TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
11 2007
Số 365

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 44
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04)5121607; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272, (04)5121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

Chào mừng

NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM
20-11

SÁCH ĐANG PHÁT HÀNH

Tuyển chọn theo chuyên đề TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

QUYỂN 1 (tái bản)

Sách gồm ba chương: **Phương pháp giải toán, Toán học và Đời sống, Lịch sử Toán học**, đó cũng là ba vấn đề được bạn yêu toán rất quan tâm. Sách được tái bản theo yêu cầu của nhiều độc giả.

Sách dày 300 trang, khổ 19x26,5cm, giá bán lẻ **34.000 đồng**.

Tuyển chọn theo chuyên đề TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

QUYỂN 2 (tái bản)

Từ các bài đã in trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ những năm gần đây, sách tập hợp lại các bài viết theo ba chuyên đề nhằm phục vụ độc giả làm tài liệu tham khảo bổ ích.

Chuyên đề thứ nhất : **Toán THCS - Những tìm tòi sáng tạo**

Chuyên đề thứ hai : **Toán THCS - Những đề thi**

Chuyên đề thứ ba : **Những bài toán - Lời giải sao cho đúng?**

Sách dày 252 trang, khổ 19x26,5cm, giá bán lẻ **30.000 đồng**.

ẨN SAU ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ

(tái bản)

Sách tập hợp các bài viết đã đăng trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (1970 - 2005). Một nửa nội dung cuốn sách trình bày các vấn đề của toán sơ cấp, có ích cho các bạn trước các kì thi học sinh giỏi và thi vào các trường Đại học, Cao đẳng. Có những kiến thức bổ sung một số vấn đề mà SGK chưa đề cập. Phần còn lại nhằm giúp học sinh tập dượt tư duy sáng tạo, mở ra những triển vọng để độc giả có thể đi xa hơn trong công việc sáng tạo toán học, tạo được nguồn hứng khởi trong việc làm toán.

Sách dày 164 trang, khổ 17x24cm, giá bán lẻ **21.500** đồng.

CÁC BÀI THI OLYMPIC TOÁN THPT VIỆT NAM (1990-2006)

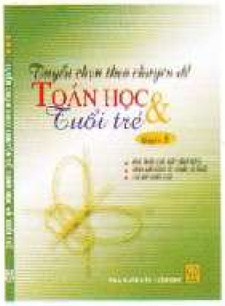
Sách gồm các đề thi và hướng dẫn giải các bài toán thi chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia THPT (Bảng A và bảng B) từ 1990 đến 2006. Sách cũng đăng các đề thi chọn đội tuyển Toán Quốc gia Việt Nam dự thi Toán Quốc tế từ 1990 đến 2006. Trong sách còn giới thiệu danh sách và thành tích của đoàn Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế từ lần đầu dự thi (năm 1974) đến nay.

Sách dày 284 trang, khổ 17x24 cm, giá bán lẻ **39.500đồng**.

SÁCH SẮP PHÁT HÀNH

Tuyển chọn theo chuyên đề TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

QUYỂN 3 (Mới)



Sách chọn lọc các bài viết và đề toán đã đăng trên tạp chí THTT.

Chương I: **Khai thác các bài toán THCS**, trong đó giới thiệu các phương pháp giải toán cực trị đại số và nêu ra những sai lầm tế nhị, cách rèn luyện tư duy qua giải toán hình học phẳng.

Chương II: **Nhìn bài toán từ nhiều hướng**, nêu các ý kiến trao đổi về vấn đề nghiệm bội, nghiệm kép của phương trình, mối liên hệ giữa đường thẳng và ba đường cônic, mở rộng bài toán con bướm và mở rộng một số tính chất hình phẳng sang hình không gian.

Chương III: Giới thiệu **100 đề toán hay** cùng với lời giải được tuyển chọn từ các đề toán đã đăng trên THTT các năm 1996, 1997.

Sách dày khoảng 250 trang, khổ 19x26,5cm.

Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

Mua từ 10 quyển trở lên được trừ phí phát hành. Để biết thông tin chi tiết xin liên hệ:

ĐT/FAX: 04.5144272-04.5121606; Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Sử dụng tỉ số lượng giác để giải bài toán bất đẳng thức hình học

HOÀNG HẢI DƯƠNG
(GV trường THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, Hưng Yên)

Bài toán bất đẳng thức hình học cùng với các phương pháp giải đã được đề cập nhiều trong các sách báo. Trong bài viết này chúng tôi nêu cách sử dụng tỉ số lượng giác để giải dạng toán trên nhằm làm phong phú cách nhìn, cách suy luận, từ đó tạo hứng thú trong quá trình giải toán.

Trước hết ta nhắc lại một nhận xét trong *Sách giáo khoa Toán 9 tập một, trang 78*:

* Với $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ thì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
$0 < \sin\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$.

* Với $0^{\circ} < \alpha \leq \beta < 90^{\circ}$ thì $\sin\alpha \leq \sin\beta$;
$\tan\alpha \leq \tan\beta$; $\cos\alpha \geq \cos\beta$; $\cot\alpha \geq \cot\beta$.

Điều ngược lại cũng đúng.

Dưới đây là một số bài toán minh họa.

✪**Bài toán 1.** *Chứng minh rằng với hai cung nhỏ trong một đường tròn, cung lớn hơn căng dây lớn hơn, dây lớn hơn căng cung lớn hơn.*

Lời giải.(h.1)

Xét đường tròn $(O ; R)$ và hai dây AB và CD. Kẻ $OH \perp AB$, $OK \perp CD$ thì $CK = KD$; $AH = HB$.

$AB = 2HB = 2R.\sin O_2$

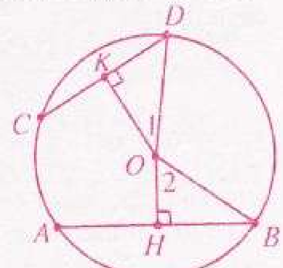
$CD = 2KD = 2R.\sin O_1$.

Ta có $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$

$\Leftrightarrow \widehat{AOB} > \widehat{COD}$

$\Leftrightarrow \hat{O}_2 > \hat{O}_1 \Leftrightarrow \sin O_2 > \sin O_1$

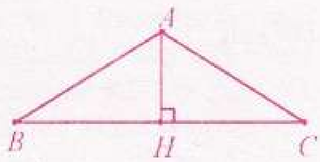
$\Leftrightarrow AB > CD$. ❐



Hình 1

✪**Bài toán 2.** *Chứng minh rằng trong các tam giác cân có cùng diện tích, tam giác có cạnh đáy nhỏ hơn là tam giác có góc ở đỉnh nhỏ hơn.*

Lời giải. Xét tam giác ABC cân tại A có cùng diện tích S. Kẻ đường cao AH (h.2).



Hình 2

Trong tam giác vuông AHC, ta có

$AH = HC.\cot\frac{A}{2} = \frac{1}{2}BC.\cot\frac{A}{2}$.

Do đó $S = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{4}BC^2.\cot\frac{A}{2}$.

Do S không đổi nên BC nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $\cot\frac{A}{2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\widehat{BAC}$ nhỏ nhất. ❐

✪**Bài toán 3.** *Cho điểm M cố định nằm trên đoạn thẳng AB. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax, By vuông góc với AB. Một góc vuông đỉnh M thay đổi cắt hai tia Ax, By lần lượt tại C, D. Xác định vị trí C, D để tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.*

Lời giải.(h.3)

Đặt $\widehat{AMC} = \widehat{BDM} = \alpha$

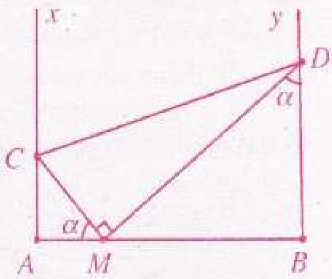
thì $MC = \dfrac{AM}{\cos\alpha}$;

$MD = \dfrac{MB}{\sin\alpha}$.

Ta có

$S_{MCD} = \frac{1}{2}MC.MD$

$= \dfrac{MA.MB}{2\sin\alpha.\cos\alpha}$.



Hình 3

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$, ta có

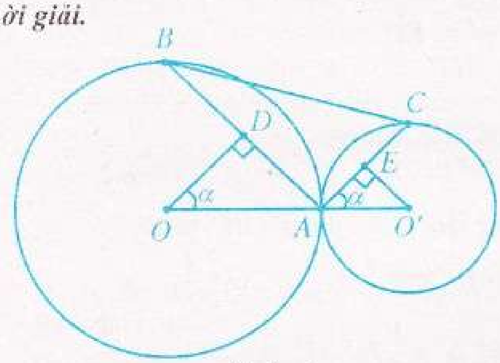
$$S_{MCD} \geq \frac{MA.MB}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = MA.MB.$$

$S_{MCD} = MA.MB \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$.

Vậy tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất bằng $MA.MB$ khi các điểm C, D được xác định trên các tia Ax, By sao cho $AC = AM$; $BD = BM$. ❒

✪**Bài toán 4.** *Cho hai đường tròn $(O\ ;\ R)$ và $(O'\ ;\ R')$ tiếp xúc ngoài nhau tại A. Qua A vẽ hai tia vuông góc với nhau, chúng cắt $(O;\ R)$ và $(O',\ R')$ theo thứ tự tại B, C. Xác định vị trí các tia đó để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.*

Lời giải.



Hình 4

Kẻ $OD \perp AB$, $O'E \perp AC$ (h.4). Đặt $\widehat{AOD} = \widehat{O'AE} = \alpha$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ thì $AB = 2AD = 2R.\sin\alpha$, $AC = 2AE = 2R'.\cos\alpha$.

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = R.R'.2\sin\alpha.\cos\alpha$$

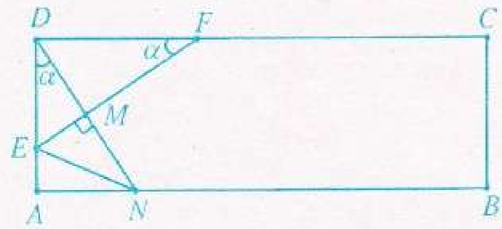
$$\leq R.R'(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = R.R'$$

$S_{ABC} = R.R'$ khi $\sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$.

Vậy tam giác ABC có diện tích lớn nhất bằng $R.R'$ khi các tia AB, AC lần lượt tạo với các tia AO, AO' thành các góc $\widehat{OAB} = \widehat{O'AC} = 45^\circ$. ❒

✪**Bài toán 5.** *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $BC = 1$ và $AB = 3$. Trên cạnh AB lấy điểm N sao cho $0,2 < AN < 1$. Đường trung trực của DN lần lượt cắt AD, DC ở E, F. Chứng minh rằng $S_{EFD} \geq \frac{2\sqrt{3}}{9}$.*

Lời giải. (h.5)



Hình 5

Đặt $\widehat{EFD} = \alpha$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ) \Rightarrow \widehat{ADN} = \alpha$.

Gọi $DN \cap EF \equiv M$, ta có

$$MD = \frac{1}{2}DN = \frac{1}{2}.\frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}$$

$$EF = ME + MF = MD.\tan\alpha + MD.\cot\alpha$$

$$= MD(\tan\alpha + \cot\alpha) = \frac{1}{2\sin\alpha.\cos^2\alpha}$$

$$S_{EFD} = \frac{1}{2}.EF.MD = \frac{1}{8\sin\alpha\cos^3\alpha}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho bốn số dương $\sin^2\alpha$; $\frac{\cos^2\alpha}{3}$; $\frac{\cos^2\alpha}{3}$; $\frac{\cos^2\alpha}{3}$ ta có

$$\sin^2\alpha.\frac{\cos^2\alpha}{3}.\frac{\cos^2\alpha}{3}.\frac{\cos^2\alpha}{3} \leq \left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{4}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha.\cos^6\alpha}{27} \leq \frac{1}{256} \Leftrightarrow \frac{1}{8\sin\alpha\cos^3\alpha} \geq \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ$. ❒

BÀI TẬP

Bài 1. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$. Hai dây AB và CD cắt nhau tại điểm P ở ngoài đường tròn. Biết $\widehat{APO} > \widehat{CPO}$. So sánh khoảng cách từ O đến AB và CD.

Bài 2. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$, điểm P ở miền trong đường tròn. Hai dây APB và CPD thay đổi nhưng luôn vuông góc với nhau. Xác định giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ACBD$.

Bài 3. Hai anh em chia tài sản là một miếng đất hình tam giác. Họ muốn chia đôi diện tích miếng đất này bằng một bờ rào ngắn nhất. Tính độ dài bờ rào này theo diện tích tam giác và góc nhỏ nhất của tam giác đó.

Lời giải đề thi vào lớp 10

Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng

NĂM HỌC 2007-2008

(Đề thi đăng trên THTT số 363, tháng 9 năm 2007)

MÔN TOÁN (Hệ số 1)

Bài 1. a) Biểu thức A có nghĩa khi $x > 0$. Ta có

$$A = 1-\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = -2\sqrt{x}.$$

b) Ta thấy $A + x - 8 = 0 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-8=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+2)=0 \Leftrightarrow x = 16.$

Bài 2. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y=a(1-x) \\ (2a+1)x=a+3 \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

a) Với $a = -2$, hệ tương ứng có nghiệm

$$(x\,;y)=\left(-\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right).$$

b) Khi $a=-\frac{1}{2}$ thì hệ (I) vô nghiệm.

Với $a \neq -\frac{1}{2}$ thì hệ (I) có nghiệm duy nhất:

$$(x;y)=\left(\frac{a+3}{2a+1};\frac{a(a-2)}{2a+1}\right).$$

Khi đó $x+y=\frac{a^2-a+3}{2a+1}>0$, khi và chỉ khi

$2a+1>0$, hay $a>-\frac{1}{2}$.

Bài 3. Giải hai hệ

$$\begin{cases} x-1<0 \\ 10-2x\geq 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x-1\geq 0 \\ 10-2x>(x-1)^2 \end{cases}$$

kết hợp nghiệm, tìm được $x < 3$.

Bài 4. a) Khi $m = 5$, PT (1) có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

b) Với $m = 0$, rõ ràng PT (1) có nghiệm $x = 1$. Còn với $m \neq 0$ thì PT (1) là PT bậc hai với biệt thức $\Delta = (2m+5)^2 \geq 0$, với mọi m.

c) PT (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \neq 0$ và $m \neq -\frac{5}{2}$ (2)

Với ĐK (2), áp dụng định lí Viète, ta có $x_1+x_2=\frac{5}{m}$, $x_1.x_2=-\frac{m+5}{m}$.

Suy ra $B = 16x_1x_2-3(x_1+x_2)^2$

$$=\frac{-16m^2+80m+75}{m^2}=0$$

$\Leftrightarrow m=-\frac{5}{4}$ hoặc $m=-\frac{15}{4}$ (thỏa mãn ĐK (2)).

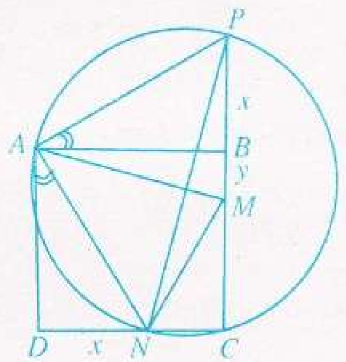
Bài 5. a) (h.1). Nhận xét rằng $\Delta ABP = \Delta ADN$, suy ra $\widehat{BAP}=\widehat{DAN}$.

Do đó $\widehat{NAP}$

$=\widehat{NAB}+\widehat{BAP}$

$=\widehat{NAB}+\widehat{DAN}$

$=90^\circ=\widehat{NCP}$.



Hình 1

b) Từ giả thiết có $CN = 1 - x$ (cm), $CP = 1 + x$(cm), suy ra

$$NP=\sqrt{CP^2+CN^2}=\sqrt{2(1+x^2)} \text{ (cm)}.$$

Vậy độ dài đường tròn cần tìm là

$$\pi.NP=\pi\sqrt{2(1+x^2)} \text{ (cm)}.$$

c) Ta có $MP = MN \Leftrightarrow \Delta MAP = \Delta MAN$

$\Leftrightarrow \widehat{MAN}=\frac{1}{2}\widehat{NAP}=45^\circ$.

d) • Đặt $x = DN$, $y = BM$ $(0 \leq x\,;\,y \leq 1)$.

Vì $\widehat{MAN} = 45^o$ nên $MN = MP$,

hay $\sqrt{NC^2 + MC^2} = BM + BP$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} = x + y \Leftrightarrow 1 - xy = x + y.$

Từ đó $S_{MAN} = S_{MAP} = \frac{1}{2} AB.BM = \frac{1}{2}(x+y)$

$= \frac{1}{2}(1 - xy) \le \frac{1}{2}$ (do $xy \ge 0$).

Kết luận: $\text{Max}S_{MAN} = \frac{1}{2}$, đạt được khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $y = 0$.

