TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

11 2017

Số 485

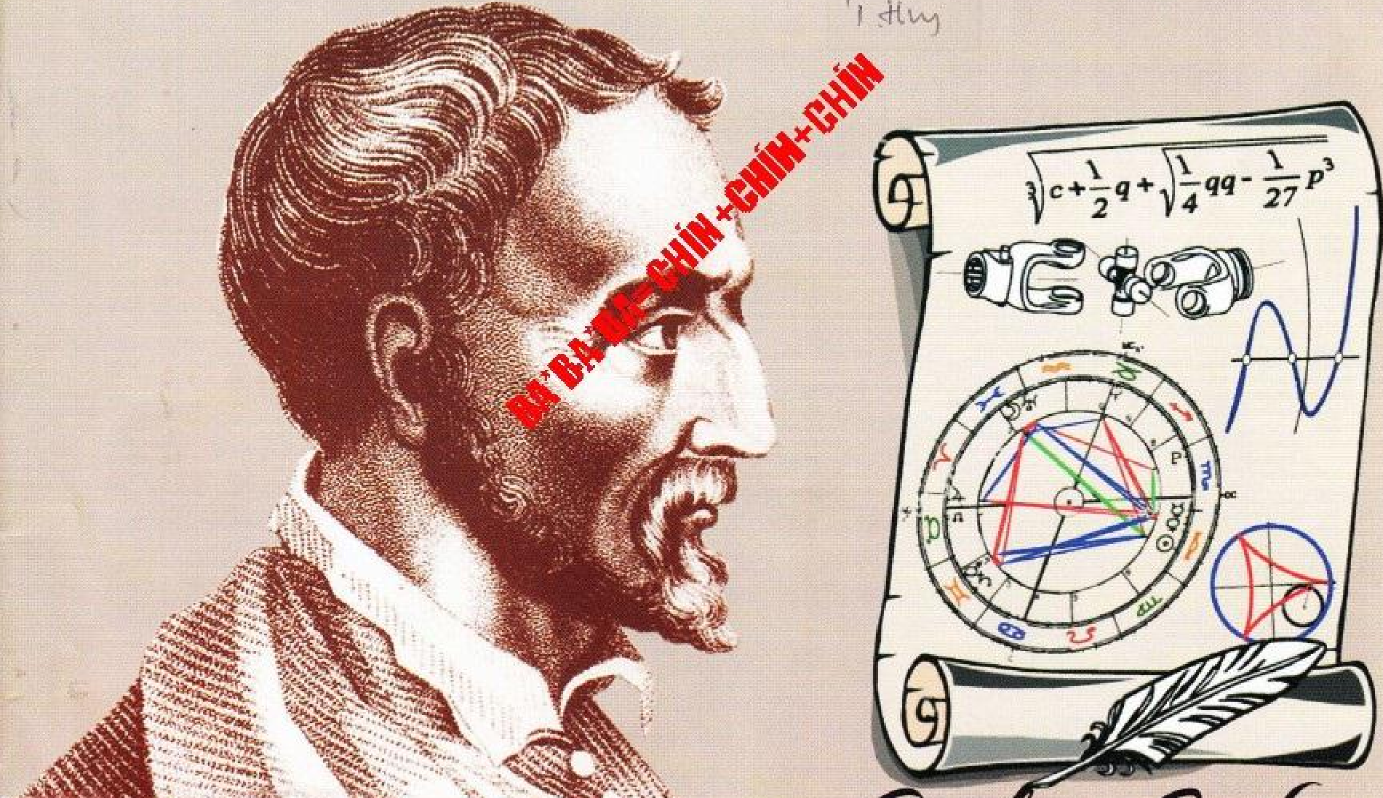
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 54

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



Girolamo Cardano

(1501-1576)

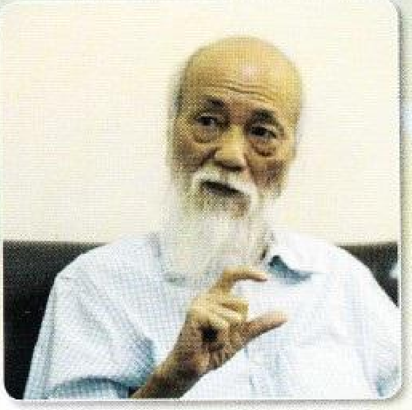
Nhớ về thầy Văn Như Cương

Đoàn Quỳnh

(Nguyên Tổ trưởng tổ Hình học - Trường ĐHSP Hà Nội)

Năm học 1956-1957, tổ Toán (tức Khoa Toán) Trường Đại học Sư phạm Hà Nội gồm 12 người được bố trí làm việc ở một buồng không xa nơi giảng bài tại cơ sở của trường ngày nay. Tôi nhớ trong tổ lúc đó có thầy *Nguyễn Thúc Hào*, thầy *Ngô Thúc Lanh*, thầy *Nguyễn Cảnh Toàn* và người trẻ nhất là thầy *Văn Như Cương*. Thầy *Cương* hồi đó là một thanh niên tài hoa, biết hát, đàn, chơi bóng đá, bóng chuyền và thỉnh thoảng làm thơ, ra câu đối. Đến năm 1958 hay 1959, do quê thầy ở Nghệ An nên thầy được phân công vào dạy ở Trường Đại học Sư phạm Vinh mới thành lập. Đang ở Thủ đô cùng người yêu nhưng chỉ sau một buổi gặp Đảng ủy trường, thầy đã sẵn sàng rời Hà Nội! Lúc đó thầy *Cương* đang là Đoàn viên Thanh niên!

Sau đó vài năm thầy *Cương* sang Mátxcơva làm nghiên cứu sinh ở Viện Toán, Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô. Thầy nghiên cứu về tôpô hình học, về những điều kì dị trong không gian Euclid. Hướng nghiên cứu này đòi hỏi óc tưởng tượng không gian tốt. Thầy kể có lần Chi hội đồng hương đem thầy ra góp ý vì thấy thầy chỉ nằm hút thuốc, không



PGS.TS. **Văn Như Cương** (1937 - 2017)

chịu ngồi học như họ, họ không biết rằng chính những lúc như thế óc tưởng tượng không gian của thầy làm việc căng! Thầy đã bảo vệ thành công luận án của mình.

Giữa những năm 70 thầy trở lại công tác ở tổ Hình học, Khoa Toán Đại học Sư phạm Hà Nội. Thầy biên soạn và góp ý biên soạn nhiều tài liệu giảng dạy Hình học của Tổ của Khoa, Trường. Rồi trong những năm 90, thầy đã tham gia biên soạn chương trình Toán Trung học, đầu những năm 2000 thầy làm Chủ biên bộ sách Hình học nâng cao cho các lớp 10, 11 và 12 THPT. Thầy có lập luận sáng sủa, diễn tả khúc triết, chú trọng cái tổng quan, không quá sâu vào chi tiết, khi giảng dạy thì hấp dẫn, khi viết sách thì rõ ràng, rành mạch với những hình vẽ đẹp, nêu lên được ý tưởng minh họa.

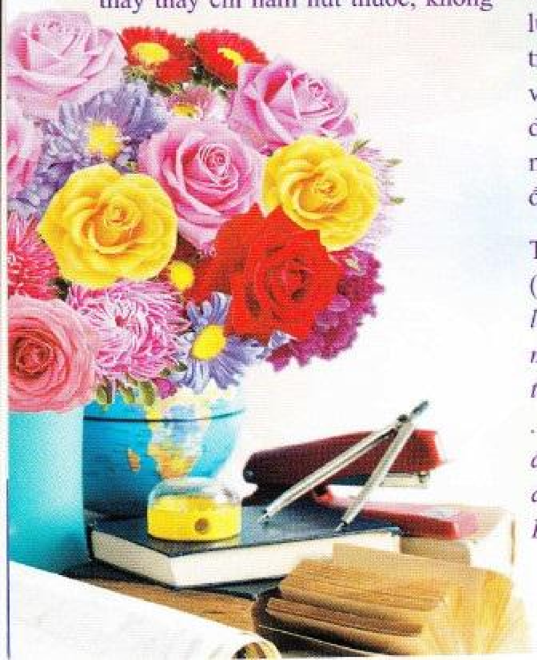
Thầy đã góp một đề thi Toán Quốc tế (IMO) hay, đó là đề số 6 năm 1982: *S là một hình vuông cạnh dài 100, L là một đường gấp khúc không tự cắt tạo thành từ các đoạn thẳng A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, A_0 khác A_n. Giả sử với mỗi điểm P trên biên của S đều có một điểm thuộc L cách P không quá $\frac{1}{2}$. Hãy chứng minh: tồn tại hai điểm X và Y thuộc L sao cho khoảng cách giữa X và Y không vượt quá 1 và độ dài phần đường gấp khúc nằm giữa X và Y không nhỏ hơn 198.*

Có một chuyện vui là giữa những năm 70, để giúp cho việc "*giáo dục từ xa*", đài truyền hình có tổ chức những buổi giảng Toán Đại học trên truyền hình và tổ Hình có cử thầy đến để tham gia. Nhưng hôm đó đài truyền hình yêu cầu thầy phải cắt bộ râu dài của mình, thầy đã không đồng ý, thế là tổ Hình đành phải cử người khác! Một chuyện khác nữa là: Trong những năm chiến tranh và ngay sau chiến tranh, ta đều biết cuộc sống của cán bộ nhà nước khó khăn, vất vả như thế nào, gia đình thầy *Cương* cũng khó khăn, vất vả như thế và còn hơn thế. Gặp dịp Nhà nước phân nhà ở cho một số cán bộ trong trường, thầy viết thư cho lãnh đạo cấp cao với mở đầu: "*Người quân tử ăn chẳng cầu no* (Nguyễn Công Trứ), *nhưng cũng cần lo chỗ ở*!". Cũng không biết chuyện này có thật hay không nữa nhưng rồi thầy được phân một căn hộ nhỏ để gia đình sinh hoạt (nhưng chắc hẳn không phải vì câu mở đầu đó!).

Và thầy *Cương* cũng nhanh nhạy nắm bắt thời cơ khi đã đến lúc "*trước hết ta phải tự lo cho chính mình*": Cuối những năm 80, đầu những năm 90, với những ý tưởng đổi mới giáo dục, thầy *Cương* cùng thầy *Nguyễn Xuân Khang* đã xin phép mở trường phổ thông dân lập đầu tiên là trường *Lương Thế Vinh*, ...

Thế rồi tin đột ngột thầy *Cương* bị ung thư gan và mất. Tôi đau buồn phải chia tay một người bạn cùng chung tay làm bao nhiêu việc.

Hà Nội tháng 10/2017.



DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

BÀI TOÁN VỀ SỐ NGUYÊN TỐ

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, quận Hồng Bàng, TP. Hải Phòng)

Các bài toán về số nguyên tố được giảng dạy từ năm lớp 6 bậc THCS, sau đó tiếp tục được nghiên cứu và tìm hiểu sâu hơn ở các năm học tiếp theo. Các bài toán về số nguyên tố dựa vào kiến thức cơ bản sau:

1. Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 và chỉ có hai ước số là 1 và chính nó.
2. Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước số.
3. Số 0 và số 1 không là số nguyên tố cũng không là hợp số. Số nguyên tố nhỏ nhất là 2 và đó là số nguyên tố chẵn duy nhất.
4. Cho a là số tự nhiên lớn hơn 1.

Nếu a chia hết cho số nguyên tố p và $a > p$ thì a là hợp số.

Nếu a chia hết cho số nguyên tố p thì số a là số nguyên tố khi và chỉ khi $a = p$.

DẠNG 1. BÀI TOÁN TÌM SỐ NGUYÊN TỐ

Bài toán 1.1. *Tìm tất cả các số nguyên tố p để: $p+6, p+8, p+12, p+14$ đều là số nguyên tố.*

Lời giải. Nhận thấy $p = 2$; $p = 3$ không thoả mãn.

