F)} x dF \qquad (10\text{–}6)$$

được gọi là mô men tĩnh của tiết diện F đối với trục x và trục y tương ứng.

Các định lí về khối tâm (trọng tâm).

Định lí 10–1. Nếu vật rắn đồng chất có tâm (trục, mặt phẳng) đối xứng thì khối tâm (trọng tâm) của nó nằm tại tâm (trục, mặt phẳng) đối xứng.

Định lí 10–2. Nếu vật rắn gồm các phần mà khối tâm (trọng tâm) của các phần đó nằm trên một đường thẳng (mặt phẳng) thì khối tâm (trọng tâm) của vật cùng nằm trên đường thẳng (mặt phẳng) đó.

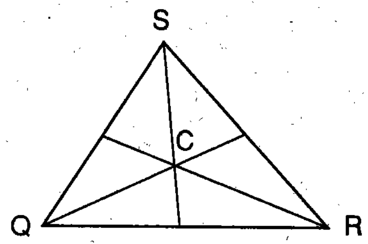
Các định lí này được chứng minh bằng cách suy trực tiếp từ định nghĩa.

Áp dụng các định lí trên ta tìm ngay được :

– Khối tâm (trọng tâm) của một thanh thẳng đồng chất là điểm giữa của thanh.

– Khối tâm (trọng tâm) của các hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, khối hộp chữ nhật, khối lập phương đồng chất là tâm của chúng.

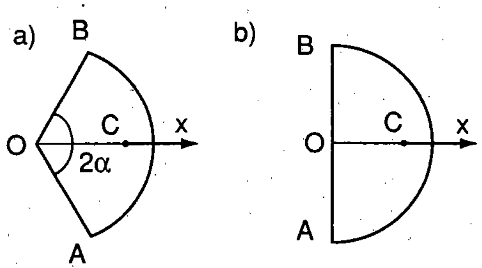
– Khối tâm (trọng tâm) của tam giác đồng chất là giao điểm các trung tuyến (hình 10–2).



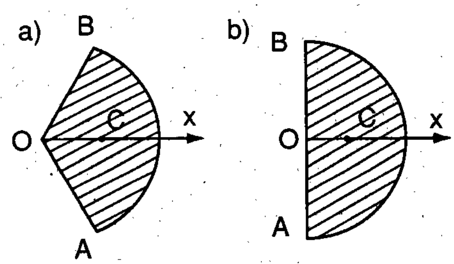
Hình 10–2

– Khối tâm (trọng tâm) của cung tròn đồng chất AB, có bán kính R và góc tại tâm AOB = 2α được tính theo công thức (hình 10–3a):

$$x_c = \frac{R\sin\alpha}{\alpha} \qquad (10\text{–}7)$$



Hình 10–3



Hình 10–4

Nếu cung AB là nửa đường tròn ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), thì khối tâm (trọng tâm) tính theo công thức (hình 10–3b) :

$$x_c = \frac{2R}{\pi} \qquad (10\text{–}8)$$

– Khối tâm (trọng tâm) của một quạt tròn đồng chất AOB tâm O, có bán kính R và góc tại tâm ∠AOB = 2α được tính theo công thức (hình 10–4a)

$$x_c = \frac{2R\sin\alpha}{3} \qquad (10\text{–}9)$$

Nếu quạt AOB là nửa mặt tròn ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), thì khối tâm (trọng tâm) tính theo công thức (hình 10-4b) :

$$x_c = \frac{4R}{3\pi} \qquad (10\text{–}10)$$

– Khối tâm (trọng tâm) của vật ghép (xem định lí 10–3).

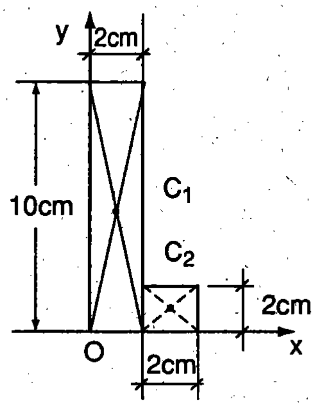
Định lí 10-3 : Nếu tấm phẳng đồng chất được ghép từ m phần, mỗi phần có diện tích F_i, mô men tĩnh đối với các trục x và y tương ứng là S_{xi}, S_{yi} và khối tâm (trọng tâm) C có tọa độ:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{m} S_{yi}}{\sum_{i=1}^{m} F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{m} S_{xi}}{\sum_{i=1}^{m} F_i} \qquad (10\text{–}10)$$

Ví dụ 10–1 : Tìm khối tâm (trọng tâm) của tấm đồng chất hình chữ L có kích thước cho trên hình 10–5.

Bài giải : Chia tấm hình chữ L thành hai tấm hình chữ nhật có khối tâm (trọng tâm) C_1 và C_2. Ta có :

$$x_1 = 1cm; \; y_1 = 5cm;$$
$$x_2 = 3cm; \; y_2 = 1cm$$
$$F_1 = 20cm^2; \; F_2 = 4cm^2.$$



Hình 10-5

Theo công thức (10–6) ta dễ dàng tính được :

$$S_{x_1} = F_1y_1 = 20 \times 5 = 100cm^3$$
$$S_{y_1} = F_1x_1 = 20 \times 1 = 20cm^3$$
$$S_{x_2} = F_2y_2 = 4 \times 1 = 4cm^3$$
$$S_{y_2} = F_2x_2 = 4 \times 3 = 12cm^3$$

Vậy :

$$x_c = \frac{S_{y_1} + S_{y_2}}{F_1 + F_2} = \frac{20+12}{20+4} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}cm$$

$$y_c = \frac{S_{x_1} + S_{x_2}}{F_1 + F_2} = \frac{100+4}{20+4} = \frac{104}{24} = 4{,}3cm$$

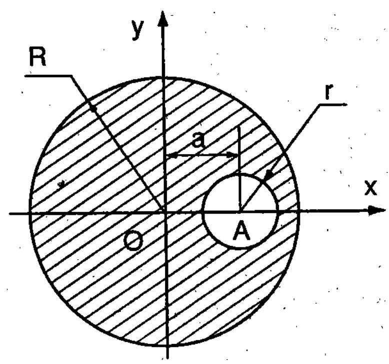
Ví dụ 10–2 : Tìm khối tâm (trọng tâm) của tấm tròn đồng chất tâm O, bán kính R, bị khuyết mảnh tròn tâm A bán kính r, biết $OA = a < R; \; a + r < R$ (hình 10–6).

Bài giải : Xem tấm bị khuyết là kết quả của việc ghép tấm tròn nguyên có khối tâm (trọng tâm) tại O(0,0) diện tích $F_1 = \pi R^2$ với mảnh tròn có khối tâm (trọng tâm) A(a,0) diện tích âm $F_2 = -\pi r^2$.

Do tấm có trục Ox đối xứng nên khối tâm (trọng tâm) nằm trên trục này ($y_C = 0$), còn :

$$x_c = \frac{Sy_1 + Sy_2}{F_1 + F_2} = \frac{F_1y_1 + F_2y_2}{F_1 + F_2} = \frac{\pi R^2 0 - \pi r^2 a}{\pi R^2 - \pi r^2} = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2}$$

Dấu "–" chứng tỏ C nằm bên trái tâm O.



Hình 10– 6

b) Mô men quán tính của vật rắn

– Các định nghĩa : Mô men quán tính của vật rắn đối với trục z, kí hiệu I_z là đại lượng vô hướng được xác định theo công thức (hình 10–7):

$$I_z = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\Delta m_k\rho_k^2 = \iiint_{(V)}\rho^2 dm \qquad (10\text{–}11)$$

trong đó ρ_k là khoảng cách của phần tử M_k đối với trục z.

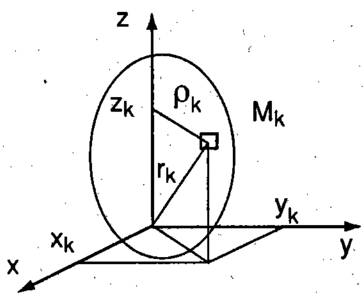
Mô men quán tính của vật rắn đối với các trục tọa độ.

Khi đưa vào hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Oxyz ta có :

$$I_z = \iiint_{(V)}(x^2+y^2)dm$$

$$I_y = \iiint_{(V)}(z^2+x^2)dm \qquad (10\text{–}12)$$

$$I_x = \iiint_{(V)}(y^2+z^2)dm$$



Hình 10–7

được gọi là các mô men quán tính của vật rắn đối với các trục Oz, Oy và Ox tương ứng.

Mô men quán tính tích : Các đại lượng được gọi là các mô men quán tính tích :

$$\left.\begin{aligned}
I_{xy} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}x_k y_k\Delta m_k = \iiint_{(V)}xy\,dm\\
I_{yz} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}y_k z_k\Delta m_k = \iiint_{(V)}yz\,dm\\
I_{zx} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}z_k x_k\Delta m_k = \iiint_{(V)}zx\,dm
\end{aligned}\right\} \qquad (10\text{–}13)$$

Rõ ràng là : $I_{xy} = I_{yx};\ I_{yz} = I_{zy};\ I_{zx} = I_{xz}$.

Trục quán tính chính : Trục x được gọi là trục quán tính chính nếu :

$$I_{xy} = I_{xz} = 0 \qquad (10\text{–}14)$$

Tương tự trục y là trục quán tính chính nếu $I_{yx} = I_{yz} = 0$, còn trục z là trục quán tính chính thì $I_{zx} = I_{zy} = 0$.

Rõ ràng nếu hai trục đã là trục quán tính chính thì trục thứ ba là trục quán tính chính.

Trục quán tính chính trung tâm : Trục quán tính chính qua khối tâm được gọi là trục quán tính chính trung tâm.

Mô men quán tính của vật rắn đối với một điểm (hình 10–7) :

$$I_O = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \Delta m_k r_k^2 = \iiint_{(V)} r^2 dm \qquad (10\text{–}15)$$

Dễ dàng chỉ ra rằng: $I_O = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$ (10–16)

Bán kính quán tính :

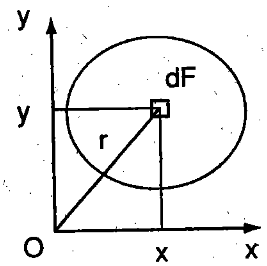
Đại lượng $\rho_{qt}^2 = \frac{I_z}{M}$, (10–17)

được gọi là bán kính quán tính của vật rắn đối với trục z.

Đơn vị của mô men quán tính là kgm^2 (kilogam mét bình phương) đơn vị của bán kính quán tính là *m* (mét).

Trong trường hợp đối với tiết diện phẳng F thì (hình 10– 8)

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \iint_F y^2 dF \\ I_y &= \iint_F x^2 dF \\ I_{xy} &= \iint_F xy dF \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{–}18)$$



Hình 10–8

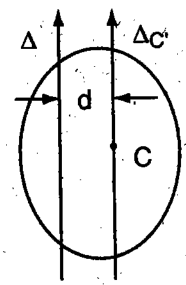
Mô men quán tính độc cực I_O:

$$I_O = \iint_F r^2 dF = I_x + I_y \qquad (10\text{–}19)$$

Hệ trục có $I_{xy} = 0$ gọi là hệ trục chính.

Hệ trục có $I_{xy} = 0; \; S_x = S_y = 0$ (10–20)

được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm.



Hình 10–9

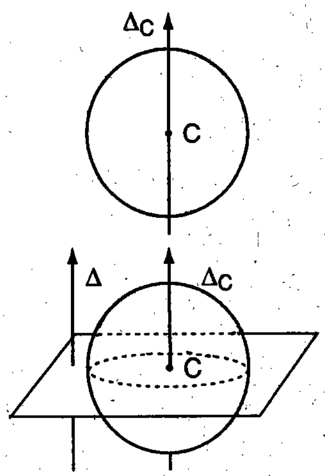
Tương ứng với các hệ trục đó ta có mô men quán tính chính hoặc mô men quán tính chính trung tâm.

Định lí 10–4 : Mô men quán tính của vật rắn đối với trục Δ bằng tổng mô men quán tính của nó đối với trục song song với trục Δ qua khối tâm C của vật và tích của khối lượng vật với bình phương khoảng cách giữa hai trục (hình 10– 9) :

$$I_\Delta = I_{\Delta C} + Md^2 \qquad (10\text{–}21)$$

Định lí 10–5 : Nếu vật rắn đồng chất có một trục đối xứng thì trục đó là trục quán tính chính trung tâm.

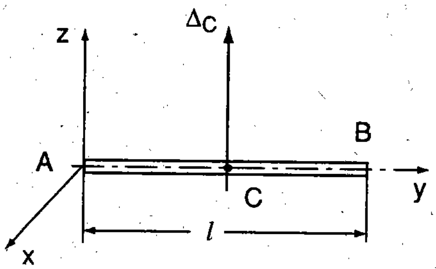
Định lí 10–6 : Nếu vật rắn đồng chất có mặt phẳng đối xứng thì trục thẳng góc với mặt phẳng đối xứng là trục quán tính chính tại giao điểm của mặt phẳng đối xứng và trục (hình 10–10).



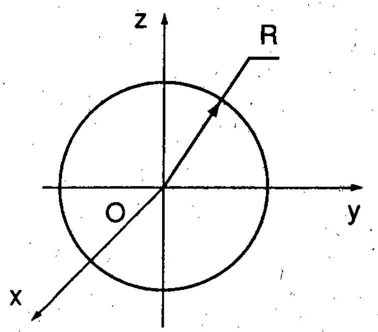
Hình 10–10

– Mô men quán tính của một số vật đồng chất : Thanh đồng chất có chiều dài l, khối lượng M (hình 10–11) :

$$I_{\Delta C} = \frac{Ml^2}{12}; \quad I_x = I_z = \frac{Ml^2}{3}; \quad I_y = 0 \qquad (10\text{–}22)$$



Hình 10–11



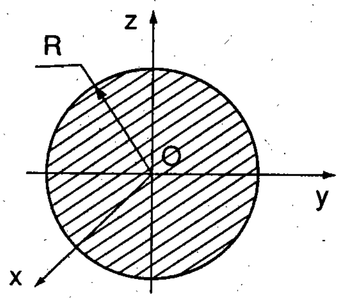
Hình 10–12

Vành tròn đồng chất có bán kính R, khối lượng M (hình 10– 12):

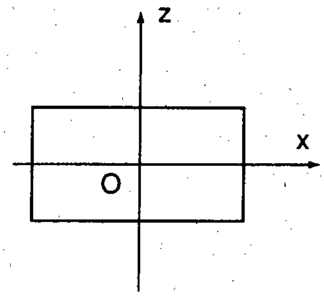
$$I_x = MR^2; \quad I_y = I_z = \frac{MR^2}{2} \qquad (10\text{–}23)$$

Mặt tròn đồng chất, bán kính R, khối lượng M (hình 10– 13):

$$I_x = \frac{MR^2}{2}; \quad I_y = I_z = \frac{MR^2}{4} \qquad (10\text{–}24)$$



Hình 10–13



Hình 10–14

Tấm chữ nhật đồng chất, có các cạnh 2a và 2b, khối lượng M (hình 10– 14):

$$I_x = \frac{Mb^2}{12}; \quad I_y = \frac{Ma^2}{12} \qquad (10\text{–}25)$$

Trụ tròn xoay đồng chất, khối lượng M, bán kính R, chiều cao h :

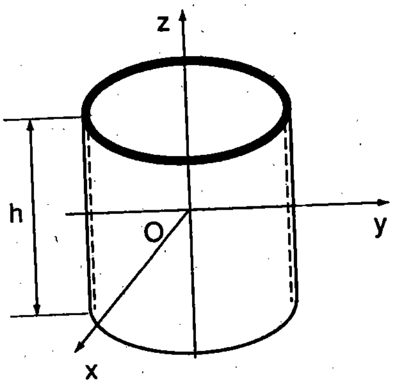
+ Trụ rỗng (hình 10– 15) :

$$I_z = MR^2; \quad I_x = I_y = \frac{M}{2}(R^2 + \frac{h^2}{6}) \qquad (10\text{–}26a)$$

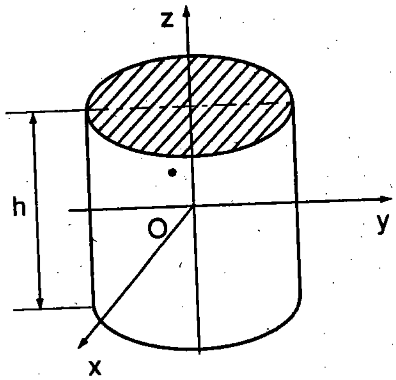
+ Trụ đặc (hình 10–16):

$$I_z = \frac{MR^2}{2};\quad I_x = I_y = \frac{M}{4}(R^2 + \frac{h^2}{3}) \qquad (10\text{–}26b)$$

Các kết quả nhận được dễ dàng áp dụng cho trường hợp của tiết diện phẳng khi chú ý đến (10–18), (10–19) và (10–20).



Hình 10–15



Hình 10–16

10.1.5. Lực tác dụng lên cơ hệ

Phân loại các lực tác dụng : Các lực tác dụng lên chất điểm của cơ hệ, khác với các lực đã từng gặp trong tĩnh học, không phải là các lực hằng mà là các lực thay đổi theo thời gian và phụ thuộc không những vào vị trí, vận tốc của chất điểm chịu tác dụng của lực mà còn phụ thuộc vào vị trí, vận tốc của tất cả các chất điểm thuộc cơ hệ. Gọi $\vec{F}_k$ là lực tác dụng lên chất điểm M_k, và biểu thức có dạng sau :

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_N) \qquad (10\text{–}27)$$

ở đó N là số chất điểm thuộc cơ hệ ; $\vec{r}_k, \vec{v}_k$ – véctơ định vị và véctơ vận tốc của chất điểm M_k.

Các lực tác dụng lên cơ hệ có thể phân thành như sau :

Ngoại lực và nội lực : Ngoại lực, kí hiệu $\vec{F}_k^e$, là lực do các vật thể bên ngoài tác dụng lên chất điểm M_k thuộc cơ hệ, ví dụ, các lực do các thiên thể nằm ngoài Thái dương hệ tác dụng lên các hành tinh của Thái dương hệ là các ngoại lực đối với Thái dương hệ.

Nội lực, kí hiệu $\vec{F}_k^i$, là lực do các chất điểm thuộc cơ hệ tác dụng lẫn lên nhau, ví dụ, lực tác dụng qua lại giữa Trái Đất và Mặt trăng là nội lực đối với Thái dương hệ. Đặc điểm nổi bật của hệ nội lực là chúng xuất hiện bao giờ cũng từng cặp trực đối nhau, nên véctơ chính và mô men chính của hệ nội lực luôn luôn triệt tiêu.

Lực liên kết và lực hoạt động : Lực liên kết, kí hiệu $\vec{R}_k$, là lực do liên kết tác dụng lên các chất điểm thuộc cơ hệ, ví dụ, phản lực của giá tác dụng lên cơ cấu, lực nối giữa hai khâu thuộc một cơ cấu ...

Lực hoạt động là các lực không thuộc vào loại lực liên kết, ví dụ, trọng lực của các chất điểm là các lực hoạt động. Đặc điểm nổi bật của các lớp lực này là các lực hoạt động không phụ thuộc vào các liên kết đặt lên cơ hệ (các kết cấu của cơ hệ), còn lực liên kết không những tùy thuộc vào kết cấu cơ hệ mà còn phụ thuộc vào các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ.

Việc phân loại lực theo cách nào tùy thuộc vào phương pháp được dùng để khảo sát bài toán động lực học.

10.1.6. Lực suy rộng

a) Biểu thức công của lực trong di chuyển khả dĩ: Công của lực trong di chuyển khả dĩ được gọi tắt là công khả dĩ của lực. Cho cơ hệ di chuyển khả dĩ $\{\delta\vec{r}_k\}$. Theo công thức tính công nguyên tố (9–6), biểu thức công khả dĩ của các lực sẽ là :

$$\sum \delta A_k = \sum \vec{F}_k \delta\vec{r}_k = \sum (F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k)$$

Giả sử các tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ là $q_1, q_1, \ldots, q_n$.

Từ biểu thức (10–1) ta tính được :

$$\delta x_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\delta q_i; \quad \delta y_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\delta q_i; \quad \delta z_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\delta q_i$$

Khi thay các đại lượng này vào biểu thức công khả dĩ ở trên và sắp xếp lại các số hạng, ta được :

$$\sum \delta A_k = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{N}\left(F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right)\right]\delta q_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \qquad (10\text{–}28)$$

Trong trường hợp lực đặt lên vật rắn chuyển động tịnh tiến thì :

$$\delta A_{\vec{F}} = \vec{F}\delta\vec{r}_c \qquad (10\text{–}29)$$

C là khối tâm vật rắn.

Nếu lực đặt vào vật rắn quay quanh trục cố định thì :

$$\delta A_{\vec{F}} = \vec{m}_\Delta(\vec{F})\delta\vec{\varphi} \qquad (10\text{–}30)$$

Còn nếu lực đặt vào tấm phẳng chuyển động song phẳng thì :

$$\delta A_{\vec{F}} = \vec{m}_P(\vec{F})\delta\vec{\varphi}_S \qquad (10\text{–}31)$$

trong đó P là tâm vận tốc tức thời của hình phẳng.

b) Lực suy rộng : Đại lượng :

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N}\left(F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i} \qquad (10\text{–}32)$$

được gọi là lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng q_i.

Chú ý rằng lực suy rộng là đại lượng vô hướng. Thứ nguyên của lực suy rộng là :

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}$$

Từ đó thấy rằng nếu tọa độ suy rộng là độ dài thì lực suy rộng là lực, nếu tọa độ suy rộng là góc thì lực suy rộng là ngẫu lực.

10.1.7. Liên kết lí tưởng : Ta xét một lớp các liên kết thường gặp được gọi là liên kết lí tưởng.

Liên kết được gọi là lí tưởng nếu tổng công của tất cả các lực liên kết trong mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ đều bằng không :

$$\sum \vec{R}_k \delta\vec{r}_k = 0 \qquad (10\text{–}33)$$

Trong thực tế nếu bỏ qua được ma sát và tính đàn hồi của các vật thể thuộc cơ hệ thì đa số các liên kết thường gặp đều là các liên kết lí tưởng.

– Các vật rắn tự do là cơ hệ chịu liên kết lí tưởng.

– Hai vật rắn luôn luôn tựa vào nhau trong quá trình chuyển động và ma sát giữa chúng bỏ qua được là cơ hệ chịu liên kết lí tưởng.

– Dây mềm không dãn vắt qua ròng rọc hay puli, nếu bỏ qua được ma sát trục quay và sự trượt tương đối giữa ròng rọc hay puli với dây là cơ hệ chịu liên kết lí tưởng.

– Liên kết giữa hai vật lăn không trượt đối với nhau là liên kết lí tưởng.

Dễ dàng chỉ ra rằng lực suy rộng của các lực liên kết lí tưởng triệt tiêu, tức là :

$$Q_i^R = \sum \vec{R}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = 0 \qquad (10\text{–}34)$$

10.2. NGUYÊN LÍ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

10.2.1. Nguyên lí di chuyển khả dĩ : Đối với cơ hệ chịu liên kết hình học, giữ, dừng và lí tưởng, điều kiện cần và đủ để cơ hệ cân bằng tại vị trí đang xét là tổng công nguyên tố của các lực hoạt động trong mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ từ vị trí đang xét đều triệt tiêu :

$$\sum \delta A_k = \sum \vec{F}_k \delta\vec{r}_k = 0 \qquad (10\text{–}35)$$

trong đó $\vec{F}_k$ là lực hoạt động (hợp lực) tác dụng lên chất điểm M_k thuộc cơ hệ, $\delta\vec{r}_k$ là di chuyển khả dĩ của chất điểm M_k. Phương trình (10–35) còn được gọi là phương trình công khả dĩ.

Chứng minh điều kiện cần : Giả sử cơ hệ nằm cân bằng tại vị trí đang xét. Xét một chất điểm M_k thuộc cơ hệ chịu tác dụng lực hoạt động $\vec{F}_k$ và lực liên kết $\vec{R}_k$. Vì cơ hệ cân bằng nên mọi chất điểm phải cân bằng, tức là :

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k = 0$$

Do đó : $\sum(\vec{F}_k + \vec{R}_k)\delta\vec{r}_k = \sum \vec{F}_k \delta\vec{r}_k + \sum \vec{R}_k \delta\vec{r}_k = 0$

Do các liên kết của cơ hệ là lí tưởng nên ta có (10–35).

Vậy $\sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = 0$

Đó là điều phải chứng minh.

Chứng minh điều kiện đủ : Giả sử cơ hệ cân bằng và tổng công khả dĩ của các lực hoạt động bằng không. Ta chứng minh rằng cơ hệ mãi mãi cân bằng tại vị trí đã cho.

Thực vậy, giả sử có chất M_k (ít nhất là một) của cơ hệ dưới tác dụng của lực hoạt động $\vec{F}_k$ và lực liên kết $\vec{R}_k$ chuyển động từ vị trí đầu đứng yên. Di chuyển của nó được kí hiệu bởi $d\vec{r}_k$ ($\vec{r}_k$ là véctơ định vị của chất điểm M_k) có cùng phương với lực tác dụng lên chất điểm M_k là $\vec{F}_k + \vec{R}_k$ vì chất điểm chuyển động từ trạng thái đứng yên. Do liên kết là dừng nên phương của di chuyển thực trùng với một trong các phương của di chuyển khả dĩ, nên ta có thể chọn di chuyển khả dĩ trùng với di chuyển thực của nó. Vậy ta có :

$$\vec{\Phi}_k \delta \vec{r}_k = (\vec{F}_k + \vec{R}_k)\delta \vec{r}_k = \vec{F}_k \delta \vec{r}_k + \vec{R}_k \delta \vec{r}_k > 0$$

Lấy tổng hai vế đối với tất cả các chất điểm thuộc cơ hệ và chú ý đến điều kiện về liên kết lí tưởng (10–35) ta nhận được :

$$\sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k + \sum \vec{R}_k \delta \vec{r}_k = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k > 0$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy không thể (dù chỉ là một) chất điểm nào của cơ hệ chuyển động từ vị trí cân bằng đã cho. Đó là điều cần chứng minh.

10.2.2. Điều kiện cân bằng của cơ hệ trong tọa độ suy rộng đủ : Dựa vào biểu thức công khả dĩ (10–28), nguyên lí di chuyển khả dĩ được viết trong dạng sau:

$$\sum \delta A_F = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0 \qquad (10\text{–}36)$$

Từ tính chất độc lập của các tọa độ suy rộng đủ nên các δq_i $(i = \overline{1,n})$ cũng độc lập với nhau. Vậy đẳng thức (10–36) được thực hiện khi và chỉ khi :

$$Q_i = 0 \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (10\text{–}37)$$

Ta có định lí 10–7.

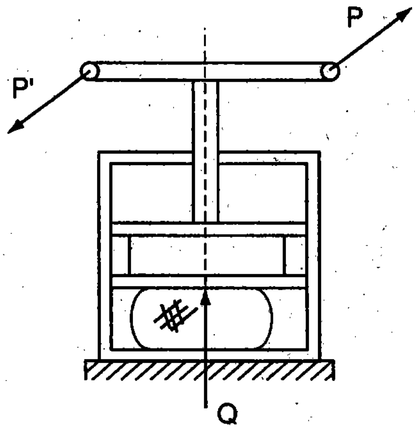
Định lí 10–7 : Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết hình học, giữ, dừng và lí tưởng cân bằng tại một vị trí là các lực suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng đủ phải đồng thời triệt tiêu.

Chú ý : Nếu đưa vào kí hiệu $\vec{v}_k^* = \dfrac{\delta \vec{r}_k}{dt}$, gọi là vận tốc khả dĩ thì nguyên lí khả dĩ có thể viết trong dạng :

$$\sum \vec{F}_k \vec{v}_k^* = 0 \qquad (10\text{–}38)$$

Phương trình này được gọi là phương trình công suất khả dĩ.

Ví dụ 10–3. Xác định quan hệ giữa lực P tác dụng thẳng góc với tay quay của máy ép vít và lực ép Q. Cho biết cánh tay đòn của máy ép là a, bước của trục vít bằng h. Bỏ qua ma sát (hình 10–17).



Hình 10–17

Bài giải : Khảo sát cơ hệ gồm toàn bộ máy ép vít. Cơ hệ có một bậc tự do chịu liên kết hình học, giữ, dừng và lí tưởng.

Chọn tọa độ suy rộng đủ $q = \varphi$

(φ – góc định vị tay quay).

Hệ lực hoạt động gồm $\vec{P}, \vec{P}', \vec{Q}$.

Cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ ứng với góc φ biến đổi lượng $\delta\varphi$ và bàn ép di chuyển một lượng δs theo phương thẳng đứng. Vì bước của trục vít là h, nên khi vít quay một góc 2π thì vít di chuyển theo chiều trục một đoạn bằng h. Do đó : $\delta s = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi$.

Tổng công khả dĩ các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ trên bằng :

$$\sum \delta A_F = 2aP\delta\varphi - Q\delta s = (2aP - Q\frac{h}{2\pi})\delta\varphi$$

Lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng φ bằng :

$$Q_\varphi = \frac{\sum \delta A_F}{\delta\varphi} = 2aP - Q\frac{h}{2\pi}$$

Từ điều kiện cân bằng của cơ hệ $Q_\varphi = 0$, ta nhận được: $P = Q\frac{h}{4\pi a}$

Ví dụ 10–4 : Cho cơ cấu tay quay con trượt OAB có OA = r, AB = l. Tay quay OA chịu tác dụng ngẫu lực M, con trượt B chịu tác dụng lực nằm ngang F (hình 10– 18).

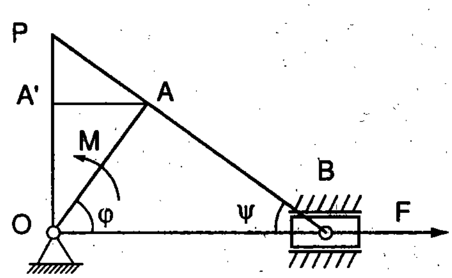
Tìm quan hệ giữa M và F để cơ cấu cân bằng ở vị trí đang xét. Bỏ qua ma sát ở các khớp động và trọng lực.

Bài giải : Khảo sát cơ hệ là cơ cấu tay quay con trượt. Khi bỏ qua ma sát ở các khớp động, ta có một cơ hệ chịu liên kết hình học, giữ, dừng, lí tưởng và chịu tác dụng các lực hoạt động như ngẫu lực M và lực F.

Cho cơ cấu một di chuyển khả dĩ ứng với di chuyển $\delta\varphi$ của tay quay OA và δs của con trượt B, hoặc tương đương với vận tốc góc ω^* của tay quay OA và vận tốc khả dĩ v^* của con trượt B. Phương trình công suất khả dĩ cho ta :

$$M\omega^* - Fv^* = 0$$

Từ đó $M = F\frac{v^*}{\omega^*}$



Hình 10–18

Tỉ số $\dfrac{v^*}{\omega^*}$ là tỉ số truyền động của cơ cấu tay quay con trượt.

Theo kết quả khảo sát ở chương 5 ta có $\dfrac{v^*}{\omega^*} = OP$.

Vậy : $M = FOP = F(OA' + A'P) = F(r\sin\varphi + r\cos\varphi tg\psi) = Fr(\sin\varphi + \cos\varphi tg\psi)$

trong đó $tg\psi = \dfrac{r}{l}\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}}$

10.3. NGUYÊN LÍ ĐALĂMBE

10.3.1. Lực quán tính của chất điểm

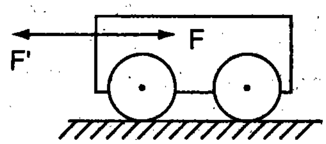
Khảo sát chất điểm dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ chuyển động với gia tốc $\vec{a}$ đối với hệ quy chiếu quán tính. Ta đưa vào một định nghĩa :

Lực quán tính của chất điểm, kí hiệu $\vec{F}^{qt}$ có cùng phương, ngược chiều với gia tốc chất điểm và có giá trị bằng tích của khối lượng với gia tốc của chất điểm :

$$\vec{F}^{qt} = -m\vec{a} \qquad (10\text{–}39)$$

Cần nhấn mạnh rằng lực quán tính của chất điểm không phải là lực tác dụng lên chất điểm. Để làm rõ điều này ta xét hai ví dụ sau :

Giả sử dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ xe chạy với gia tốc $\vec{a}$, theo định luật 2 của động lực học ($\vec{F} = m\vec{a}$).



Hình 10–19

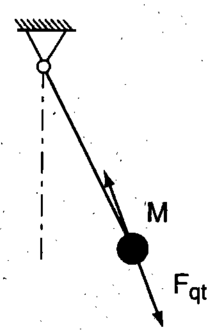
Lực $\vec{F}$ do tay tác dụng lên xe.

Vậy theo định luật tác dụng và phản tác dụng, xe sẽ tác dụng lên tay một lực $\vec{F}' = -\vec{F}$, nghĩa là:

$$\vec{F}' = -\vec{F} = -m\vec{a} = \vec{F}^{qt}$$

Vậy $\vec{F}^{qt}$ chính là lực $\vec{F}'$ do xe tác dụng lên tay đẩy chứ không phải là lực tác dụng lên xe (hình 10– 19).

Khảo sát một chất điểm có khối lượng m buộc vào một đầu sợi dây. Dây quay đều với vận tốc góc ω_0. Gia tốc của chất điểm là gia tốc hướng tâm. Vậy lực quán tính của chất điểm là lực li tâm. Lực đó không đặt lên chất điểm mà chính là lực mà chất điểm tác dụng lên dây và nhờ nó mà dây luôn luôn căng. Lực tác dụng lên chất điểm, ngoài trọng lực, có lực do dây tác dụng lên chất điểm (phản lực của dây tác dụng lên chất điểm). Lực này hướng về tâm (lực hướng tâm), ngược chiều với lực quán tính (hình 10– 20).



Hình 10–20

10.3.2. Nguyên lí Đalămbe đối với chất điểm

Tại mỗi thời điểm lực tác dụng lên chất điểm và lực quán tính của nó cân bằng nhau :

$$\vec{F} + \vec{F}^{qt} = 0 \qquad (10\text{–}40)$$

Chứng minh : Để khẳng định ta chỉ cần viết định luật 2 của Niutơn cho chất điểm được khảo sát : $m\vec{a} = \vec{F}$

Từ đó : $\vec{F} + (-m\vec{a}) = \vec{F} + \vec{F}^{qt} = 0$

Chú thích

1) Trong nguyên lí chỉ khẳng định sự cân bằng về lực (hai lực cùng đường tác dụng, ngược chiều và cùng cường độ) chứ không phải sự cân bằng của chất điểm.

2) Trong trường hợp của chất điểm không tự do, lực tác dụng lên chất điểm là hợp lực của lực hoạt động và lực liên kết.

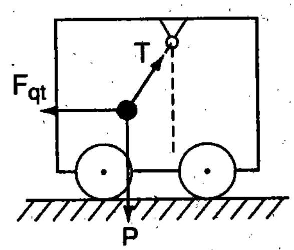
3) Trạng thái cân bằng về lực được thiết lập ở mọi thời điểm.

Ví dụ 10–5 : Với quả cầu nhỏ trọng lượng P được treo vào toa xe chuyển động thẳng với gia tốc $\vec{a}$. Dây treo quả cầu bị lệch một góc α = const so với đường thẳng đứng. Xác định gia tốc $\vec{a}$ của toa xe.

Bài giải : Xem quả cầu như một chất điểm chịu tác dụng của trọng lực và lực $\vec{T}$ do dây căng tác dụng lên quả cầu (hình 10– 21).

Lực quán tính của chất điểm do gia tốc của chất điểm (bằng gia tốc của xe), sẽ bằng :

$$\vec{F}^{qt} = -m\vec{a} = -\frac{P}{g}\vec{a}$$



Hình 10–21

Còn lực thật tác dụng lên chất điểm (quả cầu) là hợp lực của trọng lượng $\vec{P}$ và phản lực $\vec{T}$ của dây (hình 10– 21).

Theo nguyên lí Đalămbe :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}^{qt} = 0$$

Chiếu hai vế của đẳng thức này lên phương Δ thẳng góc với dây, ta có :

$$F^{qt}\cos\alpha - P\sin\alpha = 0$$

Từ đó $\frac{P}{g}a\cos\alpha - P\sin\alpha = 0$

Vậy : $a = g\,\mathrm{tg}\alpha$

Bài toán trên cho ta một phương pháp đơn giản để đo gia tốc của xe.

10.3.3. Nguyên lí Đalămbe đối với cơ hệ : Khảo sát cơ hệ gồm N chất điểm $M_1, M_2, ..., M_N$ dưới tác dụng của hệ lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N$ chuyển động với gia tốc $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_N$.

Xét chất điểm M_k có khối lượng m_k chịu tác dụng của lực $\vec{F}_k$ chuyển động với gia tốc $\vec{a}_k$. Lực quán tính của chất điểm này là : $\vec{F}_k^{qt} = -m_k\vec{a}_k$.

Theo nguyên lí Đalămbe đối với chất điểm, với mọi chất điểm của cơ hệ, ta có :

$$(\vec{F}_k, \vec{F}_k^{qt}) \equiv 0$$

Do đó nguyên lí Đalămbe đối với cơ hệ được phát biểu như sau :

Tại mỗi thời điểm các lực tác dụng lên các chất điểm của cơ hệ và các lực quán tính của các chất điểm thuộc cơ hệ tạo thành một hệ lực cân bằng :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}, ..., \vec{F}_N^{qt}) \equiv 0 \qquad (10\text{–}41)$$

Chú ý :

1) Các lực $\vec{F}_k$ đối với cơ hệ tự do là hợp lực của ngoại lực và nội lực tác dụng lên chất điểm M_k, còn đối với cơ hệ không tự do là hợp lực của lực hoạt động và lực liên kết tác dụng lên chất điểm M_k.

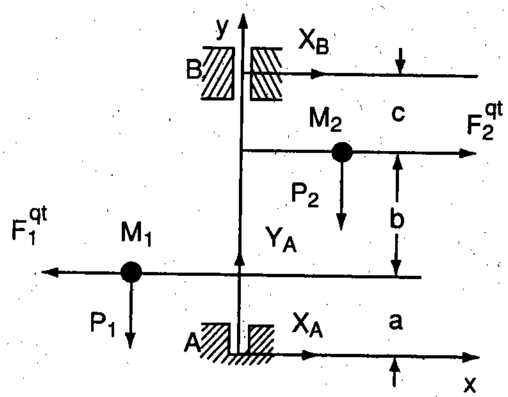
2) Khái niệm cân bằng ở đây có tính chất quy ước "hệ lực cân bằng là hệ lực có từng đôi một lực trực đối nhau".

3) Hệ lực cân bằng (10–41) được thiết lập tại mỗi thời điểm, nên có thể thiết lập điều kiện cân bằng của nó đối với hệ trục tọa độ động và được sử dụng rất tiện lợi trong bài toán xác định phản lực trục quay. Tuy nhiên các lực quán tính (các gia tốc) của các chất điểm cần phải tính đối với hệ quy chiếu quán tính.

Ví dụ 10–6 : Một trục máy mất cân bằng được mô hình bằng hai chất điểm M_1 và M_2 có khối lượng tương ứng bằng m_1 và m_2 nằm trong cùng một mặt phẳng chứa trục quay, khoảng cách của chúng đối với trục quay tương ứng bằng e_1, e_2. Trục máy quay đều với vận tốc ω_0. Xác định các phản lực tại các ổ trục A và B. Các kích thước khác được cho trên hình 10–22. Bỏ qua ma sát tại các trục quay.

Bài giải : Khảo sát cơ hệ là trục máy có gắn hai chất điểm M_1, M_2.

Các lực tác dụng lên cơ hệ gồm các trọng lực (lực hoạt động và các phản lực trục hay lực liên kết) : $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B$ (hình 10– 22).



Hình 10–22

Các lực quán tính của hai chất điểm M_1 và M_2 là:

$$\vec{F}_1^{qt} = -m_1\vec{a}_1 \text{ trong đó } a_1 = e_1\omega_0^2$$

$$\vec{F}_2^{qt} = -m_2\vec{a}_2 \text{ trong đó } a_2 = e_2\omega_0^2$$

Chọn hệ trục tọa độ Axy trong đó trục Ay trùng với trục quay, còn các chất điểm nằm trong mặt phẳng tọa độ Axy.

Ta có hệ lực phẳng cân bằng sau :

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}) \equiv 0$$

Lập các phương trình cân bằng cho hệ lực trên ta có:

$$\sum F_x = X_A + X_B + F_2^{qt} - F_1^{qt} = 0$$
$$\sum F_y = Y_A - P_1 - P_2 = 0$$
$$\sum \vec{m}_A(\vec{F}) = P_1 e_1 - P_2 e_2 - X_B(a+b+c) + F_1^{qt} a - F_2^{qt}(a+b) = 0$$

Giải các phương trình này ta nhận được :

$$Y_A = P_1 + P_2$$

$$X_B = \frac{1}{a+b+c}\left\{P_1 e_1 - P_2 e_2 + \frac{\omega_0^2}{g}[P_1 e_1 a - P_2 e_2 (a+b)]\right\}$$

$$X_A = \frac{1}{a+b+c}\left\{P_2 e_2 - P_1 e_1 + \frac{\omega_0^2}{g}[P_1 e_1 (b+c) - P_2 e_2 c]\right\}$$

Nhận xét : các phản lực ổ trục không những có giá trị phụ thuộc vào vận tốc góc của trục quay mà còn có phương thay đổi (các véctơ $\vec{X}_A, \vec{X}_B$ quay quanh đường tâm của trục máy với vận tốc góc ω_0).