• Mặt khác $1 - xy = x + y \ge 2\sqrt{xy}$,

suy ra $1 + 2\sqrt{xy} + xy \le 2$,

hay $\left(1 + \sqrt{xy}\right)^2 \le 2$

dẫn đến $xy \le \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Vậy

$S_{MAN} = \frac{1}{2}(1 - xy) \ge \frac{1}{2}\left(1 - (3 - 2\sqrt{2})\right) = \sqrt{2} - 1.$

Kết luận: $\text{Min}S_{MAN} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2} - 1.$

MÔN TOÁN (Hệ số 2)

Bài 6. a) ĐK $x \le 6$. Đặt $y = \sqrt{6-x}$ $(y \ge 0)$. Ta thấy x là một nghiệm của PT đã cho khi và chỉ khi tồn tại y để $(x\,;\,y)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} y \ge 0 \\ x = 6 - y^2 \\ x^2 - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x = 6 - y^2 \\ x + y = x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x = 6 - y^2 \\ (x+y)(1-(x-y)) = 0. \end{cases}$$

Giải hai hệ $\begin{cases} y = -x \ge 0 \\ x = 6 - (-x)^2 \end{cases}$ và $\begin{cases} y = x - 1 \ge 0 \\ x = 6 - (x-1)^2 \end{cases}$

tương ứng tìm được $(x\,;\,y) = (-3\,;\,3)$,

$(x\,;\,y) = \left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Kết luận: PT đã cho có hai nghiệm

$x = -3$ và $x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} |x+3| + |y-2| = 5 \\ (x+3)(y-2) = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+3| + |y-2| = 5 \\ |x+3|.|y+2| = 6 \\ (x+3)(y-2) < 0 \end{cases}$$

Giải hai hệ $\begin{cases} |x+3| = 2 \\ |y-2| = 3 \\ (x+3)(y-2) < 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} |x+3| = 3 \\ |y-2| = 2 \\ (x+3)(y-2) < 0 \end{cases}$

tìm được các bộ $(x\,;\,y)$ thỏa mãn đề bài là $(-1\,;\,-1), (-5\,;\,5), (0\,;\,0), (-6\,;\,4)$.

Bài 7. a) Theo định lí Viète có $b + c = a$; $bc = -\frac{1}{2a^2}$.

Từ đó, theo BĐT Cauchy

$b^4 + c^4 = \left((b+c)^2 - 2bc\right)^2 - 2(bc)^2$

$= 2 + \left(a^4 + \frac{1}{2a^4}\right) \ge 2 + 2\sqrt{a^4 . \frac{1}{2a^4}} = 2 + \sqrt{2}$.

b) Ta có $y = mx + n|x| = \begin{cases} (m-n)x \text{ khi } x < 0 \\ (m+n)x \text{ khi } x \ge 0. \end{cases}$

Hàm số trên đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m - n > 0$ và $m + n > 0$ hay $m > |n|$.

Bài 8. a) PT đã cho có hai nghiệm $x_1 = m - 1 < x_2 = m + 1$. Ta tìm tất cả các giá trị nguyên của m sao cho

$$\begin{cases} x_1 > 2000 \\ x_2 < 2007 \end{cases} \Leftrightarrow 2001 < m < 2006.$$

$\Leftrightarrow m \in \{2002, 2003, 2004, 2005\}$.

b) Không mất tính tổng quát có thể giả sử

$$|a| = \max\{|a|;|b|;|c|;|d|\} \qquad (*)$$

Khi đó, nếu $d = 0$ thì $x = 0$ là một nghiệm của PT $bx^2 + 2cx + d = 0$. Còn nếu $d \ne 0$ thì $dx^2 + 2ax + b = 0$ là PT bậc hai với biệt thức $\Delta' = a^2 - bd \ge 0$ (do (*)) nên PT đó có nghiệm.

• *Tổng quát hóa bài toán.* Cho số tự nhiên $n \geq 3$ và n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ (quy ước $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$). Khi đó ít nhất một trong số n phương trình $a_k x^2 + 2a_{k+1}x + a_{k+2} = 0$ ($k \leq n, k \in \mathbb{N}^*$) có nghiệm.

Bài 9. a) *Nhận xét*: Nếu $\frac{M}{N} < \frac{P}{Q}$, trong đó $N > 0, Q > 0$, thì $\frac{M}{N} < \frac{M+P}{N+Q} < \frac{P}{Q}$.

Áp dụng nhận xét trên với $M := km$, $N := kn$, $P := hp$ và $Q := hq$, ta có đpcm.

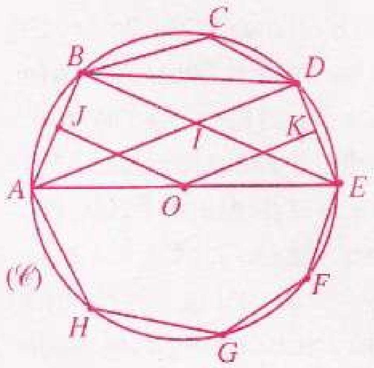
b) Với α là số hữu tỉ thỏa mãn $\frac{m}{n} < \alpha < \frac{p}{q}$, khi đó $pn - mq > 0$, $\alpha n - m > 0$ và $p - \alpha q > 0$ (3).

Xét hệ PT $\begin{cases} px + my = \alpha \\ qx + ny = 1 \end{cases}$ (4).

Từ (3) ta thấy hệ (4) có nghiệm dương duy nhất $(x ; y) = \left(\frac{\alpha n - m}{pn - mq}; \frac{p - \alpha q}{pn - mq}\right)$.

Từ đây cũng thấy x, y là các số hữu tỉ, nên tồn tại các số nguyên dương k, h, t sao cho $x = \frac{h}{t}$, $y = \frac{k}{t}$. Từ hệ (4) có

$$\alpha = \frac{\alpha}{1} = \frac{px + my}{qx + ny} = \frac{km + hp}{kn + hq} \text{ (đpcm).}$$



Hình 2

Bài 10. a) Gọi O là tâm của $(\mathscr{C})$, I là giao điểm của AD và BE; còn J và K lần lượt là trung điểm của AB và DE (h. 2). Vì $AB = AH$ nên B và H đối xứng nhau qua OA. Từ đó, do $BC = HG$, ta thấy C và G cũng đối xứng nhau qua OA. Cứ tiếp tục lập luận như thế, ta thấy D và F đối xứng nhau qua OA, còn E đối xứng với chính nó qua OA; suy ra AE là đường kính của $(\mathscr{C})$.

Khi đó $OJ = \frac{BE}{2}; OK = \frac{AD}{2}$ (5)

ΔBCD và ΔBID có BD chung, và

$$\begin{cases} \widehat{CBD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{DE} = \widehat{EBD} = \widehat{IBD} \\ \widehat{CDB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \widehat{ADB} = \widehat{IDB} \end{cases}$$

suy ra $\Delta BCD = \Delta BID$. Do đó

$ID = CD = 2(\text{cm})$; $IB = CB = 3(\text{cm})$ (6)

Từ đó ΔIBA vuông cân tại B, ΔIDE vuông cân tại D; nên $IA = AB\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ (cm),

$IE = DE\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (cm) (7)

Cuối cùng từ (5), (6) và (7) thu được

$$OJ = \frac{IB + IE}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \text{ (cm)},$$

$$OK = \frac{ID + IA}{2} = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{2} \text{ (cm)}.$$

Vậy $S = 4(S_{OAB} + S_{ODE}) = 2(AB.OJ + DE.OK)$

$= 13 + 12\sqrt{2}(\text{cm}^2)$.

b) (Bạn đọc tự vẽ hình).

Giả sử $(\mathscr{H})$ là n–giác $A_1A_2...A_n$ ($3 \leq n \in \mathbb{N}$). Với mỗi k nguyên, $1 \leq k \leq n$, trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng A_kA_{k+1} (nửa không chứa $(\mathscr{H})$), kẻ hai tia vuông góc với A_kA_{k+1} lần lượt tại các đỉnh A_k và A_{k+1}; chúng cắt $(\mathscr{C})$ tương ứng tại các điểm, kí hiệu là B_k và C_k; trong đó, để cho tiện, ta quy ước $A_{n+1} \equiv A_1$. Từ tính lồi của $(\mathscr{H})$, suy ra các điểm B_1, C_1, B_2, C_2, ..., B_n, C_n, B_1 nằm trên $(\mathscr{C})$ theo đúng thứ tự đó (theo một chiều quay nhất định).

Gọi l_C và l_H lần lượt là chu vi của $(\mathscr{C})$ và của $(\mathscr{H})$. Rõ ràng là

$l_C > B_1C_1 + C_1B_2 + B_2C_2 + C_2B_3 + ... + B_nC_n + C_nB_1$

$\geq A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_1 = l_H$ (đpcm). □

NGUYỄN DUY THÁI SƠN – VÕ HỒNG TIẾN (Đà Nẵng)
Sưu tầm và giới thiệu

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN
Trường Đại học Khoa học Huế
NĂM HỌC 2007-2008

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (1,5 *điểm*)

Chứng minh rằng nếu a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 2007$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2007}$ thì một trong ba số đó phải có một số bằng 2007.

Câu 2. (2 *điểm*)

a) Chứng minh rằng $A=\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$ là một số nguyên.

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=x^2+y^2. \end{cases}$$

Câu 3. (1 *điểm*)

Cho hai đa thức

$P(x)=x^4+ax^2+1$, $\quad Q(x)=x^3+ax+1$.

Hãy xác định giá trị của a để $P(x)$ và $Q(x)$ có nghiệm chung.

Câu 4. (3 *điểm*). Cho hình vuông $ABCD$ cạnh là a. Trên hai cạnh AD và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho góc $\widehat{MBN}=45^{\circ}$. BM và BN cắt AC theo thứ tự tại E và F.

a) Chứng tỏ rằng M, E, F, N cùng nằm trên một đường tròn;

b) MF và NE cắt nhau tại H, BH cắt MN tại I. Tính BI theo a;

c) Tìm vị trí của M và N sao cho diện tích tam giác MDN lớn nhất.

Câu 5. (1,5 *điểm*).

Cho a, b, c là các số dương

a) Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}.$$

Câu 6. (1 *điểm*). Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$5(x+y+z)=4xyz-24.$$

MINH TRÂN

(Phòng GD Hương Thủy, Thừa Thiên-Huế)

Sưu tầm và giới thiệu

Lễ tổng kết Và trao giải thưởng Giai đoạn một Cuộc thi "BIÊN SOẠN TRUYỆN TRANH LỊCH SỬ THEO SÁCH GIÁO KHOA LỊCH SỬ HIỆN HÀNH"

Sáng ngày 13/10/2007 vừa qua, tại hội trường Trường Đại học Mĩ thuật đã diễn ra Lễ tổng kết và trao giải Cuộc thi "Biên soạn truyện tranh lịch sử theo sách giáo khoa lịch sử hiện hành" giai đoạn một. Cuộc thi này do Nhà xuất bản Giáo dục, Hội Khoa học Lịch sử, Hội Nhà văn Việt Nam phối hợp tổ chức theo sự chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo nhằm góp phần thỏa mãn nhu cầu học tập, giải trí và giáo dục lịch sử cho thế hệ trẻ. Cuộc thi đã được dư luận rất đồng tình và thu hút được sự quan tâm của nhiều đối tượng trong xã hội. Với hơn 1000 tác phẩm dự thi, Ban tổ chức xét trao giải đợt một cho 37 tác phẩm có kết quả cao nhất gồm: 1 giải Nhất, 6 giải Nhì, 10 giải Ba và 20 giải Khuyến khích.

VĨNH LINH

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Một số loại toán tổ hợp thường gặp

TRONG KÌ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Trong bài viết "Phương pháp giải các bài toán về tạo số" (TH&TT số 324, tháng 6/2004) tác giả đã đề cập tới các bài toán tính số các số tự nhiên tạo thành, thỏa mãn một điều kiện nào đó. Trong bài báo này chúng tôi xin giới thiệu một số loại toán về đại số tổ hợp.

LOẠI 1. Chọn phần tử từ các tập hợp

✪**Thí dụ 1.** *Tổ một có 10 người, tổ hai có 9 người. Có bao nhiêu cách chọn một nhóm gồm 8 người sao cho mỗi tổ trên có ít nhất là 2 người?*

Lời giải. Giả sử ta chọn k người của tổ một và $(8-k)$ người của tổ hai.Vì mỗi tổ có ít nhất 2 người nên $2 \le k \le 6$.

• Số cách chọn k trong số 10 người của tổ một là C_{10}^k. Ứng với một cách chọn trên, ta có số cách chọn $(8-k)$ trong 9 người của tổ hai là C_9^{8-k}. Theo quy tắc nhân, ta được số cách chọn nhóm 8 người như trên là $S_k = C_{10}^k.C_9^{8-k}$.

• Cho k lần lượt bằng 2, 3, .., 6 và áp dụng quy tắc cộng, ta được số cách chọn nhóm 8 người thỏa mãn bài toán là

$$S = S_2 + S_3 + ... + S_6$$
$$= C_{10}^2C_9^6 + C_{10}^3C_9^5 + ... + C_{10}^6C_9^2 = 74088.\ \square$$

Bài toán tổng quát. *Cho tập hợp A có n phần tử, tập hợp B có m phần tử. Tính số cách chọn p phần tử từ hai tập hợp trên ($p < m + n$) và thỏa mãn một điều kiện nào đó.*

Cách giải chung

1) *Tính trực tiếp.* Giả sử ta chọn k phần tử của tập hợp A và $(p-k)$ phần tử của B (trường hợp giả thiết cho nhiều tập hợp hơn, ta làm tương tự). Số cách chọn là $S_k = C_n^k.C_m^{p-k}$. Cho k thay đổi phù hợp với giả thiết của bài toán và lấy tổng của tất cả các số hạng S_k tương ứng, ta được kết quả cần tìm.

2) *Tính gián tiếp.* Số cách chọn k phần tử từ A, B một cách bất kì là C_{n+m}^k. Kết quả phải tìm là hiệu của C_{n+m}^k với tổng các số hạng S_k, tương ứng với mỗi giá trị k không thỏa mãn giả thiết của bài toán.

✪**Thí dụ 2.** *Người ta sử dụng ba loại sách gồm: 8 cuốn sách về Toán học, 6 cuốn sách về Vật lí và 5 cuốn sách về Hóa học. Mỗi loại đều gồm các cuốn sách đôi một khác loại nhau. Có bao nhiêu cách chọn 7 cuốn sách trong số sách trên để làm giải thưởng sao cho mỗi loại có ít nhất một cuốn?*

Lời giải. Sử dụng cách tính gián tiếp. Số cách chọn 7 trong số 19 cuốn sách một cách bất kì là C_{19}^7.

Các cách chọn không đủ cả ba loại sách là:

• Số cách chọn 7 trong số 11 cuốn sách Lí và Hóa là C_{11}^7 (không có sách Toán).

• Số cách chọn 7 trong số 13 cuốn sách Hóa và Toán là C_{13}^7 (không có sách Lí).

• Số cách chọn 7 trong số 14 cuốn sách Toán và Lí là C_{14}^7 (không có sách Hóa).

• Số cách chọn 7 trong số 8 cuốn sách Toán là C_8^7 (không có sách Lí và Hóa).

Vì mỗi cách chọn không có sách Lí và Hóa thuộc cả hai phép chọn: không có sách Lí và không có sách Hóa, nên số cách chọn phải tìm là

$$C_{19}^7 - C_{11}^7 - C_{13}^7 - C_{14}^7 + C_8^7 = 44918.\ \square$$

Lưu ý. Khi tính theo phương pháp gián tiếp, mỗi số hạng ứng với trường hợp không thỏa mãn bài toán được đặt sau dấu trừ. Số hạng đồng thời thuộc hai trường hợp không thỏa mãn bài toán được đặt sau dấu cộng (bạn đọc tự suy luận cho số hạng đồng thời thuộc ba trường hợp không thỏa mãn bài toán..).

LOẠI 2. Sắp xếp thứ tự các vật từ một họ các vật

✪Thí dụ 3. *Có 5 viên bi xanh giống nhau, 4 viên bi trắng giống nhau và 3 viên bi đỏ đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách xếp số bi trên vào 12 ô theo một hàng ngang sao cho mỗi ô có một viên bi?*

Lời giải. Nếu tất cả 12 viên bi đều khác nhau thì chúng tạo thành $P_{12} = 12!$ hoán vị. Nhưng các hoán vị của 5 bi xanh và các hoán vị của 4 bi trắng cho cùng một cách xếp đối với 12 viên bi nên số cách xếp phải tìm là

$$\frac{P_{12}}{P_5.P_4} = \frac{12!}{5!4!} = 166320.\ \square$$

Bài toán tổng quát. Có tất cả n vật, trong đó có m vật giống nhau từ hộp A; k vật giống nhau từ hộp B..., $(m + k + ... < n)$. Các vật còn lại đôi một khác nhau thì số cách xếp chúng thành một hàng ngang là $\dfrac{n!}{m!k!..}$.

✪Thí dụ 4. *Có bao nhiêu cách xếp vị trí cho 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ quanh một bàn tròn sao cho không có hai học sinh nữ nào cạnh nhau? (hai cách xếp khác nhau về vị trí nhưng có cùng thứ tự đối với các học sinh trên, được coi là một).*

Lời giải. Giả sử đã xếp chỗ cho 5 học sinh nam. Vì 3 học sinh nữ không ngồi cạnh nhau nên họ được chọn 3 trong 5 vị trí xen kẽ giữa các học sinh nam, số cách chọn là A_5^3. Vì hai cách xếp vị trí cho 8 người với cùng một thứ tự quanh bàn tròn được coi là một nên ta có thể chọn trước vị trí cho một học sinh nam nào đó, số hoán vị của 4 học sinh nam còn lại vào các vị trí là 4!.