Với $p = 5$ thì $p+6, p+8, p+12, p+14$ đều là số nguyên tố.

Với $p > 5$, suy ra

$p = 5k+1; p = 5k+2; p = 5k+3; p = 5k+4\ (k \in \mathbb{N}^*)$.

Nếu $p = 5k+1\ (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $p+14 = 5k+15 = 5(k+3) \vdots 5$; $p+14 > 5\ (k \in \mathbb{N}^*)$. Suy ra $p + 14$ là hợp số.

Nếu $p = 5k+2\ (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $p+8 = 5k+10 = 5(k+2) \vdots 5$; $p+8 > 5\ (k \in \mathbb{N}^*)$. Suy ra $p + 8$ là hợp số.

Nếu $p = 5k+3\ (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $p+12 = 5k+15 = 5(k+3) \vdots 5$; $p+12 > 5\ (k \in \mathbb{N}^*)$. Suy ra $p + 12$ là hợp số.

Nếu $p = 5k+4\ (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $p+6 = 5k+10 = 5(k+2) \vdots 5$; $p+6 > 5\ (k \in \mathbb{N}^*)$. Suy ra $p + 6$ là hợp số.

Vậy $p = 5$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét. Theo đề bài cho 5 biểu thức là: $p, p+6, p+8, p+12, p+14$ cùng là số nguyên tố cho nên ta dự đoán xét phép chia của số nguyên tố p cho 5. Trong bài toán trên sử dụng tính chất "*Nếu a chia hết cho số nguyên tố p và a > p thì a là hợp số*". Tương tự ta có Bài toán 1.2.

Bài toán 1.2.

a) Tìm số tự nhiên k sao cho $k+1, k+77, k+99$ đều là số nguyên tố.

b) Tìm số tự nhiên k sao cho $k+1, k+3, k+7, k+9, k+13, k+15$ đều là số nguyên tố.

c) Tìm số nguyên dương n sao cho tất cả các số $n+1, n+5, n+7, n+13, n+17, n+25, n+37$ đều là số nguyên tố.

Lời giải.

a) $k+1, k+77, k+99$ là số nguyên tố $(k \in \mathbb{N})$.

Với $k \in \mathbb{N}$ thì k có dạng $3t, 3t+1, 3t+2\ (t \in \mathbb{N})$.

Nếu $k = 3t$, $t \in \mathbb{N}$ thì $k+99 = (3t+99) \vdots 3$.

Nếu $k = 3t+1 \Rightarrow k+77 = 3t+78 = 3(t+26) \vdots 3$.

Nếu $k = 3t+2 \Rightarrow k+1 = 3t+3 = 3(t+1) \vdots 3$.

Do đó trong 3 số $k+1, k+77, k+99, k \in \mathbb{N}$ luôn có một số chia hết cho 3 ($k \in \mathbb{N}$).

Khi đó để $k+1, k+77, k+99, k \in \mathbb{N}$ cùng là số nguyên tố thì phải có một số bằng 3.

Mà $3 < k+77 < k+99$ nên $k+1 = 3 \Leftrightarrow k = 2$.

Thử lại $k = 2$ thì $k + 1 = 3$, $k + 77 = 79$, $k + 99 = 101$ đều là số nguyên tố.

b) $k+1, k+3, k+7, k+9, k+13, k+15\ (k \in \mathbb{N})$

Với $k \in \mathbb{N}$ thì k có dạng

$$5t, 5t+1, 5t+2, 5t+3, 5t+4\ (t \in \mathbb{N}).$$

Lập luận tương tự phần a) tìm được $k = 4$ thoả mãn bài toán.

c) $n+1$, $n+5$, $n+7$, $n+13$, $n+17$, $n+25$, $n+37$ đều là số nguyên tố.

Xét phép chia số tự nhiên n cho 7. Khi đó $n = 7k$, $n = 7k+1$, $n = 7k+2$, $n = 7k+3$, $n = 7k+4$, $n = 7k+5$, $n = 7k+6$ $(k \in \mathbb{N})$.

Lập luận tương tự phần a) tìm được $n = 6$.

Nhận xét. Theo đề bài phần a) cho 3 biểu thức là: $k+1, k+77, k+99$ cùng là số nguyên tố cho nên ta xét phép chia của số tự nhiên k cho 3. Phần b) có 6 số (chứa k) cùng là số nguyên tố, ta xét $k = 0, 1, 2, 3, 4$ thì có $k = 4$ thỏa mãn. Với $k \geq 5$ ta xét phép chia số tự nhiên k cho 5. Tương tự trong phần c) bài toán đề bài cho 7 số cùng là số nguyên tố, cho nên xét phép chia số tự nhiên n cho 7.

Bài toán 1.3. *Tìm tất cả các số nguyên tố p mà p^4+2 cũng là số nguyên tố.*

Lời giải. Xét $p=2 \Rightarrow p^4+2=18$ là hợp số (loại).

Xét $p=3 \Rightarrow p^4+2=83$ là số nguyên tố.

Xét $p>3$, p là số nguyên tố thì $p=3k\pm1, k\in\mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow p^4$ có dạng $3n+1$, $n\in\mathbb{Z}^+$. Suy ra

$$p^4+2=3n+1+2=3(n+1)\,\vdots\,3 \text{ và } p^4+2>3.$$

Do đó p^4+2 là hợp số.

Vậy $p=3$ thì p^4+2 cũng là số nguyên tố.

Nhận xét. Bài toán trên có 2 số đã cho cùng là số nguyên tố, cho nên ta chỉ xét $p=2$ hoặc $p=3$. Lời giải dựa vào tính chất với $p=3k\pm1, k\in\mathbb{Z}^+$ thì p^4 chia cho 3 dư 1.

Bài toán 1.4. *Tìm số nguyên tố p sao cho $2p^2-3$, $2p^2+3$ đều là số nguyên tố.*

Lời giải. • Với $p=2$ thì $2p^2-3=2.2^2-3=5$; $2p^2+3=2.2^2+3=11$ đều là số nguyên tố.

• Với $p=3$ thì $2p^2-3=2.3^2-3=15$ không là số nguyên tố.

• Với $p=5$ thì $2p^2-3=2.5^2-3=47; 2p^2+3=2.5^2+3=53$ đều là số nguyên tố.

• Xét $p>5$, p có dạng $p=5k\pm1, p=5k\pm2$.

- Với $p=5k\pm1$

$\Rightarrow 2p^2+3=2(5k\pm1)^2+3=50k^2\pm20k+5\,\vdots\,5$

và $2p^2+3>5$. Suy ra $2p^2+3$ là hợp số.

- Với $p=5k\pm2$

$\Rightarrow 2p^2-3=2(5k\pm2)^2-3=50k^2\pm40k+5\,\vdots\,5$

và $2p^2-3>5$. Suy ra $2p^2-3$ là hợp số.

Vậy $p=2, p=5$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Trong đề bài có 3 số nguyên tố là: p, $2p^2-3$, $2p^2+3$, đồng thời $p\equiv\pm a(\operatorname{mod} m)\Rightarrow p^2\equiv a^2(\operatorname{mod} m)$. Do đó ta xét trường hợp p chia cho 5.

Bài toán 1.5. *Tìm các số nguyên tố n sao cho 2^n+7n^2 cũng là nguyên tố.*

Lời giải. Với $n=2$ thì $A=2^n+7n^2=2^2+7.2^2=32$ là hợp số.

Với $n=3$ thì $A=2^3+7.3^2=71$ là số nguyên tố.

Xét n không chia hết cho 3, $n>3$, n là số nguyên tố. Khi đó $n=6k+1$ hoặc $n=6k+5$ $(k\in\mathbb{N})$.

Với $n=6k+1$ thì

$$A=2^{6k+1}+7.(6k+1)^2=2.64^k+7.(6k+1)^2$$

Vì 64^k chia 3 dư 1 nên 2.64^k chia cho 3 dư 2.

Lại có: $7.(6k+1)^2$ chia cho 3 dư 7 hay $7.(6k+1)^2$ chia cho 3 dư 1.

Do đó $A=2.64^k+7.(6k+1)^2$ chia hết cho 3, mà $A>3$ suy ra A là hợp số.

Với $n=6k+5$ thì

$$A=2^{6k+5}+7.(6k+5)^2=2^5.64^k+7.(6k+5)^2$$

$\Rightarrow A\equiv 2^5+7.5^2\equiv 0$ (mod 3). Do đó A chia hết cho 3, mà $A>3$ suy ra A là hợp số.

Vậy $n=3$ là số nguyên tố cần tìm.

Nhận xét. Bài toán có hai số nguyên tố là: n, 2^n+7n^2 tương tự bài toán 1.3 ta xét n chia hết cho 3. Trong quá trình giải bài toán khi xét n không chia hết cho 3 ta đưa về việc xét $n=6k+1; n=6k+5$ $(k\in\mathbb{N})$.

Bài toán 1.6. *Tìm ba số nguyên tố liên tiếp a, b, c sao cho $a^2+b^2+c^2$ cũng là số nguyên tố.*

Lời giải. Ta có mệnh đề: *Một số chính phương hoặc chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 1.*

Áp dụng mệnh đề trên, ta xét trường hợp:

Nếu a, b, c đều là các số nguyên tố khác 3 thì a, b, c đều không chia hết cho 3. Do đó a^2, b^2, c^2 đều chia cho 3 dư 1. Suy ra $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho 3 và $a^2+b^2+c^2>3$. Tức là $a^2+b^2+c^2$ là hợp số.

Vậy trong ba số nguyên tố a, b, c phải có ít nhất một số bằng 3. Do vai trò a, b, c như nhau, giả sử $a=3$. Vì a, b, c là 3 số nguyên tố liên tiếp nên ta xét các trường hợp:

Nếu $b=2$, $c=5$ thì $a^2+b^2+c^2=3^2+2^2+5^2=38$ là hợp số.

Nếu $b=5$, $c=7$ thì $a^2+b^2+c^2=3^2+5^2+7^2=83$ là số nguyên tố.

Vậy ba số nguyên tố liên tiếp cần tìm là 3; 5; 7.

Bài toán 1.7. *Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r, s sao cho $p^s+s^q, q^s+s^r, r^s+s^p$ đều là các số nguyên tố.*

Lời giải. Ta xét các trường hợp:

TH1. Số s là số nguyên tố lẻ suy ra $p=q=r=2$.

Ta có $2^{2k+1}=2.4^k\equiv2$ (mod 3) suy ra $2^s\equiv2$ (mod 3).

Nếu s không chia hết cho 3 thì $s^2\equiv1$ (mod 3). Do đó $2^s+s^2\,\vdots\,3$ và $2^s+s^2>3$. Suy ra 2^s+s^2 là hợp số (loại).

Nếu s chia hết cho 3 thì $s=3$. Suy ra $2^3+3^2=17$ là số nguyên tố (chọn).

Vậy bộ (p, q, r, s) là $(2, 2, 2, 3)$ là 1 bộ số phải tìm.

TH2. Số s là số nguyên tố chẵn, khi đó $s=2$. Suy ra p, q, r là số nguyên tố lẻ.

Nếu p là số không chia hết cho 3 thì $p^2\equiv1$ (mod 3) và $2^q\equiv2$ (mod 3) vì q lẻ. Suy ra $p^2+2^q\,\vdots\,3$, $p^2+2^q>3$ tức là p^2+2^q là hợp số (loại).

Do đó p chia hết cho 3 tức là $p=3$.

Lập luận tương tự tìm được $q=r=3$.

Suy ra bộ (3, 3, 3, 2) là bộ số thứ hai phải tìm.
Vậy bộ (p, q, r, s) là (2, 2, 2, 3), (3, 3, 3, 2).

Nhận xét. Theo đề bài cả ba biểu thức $p^s + s^q$, $q^s + s^r$, $r^s + s^p$ đều chứa lũy thừa của s, do đó ta xét s là số lẻ hoặc s là số chẵn. Tương tự dựa vào tính chẵn lẻ ta có bài toán.