Chương 11

CÁC ĐỊNH LÍ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC CƠ HỆ

Nguyên lí Đalămbe cho một phương pháp tổng quát để khảo sát bài toán động lực học cơ hệ nhờ khảo sát hệ lực cân bằng sau :

$$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_N,\vec{F}_1^{qt},\vec{F}_2^{qt},...,\vec{F}_N^{qt}) \equiv 0 \qquad (11\text{–}1)$$

Vì hệ lực cân bằng nên các đặc trưng của nó : véctơ chính, mô men chính của hệ lực, tổng công suất các lực đều triệt tiêu. Từ các tính chất này ta nhận được các định lí tổng quát của động lực học cơ hệ.

11.1. ĐỊNH LÍ ĐỘNG LƯỢNG VÀ ĐỊNH LÍ CHUYỂN ĐỘNG KHỐI TÂM CỦA CƠ HỆ

11.1.1. Định lí động lượng : Gọi $\vec{R}'_F$ là véctơ chính của hệ lực $(\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_N)$ và chú ý đến tính chất triệt tiêu của véctơ chính của hệ nội lực ta có:

$$\vec{R}'_F = \sum\vec{F}_k = \sum\vec{F}_k^e + \sum\vec{F}_k^i = \sum\vec{F}_k^e$$

Gọi $\vec{R}'_{qt}$ là véctơ chính của các lực quán tính :

$$\vec{R}'_{qt} = \sum\vec{F}_k^{qt} = -\sum m_k\vec{a}_k = -\sum m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt} = -\frac{d}{dt}\sum m_k\vec{v}_k$$

$m_k\vec{v}_k$ – tích giữa khối lượng và vận tốc chất điểm M_k được gọi là động lượng chất điểm M_k, còn

$$Q = \sum m_k\vec{v}_k \qquad (11\text{–}2)$$

được gọi là động lượng cơ hệ.

Vậy: $$\vec{R}'_{qt} = -\frac{d}{dt}\vec{Q}$$

Gọi $\vec{R}'$ là véctơ chính của hệ lực (11–1). Ta có :

$$\vec{R}' = \vec{R}'_F + \vec{R}'_{qt} = \sum\vec{F}_k^e - \frac{d}{dt}\vec{Q} = 0$$

Từ đó $$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^e \qquad (11\text{–}3)$$

và $$\vec{Q} - \vec{Q}_o = \sum_{k=1}^{N}\int_{t_o}^{t}\vec{F}_k^e dt = \sum_{k=1}^{N}\vec{S}_k^e \qquad (11\text{–}4)$$

ở đó $\vec{Q}$ và $\vec{Q}_o$ là động lượng cơ hệ ứng với các thời điểm t và t_o, còn

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{S}_k^e = \sum_{k=1}^{N}\int_{t_o}^{t}\vec{F}_k^e dt \qquad (11\text{–}5)$$

là tổng xung lực các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ trong khoảng thời gian $(t-t_o)$. Ta có định lí 11–1 và 11–2.

Định lí 11–1 : Đạo hàm động lượng của cơ hệ theo thời gian bằng tổng các ngoại lực (véctơ chính của hệ ngoại lực) tác dụng lên cơ hệ.

Định lí 11–2 : Biến thiên động lượng của cơ hệ trong một khoảng thời gian nào đó bằng tổng xung lượng các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ trong khoảng thời gian đó.

Đối với trục Ox cố định, ta có :

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e \qquad (11\text{–}6)$$

$$Q_x^{(1)} - Q_x^{(0)} = \sum \int_{t_o}^{t} F_{kx}^e dt = \sum S_{kx}^e \qquad (11\text{–}7)$$

trong đó chỉ số x kí hiệu hình chiếu của đại lượng tương ứng trên trục x.

Chú ý :

1) Nội lực không ảnh hưởng đến sự biến đổi của động lượng cơ hệ.

2) Nếu $\sum \vec{F}_k^e = 0$ (tức véctơ chính của hệ ngoại lực triệt tiêu) thì động lượng cơ hệ được bảo toàn:

$$\vec{Q} = \overrightarrow{const} \qquad (11\text{–}8)$$

3) Nếu $\sum F_{kx} = 0$ (tức tổng hình chiếu các ngoại lực trên trục cố định x triệt tiêu) thì hình chiếu của động lượng trên trục x được bảo toàn

$$Q_x = const \qquad (11\text{–}9)$$

11.1.2. Định lí chuyển động khối tâm : Dựa vào công thức xác định khối tâm cơ hệ (10–2), ta có:

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{v}_k = \sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\sum m_k \vec{r}_k = \frac{d}{dt}(M\vec{r}_c) = M\vec{v}_c \qquad (11\text{–}10)$$

trong đó M và $\vec{v}_c$ lần lượt là khối lượng và vận tốc khối tâm của cơ hệ.

Vậy, động lượng của cơ hệ bằng động lượng khối tâm với giả thiết khối tâm có khối lượng bằng khối lượng của cơ hệ.

Công thức (11–3) có thể viết như sau:

$$\frac{d}{dt}\vec{Q} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}_c) = M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e$$

Định lí 11–3 : Khối tâm của cơ hệ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng cơ hệ và chịu tác dụng của lực có véctơ lực bằng véctơ chính của hệ ngoại lực tác dụng lên cơ hệ.

$$M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e \qquad (11\text{–}11)$$

Khi chiếu hai vế của đẳng thức (11–11) lên các trục của hệ trục tọa độ Đề các vuông góc ta nhận được :

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_c &= \sum F_{kx}^e \\ M\ddot{y}_c &= \sum F_{ky}^e \\ M\ddot{z}_c &= \sum F_{kz}^e \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{–}12)$$

Nhận xét

1) Nội lực không ảnh hưởng đến chuyển động của khối tâm (dù rằng có ảnh hưởng đến chuyển động của từng bộ phận của cơ hệ).

2) Nếu $\sum \vec{F}_k^e = \vec{0}$ thì $\vec{a}_c = \vec{0}$ tức $\vec{v}_c = \overrightarrow{const}$ hoặc $\vec{v}_c = \vec{0}$. Vậy :

Nếu véctơ chính của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ luôn luôn bằng không thì khối tâm của cơ hệ hoặc đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

3) Nếu $\sum F_{kx}^e = 0$ thì $\ddot{x}_c = 0$ tức $\dot{x}_c = const$ hoặc $\dot{x}_c = 0$. Vậy :

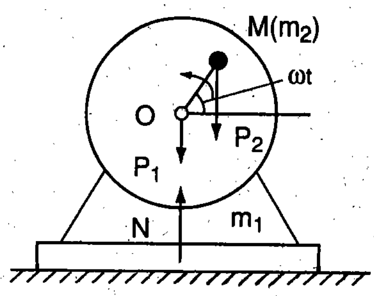
Nếu tổng hình chiếu của các ngoại lực trên một trục cố định nào đó luôn luôn bằng không thì hình chiếu của khối tâm trên trục đó hoặc đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

Ví dụ 11–1. Trục quay của một động cơ được mô hình bằng một khối lượng lệch tâm m_2 cách tâm trục quay một khoảng bằng e (OM = e). Giả sử trục động cơ quay đều với vận tốc góc ω. Vỏ mô tơ có khối lượng m_2. Hã y xác định :

1) Chuyển động ngang của vỏ môtơ trên nền nhẵn.

2) Áp lực thẳng đứng của động cơ lên nền ngang.

Bài giải : Khảo sát chuyển động cơ hệ gồm môtơ, rôto và khối lượng lệch tâm (hình 11–1).



Hình 11–1

Các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ gồm các trọng lực của trục mất cân bằng $\vec{P}_2$, của vỏ động cơ $\vec{P}_1$ và phản lực $\vec{N}$ của nền lên động cơ. Đó là hệ lực song song theo phương thẳng đứng.

Vậy $\sum F_{kx}^e = 0$ nên $x_c = const = 0$ do ban đầu hệ đứng yên.

Theo công thức tính tọa độ khối tâm ta có:

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1x_1 + m_2(x_1 + e\cos\omega t)}{m_1 + m_2} = 0$$

Từ đó : $$x_1 = -\frac{m_2 e}{m_1 + m_2}\cos\omega t$$

Vậy vỏ động cơ dao động điều hòa với biên độ a và chu kì T :

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2}e; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Để tìm phản lực ta viết phương trình vi phân chuyển động của khối tâm theo phương thẳng đứng hướng lên Oy.

$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_c = N - P_1 - P_2$$

Từ đó $$N = P_1 + P_2 + (m_1 + m_2)\ddot{y}_c = (P_1 + P_2)(1 + \frac{\ddot{y}_c}{g})$$

Theo công thức tính khối tâm, ta có:

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 0 + m_2 e \sin\omega t}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 e}{m_1 + m_2}\sin\omega t$$

Vậy: $$\ddot{y}_c = -\frac{m_2 e\omega^2}{m_1 + m_2}\sin\omega t$$

Từ đó $$N = (P_1 + P_2)\left[1 - \frac{m_2 e\omega^2}{g(m_1 + m_2)}\sin\omega t\right]$$

Để động cơ không bị dời khỏi nền thì $N > 0$, tức

$$1 - \frac{m_2 e\omega^2}{g(m_1 + m_2)}\sin\omega t > 0$$

từ đó: $$\omega^2 < \frac{m_1 + m_2}{m_2 e} g$$

Nếu điều kiện này không được thỏa mãn thì động cơ sẽ bật khỏi nền và gây nên va đập.

11.2. ĐỊNH LÍ MÔ MEN ĐỘNG LƯỢNG

Gọi $\vec{m}_F^O$ và $\vec{m}_{qt}^O$ lần lượt là mô men chính đối với một điểm O cố định của các lực tác dụng lên cơ hệ và các lực quán tính của các chất điểm thuộc cơ hệ:

$$\vec{m}_F^O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^i) = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e)$$

do mô men chính của hệ nội lực luôn luôn triệt tiêu. Còn mô men của các lực quán tính $\vec{m}_{qt}^O$ bằng :

$$\vec{m}_{qt}^O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^{qt}) = \sum \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k^{qt} = -\sum \vec{r}_k \wedge m_k \vec{a}_k$$
$$= -\frac{d}{dt}\left[\sum \vec{r}_k \wedge m_k \vec{v}_k\right]$$

trong đó: $\vec{r}_k$ – véctơ định vị của chất điểm M_k; $m_k\vec{v}_k$ – động lượng chất điểm M_k; $\vec{r}_k \wedge m_k\vec{v}_k$ – mô men động lượng của chất điểm M_k đối với điểm O cố định.

$$\vec{L}_O = \sum \vec{r}_k \wedge m_k \vec{v}_k = \sum \vec{m}_O(m_k \vec{v}_k) \qquad (11–13)$$

chính là tổng mô men các động lượng các chất điểm đối với điểm O, gọi tắt là mô men động lượng cơ hệ động cơ điểm O.

Vậy : $\overrightarrow{m}_{qt}^{O} = -\frac{d}{dt}\vec{L}_O$

Vì mô men chính của hệ lực "cân bằng" (11–1) triệt tiêu nên:

$$\overrightarrow{m}_F^O + \overrightarrow{m}_{qt}^O = \sum \overrightarrow{m}_O(\vec{F}_k^e) - \frac{d}{dt}\vec{L}_O = 0$$

Do đó : $$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \sum \overrightarrow{m}_O(\vec{F}_k^e) \qquad (11\text{–}14)$$

Nếu chiếu hai vế của đẳng thức (11–14) lên một trục cố định, ví dụ, trục Oz cố định và sử dụng định lí liên hệ giữa mô men đối với điểm và đối với trục (định lí 8–1) thì:

$$\frac{d}{dt}\bar{L}_z = \sum \bar{m}_z(\vec{F}_k^e) \qquad (11\text{–}15)$$

Ta có định lí 11–4.

Định lí 11–4 : Đạo hàm theo thời gian của mô men động lượng của cơ hệ đối với một điểm (một trục) cố định bằng tổng mô men của các ngoại lực đối với cùng điểm (trục) đó.

Nhận xét :

1) Nội lực không ảnh hưởng đến sự biến đổi mô men động lượng cơ hệ.

2) Nếu $\sum \overrightarrow{m}_O(\vec{F}_k^e) = \vec{0}$ thì $\vec{L}_O = \overrightarrow{const}$ hoặc

Nếu $\sum \bar{m}_z(\vec{F}_k^e) = 0$ thì $\bar{L}_z = const$

Vậy, nếu tổng mô men các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đối với một điểm (một trục) cố định luôn luôn bằng không thì mô men động lượng của cơ hệ đối với điểm (trục) đó sẽ không đổi.

3) Phương trình vi phân chuyển động của vật quay quanh một trục cố định.

Xét vật rắn quay quanh một trục cố định. Các ngoại lực tác dụng lên vật rắn gồm các lực hoạt động $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N$ và các phản lực liên kết $\vec{R}_A, \vec{R}_B$.

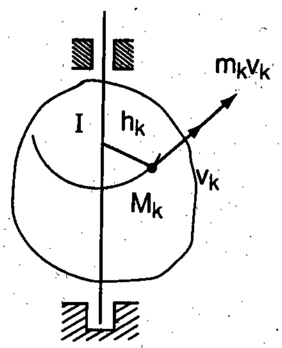
Đầu tiên chú ý rằng:

$$\bar{L}_z = I_z\bar{\omega} \qquad (11\text{–}16)$$

trong đó : $\bar{\omega}$ là vận tốc góc của vật ; I_z – mô men quán tính của vật rắn đối với trục quay.

Thực vậy một phần tử M_k có khối lượng m_k nằm cách trục quay khoảng cách h_k có véctơ động lượng $m_k\vec{v}_k$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay có trị số $m_k h_k \omega$ (hình 11–2). Vậy :

$$\bar{L}_z = \sum \bar{m}_z(m_k\vec{v}_k)$$
$$= \sum m_k h_k^2 \bar{\omega} = \bar{\omega}\sum m_k h_k^2 = I_z\bar{\omega}$$



Hình 11–2

Bây giờ áp dụng công thức (11–15) ta có:

$$\frac{d}{dt}(I_z\overline{\omega}) = I_z\frac{d\overline{\omega}}{dt} = I_z\overline{\varepsilon} = \sum \overline{m}_z(\vec{F}_k)$$

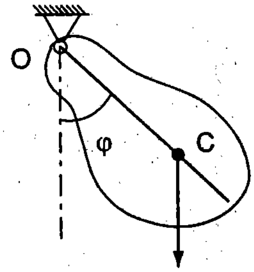
đó là phương trình vi phân chuyển động của vật quay quanh một trục cố định.

$$I_z\frac{d^2\overline{\varphi}}{dt^2} \equiv I_z\frac{d\overline{\omega}}{dt} \equiv I_z\overline{\varepsilon} = \sum \overline{m}_z(\vec{F}_k) \qquad (11\text{–}17)$$

Ví dụ 11–2 : Viết phương trình vi phân chuyển động của một con lắc vật lí có khối lượng M, mô men quán tính đối với trục quay là I_0, khoảng cách từ khối tâm đến trục quay bằng a.

Bài giải : Viết phương trình vi phân chuyển động vật quay (11–17) cho con lắc vật lí ta nhận được:

$$I_0\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Pa\sin\varphi$$



Hình 11–3

Nếu xem góc lắc φ khá bé, ta có thể lấy $\sin\varphi \approx \varphi$.

Phương trình vi phân chuyển động của con lắc bây giờ có dạng:

$$I_0\frac{d^2\varphi}{dt^2} + Pa\varphi = 0 \quad \text{hoặc} \quad \ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \quad \text{với} \quad k^2 = \frac{Pa}{I_0}$$

Nghiệm của phương trình trên có dạng : $\varphi = A\sin(kt + \alpha)$

trong đó A và α là các hằng số tích phân, được xác định từ điều kiện đầu (vị trí ban đầu và vận tốc ban đầu).

Dao động bé của con lắc vật lí là dao động điều hòa với chu kì T:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{Pa}}$$

Từ đó $\quad I_0 = \dfrac{T^2}{4\pi^2}Pa$

Bằng cách như vậy, ta có một phương pháp đơn giản (phương pháp lắc) để xác định mô men quán tính của vật rắn (hình 11–3).

11.3. ĐỊNH LÍ ĐỘNG NĂNG

11.3.1. Định lí động năng : Gọi W_F và W_{qt} lần lượt là tổng công suất của các lực tác dụng lên cơ hệ và của các lực quán tính của các chất điểm thuộc cơ hệ :

$$W_F = \sum \vec{F}_k\vec{v}_k;$$

$$W_{qt} = \sum \vec{F}_k^{qt}\vec{v}_k = -\sum m_k\vec{a}_k\vec{v}_k = -\sum m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt}\vec{v}_k$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum m_k\vec{v}_k^2\right) = -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum m_k v_k^2$$

Đại lượng $\frac{1}{2}m_k v_k^2$ được gọi là động năng của chất điểm M_k, còn :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2 \qquad (11-18)$$

được gọi là động năng của cơ hệ. Vậy : $W_{qt} = -\frac{dT}{dt}$

Vì hệ lực (11–1) cân bằng nên theo (10–39) tổng công suất của tất cả các lực triệt tiêu :

$$W_F + W_{qt} = \sum \vec{F}_k \vec{v}_k - \frac{dT}{dt} = 0$$

Vậy : $$\frac{dT}{dt} = \sum \vec{F}_k \vec{v}_k \qquad (11-19)$$

Ta có định lí 11–5.

Định lí 11–5 : Đạo hàm theo thời gian động năng của cơ hệ bằng tổng công suất của tất cả các lực (nội lực và ngoại lực, hay lực hoạt động và lực liên kết) tác dụng lên cơ hệ.

Từ (11–19) ta có :

$$dT = \sum \vec{F}_k \vec{v}_k dt = \sum \vec{F}_k d\vec{r}_k = \sum dA_k \qquad (11-20)$$

Định lí 11–6 : Vi phân động năng cơ hệ bằng tổng công nguyên tố của các lực (nội lực và ngoại lực, hay lực hoạt động và lực liên kết) tác dụng lên cơ hệ.

Khi tích phân hai vế của đẳng thức (11–20) với các cận tương ứng ta được:

$$T - T_0 = \sum A_k \qquad (11-21)$$

Định lí 11–7 : Biến thiên động năng của cơ hệ trong một khoảng thời gian nào đó bằng tổng công của các lực (nội lực và ngoại lực, hay lực hoạt động và lực liên kết) sinh ra trong chuyển dời ứng với thời gian đó.

Cần chú ý rằng khác với các định lí về động lượng, chuyển động khối tâm và mô men động lượng, nội lực làm biến đổi động năng cơ hệ. Vì lí do đó định lí động năng phản ánh sâu sắc bản chất quá trình thay đổi chuyển động của cơ hệ và nhờ nó trạng thái chuyển động của cơ hệ được nghiên cứu sâu sắc.

11.3.2. Áp dụng

a) Biểu thức động năng của vật rắn chuyển động

– Vật rắn chuyển động tịnh tiến : Vật có khối lượng M chuyển động với vận tốc $\vec{v}$

Trong trường hợp này các phần tử của vật đều có cùng vận tốc v. Do đó :

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum m_k v^2 = \frac{1}{2}(\sum m_k)v^2 = \frac{1}{2}Mv^2 \qquad (11-22)$$

– Vật rắn chuyển động quay xung quanh một trục cố định (hình 11–2) : Xét một phần tử M_k của vật rắn có khối lượng m_k nằm cách trục quay một đoạn h_k. Gọi ϖ là vận tốc góc của vật thì: $v_k = h_k\omega$.

Do đó :

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum m_k h_k^2\omega^2 = \frac{1}{2}(\sum m_k h_k^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_z\omega^2 \qquad (11-23)$$

trong đó : I_z là mô men quán tính của vật đối với trục quay.

– Vật rắn chuyển động song phẳng : Xét trường hợp một tấm phẳng có khối lượng M, vận tốc khối tâm v_C và vận tốc góc $\overline{\omega}$ (đối với hệ trục tọa độ tịnh tiến cùng với khối tâm). Gọi P là tâm vận tốc tức thời của tấm phẳng. Một phần tử M_k có khối lượng m_k, cách tâm quay tức thời một đoạn h_k có vận tốc bằng: $v_k = h_k\omega$.

Vậy :

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum m_k h_k^2\omega^2 = \frac{1}{2}(\sum m_k h_k^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_p\omega^2$$

trong đó : I_p là mô men quán tính của tấm phẳng đối với trục quay qua P và thẳng góc với mặt phẳng tấm.

Theo định lí về mô men quán tính đối với các trục song song (định lí 10–4, chương 10) ta có :

$$I_p = I_C + M\overline{PC}^2$$

trong đó : I_C là mô men quán tính của tấm đối với trục đi qua khối tâm C và thẳng góc với mặt phẳng tấm.

Do đó :

$$T = \frac{1}{2}I_p\omega^2 = \frac{1}{2}(I_C + M\overline{PC}^2)\omega^2 = \frac{1}{2}M(\overline{PC}\omega)^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

Vậy :

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 \qquad (11-24)$$

b) Biểu thức tính công của một số lực

– Công của trọng lực : Công suất của trọng lực $\vec{P}$: $W = \vec{P}\vec{v} = P\dot{z}$

Công của trọng lực khi điểm đặt di chuyển từ M_1 đến M_2 :

$$A = \int_{M_1}^{M_2} Wdt = \int_{M_1}^{M_2} P\dot{z}dt = \int_{M_1}^{M_2} Pdz$$

$$A = P(z_2 - z_1) = \pm Ph \qquad (11-25)$$

Công của trọng lực sẽ dương khi điểm đặt hạ xuống và âm khi điểm đặt được nâng lên và bằng không khi điểm đặt di chuyển trong mặt phẳng ngang.

Công thức (11–25) còn đúng cho trường hợp của hệ trọng lực $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_N)$, trong đó $P = \sum_{k=1}^{N} P_k$, còn $h = h_C$ là khoảng cách di chuyển trọng tâm C theo độ cao :

$$A = \pm(\sum P_k)h_C \qquad (11-26)$$

– Công của lực đàn hồi tuyến tính $\vec{F} = -c\vec{r}$ trong đó $\vec{r}$ là véctơ định vị của điểm đặt lực, c là hệ số tỉ lệ :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}d\vec{r} = -c\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{r}d\vec{r} = -\frac{1}{2}c\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d(\vec{r})^2 = -\frac{1}{2}c\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d(\vec{r}^2)$$

Vậy : $$A = -\frac{1}{2}c(r_2^2 - r_1^2) \qquad (11\text{–}27)$$

Trong trường hợp lò xo ta có : $$A = -\frac{1}{2}c\delta^2 \qquad (11\text{–}28)$$

trong đó : δ là độ biến dạng của lò xo so với trạng thái không biến dạng (trạng thái tự nhiên).

– Công của lực tác dụng lên vật rắn chuyển động tịnh tiến :

Công suất : $$W = \vec{F}\vec{v} = \vec{F}\vec{v}_C \qquad (11\text{–}29)$$

Vậy : $$A = \int W dt = \int \vec{F}\vec{v}_C dt = \int \vec{F}d\vec{r}_C \qquad (11\text{–}30)$$

– Công của lực tác dụng lên một vật quay quanh một trục cố định : Xét trường hợp lực $\vec{F}$ nằm trong mặt phẳng thẳng góc với trục quay (hình 11–4).

Công suất : $$W = \vec{F}\vec{v} = Fv\cos\alpha = FR\cos\alpha\bar{\omega} = \bar{m}_O(\vec{F}).\bar{\omega}$$

Vậy : $$W = \bar{m}_O(\vec{F}).\bar{\omega} \qquad (11\text{–}31)$$

$$A = \int W dt = \int \bar{m}_O(\vec{F})\bar{\omega}dt$$

$$A = \int \bar{m}_O(\vec{F})d\bar{\varphi} \qquad (11\text{–}32)$$

Các công thức (11–31) và (11–32) còn đúng trong trường hợp lực $\vec{F}$ bất kì, trong đó mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O được thay thế bằng mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục quay:

$$W = \bar{m}_z(\vec{F})\bar{\omega}\ ; \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \bar{m}_z(\vec{F})d\bar{\varphi} \qquad (11\text{–}33)$$

Các công thức (11–31), (11–32) và (11–33) còn đúng cho trường hợp ngẫu lực tác dụng lên vật quay, trong đó mô men của lực đối với trục được thay thế bằng hình chiếu của véctơ mô men ngẫu lực trên trục quay :

$$W = \bar{m}_z\bar{\omega}\ ; \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \bar{m}_z d\bar{\varphi} \qquad (11\text{–}34)$$

– Công của lực đặt lên tấm phẳng chuyển động song phẳng

Có thể xem tấm phẳng quay quanh tâm vận tốc tức thời, lúc đó áp dụng công thức (11–31) và (11–32), ta có :

$$W = \bar{m}_p(\vec{F})\bar{\omega}\ ; \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \bar{m}_p(\vec{F})d\bar{\varphi} \qquad (11\text{–}35)$$

Có thể xem tấm phẳng chuyển động tịnh tiến cùng với khối tâm C và quay quanh khối tâm C, lúc đó áp dụng đồng thời các công thức (11–29), (11–30), (11–31) và (11–32):

$$W = \vec{m}_C(\vec{F})\vec{\omega} + \vec{F}_C\vec{v}_C \; ; \quad A = \int \vec{m}_C(\vec{F})d\vec{\varphi} + \int \vec{F}_C d\vec{r}_C \qquad (11–36)$$

Trong trường hợp tấm phẳng chịu tác dụng của ngẫu lực $\vec{m}$ nằm trong mặt phẳng tấm thì:

$$W = \vec{m}.\vec{\omega} \; ; \quad A = \int \vec{m} d\vec{\varphi} \qquad (11–37)$$

11.3.3. Các ví dụ

Ví dụ 11–3 : Một rơ moóc trở hàng chuyển động trên đường ngang dưới tác dụng lực nằm ngang $\vec{F}$ có giá trị không đổi. Thùng xe và vật liệu có khối lượng M, hai bánh xe mỗi bánh xe có khối lượng m, bán kính R, được xem như các đĩa đồng chất. Bỏ qua sức cản lăn và sức cản không khí.

Tính gia tốc của thùng xe và vận tốc thùng xe theo quãng đường đi từ trạng thái đầu đứng yên.

Bài giải : Khảo sát cơ hệ gồm thùng và hai bánh xe. Thùng xe chuyển động tịnh tiến, các bánh xe chuyển động song phẳng (hình 11–4).

Lực tác dụng lên xe chỉ gồm lực $\vec{F}$ sinh công (trọng lực và phản lực pháp tuyến mặt đường tác dụng lên các bánh xe không sinh công vì có phương vuông góc với di chuyển, lực ma sát trượt giữa các bánh xe và mặt đường cũng không sinh công do lăn không trượt vì vận tốc các điểm đặt lực bằng không).

Động năng cơ hệ gồm động năng thùng xe và động năng của hai bánh xe :

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + 2\left(\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{mv^2}{2}\right)$$

Do điều kiện lăn không trượt : $\omega = \dfrac{v}{R}$ và $I = \dfrac{mR^2}{2}$, nên $T = \dfrac{1}{2}(M + 3m)v^2$

Công suất của lực $\vec{F}$ bằng : $W = \vec{F}\vec{v} = Fv$

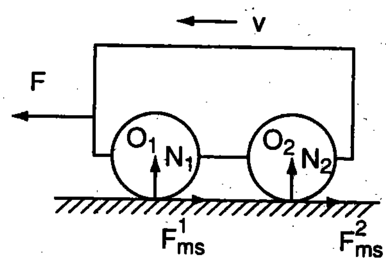
Áp dụng định lí động năng dạng đạo hàm

(định lí 11–5) : $\dfrac{dT}{dt} = W$

Ta nhận được : $(M + 3m)va = Fv$

Thùng xe chuyển động nên $v \neq 0$.

Vậy : $a = \dfrac{F}{M + 3m} = \text{const}$



Hình 11–4

tức thùng xe chuyển động nhanh dần đều.

Sử dụng định lí động năng dạng hữu hạn (định lí 11–7) ta có ($T_0 = 0$) :

$$\frac{1}{2}(M + 3m)v^2 = Fs$$

Từ đó : $v = \sqrt{2\frac{F}{M+3m}s} = \sqrt{2as}$

Ví dụ 11–4 : Một trục tời kéo một con lăn trên mặt phẳng nghiêng với mặt ngang một góc α. Trục tời và con lăn xem như các đĩa đồng chất, có khối lượng m, bán kính R. Ngẫu lực quay tời có mô men không đổi M_0. Dây cáp được xem là nhẹ, không dãn. Con lăn lăn không trượt.

– Tính gia tốc a_C của khối tâm con lăn.

– Tính vận tốc v_C của tâm con lăn theo góc quay của trục tời từ trạng thái đầu đứng yên nghỉ.

Bài giải : Khảo sát cơ hệ gồm con lăn và trục tời. Con lăn chuyển động song phẳng, còn trục tời quay quanh một trục cố định (hình 11–5).

Các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ chỉ có ngẫu lực M_0 sinh công dương, trọng lực P của con lăn sinh công âm. Các liên kết là lí tưởng.

Động năng của cơ hệ gồm động năng trục tời và động năng con lăn :

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_c^2$$

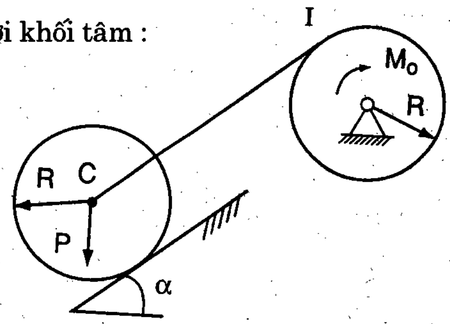
I_o , I_c là mô men quán tính của trục tời và con lăn đối với khối tâm :

$$I_o = \frac{mR^2}{2}; \quad I_c = \frac{mR^2}{2}$$

trong đó : ω – vận tốc góc trục tời, ω_1– vận tốc góc con lăn ; v_c – vận tốc khối tâm con lăn.

Ta có hệ thức sau:

$$\omega_1 = \frac{v_c}{R}; \quad \omega = \frac{v_1}{R} = \frac{v_c}{R}$$



Hình 11–5

Vậy : $T = \frac{1}{2}\left(\frac{I_o + I_c}{R^2} + m\right)v_c^2 = \frac{1}{2}m_o v_c^2$, ở đây đặt $m_o = \frac{I_o + I_c}{R^2} + m$

Công suất của các lực bằng :

$$W = M_0\omega + \vec{P}\vec{v}_c = M_0\omega - P\sin\alpha\, v_c = \left(\frac{M_0}{R} - P\sin\alpha\right)v_c$$

Sử dụng định lí động năng dạng đạo hàm (định lí 11–5) ta có :

$$\frac{dT}{dt} = W \rightarrow m_o v_c a_c = \left(\frac{M_o}{R} - P\sin\alpha\right)v_c$$

Vì hệ đang chuyển động nên $v_c \neq 0$. Do đó :

$$a = \frac{M_o - PR\sin\alpha}{m_o} = const$$

Điều kiện để hệ chuyển động được : $M_o - PR\sin\alpha > 0$

Trong điều kiện đó con lăn được kéo nhanh dần đều.

Để tìm vận tốc của tâm con lăn theo góc quay φ của trục tời ta sử dụng định lí động năng dạng hữu hạn ($T_o = 0$)

$$T - T_o = A \rightarrow \frac{1}{2}m_o v_c^2 = \int W dt = \int\left(\frac{M_o}{R} - P\sin\alpha\right)\omega R dt$$

$$= \int\left(\frac{M_o}{R} - P\sin\alpha\right)R d\varphi = \left(\frac{M_o}{R} - P\sin\alpha\right)R\varphi$$

Vậy: $v_c = \sqrt{2\dfrac{M_o - PR\sin\alpha}{m_o}\varphi}$

11.4. ĐỊNH LÍ BẢO TOÀN CƠ NĂNG

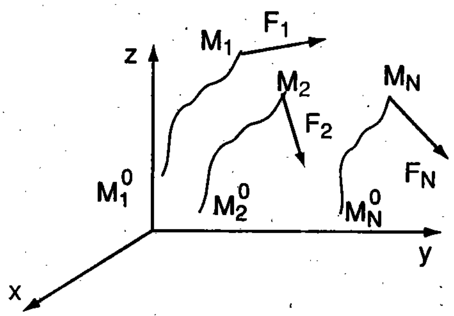
11.4.1. Trường lực thế – Thế năng : Trường lực là khoảng không gian vật lí mà khi cơ hệ chuyển động trong đó, các chất điểm của nó chịu tác dụng của lực chỉ phụ thuộc vào vị trí cơ hệ (tức vị trí các chất điểm của cơ hệ) còn công các lực tác dụng lên cơ hệ không phụ thuộc vào dạng quỹ đạo các chất điểm mà chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối của cơ hệ (hình 11–6).

Thế năng cơ hệ kí hiệu Π là tổng công của tất cả các lực thế tác dụng lên cơ hệ khi nó di chuyển từ một vị trí đang xét, kí hiệu "vị trí M" đến một vị trí được chọn làm gốc, kí hiệu "vị trí O". Vậy :

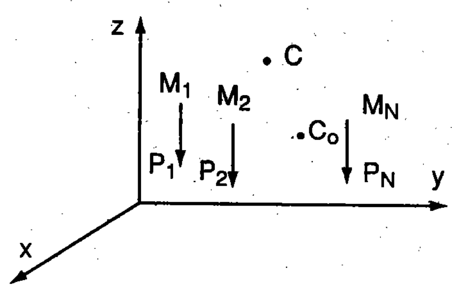
$$\Pi(M) = \sum A_{\widehat{MO}} \qquad (11\text{–}38)$$

trong đó : $\sum A_{\widehat{MO}}$ là tổng công các lực khi cơ hệ di chuyển từ "vị trí M" đến "vị trí gốc O". Từ đó suy ra rằng :

$$\Pi(O) = 0; \quad \Pi(M_1) = \sum A_{\widehat{M_1 O}}$$



Hình 11-6



Hình 11–7

Vì công của lực trong trường lực thế không phụ thuộc vào dạng quỹ đạo điểm đặt lực, nên cơ hệ di chuyển từ vị trí M đến vị trí gốc O có công theo mọi đường đều bằng công theo con đường qua "vị trí M_1".

$$\Pi(M) = \sum A_{\widehat{MO}} = \sum A_{\widehat{MM_1}} + \sum A_{\widehat{M_1 O}} = \sum A_{\widehat{MM_1}} + \Pi(M_1)$$

Vậy $$\Pi(M)-\Pi(M_1)=\sum A_{\overset{\frown}{MM_1}} \qquad (11\text{–}39)$$

tức chênh lệch thế năng tại hai vị trí bằng tổng công các lực khi cơ hệ di chuyển từ vị trí này đến vị trí kia.

11.4.2. Định lí bảo toàn cơ năng : Giả sử cơ hệ chuyển động từ "vị trí M^o" đến "vị trí M". Theo định lí động năng ta có $T_M - T_{M^o} = \sum A_{\overset{\frown}{M^oM}}$

Nhưng dựa vào công thức (11–39) ta có :

$$\sum A_{\overset{\frown}{M^oM}} = \Pi(M^o)-\Pi(M)$$

Vậy $$T_M - T_{M^o} = \Pi(M^o)-\Pi(M)$$

Hay $$T_M + \Pi(M) = T_{M^o} + \Pi(M^o) = \text{const} \qquad (11\text{–}40)$$

Đại lượng $E = T + \Pi$, tổng của động năng và thế năng của hệ, được gọi là cơ năng của hệ. Ta có định lí 11.8.

Định lí 11–8 : (định lí bảo toàn cơ năng) : Khi cơ hệ chuyển động trong trường lực thế thì cơ năng của cơ hệ được bảo toàn.

11.4.3. Biểu thức tính thế năng của một số lực thế

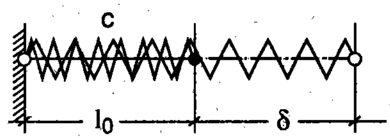
– Thế năng trọng lượng : Chọn mặt đất làm "vị trí gốc" của thế năng. Khi cơ hệ nằm tại một vị trí mà trọng tâm C của nó cách mặt đất độ cao h_C thì (hình 11–7):

$$\Pi = (\sum P_k)h_c$$

– Thế năng đàn hồi : Khi lò xo bị biến dạng so với trạng thái tự nhiên của nó một lượng δ thì (hình 11–8) :

$$\Pi = \frac{1}{2}c\delta^2$$

trong đó : c là độ cứng lò xo.



Hình 11–8

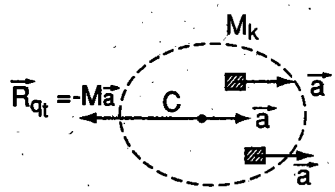
Chương 12

ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

12.1. VẬT RẮN CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN

12.1.1. Kết quả thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động tính tiến : Khảo sát một vật rắn có khối lượng M chuyển động tịnh tiến với gia tốc $\vec{a}$. Xem vật rắn gồm vô số các phần tử M_k, có khối lượng m_k, đều chuyển động với gia tốc $\vec{a}$. Trong trường hợp này có hệ lực quán tính gồm vô số các lực song song cùng chiều (ngược chiều với gia tốc $\vec{a}$) (hình 12–1).

Sử dụng phương pháp thu gọn hệ lực (xem phần tĩnh học), ta thu gọn hệ lực quán tính về khối tâm C của vật ta sẽ được một lực (tức hệ lực quán tính có hợp lực) cùng phương ngược chiều với gia tốc $\vec{a}$.



Hình 12–1

$$\vec{R}_{qt} = -M\vec{a} \tag{12–1}$$

12.1.2. Phương trình vi phân chuyển động của vật rắn tịnh tiến : Giả sử vật rắn chịu tác dụng các lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_N)$, theo nguyên lí Đalămbe nó phải có hợp lực đặt tại khối tâm C của vật rắn và trực đối đối với hợp lực của hệ lực quán tính :

$$\vec{R}_F + \vec{R}_{qt} = \vec{0} \rightarrow \Sigma\vec{F}_k - M\vec{a}_C = \vec{0}$$

$$\vec{m}_{qt}^{C} \equiv \vec{0} \rightarrow \Sigma\vec{m}_C(\vec{F}_k) \equiv \vec{0}$$

Từ đó $\quad M\vec{a}_C = \Sigma\vec{F}_k$ và $\Sigma\vec{m}_C(\vec{F}_k) \equiv \vec{0} \qquad$ (12–2)

Vậy, vật tịnh tiến chuyển động như một chất điểm có khối lượng của vật, chịu tác dụng một lực có véctơ lực bằng tổng các lực tác dụng lên vật.

12.2. VẬT RẮN QUAY QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH

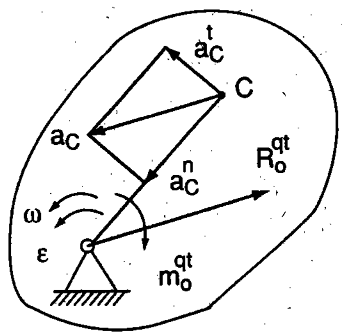
Trường hợp tấm phẳng quay quanh một trục cố định vuông góc với mặt phẳng của tấm (hình 12–2)

12.2.1. Kết quả thu gọn hệ lực quán tính : Khi thu gọn hệ lực quán tính về trục quay O của tấm ta được lực :

$$\vec{R}_o^{qt} = -M\vec{a}_C \tag{12–3}$$

và một ngẫu lực :

$$\vec{m}_{qt}^{o} = -I_o\vec{\varepsilon} \tag{12–4}$$

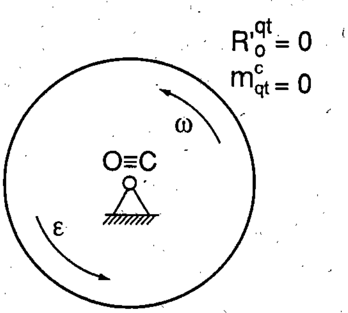


Hình 12–2

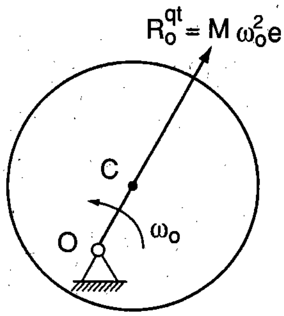
trong đó : M – khối lượng của tấm phẳng ; I_o – mômen quán tính của tấm phẳng đối với trục quay O ; $\vec{\varepsilon}$ – gia tốc góc của tấm ; $\vec{a}_c$ – gia tốc khối tâm C của tấm.

– Nếu tấm quay đều quanh trục qua khối tâm ($O \equiv C$, $\varepsilon = 0$, $a_C = 0$) thì $\vec{R}'^{qt}_o = 0$, $\vec{m}^o_{qt} = 0$. Trường hợp này gọi là trục quay cân bằng (hình 12–3).