Theo quy tắc nhân, số khả năng phải tìm là $A_5^3.4! = 1440$ (cách). □

Lưu ý. Khi xếp n đối tượng theo một vòng tròn với hai cách xếp khác nhau bởi một phép quay được coi là một, thì ta có thể định trước một vị trí cho một đối tượng bất kì trong chúng. Sau đó tính số cách xếp vị trí cho $(n - 1)$ đối tượng còn lại.

LOẠI 3. Phân chia các vật từ một họ các vật

✪Thí dụ 5. *Có bao nhiêu cách chia 100 đồ vật giống nhau cho 4 người sao cho mỗi người được ít nhất một đồ vật?*

Lời giải. Giả sử 100 đồ vật được xếp thành một hàng ngang, giữa chúng có 99 khoảng trống. Đặt một cách bất kì 3 vạch vào 3 trong số 99 khoảng trống đó, ta được một cách chia 100 đồ vật ra thành 4 phần để lần lượt gán cho 4 người. Khi đó mỗi người được ít nhất một đồ vật và tổng số đồ vật của 4 người bằng 100, thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Vậy số cách chia là $C_{99}^3 = 156849$ (cách). □

Lưu ý. Bằng cách giải tương tự như trên, ta có thể chứng minh rằng, phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ (1) có tính chất :

• Với $1 \le n \le m$; $m, n \in \mathbb{N}$ thì PT(1) có số nghiệm trong tập hợp các số nguyên dương là C_{m-1}^{n-1}.

• Với $n \ge 1$; $m, n \in \mathbb{N}$ thì PT(1) có số nghiệm trong tập hợp các số tự nhiên là C_{m+n-1}^{n-1}.

✪Thí dụ 6. *Có bao nhiêu cách chia 8 đồ vật đôi một khác nhau cho ba người sao cho có một người được 2 đồ vật và hai người còn lại, mỗi người được 3 đồ vật?*

Lời giải. Có 3 cách chọn đồ vật. Với mỗi cách chọn trên, ta có:

• Số cách chọn 2 trong 8 đồ vật cho người được 2 đồ vật là C_8^2; sau đó, số cách chọn 3 trong 6 đồ vật còn lại cho người thứ nhất được 3 đồ vật là C_6^3; 3 đồ vật còn lại dành cho người thứ hai được 3 đồ vật.

• Theo quy tắc nhân, số cách chia phải tìm là $3.C_8^2C_6^3 = 1680$ (cách). ❐

Lưu ý. Khi giải bài toán trên, nhiều bạn cho đáp số sai là $C_8^2C_6^3$ hoặc $3!C_8^2C_6^3$.

Trường hợp thứ nhất, bạn đã coi vai trò của người được 2 đồ vật và người được 3 đồ vật như nhau(!) Trường hợp thứ hai, bạn đã coi vai trò của hai người cùng được 3 đồ vật khác nhau(!)

BÀI TẬP LÀM THÊM
(trắc nghiệm)

Hãy khoanh tròn vào các câu trả lời đúng với các bài tập sau:

1. Phương trình $x + y + z = 100$ có bao nhiêu nghiệm trong tập hợp các số tự nhiên?

A. $C_{99}^2 = 4851$ B. $C_{101}^2 = 5050$

C. $C_{102}^2 = 5151$ D. $C_{103}^2 = 5253$.

2. Đem chia hết 10 đồ vật đôi một khác nhau cho hai người, sao cho mỗi người được ít nhất 1 đồ vật. Hỏi số cách chia?

A. C_{10}^2 B. $2^{10} - 1$

C. 2^{10} D. $2^{10} - 2$.

3. Có 5 cuốn sách Toán giống nhau, 7 cuốn sách Lí giống nhau và 8 cuốn sách Hóa giống nhau. Đem làm giải thưởng cho 10 học sinh, mỗi người được 2 cuốn sách khác loại. Tính số cách nhận giải thưởng của 10 học trên.

A. 1310 B. 2520

C. 417 D. 2085

4. Có 5 cuốn sách giáo khoa giống nhau và 3 cuốn sách tham khảo đôi một khác nhau. Đem làm giải thưởng cho 7 học sinh, mỗi người được 1 cuốn sách. Tính số cách nhận giải thưởng của của các học sinh trên.

A. 336 B. 274

C. 246 D. 546.

5. Có bao nhiêu cách chia 6 người ra thành 3 nhóm, mỗi nhóm 2 người, trong các trường hợp sau:

a) Phân biệt thứ tự các nhóm là: nhóm 1, nhóm 2, nhóm 3.

A. $C_6^2C_4^2 = 90$ B. $3!C_6^2C_4^2 = 540$

C. $\dfrac{C_6^2C_4^2}{3!} = 15$ D. $3.C_6^2C_4^2 = 270$.

b) Không biệt thứ tự của các nhóm.

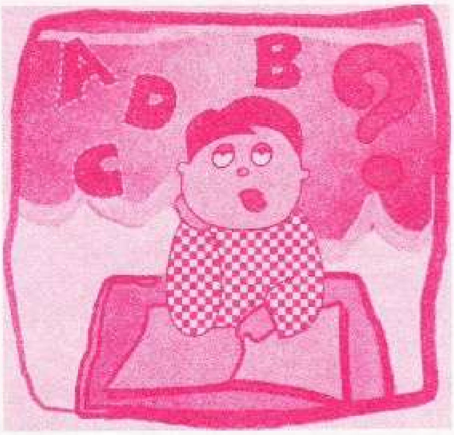
A. $C_6^2C_4^2 = 90$ B. $3!C_6^2C_4^2 = 540$

C. $\dfrac{C_6^2C_4^2}{3!} = 15$ D. $3.C_6^2C_4^2 = 270$?

6. Có bao nhiêu cách chia 6 đồ vật đôi một khác nhau cho 3 người sao cho mỗi người được ít nhất một đồ vật?

A. 360 B. 495

C. 540 D. 600.



Điểm SCHIFFLER CỦA TAM GIÁC

LÊ ĐỨC THỊNH
(GV THPT NK Trần Phú, Hải Phòng)

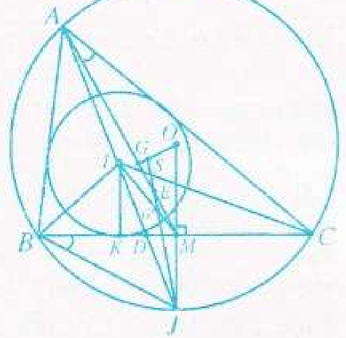
Trong quá trình tự tìm tòi về các loại điểm đặc biệt trong tam giác tôi bắt gặp một số tính chất về điểm Schiffler của tam giác. Tôi cảm thấy rất tâm đắc với các tính chất này. Tuy nhiên, có một điểm tôi cảm thấy không thật sự vừa ý là các tính chất và định lí được phát biểu một cách rất đơn giản nhưng các cách chứng minh lại phải sử dụng đến công cụ tâm tỉ cự, phương pháp toạ độ - một phương pháp hiện đại nhưng không tiện dụng đối với học sinh, kể cả học sinh giỏi. Mong muốn trình bày vấn đề cho trong sáng hơn đã thôi thúc tôi đi tìm lời giải sơ cấp hơn, «đẹp mắt» hơn cho bài toán. Đến nay tôi đã thu được những kết quả nhất định xin được trình bày cùng bạn đọc trong bài viết này.

Ta bắt đầu bằng bài toán sau về định nghĩa điểm Schiffler của tam giác:

✪**Bài toán 1.** *Giả sử I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó bốn đường thẳng Euler của các tam giác BIC, CIA, AIB, ABC đồng quy tại một điểm S gọi là điểm Schiffler của tam giác ABC.*

Chứng minh. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, G là trọng tâm tam giác, M là trung điểm BC, G' là trọng tâm tam giác BIC, AI cắt BC tại D, cắt đường tròn (O) tại J, đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh BC tại K, JG' cắt OG tại S, cắt AM tại E (h.1).

Rõ ràng J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Do đó JG' là đường thẳng Euler của tam giác BIC.



Hình 1

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác GOM với cát tuyến SEJ ta có

$$\frac{SG}{SO}\cdot\frac{JO}{JM}\cdot\frac{EM}{EG}=1.$$

Suy ra

$$\frac{SG}{SO}=\frac{JM}{JO}\cdot\frac{EG}{EM}=\frac{JM}{R}\cdot\frac{EG}{EM}$$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Sử dụng định lí Menelaus cho tam giác IAM với cát tuyến $JG'E$, ta có $\frac{JI}{JA}\cdot\frac{EA}{EM}\cdot\frac{G'M}{G'I}=1$.

Do G' là trọng tâm ΔBIC nên

$$\frac{EA}{EM}=2\cdot\frac{JA}{JI}=2\cdot\frac{JA}{JB}=2\cdot\frac{JB}{JD}=2\cdot\frac{JI}{JD}$$

(do $JI^2=JB^2=JA.JD$). Do đó

$$\frac{EG}{EM}=\frac{GM}{EM}-1=\frac{1}{3}\cdot\frac{AM}{EM}-1$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{EA}{EM}+1\right)-1=\frac{1}{3}\cdot\frac{EA}{EM}-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{JI}{JD}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{ID}{JD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{IK}{JM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{r}{JM}$$

(r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC)

$$\frac{SG}{SO}=\frac{JM}{R}\cdot\frac{EG}{EM}=\frac{JM}{R}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{r}{JM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{r}{R} \qquad (1)$$

Tương tự, ta thấy các đường thẳng Euler của các tam giác CIA, AIB cũng cắt OG tại S (xác định bởi hệ thức (1)).

Vậy các đường thẳng Euler của bốn tam giác ABC, BIC, CIA, AIB đồng quy tại S. ❒

Một tính chất khác của điểm Schiffler được mô tả trong bài toán sau:

✪**Bài toán 2.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và I_1, I_2, I_3 lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với các góc A, B, C của tam giác. A_1, B_1, C_1 tương ứng là giao điểm của các cặp đường (OI_1, BC), (OI_2, CA), (OI_3, AB). Khi đó các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm Schiffler S của tam giác ABC.*

(Xem tiếp trang 27)

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÍ
TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
NĂM HỌC 2006 - 2007

LTS: ***Cuộc thi giải Toán và Vật lí trên tạp chí THTT năm nay diễn ra song song với sự kiện Việt Nam tổ chức Kì thi Toán Quốc tế lần thứ 48. Đây thực sự là một cuộc thi bổ ích và lí thú đối với các bạn trẻ yêu thích Toán và Vật lí hàng năm. Tòa soạn đã đăng nhiều đề toán hay và nhận được nhiều lời giải đẹp của các bạn bậc THCS và THPT trên mọi miền đất nước gửi về. Một số bạn được giải trong cuộc thi CHÀO IMO 2007 (Xem THTT số 360, tháng 6 năm 2007, trang 26) cũng đoạt giải trong cuộc thi này. Các địa phương có đông học sinh tham gia là Vĩnh Phúc, Hải Dương, Bắc Ninh, Hải Phòng, Nam Định, Thanh Hóa, Nghệ An. Xin chúc mừng các bạn đoạt giải trong cuộc thi này. Sau đây là danh sách 89 bạn đoạt giải môn Toán và 18 bạn đoạt giải môn Vật lí năm học 2006-2007.***

Môn TOÁN

Giải Xuất sắc (**2** giải)

1. *Mạc Thị Thu Huệ*, 7A, THCS Đồng Quế, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**.
2. *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.

Giải Nhất (**5** giải)

1. *Trần Thị Ánh Nguyên*, 8/7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**.
2. *Hoàng Kiên An*, 9E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn, **Thanh Hóa** .
3. *Tạ Đức Thành*, 9A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
4. *Nguyễn Hoàng Hải*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
5. *Vũ Việt Dũng*, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**.

Giải Nhì (**11** giải)

1. *Vũ Đình Long*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
2. *Phùng Ngọc Quý*, 8A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
3. *Phạm Quang Thịnh*, 8H, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa, **Phú Yên**.
4. *Phan Long Trí Yên*, 8H, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa, **Phú Yên**.
5. *Tăng Văn Bình*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
6. *Trần Xuân Quang*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. **Thanh Hóa**.
7. *Nguyễn Huy Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
8. *Nguyễn Như Đức Trung*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP **Đà Nẵng**.
9. *Nguyễn Minh Hằng*, 11A0, THPT Yên Phong I, **Bắc Ninh**.
10. *Dương Văn An*, 11A1, THPT Châu Thành, TX. **Bà Rịa - Vũng Tàu**.
11. *Võ Xuân Thanh*, 12A6, THPT số 2 Tuy Phước, **Bình Định**.

Giải Ba (**25** giải)

1. *Trần Thị Mận*, 4A, TH Nghĩa An, Ninh Giang, **Hải Dương**.
2. *Nguyễn Bảo Nhi*, 6/5, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**.
3. *Đỗ Trường Sơn*, 6E, THCS Phan Chu Trinh, Quận Ba Đình, **Hà Nội**.
4. *Phạm Phi Điệp*, 7A, THCS Yên Thọ, Ý Yên, **Nam Định**.
5. *Khổng Hoàng Trang*, 7D, THCS Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**.

6. *Lê Thị Tuyết Mai*, 8A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
7. *Nguyễn Thị Ngọc*, 8A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
8. *Đào Hoàng Tùng*, 8A3, THCS Chu Văn An, TP. **Thái Nguyên**.
9. *Nguyễn Quốc Trường*, 8A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải, **Thái Bình**.
10. *Đậu Thế Vũ*, 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**.
11. *Võ Đức Huy*, 9/4, THCS Lê Quý Đôn, TP. Rạch Giá, **Kiên Giang**.
12. *Bùi Trần Long*, 9A5, THCS Chu Văn An, Quận 1, **TP. Hồ Chí Minh**.
13. *Phạm Duy Long*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Quận Cầu Giấy, **Hà Nội**.
14. *Lê Trọng Cường*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, **Thanh Hóa**.
15. *Hồ Hữu Quân*, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**.
16. *Trần Quốc Luật*, 10A1, THPT Cao Thắng, Hương Sơn, **Hà Tĩnh**.
17. *Mạc Thế Trường*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
18. *Vũ Đại Nghĩa*, 10T, THPT Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá, **Kiên Giang**.
19. *Nguyễn Duy Cương*, 10T, THPT Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**.
20. *Đinh Ngọc Thái*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.
21. *Trần Hoàng Bá*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng**.
22. *Nguyễn Như Quốc Trung*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP **Đà Nẵng**.
23. *Nguyễn Đình Quốc Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột, **Đăk Lăk**.
24. *Hoàng Minh Thắng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An**.
25. *Đỗ Đức Tài*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.

Giải Khuyến khích (**46** giải)

1. *Lê Hồng Dung*, 6A1, THCS Nguyễn Tất Thành, Quận Cầu Giấy, **Hà Nội**.
2. *Đinh Uyt Nây*, 6B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**.
3. *Nguyễn Hữu Thắng*, 6B, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**.
4. *Nguyễn Thị Kim Oanh*, 6C, THCS Bắc Hồng, TX. Hồng Lĩnh, **Hà Tĩnh**.
5. *Nguyễn Tiến Liên*, 7A, THCS Yên Trường, Yên Định, **Thanh Hóa**.
6. *Nguyễn Văn Luận*, 7A1, THCS TTr. Chờ, Yên Phong, **Bắc Ninh**.
7. *Bùi Hồng Ngọc*, 7A6, THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**.
8. *Bùi Văn Hoàng*, 7B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**.
9. *Trần Văn Thành*, 7A, THCS Cam Hiếu, Cam Lộ, **Quảng Trị**.
10. *Võ Thành Văn*, 7B, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch, **Quảng Bình**.
11. *Khương Mạnh Thắng*, 8A, THCS Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**.
12. *Phạm Thị Tuyết Hạnh*, 8A1, THCS Bình Thủy, **TP. Cần Thơ**.
13. *Bùi Bắc Nam*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**.
14. *Nguyễn Đồng Tiến*, 8A3, THCS Lương Thế Vinh, TP. Quy Nhơn, **Bình Định**.
15. *Nguyễn Danh Dũng*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
16. *Hoàng Minh Lập*, 8E, THCS Quang Trung, Kiến Xương, **Thái Bình**.
17. *Trương Thành Công*, 8A, THCS Nguyễn Khuyến, Eakar, **Đăk Lăk**.
18. *Trần Viết Thành*, 9A2, THCS Trà Lân, Con Cuông, **Nghệ An**.
19. *Trần Vũ Trung*, 9A9, THCS Phùng Chí Kiên, TP. **Nam Định**.
20. *Nguyễn Huy Linh*, 9B, THCS Yên Bái, Yên Định, **Thanh Hóa**.
21. *Trần Thị Hồng Vân*, 9D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**.
22. *Nguyễn Văn Pho*, 9A1, THCS TTr. Chờ, Yên Phong, **Bắc Ninh**.
23. *Lê Đại Thành*, 9A4, THCS Trà Nóc, **TP. Cần Thơ**.
24. *Nguyễn Quốc Trung*, 9A7, THCS Nguyễn Tri Phương, TX Tây Ninh, **Tây Ninh**.
25. *Phạm Ngọc Dương*, 9B, THCS Phú Thái, Kim Thành, **Hải Dương**.
26. *Nguyễn Thế Anh*, 9C, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mĩ, **Hà Tây**.
27. *Lê Nhật Minh*, 9E, THCS Chu Văn An, Nga Sơn, **Thanh Hóa**.
28. *Đinh Thành Nhân*, 9A7, THCS Quang Trung, TP Đà Lạt, **Lâm Đồng**.