Bài toán 1.8. *Tìm n nguyên dương để cả ba số $3n-4, 4n-5, 5n-3$ đều là số nguyên tố.*

Lời giải. Tổng ba số $(3n-4)+(4n-5)+(5n-3)=12n-12$ là số chẵn, nên trong ba số phải có một số chẵn và là số nguyên tố. Suy ra số chẵn đó bằng 2.
Vì $4n-5$ là số lẻ, nên ta có các trường hợp:
TH1. $3n-4=2 \Leftrightarrow 3n=6 \Leftrightarrow n=2$. Khi đó $3n-4=2$, $4n-5=3, 5n-3=7$ đều là số nguyên tố (thỏa mãn).
TH2. $5n-3=2 \Leftrightarrow 5n=5 \Leftrightarrow n=1$. Khi đó $3n-4=-1$, $4n-5=-1, 5n-3=2$ (loại).
Vậy $n=2$ thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. Trong bài toán trên, lời giải đã dựa vào tính chất: *Tổng của ba số nguyên tố đã cho là số chẵn, nên phải có một số bằng 2.*

Bài toán 1.9. *Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $7p+q$ và $pq+11$ đều là các số nguyên tố.*

Lời giải. Vì $pq+11$ là số nguyên tố nên sẽ là số nguyên tố lẻ. Do vậy pq chẵn nên p chẵn hoặc q chẵn. Suy ra $p=2$ hoặc $q=2$.
TH1. Với $p=2$, khi đó theo đề bài $14+q$ và $2q+11$ là số nguyên tố.
Nếu $q=2$ thì $2q+11=15$ là hợp số (loại).
Nếu $q=3$ thì $2q+11=17$ và $14+q=17$ là số nguyên tố.
Nếu $q>3$ thì q không chia hết cho 3. Khi đó
$$q=3k+1 \text{ hoặc } q=3k+2 \; (k \in \mathbb{N}^*).$$
$q=3k+1$ thì $14+q=14+3k+1=3(5+k)$ là hợp số.
$q=3k+2$ thì $2q+11=2(3k+2)+11=3(2k+5)$ là hợp số. Vậy $p=2$; $q=3$ là một đáp số.
TH2. Với $q=2$. Lập luận tương tự cho ta đáp số $p=3$.
Vậy cặp (p, q) là: (2; 3), (3; 2).

Nhận xét. Lời giải bài toán dựa vào tính chất số nguyên tố lớn hơn 2 phải là số lẻ, số nguyên tố chẵn là số 2.

Bài toán 1.10. *Tìm các số nguyên tố bằng tổng của hai số nguyên tố và bằng hiệu của hai số nguyên tố.*

Lời giải. Gọi số nguyên tố cần tìm là p thỏa mãn $p=a+b=c-d$ với a,b,c,d là các số nguyên tố.
Ta có $p>2$ nên p là số nguyên tố lẻ. Suy ra $a+b=c-d$ là số lẻ. Do đó a là số nguyên tố chẵn hoặc b là số nguyên tố chẵn.
Do vai trò a, b như nhau, giả sử b là số nguyên tố chẵn. Suy ra $b=2$. Từ $c-d>0$ và là số lẻ suy ra d là số nguyên tố chẵn, nên $d=2$.
Vậy $p=a+2=c-2 \Rightarrow a=p-2, c=p+2$.
Xét ba số lẻ liên tiếp $a=p-2$, p, $c=p+2$ sẽ có một số chia hết cho 3.
Mà $a=p-2, p, c=p+2$ là các số nguyên tố.
Suy ra $a=3, p=3+2=5, c=5+2=7$.
Vậy số nguyên tố cần tìm là 5 thỏa mãn $5=3+2=7-2$.

Nhận xét. Lời giải bài toán trên dựa vào tính chất chẵn lẻ của tổng và hiệu của hai số nguyên tố. Tương tự bài toán trên ta có bài toán sau.

Bài toán 1.11. *Tìm dãy số tự nhiên liên tiếp nhiều số hạng nhất sao cho mỗi số hạng trong dãy là tổng của hai số nguyên tố.*

Lời giải. Vì mỗi số hạng của dãy là tổng của 2 số nguyên tố nên mỗi số lẻ trong dãy là tổng của số 2 và một số là số lẻ.
Giả sử dãy các số lẻ trong dãy tự nhiên là $x_1=2+p$, $x_2=2+p+2, x_3=2+p+4, \ldots$ và $p, p+2, p+4, p+6, \ldots$ là các số nguyên tố lẻ liên tiếp.
Với 3 số lẻ liên tiếp luôn có một số chia hết cho 3. Suy ra p chia hết cho 3, p là số nguyên tố, do đó $p=3$, $p+2=5$, $p+4=7$ (là số nguyên tố), $p+6=9$ (là hợp số).
Vậy dãy số lẻ trong dãy các số tự nhiên thoả mãn chỉ có nhiều nhất 3 số
$$x_1=2+3=5, x_2=2+3+2=7, x_3=2+3+4=9.$$
Lại có $4=2+2$, $6=3+3$, $8=5+3$, $10=3+7$.
Vậy dãy số tự nhiên liên tiếp có nhiều nhất số hạng thỏa mãn bài toán là: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (gồm có 7 số).

Nhận xét. Lời giải bài toán trên dựa vào tính chất chẵn lẻ của số nguyên tố và dựa vào tính chất ba số lẻ liên tiếp luôn có một số chia hết cho 3.

DẠNG 2. CHỨNG MINH MỘT SỐ LÀ SỐ NGUYÊN TỐ HAY HỢP SỐ

Bài toán 2.1. *Cho p, q là hai số nguyên tố lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng $\frac{p+q}{2}$ là hợp số.*

Lời giải. Từ p, q là hai số nguyên tố lẻ liên tiếp nên $\frac{p+q}{2}$ là số tự nhiên. Do vai trò p, q như nhau, giả sử
$$p<q \Rightarrow 2p<p+q<2q \Leftrightarrow p<\frac{p+q}{2}<q.$$
Vậy $\frac{p+q}{2}$ là số tự nhiên và nằm giữa 2 số nguyên tố lẻ liên tiếp.
Suy ra $\frac{p+q}{2}$ là hợp số.

Nhận xét. Để giải bài toán trên ta đã dựa vào tính chất: *Số tự nhiên nằm giữa hai số nguyên tố lẻ liên tiếp thì phải là hợp số.*

Bài toán 2.2. *Cho p và $8p^2+1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng $8p^2-1$ cũng là số nguyên tố.*

Lời giải. Nếu $p=3k\pm1 \; (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $p^2=3t+1 \; (t \in \mathbb{N}^*)$.
Suy ra $8p^2+1=8(3t+1)+1=3(8t+3) \vdots 3, 8p^2+1>3$.
Suy ra $8p^2+1$ là hợp số (trái giả thiết).

Nếu $p = 3k$, do p là số nguyên tố nên $p = 3$. Với $p = 3$ thì $8p^2 + 1 = 73$, $8p^2 - 1 = 71$ đều là số nguyên tố.

Vậy $8p^2 - 1$ cũng là số nguyên tố.

Bài toán 2.3. *Biết p là số nguyên tố thỏa mãn $p^3 - 6$ và $2p^3 + 5$ là các số nguyên tố. Chứng minh rằng $p^2 + 10$ cũng là số nguyên tố.*

Lời giải. • Nếu $p = 7$ khi đó $p^3 - 6 = 337, 2p^3 + 5 = 691$, $p^2 + 10 = 7^2 + 10 = 59$ đều là các số nguyên tố.

• Nếu p là số nguyên tố khác 7 thì $p \equiv \pm 1 \pmod 7$, $p \equiv \pm 2 \pmod 7$, $p \equiv \pm 3 \pmod 7 \Rightarrow p^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$.

Suy ra p^3 chia cho 7 có số dư là 1 hoặc 6.

- Nếu p^3 chia cho 7 dư 1 thì $2p^3 + 5$ chia hết cho 7, mà $2p^3 + 5 > 7$ nên $2p^3 + 5$ là hợp số (mâu thuẫn).

- Nếu p^3 chia cho 7 dư 6 thì $p^3 - 6$ chia hết cho 7, mà $p^3 - 6 > 7$ nên $p^3 - 6$ là hợp số (mâu thuẫn).

Vậy $p = 7$ và $p^2 + 10$ là số nguyên tố.

Nhận xét. Lời giải bài toán trên dựa vào tính chất: *p là số nguyên tố khác 7 thì p^3 chia cho 7 có số dư là 1 hoặc 6.*

Bài toán 2.4. *Cho n là số tự nhiên, $n > 2$. Hai số $2^n - 1, 2^n + 1$ có thể đồng thời là hai số nguyên tố không? Có thể đồng thời là hợp số hay không?*

Lời giải. Ta có mệnh đề: Ba số tự nhiên liên tiếp bao giờ cũng có một số chia hết cho 3.

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $2^n - 1$, 2^n, $2^n + 1$ có một số chia hết cho 3. Mà 2^n không chia hết cho 3 với mọi n, do đó trong hai số $2^n - 1$, $2^n + 1$ phải có một số chia hết cho 3.

Với $n > 2$ thì $2^n - 1 > 3$, $2^n + 1 > 3$. Suy ra trong hai số $2^n - 1$, $2^n + 1$ phải có ít nhất một số là hợp số.

Với $n = 6$ thì hai số $2^n - 1 = 2^6 - 1 = 63$, $2^n + 1 = 2^6 + 1 = 65$ đều là hợp số.

Nhận xét. Bài toán trên sử dụng tính chất ba số tự nhiên liên tiếp bao giờ cũng có một số chia hết cho 3.

Bài toán 2.5. *Cho các số $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và thoả mãn $a.b = c.d$. Số $a+b+c+d$ có thể là số nguyên tố không?*

Lời giải. Ta có với mọi số tự nhiên $d \in \mathbb{N}^*$ ta đều có thể viết được $d = d_1.d_2$ với $d_1, d_2 \in \mathbb{N}^*$. Từ $a.b = c.d$ ta có các trường hợp:

1) Trong 4 số a, b, c, d thì hoặc không có số lẻ nào hoặc chỉ có 2 số lẻ. Khi đó $a + b + c + d$ là số chẵn lớn hơn 2. Vậy $a + b + c + d$ là hợp số.

2) Một trong 4 số a, b, c, d là số chẵn còn lại 3 số lẻ điều. Điều này không xảy ra vì $a.b = c.d$.

3) Trong 4 số a, b, c, d có 3 số chẵn và một số lẻ. Chẳng hạn a, b, c chẵn, d là số lẻ. Từ $a.b = c.d$, nên $ab \vdots d$.

Nếu d là số nguyên tố thì $a \vdots d$ hoặc $b \vdots d$.

Giả sử $b \vdots d$ thì $b = kd$ suy ra $a.b = a.kd = c.d$ hay $c = ka$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Do đó

$$a + b + c + d = a + kd + ka + d = (k+1).(a+d),$$

suy ra $a + b + c + d$ là hợp số.

Nếu $d = d_1.d_2$, từ $a.b = c.d$ suy ra $a.b = c.d_1.d_2$.

Ta có $a = k_1d_1, b = k_2d_2$ (hoặc $a = k_1d_2, b = k_2d_1$).

Suy ra $a.b = c.d = k_1k_2d_1d_2 = k_1k_2d$ do đó $c = k_1k_2$.

Vậy $a+b+c+d = k_1d_1 + k_2d_2 + k_1k_2 + d_1d_2 = (k_1 + d_2)(k_2 + d_1)$.

Do $k_1, k_2, d_1, d_2 \in \mathbb{N}^*$ nên $a + b + c + d$ là hợp số.

Vậy $a+b+c+d$ không thể là số nguyên tố.