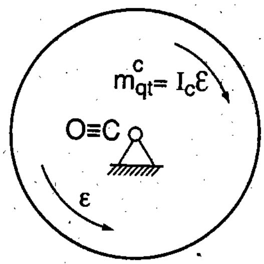
– Nếu tấm quay đều quanh trục không qua khối tâm C thì : $\vec{R}'^{qt}_o = -M\vec{a}^n_c$; $\vec{m}^c_{qt} = 0$. Hệ lực quán tính tương đương với một lực hướng tâm (từ C đến trục quay O), có trị số $R'^{qt}_o = M\omega_o^2 e$, e là khoảng cách từ khối tâm đến trục quay O (hình 12–4).



Hình 12–3



Hình 12–4

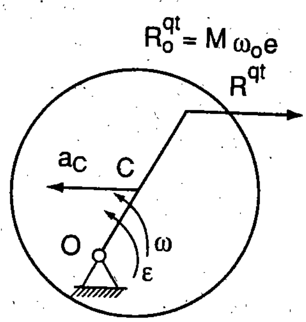


Hình 12–5

– Nếu tấm quay không đều quanh trục qua khối tâm ($O \equiv C$; $\varepsilon \neq 0$) thì $a_C = 0$ nên hệ lực quán tính tương đương với một ngẫu lực $\vec{m}^c_{qt} = I_c\vec{\varepsilon}$ (hình 12–5).

– Trong trường hợp tấm quay không đều quanh một trục không qua khối tâm thì chứng minh được rằng hệ lực quán tính tương đương với một lực (tức hệ lực quán tính có hợp lực) (hình 12–6).

Các kết quả trên còn đúng cho trường hợp vật quay quanh trục quán tính chính.



Hình 12–6

12.2.2. Phương trình vi phân chuyển động và phản lực trục quay : Giả sử tấm phẳng chịu tác dụng của các lực phẳng ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_N$). Đó là các lực hoạt động. Lực liên kết là phản lực $\vec{R}_o$. Theo nguyên lý Đalămbe ta có :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_N\ \vec{R}_o, \vec{F}^{qt}_1, \vec{F}^{qt}_2 \ldots \vec{F}^{qt}_N) \equiv 0$$

Điều kiện véctơ chính và mômen chính đối với trục quay O triệt tiêu cho ta :

$$\Sigma\vec{F}_k + \vec{R}_o - M\vec{a}_C = 0$$

$$\Sigma\vec{m}_o + (\vec{F}_k) - I_o\vec{\varepsilon} = 0$$

Phương trình cuối cho ta phương trình vi phân chuyển động của vật quay :

$$I_o\vec{\varepsilon} = \Sigma\vec{m}_o(\vec{F}_k) \qquad (12\text{–}5)$$

Từ đây tìm được gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$. Tích phân ta được vận tốc góc $\vec{\omega}$. Do đó tìm được gia tốc khối tâm C ($\vec{a}_C$).

Phương trình đầu cho ta xác định được phản lực trục quay O :

$$\vec{R}_o = M\vec{a}_c - \Sigma\vec{F}_k \qquad (12\text{–}6)$$

Ví dụ 12–1 : Một trục máy quay đều với vận tốc góc không đổi ω_o quanh trục nằm ngang được xem như gồm 3 đĩa gắn chặt vào nhau và cùng quay với trục. Các đĩa có khối lượng lần lượt là m_1, m_2 và m_3, có các khối tâm là C_1, C_2 và C_3 cùng nằm trong mặt phẳng với trục quay và cách trục tâm của trục quay các đoạn tương ứng e_1, e_2 và e_3. Các kích thước khác cho trên hình 12–7.

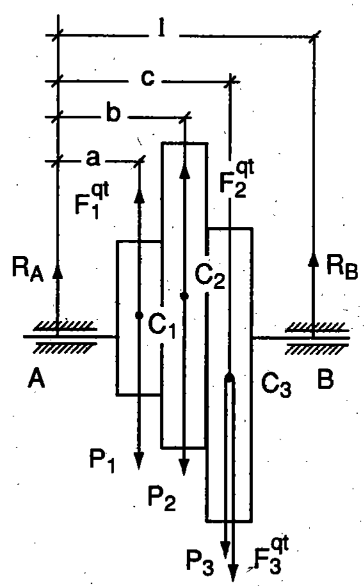
Xác định các phản lực tại các ổ trục A và B tại vị trí các khối tâm nằm trong mặt phẳng thẳng đứng cùng với trục tâm.

Bài giải : Vì trục quay đều nên hệ lực quán tính của các đĩa có hợp lực là những lực li tâm (hình 12–7). Tại thời điểm khảo sát các lực này nằm trong mặt phẳng thẳng đứng và có trị số :

$$F_1^{qt} = m_1e_1\omega_o^2$$

$$F_2^{qt} = m_2e_2\omega_o^2$$

$$F_3^{qt} = m_3e_3\omega_o^2$$



Hình 12–7

Gọi các phản lực tại ổ trục A và B tương ứng là $\vec{R}_A$ và $\vec{R}_B$.

Theo nguyên lí Đalămbe ta có hệ thức sau :

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}, \vec{F}_3^{qt}) \equiv 0$$

Đây là hệ lực song song theo phương thẳng đứng.

Các phương trình cân bằng là :

$$\sum F_y = R_A + R_B - P_1 - P_2 - P_3 + F_1^{qt} + F_2^{qt} - F_3^{qt} = 0$$

$$\sum \vec{m}_A(\vec{F}) = F_1^{qt}a - P_1a + F_2^{qt}b - P_2b - P_3c - F_3^{qt}c + R_Bl = 0$$

Khi thay các trị số của lực quán tính ta được :

$$R_A = \frac{1}{l}\left\{P_1(l-a) + P_2(l-b) + P_3(l-c) + [m_3e_3(l-c) - m_1e_1(l-a) - m_2e_2(l-b)]\omega_o^2\right\}$$

$$R_B = \frac{1}{l}[P_1a + P_2b + P_3c + (m_3e_3c - m_1e_1a - m_2e_2b)\omega_o^2]$$

12.3 . VẬT RẮN CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG

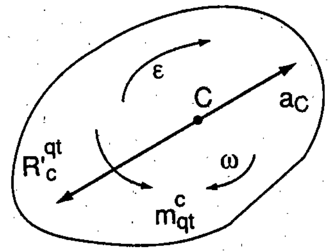
12.3.1. Kết quả thu gọn hệ lực quán tính : Giả sử tại thời điểm khảo sát tấm phẳng có gia tốc khối tâm $\vec{a}_c$. Vận tốc góc $\vec{\omega}$ và gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$. Thu gọn hệ lực quán tính về khối tâm C ta được một lực :

$$\vec{R}'^{qt}_C = -M\vec{a}_C \qquad (12\text{–}7)$$

và một ngẫu lực :

$$\vec{m}^C_{qt} = -I_C\vec{\varepsilon} \qquad (12\text{–}8)$$

trong đó : M là khối lượng tấm phẳng ; I_C là mô men quán tính của tấm phẳng đối với khối tâm C (hình 12–8).



Hình 12–8

12.3.2. Phương trình vi phân chuyển động của tấm phẳng : Giả sử hệ lực tác dụng lên tấm phẳng là $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_N)$.

Theo nguyên lí Đalămbe ta có hệ lực cân bằng sau (xem 11–1) :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_N, \vec{F}^{qt}_1, \vec{F}^{qt}_2, \dots \vec{F}^{qt}_N) \equiv 0$$

Điều kiện véctơ chính và mô men chính đối với khối tâm C của hệ lực này triệt tiêu, ta có :

$$\sum \vec{F}_k - M\vec{a}_C = 0 ; \quad \sum \vec{m}_C(\vec{F}_k) - I_C\vec{\varepsilon} = 0$$

Từ đây ta nhận được :

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k ; \; I_C\vec{\varepsilon} = \sum \vec{m}_C(\vec{F}_k) \qquad (12\text{–}9)$$

Nếu chọn hệ trục tọa độ Đề các Oxyz vuông góc gắn liền với hệ quy chiếu quán tính ta có :

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \sum F_{kx} \\ M\ddot{y}_C &= \sum F_{ky} \\ I_C\bar{\varepsilon} &= \sum \vec{m}_C(\vec{F}_k) \end{aligned}\right\} \qquad (12\text{–}10)$$

Hai phương trình đầu mô tả chuyển động của khối tâm, còn phương trình cuối cùng mô tả chuyển động quay của hình phẳng đối với hệ trục tịnh tiến cùng với khối tâm.

Nếu biết quỹ đạo khối tâm C, có bán kính cong ρ_C thì các phương trình (12–9) có thể viết :

$$\left.\begin{aligned} Ma^t_C &= \sum F_{kt} \\ M\frac{v^2_C}{\rho_C} &= \sum F_{kn} \\ I_C\bar{\varepsilon} &= \sum m_C(\vec{F}_k) \end{aligned}\right\} \qquad (12\text{–}11)$$

trong đó : a^t_C và F_{kt} – hình chiếu lên phương tiếp tuyến quỹ đạo của gia tốc $\vec{a}_C$ và lực $\vec{F}_k$ tương ứng ; F_{kn} – hình chiếu của lực $\vec{F}_k$ lên phương pháp tuyến của quỹ đạo khối tâm ; v_C – vận tốc khối tâm.

Chú ý : Phương trình thứ 3 trong (12–10) còn đúng khi thay khối tâm C bằng tâm vận tốc tức thời P của hình phẳng trong điều kiện $|\overline{PC}| = \text{const}$, tức $I_p\bar{\varepsilon}_o = \sum \vec{m}_p(\vec{F}_k)$ với điều kiện $|\overline{CP}| = \text{const}$. Từ phương trình này dễ dàng nhận được phương trình (12–5).

Ví dụ 12–2 : Trục bánh xe bị dẫn của một ôtô chạy trên đường thẳng nằm ngang chịu tác dụng của lực nằm ngang $\vec{F}$ và lực thẳng đứng $\vec{Q}$. Bánh xe có trọng lượng P, bán kính R và khối tâm trùng với trục quay riêng C. Bán kính quán tính của bánh xe đối với trục quay riêng bằng ρ. Tìm điều kiện để bánh xe lăn không trượt. Cho hệ số ma sát trượt tĩnh bằng f và bỏ qua ngẫu lực ma sát lăn.

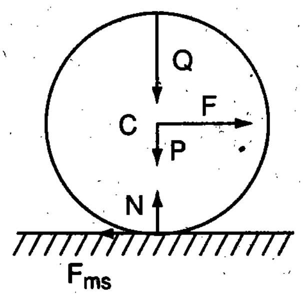
Bài giải : Khảo sát chuyển động song phẳng của bánh xe trong mặt phẳng thẳng đứng. Các lực tác dụng lên bánh xe gồm tải trọng thẳng đứng $\vec{Q}$, lực đẩy ngang $\vec{F}$, trọng lượng bánh xe $\vec{P}$, phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ của mặt đường và lực ma sát trượt $\vec{F}_{ms}$ (hình 12–9).

Viết phương trình vi phân chuyển động dạng (12–10) cho bánh xe ôtô, ta có :

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_C = F - F_{ms}$$

$$\frac{P}{g}\ddot{y}_C = N - P - Q$$

$$I_C\ddot{\varphi} = -F_{ms}R.$$



Hình 12–9

Vì điểm C chạy thẳng : $y_C = R \rightarrow \ddot{y}_C = 0$, còn bánh xe lăn không trượt nên tiếp điểm của bánh xe và đường là tâm vận tốc tức thời :

$$\bar{v}_C = -R\bar{\varphi} \rightarrow \ddot{x}_C = -R\ddot{\varphi}$$

Từ các phương trình trên với chú ý $I_C = \frac{P}{g}\rho^2$ ta tính được :

$$F_{ms} = \frac{\rho^2}{\rho^2 + R^2}F\ ;\ N = P + Q$$

Điều kiện bánh xe lăn không trượt là : $F_{ms} \le fN$

Vậy : $$\frac{\rho^2}{\rho^2 + R^2}F \le f(P + Q)$$

Từ đó tìm được điều kiện để bánh xe không bị trượt trong khi lăn là :

$$F \le f\frac{\rho^2 + R^2}{\rho^2}(P + Q)$$

12.4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CƠ HỆ PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II

Để khảo sát các hệ vật rắn có thể sử dụng phương trình vi phân chuyển động cơ hệ dạng phương trình Lagrange loại II.

Khảo sát cơ hệ chịu liên kết hình học và lí tưởng có n bậc tự do. Vị trí của cơ hệ được xác định bằng n tọa độ suy rộng đủ : $q_1, q_2, \dots q_n$.

Giả sử các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ là $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_N$, và các lực liên kết $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \ldots \vec{R}_N$.

Theo nguyên lí Đalămbe ta có :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_N, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \ldots \vec{R}_N, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}, \ldots \vec{F}_N^{qt}) \equiv 0 \qquad (12\text{–}12)$$

Vì lực suy rộng của các lực liên kết lí tưởng triệt tiêu, nên điều kiện cân bằng của hệ lực (12–12) cho ta :

$$Q_i^F + Q_i^{qt} = 0 ; \quad i = 1, 2, \ldots n \qquad (12\text{–}13)$$

Có thể chứng minh rằng :

$$Q_i^{qt} = -\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right]$$

trong đó : T là biểu thức động năng cơ hệ tính qua các tọa độ suy rộng và vận tốc suy rộng :

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$$

còn Q_i^F là lực suy rộng của các lực hoạt động.

Phương trình (12–13) cho ta :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = \overline{1, n}) \qquad (12\text{–}14)$$

Phương trình (12 – 14) gọi là phương trình Lagrange loại II, mô tả chuyển động của cơ hệ.

Nếu các lực hoạt động gồm các lực có thế với hàm thế năng Π và các lực hoạt động không thế có lực suy rộng tương ứng Q_i^* thì phương trình Lagrange loại II được viết như sau :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^* \qquad (i = \overline{1, n}) \qquad (12\text{–}15)$$

Ví dụ 12–3 : Một máy có sơ đồ gồm hai trục I và II nối với nhau bằng khâu đàn hồi có độ cứng chống xoắn là c. Trục I có mô men quán tính đối với trục quay bằng I_o, chịu tác dụng ngẫu lực có mô men $M_đ$ (mô men động cơ), còn trục II có mô men quán tính đối với trục quay bằng I, chịu tác dụng ngẫu lực có mô men cản M_c. Các khối tâm trục nằm trên đường tâm trục. Bỏ qua khối lượng khâu đàn hồi và ma sát (hình 12 – 10).

Bài giải : Khảo sát cơ hệ gồm hai trục nối với nhau bằng khâu đàn hồi. Cơ hệ có hai bậc tự do. Chọn các tọa độ suy rộng là các góc định vị θ của trục I và góc định vị φ của trục II : $q_1 = \theta$; $q_2 = \varphi$.

Phương trình Lagrange loại II có dạng :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} + Q_\theta^* ; \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_\varphi^*$$

Gọi T là động năng của cơ hệ :

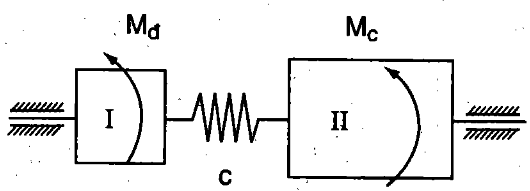
$$T = T_1 + T_2$$

trong đó T_1 và T_2 lần lượt là động năng trục I và trục II, tính theo động năng vật quay :

$$T = \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 \qquad (a)$$

Thế năng được gây nên do có góc xoắn tương đối giữa hai trục bằng $\theta - \varphi$. Vậy :

$$\Pi = \frac{1}{2}c(\theta - \varphi)^2 \qquad (b)$$



Hình 12–10

Các lực suy rộng ứng với các lực không thế là $M_đ$ và M_c :

$$Q_\theta^* = M_đ \; ; \; Q_\varphi^* = -M_c \qquad (c)$$

Thay (a), (b) và (c) vào phương rình Lagrange loại II ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của máy là :

$$I_0\ddot{\theta} = -c(\theta - \varphi) + M_đ$$

$$I\ddot{\varphi} = c(\theta - \varphi) - M_c$$

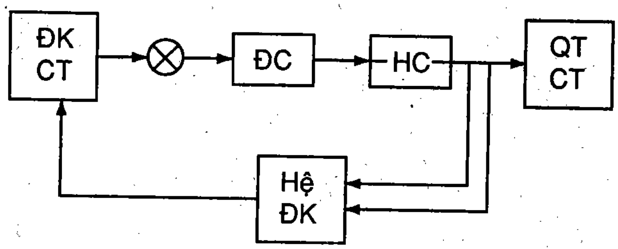
Chương 13

ĐỘNG LỰC HỌC MÁY

13.1. CÁC KHÁI NIỆM

13.1.1. Máy : Trong sản xuất cần thực hiện các công việc khác nhau. Các công việc này được gọi là quá trình công tác. Đó là quá trình công nghệ nhằm biến các nguyên vật liệu thành bán thành phẩm ; quá trình vận chuyển để di chuyển các nguyên vật liệu và bán thành phẩm đến địa điểm gia công tiếp theo, các thành phẩm đến nơi tiêu thụ, quá trình biến đổi năng lượng từ dạng này sang dạng khác, quá trình thông tin (tư liệu, tài liệu kĩ thuật, bản vẽ...), quá trình điều khiển. Các quá trình này được thực hiện nhờ các chuyển động cơ học bằng tay hoặc bằng máy.

Máy là một hệ thống dùng để thực hiện các chuyển động cơ học của quá trình công tác. Tùy thuộc đặc thù của quá trình công tác máy được chia thành máy công nghệ, máy vận chuyển, máy năng lượng, máy thông tin ...

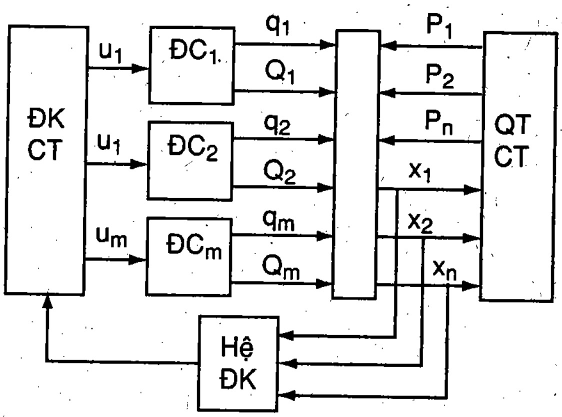


Hình 13–1

ĐC - động cơ ; HC - hệ cơ ; QTCT - Quá trình công tác ; Hệ ĐK - hệ điều khiển ; ĐKCT - hệ điều khiển chương trình

13.1.2. Thiết bị và dụng cụ : Thiết bị và dụng cụ cùng tham gia với máy để thực hiện các quá trình công tác nhưng không trực tiếp liên hệ với các chuyển động cơ học. Ví dụ : các thiết bị để thực hiện các quá trình nhiệt, hóa, biến đổi và truyền tín hiệu...

13.1.3. Sơ đồ cấu trúc máy : Máy là một hệ thống phức tạp gồm nhiều hệ con như động cơ, cơ cấu truyền động, hệ điều khiển... Máy gồm tổ hợp các hệ con được gọi là tổ hợp máy. Có máy tổ hợp một động cơ (hình 13–1) và máy tổ hợp nhiều động cơ (hình 13–2).



Hình 13–2

Để máy có thể thích ứng với các quá trình công tác khác nhau, hoặc với những biến động của chúng do các nguyên nhân khác nhau, người ta dùng hệ thống điều khiển hoạt động nhờ các tham số điều khiển u_i (i = 1. 2. 3...). Máy không điều khiển, hoạt động ứng với các giá trị không đổi của các tham số điều khiển $u_i = u_i^o = \text{const}$. Các bộ phận chủ yếu của máy là động cơ, hệ cơ nối với nhau bằng cơ cấu truyền động, gọi tắt là cơ cấu truyền.

13.1.4. Các bộ phận của mô hình máy hai khối lượng : Dưới đây ta khảo sát máy trong mô hình đơn giản nhất là máy hai khối lượng, nó gồm các bộ phận sau :

a) Động cơ là bộ phận dùng để biến đổi các dạng năng lượng như động cơ điện, động cơ nhiệt, động cơ thủy lực, động cơ khí ép. Quá trình biến đổi năng lượng được điều khiển nhờ các thông số vào của động cơ u (hình 13–1 và 13–2) được gọi là tham số điều khiển. Trong động cơ điện tham số điều khiển là thế hiệu (trong các động cơ điện một chiều), tần số của thế (trong các động cơ xoay chiều) ; lưu lượng trong động cơ thủy lực ; lượng nhiên liệu trong động cơ nhiệt. Thông số ra của động cơ thường là tọa độ của khâu ra của động cơ : khâu quay hoặc khâu tịnh tiến. Mô hình cơ học của động cơ được xây dựng bằng cách thiết lập mối quan hệ giữa các thông số đầu ra : tọa độ q và vận tốc q của đầu ra và lực động cơ truyền đi Q, gọi là lực phát động của động cơ (là lực phát động khi đầu ra là khâu tịnh tiến và mô men phát động khi đầu ra là khâu quay). Ta chỉ nghiên cứu hai mô hình "Động cơ có đặc trưng động học lí tưởng" và "Động cơ có đặc trưng tĩnh".

1) Động cơ có đặc trưng động học lí tưởng : Đối với động cơ này quan hệ giữa thông số đầu ra và đầu vào của động cơ có dạng :

$$\dot{q} = f(u) \tag{13–1}$$

Đối với loại động cơ không điều khiển, $u = u_o$ = const thì :

$$\dot{q} = f(u_o) = \dot{q}_o = \text{const} \tag{13–2}$$

tức là đầu ra của động cơ chuyển động đều (ví dụ : quay đều ở loại động cơ điện).

Nếu các tham số điều khiển không thể khống chế chặt chẽ được ở chế độ không đổi u_o, tức các tham số bị lệch đi đối với chế độ hằng u_o với lượng bé thì ta có thể sử dụng quan hệ :

$$\dot{q} = f(u_o) + \frac{df}{du}(u_o)(u - u_o) \tag{13–3}$$

Phương trình (13–3) được gọi là dạng tuyến tính hóa của phương trình (13–1).

Động cơ có đặc trưng động học lí tưởng là loại động cơ có chế độ làm việc phụ thuộc rất ít vào tải, do đó coi như không phụ thuộc vào tải, nghĩa là sự thay đổi của tải không ảnh hưởng hoặc ảnh hưởng rất ít đến chế độ làm việc của động cơ. Mô hình như vậy có thể chấp nhận được trong trường hợp công suất của động cơ lớn hơn nhiều lần công suất của tải (thường được gọi là động cơ có công suất vô hạn). Mô hình như vậy cũng thường được sử dụng trong giai đoạn thiết kế sơ bộ.

2) Động cơ có đặc trưng tĩnh : Mô hình được xây dựng theo quan hệ :

$$\dot{q} = f_1(u, Q) \tag{13–4}$$

trong đó : u là tham số điều khiển ; $\dot{q}$ – vận tốc của khâu ra động cơ ; Q – lực phát động của động cơ.

Từ (13–4) có thể giải ra được :

$$Q = Q(u, \dot{q}) \tag{13–5}$$

tức là lực phát động của động cơ là hàm của tham số điều khiển và vận tốc đầu ra động cơ. Quan hệ này cũng như quan hệ (13–4) thường là phi tuyến.

Đối với loại động cơ không điều khiển $u = u_o = const$, thì

$$\dot{q} = f_1(u_o, Q) \tag{13-6}$$

$$Q = Q(u_o, \dot{q}) \tag{13-7}$$

Trong trường hợp tổng quát, lực phát động phụ thuộc cả vào tọa độ, vận tốc của khâu ra động cơ và tham số điều khiển :

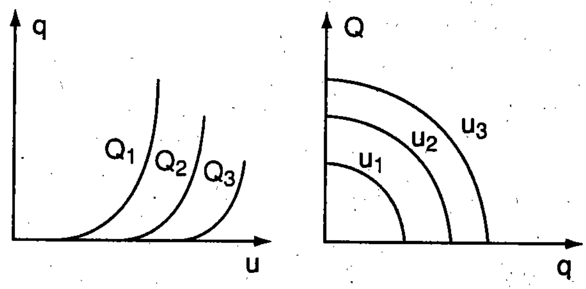
$$Q = Q(u, q, \dot{q}) \tag{13-8}$$

Đối với máy không điều khiển thì :

$$Q = Q(u_o, q, \dot{q}) \tag{13-9}$$

Các quan hệ trên có thể được cho trong dạng giải tích hoặc trong dạng đồ thị. Trên hình 13 – 3 là đồ thị của dạng quan hệ (13–4) và (13–5).

Thường máy làm việc ở chế độ rất gần với chế độ có các thông số không đổi $(u \approx u_o \,;\, \dot{q} \approx \omega_o \,;\, Q \approx Q_o)$. Trong trường hợp này có thể sử dụng dạng tuyến tính hóa của chúng :



Hình 13-3

$$\dot{q} = f_1(u_o, Q_o) + \frac{\partial f_1}{\partial u}(u_o, Q_o)(u - u_o) + \frac{\partial f_1}{\partial Q}(u_o, Q_o)(Q - Q_o)$$

$$\dot{q} = \omega_o + \gamma(u - u_o) - \frac{1}{s}(Q - Q_o) \tag{13-10}$$

trong đó : $\gamma = \dfrac{\partial f_1}{\partial u}(u_o, Q_o)\,;\; s^{-1} = -\dfrac{\partial f_1}{\partial Q}(u_o, Q_o)\,;$

Hoặc $$Q = Q(u_o, \omega_o) + \frac{\partial Q}{\partial u}(u_o, \omega_o)(u - u_o) + \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}}(u_o, \omega_o)(\dot{q} - \omega_o)$$

$$Q = Q_o + r(u - u_o) - s(\dot{q} - \omega_o) \tag{13-11}$$

trong đó : $r = \dfrac{\partial Q}{\partial u}(u_o, \omega_o)\,;\; s = -\dfrac{\partial Q}{\partial \dot{q}}(u_o, \omega_o)$

Đối với máy không điều khiển : $u = u_o = const$, ta có :

$$\dot{q} = \omega_o - \frac{1}{s}(Q - Q_o) \tag{13-12}$$

$$Q = Q_o - s(\dot{q} - \omega_o) \tag{13-13}$$

b) Hệ cơ (cơ cấu chấp hành) : gồm các khâu nối với nhau bằng các khớp với các giả thiết sau :

1) Các khâu thể rắn được xem là tuyệt đối rắn ; các khâu mềm (ví dụ : đai truyền, xích, dây cáp...) được xem là không dãn, các khâu thể lỏng được xem là không bị nén.

2) Các khớp được xem là thực hiện chính xác các phương trình liên kết (không có khe hở), tiếp xúc theo bề mặt của khớp cao cấp không bị biến dạng. Nói khác đi các khớp được xem là các liên kết hình học dạng (10–2).

Hệ cơ chịu tác dụng của các lực từ đối tượng công tác (ví dụ : lực cắt của dao khi tiện). Các lực đó gọi là các lực cản có ích và công tiêu hao do chúng là công cản có ích. Ngoài các lực cản có ích còn có các lực cản vô ích (ví dụ lực ma sát trong các khớp) và tương ứng với chúng có công cản vô ích, nó bé hơn nhiều so với công cản có ích, nên trong khảo sát thường được bỏ qua (hiệu ứng của nó được bổ sung nhờ một số hệ số hiệu chỉnh).

Lực cản có ích là hàm của các thông số vị trí x_k của các phần tử của máy :

$$P_k = P_k(x_1, x_2 \dots x_r, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots \dot{x}_r) \qquad (k = 1, r)$$

Nếu q là tọa độ suy rộng của máy thì :

$$x_k = x_k(q)\,;\ \dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt} = \frac{dx_k}{dq}\frac{dq}{dt} = \frac{dx_k}{dq}(q)\dot{q}$$

Vì vậy :

$$P = P_k(q, \dot{q}) \qquad (13\text{–}14)$$

Dưới đây nêu một vài dạng của lực cản có ích :

+ Lực cản có ích trong các máy nâng chuyển là tải trọng cần nâng chuyển :

$$P = P_o = \text{const}$$

+ Lực cản có ích tác dụng lên rôto của máy cánh quạt :

$$M_C = -(a + b\,|\overline{\omega}| + c\omega^2)\text{sign}\overline{\omega}$$

$$(a, b, c > 0\,;\ \text{sign}\,\overline{\omega} = \frac{\overline{\omega}}{|\overline{\omega}|})$$

trong đó : $\overline{\omega}$ là vận tốc góc rôto ; M_c – mô men cản tác dụng lên rôto.

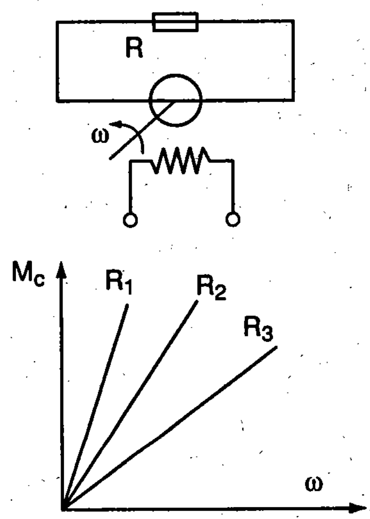
Đối với một loạt các máy bơm li tâm và các máy thủy lực ta có công thức tương tự :

$$\overline{M}_c = -F(|\overline{\omega}|\,\text{sign}\overline{\omega}\,;\ F(|\overline{\omega}|) > 0$$

Công suất của các lực loại này luôn âm. Thực vậy :

$$W = \overline{M}_c\overline{\omega} = -F(|\overline{\omega}|)\text{sign}\overline{\omega}\times\overline{\omega} = -F(|\overline{\omega}|)\frac{\overline{\omega}}{|\overline{\omega}|}\overline{\omega}$$

$$= -F(|\overline{\omega}|)\frac{\overline{\omega}^2}{|\overline{\omega}|} = -F(|\overline{\omega}|)\frac{|\overline{\omega}|^2}{|\overline{\omega}|} = -F(|\overline{\omega}|)|\overline{\omega}| < 0$$



Hình 13–4

+ Lực cản có ích trong máy phát điện một chiều có kích động độc lập, có điện trở ngoài R và điện trở lõi R_1 (hình 13–4).

Suất điện động E tỉ lệ với vận tốc góc ω của roto. Phương trình mạch điện cho ta :

$$E = k\phi\omega = I(R + R_1)$$

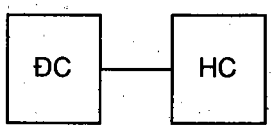
trong đó : ϕ là từ thông ; I – cường độ dòng điện ; k – hệ số tỉ lệ.

Theo định luật Ampe : $M_c = k\phi I$

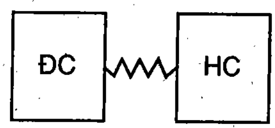
Từ đó : $$M_c = \frac{k\phi^2}{R + R_1}\omega$$

c) Cơ cấu truyền : là bộ phận truyền động từ động cơ sang hệ cơ để hệ cơ nhận được vận tốc thích hợp.

Cơ cấu truyền động thường gồm các khâu được nối với nhau bằng các khớp. Trong mô hình máy hai khối lượng cơ cấu truyền được mô hình bằng một thanh cứng không khối lượng hoặc bằng một yếu tố đàn hồi không khối lượng có độ cứng C. Trường hợp đầu, máy được gọi là máy cứng (hình 13–5), còn trường hợp thứ hai, máy được gọi là máy mềm (hình 13–6).



Hình 13–5



Hình 13–6

13.2. ĐỘNG LỰC HỌC CỦA MÁY CỨNG MỘT ĐỘNG CƠ

Sơ đồ máy như hình 13–5, máy có một bậc tự do. Để khảo sát chuyển động của máy ta sử dụng phương trình Lagrange loại II :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \qquad (13\text{–}15)$$

trong đó : T là động năng của máy ; q – tọa độ suy rộng của máy có thể được chọn là tọa độ khâu ra của động cơ ; Q – lực suy rộng của các lực tác dụng lên máy.

Để đơn giản ta khảo sát trường hợp máy với động cơ có khâu ra là khâu quay.

13.2.1. Mô men quán tính thu gọn của máy : Biểu thức động năng của máy được tính theo công thức động năng cơ hệ :

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum m_k(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)$$

Vì máy là cơ hệ có một bậc tự do với tọa độ suy rộng đủ q, nên :

$$x_k = x_k(q)\ ;\ y_k = y_k(q)\ ;\ z_k = z_k(q)$$

Do đó : $$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt} = \frac{dx_k}{dq}\frac{dq}{dt} = \frac{dx_k}{dt}(q)\dot{q}$$

Một cách tương tự ta có :

$$\dot{y}_k = \frac{dy_k}{dt}(q)\dot{q}\ ;\ \dot{z}_k = \frac{dz_k}{dt}(q)\,\dot{q}$$

Biểu thức động năng của máy sẽ là :

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k\left\{\left[\frac{dx_k}{dt}(q)\right]^2 + \left[\frac{dy_k}{dt}(q)\right]^2 + \left[\frac{dz_k}{dt}(q)\right]^2\right\}\dot{q}^2$$

$$T = \frac{1}{2}I(q)\dot{q}^2 \qquad (13\text{–}16)$$

trong đó :

$$I(q) = \sum m_k\left\{\left[\frac{dx_k}{dt}(q)\right]^2 + \left[\frac{dy_k}{dt}(q)\right]^2 + \left[\frac{dz_k}{dt}(q)\right]^2\right\}$$

I(q) được gọi là mô men quán tính của máy thu gọn về trục động cơ, gọi tắt là mô men quán tính thu gọn. Đó là hàm của tọa độ khâu ra của động cơ và là hàm tuần hoàn vì sau khi trục động cơ quay được một số vòng thì các khâu của máy lại trở về vị trí xuất phát. Ta giả thiết rằng, chu kì của máy ứng với một vòng quay của động cơ. Để thuận tiện ta biểu diễn mô men quán tính thu gọn của máy trong dạng sau :

$$I(q) = I_o + \tilde{I} \qquad (13\text{–}17)$$

trong đó :

$$I_o = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I(q)dq = \text{const} \qquad (13\text{–}18)$$

I_o được gọi là giá trị trung bình của mô men quán tính thu gọn của máy trong một chu kì.

$$\tilde{I}(q) = I(q) - I_o = I(q) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I(q)dq \qquad (13\text{–}19)$$

$\tilde{I}(q)$ là thành phần biến đổi của mô men quán tính thu gọn của máy. Đó là độ lệch của mô men quán tính thu gọn của máy đối với giá trị trung bình của nó. Giá trị trung bình trong một chu kì của thành phần biến đổi này bằng không.

13.2.2. Lực suy rộng : Lực suy rộng trong (13–15) là tổng đại số của mô men phát động $M_đ$ và mô men cản có ích M_c thu gọn về trục động cơ (để đơn giản ta bỏ qua mô men cản vô ích).

Theo (13–9) và (13–14) trong trường hợp máy không điều khiển $u = u_o = \text{const}$ ta có :

$$Q = M_đ(u_o, q, \dot{q}) - M_c(q, \dot{q}) \qquad (13\text{–}20)$$

13.2.3. Phương trình chuyển động của máy : Khi viết phương trình (13–15) trong dạng khai triển với chú ý đến (13–16) và (13 – 20) ta nhận được :

$$I(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{dI(q)}{dq}(q)\dot{q}^2 = M_đ(u_o, q, \dot{q}) - M_c(q, \dot{q}) \qquad (13\text{–}21)$$

Phương trình (13–21) mô tả chuyển động của máy cứng trong dạng mô hình hai khối lượng, được gọi là phương trình chuyển động của máy.

Để tiện cho việc khảo sát, các mô men phát động $M_đ$ và mô men cản M_c được viết trong dạng sau :

$$M_đ(u_o, q, \dot{q}) = M_đ^o(u_o, \dot{q}) + \tilde{M}_đ(u_o, q, \dot{q}) \tag{13–22}$$

$$M_c(q, \dot{q}) = M_c^o(\dot{q}) + \tilde{M}_c(q, \dot{q}) \tag{13–23}$$

trong đó :

$$M_đ^o(u_o, \dot{q}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_đ(u_o, q, \dot{q})\,dq \tag{13–24}$$

$$M_c^o(\dot{q}) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi i} M_c(q, \dot{q})dq \tag{13–25}$$

Các biểu thức (13–24) và (13–25) là các giá trị trung bình trong một chu kì của mô men phát động và mô men cản, $M_đ^o(u_o, \dot{q})$ được gọi là mô men động cơ trung bình, $M_c^o(\dot{q})$ – mô men cản trung bình, i – tỉ số truyền động.

$$\tilde{M}_đ(u_o,q,\dot{q}) = M_đ(u_o,q,\dot{q}) - M_đ^o(u_o, \dot{q}) = M_đ(u_o,q,\dot{q}) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_đ(u_o,q,\dot{q})dq \tag{13–26a}$$

$$\tilde{M}_c(q, \dot{q}) = M_c(q, \dot{q}) - M_c^o(\dot{q}) = M_c(q, \dot{q}) - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi i} M_c(q, \dot{q})dq \tag{13–26b}$$

$\tilde{M}_đ(u_o, q, \dot{q})$ và $\tilde{M}_c(q, \dot{q})$ là các độ lệch của mô men động cơ và mô men cản đối với các giá trị trung bình của chúng.

Khi thay (13–17), (13–22) và (13–23) vào phương trình chuyển động của máy (13–21) ta nhận được :

$$I^o\ddot{q} - M_đ^o(u_o, q, \dot{q}) - M_c^o(\dot{q}) = \tilde{M}_đ(u_o, q, \dot{q}) + \tilde{M}_c(q, \dot{q}) - \frac{1}{2}\frac{d\tilde{I}}{dq}(q)\dot{q}^2 - \tilde{I}(q)\ddot{q} \tag{13–27}$$

Phương trình (13–27) rất thuận lợi cho việc khảo sát chuyển động của máy trong các chế độ làm việc của nó.

13.2.4. Các chế độ làm việc của máy: Quá trình làm việc của máy thường có ba giai đoạn:

a) Quá trình mở máy : máy từ trạng thái đứng yên được đưa vào trạng thái làm việc. Quá trình này tương ứng với sự thay đổi vận tốc góc từ $\omega = 0$ đến giá trị $\omega = \omega_0$ (nếu chế độ làm việc là quay đều).

Quá trình này xảy ra trong khoảng thời gian rất ngắn.

b) Quá trình làm việc : là quá trình máy thực hiện các yêu cầu của quá trình công tác. Quá trình này chiếm khoảng thời gian dài nhất trong chu trình làm việc của máy.

c) Quá trình tắt máy : Máy được đưa từ trạng thái làm việc về trạng thái yên nghỉ. Quá trình này tương ứng với sự thay đổi vận tốc góc từ giá trị ω_o (khi máy quay đều trong quá trình làm việc) đến giá trị không. Quá trình này cũng xảy ra trong khoảng thời gian ngắn.

Quá trình mở máy và quá trình tắt máy thuộc vào quá trình chuyển tiếp là quá trình trong đó các thông số trạng thái thay đổi đáng kể trong khoảng thời gian ngắn. Quá trình làm việc trong khoảng thời gian dài các thông số trạng thái hoặc không thay đổi hoặc thay đổi ít được gọi là quá trình bình ổn. Đây là quá trình quan trọng nhất trong chu trình làm việc của máy. Đặc trưng của quá trình bình ổn của máy sẽ là :

+ Các thông số điều khiển nhận các giá trị xác định :

$$u_i = u_i^o = \text{const}$$

+ $\omega = \omega_o$ hoặc $\omega = \omega_o + \psi$ với $|\psi|_{max} \ll \omega_o = \text{const}$ (13–28)

13.3. HIỆU SUẤT

13.3.1. Định nghĩa hiệu suất : Trong giai đoạn chuyển động bình ổn của máy, ngoài lực phát động do máy phát ra còn có lực cản có ích tiêu hao vào việc thực hiện các yêu cầu của quá trình công tác và lực cản vô ích không tránh khỏi như lực ma sát trong các khớp. Gọi công của các lực đó trong một chu kì làm việc của máy là công động $A_đ$ công cản có ích A_c^i và công cản vô ích A_c^v.

Theo định lí biến thiên động năng (định lí 7–11, chương 11) ta có :

$$T_2 - T_1 = A_đ - A_c^i - A_c^v \qquad (13\text{–}29)$$

trong đó : T_1 và T_2 là giá trị động năng của máy ứng với thời điểm đầu và cuối cả một chu kì làm việc của máy.

Vì sau một chu kì làm việc máy trở lại vị trí xuất phát nên $T_1 = T_2$, tức $T_2 - T_1 = 0$. Do đó (13–29) cho ta :

$$A_đ - A_c^i - A_c^v = 0$$

Vậy :

$$A_đ = A_o^i + A_c^v \qquad (13\text{–}30)$$

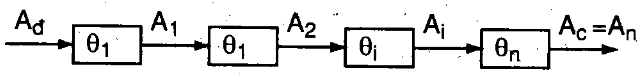
Như vậy toàn bộ công động do động cơ cung cấp trong một chu kì tiêu hao một phần vào việc thực hiện các yêu cầu của quá trình công tác và một phần để thắng công cản vô ích. Phần sau là điều không mong muốn. Do đó, phần công vô ích càng bé càng tốt. Vì lí do đó người ta đưa vào một chỉ số đánh giá chất lượng của máy :

$$\theta = \frac{A_c^i}{A_đ} < 1 \qquad (13\text{–}31)$$

θ gọi là hiệu suất của máy. Hiệu suất càng lớn máy được đánh giá càng tốt.