29. *Khổng Hoàng Thao*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
30. *Vũ Thanh Tú*, 10A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang, Hải Dương.
31. *Trần Văn Hạnh*, 10A5, THPT Ninh Giang, **Hải Dương**.
32. *Võ Văn Tuấn*, 10T, PTNK ĐHQG **TP. Hồ Chí Minh**.
33. *Trần Bá Trung*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
34. *Nguyễn Đức Công*, 10A1, THPT Đô Lương I, Đô Lương, **Nghệ An**.
35. *Hà Trọng Sỹ*, 10T, THPT chuyên Bắc Giang, **Bắc Giang**.
36. *Trịnh Quang Thanh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.
37. *Lý Trần Đức Anh*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng**.
38. *Nguyễn Thị Thanh Hoa*, 11A1 Toán, Khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
39. *Trịnh Ngọc Dương*, 11A1, Khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
40. *Nguyễn Văn Trung*, 11A2, THPT Bình Minh, Đan Phượng, **Hà Tây**.
41. *Lê Trung Hiếu* , 11 Toán, PTNK Trần Phú, **Hải Phòng**.
42. *Nguyễn Quốc Đại*, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Nam Định**.
43. *Chương Công Danh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**.
44. *Nguyễn Ngọc Uyên*, 12A3, THPT Phúc Thành, Kinh Môn, **Hải Dương**.
45. *Lê Văn Chánh*, 12T, THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre**.
46. *Võ Tá Sơn*, 12A1, THPT Trần Phú, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Môn VẬT LÍ

Giải Nhất (1 giải)

Phạm Đức Linh, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

Giải Nhì (3 giải)

1. *Lê Bá Sơn*, 11F, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.
2. *Nguyễn Tất Nghĩa*, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
3. *Trần Việt Long*, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.

Giải Ba (4 giải)

1. *Trần Văn Thắng*, 11A3, K34, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An**.
2. *Nguyễn Đức Sơn*, 11A3, K34, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An**.
3. *Trần Văn Giai*, 11A3, K34, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An**.
4. *Nguyễn Ngọc Đăng*, 10A1, THPT Phú Xuyên A, **Hà Tây**.

Giải khuyến khích (10 giải)

1. *Lỗ Tất Thắng*, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
2. *Hoàng Mạnh Thắng*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
3. *Phan Đình Thái*, 11G-K34, THPT Nghĩa Đàn, **Nghệ An**.
4. *Tạ Đức Mạnh*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
5. *Trương Mai Thanh Tâm*, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang**.
6. *Trần Hoàng Bá*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng**.
7. *Thế Anh*, 11A1, THPT Phong Châu, **Phú Thọ**.
8. *Văn Đăng Sơn*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
9. *Trần Thế Minh*, 11-K33A1, THPT Nguyễn Huệ, **Hà Tĩnh**.
10. *Nguyễn Thế Năng*, 12A1, THPT Nguyễn Tất Thành, **Hà Nội**.

Xin chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải. Các bạn hãy gửi địa chỉ mới của mình về Tòa soạn để nhận Giải thưởng và Giấy Chứng nhận.

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN thi Học sinh giỏi Quốc gia THPT

NĂM HỌC 2006 - 2007

(Tiếp theo kì trước)

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV Trường ĐHSP Hà Nội)

Câu 5. (*3 điểm*)

Cho b là một số thực dương. Hãy xác định tất cả các hàm số f xác định trên tập các số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thoả mãn phương trình

$$f(x+y)=f(x).3^{b^y+f(y)-1}+b^x(3^{b^y+f(y)-1}-b^y),$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$f(x+y)+b^{x+y}=(f(x)+b^x)3^{b^y+f(y)-1}$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Đặt $g(x)=f(x)+b^x$. Khi đó (1) có dạng

$$g(x+y)=g(x)3^{g(y)-1}\quad \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Thay $y = 0$ vào PT (2) ta được

$$g(x)=g(x)3^{g(0)-1}\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\\ g(0)=1.\end{array}\right.$$

- Với $g(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ thì $f(x)=-b^x$.
- Với $g(0)=1$, thế $x=0$ vào PT (2) ta được

$$g(y)=g(0)3^{g(y)-1} \Leftrightarrow g(y)=3^{g(y)-1}$$
$$\Leftrightarrow 3^{g(y)-1}-g(y)=0 \quad \forall y\in\mathbb{R} \qquad (3)$$

Xét hàm số $h(t)=3^{t-1}-t$ có $h'(t)=3^{t-1}\ln 3-1$.
$h'(t)=0 \Leftrightarrow t=\log_3(\log_3 e)+1<1$.

Ta có bảng biến thiên sau, với
$a=\log_3 e-\log_3(\log_3 e)-1<0$.

t	$-\infty$		$\log_3(\log_3 e)+1$		1		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(t)$	$+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy PT $h(t)=0$ có hai nghiệm $t_1=1$ và $t_2=c$, với $0<c<1$ $\left(\text{vì } h(0)=\dfrac{1}{3}\right)$. Tức là $g(y)=3^{g(y)-1}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(y)=1\\ g(y)=c,\ 0<c<1.\end{array}\right. \forall y\in\mathbb{R} \qquad (4)$$

Giả sử tồn tại $y_0\in\mathbb{R}$ sao cho $g(y_0)=c$. Khi đó

$$1=g(0)=g(y_0-y_0)=g(-y_0).3^{g(y_0)-1}=c.g(-y_0).$$

Suy ra $g(-y_0)=\dfrac{1}{c}\neq c$, mâu thuẫn với (4). Vậy $g(y)=1\ \ \forall y\in\mathbb{R}$, suy ra $f(x)=1-b^x$.

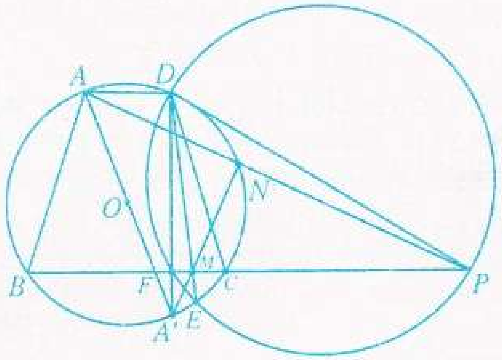
Vậy có hai hàm số thỏa mãn đề bài là
$f(x)=-b^x$ và $f(x)=1-b^x$. ❒

Câu 6. (*3 điểm*)

Cho hình thang ABCD có đáy lớn BC và nội tiếp đường tròn (O) tâm O. Gọi P là một điểm thay đổi trên đường thẳng BC và nằm ngoài đoạn BC sao cho PA không là tiếp tuyến của đường tròn (O). Đường tròn đường kính PD cắt (O) tại E (E khác D). Gọi M là giao điểm của BC với DE, N là giao điểm khác A của PA với (O). Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua tâm O. Ta chứng minh N, M, A' thẳng hàng, từ đó suy ra MN đi qua A' cố định.



Thật vậy, trước tiên ta có DE là trục đẳng phương của đường tròn (O) và đường tròn (γ_1) đường kính PD. Để ý $\widehat{PNA'} = 90^\circ$ nên NA' là trục đẳng phương của đường tròn (O) và đường tròn (γ_2) đường kính PA'.

Giả sử DA' cắt BC tại F, do $\widehat{ADA'} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PFA'} = 90^\circ$ nên BC là trục đẳng phương của (γ_1) và (γ_2). Vì các trục đẳng phương đồng quy tại tâm đẳng phương, suy ra DE, BC và NA' đồng quy tại điểm M, vậy M, N, A' thẳng hàng. ❐

Câu 7. (*3 điểm*)

Cho số thực $a > 2$.

Đặt $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \ldots + x + 1$ ($n = 1, 2, \ldots$). Chứng minh rằng với mỗi n phương trình $f_n(x) = a$ có đúng một nghiệm $x_n \in (0; +\infty)$ và dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Lời giải

Với mỗi n, đặt $g_n(x) = f_n(x) - a$; khi đó $g_n(x)$ là hàm liên tục, tăng trên $[0; +\infty)$. Ta có $g_n(0) = 1 - a < 0$; $g_n(1) = a^{10} + n + 1 - a > 0$, nên $g_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất x_n trên $(0; +\infty)$.

Để chứng minh tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$, ta chứng minh dãy (x_n) ($n = 1, 2, \ldots$) tăng và bị chặn.

Ta có

$$g_n\left(1-\frac{1}{a}\right) = a^{10}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n+10} + \frac{1-\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n+1}}{\frac{1}{a}} - a$$

$$= a\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n+1}\left(a^9\left(1-\frac{1}{a}\right)^9 - 1\right)$$

$$= a\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n+1}\left((a-1)^9 - 1\right) > 0.$$

Suy ra $x_n < 1 - \frac{1}{a}$, $n = 1, 2, \ldots$

Mặt khác, từ

$g_n(x_n) = a^{10}x_n^{n+10} + x_n^n + \ldots + 1 - a = 0$, suy ra

$x_n g_n(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + \ldots + x_n - ax_n = 0$

$\Rightarrow g_{n+1}(x_n) = x_n g_n(x_n) + 1 + ax_n - a = ax_n + 1 - a < 0$, do $x_n < 1 - \frac{1}{a}$.

Vì g_{n+1} là hàm tăng và $0 = g_{n+1}(x_{n+1}) > g_{n+1}(x_n)$ nên $x_n < x_{n+1}$. Vậy dãy (x_n) ($n = 1, 2, \ldots$) tăng và bị chặn, nên tồn tại $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. ❐

Nhận xét. *Có thể chứng minh $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1 - \frac{1}{a}$ bằng cách đánh giá bất đẳng thức*

$$1 - \frac{1}{a} - a\left((a-1)^9 - 1\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n+1} < x_n < 1 - \frac{1}{a}.$$

Thật vậy, ta có

$$a = a^{10}x_n^{n+10} + x_n^n + \ldots + x_n + 1$$

$$< a^{10}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n+10} + \left(1-\frac{1}{a}\right)^n + \ldots + \left(1-\frac{1}{a}\right)^2 + x_n + 1.$$

Suy ra

$$a < a^{10}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n+10} + a\left(\left(1-\frac{1}{a}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{a}\right)^{n+1}\right) + x_n + 1,$$

kéo theo

$$x_n > 1 - \frac{1}{a} - a\left((a-1)^9 - 1\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n+1}$$

CÁC LỚP THCS

Bài T1/365. (Lớp 6) Viết số 2005^{2006} thành tổng của các số tự nhiên rồi đem cộng tổng các chữ số của chúng lại. Hỏi kết quả nhận được có thể là 2006 hoặc 2007 được không? Vì sao?

TRẦN VĂN TỎ
(SV K28D, Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2)

Bài T2/365. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Lấy điểm D thuộc nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C sao cho tam giác DAB vuông cân tại D; điểm E (khác A) thuộc đoạn AD. Đường thẳng qua E, vuông góc với BE cắt AC tại F. Chứng minh rằng $EF = EB$.

NGUYỄN THÁI HÒA
(GV TrH Thực hành, ĐHSP TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/365. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{x-y}{x^4+y^4+6}.$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV TP. Hồ Chí Minh)

Bài T4/365. Giải phương trình

$$\sqrt{2}(x^2+8)=5\sqrt{x^3+8}.$$

NGUYỄN ĐỨC MẠNH
(SV K46 ĐH Giao thông Vận tải, Hà Nội)

Bài T5/365. Hai đường chéo AC và BD của tứ giác nội tiếp $ABCD$ cắt nhau tại O. Đường tròn (S_1) ngoại tiếp tam giác ABO và đường tròn (S_2) ngoại tiếp tam giác CDO cắt nhau tại O và K. Đường thẳng qua O song song với AB cắt (S_1) tại N và đường thẳng qua O song song với CD cắt (S_2) tại M. Gọi P và Q theo thứ tự là các điểm thuộc ON và OM sao cho $\frac{OP}{PN}=\frac{MQ}{QO}$. Chứng minh rằng bốn điểm O, K, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/365. Một hộp đựng chín thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải rút ra ít nhất bao nhiêu thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn $\frac{5}{6}$?

ĐỖ THANH HÂN
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

Bài T7/365. Cho n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thuộc $[a\,;\,b]$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

HOÀNG TUÂN
(SV K38, C43, Học viện Kĩ thuật Quân sự, Hà Nội)

Bài T8/365. Gọi H là trực tâm của một tam giác nhọn ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{HA^2+HB^2+HC^2}{a^2+b^2+c^2}\le$$
$$\le(\cot A.\cot B)^2+(\cot B.\cot C)^2+(\cot C.\cot A)^2.$$

THÁI VIẾT THẢO
(Sở Giáo dục & Đào tạo Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/365. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $k=\left[\frac{2p}{3}\right]$. (Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x). Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{k} C_p^i$ chia hết cho p^2.

PHẠM VĂN HOÀNG
(SV Lớp KTNL2-K49, ĐHBK Hà Nội)

Bài T10/365. Hãy xác định các góc của tam giác ABC, biết rằng

$$\cos\frac{5A}{2}+\cos\frac{5B}{2}+\cos\frac{5C}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T11/365. Cho (x_n), $(n = 1, 2, ...)$ là một dãy số bị chặn trên và thoả mãn điều kiện

$$x_{n+2} \geq \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n \quad \text{với mọi } n = 1, 2, ...$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n), $(n = 1, 2, ...)$ có giới hạn khi n tăng lên vô hạn.

NGUYỄN TÀI CHUNG
(GV THPT K'Bang, Gia Lai)

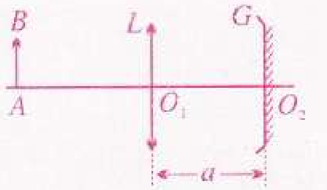
Bài T12/365. Gọi $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'$ và γ, γ' tương ứng là số đo các cặp góc nhị diện đối diện cạnh BC, DA; CA, DB và AB, DC của một tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng

$$\sin\alpha + \sin\alpha' + \sin\beta + \sin\beta' + \sin\gamma + \sin\gamma' \leq 4\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

NGUYỄN TIẾN LÂM
(SV K50A1S, Khoa Toán- Cơ- Tin ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ



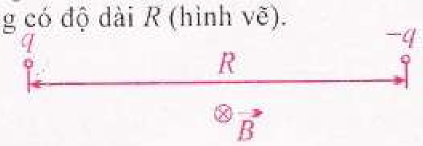
Bài L1/363. Đặt vật AB vuông góc với trục chính O_1O_2 của thấu kính L và gương cầu lõm G như hình vẽ. Thấu kính L có tiêu cự $f_1 = 20$cm, gương cầu lõm G có tiêu cự $f_2 = 12$cm.

1) Xác định giá trị $a = O_1O_2$ để ảnh của AB tạo bởi hệ có chiều cao không đổi khi dịch chuyển vật AB dọc theo trục chính trước thấu kính L.

2) Nếu lấy thấu kính L đi thì ảnh của AB hứng được trên một màn ảnh E cao 0,9cm. Sau khi lấy thấu kính L đi và thay vào đó một bản thủy tinh có hai mặt song song dày $e = 2$cm thì phải dịch chuyển màn E ra xa hệ thêm một đoạn 13cm ta mới hứng được ảnh rõ nét của AB và ảnh này cao 1,2cm. Hãy tính chiết suất n của thuỷ tinh làm bản mặt song song.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/363. Hai hạt có cùng khối lượng m, mang điện tích là q và $-q$ bắt đầu chuyển động với vận tốc ban đầu bằng 0 trong một từ trường đều $\vec{B}$, vuông góc với đoạn thẳng nối chúng có độ dài R (hình vẽ).



1) Tìm giá trị cực tiểu B_0 của cảm ứng từ (từ trường tới hạn) để hai hạt không va chạm với nhau.

2) Tính khoảng cách r khi hai hạt tiến gần nhau nhất trong trường hợp $B > B_0$.

3) Tìm vận tốc các hạt và khoảng cách giữa chúng tại thời điểm hai hạt tiến đến gần nhau nhất trong từ trường tới hạn.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/365. (For 6th grade) Write 2005^{2006} as a sum of natural numbers, then calculate the sum of all the digits occurred in these summands. Can one obtain either 2006 or 2007 in this way? Why?

T2/365. (For 7th grade) Let ABC be an isosceles right triangle, right angle at A. Choose a point D in the half-plane on the side of AB that does not contain C such that DAB is also an isosceles right triangle, with right angle at D; Let E be a point (differs from A) on AD. The perpendicular line with BE through E intersects with AC at F. Prove that $EF = EB$.

T3/365. Find the maximum and minimum values of the following expression $\dfrac{x-y}{x^4+y^4+6}$.

T4/365. Solve the equation

$$\sqrt{2}(x^2+8) = 5\sqrt{x^3+8}.$$

T5/365. The two diagonals AC and BD of an inscribed quadrilateral $ABCD$ intersect at O. The circumcircles (S_1) of ABO and (S_2) of CDO meet at O and K. Through O, draw parallel lines with AB and CD ; they meet with (S_1) and (S_2) at N and M,

(Xem tiếp trang 28)

★Bài T1/361. *Số $(\overline{9x})^8$, với $x \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, viết trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số?*

Lời giải. • Ta có $\left(\overline{9x}\right)^8 < 100^8 < 10^{16}$ (1)

với mọi $x \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

• Ta chứng minh $90^8 > 10^{15}$, hay $9^8 > 10^7$ (2)

Thật vậy, ta có $9^8 = 81^4 > 80^4 = 10^4.8^4$

$= 10^4\left(2^4\right)^3 = 10^4.16^3 > 10^4.10^3 = 10^7$.