Bài toán 2.6. *Cho x, y, z, t là các số nguyên dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$. Chứng minh $3x + 5y + 7z + 9t + 40$ không phải là số nguyên tố.*

Lời giải. Xét $A = (x+1)(x+2) + (y+2)(y+3) + (z+3)(z+4) + (t+4)(t+5)$.

Do x, y, z, t là số nguyên dương và A là tổng của tích đều một các số nguyên liên tiếp nên A là một số chẵn.

Lại có $A = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + (3x + 5y + 7z + 9t + 40)$.

Vì $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$ nên $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ là số chẵn.

Suy ra $3x + 5y + 7z + 9t + 40$ là số chẵn lớn hơn 2.

Vậy $3x + 5y + 7z + 9t + 40$ không phải là số nguyên tố.

DẠNG 3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN LIÊN QUAN ĐẾN SỐ NGUYÊN TỐ

Bài toán 3.1. *Tìm các cặp số tự nhiên (x, y) biết $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ (p là số nguyên tố).*

Lời giải. Ta có $xy \neq 0$, từ giả thiết suy ra $xy = p(x+y)$

$\Leftrightarrow xy - px - py + p^2 = p^2 \Leftrightarrow (x-p)(y-p) = p^2 = p.p.$

Từ giả thiết suy ra $x > p$, $y > p$.

Do đó $x - p > 0$, $y - p > 0$. Ta có các trường hợp:

• $\begin{cases} x - p = 1 \\ y - p = p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = p + 1 \\ y = p^2 + p \end{cases}$;

• $\begin{cases} x - p = p^2 \\ y - p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = p^2 + p \\ y = p + 1 \end{cases}$; • $\begin{cases} x - p = p \\ y - p = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2p \\ y = 2p \end{cases}$.

Vậy các cặp (x, y) là $(p+1; p^2+p), (p^2+p; p+1), (2p; 2p)$.

Nhận xét. Từ đề bài viết phương trình đã cho thành phương trình vế trái là tích hai biểu thức, vế phải là p^2. Khi đó p^2 chỉ có các ước là: $1, p, p^2$.

Bài toán 3.2. *Tìm các số nguyên tố p sao cho có thể viết* $\frac{1}{p}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$, *với a, b là các số nguyên dương.*

Lời giải. Từ đề bài có $a^2b^2-pa^2-pb^2+p^2=p^2$

$$\Leftrightarrow (a^2-p)(b^2-p)=p^2=pp.$$

Từ giả thiết suy ra $a^2>p, b^2>p$.

Do đó $a^2-p>0, b^2-p>0$. Ta có các trường hợp:

- $\begin{cases}a^2-p=1\\ b^2-p=p^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=p+1\\ b^2=p^2+p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=p+1\\ b^2=p(p+1)\end{cases}$ (loại).
- $\begin{cases}a^2-p=p^2\\ b^2-p=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=p(p+1)\\ b^2=p+1\end{cases}$ (loại).
- $\begin{cases}a^2-p=p\\ b^2-p=p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=2p\\ b^2=2p\end{cases}$.

Mà p là số nguyên tố, suy ra $p=2$ (thỏa mãn bài toán).

Nhận xét. Để giải bài toán trên dựa vào tính chất: *Tích hai số nguyên liên tiếp không thể là số chính phương.*

Bài toán 3.3. *Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c sao cho:* $abc<ab+bc+ca$.

Lời giải. Vì a, b, c có vai trò như nhau nên ta có thể giả sử $2\le a\le b\le c$. Khi đó $abc<ab+bc+ca\le 3bc$

$\Rightarrow abc<3bc\Rightarrow a<3\Rightarrow a=2$ (vì a nguyên tố).

Với $a=2$ ta có $2bc<2b+bc+2c$

$\Rightarrow bc<2b+2c\Leftrightarrow(b-2)(c-2)<4.$ (1)

Có $0\le b-2\le c-2\Rightarrow b=2, b=3$. Nếu $b=2$, thay vào (1) suy ra c là số nguyên tố p bất kỳ. Nếu $b=3$, thay vào (1) suy ra $c-2<4\Rightarrow c<6\Rightarrow c=3, c=5$.

Tóm lại: Ta có các cặp (a, b, c) cần tìm là: $(2; 2; p)$, $(2; 3; 3)$, $(2; 3; 5)$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét. Dựa vào đề bài thấy vai trò của a, b, c như nhau, từ đó sử dụng phương pháp đánh giá tìm được các giá trị a, b, c.

Bài toán 3.4. *Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn:* $(a+1)(b+2)(c+3)=4abc$. (1)

Lời giải. Xét số c trong các trường hợp sau:

TH1. Nếu $c=2$ thì từ (1) có $5(a+1)(b+2)=8ab$ (2).

Vì $(5, 8)=1$ nên 5 là ước của số nguyên tố của a hoặc số nguyên tố b. Suy ra $a=5$ hoặc $b=5$.

Với $a=5$ thay vào (2) ta được $b=6$ (loại).

Với $b=5$ thay vào (2) ta được $a=7$ (thỏa mãn).

TH2. Nếu $c=3$ thì từ (1) suy ra $(a+1)(b+2)=2ab$

$\Leftrightarrow ab-2a-b=2\Leftrightarrow(a-1)(b-2)=4=1.4=2.2.$

Do a, b đều là số nguyên tố nên $b-2$ khác 2 khác 4. Suy ra $b=3$ và $a=5$ (thỏa mãn).

TH3. Nếu $c>3$ thì từ (1) có

$$4abc=(a+1)(b+2)(c+3)<(a+1)(b+2)2c.$$

Suy ra $2ab<(a+1)(b+2)\Leftrightarrow(a-1)(b-2)<4$.

Từ đó mỗi thừa số ở vế trái nhỏ hơn 4, suy ra $a<5$. Suy ra $a=2$ hoặc $a=3$. Với $a=2$, thay vào (1) suy ra $3(b+2)(c+3)=8bc$. Suy ra 3 là ước của số b hoặc c, mà $c>3$, nên $b=3$ và $c=5$ (thỏa mãn).

Với $a=3$, thay vào (1) suy ra $(b+2)(c+3)=3bc$

$\Leftrightarrow(b-1)(2c-3)=9=1.9=3.3$, mà $2c-3>3$ nên $2c-3=9\Rightarrow c=6$ (loại).

Vậy bộ (a, b, c) là $(7; 5; 2)$, $(5; 3; 3)$, $(2; 3; 5)$.

Nhận xét. Do vai trò của a, b, c không như nhau, lời giải bài toán trên dựa vào việc xét các trường hợp của c. Trong trường hợp $c>3$, dựa vào phương pháp đánh giá để tìm được các giá trị a, b, c.

Bài toán 3.5. *Tìm số nguyên tố p để* $\frac{p+1}{2}$ *và* $\frac{p^2+1}{2}$ *là các số chính phương.*

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên dương x và y sao cho: $\frac{p+1}{2}=x^2$ và $\frac{p^2+1}{2}=y^2$.

Suy ra $p+1=2x^2$ (1) và $p^2+1=2y^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $p(p-1)=2(y+x)(y-x)$ (3).

Do đó $2(y+x)(y-x)\,\vdots\,p$ (4). Mặt khác từ (1) suy ra p là số lẻ nên $x>1$.

Từ (1) $p+1=2x^2=x^2+x^2>x+1\Rightarrow p>x$.

Từ (2) suy ra $y>1$. Do đó

$$p^2+1=2y^2=y^2+y^2>y^2+1\Rightarrow p>y.$$

Từ (3) suy ra $y>x$ và $0<y-x<p$. Do đó từ (4) suy ra $y+x\,\vdots\,p$, mà $0<x+y<2p$ nên $x+y=p$.

Thay $x+y=p$ vào (3) suy ra $p-1=2(y-x)$

$\Rightarrow y-x=\frac{p-1}{2}$ và $x+y=p$. Suy ra $x=\frac{p+1}{4}, y=\frac{3p-1}{4}$.

Thay $x=\frac{p+1}{4}$ vào (1) ta được $p+1=2\left(\frac{p+1}{4}\right)^2$

$\Leftrightarrow p=7$. Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy $p=7$.

Nhận xét. Dựa vào đề bài ta lập được hai phương trình nghiệm nguyên, từ đó tìm mối quan hệ của hai phương trình nghiệm nguyên để giải.

Bài toán 3.6. *Tìm các số nguyên tố p, q và số nguyên x thỏa mãn phương trình:* $x^5+px+3q=0$.

Lời giải. Từ $x^5+px+3q=0\Leftrightarrow x(x^4+p)=-3q.$ (1)

Do p, q là số nguyên tố, $x^4+p>0$ và x là số nguyên nên từ (1) suy ra $x\in\{-1;-3;-q;-3q\}$. Xét các trường hợp:

- Nếu $x=-1$ thì từ (1) suy ra $p+1=3q$.

Với $q=2$ thì $p=5$ thỏa mãn.

Với $q>2$ thì $p+1=3q$ là số lẻ nên p là số nguyên tố chẵn. Suy ra $p=2, q=1$ (loại).

• Nếu $x = -3$ thì từ (1) ta có $p + 81 = q$. Suy ra q là số nguyên tố lẻ, p là số nguyên tố chẵn.
Dẫn đến $p = 2$, $q = 83$ thỏa mãn.

• Nếu $x = -q$ thì từ (1) suy ra $q^4 + p = 3$ (loại).

• Nếu $x = -3q$ thì từ (1) suy ra $81q^4 + p = 1$ (loại).

Vậy bộ (p, q, x) là $(5;2;-1),(2;83;-3)$.

Bài toán 3.7. *Tồn tại hay không các số nguyên tố x, y, z thoả mãn phương trình: $x^2 + y^3 = z^4$?*

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên tố x, y, z thoả mãn điều kiện $x^2 + y^3 = z^4$. Xét z chẵn thì $z = 2$ khi đó $x^2 + y^3 = 16$.

Nếu $x = 2 \Rightarrow 4 + y^3 = 16 \Leftrightarrow y^3 = 12$, vô lý.

Nếu $x \geq 3$ thì $y^3 = 16 - x^2 \leq 7$, vô lý. Vậy z lẻ $\Rightarrow z^4$ lẻ $\Rightarrow x^2$ lẻ y^3 chẵn hoặc x^2 chẵn và y^3 lẻ.

• y^3 chẵn $\Rightarrow y = 2$ nên $y^3 = 8$. Vậy $x^2 + 8 = z^4$.

Nếu $x = 3 \Rightarrow 9 + 8 = 17 = z^4$ (vô lý).

Nếu $x > 3 \Rightarrow x$ chia cho 3 dư $\pm 1 \Rightarrow x^2$ chia cho 3 dư $1 \Rightarrow (x^2 + 8) \vdots 3 \Rightarrow z^4 \vdots 3$. Suy ra $z = 3 \Rightarrow x^2 + 8 = 81 \Rightarrow x^2 = 73$ (vô lý).

• Nếu x^2 chẵn $\Rightarrow x = 2$ nên $x^2 = 4$. Ta có $4 + y^3 = z^4$.

Nếu $y \vdots 3$ thì $y = 3 \Rightarrow 4 + 27 = z^4$ (vô lý).

Nếu $y > 3$ thì y chia cho 3 dư $\pm 1 \Rightarrow y^3$ chia cho 3 dư ± 1.

Với y^3 chia cho 3 dư 1 thì z^4 chia cho 3 dư 2 (vô lý).

Với y^3 chia cho 3 dư -1 thì z^4 chia hết cho 3. Suy ra z chia hết cho $3 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow 4 + y^3 = 81$ (loại).