Khái niệm hiệu suất được sử dụng trong ý nghĩa rộng rãi. Đó là tỉ số giữa lượng được sử dụng có ích và lượng được cung cấp để thực hiện một công việc nào đó. Trong lĩnh vực khảo sát động lực ta có hiệu suất cơ cấu, hiệu suất của một phần tử, hiệu suất của dãy các phần tử máy...

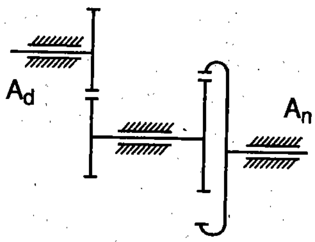
13.3.2. Hiệu suất của các phần tử tiếp nối : Khảo sát dãy các phần tử nối tiếp : công phát ra của các phần tử đứng trước là công nhận vào của phần tử đứng tiếp sau (hình 13–7). Cơ cấu bánh răng (hình 13–8) là một ví dụ về dãy phần tử nối tiếp.



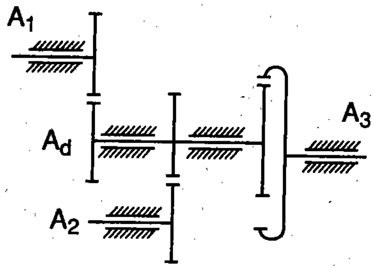
Hình 13–7

Gọi θ_i là hiệu suất của phần tử thứ i và θ là hiệu suất của toàn dãy :

$$\theta_i = \frac{A_{i-1}}{A_i}\ ;\ \theta = \frac{A_c}{A_đ}$$



Hình 13–8



Hình 13–9

trong đó : $A_đ$ là công đưa vào phần tử đầu vào và A_c là công phát ra của phần tử cuối.

Dựa vào định nghĩa nêu trên, ta có thể viết :

$$\theta = \frac{A_c}{A_đ} = \frac{A_1}{A_đ}\frac{A_2}{A_1}\frac{A_3}{A_2}\ \frac{A_{s+1}}{A_s}\ \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

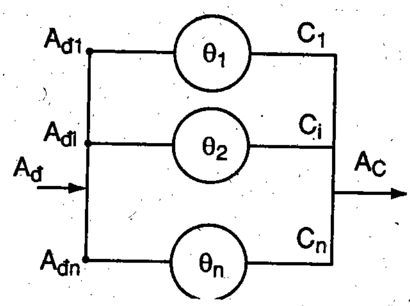
$$\theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3, ..., \theta_n = \prod_{i=1}^{n}\theta_i \qquad (13\text{–}32)$$

Như vậy, hiệu suất của một dãy phần tử nối tiếp bằng tích hiệu suất của các phần tử trong dãy.

13.3.3. Hiệu suất của dãy phần tử nối song song : Dãy phần tử song song là một dãy gồm các phần tử mà mỗi phần tử đều nhận công từ một phần tử gốc không qua bất kì phần tử nào. Gọi θ_i là hiệu suất của phần tử thứ i và θ là hiệu suất của dãy (hình 13–9, 13–10) :

$$\theta_i = \frac{A_i}{A_{đi}}\ ;\ \theta = \frac{A_c}{A_đ}$$

Vì : $$A_đ = \sum A_{đi} = \sum \frac{A_{ci}}{\theta_i},\ A_c = \sum A_{ci}$$



Hình 13–10

nên : $$\theta = \frac{A_c}{A_đ} = \frac{\sum A_{ci}}{\sum \frac{A_{ci}}{\theta_i}} \qquad (13\text{–}33)$$

Phần bốn

SỨC BỀN VẬT LIỆU

Chương 14

MỞ ĐẦU

14.1. NHIỆM VỤ VÀ ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU CỦA MÔN HỌC

Trong ba phần trên ta đã nghiên cứu các quy luật về chuyển động cơ học của các vật thể trong không gian theo thời gian. Các vật thể được xây dựng dưới dạng các mô hình : chất điểm, cơ hệ và một dạng rất quan trọng đó là vật rắn tuyệt đối.

Trong ngành chế tạo máy hoặc trong các công trình, các vật liệu như thép, gang, bê tông .v.v... là các vật rắn thực (hay còn gọi là vật rắn biến dạng). Nghĩa là vật thể sẽ biến dạng, bị phá hủy dưới tác dụng của ngoại lực, nhiệt độ.

Khi thiết kế các bộ phận công trình hoặc các chi tiết máy ta phải đảm bảo :

– Chi tiết không bị phá hỏng tức là đủ bền.

– Chi tiết không bị biến dạng quá lớn tức là đủ cứng.

– Chi tiết luôn giữ được hình dạng ban đầu tức là đảm bảo điều kiện ổn định.

Môn sức bền vật liệu có nhiệm vụ đưa ra các phương pháp tính toán về độ bền, độ cứng và độ ổn định của các bộ phận công trình hoặc các chi tiết máy.

Đối tượng nghiên cứu của môn sức bền vật liệu là các vật rắn biến dạng mà chủ yếu là các thanh.

14.2. CÁC KHÁI NIỆM VỀ THANH

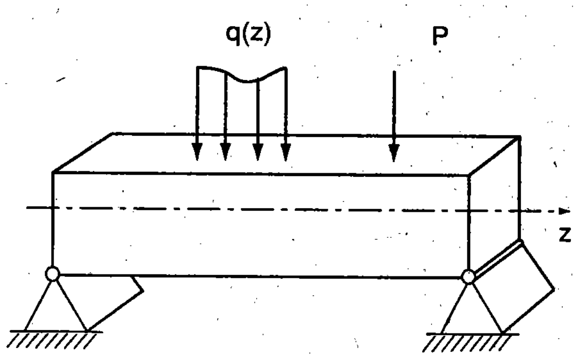
– Thanh là vật thể có kích thước theo hai phương nhỏ so với phương thứ ba.

– Tấm và vỏ là những vật thể có kích thước theo hai phương rất lớn so với phương thứ ba.

– Khối là vật thể có kích thước theo ba phương cùng tương đương nhau. Thanh là đối tượng nghiên cứu của môn sức bền vật liệu theo quan điểm truyền thống.

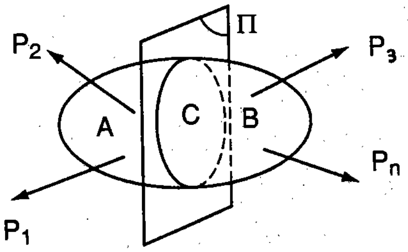
14.3. NỘI LỰC – ỨNG SUẤT

14.3.1. Nội lực : Những lực tác động từ môi trường bên ngoài hay từ các vật khác lên vật thể đang xét gọi là ngoại lực. Ngoại lực bao gồm tải trọng tác động và phản lực tại các liên kết, (hình 14-1).

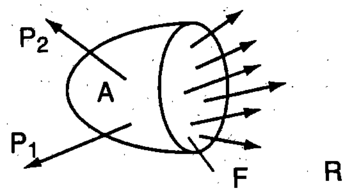


Hình 14–1

Tải trọng được coi là tĩnh nếu nó tăng rất chậm từ không đến một giá trị nhất định rồi giữ nguyên giá trị đó. Nghĩa là có thể bỏ qua lực quán tính trong quá trình tăng lực, vật thể bị biến dạng, giữa các phần tử của vật có xuất hiện thêm phần lực tác dụng tương hỗ để chống lại tác dụng của ngoại lực. Phần lực đó gọi là nội lực theo nghĩa của sức bền vật liệu.



Hình 14–2



Hình 14–3

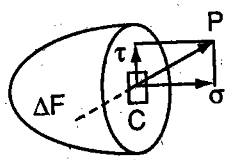
Muốn xác định nội lực ta dùng phương pháp mặt cắt. Xét vật thể chịu lực ở trạng thái cân bằng (hình 14–2). Để tìm nội lực tại một điểm C nào đó ta tưởng tượng dùng một mặt phẳng π qua C cắt vật thể ra làm hai phần A và B. Ta xét một phần nào đó, ví dụ phần A (hình 14–3). Phần A cân bằng dưới tác dụng của các ngoại lực tác động lên nó (P_1, P_2) và hệ lực tương hỗ phân bố trên mặt cắt π tác động từ phần B lên phần A, hệ lực đó chính là nội lực trên mặt cắt π. Từ đó ta có thể xác định được nội lực qua giá trị của ngoại lực ở phần A.

14.3.2. Ứng suất : Cường độ của nội lực tại một điểm nào đó trên mặt π được gọi là ứng suất. Kí hiệu P_π – chữ π chỉ pháp tuyến của mặt π. Chẳng hạn, đối với điểm C nào đó, ta lấy một diện tích ΔF chứa C. Trên ΔF có nội lực phân bố với hợp lực có véctơ $\Delta\vec{P}$ (hình 14–4).

Tỉ số giữa $\Delta\vec{P}$ và ΔF là một véctơ cùng chiều với $\Delta\vec{P}$ kí hiệu là $\vec{p}_{tb}$:

$$\vec{p}_{tb} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta F}$$

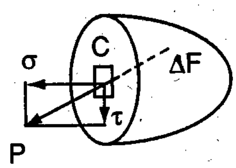
$\vec{p}_{tb}$ được gọi là ứng suất trung bình tại điểm C .



Hình 14–4

Nếu cho ΔF tiến đến không thì $\vec{p}_{tb}$ tiến đến một giới hạn. Giới hạn đó được gọi là ứng suất toàn phần tại điểm C, kí hiệu $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta F}$$



Hình 14- 5

Thứ nguyên của ứng suất là *lực/(chiều dài)*^{2} ; đơn vị thường dùng là *kN/cm*^{2}, *MN/cm*^{2}. Trong tính toán ta thường phân ứng suất toàn phần ra làm hai thành phần (hình 14–4) :

– Thành phần vuông góc với mặt cắt được gọi là ứng suất pháp, kí hiệu σ.

– Thành phần nằm trong mặt cắt gọi là ứng suất tiếp, kí hiệu τ.

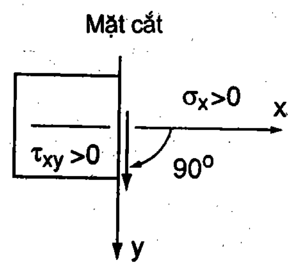
Như vậy : $$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

Những điều vừa phân tích ở trên đối với phần A cũng làm tương tự cho phần B. Theo nguyên lí tác dụng và phản tác dụng, ứng suất tại mỗi điểm trên phần B sẽ có cùng trị số, cùng phương nhưng ngược chiều với ứng suất tại điểm tương ứng trên phần A (hình 14–5).

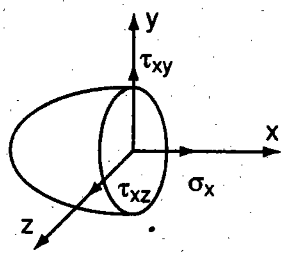
Từ nay về sau ta quy ước về dấu và cách viết các ứng suất như sau :

– Ứng suất pháp được coi là dương khi véctơ biểu diễn nó có chiều cùng với chiều dương của pháp tuyến ngoài mặt cắt. Ứng suất pháp kèm theo một chỉ số chỉ chiều của pháp tuyến, ví dụ σ_x.

– Ứng suất tiếp được coi là dương khi pháp tuyến ngoài của mặt cắt quay một góc 90° theo chiều quay của kim đồng hồ, sẽ trùng với chiều của ứng suất tiếp (hình 14–6). Ứng suất tiếp kèm theo hai chỉ số. Chỉ số thứ nhất chỉ chiều pháp tuyến ngoài mặt cắt, chỉ số thứ hai chỉ chiều ứng suất tiếp song song, ví dụ τ_{xy}, τ_{xz} (hình 14–7).



Hình 14–6



Hình 14–7

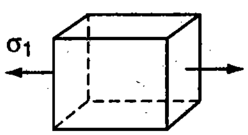
14.3.3. Trạng thái ứng suất : Nếu qua C xét các mặt cắt khác nhau thì tương ứng với mỗi vị trí của mặt cắt π ta được một véctơ ứng suất $\vec{p}$ có giá trị khác nhau. Tập hợp mọi véctơ ứng suất $\vec{p}$, ứng với tất cả các mặt cắt qua C, được gọi là trạng thái ứng suất tại điểm C.

Người ta chứng minh được rằng, qua một điểm ta luôn tìm được ba mặt cắt vuông góc với nhau. Trên ba mặt cắt đó thành phần ứng suất tiếp bằng không. Các mặt đó được gọi là các mặt chính. Ứng suất pháp trên mặt cắt đó gọi là ứng suất chính.

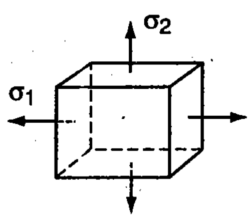
Đối với ba mặt chính đó xảy ra ba trường hợp :

– Trên một mặt chính có ứng suất pháp, trên hai mặt chính còn lại ứng suất pháp bằng không, ta gọi là trạng thái ứng suất đơn (hình 14–8).

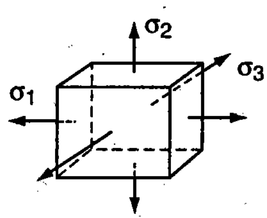
– Trên hai mặt chính có ứng suất pháp, trên một mặt chính ứng suất pháp bằng không, ta gọi là trạng thái ứng suất phẳng (hình 14–9).



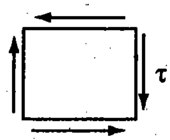
Hình 14–8



Hình 14–9



Hình 14–10



Hình 14–11

– Trên ba mặt chính đều có ứng suất pháp, ta gọi là trạng thái ứng suất khối (hình 14–10).

Các ứng suất chính được quy ước $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (về giá trị đại số). Trường hợp đặc biệt trạng thái ứng suất phẳng ta tìm được hai mặt vuông góc, trên hai mặt đó chỉ có ứng suất tiếp, không có ứng suất pháp (hình 14–11). Ta gọi trạng thái ứng suất đó là trạng thái trượt thuần túy.

14.4. CÁC THÀNH PHẦN NỘI LỰC TRÊN MẶT CẮT NGANG

Giá trị ứng suất tại một điểm, quy luật phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang ta chưa tính được, nhưng ta có thể xác định được hợp lực của hệ nội lực vì nó phải cân bằng với hợp lực của ngoại lực tác dụng lên phần đang xét. Giả sử xét sự cân bằng của phần phải, hợp lực của hệ nội lực đặc trưng cho tác dụng của phần trái lên phần phải được biểu diễn bằng véctơ $\vec{R}$ đặt tại một điểm K nào đó (hình 14–12). Thu gọn hợp lực $\vec{R}$ về trọng tâm O của mặt cắt ngang, ta sẽ được lực $\vec{R}$ có véctơ lực bằng $\vec{R}$ và một ngẫu lực có mô men $\vec{M}$ (véctơ chính và mô men chính của hệ nội lực). Nói chung, lực $\vec{R}$ và mô men $\vec{M}$ có phương chiều bất kì trong không gian. Để thuận lợi ta phân $\vec{R}$ làm ba thành phần trên hệ trục tọa độ vuông góc chọn như hình 14–13.

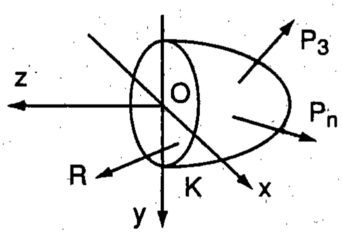
– Thành phần nằm trên trục z gọi là lực dọc, kí hiệu N_z.

– Thành phần nằm trên các trục x và y trong mặt cắt ngang gọi là lực cắt, kí hiệu Q_x và Q_y.

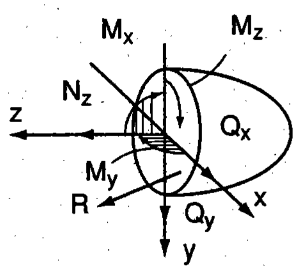
Ngẫu lực M cũng được phân làm ba thành phần :

– Thành phần mô men quay xung quanh các trục x và y (tác dụng trong các mặt phẳng zOy và zOx vuông góc với mặt cắt ngang) gọi là mô men uốn, kí kiệu là M_x và M_y.

– Thành phần mô men quay xung quanh trục z (tác dụng trong mặt phẳng của mặt cắt ngang) gọi là mô men xoắn, kí hiệu M_z (hình 14–13).



Hình 14–12



Hình 14–13

N_z, Q_x, Q_y, M_x, M_y và M_z là sáu thành phần nội lực trên mặt cắt ngang. Chúng được xác định từ điều kiện cân bằng của phần đang xét dưới dạng các phương trình.

– Phương trình hình chiếu :

$$N_z + \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0\,; \quad Q_x + \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0\,; \quad Q_y + \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0 \qquad (14\text{–}1)$$

trong đó : $\sum_{i=1}^{n} P_{ix}$; $\sum_{i=1}^{n} P_{iy}$; $\sum_{i=1}^{n} P_{iz}$ là tổng hình chiếu của tất cả các ngoại lực thuộc phần đang xét trên các trục x, y và z tương ứng.

– Phương trình mô men :

$$\left.\begin{array}{l} M_x + \sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{P}_i) = 0\,;\;\; M_y + \sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{P}_i) = 0 \\ M_z + \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{P}_i) = 0 \end{array}\right\} \qquad (14\text{–}2)$$

trong đó : $\sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{P}_i)$; $\sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{P}_i)$; $\sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{P}_i)$ là tổng mô men của tất cả các ngoại lực thuộc phần đang xét đối với các trục x, y, z tương ứng.

Cũng như ứng suất, nội lực tại một mặt cắt ngang bất kì trên phần trái sẽ có cùng trị số, cùng phương nhưng ngược chiều với nội lực tương ứng cũng tại mặt cắt đó trên phần phải. Như vậy, để xác định nội lực tại một mặt cắt ngang bất kì, chúng ta có thể xét phần trái hoặc phần phải, tùy theo phần nào đơn giản hơn.

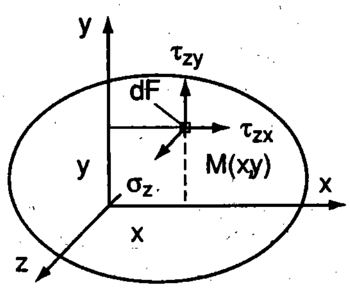
14.5. QUAN HỆ GIỮA ỨNG SUẤT VÀ CÁC THÀNH PHẦN NỘI LỰC TRÊN MẶT CẮT NGANG

Gọi $\vec{p}$ là ứng suất tại một điểm M(x,y) bất kì trên mặt cắt ngang (hình 14–14). Các thành phần hình chiếu của $\vec{p}$ là :

– Ứng suất pháp σ_z.

– Ứng suất tiếp τ được phân làm hai thành phần : τ_{zx}, τ_{zy}.

Lấy một diện tích phân tố dF bao quanh M. Các lực phân tố do các ứng suất gây ra là : $\sigma_z dF$, $\tau_{zy} dF$, $\tau_{zx} dF$. Tổng cộng tất cả các tác dụng của các lực phân tố đó trên toàn thể mặt cắt, chính là các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang. Từ ý nghĩa đó ta có các biểu thức liên hệ giữa ứng suất và các thành phần nội lực như sau:



Hình 14–14

$$N_z = \int_F \sigma_z dF \qquad (14\text{–}3)$$

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF \qquad (14\text{–}4)$$

$$M_y = \int_F \sigma_z x dF \qquad (14\text{–}5)$$

$$Q_x = \int_F \tau_{zx} dF \qquad (14\text{–}6)$$

$$Q_y = \int_F \tau_{zy} dF \qquad (14\text{–}7)$$

$$M_z = \int_F (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dF \qquad (14\text{–}8)$$

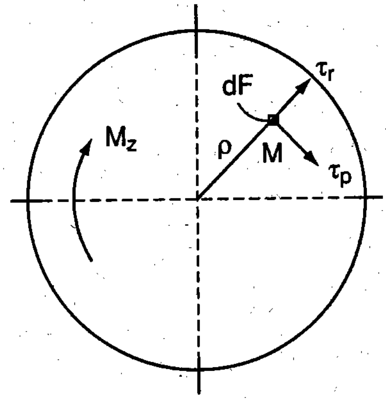
Riêng biểu thức liên hệ giữa ứng suất tiếp với mô men xoắn khi mặt cắt ngang tròn tại điểm M ta phân ra làm hai thành phần :

– Một thành phần vuông góc với bán kính, kí hiệu τ_ρ.

– Một thành phần hướng theo bán kính, kí hiệu τ_r (hình 14–15).

Khi đó ta có công thức liên hệ sau :

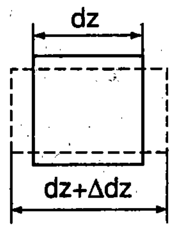
$$M_z = \int_F \rho\tau_\rho dF \qquad (14\text{–}9)$$



Hình 14–15

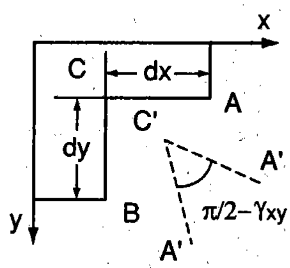
14.6. BIẾN DẠNG

14.6.1. Biến dạng dài : Xét một đoạn thẳng vi phân dz tại điểm C. Sau khi biến dạng, đoạn vi phân dz này dài ra đoạn dz + Δdz. Ta gọi Δdz là độ dãn dài tuyệt đối của đoạn dz (hình 14–16). Tỉ số Δdz/dz gọi là độ dãn dài tỉ đối, kí hiệu ε_z có một chỉ số chỉ phương xét biến dạng.



Hình 14–16

14.6.2. Biến dạng góc (biến dạng trượt) : Giả sử trong mặt phẳng Oxy, ta lấy hai đoạn thẳng vi phân dx và dy vuông góc tại C (hình 14–17). Sau khi biến dạng dx và dy trở thành dx' và dy'. Hình chiếu của dx' và dy' trên mặt phẳng Oxy không vuông góc với nhau nữa mà hợp với nhau một góc bằng $(\pi/2 - \gamma_{xy})$. Ta gọi γ_{xy} là biến dạng góc trong mặt phẳng xy tại điểm C. Kí hiệu độ biến dạng góc là γ kèm theo hai chỉ số chỉ mặt phẳng xét biến dạng góc.



Hình 14–17

14.7. CÁC GIẢ THUYẾT CƠ BẢN VỀ VẬT LIỆU

14.7.1. Tính đàn hồi của vật thể : Dưới tác dụng của ngoại lực (dù là rất nhỏ) hay nhiệt độ... vật thể đều bị biến dạng. Biến dạng của vật thể lớn hay bé tùy theo tính chất và giá trị của các ngoại lực, tùy theo bản chất và khả năng chịu lực của vật liệu.

Thí nghiệm chứng tỏ rằng, đối với mỗi loại vật liệu, nếu lực tác dụng chưa vượt quá một giới hạn xác định, thì khi bỏ lực, vật thể sẽ trở lại hình dáng và kích thước ban đầu, tức là biến dạng bị mất đi. Ta nói vật thể chỉ bị biến dạng đàn hồi, tính chất đó gọi là tính chất đàn hồi. Những vật thể nào có tính chất như vậy gọi là vật thể đàn hồi tuyệt đối. Nếu lực tác dụng vượt quá một giới hạn xác định nói trên, thì khi bỏ lực, vật thể không trở lại hình dáng và kích thước ban đầu nữa. Chúng chỉ phục hồi một phần biến dạng ban đầu. Các vật thể này được gọi là vật thể đàn hồi không hoàn toàn (đàn hồi không tuyệt đối). Phần biến dạng không phục hồi được gọi là biến dạng dư.

14.7.2. Các giả thuyết cơ bản về vật liệu

Giả thuyết 1 : Vật liệu có tính chất đồng nhất và đẳng hướng.

Giả thuyết này cho phép ta nghiên cứu tính chất cơ học, tính chịu lực của vật thể qua một phân tố vô cùng bé tưởng tượng được tách ra khỏi vật thể đó. Và khi tính sức bền, chúng ta chỉ xét tại những nơi nguy hiểm nhất.

Giả thuyết 2 : Vật liệu có tính đàn hồi tuyệt đối.

Theo giả thuyết này, môn sức bền vật liệu chủ yếu giải quyết các bài toán khi vật liệu làm việc trong miền đàn hồi. Trong miền này, theo định luật Húc (Hook) ta có : biến dạng tại mọi điểm của vật thể tỉ lệ bậc nhất với ứng suất tại điểm đó. Biểu thức toán học của định luật có các dạng sau :

– Ở trạng thái ứng suất đơn – tức kéo dãn theo một trục :

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \tag{14–10}$$

– Ở trạng thái trượt thuần túy – tức chỉ có biến dạng trượt :

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \tag{14–11}$$

trong đó : E, G – các hệ số tỉ lệ, phụ thuộc vào từng loại vật liệu, được xác định bằng thực nghiệm, có thứ nguyên là *lực/(chiều dài)*^{2}, đơn vị thường dùng (kN/cm^2), (MN/m^2) ;

E – môđun đàn hồi khi kéo nén ; G – môđun đàn hồi khi trượt.

Chương 15

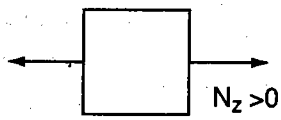
KÉO NÉN ĐÚNG TÂM

15.1. ĐỊNH NGHĨA

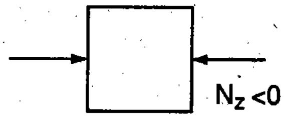
Một thanh gọi là chịu kéo hoặc nén đúng tâm khi trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có một thành phần nội lực là lực dọc.

15.2. BIỂU ĐỒ LỰC DỌC

Biểu đồ lực dọc là đường biểu diễn sự biến thiên của lực dọc dọc theo trục của thanh.



Hình 15–1



Hình 15–2

Quy ước dấu :

– Lực dọc dương khi thanh chịu kéo (hình 15–1).

– Lực dọc âm khi thanh chịu nén (hình 15–2).

Ví dụ 15–1 : Vẽ biểu đồ lực dọc của một thanh chịu lực như hình vẽ 15–3.

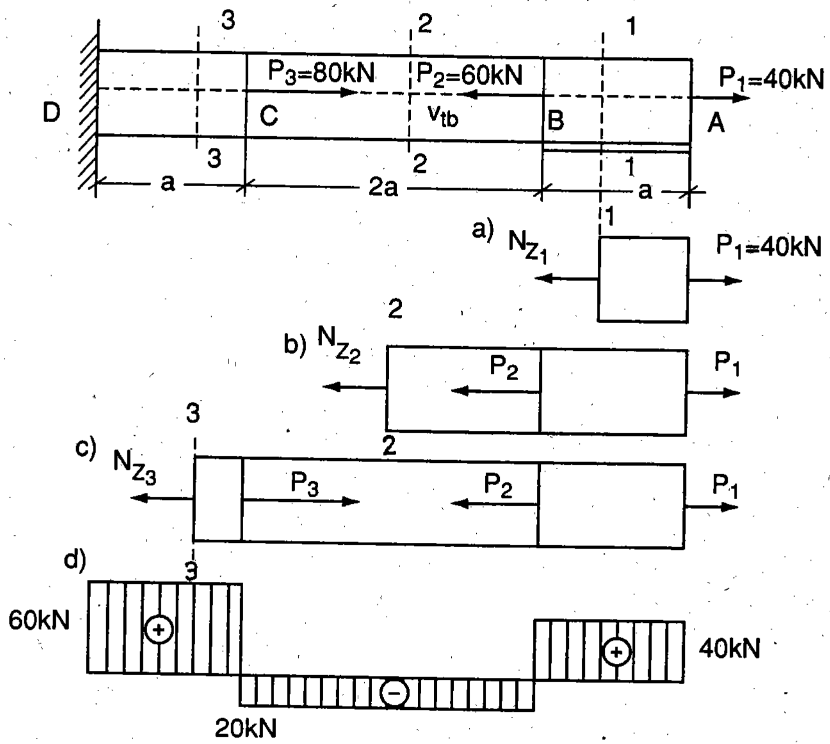
Chia thanh làm ba đoạn AB , BC, CD.

Xét đoạn AB có giá trị từ $0 < z_1 \le a$: $\Sigma Z = N_{z_1} - P_1 = 0$ suy ra $N_{z_1} = P_1 = 40kN$

Đoạn BC có giá trị từ $a < z_2 \le 3a$: $\Sigma Z = N_{z_2} - P_1 + P_2 = 0$ suy ra $N_{z_2} = -20kN$

Đoạn CD có giá trị từ $3a < z_3 \le 4a$: suy ra $N_{z_3} = 60kN$

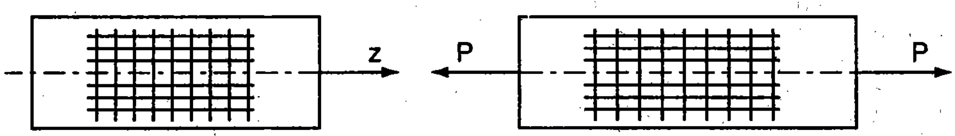
Biểu đồ lực dọc của thanh được biểu diễn trên hình 15–3.



Hình 15–3

15.3. ỨNG SUẤT PHÁP TRÊN MẶT CẮT NGANG

15.3.1. Quan sát một mẫu thí nghiệm chịu kéo : Mẫu là một thanh lăng trụ, trước khi làm thí nghiệm ta kẻ các đường vạch song song và vuông góc với trục thanh trên bề mặt thanh (hình 15–4). Những vạch vuông góc với trục thanh được xem là vết của mặt cắt ngang. Khi thanh chịu kéo hay nén ta nhận thấy :



Hình 15–4

– Trục thanh vẫn thẳng.

– Những vạch song song với trục thanh vẫn thẳng và song song với trục thanh.

– Những vạch vuông góc với trục thanh vẫn thẳng và vuông góc với trục thanh, nhưng khoảng cách giữa các vạch đó có sự thay đổi. Khi chịu kéo các vạch cách xa nhau ra, khi chịu nén các vạch sít gần nhau lại.

Từ các nhận xét trên ta thừa nhận hai giả thiết sau :

– Giả thiết mặt cắt ngang phẳng (giả thiết Becnuli) : Trong quá trình biến dạng, mặt cắt ngang của thanh luôn luôn là phẳng và vuông góc với trục thanh.

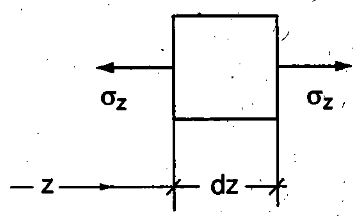
– Giả thiết về các thớ dọc : Trong quá trình biến dạng, các thớ dọc không áp lên nhau và cũng không đẩy xa nhau. Theo giả thiết này ta thừa nhận giữa các thớ dọc với nhau không phát sinh ứng suất pháp (tức $\sigma_x = \sigma_y = 0$).

Dựa vào hai giả thiết trên ta thấy : trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có thành phần ứng suất pháp σ_z còn thành phần ứng suất tiếp bằng không.

Tách ra một phân tố bởi hai mặt cắt ngang cách nhau một đoạn dz và các mặt song song với trục thanh (hình 15–5). Phân tố ở trạng thái ứng suất đơn.

Theo định luật Húc ta có : $\sigma_z = E\varepsilon_z$

Sau khi kéo, trục thanh vẫn thẳng và vuông góc với nhau nên các thớ đều giãn như nhau. Có nghĩa là mọi điểm đều có độ biến dạng tỉ đối ε_z như nhau. Vậy ứng suất pháp σ_z phân bố trên mặt cắt ngang là đều.



Hình 15–5

15.3.2. Biểu thức liên hệ giữa ứng suất pháp và lực dọc

Từ công thức (14–3) ta có :

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = \sigma_z \int_F dF = \sigma_z F$$

hay

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \qquad (15\text{–}1)$$

trong đó : N_z – giá trị lực dọc tại mặt cắt đang xét ; F – diện tích mặt cắt ngang.

15.4. BIẾN DẠNG – TÍNH ĐỘ DÃN DÀI CỦA THANH

Gọi l là chiều dài ban đầu của thanh, khi chịu kéo thanh dài ra một đoạn Δl. Ngược lại khi chịu nén thanh co lại. Ta gọi Δl là độ dãn dài tuyệt đối của thanh. Nếu kí hiệu Δdz là độ dãn dài của một đoạn thanh bất kì có chiều dài ban đầu dz vô cùng bé, ta có : $\Delta l = \int_0^l \Delta dz$

Theo định nghĩa $\varepsilon_z = \dfrac{\Delta dz}{dz}$ suy ra $\Delta l = \int_0^l \varepsilon_z dz$, chú ý đến (15–1) ta nhận được biểu thức tính độ dãn dài tuyệt đối của thanh :

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z}{EF} dz \qquad (15\text{–}2)$$

Tích số EF gọi là độ cứng của thanh khi kéo hoặc nén. Nếu hàm dưới dấu tích phân không liên tục suốt chiều dài l mà chỉ liên tục trong từng đoạn thì biểu thức (15–2) được viết như sau :

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} \frac{N_{z_i}}{E_i F_i} dz \qquad (15\text{–}3)$$

trong đó : n là số đoạn, l_i chiều dài đoạn thứ i.

Trong trường hợp N_z/EF = const trên suốt chiều dài l hoặc có trị số không đổi trong từng đoạn, tương ứng với (15–2) (15–3) ta có các công thức tính độ dãn dài tuyệt đối của thanh là :

$$\Delta l = \frac{N_z l}{EF} \qquad (15\text{–}4)$$

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{z_i} l_i}{E_i F_i} \qquad (15\text{–}5)$$

Ví dụ 15–2 : Tính độ biến dạng dài tuyệt đối của cột có bậc chịu lực. Biết $l_1 = 50cm$, $l_2 = 60cm$, $l_3 = 20cm$, $l_4 = 60cm$, $F_1 = 10cm^2$, $F_2 = 20cm^2$, $E = 2.10^4\ kN/cm^2$, (hình 15-6).

Bài giải : Chia thanh làm bốn đoạn AB, BC, CD và DE. Trong mỗi đoạn tỉ số N_z/EF là hằng. Áp dụng công thức (15–5) ta có :

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{4} \frac{N_{z_i} l_i}{E_i F_i} = \frac{N_1 l_1}{EF_1} + \frac{N_2 l_2}{EF_2} + \frac{N_3 l_3}{EF_3} + \frac{N_4 l_4}{EF_4}$$

$$= -\frac{2\times 50}{2\times 10^4 \times 10} + \frac{3\times 60}{2\times 10^4\times 10} + \frac{3\times 20}{2\times 10^4\times 20} - \frac{4\times 60}{2\times 10^4 \times 20} = -0{,}5\times 10^{-4} cm$$

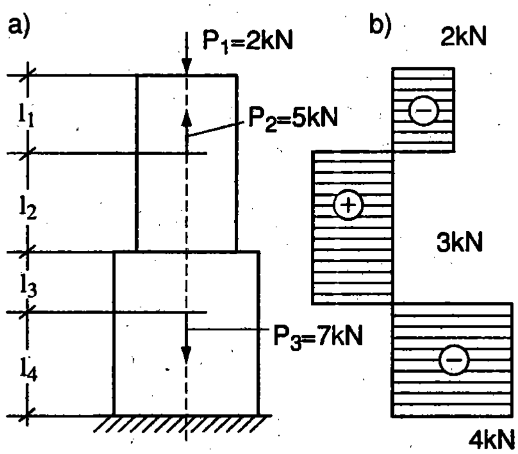
cột bị co lại.

Ta nhận thấy rằng, khi một thanh chịu kéo thì chiều dài của nó bị dãn dài ra, còn bề ngang bị co lại. Trái lại khi thanh bị nén thì chiều dài bị co lại còn bề ngang thì phình to ra.

Như vậy khi thanh chịu kéo, nén phương ngang cũng bị biến dạng. Giữa biến dạng ngang tỉ đối và biến dạng dọc tỉ đối có liên hệ sau :

$$\varepsilon_{ng} = -\mu\,\varepsilon_{doc} \tag{15–6}$$

trong đó μ là hệ số biến dạng ngang hay hệ số Poatxông. Nó là hằng số phụ thuộc vào từng loại vật liệu và nằm trong giới hạn từ 0 đến 0,5. Dấu "–" trong công thức (15–6) chứng tỏ ε_{ng} và ε_{doc} ngược dấu nhau. Bảng 15–1 cho một vài giá trị của μ .



Hình 15–6

Bảng 15–1

Vật liệu	μ
Thép	0,25÷0,33
Gang	0,23÷0,27
Đồng	0,31÷0,34
Nhôm	0,32÷0,36

15.5. ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU

Để đưa ra lí thuyết tính toán độ bền, độ cứng của thanh trước hết ta cần nghiên cứu đặc trưng cơ học của vật liệu. Muốn hiểu rõ tính chất cơ học của vật liệu ta thường làm các thí nghiệm để quan sát các tính chất và quá trình biến dạng của các loại vật liệu khác nhau kể từ lúc bắt đầu chịu lực cho đến khi bị phá hỏng.

Vật liệu trong tự nhiên là đa dạng, nhưng căn cứ vào biến dạng của mẫu thí nghiệm cho tới khi mẫu bị phá hỏng ta có thể chia vật liệu ra làm hai loại :

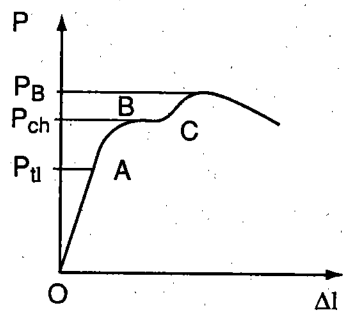
– Vật liệu dẻo là những vật liệu bị phá hoại sau khi đã biến dạng lớn, ví dụ như thép, đồng, nhôm...

– Vật liệu giòn là những vật liệu bị phá hoại ngay khi biến dạng còn rất ít, ví dụ như gang, đá, bê tông...

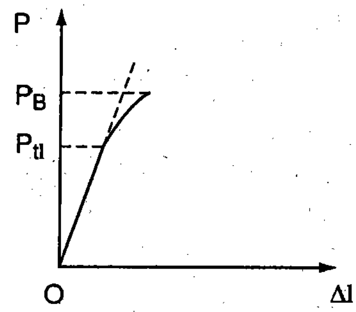
Trước hết ta hãy làm thí nghiệm về kéo và nén. Thí nghiệm được tiến hành trên các máy thử kéo – nén. Các mẫu thí nghiệm, quy trình thí nghiệm và các phương pháp xác định các đặc trưng cơ học của vật liệu đều được tiêu chuẩn hóa theo TCVN.

15.5.1. Thí nghiệm kéo : Trên hình 15–7 biểu diễn đồ thị của mẫu kéo bằng thép CT–3, còn trên hình 15–8 biểu diễn đồ thị của mẫu kéo bằng gang. Kí hiệu P là trị số lực kéo, Δl là độ dãn dài của mẫu thí nghiệm. Đối với thép CT–3 đồ thị liên hệ giữa lực và độ biến dạng có ba giai đoạn cơ bản sau :

– Giai đoạn đàn hồi được biểu diễn bằng đoạn đường thẳng OA và đoạn đường cong AB. Đoạn đường thẳng OA được gọi là giai đoạn đàn hồi tuyến tính hay giai đoạn tỉ lệ. Trong giai đoạn này sự liên hệ giữa lực kéo P và độ dãn dài tuyệt đối có quan hệ bậc nhất. Vật liệu làm việc tuân theo định luật Húc. Đoạn AB rất bé được gọi là giai đoạn đàn hồi phi tuyến. Vật liệu làm việc không còn tuân theo định luật Húc.



Hình 15–7



Hình 15–8

– Giai đoạn chảy được biểu diễn bằng đoạn BC trên đồ thị hình 15–7. Đặc điểm của giai đoạn này là lực kéo không tăng trong khi biến dạng vẫn tiếp tục tăng.

– Giai đoạn củng cố : Sau khi qua giai đoạn chảy, lực có tăng thì biến dạng mới tăng nhưng đồ thị biểu diễn sự liên hệ giữa lực kéo P và độ dãn dài tuyệt đối Δl là một đường cong. Ta tiếp tục tăng cho đến khi lực đạt giá trị lớn nhất thì tại một nơi nào đó của mẫu thử, mặt cắt ngang bị thắt lại, sau đó lực giảm dần nhưng mẫu vẫn tiếp tục dài ra cho đến khi đứt ngay tại chỗ thắt.

Kí hiệu : P_{tl} – lực tỉ lệ ứng với lực kéo lớn nhất trong giai đoạn tỉ lệ.

P_{ch} – lực ứng với lực kéo ở giai đoạn chảy.

P_B – lực ứng với lực kéo lớn nhất ở giai đoạn củng cố.

F_o – diện tích mặt cắt ngang của mẫu trước khi thí nghiệm.

L_o – chiều dài của phần mẫu thí nghiệm trước khi làm thí nghiệm.

F_l – diện tích mặt cắt ngang của mẫu tại chỗ thắt lúc mẫu bị đứt.

l_1 – chiều dài của phần mẫu thí nghiệm sau khi thí nghiệm.

Người ta gọi các đại lượng sau đây là các đặc trưng cơ học của vật liệu và các đặc trưng này có tính quy ước :

– Giới hạn tỉ lệ, kí hiệu σ_{tl} được xác định bởi tỉ số $\sigma_{tl} = P_{tl} / F_o$.