Từ (1) và (2) ta có $10^{15} < \left(\overline{9x}\right)^8 < 10^{16}$, với mọi $x \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ nên số $\left(\overline{9x}\right)^8$ viết trong hệ thập phân có 16 chữ số. ❐

Nhận xét. 1) Một số bạn bấm máy tính để có 90^8 và 99^8 có 16 chữ số rồi đưa ra kết luận nhưng ở đây đòi hỏi cách giải có lập luận.

Có thể sử dụng kết quả: Với $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a > b$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a-1}{b-1}$, hoặc $128 > 125$ ($2^7 > 5^3$) để suy ra (2).

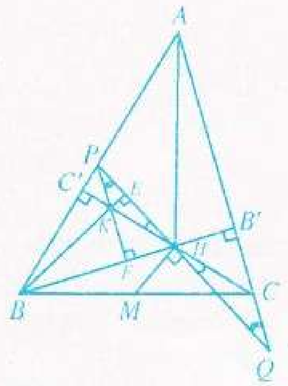
2) Tất cả các bạn gửi lời giải đều có đáp số đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Nguyễn Hữu Dũng*, 5B, TH Mỹ Hương, Lương Tài; **Nam Định:** *Nguyễn Xuân Trường*, 6A1, THCS Lý Tự Trọng, TP. Nam Định; **Vĩnh Phúc:** *Phan Văn Tín, Hoàng Thị Ánh*, 6A1, THCS Yên Lạc; **Bạc Liêu:** *Trần Quang Minh*, 6/1, THCS Trần Huỳnh, Tx. Bạc Liêu.

HOÀNG TRỌNG HẢO

★Bài T2/361. *Gọi H là giao điểm ba đường cao của một tam giác nhọn ABC và M là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng vuông góc với MH ở H cắt hai đường thẳng AB và AC tương ứng ở P và Q. Chứng minh rằng HP = HQ.*

Lời giải. Gọi K là trực tâm của tam giác BPH.



Giả sử BH cắt AC tại B', CH cắt AB tại B', BK cắt PQ tại E, PK cắt BH tại F. Ta có:

• $BE \perp PQ$ nên $BE // MH$ mà $BM = CM$ suy ra $KH = CH$ (1)

• $PF \perp BB'$, $AC \perp BB'$ nên $PF // AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\Delta HKP = \Delta HCQ$ (g.c.g) $\Rightarrow HP = HQ$ (đpcm). ❐

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, tuy nhiên chỉ có 19 bạn tham gia giải, có tới 4 bạn sử dụng kiến thức lớp 8, lớp 9 trong lời giải (định lí Thales, tam giác đồng dạng, tứ giác nội tiếp).

2) Xin nêu tên các bạn có lời giải tốt:

Quảng Nam: *Phạm Hoàng Thiệu*, 7A1, THCS Lương Thế Vinh, Tam Thành; **Hải Phòng:** *Nguyễn Đức Anh*, 9A1, THCS Trần Phú, Q. Lê Chân; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoàng Hào, Nguyễn Duy Anh*, 7A1, *Nguyễn Thành Hưng*, 8A1, THCS Yên Lạc.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T3/361. *Chứng minh rằng nếu a, b, c, d là các số nguyên dương đôi một khác nhau sao cho biểu thức $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a}$ là một số nguyên thì tích abcd là một số chính phương.*

Lời giải. Nhận xét :

Nếu x, y, z là các số dương thì $\frac{x}{y+z} < \frac{x}{y}$ (1)

ngoài ra, nếu $x < y$ thì $\frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+z}$ (2)

Thật vậy, BĐT (1) là hiển nhiên còn BĐT (2) được suy ra từ

$$\frac{x}{y} - \frac{x+z}{y+z} = \frac{xz - yz}{y(y+z)} = \frac{z(x-y)}{y(y+z)} < 0.$$

Áp dụng các BĐT (1) và (2) với các số nguyên dương a, b, c, d ta có

$$\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b}<\frac{a+c+d}{a+b+c+d};$$

$$\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c}<\frac{b+a+d}{a+b+c+d};$$

$$\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d}<\frac{c+a+b}{a+b+c+d};$$

$$\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a}<\frac{d+b+c}{a+b+c+d}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên, ta được

$$1<T=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}<3.$$

Vì T là một số nguyên nên

$$T=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}=2.$$

Vậy

$$\left(\frac{a}{a+b}-1\right)+\frac{b}{b+c}+\left(\frac{c}{c+d}-1\right)+\frac{d}{d+a}=0$$

$$b\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b}\right)-d\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{d+a}\right)=0$$

$$(a-c)\left(\frac{b}{(b+c)(a+b)}-\frac{d}{(d+a)(c+d)}\right)=0.$$

Vì $a-c\neq 0$ nên

$$\frac{b}{(b+c)(a+b)}=\frac{d}{(d+a)(c+d)}.$$

Biến đổi và rút gọn được $bd^2-db^2+abc-acd=0$ hay $(b-d)(ac-bd)=0$.

Vì $b-d\neq 0$ nên $ac=bd$.

Vậy $abcd=(ac)^2$ là một số chính phương.□

Nhận xét. 1) Đây là bài toán khá hay và không đơn giản. Điều then chốt của lời giải là chứng minh $T=2$ rồi từ đó suy ra $ac=bd$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Phú Thọ: *Vũ Văn Hiệp*, 9A, THCS Đỗ Xuyên, Thanh Ba, *Tạ Hải Nam*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thế Bảo*, 7A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Dũng*, 5B, TH Mĩ Hương, *Lương Tài*; **Hà Nội:** *Phạm Đức Nam*, 9B, THCS Cự Khối, Long Biên; **Hà Nam:** *Trần Trung Kiên*, 9B, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Hà Tây:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 9A3, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Hải Dương:** *Phạm Ngọc Dương*, 9B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Hải Phòng:** *Bùi Đức Anh*, 9A1, THCS Trần Phú, Q. Lê Chân; **Thanh Hoá:** *Lê Ngọc Tư*, 9A, Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Vũ Đình Long*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, *Nguyễn Sỹ Hoàng*, 9A, THCS Văn Sơn, Đô Lương, *Hồ Hữu Quân*, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Đậu Thế Vũ*, *Hoàng Văn Thắng*, *Nguyễn Trung Đức*, 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Trần Viết Thành*, 9A2, THCS Trà Lân, Con Cuông; **Cần Thơ:** *Lê Đại Thành*, 9A4, THCS Trà Nóc, TP Cần Thơ.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T4/361. *So sánh giá trị của các số A và B sau:*

$$A=\min_{|y|\le 1}\max_{|x|\le 1}(x^2+yx)$$

$$B=\max_{|x|\le 1}\min_{|y|\le 1}(x^2+yx).$$

Lời giải.

• *Tính A*: coi x^2+yx là hàm số bậc hai của x (y là tham số). Ta có

$$\max_{|x|\le 1}(x^2+yx)=\max\{1-y,1+y\}$$

$$=\begin{cases}1-y & \text{với } y\le 0\\ 1+y & \text{với } y\ge 0.\end{cases}$$

Đặt $g(y)=\max\limits_{|x|\le 1}(x^2+yx)$ thì $A=\min\limits_{|y|\le 1}g(y)$.

Với $-1\le y\le 0$ thì $g(y)=1-y$ là hàm số nghịch biến, nên $\min\limits_{-1\le y\le 0}g(y)=g(0)=1$.

Với $0\le y\le 1$ thì $g(y)=1+y$ là hàm số đồng biến, nên $\min\limits_{0\le y\le 1}g(y)=g(0)=1$.

Vậy $A=1$ (chẳng hạn khi $(x\,;\,y)$ là $(-1;\,0)$, $(1;\,0)$).

• *Tính B*: Coi x^2+yx là hàm số bậc nhất của y (x là tham số). Ta có

$$\min_{|y|\le 1}(x^2+yx)=\min\{x^2+x,x^2-x\}$$

$$=\begin{cases}x^2+x & \text{với } x\le 0\\ x^2-x & \text{với } x\ge 0.\end{cases}$$

Đặt $f(x)=\min\limits_{|y|\le 1}(x^2+yx)$ thì $B=\max\limits_{|x|\le 1}f(x)$.

Với $-1\le x\le 0$ thì

$$f(x)=x^2+x\le\max\{f(-1),f(0)\}=0.$$

Với $0 \le x \le 1$ thì

$$f(x) = x^2 - x \le \max\{f(0), f(1)\} = 0.$$

Vậy $B = 0$ (chẳng hạn khi $(x ; y)$ là $(0 ; 1)$, $(-1 ; 1)$, $(0 ; -1)$, $(1 ; -1)$). Vậy $A > B$.□

Nhận xét. Để giải bài này đòi hỏi phải vận dụng linh hoạt sự biến thiên của hàm số bậc nhất, hàm số bậc hai trong $[a ; b]$. Đa số các bạn đã quan niệm nhầm cho rằng $A = B$.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T5/361. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{z}}=\dfrac{8}{3} \\ x+y+z+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{118}{9} \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{y\sqrt{y}}-\dfrac{1}{z\sqrt{z}}=\dfrac{728}{27}. \end{cases}$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Điều kiện $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Đặt: $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=a$; $\sqrt{y}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}=b$; $\sqrt{z}-\dfrac{1}{\sqrt{z}}=c$

Ta có $x+\dfrac{1}{x}=a^2+2$; $x\sqrt{x}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=a^3+3a$;

$$y+\frac{1}{y}=b^2+2;\ y\sqrt{y}-\frac{1}{y\sqrt{y}}=b^3+3b;$$

$$z+\frac{1}{z}=c^2+2;\ z\sqrt{z}-\frac{1}{z\sqrt{z}}=c^3+3c.$$

Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{8}{3} & (1) \\ a^2+b^2+c^2=\dfrac{64}{9} & (2) \\ a^3+b^3+c^3=\dfrac{512}{27} & (3) \end{cases}$$

Ta có $3(a+b)(b+c)(c+a)$

$= (a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$

$= \left(\dfrac{8}{3}\right)^3-\dfrac{512}{27}=0$ (do (1) và (3)).

• Nếu $a + b = 0$ thì từ (1) suy ra $c = \dfrac{8}{3}$. Thay vào (2) ta được $a^2 + b^2 = 0$. Do đó $a = b = 0$.

Vậy $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{y}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}=0, \sqrt{z}-\dfrac{1}{\sqrt{z}}=\dfrac{8}{3}$. Suy ra $x = 1$, $y = 1$, $z = 9$.

Tương tự

• Với $b + c = 0$, tìm được $x = 9$, $y = 1$, $z = 1$.

• Với $c + a = 0$, tìm được $x = 1$, $y = 9$, $z = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm

$(x ; y ; z)$ là $(1 ; 1 ; 9)$, $(9 ; 1 ; 1)$, $(1 ; 9 ; 1)$. □

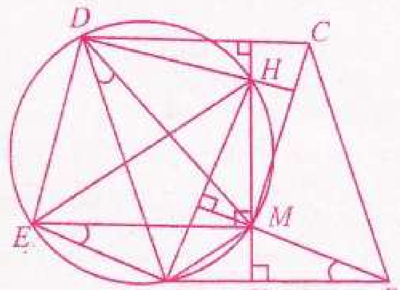
Nhận xét. Hầu hết các bạn đều giải đúng. Tuy nhiên, còn một số bạn nhầm lẫn trong tính toán. Các bạn có lời giải ngắn gọn là:

Thái Nguyên: *Đào Hoàng Tùng*, 8A3, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoàng Hải*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thế Nam Huy*, 8A, THCS Yên Phong; **Thanh Hóa:** *Trần Xuân Quang*, 9B, THCS Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Vũ Đình Long*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Lê Trọng Hiền*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Hồ Hữu Quân*, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Thu Hiền*, 9B, THCS Nguyễn Biểu, Đức Thọ; **Bình Định:** *Ngô Đình Thương*, 10A3, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T6/361. *Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm M khác các các đỉnh A, B, C, D sao cho $\widehat{MDA} = \widehat{MBA}$ và hai điểm B, D nằm trên hai nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AM. Chứng minh rằng hai tam giác MAB và MCD có cùng trực tâm.*

Lời giải. Gọi H là trực tâm tam giác MAB. Giả sử $MH \perp AB$ tại K (h. 1). Dựng hình bình hành $ABME$ thì $DCME$ cũng là hình bình hành, suy ra $DE // CM$, $MH \perp CD$ và $MH \perp EM$ (1)



Hình 1

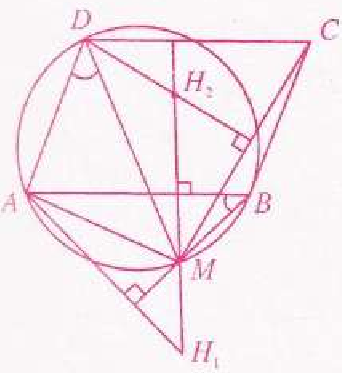
Theo giả thiết hai điểm B và D nằm về hai phía của đường thẳng AM nên hai điểm D và E nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AM.

Ta có $\widehat{MEA} = \widehat{MBA} = \widehat{MDA}$ nên bốn điểm A, M, D, E cùng nằm trên một đường tròn (2)

• Nếu H khác A thì $HA \perp BM$ mà $EA // BM$ nên $\widehat{HAE} = 90^\circ$, lại do $\widehat{HME} = 90^\circ$ theo (1), suy ra bốn điểm A, M, E, H nằm trên cùng một đường tròn đường kính EH.

• Nếu H trùng với A thì kết luận trên vẫn đúng.

Kết hợp với (2) thì năm điểm A, M, H, D, E nằm trên cùng một đường tròn đường kính EH. Từ đó có $DH \perp DE$, mà $DE // CM$ theo (1), nên $DH \perp CM$, do đó kết hợp với (1) thì H là trực tâm của tam giác MCD. ❒



Hình 2

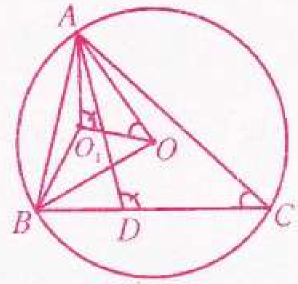
Nhận xét. 1) Nếu không có điều kiện *hai điểm B, D nằm trên hai nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AM* thì kết luận của bài toán không đúng. Ta thấy trên hình 2 trực tâm hai tam giác MAB và MCD khác nhau. Vì vậy *đề bài cũ đã được sửa lại* như trên.

2) Nhiều bạn đã giải đề toán cũ dựa vào hình vẽ, nhưng chỉ có bạn *Hồ Hữu Quân*, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An** nhận xét thêm rằng bài toán không đúng với điểm M bất kì trên mặt phẳng.

VIỆT HẢI

★**Bài T7/361.** *Gọi AD, BE, CF theo thứ tự là các đường phân giác trong tam giác ABC ($D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$); O và R theo thứ tự là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Gọi O_1, O_2 và O_3 theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, BCE và ACF. Chứng minh rằng*

$$\frac{3}{2}R \le OO_1 + OO_2 + OO_3 < 2R.$$



Lời giải. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Vì OO_1 là trung trực của AB nên

$$\widehat{AOO_1} = \widehat{BOO_1} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \widehat{ACB} \ (1)$$

$$\widehat{AO_1O} = \widehat{BO_1O} = \frac{1}{2}(360^\circ - \widehat{AO_1B}) = 180^\circ - \widehat{ADB} = \widehat{ADC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AOO_1 \backsim \Delta ACD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OO_1}{CD} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow OO_1 = \frac{R.CD}{b} \quad (3)$$

Vì AD là phân giác của góc BAC nên

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a}{CD} = \frac{b+c}{b} \Rightarrow \frac{CD}{b} = \frac{a}{b+c} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $OO_1 = \dfrac{a.R}{b+c}$.

Tương tự $OO_2 = \dfrac{b.R}{c+a}$, $OO_3 = \dfrac{c.R}{a+b}$.

Bài toán đưa về chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2 \quad (*)$$

• Ta có $a < b + c$ nên $a + b + c < 2(b + c)$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}.$$

Tương tự, $\dfrac{b}{c+a} < \dfrac{2b}{a+b+c}, \dfrac{c}{a+b} < \dfrac{2c}{a+b+c}$.

Cộng theo từng vế được $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} < 2$.

• Áp dụng BĐT Bunyacovski ta có

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \ge 9,$$

suy ra $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$.

Bất đẳng thức (*) được chứng minh. ❒

Nhận xét. 1) Mấu chốt của bài toán là chứng minh bất đẳng thức (*).

2) Các bạn tham gia gửi bài đều cho lời giải đúng :

Hải Dương: *Vũ Thanh Tú*, 10A$_1$, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang, *Phạm Minh Quang*, 9C, THCS Thành Nhân, Ninh Giang; **Thái Bình**: *Nguyễn Văn Pha*, 10A$_3$, THPT Bắc Kiến Xương; **Thanh Hóa:** *Trần Xuân Quang*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa ; **Nghệ An**: *Vũ Đình Long*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Trần Viết Thành*, 9A$_2$, THCS Trà Lân, Con Cuông.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T8/361. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=[a+b]+[b+c]+[c+a]$, *trong đó kí hiệu* $[x]$ *là phần nguyên của x.*

Lời giải. (Theo bạn *Vũ Thanh Tú*, 10A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang, **Hải Dương**).