Vậy không tồn tại các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Để giải bài toán trên ta đã xét tính chẵn, lẻ của z, đồng thời dựa vào tính chất: *Nếu a chia cho 3 dư ±1 thì a^2, a^4 chia cho 3 dư 1.*

Bài toán 3.8. *Tìm các số nguyên tố $p_1, p_2, p_3, ..., p_8$ thỏa mãn phương trình $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + ... + p_7^2 = p_8^2$.*

Lời giải. Ta có mệnh đề "*Mọi số tự nhiên lẻ khi bình phương đều chia cho 8 dư 1*". Thật vậy: xét số tự nhiên lẻ $a = 2b+1 \Rightarrow a^2 = 4b(b+1)+1$, với b là số tự nhiên có $b(b+1)$ chia hết cho 2. Suy ra a^2 chia cho 8 dư 1.

Áp dụng điều trên ta có p_8 là số lẻ nên $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + ... + p_7^2 = p_8^2$ chia cho 8 dư 1.

Do p_8 là số lẻ. Suy ra 7 số $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ có một số lẻ số lẻ. Ta xét các trường hợp.

- Có 7 số lẻ. Suy ra $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + ... + p_7^2 \equiv 7.1 \pmod 8$ $\Rightarrow p_8^2 \equiv 7 \pmod 8$ (vô lý).

- Có 5 số lẻ và 2 số chẵn. Suy ra
$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + ... + p_7^2 \equiv 5.1 + 2.2^2 \pmod 8$$
$\Rightarrow p_8^2 \equiv 5 \pmod 8$ (vô lý).

- Có 3 số lẻ và 4 số chẵn. Suy ra
$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + ... + p_7^2 \equiv 3.1 + 4.2^2 \pmod 8$$
$\Rightarrow p_8^2 \equiv 3 \pmod 8$ (vô lý).

- Có 1 số lẻ và 6 số chẵn. Gọi số lẻ trong 7 số $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ là x, đặt $p_8 = y$. Ta có $x^2 + 6.2^2 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 24 \Leftrightarrow (y+x)(y-x) = 24$.

Có x, y đều là số lẻ, $y + x$ và $y - x$ cùng chẵn, $y + x > y - x > 0$. Ta có các trường hợp:

$\begin{cases} y-x=2 \\ y+x=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=7 \\ x=5 \end{cases}$ (chọn), $\begin{cases} y-x=4 \\ y+x=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=1 \end{cases}$ (loại).

Vậy các bộ $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8)$ là $(5,2,2,2,2,2,2,7)$ và các hoán vị của
$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7.$$

Nhận xét. Bài toán có 8 số nguyên tố nên vận dụng tính chất "*Mọi số tự nhiên lẻ khi bình phương đều chia cho 8 dư 1*".

MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

1. Tìm các số có 4 chữ số thoả mãn các tính chất sau:
- Tổng các chữ số của số đó bằng 26.
- Ba chữ số cuối có dạng $\overline{aba}$ và là số nguyên tố.

2. Cho n số tự nhiên có tổng bằng 2011 và tất cả n số đó đều là hợp số. Tìm giá trị lớn nhất của n.

3. Cho p là số nguyên tố. Tìm số tự nhiên n khác 0 nhỏ nhất thoả mãn: nếu n chia hết cho $p - 1$ thì n cũng chia hết cho p.

4. Cho các số tự nhiên a, b, c khác 0 sao cho $p = b^c + a$, $q = a^b + c$, $r = c^a + b$ là các số nguyên tố. Chứng minh trong ba số p, q, r phải có 2 số bằng nhau.

5. Ba số dương a, b, c đôi một khác nhau và thoả mãn đồng thời các điều kiện: i) a là ước của $b + c + bc$; ii) b là ước của $a + c + ac$; iii) c là ước của $a + b + ab$. Chứng minh rằng a, b, c không thể đồng thời là các số nguyên tố.

6. Tìm tất cả các số nguyên tố có 3 chữ số sao cho nếu ta thay đổi vị trí của các chữ số theo thứ tự bất kỳ ta vẫn thu được những số nguyên tố.

7. Cho $p \geq 5$ thoả mãn p và $2p + 1$ là các số nguyên tố. Chứng minh rằng $4p + 1$ là hợp số.

8. Tìm số nguyên tố p để $4p + 1$ là số chính phương.

9. Gọi p là số nguyên tố, x, y là các số nguyên dương với $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$. Tìm tất cả các số p để x hoặc y là số chính phương.

10. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $p = a^2 + b^2 + c^2$, với a, b, c là các số nguyên dương sao cho $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU ĐHQG TP. HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2017-2018

VÒNG 1

Câu 1. $\left[\dfrac{(a+2b)^2-(b+2a)^2}{a+b}\right]:$

$$:\left[\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right)\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)}{a-b}-3ab\right]=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+4ab+4b^2-b^2-4ab-4a^2}{a+b}:\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}-3ab\right)=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3\left(a^2-b^2\right)}{a+b}:(a^2+ab+b^2-3ab)=3$$

$\Leftrightarrow -3(a-b):(a-b)^2=3 \Leftrightarrow a-b=-1.$

Do đó $1=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Vì vậy

$$S=\frac{1+2ab}{a^2+b^2}=\frac{a^2-2ab+b^2+2ab}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1.$$

Câu 2. a) $\left(x^2-6x+5\right)\left(\sqrt{x-2}-x+4\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ \left[\begin{array}{ll} x^2-6x+5=0 & (1) \\ \sqrt{x-2}-x+4=0 & (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow x^2-x-5x+5=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$.

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ x-2=(x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ x^2-9x+18=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ (x-3)(x-6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ x=3 \text{ hoặc } x=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$

Kết hợp với điều kiện $x \ge 2$, ta có nghiệm của phương trình là $x = 5$ và $x = 6$.

b) $\begin{cases} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+2y}-3\right)=0 \\ x^2-6xy-y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \text{ và } x+2y\ge 0 \\ \sqrt{x}=0 \text{ hoặc } \sqrt{x+2y}-3=0 \\ x^2-6xy-y^2=6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \text{ và } x+2y\ge 0 \\ x=0 \text{ hoặc } x+2y=9 \\ x^2-6xy-y^2=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \text{ và } x+2y\ge 0 \\ \left[\begin{array}{ll} x=0 \text{ và } x^2-6xy-y^2=6 & (1) \\ x+2y=9 \text{ và } x^2-6xy-y^2=6 & (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y\in\varnothing \end{cases}$ (vô nghiệm)

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-2y \\ (9-2y)^2-6(9-2y)y-y^2=6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=9-2y \\ y^2-6y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7, y=1 \\ x=-1, y=5 \end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện $x \ge 0$ và $x + 2y \ge 0$, ta có nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình là $(7; 1)$.

Câu 3. a) Đặt $y = x + m$, phương trình (1) trở thành $y^2-5y+6=0 \Leftrightarrow y^2-2y-3y+6=0$

$\Leftrightarrow (y-2)(y-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=3 \end{array}\right.$. Do đó $\left[\begin{array}{l} x=2-m \\ x=3-m \end{array}\right.$.

Mà $2 - m \ne 3 - m$ với mọi $m \in \mathbb{R}$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $S = (x_1 + m)^2 + (x_2 + m)^2 + 5(x_1 + x_2 + 2m)$

$= y_1^2 + y_2^2 + 5(y_1 + y_2) = 2^2 + 3^2 + 5(2 + 3) = 38.$

b) $x_1 < x_2$ nên $x_1 = 2 - m$, $x_2 = 3 - m$.

$x_2 < 1$, do đó $3 - m < 1 \Leftrightarrow m > 2$.

$x_1^2 + 2x_2 = 2(m-1) \Leftrightarrow (2-m)^2 + 2(3-m) = 2(m-1)$

$\Leftrightarrow 4 - 4m + m^2 + 6 - 2m = 2m - 2$

$\Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 6m + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (m-2)(m-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=6 \end{array}\right.$.

Kết hợp với $m > 2$ ta có giá trị m cần tìm là $m = 6$.

Câu 4. a) Đặt $AM = x$ (cm), $MB = y$ (cm) (điều kiện $0 < x < y$). Do đó $BN = x$, $QI = x$, $IP = y$.

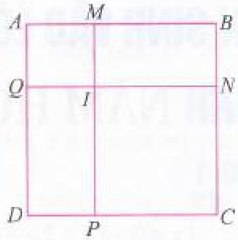
Theo đầu bài ta có $\begin{cases} x^2+y^2=1300 \\ 2xy=1200 \end{cases}$.

Ta có $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 2500$

$\Rightarrow x + y = 50$ và

$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 100$

$\Rightarrow x - y = -10$ (vì $x < y$).



Do đó $\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = -10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 40 \\ x - y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}$ (nhận).

Vậy cạnh hình vuông $AMIQ$ là 20cm.

Ta có $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Vì vậy mà Bình biết được Nam bị nhầm.

b) Gọi giá tiền mỗi món quà lúc đầu là x (đồng), số em ban đầu của "Mái ấm tình thương X" là y (em) (điều kiện $x > 0,\ y \in \mathbb{N}^*$).

Số tiền mua quà theo dự trù là: $x.y.3 = 3xy$ (đồng).

Giá tiền mỗi món quà sau khi tăng thêm 5% là

$$x + x.5\% = 1{,}05x \text{ (đồng).}$$

Số em lúc sau của "Mái ấm tình thương X" có là $y + 9$ (em). Số tiền thực tế mua quà là

$$1{,}05x.(y + 9).2 = 2{,}1x(y + 9) \text{ (đồng).}$$

Theo đầu bài, ta có số tiền mua quà theo dự trù và số tiền thực tế mua quà bằng nhau thì cùng bằng tổng số tiền 30 bạn lớp 9T đóng góp, ta có phương trình: $3xy = 2{,}1x(y + 9) \Leftrightarrow 3y = 2{,}1(y + 9)$

$\Leftrightarrow 0{,}9y = 2{,}1.9 \Leftrightarrow y = 21$ (thích hợp).

Số em ban đầu của "Mái ấm tình thương X" là 21 em.

Vậy số em của "Mái ấm tình thương X" được nhận quà là: $21 + 9 = 30$ (em).

Câu 5. a) Ta có

$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ nên $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 90^0$;

ΔOAC có $OA = OC\ (= R) \Rightarrow \Delta OAC$ vuông cân tại O

$\Rightarrow AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{2}R$.

$\widehat{ACB} = 180^0 - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right) = 15^0$;

$\widehat{NBC} = 90^0 - \widehat{ACB} = 75^0$; $\widehat{BNC} = \widehat{BPC} = 90^0$

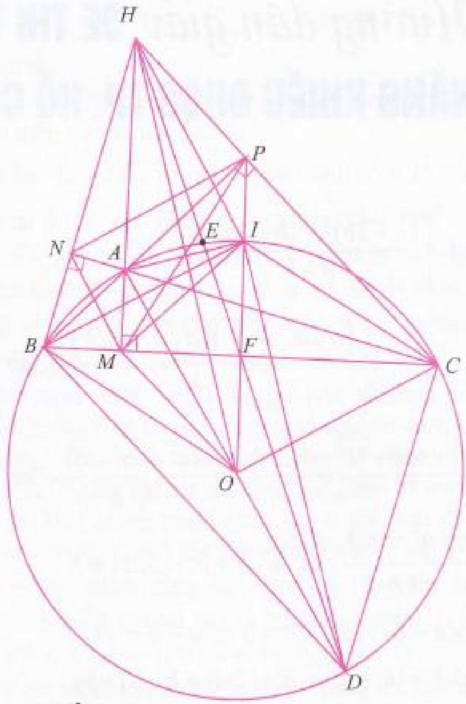
$\Rightarrow$ tứ giác $BCPN$ nội tiếp đường tròn đường kính BC

$\Rightarrow \widehat{HPN} = \widehat{HBC} = 75^0$; $\widehat{NPA} = \widehat{ACB} = \widehat{APM}$

$\Rightarrow \widehat{NPM} = 2\widehat{ACB} = 30^0$.

Tương tự $\widehat{MNP} = 2\widehat{CBA} = 90^0$. Do đó

$$\frac{MN}{MP} = \sin\widehat{MPN} = \sin 30^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MP}{MN} = 2.$$



b) A, N, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

$AC \perp BH$, $AC \perp CD \Rightarrow BH \parallel CD$.