– Giới hạn chảy, kí hiệu σ_{ch}; $\sigma_{ch} = P_{ch} / F_o$ đây là một đặc trưng quan trọng của vật liệu dẻo.

– Giới hạn bền, kí hiệu σ_B; $\sigma_B = P_B / F_o$

– Độ dãn dài tỉ đối của mẫu sau khi kéo đứt, kí hiệu được tính theo % :

$$\delta\% = \frac{l_1 - l_o}{l_o} 100\%$$

– Độ thắt tỉ đối sau khi mẫu bị kéo đứt, kí hiệu φ, cũng được tính theo % :

$$\psi\% = \frac{F_o - F_1}{F_o} 100\%$$

Đối với gang, đồ thị P–Δl là một đường cong ngay khi lực kéo P còn rất thấp. Vật liệu xem như không có giới hạn tỉ lệ và giới hạn chảy mà chỉ có giới hạn bền :

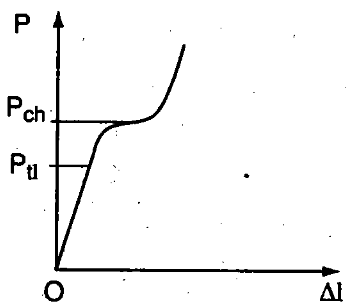
$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_o}.$$

P_B – giá trị lực ứng với lúc mẫu bị đứt. Giới hạn này rất thấp so với giới hạn bền của vật liệu dẻo. Trong giới hạn chịu lực thông thường một số vật liệu giòn làm việc không sai định luật Húc mấy nên ta có thể thay đoạn đường cong trong giới hạn đó bằng một đoạn thẳng (hình 15–8). Như vậy, việc tính toán sẽ đơn giản mà vẫn đảm bảo được độ chính xác cần thiết.

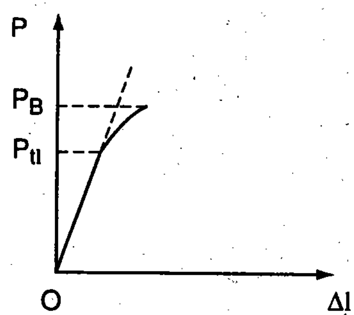
15.5.2. Thí nghiệm nén : Mẫu thí nghiệm thường là hình trụ hay hình lập phương (bê tông). Trên hình 15–9 biểu diễn đồ thị nén mẫu thép, còn trên hình 15–10 biểu diễn đồ thị nén mẫu gang.

Đối với thép khi nén chỉ xác định được giới hạn tỉ lệ và giới hạn chảy. Đối với gang thì xác định được giới hạn bền. Giới hạn chảy của thép khi nén và khi kéo coi như bằng nhau, còn giới hạn bền khi nén của gang lớn hơn rất nhiều giới hạn bền khi kéo.

Các đặc trưng cơ học của vật liệu trên thực tế còn phụ thuộc rất nhiều yếu tố như : nhiệt độ, tốc độ biến dạng (liên quan đến tải trọng tĩnh và động), thời gian ... mà ở đây ta chưa kể đến.



Hình 15–9



Hình 15–10

15.6. ĐIỀU KIỆN BỀN

15.6.1. Ứng suất cho phép : Khi tính sức bền các chi tiết, các kết quả tính toán phải đảm bảo cho chúng không bị phá hỏng. Ví dụ, đối với vật liệu giòn trên nó chưa phát sinh các vết nứt, đối với vật liệu dẻo chưa có biến dạng lớn. Muốn vậy, ứng suất tính toán lớn nhất tại một điểm nào đó trong quá trình chịu lực không được vượt quá một giới hạn quy định cho từng loại vật liệu. Ta gọi đó là ứng suất giới hạn nguy hiểm, kí hiệu σ_o. Trong bài toán kéo nén đúng tâm, đối với vật liệu giòn ta chọn σ_o là giới hạn bền còn đối với vật liệu dẻo ta chọn σ_o là giới hạn chảy vì khi đạt tới giới hạn đó tuy vật liệu chưa bị phá hỏng nhưng biến dạng đã quá lớn so với biến dạng đàn hồi.

Để đảm bảo an toàn trong thực tế người ta thường sử dụng một giá trị ứng suất bé hơn ứng suất nguy hiểm gọi là ứng suất cho phép, kí hiệu $[\sigma]$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n} \tag{15–7}$$

n là hệ số an toàn, nó có giá trị lớn hơn 1.

Như vậy đối với vật liệu dẻo :

$$[\sigma]_n = [\sigma]_k = \frac{\sigma_{ch}}{n} \tag{15–8a}$$

Đối với vật liệu giòn, vì khả năng chịu nén tốt hơn chịu kéo, nên ta có :

$$[\sigma]_n = \frac{\sigma_B^n}{n} \qquad [\sigma]_k = \frac{\sigma_B^k}{n} \tag{15–8b}$$

trong đó : $[\sigma]_n$ – ứng suất cho phép khi nén ; $[\sigma]_k$ – ứng suất cho phép khi kéo ; σ_B^n, σ_B^k – giới hạn bền khi nén, khi kéo ; σ_{ch} – giới hạn chảy.

Việc chọn các hệ số an toàn thích hợp là một việc rất khó và rất quan trọng. Nếu chọn hệ số an toàn bé thì tiết kiệm được nguyên vật liệu, nhưng có thể chi tiết không được bền lâu. Trái lại, nếu chọn hệ số an toàn lớn, chi tiết có thể bền lâu, nhưng lại tốn nhiều vật liệu, chi tiết quá cồng kềnh, mất mỹ thuật công nghiệp,... Trong thực tế, để chọn hệ số an toàn thích hợp, người ta thường dựa vào kinh nghiệm thực tế trong thiết kế cũng như trong sử dụng. Trong các giáo trình chuyên môn của từng ngành sẽ cho ta các số liệu tham khảo.

15.6.2. Điều kiện bền của thanh chịu kéo – nén đúng tâm theo ứng suất cho phép : Đối với vật liệu dẻo :

$$|\sigma|_{max} = \frac{N_z}{F} \le [\sigma] \tag{15–9}$$

còn đối với vật liệu giòn là :

$$\sigma_{max} = \frac{N_z}{F} \le [\sigma]_k; \qquad \sigma_{min} = \frac{N_z}{F} \le [\sigma]_n \tag{15–10}$$

trong đó : σ_{max} – ứng suất kéo lớn nhất ; σ_{min} – ứng suất nén có trị số bé nhất (hay có giá trị tuyệt đối lớn nhất khi nén).

Ý nghĩa của phương pháp là tìm những điểm có trị số ứng suất pháp lớn nhất khi kéo hoặc khi nén, đó là các điểm nguy hiểm. Khi điểm nguy hiểm đã thỏa mãn điều kiện bền thì tất cả các điểm còn lại đều thỏa mãn. Rõ ràng phương pháp kiểm tra là đơn giản nhưng độ an toàn lớn.

Từ điều kiện bền (15–9), ta có thể suy ra ba bài toán cơ bản sau :

– *Kiểm tra bền :* Giả sử đã biết vật liệu (tức là đã biết ứng suất cho phép), biết kích thước mặt cắt ngang và lực tác dụng thì ta có thể kiểm tra được độ bền của thanh.

Muốn vậy đầu tiên ta xác định lực dọc trong thanh sau đó tính trị số ứng suất pháp lớn nhất theo công thức (15–1). Nếu giá trị này không vượt quá ứng suất cho phép thì ta có thể kết luận là thanh đủ bền. Trong kĩ thuật sai số cho phép khoảng 5%.

– *Chọn kích thước mặt cắt ngang :*

$$F \geq \frac{N_z}{[\sigma]} \tag{15–11}$$

– *Xác định tải trọng cho phép :*

$$N_{zmax} \leq F[\sigma] \tag{15–12}$$

dựa vào đó ta tìm được tải trọng cho phép.

15.7. BÀI TOÁN SIÊU TĨNH

Bài toán tĩnh định là các bài toán chỉ dùng các phương trình cân bằng tĩnh học hoặc phương pháp mặt cắt là ta có thể xác định được nội lực trong hệ như phần trên ta đã làm. Nếu không thể xác định được các phản lực hoặc nội lực trong hệ nhờ các phương trình cân bằng tĩnh học hoặc phương pháp mặt cắt thì các bài toán đó gọi là bài toán siêu tĩnh. Để giải bài toán kéo, nén siêu tĩnh, ngoài các phương trình cân bằng tĩnh học ta phải thêm vào các phương trình phụ nhờ các điều kiện thực về biến dạng hay chuyển vị. Số phương trình phụ này cộng với các phương trình cân bằng tĩnh học đúng bằng số ẩn cần tìm.

Ví dụ 15–3 : Vẽ biểu đồ lực dọc cho một thanh chịu lực như hình 15–11.

Bài giải : Dưới tác dụng của lực P, tại hai ngàm A và B sẽ có các phản lực Z_A và Z_B. Điều kiện cân bằng của thanh chỉ cho ta một phương trình với hai ẩn số Z_A và Z_B.

$$\Sigma Z = P - Z_A - Z_B = 0 \qquad \text{(a)}$$

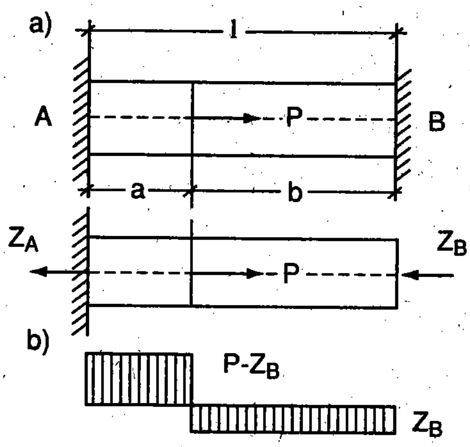
Để tìm phương trình phụ ta dựa vào điều kiện tại B, chẳng hạn chuyển vị của điểm B là bằng không. Tưởng tượng bỏ ngàm B và thay thế vào đó phản lực Z_B chuyển vị tại B phải bằng không. Ta có :

$$\Delta l = -\frac{Z_B b}{EF} + \frac{(P - Z_B)a}{EF} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Nhờ phương trình phụ về biến dạng đó ta rút ra :

$$Z_B = \frac{a}{l}P \qquad \text{(c)}$$

thay (c) vào (a) ta tính được $Z_A = \frac{b}{l}P$.



Hình 15–11

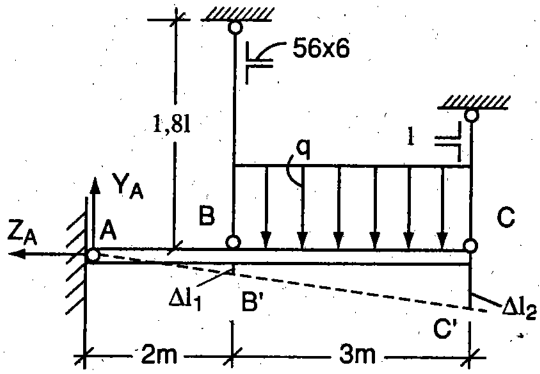
Biểu đồ lực dọc được vẽ trên hình 15–11b.

Ví dụ 15–4 : Dầm tuyệt đối cứng AB được giữ bởi các thanh thép có giới hạn chảy σ_{ch} = 24 kN/cm^2. Xác định trị số cho phép của tải trọng tác dụng lên dầm. Hệ số an toàn n = 1,6 và môđun đàn hồi của thép $E = 2.10^4$ kN/cm^2.

Bài giải : Gọi lực tác dụng trong thanh 1 và 2 là N_1 và N_2. Lấy tổng mô men các lực đối với điểm A, ta có :

$$\sum m_A = N_1 2 + N_2 5 - q3(2+3/2) = 0 \qquad (a)$$

Điều kiện cân bằng chỉ cho ta một phương trình với hai ẩn số N_1 và N_2. Nếu tách nút A thì lại thêm vào 2 ẩn số nữa là Z_A, Y_A (hình 15–12).



Hình 15–12

Phương trình phụ được tìm từ điều kiện hai tam giác đồng dạng ABB' và ACC'. Ta có :

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{2}{5}$$

hay
$$\frac{5N_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{2N_2 l_2}{E_2 F_2} \qquad (b)$$

trong đó : $E_1 = E_2 = E$; $\quad F_1 = F_2 = F$

$l_1 = 1{,}8l$; $\quad l_2 = l$

Từ hai phương trình (a) và (b) với hai ẩn số N_1 và N_2 giải ra ta được :

$$N_1 = \frac{21}{44}q \qquad N_2 = \frac{84}{44}q$$

Ta thấy $N_2 > N_1$. Vậy điều kiện bền phải xuất phát từ N_2 . Theo (15–12) ta có :

$$N_2 = F[\sigma]$$

tra bảng thép góc 56 × 56 × 5 có $F = 4{,}11cm^2$;

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{ch}}{n} = \frac{24}{1{,}6} = 15kN/cm^2$$

Vậy $\quad [q] = \dfrac{4{,}11 \times 15}{84} 44 = 32{,}3kN/cm$.

Chương 16

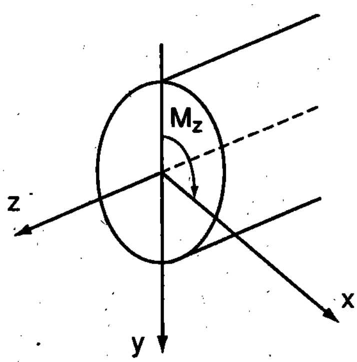
XOẮN THUẦN TÚY CỦA THANH THẲNG

16.1. ĐỊNH NGHĨA

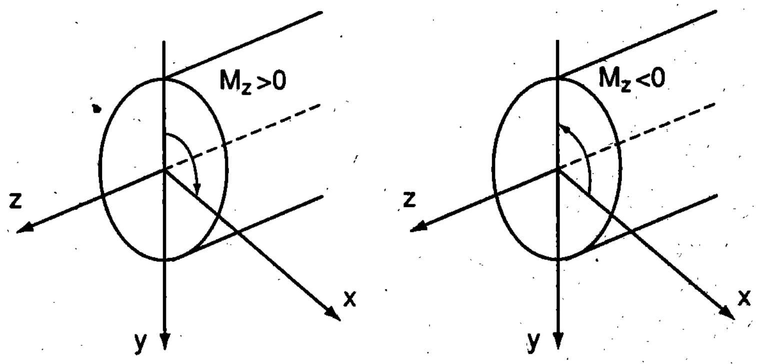
Một thanh chịu xoắn thuần túy khi trên mặt cắt ngang thanh chỉ có một thành phần nội lực là mô men xoắn M_z (hình 16–1).

16.2. MÔ MEN XOẮN – BIỂU ĐỒ MÔ MEN XOẮN

16.2.1. Mô men xoắn : Để xác định mô men xoắn nội lực trên các mặt cắt ngang của thanh, ta dùng phương pháp mặt cắt. Dấu của mô men xoắn nội lực quy ước như sau : nếu nhìn vào mặt cắt ta thấy mô men xoắn nội lực quay cùng chiều kim đồng hồ thì nó có dấu dương (> 0), ngược lại là dấu âm (< 0) (hình 16–2).



Hình 16–1



Hình 16–2

Ví dụ 16–1 : Xác định giá trị mô men xoắn tại các mặt cắt D và E cho thanh chịu lực như hình 16–3a.

Bài giải : Dùng phương pháp mặt cắt cho mặt cắt tại D. Xét sự cân bằng của phần trái (hình 16–3b). Từ tổng mô men các lực đối với trục z bằng không ta có :

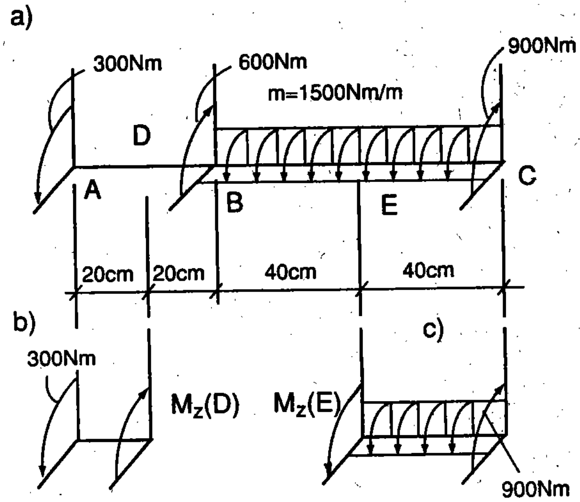
$$M_z(D) - 300Nm = 0$$

Suy ra $M_z(D) = 300Nm$.

Dùng phương pháp mặt cắt cho mặt cắt tại E. Xét sự cân bằng của phần phải (hình 16–3c). Tương tự ta có :

$$M_z(E) - 900 + 1500 \times 0,4 = 0$$

Suy ra $M_z(E) = 300Nm$.



Hình 16–3

16.2.2. Biểu đồ mô men xoắn

Ví dụ 16–2 : Vẽ biểu đồ mô men xoắn cho thanh chịu lực như hình 16–4a

Bài giải : Xác định phản lực tại ngàm C :

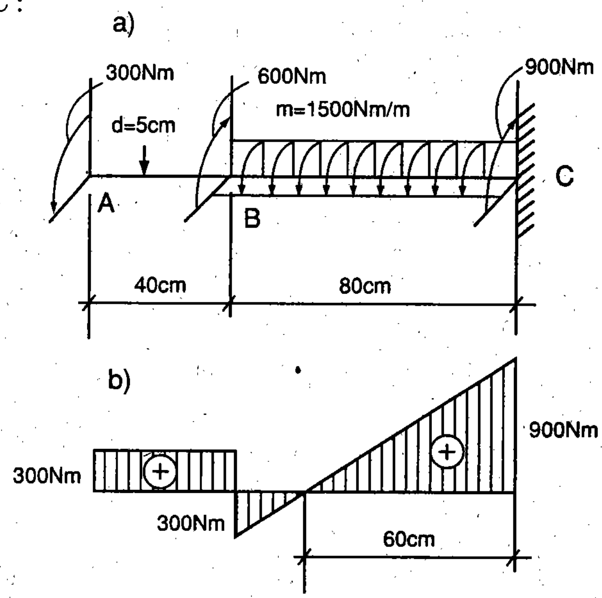
$$\sum M_z = 0 \rightarrow M_C = 900Nm$$

Chia thanh làm hai đoạn AB và BC. Viết phương trình mô men xoắn cho từng đoạn.

* Đoạn AB : cắt thanh ở mặt cắt z_1 $(0 \le z_1 \le 40cm)$ và xét sự cân bằng phần trái ta được $M_{z_1} = 300Nm$. Vậy trong đoạn AB nội lực có giá trị không đổi.

* Đoạn BC : cắt thanh ở mặt cắt z_2 và xét sự cân bằng của phần phải. Chọn gốc tại C $(0 \le z_2 \le 80cm)$, tương tự ta được :

$$M_{z_2} = 900 - 1500z_2$$



Hình 16–4

Vẽ biểu đồ mô men xoắn.

Dựa vào phương trình của từng đoạn để vẽ biểu đồ mô men xoắn. Nó có dạng như trên hình 16–4b.

16.2.3. Quan hệ giữa mô men xoắn ngoại lực với công suất và số vòng quay của trục truyền : Giữa công suất của động cơ truyền đến các trục và mô men xoắn ngoại lực tác dụng lên các trục có mối quan hệ sau :

Công A do mô men M thực hiện khi trục quay một góc α trong thời gian t là :

$$A = M\alpha$$

Vậy công suất $$W = \frac{A}{t} = M\frac{\alpha}{t} = M\omega$$

Từ đó rút ra $$M = \frac{W}{\omega} \qquad (16\text{–}1)$$

trong đó : M – mô men xoắn ngoại lực (*Nm*) ; W – công suất (*W*) ; ω – vận tốc góc (*rad/s*) ; n (*vòng/phút*).

Vận tốc góc $$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} rad/s$$

Trong kĩ thuật người ta còn sử dụng công thức sau :

Nếu W tính bằng kW ta có :

$$M = 9549\frac{W}{n} \quad (Nm) \qquad (16\text{–}2)$$

W tính bằng mã lực ta có :

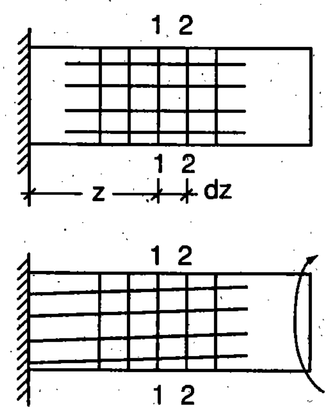
$$M = 7162\frac{W}{n} \quad (Nm) \qquad (16\text{–}3)$$

16.3. THIẾT LẬP CÔNG THỨC ỨNG SUẤT TIẾP TRÊN MẶT CẮT NGANG CỦA THANH TRÒN CHỊU XOẮN THUẦN TÚY

Trước hết ta hãy quan sát một thanh tròn chịu xoắn thuần túy. Trên mặt ngoài của thanh trước khi chịu lực, ta kẻ các vạch song song và vuông góc với trục thanh (hình 16–5a). Những vạch vuông góc với trục được xem là các vết của mặt cắt. Sau khi chịu lực ta thấy :

– Các vạch vuông góc với trục thanh vẫn giữ nguyên hình là đường tròn và vuông góc với trục thanh, khoảng cách giữa chúng vẫn không đổi.

– Các đường song song với trục trở thành các đường xoắn ốc, mạng lưới ô vuông trở thành gần như mạng lưới hình bình hành (hình 16–5b).



Hình 16–5

16.3.1. Các giả thuyết

1– Giả thuyết về mặt cắt ngang phẳng.

2– Giả thuyết về thớ dọc. Nội dung hai giả thuyết này như ở chương 15 (kéo, nén đúng tâm).

3– Giả thuyết chiều dài không đổi. Khoảng cách giữa các mặt cắt ngang vẫn giữ nguyên trong quá trình biến dạng.

4– Giả thuyết về bán kính thẳng và không đổi.

Sau khi biến dạng, bán kính của mặt cắt ngang vẫn thẳng và có độ dài không đổi. Tưởng tượng tách ra khỏi thanh một phân tố (hình 16– 6a) giới hạn bởi hai mặt phẳng cách nhau một đoạn dz vô cùng bé, hai mặt trụ đồng tâm có bán kính ρ và $\rho + d\rho$, hai mặt phẳng chứa trục thanh và hợp với nhau một góc $d\varphi$. Sau khi biến dạng, mặt cắt ngang 1–1 sẽ xoay đi một góc φ so với mặt cắt ngàm. Mặt cắt ngang 2–2 có hoành độ z + dz sẽ bị xoay đi một góc $\varphi + d\varphi$ so với mặt cắt ngàm. Vậy góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt 1–1 và 2–2 là $d\varphi$ (hình 16–6b).

Theo giả thuyết 1, 2, 3 các mặt cắt 1–1 và 2–2 chỉ xoay đi đối với nhau, nhưng vẫn phẳng và khoảng cách không đổi. Ta thấy trên mặt cắt ngang chỉ có thành phần ứng suất tiếp, không có thành phần ứng suất pháp. Phân tố tách ra như trên rõ ràng ở trạng thái trượt thuần túy.

Gọi γ_ρ là góc trượt tỉ đối của phân tố cách trục một bán kính bằng ρ. Từ hình 16–6b ta có :

$$tg\gamma_\rho = \frac{qq'}{dz} = \frac{\rho d\varphi}{dz}$$

trong đó : qq' = ρdφ do giả thuyết 1 và 4. Xét vật liệu làm việc trong miền đàn hồi nên biến dạng là rất bé nên ta suy ra :

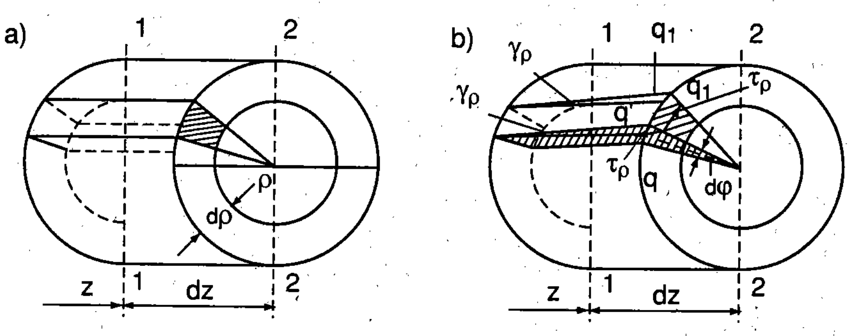
$$tg\gamma_\rho = \gamma_\rho = \rho\frac{d\varphi}{dz} \qquad \text{(a)}$$

Theo định luật Húc ta có $\gamma_\rho = \frac{1}{G}\tau_\rho$ (b)

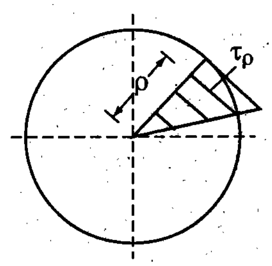
từ (a) và (b) rút ra : $\tau_\rho = G\rho\frac{d\varphi}{dz}$ (16–4)

trong đó : $\frac{d\varphi}{dz} = \theta$ là hằng số đối với một mặt cắt ngang và được gọi là góc xoắn tỉ đối ; G là môđun đàn hồi khi trượt.

Do đó trên mặt cắt ngang ứng suất tiếp phân bố bậc nhất theo ρ. Hình 16–7 biểu diễn luật phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang.



Hình 16–6



Hình 16–7

16.3.2. Biểu thức liên hệ giữa ứng suất tiếp và thành phần mô men xoắn nội lực

Theo (14–9) ta có :

$$M_z = \int_F \tau_\rho \rho dF \qquad \text{(a)}$$

Thay giá trị τ_ρ từ biểu thức (16–4) vào (a) ta được :

$$M_z = \int_F G\frac{d\varphi}{dz}\rho^2 dF = G\frac{d\varphi}{dz}\int_F \rho^2 dF = G\frac{d\varphi}{dz}I_p \qquad \text{(b)}$$

trong đó : $I_p = \int_F \rho^2 dF$ chính là mô men quán tính độc cực của mặt cắt ngang tròn : $I_p = \frac{\pi R^4}{2} \approx 0{,}1d^4$.

So sánh (16–4) và (b) ta rút ra biểu thức ứng suất tiếp tính theo nội lực có dạng :

$$\tau_\rho = \frac{M_z}{I_p}\rho \qquad \text{(16–5)}$$

Ứng suất tiếp lớn nhất tại các điểm ngoài chu vi là : $\tau_{max} = \frac{M_z}{I_p}R$

hay $$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p} \qquad (16\text{–}6)$$

trong đó : $W_p = \frac{I_p}{R}$ là môđun chống xoắn, có thứ nguyên (chiều dài)^3, với mặt cắt ngang tròn :

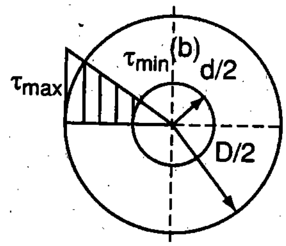
$$W_p = \frac{\pi R^4}{2R} = \frac{\pi R^3}{2} \approx 0{,}2d^3 \qquad (16\text{–}7)$$

Với mặt cắt ngang hình vành khăn (hình 16-8) :

$$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2R}$$

hoặc $$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi D^3(1-\alpha^4)}{16} \approx 0{,}2D^3(1-\alpha^4) \qquad (16\text{–}8)$$

trong đó : $\alpha = d/D$; d– đường kính trong, D – đường kính ngoài.



Hình 16–8

16.4. BIẾN DẠNG CỦA THANH TRÒN CHỊU XOẮN

Khi thanh tròn chịu xoắn biến dạng của thanh được đặc trưng bởi :

– Góc xoắn tỉ đối $$\theta = \frac{d\varphi}{dz} \qquad (16\text{–}9)$$

Từ (b) ta có $$\theta = \frac{M_z}{GI_p} \qquad (16\text{–}10)$$

– Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một đoạn có chiều dài l, được kí hiệu φ.

Từ (16–9) ta có $d\varphi = \theta dz = \frac{M_z}{GI_p}dz$

Vậy $$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{GI_p}dz \qquad (16\text{–}11)$$

trong đó : GI_p gọi là độ cứng khi xoắn.

Nếu trong suốt chiều dài l, tỉ số M_z/GI_p không đổi thì :

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{GI_p}dz = \frac{M_z l}{GI_p} \qquad (16\text{–}12)$$

Nếu tỉ số M_z/GI_p không đổi trong từng đoạn của thanh thì ta chia thanh ra làm nhiều đoạn l_i sao cho trong từng đoạn ấy M_z/GI_p không đổi, khi đó :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{z_i} l_i}{G_i I_{pi}} \qquad (16\text{–}13)$$

Góc φ tính bằng radien, còn thứ nguyên của góc xoắn tỉ đối là *rad/chiều dài*.

Ví dụ 16–3 : Cho trục chịu lực như hình 16–4a. Tính ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn tại các mặt cắt A và B của trục. Cho $G = 8.10^6\ N/cm^2$; đường kính trục $d = 5cm$.

Bài giải : Trước hết ta vẽ biểu đồ mô men xoắn (hình 16–4b). Giá trị mô men xoắn lớn nhất $M_{z(max)} = 90000Ncm$.

Ứng suất tiếp cực đại có giá trị :

$$\tau_{max} = \frac{M_{zmax}}{W_p} = \frac{90000}{0,2 \times 5^3} = 3600N/cm^2$$

Góc xoắn tại mặt cắt B so với ngàm C :

$$\varphi_{BC} = \int_0^{80} \frac{M_{z(CB)}}{GI_p} dz$$

trong đó : $M_{z(CB)} = M_C\left(1 - \frac{z}{60}\right) = 90000\left(1 - \frac{z}{60}\right)$ $\quad (Ncm)$

Khi thay vào ta được :

$$\varphi_{BC} = \int_0^{80} \frac{90000(1 - z/60)}{8 \times 10^6 \times 0,1 \times 5^4} dz = \frac{90000}{8 \times 10^6 \times 0,1 \times 5^4}\left(80 - \frac{80^2}{2 \times 60}\right) = 4,8 \times 10^{-3} rad$$

Góc xoắn tại mặt cắt A so với ngàm C :

$$\varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = \frac{M_{z(BA)} l_{BA}}{GI_p} + \varphi_{BC}$$

$$\varphi_{AC} = 4,8 \times 10^{-3} + \frac{30000 \times 40}{8 \times 10^6 \times 0,1 \times 5^4} = 7,2 \times 10^{-3} rad$$

16.5. ĐIỀU KIỆN BỀN VÀ ĐIỀU KIỆN CỨNG

16.5.1. Điều kiện bền : Tại các điểm ở ngoài chu vi, phân tố ở trạng thái trượt thuần túy. Nếu mặt cắt ngang không đổi thì điều kiện bền có dạng :

$$\tau_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_p} \le [\tau] \qquad (16\text{–}14)$$

trong đó : $[\tau]$ được gọi là ứng suất cho phép khi xoắn. Trị số ứng suất cho phép được xác định bằng thực nghiệm theo tiêu chuẩn (tương tự như thí nghiệm kéo).

Đối với vật liệu dẻo $[\tau] = \tau_{ch} / n$

Đối với vật liệu giòn $[\tau] = \tau_b / n$

trong đó : τ_{ch} – giới hạn chảy khi xoắn ; τ_b – giới hạn bền khi xoắn ; n – hệ số an toàn.

Giữa [τ] và [σ] tùy theo các thuyết bền cũng có các mối quan hệ sau :

– Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất thì $[\tau] = [\sigma]/2$

– Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng thì $[\tau] = [\sigma]/\sqrt{3}$

Trong trường hợp đường kính của thanh thay đổi (ví dụ đối với trục bậc) điều kiện bền phải viết :

$$\tau_{max} = \left(\frac{M_z}{W_p}\right)_{max} \leq [\tau] \qquad (16\text{–}15)$$

16.5.2. Điều kiện cứng : Các chi tiết máy chịu xoắn khi truyền động phải có độ cứng đủ lớn, tức là góc xoắn tỉ đối lớn nhất về trị số tuyệt đối không vượt quá một trị số cho phép nào đó.

$$\theta_{max} = \left(\frac{M_z}{GI_p}\right)_{max} \leq [\theta] \ \textit{rad/chiều dài} \qquad (16\text{–}16)$$

trong đó : [θ] là góc xoắn tỉ đối cho phép. Điều kiện (16–16) gọi là điều kiện cứng. Nếu [θ] được cho qua (độ/chiều dài) thì khi tính toán sử dụng công thức quy đổi sau :

$$[\theta]\ \textit{rad/chiều dài} = \pi/180\ [\theta]\textit{độ/chiều dài}$$

Từ điều kiện bền và điều kiện cứng ta cũng suy ra ba bài toán cơ bản sau :

– Kiểm tra thanh thỏa mãn điều kiện bền và điều kiện cứng theo (16–14) và (16–16).

– Chọn kích thước mặt cắt ngang :

Theo điều kiện bền $W_p \leq \dfrac{M_z}{[\tau]}$ (16–17)

Theo điều kiện cứng $I_p \leq \dfrac{M_z}{G[\theta]}$ (16–18)

Ta sẽ chọn đường kính có trị số lớn nhất từ (16–17) và từ (16–18).

– Tìm tải trọng cho phép :

Theo điều kiện bền $M_z \leq W_z[\tau]$ (16–19)

Theo điều kiện cứng $M_z \leq G\,I_p[\theta]$ (16–20)

Từ đó sẽ chọn tải trọng bé hơn, để đảm bảo mô men xoắn nội lực thỏa mãn đồng thời cả hai bất đẳng thức trên.

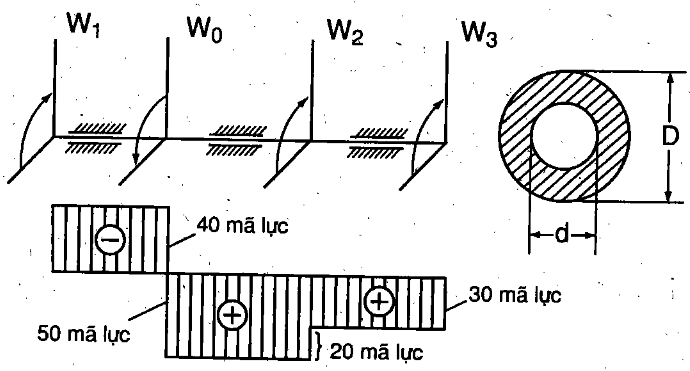
Ví dụ 16–4 : Cho một trục chịu lực như hình 16–9. Các puli 1, 2, 3 là bị động có công suất $W_1 = 40$ mã lực ; $W_2 = 20$ mã lực ; $W_3 = 30$ mã lực ; puli 0 là chủ động. Biết trục quay có $n = 1000$*vg/ph* ; $\alpha = d/D = 0{,}6$; vật liệu có $[\tau] = 4500 N/cm^2$; $G = 8.10^6\ N/cm^2$; $\theta^o = 2^o/m$. Xác định D và d ?

Bài giải : Biểu đồ công suất được vẽ trên hình 16–9b. Từ biểu đồ công suất ta thấy mặt cắt nguy hiểm có $W_p = 50$ mã lực. Vậy mô men xoắn theo (16–3) là :

$$M_{z\max} = \frac{716200}{n} W_p = \frac{716200}{1000} 50 \qquad (Ncm)$$

Chọn kích thước theo điều kiện bền ta có :

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4) = \frac{716200}{n[\tau]} W_p$$



Hình 16-9

Từ đó suy ra đường kính ngoài :

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \times \frac{716200 \times W_p}{n[\tau](1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \times \frac{716200 \times 50}{1000 \times 4500 \times [1-(0,6)^4]}}$$

$D \approx 3,64\ cm$.

Chọn kích thước theo điều kiện cứng.

Từ (16–18) ta suy ra :

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) \geq \frac{716200 W_p \times 100 \times 180}{nG[\theta^o]\pi}$$

rút ra $D = 3,49cm$.

So sánh ta chọn $D = 3,64cm$; $d = 0,6 \times 3,64 = 2,18\ cm$.

16.6. BÀI TOÁN SIÊU TĨNH

Phương pháp giải bài toán xoắn siêu tĩnh giống như giải bài toán siêu tĩnh chịu kéo, nén. Ở đây chỉ cần trình bày thông qua ví dụ.

Ví dụ 16–5 : Cho một thanh chịu xoắn, hai đầu liên kết ngàm chịu lực như hình vẽ 16–10a. Vẽ biểu đồ mô men xoắn.

Bài giải : Điều kiện cân bằng chỉ cho ta một phương trình để xác định các mô men xoắn nội lực tại các ngàm là :

$$\sum m(z) = M_A + M_B + M_o = 0 \qquad (a)$$

Phương trình (a) chứa hai ẩn số là M_A và M_B, do đó bài toán là siêu tĩnh bậc 1. Để tìm phương trình phụ, trình tự ta làm như sau :

– Bỏ một liên kết thừa đi, ví dụ bỏ ngàm B (hoặc ngàm A) và đặt các phản lực thích hợp, khi đó thanh AB trở thành tĩnh định nhưng ta chưa biết M_B.

– Ngoại lực M_B tìm được nhờ phương trình về biến dạng góc xoắn tương đối giữa B và A bằng không.

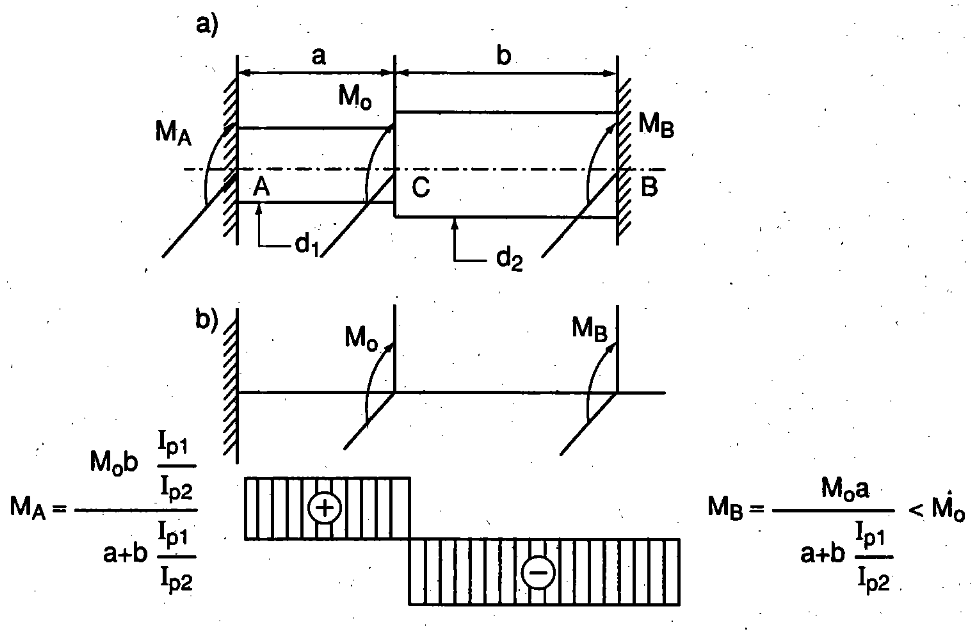
$$\varphi_{BA} = \frac{M_B b}{GI_{p_2}} + \frac{M_B a}{GI_{p_1}} + \frac{M_o a}{GI_{p_1}} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Từ phương trình (b) ta tìm được giá trị M_B

$$M_B = -\frac{M_0 a}{a + b(I_{p_1}/I_{p_2})}$$

trong đó : $I_{p_1} = 0{,}1d_1^4$; $I_{p_2} = 0{,}1d_2^4$ là các mô men quán tính độc cực của mặt cắt ngang đoạn AC và CB.

Sau khi tìm được giá trị M_B, việc vẽ biểu đồ tiến hành như đã biết. Biểu đồ mô men xoắn được vẽ trên hình 16–10b.



Hình 16–10

Chương 17

UỐN PHẲNG CỦA THANH THẲNG

17.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ PHÂN LOẠI

– Ngoại lực tác dụng có thể là lực tập trung, lực phân bố và mô men tập trung. Mặt phẳng chứa các lực và mô men đó được gọi là mặt phẳng tải trọng.

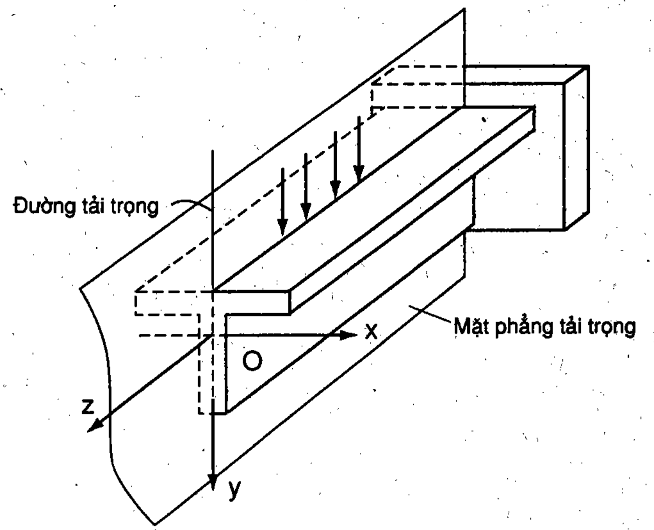
– Đường tải trọng là giao tuyến giữa mặt phẳng tải trọng và mặt cắt ngang của thanh.