Từ BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta có

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ ;\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

Suy ra $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$.

Từ đó $a+b+c\ge 9$ (vì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 1$).

Ta có

$$P+3=([a+b]+1)+([b+c]+1)+([c+a]+1)$$
$$\ge (a+b)+(b+c)+(c+a)\ge 18.$$

Vậy $P>15$.

Vì $P\in\mathbb{Z}$ nên $P\ge 16$. Với $a=\frac{5}{2}$; $b=c=\frac{17}{5}$ thì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{84}{85}<1$ và

$$P=[a+b]+[b+c]+[c+a]=5+6+5=16.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là 16. ❐

Nhận xét. Nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Tất cả các bạn đều giải đúng. Các bạn có lời giải tốt:

Nam Định: *Nguyễn Văn Định*, 10A1, THPT Giao Thủy; **Hải Dương:** *Bùi Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Hoàng Đức Ý*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Bình Định:** *Võ Xuân Thanh*, 12A6, THPT Tuy Phước; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thị Diễm Thủy*, 10A2, THPT Hương Hóa; **Đồng Nai:** *Nguyễn Ngọc Hoa Quỳnh*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Bến Tre:** *Lê Văn Chánh*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T9/361. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f(x^3-y)+2y(3f^2(x)+y^2)=f(y+f(x))$$

với mọi $x, y\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Giả sử $f(x)$ là hàm số thỏa mãn điều kiện của bài toán. Với $x\in\mathbb{R}$ tùy ý, lấy $y=x^3$ ta có

$$f(0)+2x^3(3f^2(x)+x^6)=f(x^3+f(x))\quad (1)$$

lấy $y=-f(x)$ ta có

$$f(x^3+f(x))-2f(x)(3f^2(x)+f^2(x))=f(0)\,(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$2x^3(3f^2(x)+x^6)=8f^3(x).$$

Do đó $0=4f^3(x)-x^3(3f^2(x)+x^6)$

$$=(4f^3(x)-4f^2(x).x^3)+(f^2(x).x^3-x^9)$$
$$=(f(x)-x^3)(4f^2(x)+x^3(f(x)+x^3))$$
$$=(f(x)-x^3)\left(\left(2f(x)+\frac{x^3}{4}\right)^2+\frac{15}{16}.x^6\right).$$

Chú ý rằng $\left(2f(x)+\frac{x^3}{4}\right)^2+\frac{15}{16}.x^6=0$ thì $x=0$, $f(0)=0$. Bởi vậy trong mọi trường hợp ta có $f(x)=x^3$.

Thử lại $(x^3-y)^3+2y(3x^6+y^2)$

$$=x^9+3x^6y+3x^3y^2+y^3=(y+x^3)^3.$$

Vậy $f(x)=x^3$ (với mọi $x\in\mathbb{R}$) là hàm số duy nhất thỏa mãn điều kiện của bài toán. ❐

Nhận xét. Có bạn học sinh đã lưu ý đây là Bài 3, trang 11 trong cuốn sách "Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, lần thứ XII – năm 2006, NXB Giáo dục. Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Mạc Thị Thu Huệ*, 7A, THCS Đồng Quế, Lập Thạch, *Phạm Ngọc Xuyến*, 9C, THCS Lập Thạch, *Nguyễn Văn Tú*, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hải Dương:** *Vũ Thanh Tú*, 10A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang, *Trần Văn Hạnh*, 10A5, THPT Ninh Giang; **Hà Nam:** *Trần Thế Khải*, 9B, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Định*, 10A1, THPT Giao Thủy; **Thanh Hóa:** *Trần Xuân Quang*, 9B, THCS Trần Mai Ninh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T10/361. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có*

$$-1 < 6\cos A + 3\cos B + 2\cos C < 7 \qquad (1)$$

Lời giải. (Theo bạn *Mạc Thế Trường*, 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** và nhiều bạn khác).

Nhận xét rằng với mọi tam giác ABC, ta đều có

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \geq 0,$$

$\cos A + \cos C \geq 0$, $\cos A > -1$.

Vậy $6\cos A + 3\cos B + 2\cos C$

$= 3(\cos A + \cos B) + 2(\cos A + \cos C) + \cos A > -1$.

Số -1 ở vế trái của (1) là tối ưu vì ta chỉ cần chọn $B = C = \beta$, $A = \pi - 2\beta$ thì

$$\lim_{\beta\to 0}(6\cos A + 3\cos B + 2\cos C)$$

$$= \lim_{\beta\to 0}(6\cos(\pi - 2\beta) + 3\cos\beta + 2\cos\beta) = -1.$$

Mặt khác

$6\cos A + 3\cos B + 2\cos C$

$= 3(2\cos A + \cos B) + 2\cos C$

$< \frac{1}{2}(9 + (2\cos A + \cos B)^2) - 2(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$

$= \frac{1}{2}(9 + 4\cos^2 A + \cos^2 B + 4\sin A\sin B)$

$\leq \frac{1}{2}(9 + 4\cos^2 A + \cos^2 B + 4\sin^2 A + \sin^2 B) = 7.$

Số 7 ở vế phải của (1) là tối ưu vì ta chỉ cần chọn $A = B = \alpha$, $C = \pi - 2\alpha$ thì

$$\lim_{\alpha\to 0}(6\cos A + 3\cos B + 2\cos C)$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}(6\cos\alpha + 3\cos\alpha + 2\cos(\pi - 2\alpha)) = 7.$$

Từ đó suy ra BĐT cần chứng minh. ❒

Nhận xét. Đây là một bài toán chứng minh bất đẳng thức trong tam giác thuộc loại trung bình. Một số bạn còn sử dụng cách chứng minh quen thuộc theo phương pháp vectơ. Tuy nhiên, rất ít bạn chỉ được rằng các ước lượng hai phía của (1) là tối ưu và dấu đẳng thức xảy ra khi ta xem xét bất đẳng thức trong lớp các tam giác suy rộng (kể cả tam giác suy biến).

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T11/361. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi E là trung điểm của AB. Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho* $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$. *Dựng hình bình hành AEMF. Chứng minh rằng*

$$MA + MB + MC \leq \sqrt{11(R^2 - OM^2)}.$$

Giả sử (O ; R) là đường tròn cố định. Hãy dựng tam giác ABC nội tiếp (O ; R) sao cho

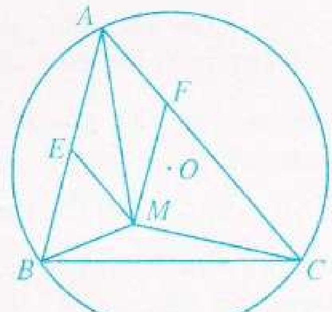
$$MA + MB + MC = \sqrt{11(R^2 - OM^2)}.$$

Lời giải. • Từ giả thiết bài toán, ta có

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}\right)$

hay $\frac{1}{6}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC} = \vec{0} \qquad (1)$



Mặt khác $R^2 = OA^2 = \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}\right)^2$

$= OM^2 + 2.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA} + MA^2.$

Dẫn tới $(R^2 - OM^2) - 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA} = MA^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(R^2 - OM^2) - 2\overrightarrow{OM}.\frac{1}{6}\overrightarrow{MA} = \frac{1}{6}MA^2 \qquad (2)$

Lập luận tương tự, cũng có

$\frac{1}{2}(R^2 - OM^2) - 2\overrightarrow{OM}.\frac{1}{2}\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}MB^2 \qquad (3)$

$\frac{1}{3}(R^2 - OM^2) - 2\overrightarrow{OM}.\frac{1}{3}\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}MC^2 \qquad (4)$

Cộng (2), (3), (4) theo vế và để ý đến (1) ta thu được

$$R^2 - OM^2 = \frac{1}{6}MA^2 + \frac{1}{2}MB^2 + \frac{1}{3}MC^2.$$

Từ đây, theo BĐT Bunyakovski ta thấy

$$11(R^2 - OM^2)$$
$$= (6+2+3)\left(\frac{1}{6}MA^2 + \frac{1}{2}MB^2 + \frac{1}{3}MC^2\right)$$
$$\ge \left(\sqrt{6}.\frac{1}{\sqrt{6}}MA + \sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}MB + \sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}MC\right)^2$$

$= (MA+MB+MC)^2$. Suy ra

$$MA + MB + MC \le \sqrt{11(R^2 - OM^2)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$MA = 3MB = 2MC \qquad (5)$$

• Bây giờ xác định các điểm B_1, C_1 sao cho $\overrightarrow{MB_1} = 3\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC_1} = 2\overrightarrow{MC}$. Khi đó từ (1) và (5) suy ra $\begin{cases} MA = MB_1 = MC_1 \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = \vec{0}. \end{cases}$

Điều này chứng tỏ tam giác AB_1C_1 đều. Từ đó suy ra cách dựng tóm tắt như sau:

Trên mặt phẳng, dựng tam giác đều $A_1B_1C_1$, tâm là M_1. Xác định các điểm B_2, C_2 sao cho $\overrightarrow{M_1B_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{M_1B_1}$, $\overrightarrow{M_1C_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1C_1}$. Dựng đường tròn tâm O_1, bán kính R_1 ngoại tiếp tam giác $A_1B_2C_2$. Dựng tam giác $A'_1B'_2C'_2$ là ảnh của tam giác $A_1B_2C_2$ qua phép vị tự tâm O_1, tỉ số $\frac{R}{R_1}$. Cuối cùng, dựng tam giác ABC là ảnh của tam giác $A'_1B'_2C'_2$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{O_1O}$. ❒

Nhận xét. 1) Từ hệ thức (1) bạn *Trần Nhật Tân*, 10A1 Toán, Khối THPT chuyên ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội** đã đề xuất và giải đúng bài toán khái quát hóa sau: *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. M là điểm nằm trong đường tròn (O); còn* α_1, α_2, α_3 *là các số thực dương thỏa mãn* $\alpha_1\overrightarrow{MA} + \alpha_2\overrightarrow{MB} + \alpha_3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. *Chứng minh*

$$MA + MB + MC \le \sqrt{\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(R^2 - OM^2)}.$$

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

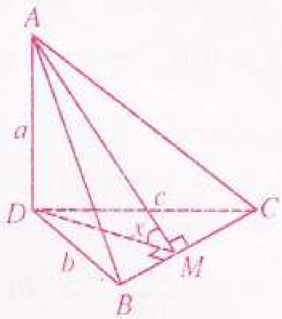
Hà Nội: *Nguyễn Đình Tương*, 10A1 Toán, *Phạm Ngọc Trâm*, 11A1 Tin, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Hải Phòng:** *Lý Trần Đức Anh*, 11 toán, THPT NK Trần Phú; **Quảng Ninh:** *Phạm Đức Mạnh*, 11 Toán, THPT chuyên Hạ Long; **Hải Dương:** *Trần Văn Hạnh*, 10A5, THPT Ninh Giang; **Thanh Hóa:** *Trịnh Quốc Đức*, 11B2, THPT Bỉm Sơn; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Đình*, 10A1, THPT Giao Thủy; **Bình Định:** *Dương Tú*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Võ Xuân Thanh*, 12A6, THPT số 2 Tuy Phước; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Dương Văn An*, 11A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa ; **Vĩnh Long:** *Châu Tuấn Kiệt*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

HỒ QUANG VINH

★Bài T12/361. *Giả sử ABCD là một tứ diện vuông ở D (góc tam diện đỉnh D có ba mặt vuông ở D). Kí hiệu x, y, z theo thứ tự là độ lớn các góc nhị diện cạnh BC, CA, AB của tứ diện đó. Chứng minh bất đẳng thức*

$$(2+\tan^2 x)(2+\tan^2 y)(2+\tan^2 z) \ge 64 \qquad (*)$$

Lời giải. (Theo bạn *Trịnh Quốc Đức*, 11B2, THPT Bỉm Sơn, **Thanh Hóa** và *Phạm Đức Mạnh*, 11 Toán, THPT chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**).



Dựng $DM \perp BC$, thế thì $AM \perp BC$, do đó, $\widehat{DMA}$ là góc phẳng nhị diện cạnh BC của tứ diện $ABCD$: $\widehat{DMA} = x$, $\frac{DA}{DM} = \tan x$.

Đặt $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, ta được

$$\tan^2 x = \frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2c^2}.$$

Suy ra $2 + \tan^2 x = 2 + \frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2c^2}$

$$\ge 2 + \frac{2a^2}{bc} \ge 4\sqrt{\frac{a^2}{bc}} = \frac{4a}{\sqrt{bc}} \qquad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$.

Tương tự $2 + \tan^2 y \ge \frac{4b}{\sqrt{ca}}$ (2)

và $2 + \tan^2 z \ge \frac{4c}{\sqrt{ab}}$. (3)

Từ đó ta thu được BĐT (*). Đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi dấu đẳng thức ở (1), (2) và (3) đồng thời xảy ra, nghĩa là khi và chỉ khi $a = b = c$. Khi đó $ABCD$ là một *tứ diện vuông cân ở đỉnh D*. ❒

Nhận xét. 1) Lời giải trên đây là *lời giải ngắn gọn nhất*, chỉ cần huy động ít nhất vốn kiến thức về hình học (góc phẳng nhị diện) cũng như về đại số (BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân của hai số dương).

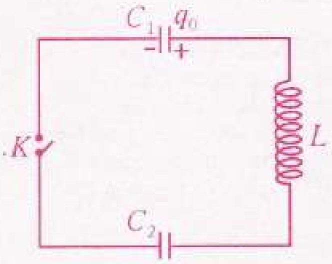
2) Đa số các bạn sử dụng kiến thức ở ngoài SGK cả về hình học và đại số trong lời giải vì thế dài dòng. Chẳng hạn, sử dụng hoặc chứng minh các hệ thức: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ và $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 = 1$, trong đó $h = DH$ là đường cao hạ từ D xuống mặt huyền ABC của tứ diện $ABCD$ vuông ở D; còn về đại số thì sử dụng BĐT Cauchy cho 3 số hoặc 4 số dương.

3) Ngoài hai bạn trên, các bạn sau đây có lời giải gọn gàng hơn cả:

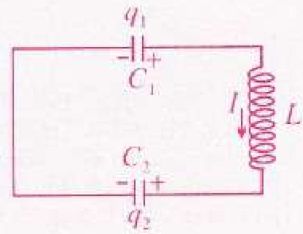
Vĩnh Phúc: *Nguyễn Hoàng Hải, Mạc Thế Trường*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** *Tưởng Thế Nghĩa*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Đào Đức Huân, Nguyễn Cao Tuấn*, 10T, *Hoàng Đức Ý*, 11T, THPT Lam Sơn, *Lê Thị Thủy*, 11A1, THPT Đông Sơn I; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồ Như Ý*, A3K34, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Nguyễn Đức Công*, 10A1, THPT Đô Lương 1, *Ngô Văn Biên*, 11A1, THPT Diễn Châu IV; **Vĩnh Long:** *Chương Công Danh*, 12T1, *Châu Tuấn Kiệt*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TX. Vĩnh Long.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

★Bài L1/361. *Trong mạch dao động LC trên hình vẽ, khi khóa K ngắt, điện tích trên tụ thứ nhất có điện dung C_1 bằng q_0, còn tụ thứ hai có điện dung C_2 không tích điện. Hỏi bao lâu sau khi khóa K đóng điện tích trên tụ C_2 đạt giá trị cực đại? Bỏ qua điện trở thuần của mạch.*



Lời giải. Ta xét tại một thời điểm tùy ý sau khi khóa K đóng. Giả sử tại thời điểm đó, điện tích trên tụ thứ nhất là q_1, còn trên tụ thứ hai là q_2 và trong mạch có dòng điện i. Vì chỉ quan tâm tới giá trị $q_{2\max}$, nên ta sẽ tìm biểu thức $q_2(t)$. Theo định luật Ohm ta có $-Li' = \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_1}$.



Vì $i = q'_2$ và $q_1 + q_2 = q_0$, nên phương trình trên ta có thể đưa về phương trình của q_2:

$$q''_2 + \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2} q_2 = \frac{q_0}{LC_1}$$

Ta đưa vào biến mới $X = q_2 - \frac{q_0C_2}{C_1 + C_2}$ lại nhận được phương trình mô tả dao động điều hòa: $X'' + \omega_0^2 X = 0$, trong đó $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}$ là tần số dao động riêng của mạch. Nghiệm của phương trình trên là

$$X(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

Dùng điều kiện ban đầu tại $t = 0$, $q_2 = 0$ hay $X(0) = -\frac{q_0C_2}{C_1 + C_2}$ và $i = 0$ hay $X' = 0$, tìm được $A = -\frac{q_0C_2}{C_1 + C_2}$ và $B = 0$. Cuối cùng, trở lại biến q_2 ta được

$$q_2(t) = \frac{q_0C_2}{C_1 + C_{21}}(1 - \cos\omega_0 t).$$

Từ biểu thức trên ta thấy ngay q_2 lần đầu tiên đạt giá trị cực đại sau thời gian $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$, sau đó giá trị cực đại này sẽ được lặp lại với chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Trong trường hợp tổng quát, thời điểm để q_2 đạt giá trị cực đại có thể viết dưới dạng $t_n = \frac{\pi}{\omega_0}(1 + 2n)$ với $n = 0, 1, 2, 3...$

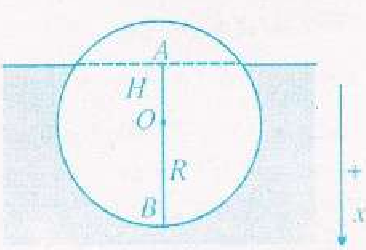
Giá trị cực đại đó bằng $q_{2\max} = \frac{q_0C_2}{C_1 + C_2}$. ❒

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Văn Đăng Sơn*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Trần Việt Long*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hải Phòng:** *Trần Hoàng Bá*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Duy Hùng, Lê Bá Sơn*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Bùi Hữu Hải*, K46H, THPT Đô Lương I, *Nguyễn Đức Sơn, Nguyễn Hồ Như Ý*, A3K34, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** *Trần Thế Minh*, K33A1, THPT Nguyễn Huệ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Ngọc Duy*, 10 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Đắk Lắk:** *Hồ Sỹ Thông*, 11A, THPT Quang Trung, Hòa Đông, Krông Păk.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/361. *Một quả cầu đồng chất bán kính R được thả vào trong một chất lỏng. Khi quả cầu ở vị trí cân bằng thì tâm quả cầu cách mặt thoáng của chất lỏng một đoạn H. Chứng tỏ rằng quả cầu sẽ dao động điều hòa nếu nó lệch khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ theo phương thẳng đứng. Tìm chu kì dao động của quả cầu.*



Hình 1

Lời giải. Xét trường hợp tâm O quả cầu nằm dưới mặt thoáng của chất lỏng (h.1) và bỏ qua các lực ma sát.