Tương tự $CH \parallel BD$. Do đó tứ giác $BHCD$ là hình bình hành $\Rightarrow F$ là trung điểm của HD và BC.

c) • Ta có $\widehat{CNP} = \widehat{CBP} = 45^0 = \widehat{NCO}$

$\Rightarrow NP \parallel OC$, mà $CO \perp AD$, do đó $AD \perp NP$.

F là trung điểm của $BC \Rightarrow OF \perp BC$. Do đó OF là đường trung trực của BC.

$\Rightarrow \Delta IBC$ cân tại I có IO là đường phân giác, nên

$$\widehat{BIO} = \frac{1}{2}\widehat{BIC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 60^0.$$

ΔOBI cân tại O có $\widehat{BIO} = 60^0 \Rightarrow \Delta OBI$ đều

$\Rightarrow IB = IO = IC = R$.

Dễ thấy F là trung điểm của OI, nên $OHID$ là hình bình hành $\Rightarrow IH = OD = R$. Do đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHBC.

• ΔMAB vuông cân tại $M \Rightarrow MA = MB$. Mà $OA = OB$ $(= R)$ nên OM là đường trung trực của $AB \Rightarrow OM \perp AB$.

Từ $PH \perp AB \Rightarrow OM \parallel PH$, mà $MH \parallel OP$ nên tứ giác $HPOM$ là hình bình hành $\Rightarrow MH = OP$.

OF là đường trung bình của tam giác HAD

$\Rightarrow OF = \frac{1}{2}AH \Rightarrow AH = 2OF = R$.

Ta có $AM = MH - AH = OP - OI = IP$. Do đó tứ giác $AMIP$ là hình bình hành $\Rightarrow$ đpcm.

VÒNG 2

Câu 1. a) $\Delta' = (m+1)^2 - 2m - 4m - 1$
$= m^2 + 2m + 1 - 2m^2 - 4m - 1 = -m^2 - 2m.$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2
$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 < 1$
$\Leftrightarrow -1 < m + 1 < 1 \Leftrightarrow -2 < m < 0.$

Khi đó theo hệ thức Viète ta có
$$x_1 + x_2 = 2(m+1),\ x_1x_2 = 2m^2 + 4m + 1.$$
Ta có: $-1 < m + 1 < 1 \Leftrightarrow |m+1| < 1$ nên
$$\left|\frac{x_1 + x_2}{2}\right| = |m+1| < 1.$$

b) Vì $|m+1| < 1$ nên suy ra $-1 \le 2(m+1)^2 - 1 < 1$
$\Rightarrow -1 \le 2m^2 + 4m + 1 \le 1 \Rightarrow |x_1x_2| \le 1$. Do đó
$$\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \ge 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{|x_1|}}.\frac{1}{\sqrt{|x_2|}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{|x_1.x_2|}} \ge 2.$$
Mặt khác $\left(|x_1| + |x_2|\right)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2|$
$= \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2|$
$= [2(m+1)]^2 - 2(2m^2 + 4m + 1) + 2|x_1x_2|$
$= 2 + 2|x_1x_2| \le 2 + 2.1 = 4 \Rightarrow |x_1| + |x_2| \le 2.$

Vậy $\dfrac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \dfrac{1}{\sqrt{|x_2|}} \ge 2 \ge |x_1| + |x_2|.$

Câu 2. a) Ta có $x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$
Mà $(x^3 - y^3) ⋮ 3$ (gt), $3xy(x-y) ⋮ 3$. Do đó $(x-y)^3 ⋮ 3$, mà 3 là số nguyên tố nên $(x-y) ⋮ 3$. Suy ra $[(x-y)^3 + 3xy(x-y)] ⋮ 9$. Vậy $x^3 - y^3$ chia hết cho 9.

b) Ta có $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
$\qquad\qquad = (x-y)(x+y)^2 - xy(x-y).$

Mà $(x^3 - y^3) ⋮ (x+y)$ (gt), $(x-y)(x+y)^2 ⋮ (x+y)$.
Do đó $xy(x-y) ⋮ (x+y)$ (*)

Nếu $x + y$ là số nguyên tố, từ (*) ta có $x ⋮ (x+y)$ hoặc $y ⋮ (x+y)$ hoặc $(x-y) ⋮ (x+y)$. Các điều này vô lí vì $x < x+y, y < x+y, x-y < x+y$. Vậy $x+y$ là một hợp số.

c) Nếu $x \not\vdots\, 3$ thì $(x+1)(x-1) ⋮ 3 \Rightarrow (x^2 - 1) ⋮ 3$
$\Rightarrow (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) ⋮ 3 \Rightarrow (x^6 - 1) ⋮ 3.$

Áp dụng câu a), ta có $(x^6 - 1) ⋮ 9$. Theo giả thiết $xy \not\vdots\, 3 \Rightarrow x \not\vdots\, 3$ và $y \not\vdots\, 3 \Rightarrow (x^6 - 1) ⋮ 9$ và $(y^6 - 1) ⋮ 9$.

Đặt $k = 6a + r$ ($a \in \mathbb{N}^*$, $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$).
Ta có $x^k - y^k = x^{6a+r} - y^{6a+r}$
$\qquad = x^r(x^{6a} - 1) + y^r(y^{6a} - 1) + (x^r - y^r).$

Mà $x^{6a} - 1 = [(x^6)^a - 1^a] ⋮ (x^6 - 1)$ nên $(x^{6a} - 1) ⋮ 9$.

Tương tự cũng có $(y^{6a} - 1) ⋮ 9$.

Do vậy $(x^k - y^k) ⋮ 9 \Leftrightarrow (x^r - y^r) ⋮ 9 \Leftrightarrow r = 0$.

Vậy để $x^k - y^k$ chia hết cho 9 với $x, y \in \mathbb{N}^*$, $x > y$ và $xy \not\vdots\, 3$ thì $k = 6a$ $(a \in \mathbb{N}^*)$.

Câu 3. a) Ta có $(ab)(bc)(ca) = (abc)^2 \ge 0$
$\Rightarrow ab, bc, ca$ có một tích là một số không âm.

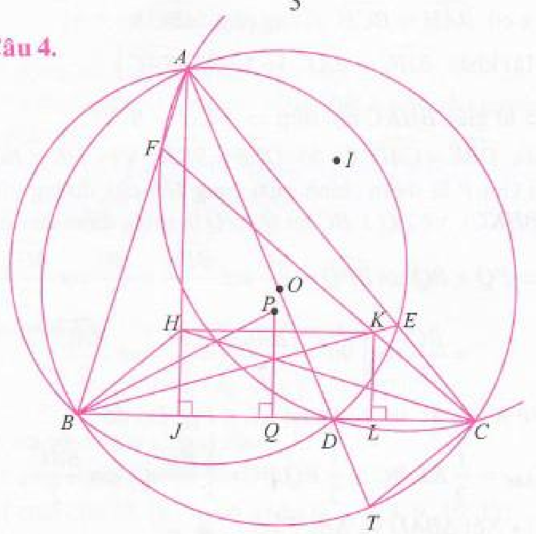
Do vai trò a, b, c như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử có $ab \ge 0$. Mà $c \ge -2$ (gt) nên $ab(c+2) \ge 0$.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 0 \Rightarrow (a-b)^2 + c^2 + ab(c+2) = 0$
$\Rightarrow (a-b)^2 = 0,\ c^2 = 0,\ ab(c+2) = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$

b) Giả sử $\min\{x_A, x_B, x_C\} \ge -\dfrac{1}{3}$
$$\Rightarrow x_A \ge -\frac{1}{3},\ x_B \ge -\frac{1}{3},\ x_C \ge -\frac{1}{3}.$$
Vai trò x_A, x_B, x_C như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử có $x_Ax_B \ge 0$. Mà $x_C \ge -\dfrac{1}{3}$ nên $x_Ax_B(3x_C + 1) \ge 0$.

Ta có $x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + 6x_Ax_Bx_C = 0$
$\Rightarrow (x_A - x_B)^2 + x_C^2 + 2x_Ax_B(3x_C + 1) = 0$
$\Rightarrow (x_A - x_B)^2 = 0,\ x_C^2 = 0,\ 2x_Ax_B(3x_C + 1) = 0$
$\Rightarrow x_A = x_B = x_C = 0 \Rightarrow A, B, C$ trùng nhau. Điều này mâu thuẫn với giả thiết, nên điều giả sử ở trên là sai. Vậy $\min\{x_A, x_B, x_C\} < -\dfrac{1}{3}$.

Câu 4.



a) Ta có các tứ giác $ABDE$, $ACDF$ nội tiếp
$\Rightarrow \widehat{AEK} = \widehat{ADB}$ và $\widehat{AFK} = \widehat{ADC}$.

Mà $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^0$ (kề bù) do đó
$\widehat{AEK} + \widehat{AFK} = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác $AEKF$ nội tiếp.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN NĂM HỌC 2017 – 2018

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. *(7,0 điểm)*

a) Giải phương trình $3x+7\sqrt{x-4}=14\sqrt{x+4}-20$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}6x+4y+2=(x+1)^2\\ 6y+4x-2=(y-1)^2\end{cases}.$

Câu 2. *(2,0 điểm)* Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $S(n)=n^2-2017n+10$, với $S(n)$ là tổng các chữ số của n.

Câu 3. *(2,0 điểm)* Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $c\ge a$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+4\left(\frac{c}{c+a}\right)^2\ge\frac{3}{2}.$$

Câu 4. *(7,0 điểm)* Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M khác A. Qua M kẻ các tiếp tuyến MC, MD với (O') (C, D là các tiếp điểm và D nằm trong (O)).

a) Chứng minh $AD.BC=AC.DB$.

b) Các đường thẳng AC, AD cắt (O) lần lượt tại E, F (E, F khác A). Chứng minh đường thẳng CD đi qua trung điểm của EF.

c) Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Trong đường tròn (O) có bán kính bằng 21 đơn vị, cho 399 điểm bất kì $A_1, A_2,..., A_{399}$. Chứng minh rằng tồn tại vô số hình tròn có bán kính bằng 1 đơn vị nằm trong đường tròn (O) và không chứa điểm nào trong 399 điểm $A_1, A_2,..., A_{399}$.

MAI XUÂN VINH

(Sở GD-ĐT Nghệ An) ***Giới thiệu***

---

b) Gọi T là giao điểm của AD và đường tròn (O). Khi A, O, D thẳng hàng, ta có $\widehat{ACT}=90^0$.

Gọi J là giao điểm của AH và BC, ta có $\widehat{AJB}=90^0$.

Xét ΔJAB và ΔCAT có:

$\widehat{AJB}=\widehat{ACT}\ (=90^0)$, $\widehat{ABJ}=\widehat{ATC}\ \left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AC}\right)$.

Do đó $\Delta JAB \backsim \Delta CAT$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{CAD}$.

Ta có $\widehat{BAH}=\widehat{BCH}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$).

Mặt khác $\widehat{BHC}=\widehat{BKC}\ \left(=180^0-\widehat{BAC}\right)$

$\Rightarrow$ tứ giác $BHKC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BKH}=\widehat{BCH}$.

Mà $\widehat{DBE}=\widehat{CAD}$ do đó $\widehat{DBE}=\widehat{BKH}$. Vậy $HK\ //\ BC$.

c) Gọi P là điểm chính giữa cung HK của đường tròn $(BHKC)$. Vẽ $PQ\perp BC$ tại $Q\Rightarrow Q$ là trung điểm của BC

$$\Rightarrow PQ=BQ\cot\widehat{BPQ}=\frac{BC}{2}\cot\frac{\widehat{BPC}}{2}=\frac{BC}{2}\cot\frac{\widehat{BHC}}{2}$$

$$=\frac{BC}{2}\cot\left(90^0-\frac{\widehat{BAC}}{2}\right)=\frac{BC}{2}\tan\frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

Vẽ $KL\perp BC$ tại L. Ta có $KL\le PQ$. Do đó

$$S_{KBC}=\frac{1}{2}KL.BC\le\frac{1}{2}PQ.BC=\left(\frac{BC}{2}\right)^2.\tan\frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

d) • Xét ΔBAD và ΔBCF có

$\widehat{ABD}$ (chung), $\widehat{BAD}=\widehat{BCF}\ \left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{DF}\right)$.