– Mặt phẳng quán tính chính trung tâm là mặt phẳng tạo nên bởi trục của thanh và một trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang (hình 17–1).

– Thanh chủ yếu chịu uốn gọi là dầm.

– Nếu trục của dầm sau khi chịu uốn cong vẫn nằm trong một mặt phẳng quán tính chính trung tâm, thì sự uốn được gọi là *uốn phẳng*.

Ta chia uốn phẳng làm hai loại : Uốn thuần túy phẳng và uốn ngang phẳng.

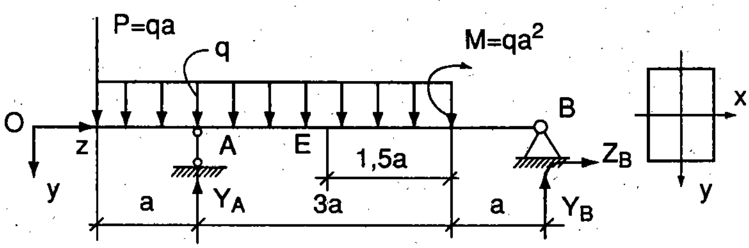


Hình 17–1

17.2. NỘI LỰC VÀ BIỂU ĐỒ NỘI LỰC

17.2.1. Nội lực – Quy ước dấu của nội lực : Xét một dầm chịu lực như trên hình 17–2. Các ngoại lực tác dụng lên dầm bao gồm lực tập trung, lực phân bố, mô men tập trung và các phản lực tại các gối A và B. Các lực tác dụng đều nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm Oyz.

Đầu tiên ta phải xác định được các phản lực tại các gối A và B.



Hình 17–2

Trong bài toán phẳng, nhờ ba phương trình cân bằng tĩnh học ta xác định được các thành phần phản lực như sau :

$$\sum F_z = 0 \quad \text{rút ra } Z_B = 0$$

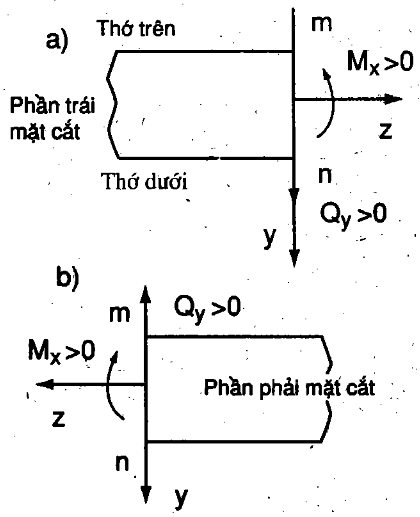
$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}) = 0 \rightarrow Y_B 4a + Pa - M - q4aa = 0$$

$$\sum \bar{m}_B(\vec{F}) = 0 \rightarrow Y_A 4a - P5a - q4a3a + M = 0$$

từ đó suy ra : $Y_A = 4qa$; $Y_B = qa$

– Lực cắt Q_y được coi là dương, nếu pháp tuyến ngoài của mặt cắt ngang quay một góc 90^o thuận chiều kim đồng hồ thì gặp chiều của lực cắt Q_y.

– Mô men uốn được coi là dương nếu nó làm cho thớ dưới trục dầm bị kéo tức làm căng các thớ về phía dương của trục y, (trong dầm chọn chiều dương y hướng xuống dưới). Các thành phần nội lực được quy ước là dương biểu diễn trên hình 17–3a và 17–3b.



Hình 17–3

Ví dụ 17 –1 : Xác định nội lực tại mặt cắt E (hình 17–2).

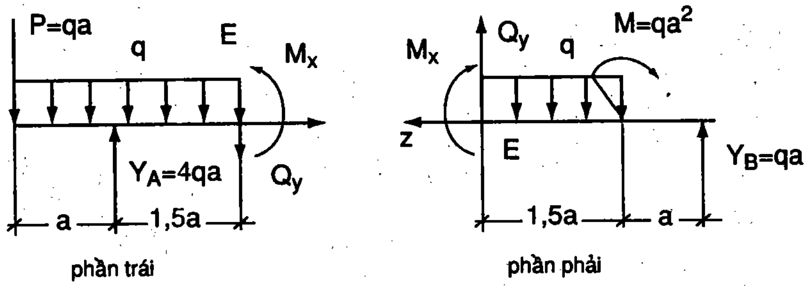
Bài giải : Sử dụng phương pháp mặt cắt, tưởng tượng phân dầm thành hai phần phải trái như trên hình 17–4.

Xét sự cân bằng của phần trái.

$$\sum P_y = 0 \rightarrow Q_y + qa + q2{,}5a - 4qa = 0 \text{ suy ra } Q_y = 0{,}5qa > 0$$

$$\sum \bar{m}_E(\vec{F}) = 0 \rightarrow M_x + qa2{,}5a + q2{,}5a1{,}5a/2 - 4qa1{,}5a = 0$$

suy ra $M_x = 0{,}375qa^2 > 0$.



Hình 17–4

Xét sự cân bằng của phần phải :

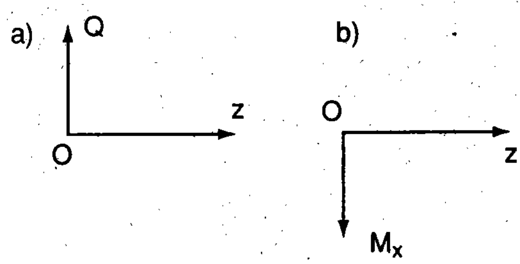
$$\sum P_y = 0 \rightarrow Q_y - 1{,}5qa + qa = 0 \text{ suy ra } Q_y = 0{,}5qa > 0$$

$$\sum \bar{m}_E(\vec{F}) = 0 \rightarrow M_x + qa^2 + 1{,}5qa1{,}5a/2 - qa2{,}5a = 0$$

suy ra $M_x = 0{,}375qa^2 > 0$.

Ta thấy dù xét phần trái hoặc phần phải kết quả nhận được đều như nhau. Do đó về sau ta sẽ xét phần nào để cho tính toán được đơn giản hơn.

17.2.2. Biểu đồ nội lực : Biểu đồ nội lực là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của lực cắt và mô men uốn dọc theo trục của dầm. Nhờ nó ta dễ dàng tìm được các mặt cắt mà mô men uốn có trị số lớn nhất. Các mặt cắt đó thường là các mặt cắt nguy hiểm. Sau này thường chọn để tính toán điều kiện bền. Trong giáo trình này khi vẽ đồ thị ta quy ước hệ trục được chọn như sau :



Hình 17-5

– Đối với biểu đồ lực cắt Q, hệ trục chọn như hình 17–5a.

– Đối với biểu đồ mô men uốn, hệ trục chọn như hình 17–5b.

Ví dụ 17–2 : Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm chịu lực như hình 17–6.

Bài giải : Sau khi xác định được các phản lực tại các gối A và B ta chia dầm thành những đoạn, trong đó lực cắt và mô men là các hàm biến thiên liên tục, là CA, AD, DB. Dưới đây phương trình mô men lực được thiết lập đối với giao điểm giữa mặt cắt và trục dầm và được kí hiệu $\sum M$.

– Đoạn CA (hình 17-6a) :

$$\sum P_y = 0 \rightarrow Q_1 + P + qz_1 = 0 \rightarrow Q_1 = -qa - qz_1$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_1 + Pz_1 + q\frac{z_1^2}{2} = 0 \rightarrow M_1 = -qaz_1 - q\frac{z_1^2}{2}$$

Đoạn AD ($0 \le z_2 \le 4a$) (hình 17–6b).

Xét phần trái

Phương trình lực cắt $\sum P_y = 0 \rightarrow Q_2 = -qa - qz_2 + 4qa$

Phương trình mô men $\sum M = 0 \rightarrow M_2 = -qaz_2 - q\frac{z_2^2}{2} + 4qa(z_2 - a)$

Đoạn BD. Xét phần phải ($0 \le z_3 \le a$) (hình 17–6c) chọn gốc tại B, tương tự :

$$\sum P_y = 0 \rightarrow Q_3 + Y_B = 0 \rightarrow Q_3 = -qa$$

$$\sum M = 0 \rightarrow -M_3 + Y_B z_3 = 0 \rightarrow M_3 = qaz_3$$

Trên cơ sở các phương trình đã có ta vẽ biểu đồ lực cắt Q_y và mô men uốn M_x.

Biểu đồ nội lực được vẽ như trên hình 17–6d và 17–6e. Các đồ thị được vẽ như vẽ các đồ thị hàm số thông thường. Ở đây ta chỉ cần chú ý đến các quy ước về cách chọn hệ trục tọa độ và quy ước về dấu đã nói ở trên.

Từ biểu đồ trên ta rút ra một số nhận xét quan trọng để kiểm tra hoặc vẽ biểu đồ nội lực một cách nhanh chóng.

– Tại mặt cắt ngang nào đó có đặt lực tập trung thì tại đó có bước nhảy của biểu đồ lực cắt. Giá trị bước nhảy chính bằng giá trị lực tập trung (Ví dụ, tại các mặt cắt A,C,B).

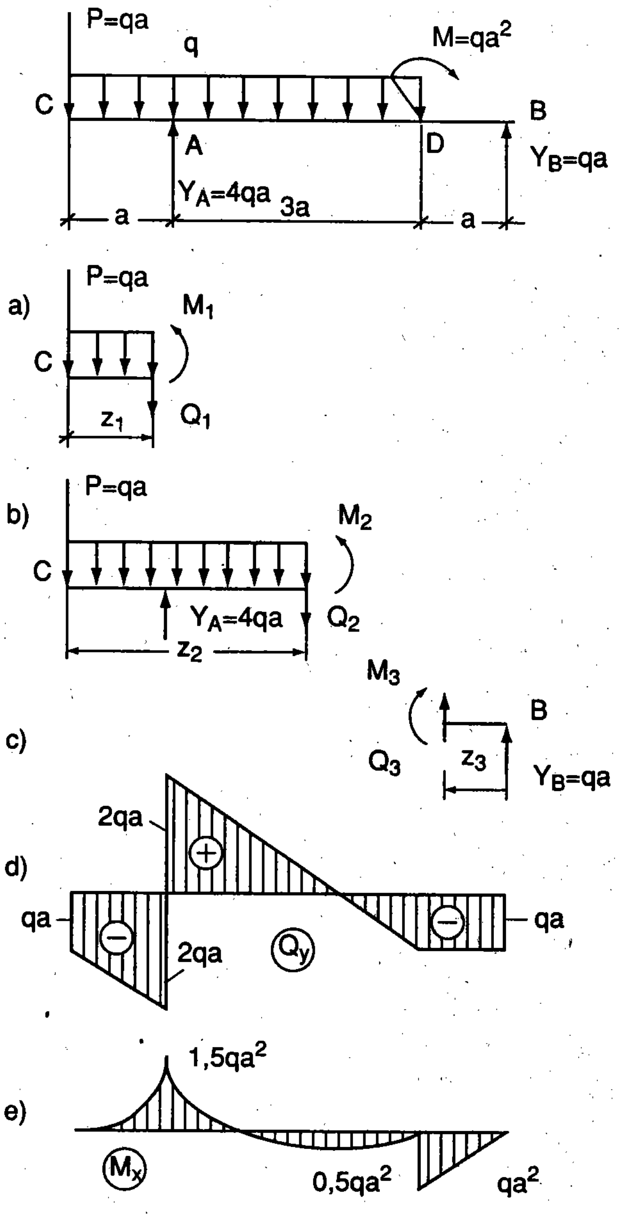
– Tại mặt cắt ngang nào có mô men tập trung thì tại đó có bước nhảy của biểu đồ mô men uốn. Giá trị bước nhảy chính bằng giá trị mô men tập trung (ví dụ, tại mặt cắt D).

– Trên đoạn dầm không có tải trọng phân bố, biểu đồ lực cắt là hằng số, biểu đồ mô men uốn là bậc nhất. Trên đoạn dầm có tải trọng phân bố đều, biểu đồ lực cắt là bậc nhất, biểu đồ mô men uốn là bậc hai. Tại chỗ có lực cắt Q = 0 trên biểu đồ lực cắt, thì biểu đồ mô men uốn có giá trị cực trị. Như vậy giữa cường độ tải trọng phân bố, lực cắt và mô men uốn sẽ có mối quan hệ vi phân nhất định.

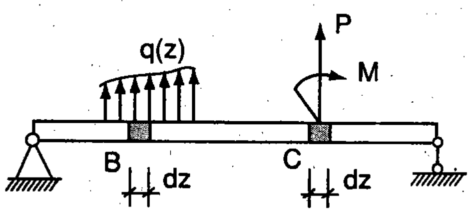
Thực vậy giả sử cho một dầm chịu lực bất kỳ như trên hình 17–7. Tại mặt cắt ngang C của dầm có đặt một lực tập trung P và một mô men tập trung M_o. Ta tưởng tượng cắt dầm ra một đoạn vô cùng bé dz bởi hai mặt cắt 1–1 và 2–2, ở về hai phía của mặt cắt ngang C, như trên hình 17–8. Từ điều kiện cân bằng của phân tố ta được :

$$Q_y + P - (Q_y + dQ_y) = 0$$

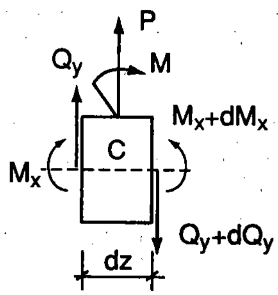
$$M_x + Q_y dz + M_o + P\frac{dz}{2} - (M_x + dM_x) = 0$$



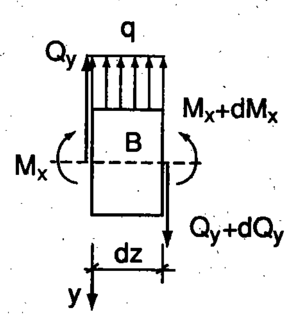
Hình 17–6



Hình 17–7



Hình 17–8



Hình 17–9

Bỏ qua lượng vô cùng bé : $Q_y dz$ và $P\frac{dz}{2}$ so với M_x và M_o ta rút ra điều cần nhận xét :

$$\Delta Q_y = P; \quad dM_x = M_o$$

Bây giờ ta cắt dầm ra một đoạn vô cùng nhỏ dz bởi hai mặt cắt về hai phía của mặt cắt ngang B như hình 17–9. Vì chiều dài của phân tố vô cùng nhỏ nên chúng ta có thể coi tải trọng phân bố đều trong đoạn này. Từ điều kiện cân bằng của phân tố ta nhận được hai phương trình sau :

$$Q_y + q\,dz - (Q_y + dQ_y) = 0$$

$$M_x + Q_y dz + q\,dz\frac{dz}{2} - (M_x + dM_x) = 0$$

Nếu bỏ qua lượng vô cùng bé $q\frac{dz^2}{2}$ ta được :

$$\frac{dQ_y}{dz} = q(z); \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y \qquad (17\text{–}1)$$

Vậy đạo hàm của lực cắt bằng cường độ tải trọng phân bố theo chiều dài và đạo hàm của mô men uốn bằng lực cắt. Sự liên hệ đó gọi là sự liên hệ vi phân giữa cường độ tải trọng phân bố, lực cắt và mô men uốn.

Qua ví dụ trên ta có thể tóm tắt trình tự cách vẽ biểu đồ nội lực như sau :

– Xác định phản lực tại chỗ liên kết.

– Phân đoạn.

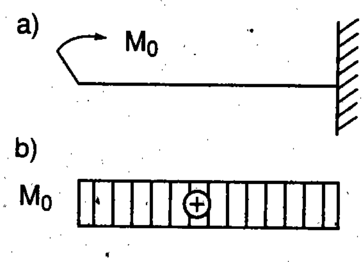
– Viết phương trình lực cắt và mô men uốn cho từng đoạn.

– Vẽ biểu đồ cho từng đoạn.

– Kiểm tra kết quả nhờ các nhận xét đã nêu ở trên.

17.3. DẦM CHỊU UỐN PHẲNG THUẦN TÚY

17.3.1. Định nghĩa : Một dầm gọi là uốn thuần túy phẳng khi trên mặt cắt ngang của dầm chỉ có một thành phần nội lực là mô men uốn nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm, ví dụ M_x hoặc M_y (hình 17–10).



Hình 17–10

17.3.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang : Quan sát một dầm chịu uốn phẳng thuần túy có mặt cắt ngang hình chữ nhật. Trước khi dầm chịu uốn ta vạch lên mặt bên của nó những đường thẳng song song với trục, tượng trưng cho các thớ dọc và những đường thẳng vuông góc với trục biểu thị các mặt cắt ngang (hình 17–11a).

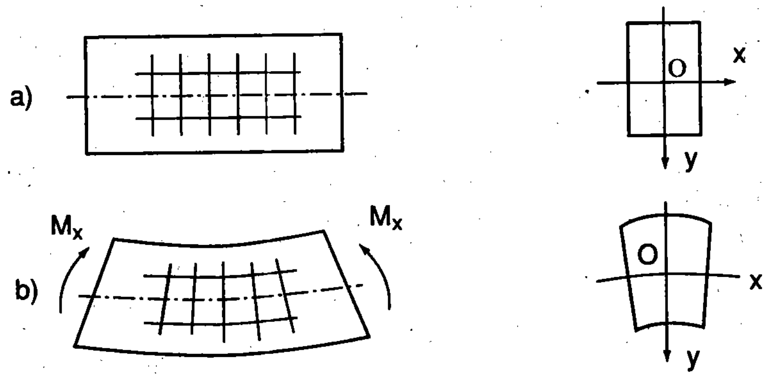
Sau khi dầm bị uốn ta nhận thấy :

– Trục của dầm bị cong đi.

– Các vạch song song với trục cũng bị cong đi nhưng vẫn song song với trục.

– Các vạch vuông góc với trục vẫn thẳng và vuông góc với trục dầm đã bị uốn cong.

– Các góc vuông tại giao điểm các vạch dọc và ngang vẫn được duy trì là vuông (hình 17–11b).



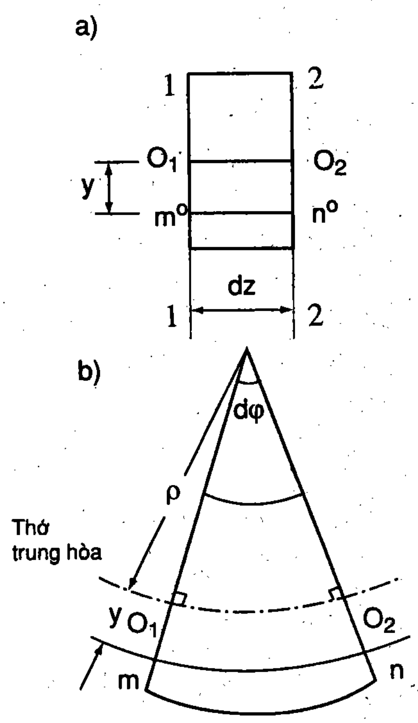
Hình 17–11

Từ những nhận xét trên ta đưa ra hai giả thiết sau :

Giả thiết mặt cắt ngang phẳng và giả thiết về thớ dọc như chương kéo, nén.

Tiếp tục quan sát biến dạng của dầm ta thấy các thớ dọc ở phía trên trục dầm bị co lại và các thớ ở phía dưới trục dầm bị dãn ra. Như vậy từ thớ bị co sang thớ bị dãn sẽ có thớ không bị dãn, không bị co, tức là thớ không bị biến dạng. Ta gọi thớ này là thớ trung hòa. Giao tuyến của lớp trung hòa với mặt cắt ngang gọi là đường trung hòa. Đường trung hòa chia mặt cắt ngang thành hai miền : một miền gồm các thớ bị co và miền kia gồm các thớ bị dãn.

Vì các thớ ở phía trên bị co nên bề rộng của mặt cắt ngang sẽ bị phình ra ở phía trên. Còn các thớ dưới bị dãn nên bề rộng của mặt cắt ngang sẽ bị hẹp lại ở phía dưới (hình 17–11b). Mặt cắt không còn giữ nguyên hình chữ nhật như trước khi biến dạng. Đường trung hòa là một đường cong. Nhưng vì biến dạng nhỏ nên chúng ta có thể coi mặt cắt ngang sau khi biến dạng vẫn là hình chữ nhật và coi đường trung hòa là một đường thẳng. Mặt khác chúng ta chỉ xét trường hợp tải trọng tác dụng trong mặt phẳng chứa trục dầm và trục đối xứng của mặt cắt ngang nên đường trung hòa sẽ vuông góc với đường tải trọng, tức là vuông góc với trục đối xứng của mặt cắt ngang. Biến dạng của dầm chịu uốn phẳng thuần túy chỉ là sự quay của mặt cắt ngang đối với đường trung hòa.



Hình 17–12

Xét một mặt cắt ngang nào đó và chọn hệ trục tọa độ như sau : Trục Ox là trục đường trung hòa, trục Oy là trục đối xứng, trục Oz vuông góc với mặt cắt ngang (hình 17–11). Theo giả thiết về mặt cắt ngang phẳng, với nhận xét các ô vuông sau khi biến dạng vẫn vuông. Ta có thể nói rằng trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất pháp, không có ứng suất tiếp. Vì nếu có ứng suất tiếp thì dưới tác dụng của nó mặt cắt ngang sẽ vênh đi và các ô vuông sẽ không giữ nguyên góc vuông nữa. Theo giả thiết về thớ dọc thì $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Như vậy tại một điểm nào đó trên mặt cắt ngang là trạng thái ứng suất đơn. Sự liên hệ giữa ứng suất pháp σ_z và biến dạng dài ε_z theo định luật Húc có dạng :

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \tag{a}$$

Nếu biết được biến dạng, chúng ta dễ dàng tìm được sự phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang. Muốn vậy ta xét một đoạn dầm dz được cắt bởi hai mặt cắt 1–1 và 2–2 (hình 17–12a). Sau khi biến dạng hai mặt cắt này tạo với nhau một góc dφ (hình 17–12b). Gọi ρ là bán kính cong của thớ trung hòa O_1O_2. Vì thớ trung hòa không biến dạng nên :

$$\overline{O_1O_2} = dz \Rightarrow O_1O_2 = \rho d\varphi$$

Xét biến dạng của một thớ *mn* cách thớ trung hòa một khoảng cách y. Chiều dài của thớ này trước khi biến dạng là :

$$m_on_o = dz = \rho d\varphi$$

và sau khi biến dạng :

$$mn = (\rho + y)d\varphi$$

độ dãn dài tỷ đối của thớ mn bằng :

$$\varepsilon_z = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho} \tag{b}$$

thay (b) vào (a) ta được :

$$\sigma_z = E\frac{y}{\rho} \tag{17–2}$$

Tại một mặt cắt ngang bán kính ρ có trị số xác định, E là một hằng số. Vậy quy luật phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang là phẳng (hình 17–13a). Giao tuyến của mặt phẳng ứng suất với mặt cắt chính là trục trung hòa. Rõ ràng ứng suất pháp trên các đường thẳng song song với trục trung hòa có trị số như nhau. Do đó ta có thể vẽ biểu đồ phân bố ứng suất pháp đơn giản như trên hình 17–13b. Qua biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang ta thấy :

– Trên mặt cắt ngang chia làm hai miền : một miền chịu kéo và miền kia chịu nén.

– Các điểm có trị số ứng suất pháp lớn nhất là các điểm xa trục trung hòa nhất (hình 17–13b).

17.3.3. Biểu thức liên hệ giữa ứng suất pháp với thành phần mô men uốn nội lực

Xét mặt cắt ngang có mô men uốn M_x, theo (14–4) ta có :

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF \qquad \text{(a)}$$

Thay giá trị σ_z từ (17–2) vào (a) ta có quan hệ :

$$M_x = \int_F \frac{E}{\rho} y^2 dF$$

hoặc

$$M_x = \frac{E}{\rho} I_x \quad \text{hay} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \qquad \text{(17–3)}$$

Trong đó $I_x = \int_F y^2 dF$ là mô men quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa.

So sánh (17–2) và (17–3) ta suy ra công thức ứng suất pháp trên mặt cắt ngang như sau :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \qquad \text{(17–4)}$$

17.3.4. Vị trí trục trung hòa : Từ định nghĩa về uốn phẳng thuần túy ta suy ra trên mọi mặt cắt ngang thành phần lực dọc bằng không ($N_z = 0$). Theo (14–3) ta có

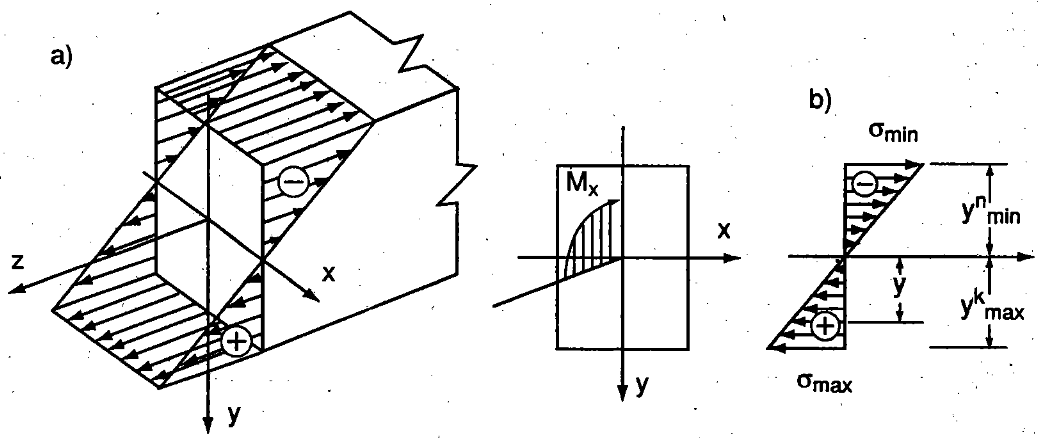
$$N_z = \int_F \sigma_z dF = 0 \qquad \text{(a)}$$

thay giá trị σ_z từ (17–2) vào biểu thức trên ta được

$$N_z = \int_F \frac{E}{\rho} y dF = 0 \quad \text{hoặc} \quad N_z = \frac{E}{\rho} S_x = 0$$

trong đó $S_x = \int_F y dF = 0$ là mô men tĩnh của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa.

Vì $E/\rho \neq 0$ nên suy ra $S_x = 0$. Vậy trục trung hòa là một trục trung tâm. Trong hệ trục tọa độ như đã chọn, trục y là một trục quán tính chính trung tâm, trùng với đường tải trọng. Khi đó trục trung hòa chính là một trục quán tính chính trung tâm thứ hai và vuông góc với đường tải trọng.



Hình 17-13

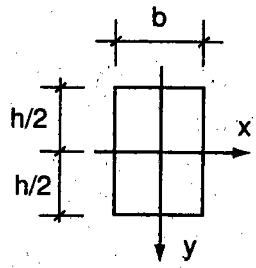
17.3.5. Ứng suất kéo và nén lớn nhất : Từ biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang ta đã có nhận xét là ứng suất pháp có trị số tuyệt đối lớn nhất tại các điểm xa nhất tính từ trục trung hòa.

Nếu trục trung hòa là một trục đối xứng, ví dụ mặt cắt ngang hình chữ nhật, hình tròn, chữ I ... thì ta thấy ứng suất kéo và ứng suất nén lớn nhất có trị số tuyệt đối bằng nhau.

Ví dụ : Mặt cắt ngang là hình chữ nhật có kích thước là b×h (hình 17–14)

$$|\sigma_z|_{max} = \frac{M_x}{W_x}$$

trong đó $$W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{2bh^3}{12h} = \frac{bh^2}{6}$$



Hình 17–14

Mặt cắt ngang là hình tròn có bán kính R :

$$|\sigma_z|_{max} = \frac{M_x}{W_x}$$

trong đó $$W_x = \frac{I_x}{R} = \frac{\pi R^4}{4R} = \frac{\pi R^3}{4} \approx 0{,}1d^3$$

Đại lượng W_x gọi là môđun chống uốn của mặt cắt ngang. Nó phụ thuộc vào hình dạng, kích thước của mặt cắt ngang và có thứ nguyên là [chiều dài]^3.

Nếu mặt cắt ngang không đối xứng qua trục trung hòa, thì ứng suất kéo lớn nhất và ứng suất nén có trị số tuyệt đối lớn nhất được xác định bởi các công thức sau :

– Ứng suất kéo lớn nhất $$\max \sigma_z^k = \frac{|M_x|}{I_x}\left|y^k\right|_{max} = \frac{|M_x|}{W_x^k}$$

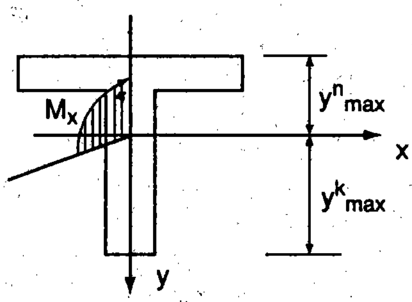
trong đó $W_x^k = \dfrac{I_x}{\left|y^k\right|_{max}}$; $\left|y^k\right|_{max}$ là tọa độ của điểm biên chịu kéo có trị số lớn nhất.

– Ứng suất nén lớn nhất về trị số tuyệt đối :

$$\max\left|\sigma_z^n\right| = \frac{|M_x|}{I_x}\left|y^n\right|_{max} = \frac{|M_x|}{W_x^n}$$

trong đó $W_x^n = \dfrac{I_x}{\left|y^n\right|_{max}}$; $\left|y^n\right|_{max}$ là tọa độ của điểm biên chịu nén có trị số tuyệt đối lớn nhất (hình 17–15).

Các đại lượng W_x^k, W_x^n là các môđun chống uốn của mặt cắt ngang trong miền kéo hoặc nén. Ta thấy, với cùng một trị số mô men uốn thì các trị số ứng suất lớn nhất trên mặt cắt ngang tỷ lệ nghịch với các trị số môđun chống uốn. Như vậy với cùng mặt cắt ngang có diện tích F, nếu mô men chống uốn càng lớn thì càng tiết kiệm vật liệu.



Hình 17–15

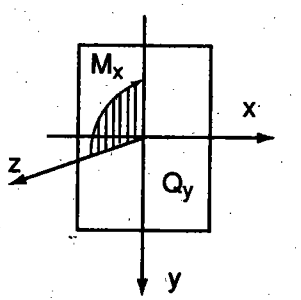
Để đánh giá mức độ tiết kiệm vật liệu của các dạng mặt cắt khác nhau, người ta đưa vào tỉ số không thứ nguyên $W_x / \sqrt{F^3}$. Tỉ số này càng lớn thì mức độ tiết kiệm vật liệu càng tốt.

Các mặt cắt ngang có tính chất làm tiết kiệm được nguyên vật liệu được gọi là các mặt cắt ngang hợp lí khi dầm chịu uốn. Việc chế tạo các thép cán định hình có mặt cắt ngang hình chữ I, hình chữ [dựa trên tính chất hợp lí này.

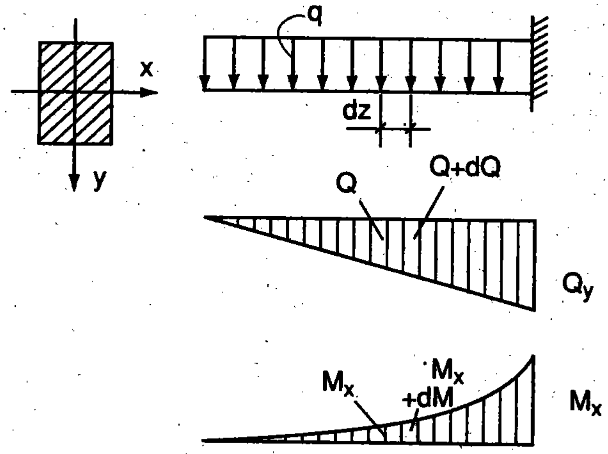
17.4. UỐN NGANG PHẲNG

17.4.1. Định nghĩa : Một dầm gọi là chịu uốn ngang phẳng khi trên mặt cắt ngang của nó có hai thành phần nội lực là lực cắt Q_y và mô men uốn M_x (hoặc Q_x và M_y).

17.4.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang : Trong uốn ngang phẳng, mặt cắt ngang có lực cắt. Lực cắt này do ứng suất tiếp tạo thành. Các ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang phân bố không đều theo chiều cao của nó. Do ảnh hưởng đó, các biến dạng góc cũng có trị số thay đổi theo chiều cao của mặt cắt ngang làm cho mặt cắt ngang sau khi bị uốn không còn phẳng nữa mà hơi bị vênh theo hình chữ S (hình 17–18c). Tuy nhiên trong trường hợp lực cắt bằng hằng số thì các mặt cắt ngang đều vênh như nhau, do đó sự vênh không có ảnh hưởng đến độ dãn hoặc độ co như đã nghiên cứu trong uốn phẳng thuần túy. Bởi vậy công thức tính ứng suất pháp (17–4) vẫn còn đúng trong trường hợp uốn ngang phẳng.



Hình 17–16



Hình 17–17

Nếu mặt cắt ngang hoặc lực cắt thay đổi theo chiều dọc trục thì công thức (17–4) sẽ có một sai số trong phạm vi bé hơn 5%, sai số đó có thể bỏ qua được.

Tóm lại ứng suất pháp trên mặt cắt ngang vẫn được tính theo công thức (17–4).

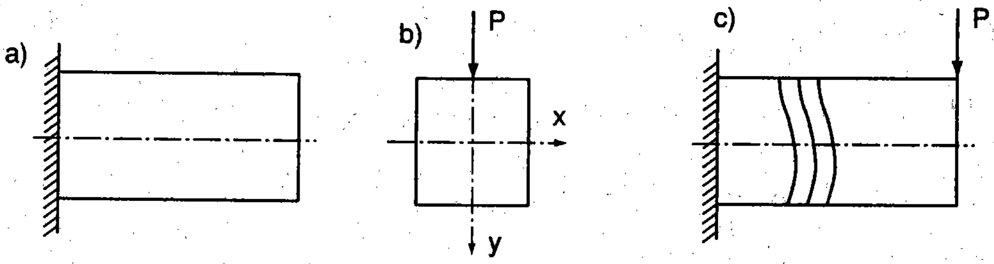
17.4.3. Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang : Trong tính toán sau này người ta thường bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất tiếp do lực cắt. Khi cần kể đến ảnh hưởng đó người ta có thể sử dụng công thức của Jurápxki dưới dạng :

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{b^c I_x} \qquad (17\text{–}5)$$

trong đó : τ_{zy} – ứng suất tiếp có phương của lực cắt Q_y ; I_x – mô men quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa ; b^c chiều rộng mặt cắt đi qua điểm tính ứng suất vuông góc với chiều của ứng suất tiếp ; S_x^c – mô men tĩnh của phần mặt cắt ngang bị cắt đối với trục trung hòa (hình 17–19) :

$$S_x^c = \int_{F^c} \xi dF$$

ξ – tung độ trọng tâm của vi phân diện tích dF.



Hình 17–18

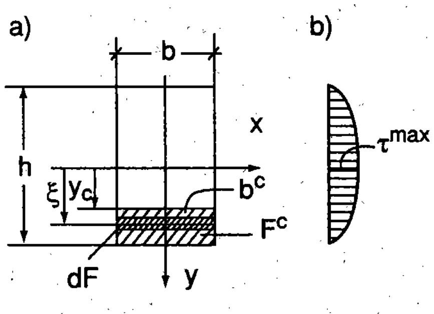
Ví dụ : Mặt cắt ngang hình chữ nhật. Theo hình 17–19a ta có :

$$S_x^c = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \quad I_x = \frac{bh^3}{12}$$

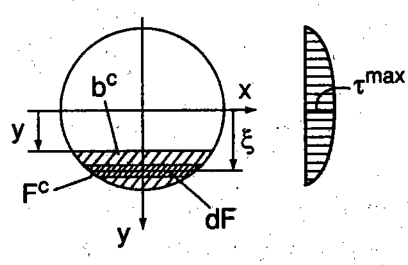
suy ra
$$\tau_{zy} = \frac{3Q_y}{2bh}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$$

Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang chữ nhật được biểu diễn trên hình (17–19b). Tại các điểm trên trục trung hòa ứng suất tiếp đạt trị số lớn nhất.

$$\tau_{max} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3Q_y}{2F}$$



Hình 17–19



Hình 17–20

Mặt cắt ngang hình tròn :

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}; \quad b_y = 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

$$S_x^c = \int_{F^c} \xi dF \quad \text{(a)}$$

Đối với trục trung hòa ta có :

$$dF = b_\xi d\xi = \sqrt{R^2 - \xi^2} d\xi \quad \text{(b)}$$

Thay (b) vào (a) ta được : $S_x^c = \int_y^R 2\xi\sqrt{R^2 - \xi^2}\, d\xi = -\int_y^R \sqrt{R^2 - \xi^2}\, d(R^2 - \xi^2)$

$$S_x^c = \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2} \quad \text{(c)}$$

Thay trị số (c) vào (17–5) sau khi rút gọn ta được :

$$\tau_{zy} = \frac{4Q_y}{3\pi R^4}(R^2 - y^2)$$

Biểu đồ ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang cho trên hình 17–20. Ứng suất tiếp tại các điểm trên trục trung hòa đạt giá trị lớn nhất.

$$\tau_{max} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} = \frac{4Q_y}{3F}$$

17.5. ĐIỀU KIỆN BỀN ĐỐI VỚI DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẲNG

17.5.1. Uốn thuần túy phẳng : Trạng thái ứng suất tại các điểm nguy hiểm của dầm chịu uốn thuần túy phẳng là trạng thái ứng suất đơn. Tương tự điều kiện bền trong bài toán kéo – nén đúng tâm, điều kiện bền ở đây được viết như sau :

– Dầm vật liệu dẻo, vì $\sigma_{ch}^k = \sigma_{ch}^n$ nên ta có :

$$|\sigma|_{max} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma] \quad \text{(17–6)}$$

– Dầm vật liệu giòn, vì $\sigma_B^k \ne \sigma_B^n$ nên ta phải viết hai điều kiện bền :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{max}^k &= \frac{M_x}{W_x^k} \le [\sigma]_k \\ |\sigma|_{max}^n &= \frac{M_x}{W_x^n} \le [\sigma]_n \end{aligned}\right\} \quad \text{(17–7)}$$

Tìm vị trí mặt cắt có ứng suất pháp lớn nhất : Nếu dầm có mặt cắt ngang không thay đổi và vật liệu của dầm là vật liệu dẻo thì lấy ở mặt cắt ngang có mô men uốn lớn nhất. Trường hợp dầm có mặt cắt ngang thay đổi ta phải lấy mặt cắt ngang có ứng suất pháp lớn nhất. Trường hợp dầm làm bằng vật liệu giòn ta phải tìm mặt cắt ngang thỏa mãn các biểu thức 17–7 (kéo và nén).

Từ điều kiện bền ta suy ra hình dáng hợp lí của mặt cắt ngang khi chịu uốn phẳng thuần túy như sau :

– Đối với dầm làm bằng vật liệu dẻo : chọn mặt cắt ngang có trục trung hòa cũng là trục đối xứng.

– Đối với dầm làm bằng vật liệu giòn. Xuất phát từ điều kiện bền (17–7) :

$$\frac{|M_x|}{I_x}\left|y^k\right|_{max} = [\sigma]_k$$

$$\frac{|M_x|}{I_x}\left|y^n\right|_{max} = [\sigma]_n$$

Chia hai vế của hai bất đẳng thức cho nhau ta được :

$$\frac{\left|y^k\right|_{max}}{\left|y^n\right|_{max}} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}$$

Vì $[\sigma]_k < [\sigma]_n$ nên $\left|y^k\right|_{max} < \left|y^n\right|_{max}$ (a)

Vậy đối với dầm làm bằng vật liệu giòn hình dáng hợp lí của mặt cắt ngang là mặt cắt không đối xứng qua trục trung hòa và phải bố trí sao cho tỉ số $|y^k|_{max}$ và $|y^n|_{max}$ thỏa mãn điều kiện (a).

Từ các điều kiện bền trên ta cũng suy ra ba bài toán cơ bản.

– Kiểm tra bền theo công thức (17–6) và (17–7).

– Chọn kích thước mặt cắt ngang thỏa mãn điều kiện :

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]} \tag{17–8}$$

– Tìm tải trọng cho phép thỏa mãn điều kiện :

$$\max M_x \leq W_x[\sigma] \tag{17–9}$$

Ví dụ 17–3 : Một dầm bằng vật liệu có ứng suất pháp cho phép khi kéo $[\sigma]_k = 3{,}5kN/cm^2$ và khi nén $[\sigma]_n = 11kN/cm^2$ chịu lực như trên hình 17–21a. Kiểm tra độ bền của dầm.

Bài giải : Trình tự

– Vẽ biểu đồ mô men uốn (hình 17–21b) cho trị số $M_x = 4{,}5kNm$.

– Tìm các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang cần thiết để tính được các giá trị : mô men quán tính chính trung tâm, các trị số $|y^k|_{max}$ và $|y^n|_{max}$.