Tại vị trí cân bằng, trọng lực $\vec{P}$ của quả cầu cân bằng với lực đẩy Archimede $\vec{F}_A : P - F_A = 0$,

hay $mg - \dfrac{\pi\rho g L^2(3R-L)}{3} = 0$ (1)

(m là khối lượng quả cầu; ρ là khối lượng riêng của chất lỏng; g là gia tốc trọng trường; R là bán kính quả cầu; L là khoảng cách từ mặt thoáng của chất lỏng đến đáy quả cầu; $L = AO + OB = H + R$).

Khi quả cầu có li độ x thì tác dụng lên quả cầu cũng chỉ có trọng lực $\vec{P}$ và lực đẩy Archimede $\vec{F}_A$, nhưng giá trị của lực đẩy Archimede lúc này khác với ở trường hợp cân bằng. Gọi $\vec{F}$ là lực tổng hợp tác dụng lên quả cầu, ta có

$$F = mg - F_A = mg - \frac{\pi\rho g(L+x)^2(3R-L-x)}{3}$$

$$F = -\pi\rho g\left(L(2R-L)x + (R-L)x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$$

Vì $x << L$ nên $F \approx -\pi\rho g L(2R-L)x$ (2)

PT chuyển động của quả cầu có dạng

$mx'' \approx -\pi\rho g L(2R-L)x$ (3)

Từ (1) suy ra $m = \dfrac{\pi\rho L^2(3R-L)}{3}$ (4)

Từ (3), (4) thấy $x'' + \dfrac{3g(2R-L)}{L(3R-L)}.x = 0$ (5)

Đặt $\omega^2 = \dfrac{3g(2R-L)}{L(3R-L)}$ (6)

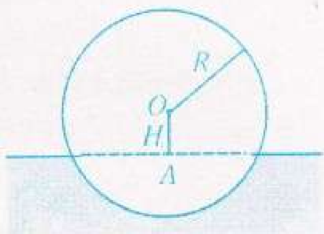
PT (5) trở thành $x'' + \omega^2 x = 0$ (7)

PT (7) là PT của một dao động điều hòa với tần số ω.

Từ (6) tìm được $\omega = \sqrt{\dfrac{3g(2R-L)}{L(3R-L)}}$

và chu kì $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L(3R-L)}{3g(2R-L)}}$.

Tương tự cũng khảo sát được trường hợp tâm O của quả cầu nằm phía trên mặt thoáng của chất lỏng (h. 2). ❒



Hình 2

∢Nhận xét. Bài này ít bạn tính được phần thể tích của quả cầu nằm trong chất lỏng, nên không tính được lực đẩy Archimede. Bạn *Nguyễn Mạnh Quân*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Tây**, có lời giải tốt.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Sửa lại cho đúng

Trên tạp chí THTT số 364 tháng 10 năm 2007 trang 1, cột phải, dòng 9 ↑ có sự nhầm lẫn. Xin đọc lại là:

$$B = 2 : \sqrt{\left(\frac{2}{b+1}\right)^2} = b + 1 = \sqrt[4]{5} + 1.$$

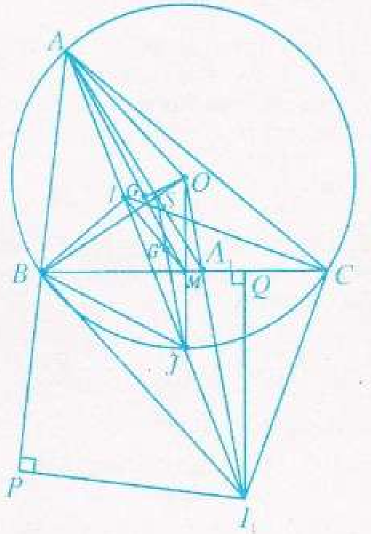
Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT

Điểm SCHIFFLER...

(Tiếp trang 10)

Chứng minh. (h. 2).



Hình 2

Ta chứng minh A, S, A_1 thẳng hàng. Thật vậy

$$\frac{\sin\widehat{AJG'}}{\sin\widehat{OJG'}}\cdot\frac{\sin\widehat{JOG}}{\sin\widehat{AOG}}\cdot\frac{\sin\widehat{OAA_1}}{\sin\widehat{JAA_1}}$$

$$=\frac{\sin\widehat{IJG'}}{\sin\widehat{MJG'}}\cdot\frac{\sin\widehat{MOG}}{\sin\widehat{AOG}}\cdot\frac{\sin\widehat{OAA_1}}{\sin\widehat{I_1AA_1}}$$

$$=\frac{\dfrac{2S_{IJG'}}{IJ.JG'}}{\dfrac{2S_{MJG'}}{MJ.JG'}}\cdot\frac{\dfrac{2S_{MOG}}{MO.OG}}{\dfrac{2S_{AOG}}{AO.OG}}\cdot\frac{\dfrac{2S_{OAA_1}}{OA.AA_1}}{\dfrac{2S_{I_1AA_1}}{I_1A.AA_1}}$$

$$=\frac{2MJ}{IJ}\cdot\frac{AO}{2OM}\cdot\frac{OA_1}{I_1A_1}\cdot\frac{I_1A}{OA}$$

$$=\frac{2MJ}{BJ}\cdot\frac{BO}{2OM}\cdot\frac{OM}{I_1P}\cdot\frac{I_1P}{OA\sin\frac{A}{2}}$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\left(\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}\right)=1.$$

Do đó theo định lí Ceva dạng lượng giác trong tam giác AOJ, suy ra AA_1, OG, JG' đồng quy.

Tức là AA_1 đi qua S. Tương tự, ta kết luận rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại S. ❐

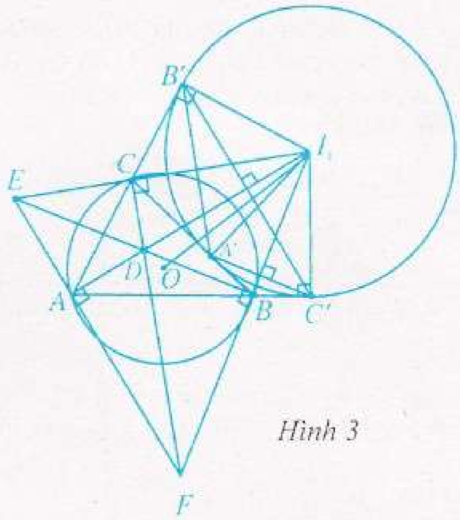
Như vậy từ hai bài toán trên ta thu được điểm Schiffler S của tam giác ABC là điểm đồng quy của 7 đường thẳng, gồm có: 4 đường thẳng Euler của các tam giác BIC, CIA, AIB, ABC và 3 đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1.

Bây giờ ta hãy theo dõi một cách mô tả khác của điểm Schiffler được nêu trong bài toán:

✪**Bài toán 3.** *Giả sử đường tròn bàng tiếp ứng với góc A của tam giác ABC tiếp xúc với các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Gọi A'' là điểm đối xứng của A' qua B'C'. Tương tự ta định nghĩa điểm B'', C''. Khi đó AA'', BB'', CC'' đồng quy tại điểm Schiffler S của tam giác ABC.*

Chứng minh.

Bổ đề 1. Với các kí hiệu như ở bài toán 1 thì *OI_1 là đường thẳng Euler của tam giác $A'B'C'$.*



Hình 3

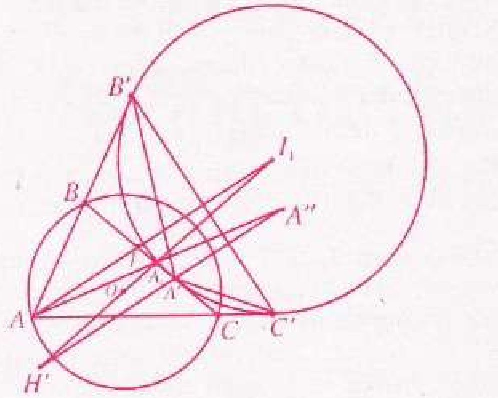
Chứng minh. Dựng các đường thẳng qua A và song song $B'C'$, qua B và song song $C'A'$, qua C và song song $A'B'$. Các đường này cắt nhau tạo ra tam giác DEF (h. 3). Ta có

$AI_1 \perp B'C' \Rightarrow AI_1 \perp EF$, $BI_1 \perp A'C' \Rightarrow BI_1 \perp DE$.

Do đó I_1 là trực tâm tam giác DEF. Nhận thấy O là tâm đường tròn Euler của tam giác DEF. Nên OI_1 là đường thẳng Euler của tam giác DEF. Mà đường thẳng Euler của hai tam giác $A'B'C'$ và DEF cùng phương, và đều đi qua I_1 nên OI_1 cũng là đường thẳng Euler của tam giác $A'B'C'$ (đpcm).

Bổ đề 2. *Ba điểm A, A_1, A'' thẳng hàng.*

Chứng minh. (h. 4) Theo *bổ đề 1*, nếu gọi H' là giao điểm của OI_1 và $A'A''$ thì H' là trực tâm tam giác $A'B'C'$.



Hình 4

Gọi I là chân đường phân giác hạ từ A xuống BC. Ta có $\frac{II_1}{IA}=\frac{r_a}{h_a}=\frac{a}{b+c-a}$ (2)

(trong đó r_a, h_a tương ứng là bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A, độ dài đường cao hạ từ A của tam giác ABC; $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$). Mặt khác

$$\frac{A'H'}{A'A''}=\frac{A'H'.B'C''}{A'A''.B'C''}=\frac{-2r_a.\cos A'.2r_a.\sin A'}{4S_{A''B'C''}}$$

$$=\frac{-2r_a^2.\sin 2A'}{8r_a^2.\sin A'.\sin B'.\sin C'}=\frac{-\sin 2A'}{\sin 2A'+\sin 2B'+\sin 2C'}.$$

Hơn nữa

$\widehat{B}'=\widehat{A'C'A}=\frac{\widehat{C}}{2}, \widehat{C}'=\widehat{A'B'A}=\frac{\widehat{B}}{2}$, suy ra

$\widehat{A}'=180^0-\widehat{B}'-\widehat{C}'=90^o+\frac{\widehat{A}}{2}$.

Do đó

$$\frac{A'H'}{A'A''}=\frac{\sin A}{-\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{b+c-a} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $\frac{II_1}{IA}=\frac{A'H'}{A'A''}$.

Vậy A, A_1, A'' thẳng hàng.

Rõ ràng theo bổ đề 2 và kết quả bài toán 2 thì bài toán 3 được chứng minh. ❐

Qua chứng minh trên ta thấy rằng bài toán 3 là một bài toán khó và lời giải của nó vẫn phải dùng đến kết quả của bài toán 2. Hi vọng rằng bạn đọc có thể đưa ra một lời giải đẹp hơn nữa cho bài toán 3. Rất mong nhận được sự góp ý của các bạn để hoàn chỉnh hơn nữa bài viết này.

PROBLEMS ... (Tiếp trang 17)

respectively. Let P and Q be two points on ON and OM respectively such that $\frac{OP}{PN}=\frac{MQ}{QO}$. Prove that O, K, P, and Q lie on the same circle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/365. There are nine cards in a box, labelled from 1 to 9. How many cards should be taken from the box so that the probability of getting a card whose label is a multiple of 4 will be greater than $\frac{5}{6}$?

T7/365. Let $x_1, x_2, ..., x_n$ be n arbitrary real numbers chosen in a given closed interval $[a ; b]$. Prove the inequality

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{a+b}{2}\right)^2\geq\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.$$

When does equality occur?

T8/365. Let H be the orthocenter of an acute triangle ABC whose edges are $BC = a$, $CA = b$, and $AB = c$. Prove that

$$\frac{HA^2+HB^2+HC^2}{a^2+b^2+c^2}\leq$$
$$\leq(\cot A.\cot B)^2+(\cot B.\cot C)^2+(\cot C.\cot A)^2.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/365. Let p be a prime number, greater than 3, and $k=\left[\frac{2p}{3}\right]$. (The notation $[x]$ denote the largest integer which is not exceeding x). Prove that $\sum_{i=1}^{k}C_p^i$ is a multiple of p^2.

T10/365. Find the measures of the angles of triangle ABC, such that

$$\cos\frac{5A}{2}+\cos\frac{5B}{2}+\cos\frac{5C}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

T11/365. Let (x_n) (n = 1, 2, ...) be a bounded-above sequence such that

$x_{n+2}\geq\frac{1}{4}x_{n+1}+\frac{3}{4}x_n$, for all n = 1, 2, ...

Prove that this sequence has limit.

T12/365. Let α, α'; β, β' and γ, γ' be the dihedral angles, opposite to the edges BC, DA; CA, DB and AB, DC respectively, of a tetrahedron $ABCD$. Prove the inequality

$$\sin\alpha+\sin\alpha'+\sin\beta+\sin\beta'+\sin\gamma+\sin\gamma'\leq4\sqrt{2}.$$

When does equality occur ?

LÊ MINH HÀ dịch

TÌNH HUỐNG BẤT NGỜ

Ngày xửa ngày xưa một cặp vợ chồng làm lụng chăm chỉ nên chẳng mấy chốc đã có của ăn của để. Họ càng vui mừng hơn khi người vợ sắp sinh con. Chẳng may trong một lần đi làm xa nhà, người chồng bị ốm nặng, biết mình không qua khỏi nên đã viết thư nhờ bạn mang về nhà. Trong bức thư viết :"Nếu vợ tôi sinh con trai thì chia cho con trai $\frac{2}{3}$ tài sản, còn vợ giữ lại $\frac{1}{3}$ tài sản; nếu vợ tôi sinh con gái thì chia cho con gái $\frac{1}{3}$ tài sản, còn vợ giữ lại $\frac{2}{3}$ tài sản".

Nhưng tình huống bất ngờ xảy ra là người vợ sinh đôi, cả trai lẫn gái. Những người thân trong gia tộc họp lại đọc di chúc và bàn cách chia gia tài. Hiển nhiên là không thể chia gia tài theo nguyên văn bản di chúc, nhưng cần dựa theo ý nguyện của người đã khuất. Ba người đã nêu ra các phương án chia gia tài khác nhau:

Một nhà xã hội học quen với việc chia tỉ lệ; một phụ nữ không đồng ý như thế và cho rằng cần bảo vệ quyền lợi người mẹ trẻ; một nhà thần học thường chú ý đến giờ phút sinh.

Các bạn hãy thử đặt mình vào địa vị của mỗi người đó để phán đoán ba phương án chia gia tài và cho biết trong mỗi phương án trên thì người mẹ trẻ, con trai, con gái được chia mấy phần gia tài? Còn ý kiến bạn như thế nào?

(Theo *Dạy và học ngày nay*)

Giải đáp bài: TÌM CHÍN SỐ NGUYÊN DƯƠNG

(Đề đăng trên THTT số 362 tháng 8.2007)

Theo giả thiết (bảng 1) ta có: $a, b, c, d, e, f, k, m, n$ là các số phân biệt (1)

và $a^2 + bc = d^2 + ef = k^2 - mn = x^2$ (2)

$abc = def = kmn = adk = bem = cfn = 120$ (3)

a	d	k
b	e	m
c	f	n

Bảng 1

Từ (2) và (3) có

$$a^2 + \frac{120}{a} = a^2 + bc = d^2 + ef = d^2 + \frac{120}{d}$$

$$\Rightarrow a^2 - d^2 = \frac{120(a-d)}{ad} \Rightarrow (a+d)ad = 120 \quad (4)$$

• Giả sử $a < d$ thì $a^2 < ad$ và $2a < a + d$ nên từ (4) có $2a^3 < 120$, suy ra $a < 4$.

Nếu $a = 1$ thì $10.11 < d(1 + d) = 120 < 11.12$, không có d thỏa mãn.

Nếu $a = 2$ thì $6.8 < d(2 + d) = 60 < 7.9$, không có d thỏa mãn.

Vậy chỉ xảy ra $a = 3$, $d = 5$, $k = \frac{120}{ad} = 8$.

Từ (1) và (3) suy ra $m.n = 15 = 1.15$.