Do đó $\Delta BAD \backsim \Delta BCF$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BA}{BC}=\frac{BD}{BF}\Rightarrow BF.BA=BC.BD.$$

Tương tự $CE.CA=BC.CD$. Do đó $BF.BA-CE.CA=$ $=BC(BD-CD)=(BD+CD)(BD-CD)=BD^2-CD^2$.

• Gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. BI cắt đường tròn (AEF) tại M, N. Chứng minh tương tự trên có $BF.BA=BM.BN=IB^2-R^2$

Tương tự có $CE.CA=ID^2-R^2$.

Do đó $IB^2-ID^2=BD^2-CD^2$. Vẽ $ID'\perp BC$ tại D'.

Ta có $IB^2=ID'^2+BD'^2$ ($\Delta D'IB$ vuông tại D');

$IC^2=ID'^2+CD'^2$ ($\Delta D'IC$ vuông tại C').

Suy ra $IB^2-IC^2=BD'^2-CD'^2$.

Ta có $BD^2-CD^2=BD'^2-CD'^2\Rightarrow D\equiv D'$. Vậy $ID\perp BC$.

Câu 5. a) Giả sử ta chia được 6 học sinh thành 3 cặp mà mỗi cặp đều "hoàn hảo" có điểm số là a và b, c và d, e và f. Ta có $\frac{a+b}{2}>m$, $\frac{c+d}{2}>m$, $\frac{e+f}{2}>m$

Suy ra $m=\dfrac{a+b+c+d+e+f}{6}>m$.

Điều này vô lí. Vậy không thể chia 6 học sinh thành 3 cặp mà mỗi cặp đều "hoàn hảo".

b) Từ câu a) ta có với mỗi cách chia 6 học sinh thành 3 cặp thì có nhiều nhất là 2 cặp "hoàn hảo". Mà có 5 cách chia 6 học sinh thành 3 cặp, do đó có nhiều nhất là 2.5 = 10 (cặp "hoàn hảo").

Chẳng hạn trường hợp điểm của 6 học sinh là 1; 12; 13; 14; 15; 16 ta thấy có 10 cặp "hoàn hảo". Vậy số cặp "hoàn hảo" nhiều nhất là 10.

NGUYỄN ĐỨC TẤN – NGUYỄN ANH HOÀNG

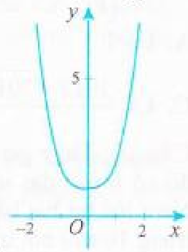
(TP. Hồ Chí Minh) ***Giới thiệu***

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2018

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^2 + 1$

B. $y = x^4 + 2x^2 + 1$

C. $y = x^2 + 2|x| + 1$

D. $y = |x^3| + 1$

Câu 2. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 2017$ không có cực trị.

B. Hàm số $y = |x|$ có cực trị.

C. Hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$ không có cực trị.

D. Hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ có đồng biến, nghịch biến trong từng khoảng nhưng không có cực trị.

Câu 3. Tìm số thực k để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2kx^2 + k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0;\frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

A. $k = 1, k = \frac{1}{3}$ **B.** $k = -1, k = \frac{1}{2}$

C. $k = \frac{1}{2}, k = 1$ **D.** $k = -1, k = \frac{1}{3}$

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) tiếp xúc với trục hoành như hình vẽ. Phương trình nào dưới đây là phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm uốn của nó?

A. $y = 3x - 2$ **B.** $y = -3x + 2$

C. $y = -2x + 3$ **D.** $y = -3x$

Câu 5. Xét đồ thị (C) của hàm số $y = \left|\frac{x-2}{x-1}\right|$. Khẳng định nào sau đây ***sai***?

A. Đồ thị cắt tiệm cận tại một điểm.

B. Hàm số giảm trong khoảng $(1;2)$

C. Đồ thị (C) có 3 đường tiệm cận.

D. Hàm số có một cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2y' + y'' = \sqrt{2}\cos(2x - \frac{\pi}{4})$ **B.** $2y + y'.\tan x = 0$

C. $4y - y'' = 2$ **D.** $4y' + y''' = 0$

Câu 7. Nhà xe khoán cho hai tài xế ta-xi An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng. Hỏi tổng số ngày ít nhất là bao nhiêu để hai tài xế chạy tiêu thụ hết số xăng đó, biết rằng chỉ tiêu cho hai người một ngày tổng cộng chỉ chạy đủ hết 10 lít xăng?

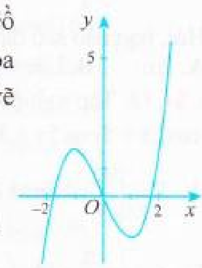
A. 20 ngày **B.** 15 ngày **C.** 10 ngày **D.** 25 ngày

Câu 8. Giá trị tham số thực k nào sau đây để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3kx^2 + 4$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $-1 < k < 1$ **B.** $k > 1$

C. $k < 1$ **D.** $k \geq 1$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm uốn.

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C). Tìm giá trị a để đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang và đường tiệm cận đó cách đường tiếp tuyến của (C) một khoảng bằng $\sqrt{2} - 1$.

A. $a > 0$ **B.** $a = 2$ **C.** $a = 3$ **D.** $a = 1$

Câu 11. Hãy nêu tất cả các hàm số trong các hàm số $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ thoả mãn điều kiện đồng biến và nhận giá trị âm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

A. $y = \tan x$ **B.** $y = \sin x, y = \cot x$

C. $y = \sin x, y = \tan x$ **D.** $y = \tan x, y = \cos x$

Câu 12. Để giải phương trình: $\tan x \tan 2x = 1$ có ba bạn **An, Lộc, Sơn** giải tóm tắt ba cách khác nhau như sau:

An: Điều kiện $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. Phương trình

$\tan x \tan 2x = 1 \Leftrightarrow \tan 2x = \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

Nên nghiệm phương trình là: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Lộc: Điều kiện $\tan x \neq \pm 1$. Phương trình

$\tan x \tan 2x = 1 \Leftrightarrow \tan x.\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 1 \Leftrightarrow 3\tan^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \tan x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm.

Sơn: Điều kiện $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin^2 x \neq \dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Ta có $\tan x \tan 2x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x}.\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = 1$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x \cos x = \cos x \cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x = \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = \dfrac{1}{4} = \sin^2\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm.

Hỏi, bạn nào sau đây giải đúng?

A. An **B.** Lộc **C.** Sơn **D.** An, Lộc, Sơn

Câu 13. Tập nghiệm S của phương trình $\cos 2x + 5\cos 5x + 3 = 10\cos 2x \cos 3x$ là:

A. $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ **B.** $S = \left\{\pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $S = \left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ **D.** $S = \left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 14. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x + 2\cos 3x.\sin x - 2 = 0$ trong khoảng $(0;\pi)$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực a để hàm số $y = \dfrac{\cos x + a.\sin x + 1}{\cos x + 2}$ có giá trị lớn nhất $y =$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.**

Câu 16. Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dãy (u_n) nào sau đây không phải là một cấp số cộng hay cấp số nhân?

A. $u_n = 2017n + 2018$ **B.** $u_n = (-1)^n\left(\dfrac{2017}{2018}\right)^n$

C. $\begin{cases}u_1 = 1\\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2018}\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}u_1 = 1\\ u_{n+1} = 2017u_n + 2018\end{cases}$

Câu 17. Dãy (u_n) nào sau đây có giới hạn khác 1 khi n dần đến vô cùng?

A. $u_n = \dfrac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}}$

B. $u_n = n\left(\sqrt{n^2 + 2018} - \sqrt{n^2 + 2016}\right)$

C. $\begin{cases}u_1 = 2017\\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + 1), \quad n = 1,2,3....\end{cases}$

D. $u_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{n.(n+1)}$.

Câu 18. Xác định giá trị thực k để hàm số $f(x) = \begin{cases}\dfrac{x^{2016} + x - 2}{\sqrt{2018x+1} - \sqrt{x+2018}}, x \neq 1\\ k \qquad , x = 1\end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $k = 1$ **B.** $k = 2\sqrt{2019}$

C. $k = \dfrac{2017.\sqrt{2018}}{2}$ **D.** $k = \dfrac{20016}{2017}\sqrt{2019}$

Câu 19. Thầy giáo có 10 câu hỏi trắc nghiệm, trong đó có 6 câu đại số và 4 câu hình học. Thầy gọi bạn Nam lên trả bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 3 câu hỏi trong 10 câu hỏi trên để trả lời. Hỏi xác suất bạn Nam chọn ít nhất có một câu hình học là bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{5}{6}$ **B.** $\dfrac{1}{30}$ **C.** $\dfrac{1}{6}$ **D.** $\dfrac{29}{30}$

Câu 20. Cho x là số thực dương. Khai triển nhị thức Newton của biểu thức $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$ ta có hệ số của số hạng chứa x^m bằng 495. Tìm tất cả các giá trị m.

A. $m = 4, m = 8$ **B.** $m = 0$

C. $m = 0, m = 12$ **D.** $m = 8$

Câu 21. Một người bắn súng, để bắn trúng vào tâm, xác suất là ba phần bảy $\left(\dfrac{3}{7}\right)$. Hỏi cả thảy bắn ba lần, xác suất bắn trúng tâm đúng một lần là bao nhiêu?

A. $\dfrac{48}{343}$ **B.** $\dfrac{144}{343}$ **C.** $\dfrac{199}{343}$ **D.** $\dfrac{27}{343}$

Câu 22. Trong không gian cho đường thẳng a và A, B, C, E, F, G là các điểm phân biệt và không có ba điểm nào trong đó thẳng hàng. Khẳng định nào sau đây đúng?

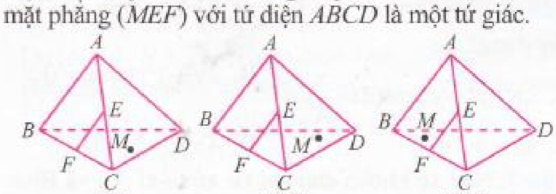
A. $\begin{cases}a // BC\\ BC \subset (EFG)\end{cases} \Rightarrow a // (EFG)$

B. $\begin{cases}a \perp BC\\ a \perp AC\end{cases} \Rightarrow a \perp \text{mp}(ABC)$

C. $\begin{cases}AB // EF\\ BC // FG\end{cases} \Rightarrow (ABC) // (EFG)$

D. $\begin{cases}a \perp (ABC)\\ a \perp (EFG)\end{cases} \Rightarrow (ABC) // (EFG)$

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BC. Trên mặt phẳng BCD lấy một điểm M tùy ý (điểm M có đánh dấu tròn như hình vẽ). Nêu đầy đủ các trường hợp để thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MEF) với tứ diện $ABCD$ là một tứ giác.



A. TH1 **B.** TH1, TH2 **C.** TH2, TH3 **D.** TH2

Câu 24. Giả sử α là góc của hai mặt của một tứ diện đều có cạnh bằng a. Khẳng định đúng là:

A. $\tan\alpha = \sqrt{8}$ **B.** $\tan\alpha = 3\sqrt{2}$

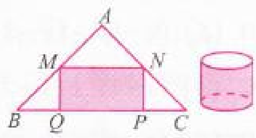
C. $\tan\alpha = 2\sqrt{3}$ **D.** $\tan\alpha = 4\sqrt{2}$

Câu 25. Hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều và có thể tích $V = \pi\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$. Diện tích xung quanh S của hình nón đó là:

A. $S = \dfrac{1}{2}\pi a^2$ **B.** $S = 4\pi a^2$

C. $S = 2\pi a^2$ **D.** $S = \pi a^2$

Câu 26. Có tấm bìa hình tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền BC bằng a. Người ta muốn cắt tấm bìa đó thành hình chữ nhật $MNPQ$ rồi cuộn lại thành một hình trụ không đáy như hình vẽ. Diện tích hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu để diện tích xung quanh của hình trụ là lớn nhất?