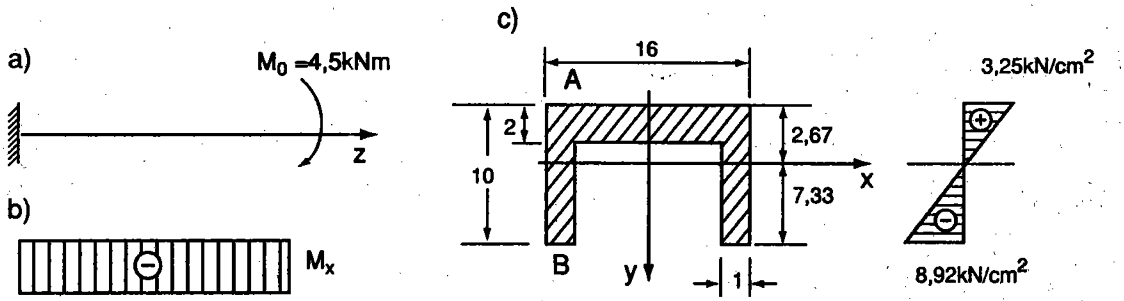
Áp dụng các công thức tính các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang ta được các trị số sau (hình 17–21c) :

$$I_x = 370cm^4 ; \quad |y^k|_{max} = 2{,}67cm ; \quad |y^n|_{max} = 7{,}33cm$$

– Tính các giá trị max $\sigma_z^{\,k}$ và max $|\sigma_z^{\,n}|$:

$$\max\sigma_z^k = \sigma_A = \frac{M_x}{W_x^k} = \frac{4,5\times 100}{370}2,67 = 3,25kN/cm^2 < [\sigma]_k = 3,5kN/cm^2$$

$$\max\sigma_z^n = \sigma_B = \frac{M_x}{W_x^n} = \frac{4,5\times 100}{370}7,33 = 8,92kN/cm^2 < [\sigma]_n = 11kN/cm^2$$

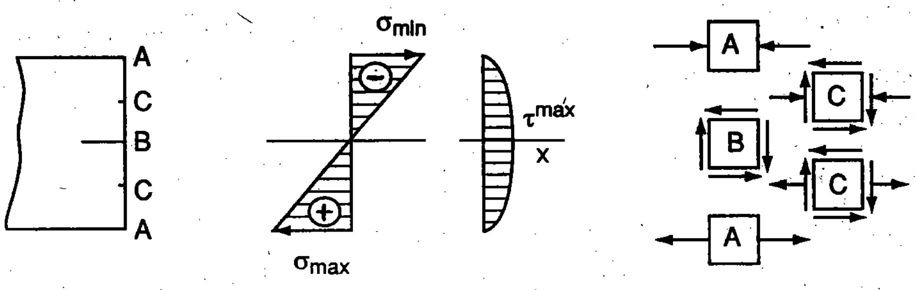


Hình 17–21

So sánh với điều kiện bền (17–7) ta thấy dầm đủ bền theo ứng suất cho phép khi kéo, (bé hơn khoảng 7,1%) và đủ bền theo ứng suất nén cho phép (bé hơn khoảng 19%). Vậy dầm đủ bền.

17.5.2. Uốn ngang phẳng : Đối với dầm chịu uốn ngang phẳng, do trên mặt cắt ngang có cả ứng suất tiếp và ứng suất pháp nên việc tìm vị trí nguy hiểm và viết điều kiện bền có phức tạp hơn. Dựa vào biểu đồ phân bố ứng suất pháp và tiếp dọc theo chiều cao, ta thấy có ba loại trạng thái ứng suất (hình 17–22).

– Ở các điểm ngoài mép, xa trục trung hòa nhất, ví dụ các điểm A, trạng thái ứng suất là đơn.



Hình 17–22

• Điều kiện bền đối với vật liệu dẻo :

$$|\sigma_z|_{max} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma] \qquad (17\text{–}10)$$

• Điều kiện bền đối với vật liệu giòn :

$$\begin{aligned} \max\sigma_z^k &= \frac{M_x}{W_x^k} \le [\sigma]_k \\ \max\sigma_z^n &= \frac{M_x}{W_x^n} \le [\sigma]_n \end{aligned} \qquad (17\text{–}11)$$

– Điểm trên trục trung hòa, ví dụ điểm B. Phân tố ở trạng thái trượt thuần túy. Điều kiện bền là :

$$\max|\tau| \le [\tau] \qquad (17\text{–}12)$$

– Những điểm có cả ứng suất tiếp và ứng suất pháp, ví dụ điểm C. Phân tố này ở trạng thái ứng suất phẳng nên để kiểm tra bền ta không thể làm như ở trạng thái ứng suất đơn. Độ bền của phân tố đang xét tương đương với độ bền của trạng thái ứng suất tương đương. Vậy điều kiện bền được viết là :

$$\max|\sigma_{tđ}| \le [\sigma] \qquad (17\text{–}13)$$

trong đó : $\sigma_{tđ}$ là ứng suất tính toán tương đương cho trạng thái ứng suất phẳng đang xét.

Để tìm quan hệ $\sigma_{tđ}$ với các ứng suất đang xét ta đưa vào các giả thuyết. Mỗi giả thuyết căn cứ vào một đại lượng cơ học nào đó để suy diễn. Người ta gọi đó là các thuyết bền, ví dụ :

Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Ứng suất tính toán tương đương của một điểm C nào đó $\sigma_{z(C)}$ và τ_C như hình 17–23c có dạng :

$$\sigma_{tđ(C)} = \sqrt{\sigma_{z(C)}^2 + 4\tau_C^2}$$

– Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng :

$$\sigma_{tđ(C)} = \sqrt{\sigma_{z(C)}^2 + 3\tau_C^2}$$

– Theo thuyết bền Mo (Mohr)

$$\sigma_{tđ(C)} = \frac{1-\alpha}{2}\sigma_{z(C)} + \frac{1+\alpha}{2}\sqrt{\sigma_{z(C)}^2 + 4\tau_C^2}$$

Hai thuyết bền đầu dùng cho loại vật liệu dẻo, thuyết bền của Mo dùng cho loại vật liệu giòn trong đó $\alpha = [\sigma]_k/[\sigma]_n$.

Thực tế do trị số của ứng suất tiếp trong trường hợp dầm chịu uốn thường rất bé so với trị số ứng suất pháp nên nó thường được bỏ qua. Do đó điều kiện bền (17–10), (17–11) gọi là điều kiện bền cơ bản khi uốn.

Khi chọn kích thước của mặt cắt ngang hoặc xác định tải trọng cho phép đối với thanh chịu uốn ngang phẳng ta phải xuất phát từ điều kiện cơ bản (17–10), (17–11). Sau khi đã chọn được kích thước mặt cắt ngang hoặc tải trọng cho phép, nếu cần thiết ta mới kiểm tra điều kiện bền về trượt thuần túy và điều kiện bền khi có cả σ_z và τ. Riêng trường hợp này người ta thường quan tâm ở các mặt cắt chữ I ứng suất pháp và ứng suất tiếp đều khá lớn và người ta cũng chỉ quan tâm khi trên biểu đồ nội lực có các mặt cắt mà tại đó trị số lực cắt và mô men uốn đều rất lớn.

Ví dụ 17–4 : Cho dầm chịu lực như trên hình 17–23. Chọn đường kính của dầm, cho hai trường hợp : dầm có mặt cắt ngang không thay đổi, dầm có ba bậc (hình 17–24). Biết $l = 80cm$, $P = 5000\,N$, $[\sigma] = 16000N/cm^2$. Bỏ qua trọng lượng bản thân.

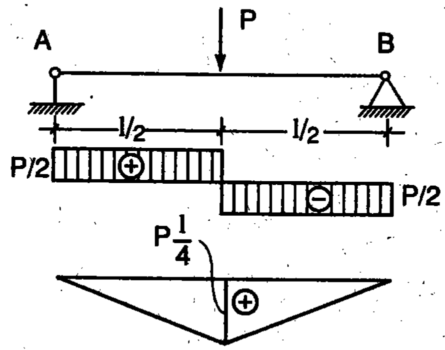
Bài giải : Dầm có mặt cắt ngang không đổi :

Theo điều kiện bền cơ bản (17–10) và công thức (17–8) ta có

$$0{,}1d^3 \geq M_{x\max}/[\sigma]$$

trong đó : $M_{x\max} = 5000 \times 80/4 = 10^5\,Ncm$

suy ra : $d \geq \sqrt[3]{\dfrac{10^5}{0{,}1 \times 16 \times 10^3}} = 4cm$



Hình 17–23

Kiểm tra lại độ bền của dầm theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất :

Trong trường hợp thanh tròn, ta đã có :

$$\max|\tau| = \frac{4Q_y}{3F} \leq [\tau]$$

trong đó : $\max Q_y = \dfrac{P}{2} = \dfrac{5000}{2} = 2500N$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 4^2}{4} = 12{,}56cm^2$$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta có :

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = \frac{16000}{2} = 8000N/cm^2$$

Vì

$$\max|\tau| = \frac{4 \times 2500}{3 \times 12{,}56} = 250N/cm^2$$

nên dầm đủ bền theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất : $250\,N/cm^2 < 8000\,N/cm^2$.

Dầm ba bậc : Trị số d_1, d_2 sẽ được xác định từ điều kiện bền của từng đoạn tương ứng.

– Đối với đoạn giữa, tương tự như trên,từ :

$$\max M_x = \frac{Pl}{4} = 5000\frac{80}{4} = 10^5\,Ncm,$$

ta xác định được $d_1 = 4cm$.

– Đối với đoạn ở hai đầu, mô men uốn lớn nhất trong mỗi đoạn này là :

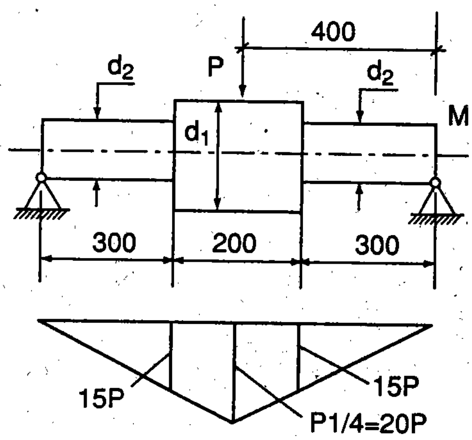
$$M_x = \frac{30P}{2} = 30\frac{5000}{2} = 75000Ncm$$

từ điều kiện bền cơ bản (17–10) ta có :

$$0{,}1d_2^3 \geq \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{75000}{16000}$$

suy ra $$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{75000}{0{,}1\times16000}} = 3{,}6cm$$

Với kích thước chọn nếu kiểm tra bền theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta thấy vẫn thỏa mãn. Ở đây ta không kiểm tra điều kiện bền theo (17–13), vì mặt cắt ngang là tròn.



Hình 17–24

17.6. ĐƯỜNG ĐÀN HỒI

17.6.1. Định nghĩa : Trục dầm sau khi bị uốn trở thành đường cong được gọi là đường đàn hồi (hình 17–25). Gọi K là một điểm nào đó trên trục dầm. Sau khi biến dạng K có vị trí K' nào đó. Độ dài KK' là chuyển vị của điểm K. Nếu chỉ xét bài toán uốn phẳng, chuyển vị đó có thể phân làm hai thành phần : thành phần theo phương y là v và thành phần theo phương z là w, còn thành phần theo phương x bằng không. Trong trường hợp biến dạng của dầm là bé rõ ràng thành phần w là lượng vô cùng bé bậc cao so với v. Vì vậy ta có thể bỏ qua thành phần w và xem vị trí của điểm K sau khi biến dạng nằm trên đường thẳng vuông góc với trục dầm đi qua K với chuyển vị là v. Chuyển vị v được gọi là độ võng của dầm tại K và nó là hàm số đối với hoành độ z của mặt cắt ngang : v(z).

Như vậy phương trình của đường đàn hồi có thể viết là :

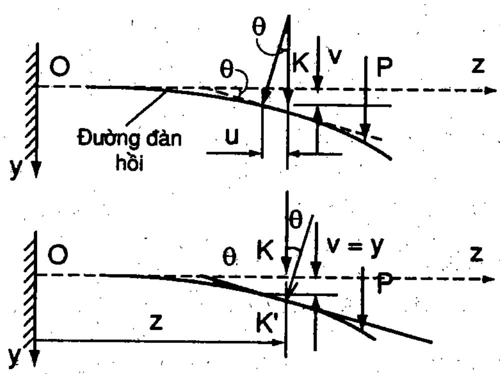
$$y(z) = v(z)$$

Bây giờ nếu từ K' ta vẽ một đường thẳng tiếp tuyến với đường đàn hồi thì góc θ giữa đường tiếp tuyến đó với đường nằm ngang (hình 17–25) bằng góc giữa các vị trí của mặt cắt ngang qua điểm K trước và sau khi dầm bị biến dạng θ được gọi là chuyển vị góc của mặt cắt hay còn gọi là góc xoay.

Ta nhận thấy :

$$\mathrm{tg}\theta \approx \theta = y'(z) \qquad (17\text{–}14)$$

Vậy góc nghiêng của đường đàn hồi với trục dầm khi chưa biến dạng bằng góc xoay của mặt cắt ngang khi dầm bị biến dạng.



Hình 17–25

Trong kĩ thuật khi tính toán dầm chịu uốn người ta khống chế để độ võng và góc xoay không vượt quá một giới hạn cho phép. Kiểm tra theo điều kiện đó gọi là tính toán theo điều kiện cứng.

17.6.2. Phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi : Độ cong của trục dầm sau khi biến dạng được tính theo (17–3) :

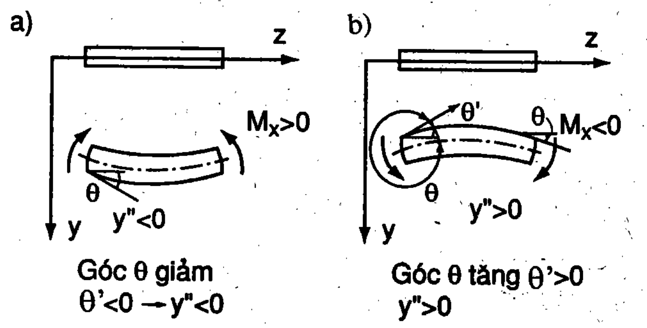
$$\frac{1}{\rho}=\frac{M_x}{EI_x}$$

Mặt khác theo giáo trình hình học giải tích ta có :

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{y''(z)}{[1+y'^2(z)]^{3/2}}$$

So sánh hai biểu thức trên ta được :

$$\frac{y''(z)}{[1+y'^2(z)]^{3/2}}=\pm\frac{M_x}{EI_x}$$



Hình 17-26

Đó là phương trình vi phân tổng quát của đường đàn hồi. Bây giờ ta phải chọn dấu trong đẳng thức trên. Ta nhận thấy các mẫu số của hai vế đều dương. Vậy chỉ cần chọn dấu của y"(z) và M_x ở tử số sao cho phù hợp.

Khảo sát một đoạn dầm bị uốn cong trong hai trường hợp như hình 17–26. Theo quy ước về hệ trục tọa độ và dấu của mô men uốn, từ hình vẽ ta thấy dấu giữa y" và M_x luôn luôn trái dấu nhau, nên phương trình vi phân tổng quát của đường đàn hồi sẽ có dạng :

$$\frac{y''(z)}{[1+y'^2(z)]^{3/2}}=-\frac{M_x}{EI_x} \qquad (17\text{–}15)$$

Trong kĩ thuật góc xoay cho phép là một đại lượng rất bé so với đơn vị, do đó ta có thể bỏ qua đại lượng y'^2 (bình phương của góc xoay). Từ đó phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng :

$$y''(z)=-\frac{M_x}{EI_x} \qquad (17\text{–}16)$$

trong đó tích số EI_x được gọi là độ cứng của dầm khi uốn.

Có nhiều phương pháp xác định đường đàn hồi hoặc độ võng, góc xoay tại mặt cắt bất kì của dầm chịu uốn. Mỗi phương pháp có những ưu và nhược điểm, tùy thuộc vào từng loại bài toán cụ thể. Trong phần này ta chỉ trình bày hai phương pháp.

17.6.3. Thiết lập phương trình vi phân đường đàn hồi bằng phương pháp tích phân không định hạn

Phương pháp vi phân đường đàn hồi (17–16) là phương trình vi phân theo biến số z. Do đó theo (17–14) phương trình của góc xoay là :

$$\theta=y'(z)=-\int\frac{M_x}{EI_x}dz+C\ .$$

và phương trình đường đàn hồi là :

$$y(z) = -\int dz \int \frac{M_x}{EI_x} dz + Cz + D$$

trong đó C và D là các hằng số tích phân, được xác định từ các điều kiện liên kết và liên tục của dầm.

Ví dụ 17–5 : Viết phương trình độ võng và góc xoay của dầm chịu lực như hình 17–27. Dầm có độ cứng EI_x không đổi.

Bài giải : Chọn hệ trục tọa độ như hình 17–27. Biểu thức mô men uốn tại mặt cắt ngang có hoành độ z là :

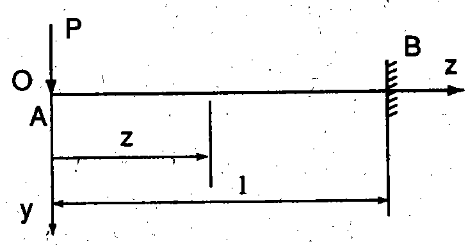
$$M_x = -Pz \qquad \text{(a)}$$

Phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi :

$$y''(z) = \frac{Pz}{EI_x} \qquad \text{(b)}$$

Phương trình góc xoay nhận được bằng cách tích phân một lần biểu thức (b) :

$$\theta(z) = y'(z) = \frac{Pz^2}{2EI_x} + C \qquad \text{(c)}$$



Hình 17–27

tích phân biểu thức (c) ta được phương trình đường đàn hồi :

$$y(z) = \frac{Pz^3}{6EI_x} + Cz + D \qquad \text{(d)}$$

Các hằng số tích phân C, D được xác định từ điều kiện sau :

Tại z = l độ võng và góc xoay đều bằng không, vì liên kết là ngàm, tức :

$$\theta(l) = y'(l) = 0, \quad y(l) = 0 \qquad \text{(e)}$$

Khi thay (e) vào (c) và (d) ta nhận được :

$$C = -\frac{Pl^2}{2EI_x}; \quad D = \frac{Pl^3}{3EI_x}$$

Cuối cùng phương trình góc xoay và độ võng có dạng :

$$\theta(z) = \frac{Pz^2}{2EI_x} - \frac{Pl^2}{2EI_x}; \quad y(z) = \frac{Pz^3}{6EI_x} - \frac{Pl^2 z}{2EI_x} + \frac{Pl^3}{3EI_x}.$$

Từ đó ta tính được độ võng và góc xoay tại đầu tự do A (z = 0) :

$$\theta_A = -\frac{Pl^2}{2EI_x}; \quad y_A = \frac{Pl^3}{3EI_x}$$

Dấu "–" trong biểu thức góc xoay chứng tỏ góc xoay tại mặt cắt A quay ngược chiều kim đồng hồ, còn dấu "+" trong biểu thức độ võng chứng tỏ độ võng hướng xuống dưới. Kết quả đó là do cách chọn hệ trục tọa độ.

17.6.4. Phương pháp đồ toán (phương pháp tải trọng giả tạo) : Quan hệ vi phân giữa lực cắt Q_y, mô men uốn M_x với tải trọng phân bố có dạng :

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y; \qquad \frac{d^2M_x}{dz^2} = q(z)$$

Rõ ràng từ cường độ tải trọng phân bố q(z) ta có thể tính được lực cắt Q_y bằng cách tích phân một lần và mô men uốn M_x bằng cách lấy tích phân hai lần. Phần trên khi tính lực cắt và mô men uốn tại các mặt cắt bất kì ta sử dụng phương pháp mặt cắt mà không dùng phương pháp lấy tích phân.

Theo phương pháp tích phân không định hạn trên, muốn tìm góc xoay ta tích phân một lần, tìm độ võng ta tích phân hai lần phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi (17–16). Ta đặt y"(z) bằng một tải trọng giả tạo mới nào đó. Kí hiệu $q_{gt} = y''(z) = -M_x/EI_x$.

Bằng phương pháp mặt cắt ta xác định được góc quay và độ võng tại một mặt cắt nào đó, tương ứng với lực cắt giả tạo và mô men uốn giả tạo tại mặt cắt đó. Có nghĩa :

+ Góc xoay là $\theta(z) = y'(z) = Q_{gt}$

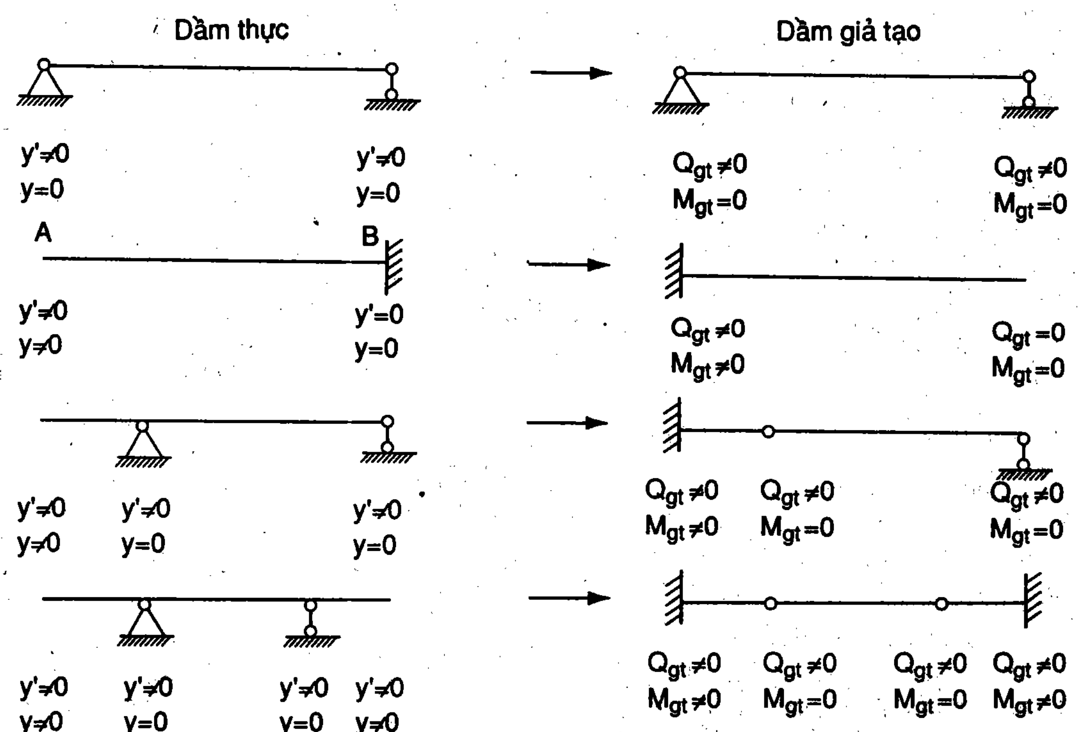
+ Độ võng là $y(z) = M_{gt}$

trong đó : Q_{gt} – lực cắt giả tạo, M_{gt} – mô men uốn giả tạo.

Nói rộng ra, đồ thị góc xoay và đường đàn hồi của dầm thực trùng với biểu đồ lực cắt giả tạo và biểu đồ mô men uốn giả tạo.

Vấn đề còn lại là tải trọng giả tạo phải đặt lên một dầm giả tạo như thế nào để đảm bảo được điều kiện trên.

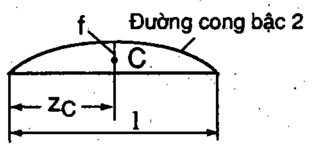
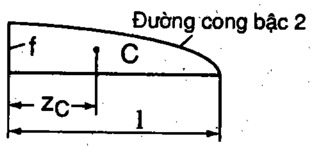
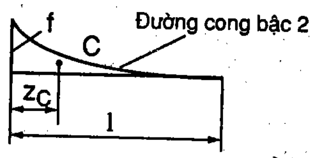
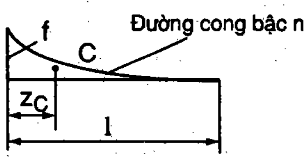
Để đồ thị độ võng và góc xoay của dầm thực phải hoàn toàn trùng với biểu đồ mô men uốn giả tạo trong dầm giả tạo thì giữa các điều kiện liên kết của dầm thực và dầm giả tạo phải có sự tương ứng (hình 17–28).



Hình 17–28

Khi xác định lực cắt giả tại và mô men uốn giả tạo, ta cần biết diện tích và trọng tâm của một số đường cong bậc hai và bậc cao. Bảng 17–2 cho diện tích và trọng tâm của một số biểu đồ.

Bảng 17–2

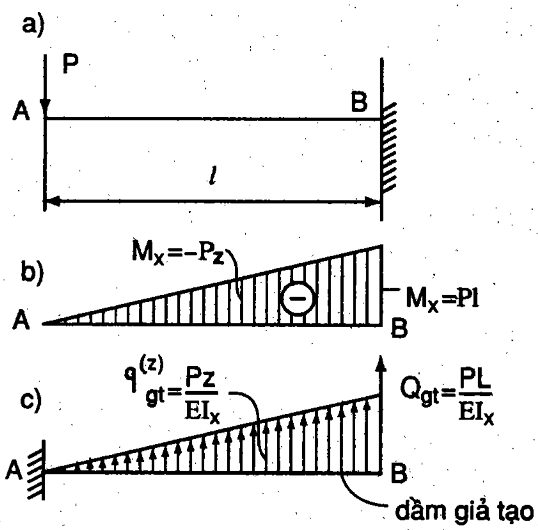
Hình	Diện tích	Tọa độ trọng tâm z_C
	$\frac{2fl}{3}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{2fl}{3}$	$\frac{3l}{8}$
	$\frac{fl}{3}$	$\frac{l}{4}$
	$\frac{fl}{n+1}$	$\frac{l}{n+2}$

Ví dụ 17–6 : Tìm độ võng và góc xoay tại đầu tự do của dầm chịu lực như hình 17–29a. Độ cứng EI_x của dầm không đổi.

Bài giải : Vẽ biểu đồ mô men uốn trên dầm thực (hình 17–29b). Chọn dầm giả tạo (hình 17–29c) sau đó đặt lực giả tạo. Vì $q_{gt} = -M_x/EI_x$, nếu M_x âm thì q_{gt} dương, với quy ước của chúng ta, chiều dương của q_{gt} hướng lên trên thì sơ đồ lực giả tạo đặt lên dầm giả tạo như hình 17–29c. Độ võng và góc xoay tại đầu A của dầm thực là trị số mô men uốn giả tạo và lực cắt giả tạo do q_{gt} gây nên trên dầm giả tạo, ta có :

$$Q_{gtA} = y'_A = -\frac{Pl}{EI_x}\frac{l}{2} = -\frac{Pl^2}{2EI_x}$$

$$M_{gtA} = y_A = \frac{Pl^2}{2EI_x}\frac{2}{3}l = \frac{Pl^3}{3EI_x}$$

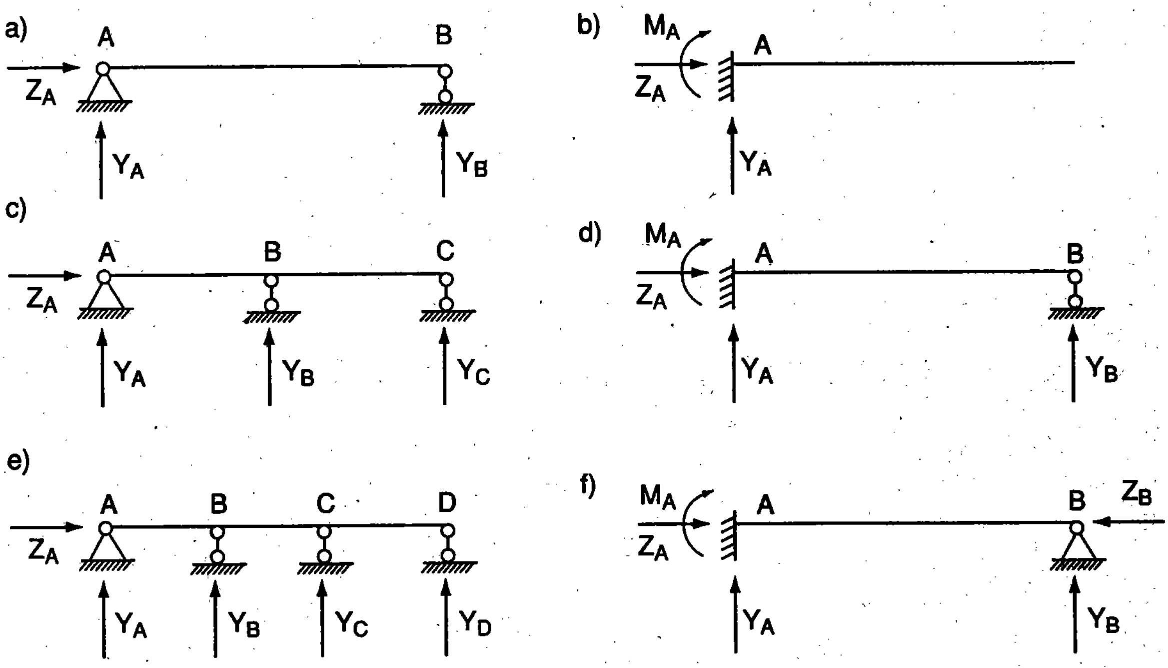


Hình 17–29

Dấu "–" chứng tỏ góc xoay ngược chiều kim đồng hồ. Dấu "+" chứng tỏ độ võng hướng xuống dưới.

17.7. DẦM SIÊU TĨNH

Dầm siêu tĩnh là dầm mà các phản lực liên kết đặt lên nó không thể xác định nhờ các phương trình cân bằng tĩnh học.



Hình 17–30

Các dầm có sơ đồ như trên các hình 17–30a, b là các dầm tĩnh định vì đối với mỗi dầm chỉ có ba thành phần phản lực ($\vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B$). Các dầm có sơ đồ như trên hình 17–30c, d là các dầm siêu tĩnh vì đối với mỗi dầm có ba phương trình cân bằng tĩnh học chứa bốn thành phần phản lực ($\vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B, \vec{Y}_C$). Bậc siêu tĩnh của các dầm này bằng $k = 4 - 3 = 1$. Các dầm có sơ đồ như trên hình 17–30e, f có bậc siêu tĩnh bằng hai vì mỗi dầm có năm thành phần phản lực được chứa trong ba phương trình cân bằng tĩnh học ($\vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B, \vec{Y}_C, \vec{Y}_D$) đối với trường hợp e) và ($\vec{Z}_A, \vec{Y}_A, \vec{M}_A, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$) đối với trường hợp f). Bậc siêu tĩnh $k = 5 - 3 = 2$.

Từ các ví dụ nêu trên ta suy ra công thức tổng quát tính bậc siêu tĩnh của một dầm như sau :

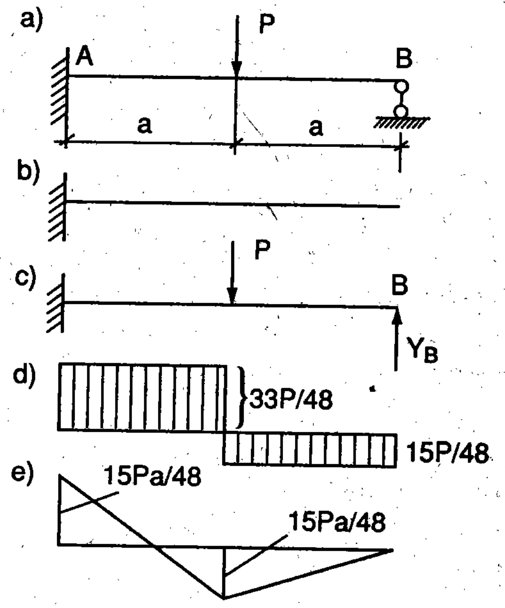
$$k = n - 3 \tag{17–17}$$

Có nhiều phương pháp giải dầm siêu tĩnh. Trong giáo trình này chỉ trình bày cách giải như đã nêu trong chương kéo – nén, xoắn. Theo phương pháp này ta bỏ bớt các liên kết của dầm siêu tĩnh cho trước để được dầm tĩnh định, không bị biến dạng hình học. Dầm này gọi là dầm cơ bản.

Trên dầm cơ bản ta đặt các tải trọng đã cho và các phản lực chưa biết của các liên kết "thừa" bỏ đi, sau đó tính điều kiện chuyển vị tại các mặt cắt đó gây nên do tải trọng đã cho và phản lực chưa biết (nếu phản lực là lực thì ta tính chuyển vị thẳng, nếu phản lực là mô men thì ta tính chuyển vị là góc xoay). Nhờ các điều kiện chuyển vị tại các mặt cắt đã bỏ liên kết thừa đó ta nhận được các phương trình xác định các phản lực chưa biết ở các liên kết thừa. Số phương trình bằng số bậc siêu tĩnh. Bằng cách như vậy ta xác định được tất cả các ngoại lực.

Công việc tiếp theo tương tự như giải bài toán ở dầm tĩnh định đã được trình bày ở trên.

Ví dụ 17–7 : Cho một dầm chịu lực như hình 17–31a. Vẽ biểu đồ mô men uốn M_x và lực cắt Q_y, biết độ cứng EI = const.



Hình 17–31

Bài giải : Đây là dầm siêu tĩnh bậc 1. Trước hết ta hãy chọn dầm cơ bản.

a) Cách chọn thứ nhất : chọn dầm cơ bản như hình 17–31b. Ta bỏ liên kết thừa tại B, phản lực liên kết là Y_B.

– Đặt tải trọng đã cho và phản lực chưa biết Y_B lên dầm cơ bản (hình 17–31c).

– Phản lực Y_B được tính từ điều kiện : chuyển vị thẳng đứng tại B trên dầm cơ bản bằng không. Ta có :

$$y_B = y_B(\vec{P}) + y_B(\vec{Y}_B) = 0 \quad \text{(a)}$$

Tính theo phương pháp đồ toán ta có :

$$y_B(P) = \frac{5Pa^3}{6EI} \quad \text{(b)}$$

$$y_B(\vec{Y}_B) = -\frac{8Y_Ba^3}{3EI} \quad \text{(c)}$$

thay (b), (c) vào (a) ta được :

$$\frac{5Pa^3}{6EI} - \frac{8Y_Ba^3}{3EI} = 0 \quad \text{suy ra} \quad Y_B = \frac{5}{16}P$$

Biểu đồ lực cắt Q và mô men M được vẽ trên hình 17–31d, e.

b) Cách chọn thứ hai : Chọn dầm cơ bản như hình 17–32b. Ta thay ngàm A bằng gối tựa cố định, do đó tại A sẽ có một phản lực M_A chưa biết. Phản lực này được xác định nhờ điều kiện góc xoay tại A do lực tác dụng P và mô men phản lực M_A gây ra là bằng không. Điều kiện góc xoay tại ngàm A bằng không, ta có :

$$\theta_A = \theta_A(P) + \theta_A(M_A) = 0 \quad \text{(a)}$$

Theo phương pháp đồ toán ta có :

$$\theta_A(P) = \frac{Pa^2}{4EI} \qquad (b)$$

$$\theta_A(M_A) = \frac{2M_A a}{3EI} \qquad (c)$$

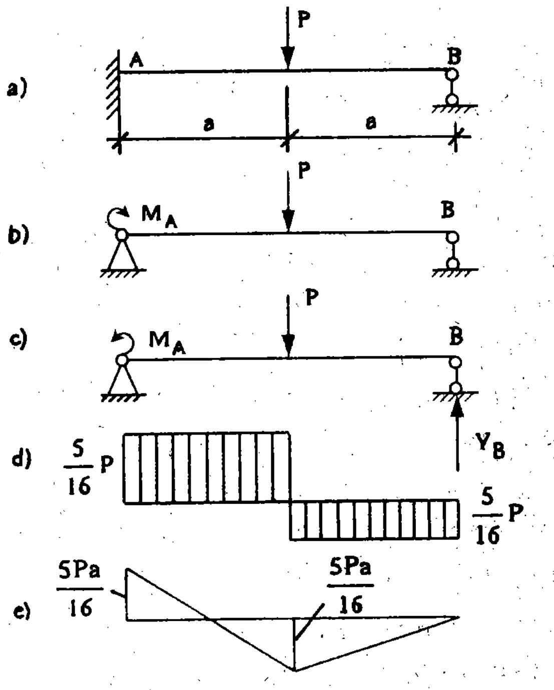
Thay (b) và (c) vào (a), ta được :

$$\frac{Pa^2}{4EI} + \frac{2M_A a}{3EI} = 0$$

suy ra $$M_A = -\frac{3Pa}{8}.$$

Dấu (–) chứng tỏ mô men phản lực M_A có chiều ngược lại so với chiều chọn ở trên (hình 17–32b). Biểu đồ lực cắt và mô men uốn được vẽ trên hình 17–32d, e.

Qua ví dụ trên ta thấy ứng với một dầm siêu tĩnh có thể chọn nhiều dầm cơ bản. Dầm cơ bản nào giúp tính toán nhanh chóng, đơn giản nhất được gọi là dầm cơ bản hợp lí.



Hình 17–32

Chương 18

THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP

Khi trên mặt cắt ngang của thanh xuất hiện nhiều thành phần nội lực, ta gọi thanh đó là thanh chịu lực phức tạp. Để thiết lập các công thức về ứng suất, biến dạng ta sẽ áp dụng "nguyên lí cộng tác dụng" đó là : ứng suất, biến dạng do nhiều yếu tố gây ra đồng thời trên một thanh bằng tổng ứng suất hay biến dạng do từng yếu tố một gây ra trên thanh đó.

Trong bài toán về chịu lực phức tạp, ảnh hưởng của lực cắt đến độ bền thường là nhỏ ta có thể bỏ qua, nên không đề cập trong chương này. Khi cần kể đến ảnh hưởng của nó ta vẫn sử dụng theo nguyên lí cộng tác dụng.

Trong thực tế ta thường gặp một số bài toán chịu lực tác dụng sau :

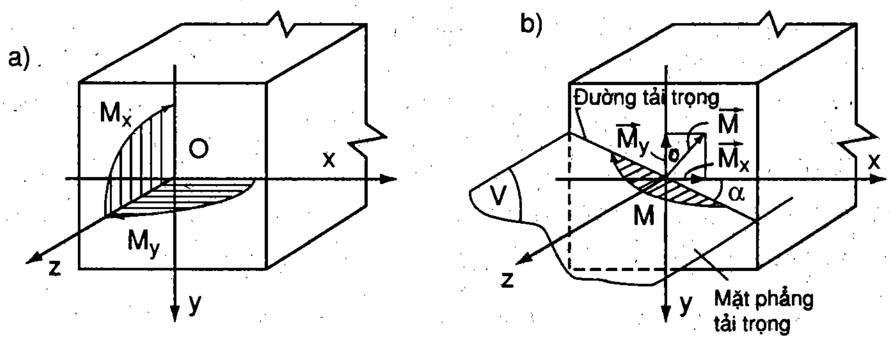
18.1. THANH CHỊU UỐN XIÊN

18.1.1. Định nghĩa : Một thanh gọi là chịu uốn xiên khi trên mặt cắt ngang có hai thành phần nội lực là M_x và M_y nằm trong các mặt phẳng quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang (hình 18–1). Khi chú ý đến lực cắt trên mặt cắt ngang có thể có các thành phần nội lực M_x, Q_y, M_y và Q_x.

Gọi $\vec{M}$ là vectơ tổng của các vectơ $\vec{M}_x$, $\vec{M}_y$, ta có :

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Mô men uốn M nằm trong mặt phẳng V, chứa trục z, nhưng không trùng với một mặt phẳng quán tính chính trung tâm nào. Giao tuyến của mặt phẳng này với mặt phẳng cắt ngang gọi là đường tải trọng. Trong uốn xiên đường tải trọng đi qua trọng tâm nhưng không trùng với một trục quán tính chính trung tâm nào (hình 18–1b).



Hình 18–1

18.1.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang : Theo nguyên lí cộng tác dụng, ứng suất pháp tại một điểm bất kì trên mặt cắt ngang có tọa độ x, y được tính theo công thức :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \qquad (18\text{–}1)$$

trong đó quy ước : M_x được coi là dương khi làm căng phần chiều dương của trục y và M_y được coi là dương khi làm căng phần chiều dương của trục x.

Trong kĩ thuật người ta dùng công thức sau để không cần chú ý đến dấu của M_x, M_y, tọa độ x, y.

$$\sigma_z = \pm\frac{|M_x|}{I_x}|y| \pm \frac{|M_y|}{I_y}|x| \qquad (18\text{–}2)$$

Trong đó các giá trị đều lấy trị số tuyệt đối. Còn lấy dấu "+" hoặc dấu "–" trước mỗi số hạng tùy theo các mô men uốn M_x và M_y gây ra ứng suất kéo hay nén ở điểm đang xét.

Nếu gọi α là góc của đường tải trọng hợp với trục x (hình 18–1b) thì phương của đường tải trọng được xác định theo công thức :

$$tg\alpha = \frac{M_x}{M_y}$$

suy ra $M_x = M\sin\alpha$; $M_y = M\cos\alpha$

Góc α được gọi là dương khi quay từ chiều dương trục x đến chiều dương trục y gặp đường tải trọng.