• Giả sử $m = 1$, $n = 15$. Lại từ (3) có $cf = 8 = 2.4$.

Với $c = 2$, $f = 4$ có $b = 20$, $e = 6$ (bảng 2).
Với $c = 4$, $f = 2$ có $b = 10$, $e = 12$ (bảng 3).

3	5	8
20	6	1
2	4	15

Bảng 2

3	5	8
10	12	1
4	2	15

Bảng 3

• Nếu chọn $m = 15$, $n = 1$ ta được hai bảng nữa bằng cách đổi chỗ hàng thứ hai với hàng thứ ba trong bảng 2 và trong bảng 3.

• Nếu chọn $d < a$ thì ta chỉ việc đổi cột thứ nhất với cột thứ hai (tính từ trái sang phải) của bốn bảng trên. Vậy bài toán có tất cả 8 nghiệm.

(Xem tiếp trang 31)

UNIT 6

English through math problems and solutions

Problem. *A circular race track has gas stations S_1, S_2,..., S_n spaced around it. At each gas station S_i, your car can be filled an amount a_i of gasoline. If the amount $\sum_{i=1}^{n} a_i$ of gasoline is put into the tank of a racing car, it has exactly enough gasoline to drive a full round of the track. Show that you can always find a starting position (at some gas station) for the racing car (with an empty gas tank before getting filled at this station), so that if you start driving around the track, always taking the gasoline from any station which you pass, you can drive one round of the entire track without ever running out of gasoline.*

Solution. Perhaps, there are different ways to solve this problem. Here, we will present a surprisingly simple solution. Just take a car with a big enough gas tank and fill it with enough gasoline. We then drive around the race track and find the place where the car has the lowest gas level. It is clear that the car will have the lowest gas level at one of the gas stations (before filling). So if we start at this station with an empty gas tank (before filling) then we can drive the car once around the entire track without ever running out of gasoline.

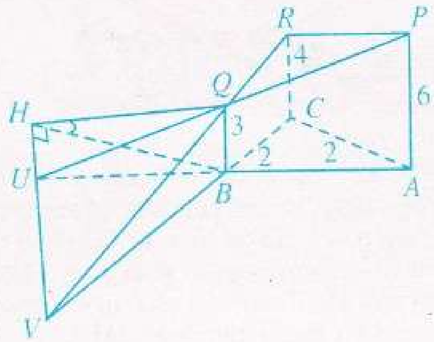
Vocabulary

circular *adj.*	=	theo vòng (tròn)
space *v.*	=	đặt, bố trí
race track *n.*	=	đường đua
gas station *n.*	=	trạm xăng
fill *v.*	=	bơm, đổ
gasoline *n.*	=	xăng
gas tank *n.*	=	thùng xăng
empty *adj.*	=	rỗng
run out *v.*	=	dùng hết, cạn kiệt
gas level *n.*	=	mức xăng
lowest *adj.*	=	thấp nhất.

VŨ THẾ KHÔI

SOLUTION OF PREVIOUS ISSUE

UNIT 5



Consider the triangle APU, we have $BQ//AP$.

Thus $\frac{BU}{AU}=\frac{BQ}{AP}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Hence $BU = AB = 2$m.

Consider the triangle CRV, we have $BQ//CR$.

Thus $\frac{BV}{CV}=\frac{BQ}{CR}=\frac{3}{4}$ or $4BV = 3CV = 3(CB+BV)$ $= 3CB + 3BV$. Hence $BV = 3CB = 6$m.

Let H be the foot of the altitude from B to UV.

Consider the triangle BUV, we have

$$UV^2 = BU^2 + BV^2 - 2BU \times BV \times \cos\widehat{UBV}$$
$$= 2^2+6^2-2\times2\times6\times\cos 60^\circ = 28.$$

Therefore $UV = \sqrt{28}$ m $= 2\sqrt{7}$ m.

Denote by S the area of triangle BUV.

$$\text{So } S = \frac{1}{2}\times BU \times BV \times \sin\widehat{UBV}$$
$$= \frac{1}{2}\times 2\times 6\times \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}\text{ m}^2.$$

But $S=\frac{BH\times UV}{2}$, deduce that

$$BH=\frac{2S}{UV}=\frac{2\times3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{21}}{7}\text{ m}.$$

So, the length of the perpendicular from B to the line UV is $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ m.

The inclination of the plane PQR to the horizontal is the angle BHQ.

Because the triangle BQH is a right-angled triangle with the right angle at B, we have

$$\tan\widehat{BHQ} = \frac{BQ}{BH} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{21}}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

That's why, $\widehat{BHQ} = \arctan\frac{\sqrt{21}}{3}$ (Q.E.D).

Remark.

1) Vài bạn vẽ hình chưa trực quan hoặc xác định chân đường cao H chưa đúng.

2) Các bạn có lời giải tốt, được nhận quà tặng: **Yên Bái:** *Nguyễn Thu Thủy*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hòa Bình:** *Đỗ Thị Vân*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hà Nội:** *Nguyễn Xuân Khoa*, 11D1, THPT Chu Văn An; **Nghệ An:** *Nguyễn Thành Vinh*, 12A2, THPT chuyên ĐH Vinh; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Dương Văn An*, 12A1, THPT Châu Thành, Bà Rịa ; **Đắk Nông:** *Trần Ngọc Bình*, 9C, THCS Phan Đình Phùng; **Đăk Lăk:** *Trần Ngọc Hòa*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Du; **Quảng Ngãi:** *Lê Trung Văn*, 12C1, THPT Vạn Tường, Thôn Vạn Tường Bình.

VŨ KIM THỦY

Giải đáp bài... *(Tiếp trang 29)*

Nhận xét. Lời giải trên không dùng đến x^2. Rất nhiều bạn tìm ra đáp số, nhưng không lập luận hoặc chưa chỉ ra đủ 8 nghiệm. Các bạn có lập luận ngắn gọn là:

1) *Vũ Thị Thêu*, 12A0, THPT Yên Phong 1, **Bắc Ninh**.
2) *Nguyễn Mạnh Quân*, 11 Lí, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Tây**.
3) *Lưu Ngọ*, 12A1, THPT Hậu Lộc 1, **Thanh Hóa**.
4) *Phạm Hồng Cảnh*, 11A1, THPT Anh Sơn 2, **Nghệ An**.
5) *Lương Xuân Huy*, 10A1, THPT Tiên Lữ, **Hưng Yên**.
6) *Trần Văn Hạnh*, 10A5, THPT Ninh Giang, **Hải Dương**.

ĐAN QUỲNH

Hội thảo về Toán Giải tích & Ứng dụng và các chuyên đề bồi dưỡng học sinh năng khiếu toán học THPT chuyên

Để thông báo các kết quả nghiên cứu mới về toán Giải tích & Ứng dụng, rút kinh nghiệm và thống nhất về nội dung chuyên môn các chuyên đề Toán cho học sinh THPT chuyên, Trường Đại học KHTN-ĐHQG Hà Nội, trường Đại học Thủy lợi Hà Nội, Sở Giáo dục & Đào tạo Vĩnh Phúc, Hội Toán học Hà Nội phối hợp với các chuyên gia Toán của các đơn vị: Trường Đại học Bách khoa, Viện Toán học, NXB Giáo dục, trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, ... sẽ tổ chức Hội thảo khoa học "Toán Giải tích & Ứng dụng và các chuyên đề bồi dưỡng học sinh năng khiếu toán học THPT chuyên" vào hai ngày 28 và 29 tháng 11 năm 2007 tại trường Đại học Thủy lợi Hà Nội và thành phố Vĩnh Yên, Vĩnh Phúc.

Tiến trình hội thảo như sau:

Sáng ngày 28/11, hội nghị toàn thể với các báo cáo kết quả nghiên cứu mới về Toán Giải tích & Ứng dụng trong nghiên cứu Môi trường diễn ra tại trường Đại học Thủy lợi. Buổi chiều cùng ngày, các đại biểu sẽ dự hội nghị toàn thể với các báo cáo kết quả nghiên cứu về các chuyên đề Toán cho học sinh THPT chuyên tại trường THPT chuyên Vĩnh Phúc. Ngày 29/11, Hội Toán học Hà Nội sẽ tổ chức Lễ phát Giải thưởng Olympic Toán Singapore mở rộng năm 2007. Ngoài ra, các đại biểu còn được giao lưu và trao đổi tại một số trường có nhiều kinh nghiệm và thành tích trong công tác đào tạo học sinh có năng khiếu Toán học.

TRỊNH TUẤN
(Đại học Thủy Lợi Hà Nội)

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 365(11.2007)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.5121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272, 04.5121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Mĩ thuật* : MINH THƠ. *Trị sự, Chế bản* : VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330

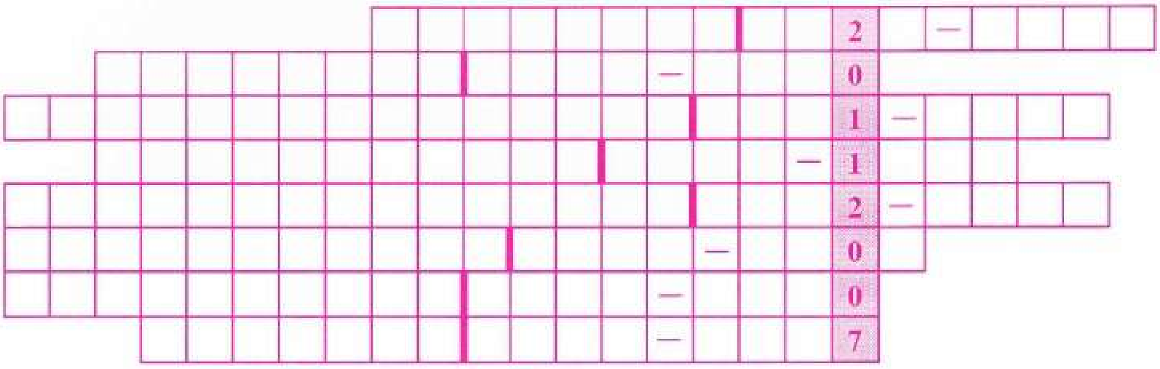
Câu lạc bộ

Ô chữ: NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM

Có muôn vàn nhà giáo xứng đáng được vinh danh, ở đây chỉ xin nêu tên tám người thầy, đồng thời là nhà thơ, nhà văn, nhà sư phạm, nhà sử học, ...

Các bạn hãy dựa vào một số đặc điểm ít ỏi về thân thế, về tác phẩm để tìm ra rồi ghi tên họ các nhà giáo đó cùng năm sinh, năm mất vào các ô chữ theo thứ tự hàng ngang.

1. Ông đỗ Bảng nhãn (1752), sáng tác thơ văn, viết nhiều sách về triết học, lịch sử, địa lí.. như *Quế đường thi tập, Vân Đài loại ngữ*, ...
2. Ông đỗ Thái học sinh (tức Tiến sĩ), đã từng dâng sớ đòi chém 7 viên quan nịnh thần, viết sách: *Tiều ẩn thi tập*, ...
3. Ông đỗ Trạng nguyên (1535), đã dâng sớ hạch tội 18 viên quan lộng hành. Ông đã mở trường Bạch Vân, nghiên cứu Kinh Dịch, viết *Bạch Vân thi tập*, ...
4. Bà là người phụ nữ đầu tiên mở trường dạy học ở nông thôn nước ta. Bà dịch *Chinh phụ ngâm* ra chữ nôm, viết *Truyền kì tân phả*, ...
5. Ông đậu Tú tài (1843), không hợp tác với quân Pháp. Trong các tác phẩm *Lục Vân Tiên, Ngư Tiều vấn đáp*, ông đề cao nhân nghĩa, xây dựng hình tượng người Thầy.
6. Ông đỗ Hương giải (1743), chủ trương giáo dục: *học biết mà làm*. Ông đã từng làm cố vấn cho vua Quang Trung, viết sách: *La Sơn thi tập, Hạnh Am di cảo*, ...
7. Ông đỗ Tú tài (1807 và 1813), dành nhiều thời gian biên soạn sách: *Lịch triều hiến chương loại chí, Hoàng Việt dư địa chí*, ...
8. Ông đỗ Cử nhân (1821). Ông mở trường Nghi Am, nói rõ quy chế và phương pháp dạy học trong *Nghi Am học thức*, nhấn mạnh đến tính không dối trá, học mọi nơi, đào kĩ nghĩ sâu. Ông viết nhiều tác phẩm về văn học, lịch sử, địa lí, triết học ... như: *Việt sử tam bách vịnh, Việt hành tạp thảo, Đại học đồ thuyết, Đạm Trai thi văn tập*...



Giải đáp ô chữ: TÊN CÁC SỐ

(Đề đăng trên THTT số 363 tháng 9.2007)

Trước hết ta viết tên các số cần tìm, rồi điền vào ô chữ theo thứ tự sau: Tên số có 5 chữ, có 2 chữ, có 4 chữ, có 3 chữ còn lại.

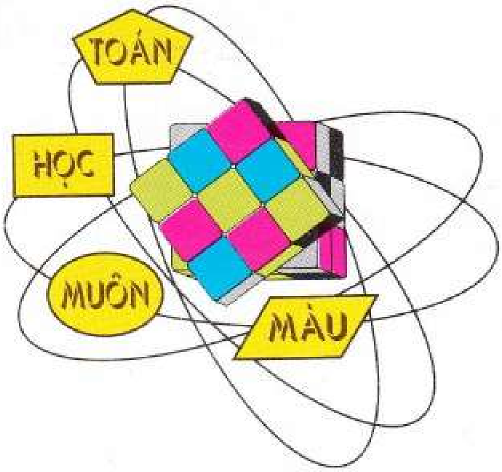
Có thể đổi chỗ: chục với thập; bát với bốn và thất với nhất.

Các bạn sau có lời giải đúng, nêu cách làm và đưa nhiều đáp án:

1) *Trần Phúc Đạt*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**.
2) *Đỗ Thị Thu Thảo*, 12T1, THPT Nguyễn Trãi, **TP. Hải Dương.**
3) *Hoàng Thị Vân Anh*, 8B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**.
4) *Nguyễn Việt Trung*, 10 Toán, THPT chuyên **Hà Tĩnh**.
5) *Nguyễn Đăng Hưng*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**.

VÂN KHANH

L	Ụ	C		B	Ố	N	
		Ừ		Á		H	
S	Á	U		T	H	Ấ	T
			K			T	Á
		T	H	Ậ	P		M
B	A		Ô				
Ả			N		T	A	M
Y		N	G	Ũ			Ư
					N		Ờ
	C				H	A	I
C	H	Í	N		I		
	Ụ		A				T
	C		M	Ộ	T		Ư



CHIA ĐÔI CHU VI ĐA GIÁC

1) Cho tam giác ABC và một điểm P trên cạnh AB. Hãy kẻ một đường thẳng qua P để chia chu vi tam giác đó thành hai phần bằng nhau. Bạn tìm được bao nhiêu cách giải đơn giản?

2) Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm P trên cạnh AB. Hãy kẻ một đường thẳng qua P để chia chu vi tứ giác đó thành hai phần bằng nhau.

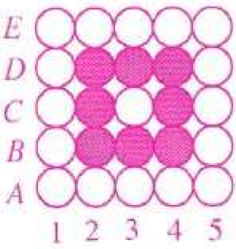
Giải đáp:

CHUYỂN MÀU CÁC ĐÈN

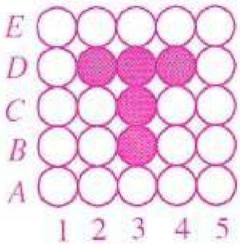
(Đề đăng trên THTT số 361 tháng 7.2007)

Trên sơ đồ đèn ở mỗi đèn màu Đỏ ta ghi một vạch. Mỗi lần ấn công tắc ở đèn nào thì ghi một vạch ở đèn đó. Như thế số lẻ vạch ứng với màu Đỏ và số chẵn vạch ứng với màu Xanh. Sau một số lần ấn công tắc mà tất cả các đèn đều có màu Đỏ tương đương với điều mỗi đèn trong tất cả 25 đèn đều có một số lẻ vạch.

Chú ý rằng thứ tự lần ấn công tắc không làm thay đổi kết quả nên có nhiều cách đặt lệnh.



Hình 1



Hình 2

1) Nếu có 8 đèn xếp thành hình vuông màu Đỏ thì lệnh có 9 lần ấn công tắc sẽ cho tất cả các đèn màu Đỏ. Chẳng hạn ở hình 1:

Cách 1: E1, E5, D3, C2, C3, C4, B3, A1, A5.

Cách 2: E3, D1, C2, B1, A3, B5, D5, C4, C3.

2) Nếu có 5 đèn xếp thành hình chữ T màu Đỏ thì lệnh có 11 lần ấn công tắc sẽ cho tất cả các đèn màu Đỏ. Chẳng hạn ở hình 2:

Cách 1: E1, E5, D3, C2, C3, C4, B2, B4, A2, A3, A4.

Cách 2: E2, D3, C3, E4, C5, B4, A5, A1, A3, C1, B2.

Các bạn sau có lời giải tốt:

1) *Lương Xuân Huy*, 10A1, THPT Tiên Lữ, **Hưng Yên**;
2) *Nguyễn Tuấn Thành*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**;
3) *Phạm Xuân Đức*, 10A1, THPT Ninh Giang, **Hải Dương**;
4) *Dương Văn An*, 11A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.

PHI PHI

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT67M7
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2007
Giá : 5000 đồng
Năm nghìn đồng