18.1.3. Vị trí đường trung hòa : Từ (18–1) phương trình đường trung hòa là :

$$\frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x = 0 \qquad (18\text{–}3)$$

hay

$$y = x\,tg\beta \qquad (18\text{–}4)$$

Trong đó $tg\beta = -\frac{M_y}{M_x}\frac{I_x}{I_y}$ hay $tg\beta = -\frac{1}{tg\alpha}\frac{I_x}{I_y}$ (18–5)

Vậy đường trung hòa là một đường thẳng đi qua trọng tâm của mặt cắt ngang và không vuông góc với đường tải trọng như trong uốn phẳng. Từ biểu thức (18–5) ta rút ra một nhận xét là đối với các mặt cắt ngang có vô số hệ trục quán tính chính trung tâm như hình tròn, các đa giác đều cạnh... thì không xảy ra hiện tượng uốn xiên phẳng. Vì khi đó đường tải trọng sẽ trùng với một trục quán tính chính trung tâm, còn đường trung hòa sẽ trùng với một trục quán tính chính trung tâm thứ hai vuông góc với đường tải trọng, đối với các hình này $I_x = I_y$ nên $tg\alpha tg\beta = -1$. Bài toán khi đó chỉ là uốn phẳng.

18.1.4. Biểu đồ ứng suất pháp trên mặt cắt ngang : Theo (18–1) mặt ứng suất là mặt phẳng, nên ứng suất pháp phân bố đều trên đường thẳng song song với đường trung hòa. Do đó ta có thể vẽ biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang trong hệ tọa độ như hình 18–2. Trục tung là đường trung hòa, trục hoành vuông góc với đường trung hòa.

18.1.5. Điều kiện bền : Từ biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang ta thấy điểm nguy hiểm là các điểm xa đường trung hòa nhất về phía kéo hoặc phía nén. Trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm là trạng thái ứng suất đơn. Vậy điều kiện bền có dạng :

– Đối với vật liệu dẻo :

$$|\sigma|_{max} \leq [\sigma] \qquad (18\text{–}6)$$

– Đối với vật liệu giòn :

$$|\sigma|_{max} \leq [\sigma]_k \qquad (18\text{–}7)$$

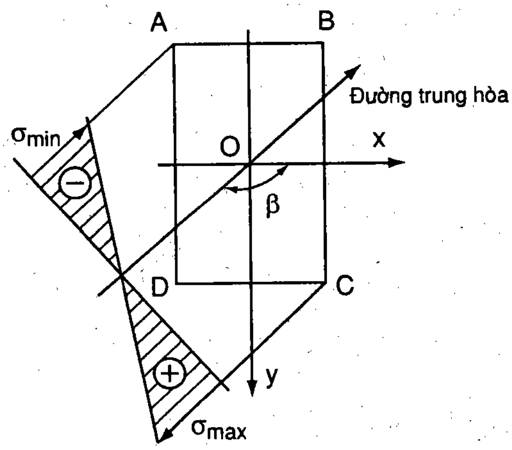
$$|\sigma|_{min} \leq [\sigma]_n \qquad (18\text{–}8)$$

trong đó :

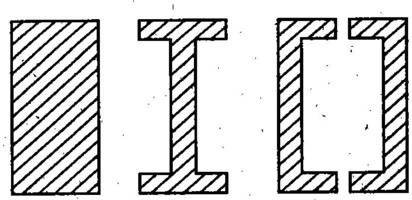
$$\sigma_{max} = \frac{|M_x|}{I_x}|y_k| + \frac{|M_y|}{I_y}|x_k| \qquad (18\text{–}9)$$

$$\sigma_{min} = -\left[\frac{|M_x|}{I_x}|y_n| + \frac{|M_y|}{I_y}|x_n|\right] \qquad (18\text{–}10)$$

x_k, y_k là tọa độ của điểm chịu kéo cách xa đường trung hòa nhất ; x_n, y_n là tọa độ của điểm chịu nén cách xa đường trung hòa nhất.



Hình 18–2



Hình 18–3

Nếu mặt cắt ngang của thanh là những mặt cắt có thể nội tiếp trong hình chữ nhật có dạng như trên hình 18–3 thì :

$$|x_k| = |x_n| = x_{max}\text{, khi đó : } |y_k| = |y_n| = y_{max}$$

$$\sigma_{max} = |\sigma_{min}|$$

$$\sigma_{max} = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \qquad (18\text{–}11)$$

trong đó :

$$W_x = \frac{I_x}{|y_{max}|}\ ; \qquad W_y = \frac{I_y}{|x_{max}|} \qquad (18\text{–}12)$$

Trường hợp này điều kiện bền sẽ là :

– Đối với vật liệu dẻo :

$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma] \qquad (18-13)$$

– Đối với vật liệu giòn :

$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]_k \qquad (18-14)$$

Từ điều kiện bền trên ta suy ra ba bài toán cơ bản sau :

– Kiểm tra bền theo (18–7) hoặc (18–8) hoặc (18–9).

– Tìm tải trọng cho phép. Gọi $[P_i]$ là tải trọng suy rộng cho phép (tải trọng tập trung, tải trọng phân bố, mô men tập trung hay mô men phân bố), thì tại mặt cắt nguy hiểm ta có :

$$M_x = k_1 [P_i] ; \qquad M_y = k_2 [P_i]$$

k_1, k_2 là các hằng số. Từ điều kiện bền, ví dụ theo (18 –13) ta suy ra :

$$\frac{k_1[P_i]}{W_x} + \frac{k_2[P_i]}{W_y} \leq [\sigma]$$

hay

$$[P_i] \leq \frac{[\sigma]}{\frac{k_1}{W_x} + \frac{k_2}{W_y}} \qquad (18-15)$$

– Chọn kích thước mặt cắt ngang.

Vì chưa biết trị số I_x, I_y, x_k, x_n, y_k, y_n nên đầu tiên ta có thể chọn thử bằng cách tính theo uốn phẳng do thành phần mô men đòi hỏi kích thước lớn sau đó thử dần.

Đối với các mặt cắt nội tiếp được trong hình chữ nhật (hình 18–3), đầu tiên ta có thể tính theo công thức :

$$W_x \geq \frac{M_x + CM_y}{[\sigma]} \qquad (18-16)$$

trong đó :

$$C = \frac{W_x}{W_y} \qquad (18-17)$$

Đối với hình chữ nhật có chiều cao h và bề rộng b thì C = h/b.

Đối với mặt cắt hình chữ I lúc đầu có thể lấy C = 8, và hình chữ U lấy C = 6 ; sau đó kiểm tra tính toán lại.

Ví dụ 18 – 2 : Cho dầm chịu lực như hình 18–4a. Xác định số hiệu mặt cắt dầm thép chữ **I**, vị trí đường trung hòa. Cho $P = 2400N$; $q = 4000N/m$; $l = 2m$; $\alpha = 30^o$; $[\sigma] = 16000N/cm^2$.

Bài giải : Mặt cắt nguy hiểm tại ngàm có :

$$M_x = \frac{ql^2}{2} + Pl\cos\alpha$$

$$= \frac{4000 \times 4}{2} + 2400 \times 2 \times 0,866 = 12160\ Nm$$

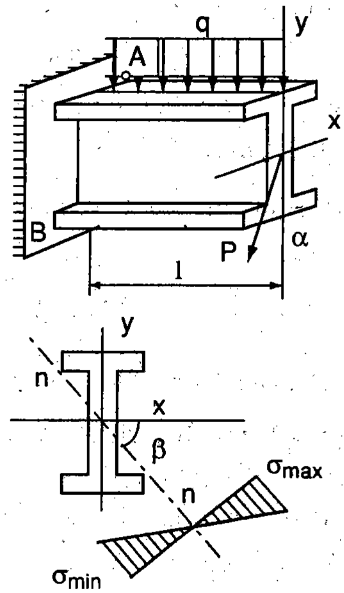
$$M_y = Pl\sin\alpha = 2400 \times 2 \times 0,5 = 2400 Nm$$

Thử lần thứ nhất ta lấy C = 8.

Theo công thức (18–16) :

$$W_x \geq \frac{M_x + CM_y}{[\sigma]} = \frac{12160 + 8 \times 2400}{16000}100 = 196 cm^3$$

Ta chọn mặt cắt chữ **I** số 20 có các trị số nhỏ hơn và gần nhất $W_x = 184cm^3$; $W_y = 23,1cm^3$.



Hình 18–4

Thử lại :

$$\sigma_{max} = -\sigma_{min}\ ;\ \sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{1216000}{184} + \frac{240000}{23,1} = 17000 N/cm^2$$

Vì $$\frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]}100 = \frac{17000 - 16000}{16000}100 = 6,2\% > 5\%$$

do đó ta lấy mặt cắt số 20a có $W_x = 203cm^3$, $W_y = 28,2cm^3$

Khi đó $$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{1216000}{203} + \frac{240000}{28,2} = 14500 N/cm^2$$

ứng suất nhỏ hơn :

$$\frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]}100 = \frac{14500 - 16000}{16000}100 = -9,4\%$$

Vì giữa thép có số hiệu 20 và 20a không còn số hiệu nào khác nên ta chọn dầm thép có số hiệu 20a.

Xác định vị trí đường trung hòa. Tra bảng với **I** (20a) ta có $I_x = 2030cm^4$; $I_y = 155cm^4$. Do đó tại mặt cắt ngàm, phương của đường trung hòa là :

$$tg\beta = \frac{I_x M_{y\,max}}{I_y M_{x\,max}} = \frac{2030 \times 2400}{155 \times 12160} = +2,58 \text{ hay } \beta = +68^o50$$

18.1.6. Độ võng và góc xoay : Độ võng và góc xoay tổng hợp của mặt cắt nào đó bằng tổng hình học độ võng và góc xoay do các thành phần mô men uốn tác dụng trong các mặt phẳng quán tính chính trung tâm của dầm, ta có :

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \qquad (18–18)$$

$$\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2} \qquad (18–19)$$

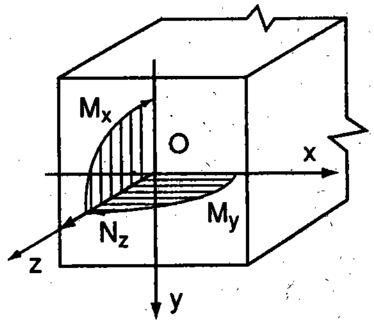
trong đó : f_x, f_y là độ võng theo phương trục x do M_y gây nên và theo phương trục y do M_x gây nên, θ_x và θ_y là góc xoay của mặt cắt xoay quanh trục x do M_y gây nên và xoay quanh trục y do M_x gây nên.

Phương của độ võng tổng hợp f so với trục tại một mặt cắt là :

$$tg\beta = \frac{f_y}{f_x} \qquad (18\text{–}20)$$

18.2. UỐN VÀ KÉO – NÉN ĐỒNG THỜI

18.2.1. Định nghĩa : Một thanh được gọi là chịu uốn và kéo – nén đồng thời khi trên mặt cắt ngang của thanh có các thành phần nội lực là lực dọc N_z, mô men uốn M_x, M_y. Nếu kể đến lực cắt do uốn thì trên mặt cắt có N_z, Q_y, M_x, M_y, Q_z (hình 18–5).



Hình 18–5

18.2.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang : Ứng suất pháp tại một điểm trên mặt cắt ngang được xác định theo công thức :

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x \qquad (18\text{–}21)$$

hoặc

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F}\left(1 + \frac{M_x}{N_z i_x^2}y + \frac{M_y}{N_z i_y^2}x\right) \qquad (18\text{–}22)$$

trong đó : F – diện tích mặt cắt ngang ; i_x, i_y – bán kính quán tính chính $i_x = \sqrt{I_x/F}$; $i_y = \sqrt{I_y/F}$; I_x, I_y – mô men quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang, x và y – tọa độ của điểm tính ứng suất.

Dấu của N_z theo quy ước của chương kéo – nén đúng tâm. Dấu của M_x, M_y được quy ước như trong uốn xiên.

Công thức kĩ thuật có dạng :

$$\sigma_z = \pm\frac{|N_z|}{F} \pm \frac{|M_x|}{I_x}|y| \pm \frac{|M_y|}{I_y}|x| \qquad (18\text{–}23)$$

trong đó các giá trị đều lấy giá trị tuyệt đối. Còn lấy dấu "+" hoặc "–" trước mỗi số hạng tùy theo lực dọc là kéo hay nén và các mô men uốn M_x và M_y gây ra ứng suất kéo hay nén ở điểm đang xét.

18.2.3. Vị trí đường trung hòa : Từ (18–21) ta suy ra phương trình đường trung hòa là :

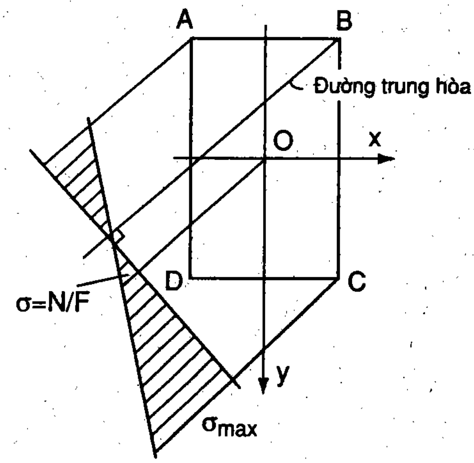
$$\frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x = 0 \qquad (18\text{–}24)$$

hay theo (18–22) :

$$1+\frac{M_x}{N_z i_x^2}y+\frac{M_y}{N_z i_y^2}x=0 \tag{18–25}$$

Đường trung hòa là một đường thẳng không đi qua trọng tâm của mặt cắt ngang như trong uốn xiên.

18.2.4. Biểu đồ ứng suất pháp trên mặt cắt ngang : Tương tự như trong uốn xiên do mặt cắt ứng suất là phẳng, nên ứng suất pháp phân bố đều trên đường thẳng song song với đường trung hòa. Biểu đồ phân bố ứng suất được vẽ như trên hình 18–6.



Hình 18–6

18.2.5. Điều kiện bền : Từ biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang, ta thấy điểm nguy hiểm là các điểm ở chu vi, xa đường trung hòa nhất về phía kéo hoặc phía nén. Trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm là trạng thái ứng suất đơn. Vậy điều kiện bền là :

– Đối với vật liệu dẻo :

$$|\sigma|_{max} \le [\sigma] \tag{18–26}$$

– Đối với vật liệu giòn :

$$|\sigma|_{max} \le [\sigma]_k$$

$$|\sigma|_{min} \le [\sigma]_n \tag{18–27}$$

trong đó :

$$\sigma_{max} = \pm\frac{|N_z|}{F}+\frac{|M_x|}{I_x}|y|+\frac{|M_y|}{I_y}|x| \tag{18–28}$$

$$\sigma_{min} = \pm\frac{|N_z|}{F}-\frac{|M_x|}{I_x}|y|-\frac{|M_y|}{I_y}|x| \tag{18–29}$$

x_k, y_k là tọa độ của điểm chịu kéo cách xa đường trung hòa nhất.

x_n, y_n là tọa độ của điểm chịu nén cách xa đường trung hòa nhất.

Nếu mặt cắt ngang của thanh có dạng như trên hình 18–3 thì lí luận tương tự như trong uốn xiên ta có :

$$\sigma_{max} = \pm\frac{|N_z|}{F}+\frac{|M_x|}{W_x}+\frac{|M_y|}{W_y} \tag{18–30}$$

$$\sigma_{min} = \pm\frac{|N_z|}{F}-\frac{|M_x|}{W_x}-\frac{|M_y|}{W_y} \tag{18–31}$$

Ví dụ 18 – 4 : Cho một thanh chịu lực như hình 18–7a. Tìm giá trị ứng suất σ_{max} và σ_{min}, vị trí đường trung hòa và vẽ biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt nguy hiểm. Cho : $P_1 = 160kN$; $P_2 = 4kN$; $P_o = 240kN$; $q = 2kN/m$; $l = 2m$; $b = 12cm$; $h = 16cm$.

Bài giải : Mặt cắt nguy hiểm tại đầu ngàm. Tại đó các nội lực là :

Lực dọc : $N_z = -P_o - P_1 = -(240+160) = -400kN.$

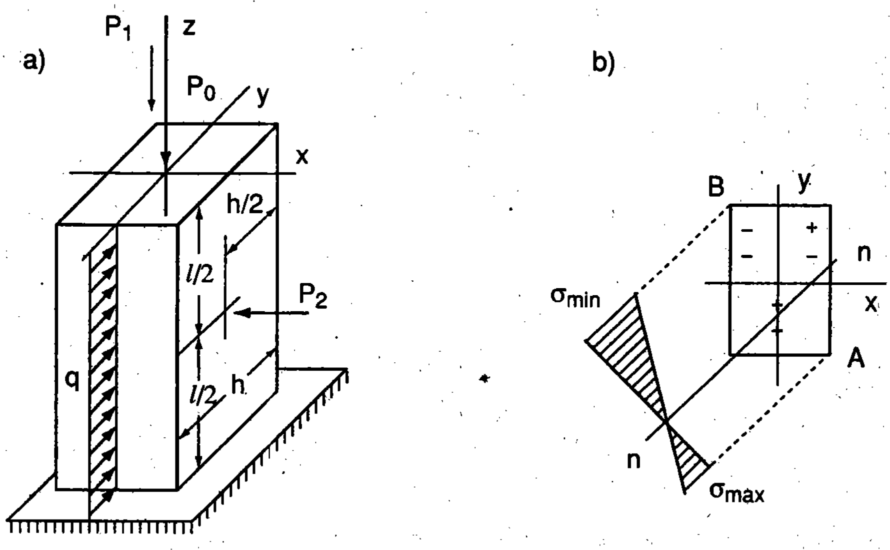
Mômen uốn : $$|M_x| = \frac{P_1 h}{2} + \frac{ql^2}{2} = 160\times 8 + \frac{2\times 4\times 10^4}{100\times 2} = 1680\,kNcm$$

$$|M_y| = \frac{P_1 b}{2} + \frac{P_2 l}{2} = 160\times 6 + 4\times 10^2 = 1360\,kNcm$$

Giá trị ứng suất pháp lớn nhất và bé nhất theo (18–28), (18–29) là :

$$\sigma_{max} = -\frac{|N_z|}{F} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} = -\frac{400}{12\times 16} + \frac{1680\times 6}{12\times 6^2} + \frac{1360\times 6}{16\times 12^2} = 4{,}75\,kNcm$$

$$\sigma_{min} = -\frac{|N_z|}{F} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} = -\frac{400}{12\times 16} - \frac{1680\times 6}{12\times 6^2} - \frac{1360\times 6}{16\times 12^2} = -8{,}91\,kNcm$$



Hình 18–7

Vị trí đường trung hòa : Theo (18–25) đường trung hòa cắt trục x và trục y tại các điểm :

$$x_o = -\frac{N_z i_y^2}{M_y}\ ; \quad y_o = -\frac{N_z i_x^2}{M_x}$$

trong đó $$i_x^2 = \frac{h^2}{12} = 21{,}3\ cm^2\ ; \quad i_y^2 = \frac{b^2}{12} = 12\ cm^2$$

$$N_z < 0\ ; \quad M_x > 0\ ; \quad M_y > 0$$

Khi thay bằng số ta được :

$$x_o = 3{,}53\ cm\ ; \qquad y_o = 5{,}07\ cm$$

Vị trí đường trung hòa và biểu đồ ứng suất pháp được vẽ trên hình 18–7b.

18.3. KÉO – NÉN LỆCH TÂM

18.3.1. Định nghĩa : Kéo – nén lệch tâm là trường hợp ngoại lực có phương song song với trục thanh, nhưng điểm đặt ở ngoài trọng tâm mặt cắt ngang (hình 18–8).

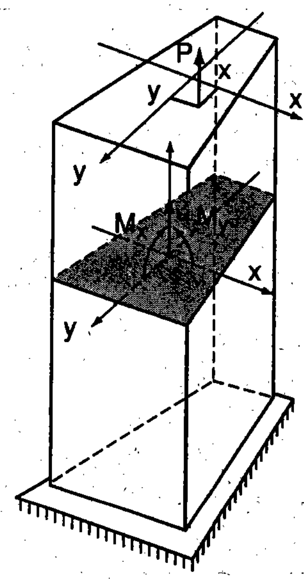
Trong trường hợp tổng quát khi tải trọng đặt lệch tâm, thanh hình lăng trụ sẽ chịu lực kéo hoặc nén và uốn xiên thuần túy. Nội lực trên mặt cắt ngang thu gọn thành lực dọc có trị số :

$$N_z = P$$

Mô men uốn $\quad M_x = Py_p\ ; M_y = Px_p \qquad (18\text{–}32)$

trong đó : x_p, y_p là tọa độ của điểm đặt lực P trong hệ trục quán tính chính trung tâm.

Về phương diện tính toán ứng suất, ta thấy bài toán kéo – nén lệch tâm chỉ là một trường hợp của uốn và kéo – nén đồng thời. Do đó các kết quả nhận được từ trường hợp uốn và kéo – nén đồng thời đều được áp dụng ở đây (hình 18–8).



Hình 18-8

18.3.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang : Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang có giá trị :

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x \qquad (18\text{–}33)$$

Thay giá trị M_x, M_y theo (18–32) ta được :

$$\sigma_z = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{x_p x}{i_y^2} + \frac{y_p y}{i_x^2}\right) \qquad (18\text{–}34)$$

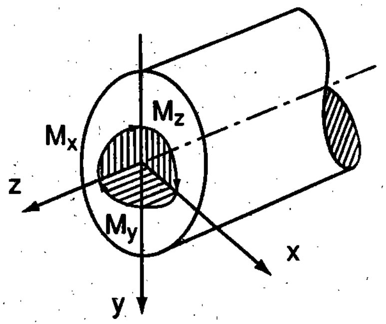
18.3.3. Phương trình đường trung hòa

$$1 + \frac{x_p x}{i_y^2} + \frac{y_p y}{i_x^2} = 0 \qquad (18\text{–}35)$$

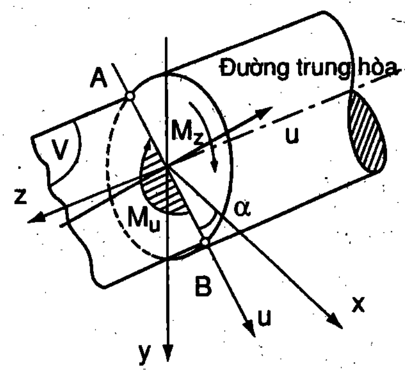
Từ tính chất đường trung hòa có thể nằm ngoài mặt cắt ngang, ta luôn tìm được một diện tích có chứa trọng tâm, sao cho lực đặt trong diện tích đó thì mặt cắt ngang chỉ chịu lực kéo hoặc chỉ chịu nén. Diện tích đó được gọi là lõi của mặt cắt (lõi tiết diện).

18.4. XOẮN VÀ UỐN ĐỒNG THỜI

18.4.1. Định nghĩa : Một thanh gọi là xoắn và uốn đồng thời. Khi trên mặt cắt ngang của thanh có hai thành phần nội lực là mô men xoắn và mô men uốn (khi kể đến ảnh hưởng của lực cắt Q do uốn thì có thêm thành phần lực cắt) (hình 18–9).



Hình 18–9



Hình 18–10

18.4.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang tròn : Trên mặt cắt ngang của thanh có hai thành phần ứng suất :

Ứng suất pháp do mô men gây nên như trường hợp uốn phẳng hoặc uốn xiên, và ứng suất tiếp do mô men xoắn gây nên phân bố như trường hợp xoắn thuần túy (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt Q).

18.4.3. Điều kiện bền : Điểm nguy hiểm trên mặt cắt nguy hiểm là giao điểm của đường tải trọng với chu vi : điểm A hoặc B (hình 18–10). Tại đó ứng suất pháp và tiếp có giá trị :

$$\sigma_{max} = \frac{M_u}{W_u} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_u} \qquad (18–36)$$

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p} \qquad (18–37)$$

Vì phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng nên điều kiện bền có dạng :

$$\sigma_{tđmax} \le [\sigma] \qquad (18–38)$$

trong đó ứng suất tương đương được tính theo một thuyết bền thích hợp. Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta có :

$\sigma_{tđ} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ thay các giá trị của σ và τ theo (18–36), (18–37) và chú ý $W_p = 2W_u$, ta có :

$$\sigma_{max} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_u} = \frac{M_{tđ}}{W_u}$$

với $$M_{tđ} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \qquad (18–39)$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng :

$$\sigma_{max} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0{,}75M_z^2}}{W_u} = \frac{M_{tđ}}{W_u}$$

với
$$M_{tđ} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0{,}75M_z^2} \qquad (18\text{–}40)$$

Theo thuyết bền Mo ta có :

$$\sigma_{tđ} = \frac{1-\alpha}{2}\sigma + \frac{1+\alpha}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

hay
$$\sigma_{max} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+\alpha}{2}\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}\right)\frac{1}{W_u} = \frac{M_{tđ}}{W_u}$$

với
$$M_{tđ} = \frac{1-\alpha}{2}\sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+\alpha}{2}\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \qquad (18\text{–}41)$$

$$\alpha = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}$$

Tóm lại điều kiện bền được viết gọn dưới dạng :

$$\sigma_{tđ} = \frac{M_{tđ}}{W_u} \le [\sigma] \qquad (18\text{–}42)$$

trong đó $W_u = 0{,}1d^3$

$M_{tđ}$ được tính theo các thuyết bền thích hợp (18–39), (18–40), (18–41).

Ví dụ 18 – 5 : Một trục truyền bằng thép chịu lực như trên hình 18–11. Trọng lượng Puli G = 3*kN*, công suất và số vòng quay của môtơ là : W = 50*kW*, n = 500*vg/ph*. Kiểm tra bền trục theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng biết $[\sigma] = 12kN/cm^2$.

Bài giải : Sơ đồ chịu lực của trục biểu diễn trên hình 18–11a, trong đó :

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \times 500}{30} = 52{,}4\,rad/s$$

$$M = \frac{W}{\omega} = \frac{50 \times 10^3}{52{,}4} = 0{,}955 \times 10^3\,Nm = 95{,}5\,kNcm$$

Lực căng dây đai được xác định theo điều kiện cân bằng của mô men xoắn :

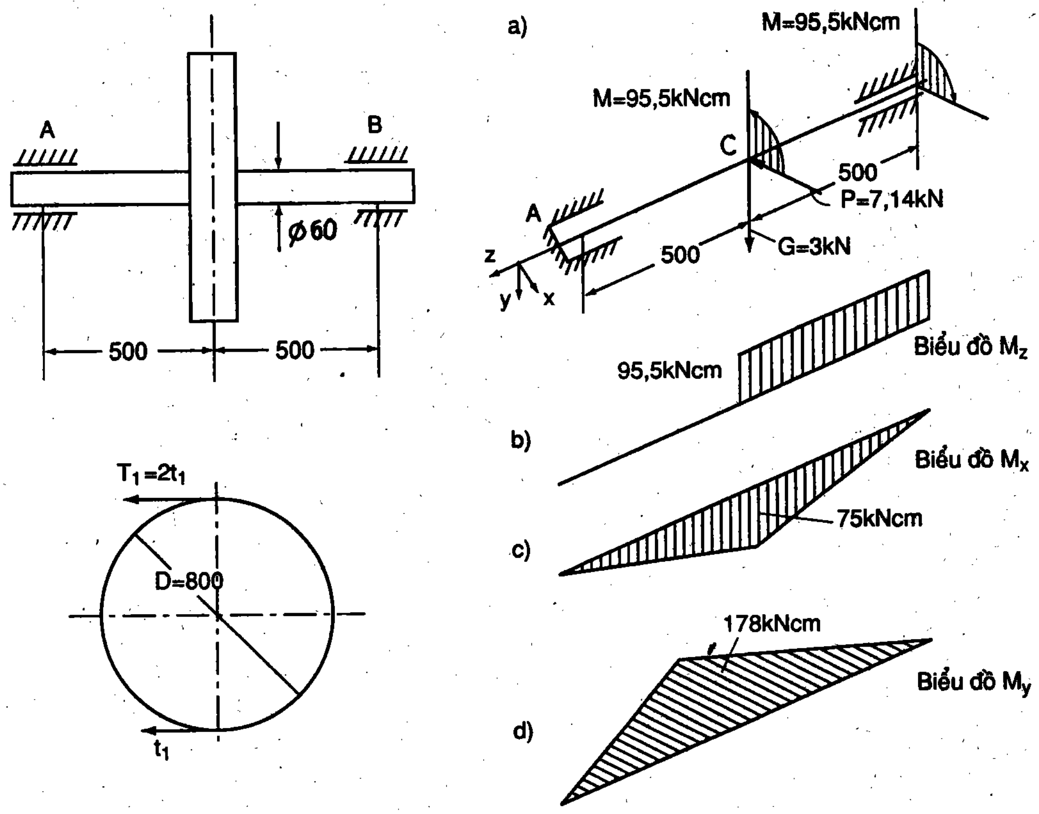
$$M = \frac{T_1 D}{2} - \frac{t_1 D}{2} = \frac{t_1 D}{2}$$

Rút ra
$$t_1 = \frac{2M}{D} = \frac{2 \times 95{,}5}{80} = 2{,}38\,kN\,; \quad T_1 = 2t_1 = 2 \times 2{,}38 = 4{,}76\,kN$$

$$P = T_1 + t_1 = 4{,}76 + 2{,}38 = 7{,}14\,kN$$

Ứng suất tương đương tính theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng sẽ bằng :

$$\sigma_{tđ} = \frac{M_{tđ}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0{,}75M_z^2}}{0{,}1 \times d^3}$$



Hình 18–11

Mặt cắt nguy hiểm tại C về phía CB, tại đó :

$$M_x = \frac{Gl}{4} = \frac{3\times100}{4} = 75\,kNcm\,;\ \ M_y = \frac{Pl}{4} = \frac{7{,}14\times100}{4} = 178\,kNcm$$

$$M_z = 95{,}5\,kNcm$$

Các biểu đồ nội lực được biểu diễn trên các hình 18–11b, c, d.

Thay số vào ta được :

$$\sigma_{tđ} = \frac{\sqrt{75^2 + 178^2 + 0{,}75\times95{,}5^2}}{0{,}1\times6^3} = 9{,}72\,kN/cm^2 < [\sigma] = 12\,kN/cm^2$$

Vậy trục thỏa mãn điều kiện bền.

18.5. THANH CHỊU LỰC TỔNG QUÁT

Một thanh gọi là chịu lực tổng quát khi trên mặt cắt ngang của nó có đầy đủ 6 thành phần nội lực. Theo nguyên lí cộng tác dụng, ứng suất pháp trên mặt cắt ngang do các thành phần nội lực là lực dọc N_z, mô men uốn M_x, M_y còn ứng suất tiếp do các thành phần nội lực là mô men xoắn M_z, lực cắt Q_x, Q_y. Việc kiểm tra điều kiện bền thanh chịu lực tổng quát được tiến hành theo trình tự sau :

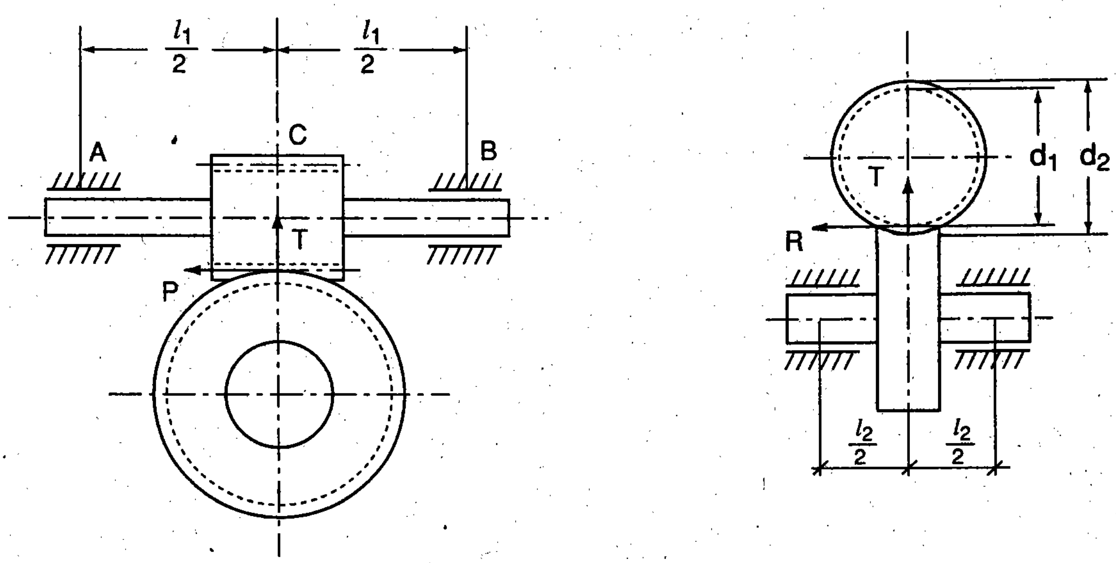
– Chọn điểm nguy hiểm hoặc nghi ngờ nguy hiểm trên mặt cắt nguy hiểm hay các mặt cắt nghi ngờ nguy hiểm. Điểm nguy hiểm là điểm có ứng suất tương đương lớn nhất được tính theo một thuyết bền nào đó.

– Viết điều kiện bền.

Cách tiến hành được trình bày thông qua ví dụ sau.

Ví dụ 18 – 6 : Kiểm tra bền trong hộp giảm tốc (hình 18–12). Biết P = 5,26*kN* ; T = 1,70*kN* ; R = 1,58*kN* ; d_1 = 4,62*cm* ; d_2 = 6,30*cm* ; l = 24*cm*.

Vật liệu có ứng suất cho phép $[\sigma] = 16kN/cm^2$.



Hình 18–12

Bài giải : Tìm sơ đồ chịu lực của thanh bằng cách đưa các lực tác dụng về trọng tâm mặt cắt. Sơ đồ chịu lực của trục vít được trình bày trên hình 18–13a.

Vẽ các biểu đồ nội lực để xác định được mặt cắt nguy hiểm hoặc nghi ngờ nguy hiểm. Biểu đồ nội lực được vẽ trên các hình 18–13b, c, d, e (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt Q_x, Q_y). Dựa vào biểu đồ nội lực ta thấy ngay mặt cắt ngang thuộc phần AC là mặt cắt ngang nguy hiểm. Trên mặt cắt ngang này các nội lực có giá trị :

$$|N_z| = P = 5{,}26kN\ ; \quad |M_x| = 18{,}50kNcm\ ; \quad |M_y| = 9{,}48kNcm$$

$$|M_z| = R\frac{d_2}{2} = 1{,}58\frac{6{,}3}{2} = 4{,}98\,kNcm$$

Xác định điểm nguy hiểm, phân tích trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm.

Ta biết dưới tác dụng của mô men xoắn, ứng suất tiếp có trị số lớn nhất ở các điểm ngoài chu vi.

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{4{,}98}{0{,}2(4{,}62)^3} = 0{,}25kN/cm^2$$

Ứng suất pháp do lực dọc N_z, mô men uốn M_x có trị số :

$$\sigma_{max} = -\frac{|N_z|}{F} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x} = -\frac{5,26}{\frac{3,14\times(4,62)^2}{4}} + \frac{\sqrt{(18,50)^2 + (9,48)^2}}{0,1\times(4,62)^3}$$

$$= -0,31 + 2,10 = 1,79 kN/cm^2$$

$$\sigma_{min} = -\frac{|N_z|}{F} - \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x} = -\frac{5,26}{\frac{3,14(4,62)^2}{4}} - \frac{\sqrt{(18,50)^2 + (9,48)^2}}{0,1(4,62)^3}$$

$$= -0,31 - 2,10 = -2,41 kN/cm^2$$

Đó là hai giao điểm của đường tải trọng do M_x, M_y gây nên với chu vi.

Vì vật liệu là dẻo nên ta chọn điểm nguy hiểm là điểm có $|\sigma|_{max}$ tức là điểm có σ_{min}. Trạng thái ứng suất của điểm là trạng thái ứng suất phẳng có :

$$|\sigma|_{max} = 2,41 kN/cm^2$$

$$\tau_{max} = 0,25 kN/cm^2$$

Tính toán theo yêu cầu. Để kiểm tra bền trục vít ta dựa vào một thuyết bền nào đó. Ví dụ, theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất :

$$\sigma_{tđ} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$= \sqrt{(-2,41)^2 + 4(0,25)^2}$$

$$= 2,461 kN/cm^2 < [\sigma]$$

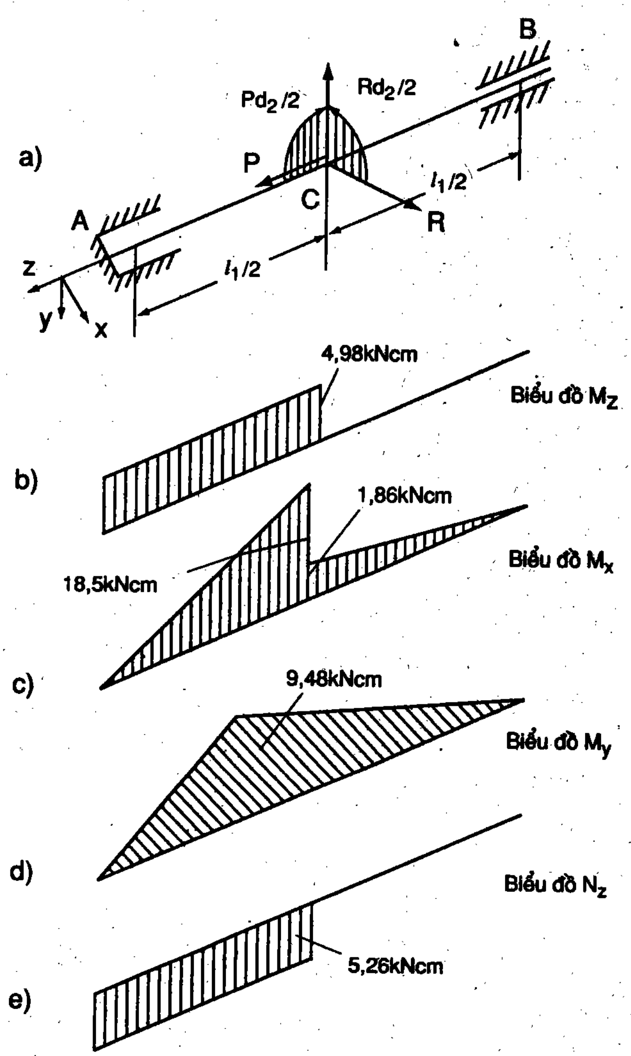
$$= 16 kN/cm^2$$

Hoặc theo thuyết thế năng biến đổi hình dáng :

$$\sigma_{tđ} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{(-2,41)^2 + 3(0,25)^2}$$

$$= 2,44 kN/cm^2 < [\sigma] = 16 kN/cm^2$$

Vậy trục đủ bền.



Hình 18–13

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Belaep H. M. Sức bền vật liệu. Nhà xuất bản khoa học, Matxcơva 1965.
2. Đobronravop V. V. Nhikichin N. N. Giáo trình Cơ lí thuyết. Nhà xuất bản "Vưsai scola", Matxcơva 1983.
3. Mitrolubop H. I. và những người khác. Hướng dẫn giải bài tập sức bền vật liệu. Nhà xuất bản "Vưsai scola", Matxcơva 1974.
4. Pheđoxep V.I. Sức bền vật liệu. Nhà xuất bản khoa học, Matxcơva 1975.
5. Fisher U., Stephan W., Prinzipien und Methoden der Dynamik. VEB Fachbuchverlag, Leizig 1972.
6. Goldaer H., Holzweissrg F. Leitfaden der Technischen Mechanik (9–Auflage). VEB Fachbuchverlag, Leizig 1986.
7. Trịnh Đình Châm và những người khác. Chủ biên : Phạm Hồng Giang. Sức bền vật liệu. Nhà xuất bản Nông nghiệp 1989.
8. Nguyễn Văn Đạo, Nguyễn Trọng Chuyền, Nguyễn Thế Tiến, Ngô Văn Thảo. Chủ biên : Nguyễn Văn Đạo. Cơ học lí thuyết. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1969.
9. Nguyễn Văn Đình, Nguyễn Văn Khang, Đỗ Sanh. Chủ biên : Đỗ Sanh. Cơ học tập I. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội 1996 (xuất bản lần thứ ba).
10. Bùi Trọng Lựu và những người khác. Chủ biên : Bùi Trọng Lựu. Sức bền vật liệu. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1993 (xuất bản lần thứ hai).
11. Bùi Trọng Lựu, Nguyễn Văn Vượng. Bài tập sức bền vật liệu. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội 1993 (xuất bản lần thứ hai).
12. Lê Quang Minh, Nguyễn Văn Vượng. Sức bền vật liệu. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội 1993 (xuất bản lần thứ hai).
13. Đỗ Sanh. Cơ học tập II. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội 1996 (xuất bản lần thứ ba).
14. Nguyễn Y Tô và những người khác. Sức bền vật liệu. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1970.
15. Đỗ Sanh, Nguyễn Văn Vượng. Cơ học ứng dụng. Nhà xuất bản Khoa học và kĩ thuật, Hà Nội 1995.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu :
PHẠM THANH HƯƠNG

Biên tập tái bản :
TRẦN VĂN THẮNG

Trình bày bìa :
TẠ THANH TÙNG

Sửa bản in :
PHÒNG SỬA BÀI (NXB GIÁO DỤC)

Chế bản :
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

CƠ HỌC ỨNG DỤNG

Mã số: 7B572T6 - DAI

In 1.000 bản, khổ 19 x 27cm, tại Xí nghiệp in Hà Tây.
Số in: 38/DAI; Số xuất bản: 04 - 2006/CXB/76 - 1860/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2006.