A. $\dfrac{a^2}{2}$ **B.** $\dfrac{a^2}{4}$ **C.** $\dfrac{a^2}{12}$ **D.** $\dfrac{a^2}{8}$

Câu 27. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết thể tích của hình chóp bằng $\dfrac{a^3}{6}$. Bán kính r mặt cầu nội tiếp của tứ diện là:

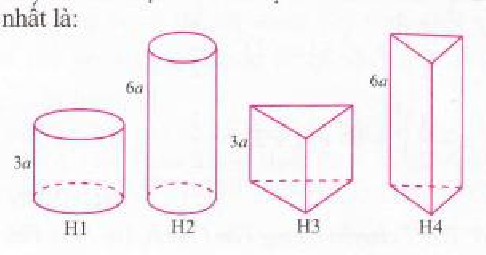
A. $r = \dfrac{a}{3+\sqrt{3}}$ **B.** $r = 2a$

C. $r = \dfrac{2a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$ **D.** $r = \dfrac{a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$

Câu 28. Một khối gỗ hình lập phương có thể tích bằng V_1. Một người thợ mộc muốn gọt khối gỗ đó thành khối trụ tròn có thể tích bằng V_2. Tính tỉ số lớn nhất $k = \dfrac{V_2}{V_1}$.

A. $k = \dfrac{1}{4}$ **B.** $k = \dfrac{\pi}{2}$ **C.** $k = \dfrac{\pi}{4}$ **D.** $k = \dfrac{\pi}{3}$

Câu 29. Cho một tấm bìa hình chữ nhật có kích thước $3a$, $6a$. Người ta muốn tạo tấm bìa đó thành 4 hình không đáy như hình vẽ, trong đó có hai hình trụ lần lượt có chiều cao $3a$, $6a$ và hai hình lăng trụ tam giác đều có chiều cao lần lượt $3a$, $6a$. Trong 4 hình $H1$, $H2$, $H3$, $H4$ lần lượt theo thứ tự có thể tích lớn nhất và nhỏ nhất là:



A. H1, H4 **B.** H2, H3 **C.** H1, H3 **D.** H2, H4

Câu 30. Tính $S = \log_2 2016$ theo a và b biết $\log_2 7 = a$, $\log_3 7 = b$.

A. $S = \dfrac{2a+5b+ab}{b}$ **B.** $S = \dfrac{2b+5a+ab}{a}$

C. $S = \dfrac{5a+2b+ab}{b}$ **D.** $S = \dfrac{2a+5b+ab}{a}$

Câu 31. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{2018} x \le \log_x 2018$ là:

A. $0 < x \le 2018$ **B.** $\dfrac{1}{2018} \le x \le 2018$

C. $\left[\begin{array}{l} 0 < x \le \dfrac{1}{2018} \\ 1 < x \le 2018 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{1}{2018} \\ 1 < x \le 2018 \end{array}\right.$

Câu 32. Số nghiệm của phương trình $2018^x + x^2 = \sqrt{2016+\sqrt[3]{2017+\sqrt[5]{2018}}}$ là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 33. Cho hai số thực a, b đều lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{1}{\log_{ab} a} + \dfrac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b}$ bằng:

A. $\dfrac{4}{9}$ **B.** $\dfrac{9}{4}$ **C.** $\dfrac{9}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{4}$

Câu 34. Với tham số thực k thuộc tập S nào dưới đây thì phương trình $\log_2(x+3) + \log_2 x^2 = k$ có một nghiệm duy nhất?

A. $S = (-\infty; 0)$ **B.** $S = [2; +\infty)$

C. $S = (4; +\infty)$ **D.** $S = (0; +\infty)$

Câu 35. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $y = 2^{\sin x}2^{\cos x}(\cos x - \sin x)$?

A. $y = 2^{\sin x+\cos x} + C$ **B.** $y = \dfrac{2^{\sin x}.2^{\cos x}}{\ln 2}$

C. $y = \ln 2.2^{\sin x+\cos x}$ **D.** $y = -\dfrac{2^{\sin x+\cos x}}{\ln 2} + C$

Câu 36. Hàm $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x+1}$?

A. $F(x) = \dfrac{3}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}} + C$ **B.** $F(x) = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4} + C$

C. $F(x) = \dfrac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C$ **D.** $F(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3} + C$

Câu 37. Cho $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = 2$. Tính $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$.

A. $I = 1$ **B.** $I = 2$ **C.** $I = 4$ **D.** $I = \dfrac{1}{2}$

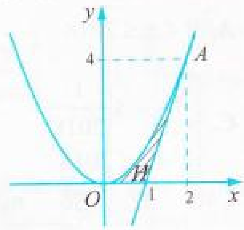
Câu 38. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trong đoạn $[-1;1]$ và $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2$. Kết quả $I = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+e^x}dx$ bằng?

A. $I = 1$ **B.** $I = 3$ **C.** $I = 2$ **D.** $I = 4$

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1;e]$, biết $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = 1, f(e) = 1$. Khi đó $I = \int_1^e f'(x).\ln x dx$ bằng:

A. $I = 4$ **B.** $I = 3$ **C.** $I = 1$ **D.** $I = 0$

Câu 40. Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một Parabol và một đường thẳng tiếp xúc Parabol đó tại điểm $A(2; 4)$, như hình vẽ bên. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng:



A. $\frac{16\pi}{15}$ **B.** $\frac{32\pi}{5}$ **C.** $\frac{2\pi}{3}$ **D.** $\frac{22\pi}{5}$

Câu 41. Cho bốn điểm M, N, P, Q là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $-i$, $2+i$, 5, $1+4i$. Hỏi, điểm nào là trọng tâm của tam giác tạo bởi ba điểm còn lại?

A. M **B.** N **C.** P **D.** Q

Câu 42. Trong các số phức: $(1+i)^3$, $(1+i)^4$, $(1+i)^5$, $(1+i)^6$ số phức nào là số phức thuần ảo?

A. $(1+i)^3$ **B.** $(1+i)^4$ **C.** $(1+i)^5$ **D.** $(1+i)^6$

Câu 43. Xác định tất cả các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z| = 2$.

A. $m = -3$ **B.** $m = -3, m = 9$

C. $m = 1, m = 9$ **D.** $m = -3, m = 1, m = 9$

Câu 44. Cho z là số phức thỏa mãn $|z+m| = |z-1+m|$ và số phức $z' = 1+i$. Xác định tham số thực m để $|z - z'|$ là nhỏ nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$ **B.** $m = -\frac{1}{2}$ **C.** $m = \frac{1}{3}$ **D.** $m = 1$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0), B(2;1;1), C(0;3;-1)$. Xét 4 khẳng định sau:

I. $BC = 2AB$ II. Điểm B thuộc đoạn AC

III. ABC là một tam giác VI. A, B, C thẳng hàng

Trong 4 khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và (d_2) là giao tuyến của hai mặt phẳng $2x+3y-9=0$, $y+2z+5=0$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng là:

A. Song song **B.** Chéo nhau

C. Cắt nhau **D.** Trùng nhau

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng $(d): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): 2x - z - 4 = 0, (Q): x - 2y - 2 = 0$ là:

A. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$

B. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{5}$

C. $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 5$

D. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3$

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1), B(0;3;-1)$. Điểm M nằm trên phẳng (P) $2x + y + z - 4 = 0$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất là:

A. $(1;0;2)$ **B.** $(0;1;3)$ **C.** $(1;2;0)$ **D.** $(3;0;2)$

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2018 = 0$, $(Q): x + my + (m-1)z + 2017 = 0$. Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) tạo với nhau một góc lớn nhất thì điểm H nào dưới đây nằm trong (Q)?

A. $H(-2017;1;1)$ **B.** $H(2017;-1;1)$

C. $H(-2017;0;0)$ **D.** $H(0;-2017;0)$

Câu 50. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \begin{cases} x = 4-2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}$.

Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng trên là:

A. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{9}{4}$

B. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{9}{4}$

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{3}{2}$

D. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{3}{2}$

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hoà, Phú Yên)

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

1B	2A	3C	4B	5D	6C	7A	8B	9D	10B	11C	12B	13A	14C	15B	16D	17C
18A	19B	20C	21D	22A	23B	24C	25D	26A	27B	28C	29A	30B	31C	32C	33D	34B
35C	36A	37D	38B	39C	40A	41D	42B	43C	44D	45A	46B	47C	48A	49D	50B	

Câu 1. Chọn B. Có $7! = 5040$ cách xếp. Chỉ có đúng một cách được dòng chữ " HIỀN TÀI LÀ NGUYÊN KHÍ QUỐC GIA" nên xác suất cần tìm là $\frac{1}{5040}$.

Câu 5. Chọn D. Gọi C là chu vi quả bóng, bán kính của quả bóng là $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{68{,}5}{2.3{,}14} \approx 10{,}91(\text{cm})$.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 \approx 1494{,}99(\text{cm}^2)$.

Số miếng da ít nhất cần có để làm quả bóng:

$1494{,}99 : 49{,}83 \approx 30$ (miếng da).

Câu 10. Chọn B. Biến đổi PT đã cho thành

$$-2\cos^2 2x - 5\cos 2x + 3 = 0$$

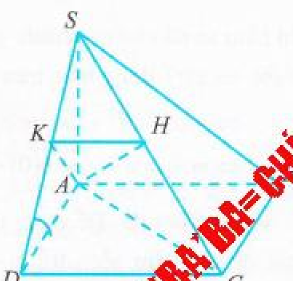
$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in (0;\ 2\pi)$

$$\Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$$

$\Rightarrow S = 4\pi.$

Câu 13 . Chọn A.



Ta có

$$\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\(SAD) \perp (ABCD)\end{cases}$$

$\Rightarrow SA \perp (ABCD).$

Dễ thấy góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45^0 chính là góc $\widehat{SDA} = 45^0 \Rightarrow h = SA = AD = a.$

Tỷ số $k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{SH}{SC}\cdot\frac{SK}{SD} = \left(\frac{HK}{CD}\right)^2 = \left(\frac{a}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4}.$

Câu 15. Chọn B.

• Ta có $f(0) = \frac{1}{2};\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = a\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax} = a.$

• Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Câu 18. Chọn A. Từ $C_n^2 - C_n^1 = 44 \Rightarrow n = 11.$

Ta có $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{11} = \sum\limits_{k=0}^{11} C_{11}^k \sqrt{x^{33-3k}}\,x^{-4k}.$

Ycbt $\Rightarrow k = 3.$ Vậy số hạng cần tìm là $C_{11}^3 = 165.$

Câu 19. Chọn B. Ta có $F'(x) = (2x+a)e^{-x} - (x^2+ax+b)e^{-x}$

$= \left(-x^2 + (2-a)x + a - b\right)e^{-x}.$

Theo giả thiết có $F'(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2-a=3\\a-b=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\b=-7\end{cases}.$$

Câu 20. Chọn C. • Gọi I là trung điểm của BC. Theo giả thiết I là hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) nên $A'I \perp (ABC)$.

Ta tính độ dài đường cao của khối lăng trụ được:

$h = A'I = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

• Thể tích cần tìm $V = S_{ABC}.h = \frac{3a^3}{4\sqrt{2}}.$

Câu 23. Chọn B.

Sử dụng công thức $S_n = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right].$

Ta có:

$$\begin{cases}S_7 = 77\\S_{12} = 192\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u_1 = 5\\d = 2\end{cases} \Rightarrow u_n = 5 + (n-1)2 = 3 + 2n.$$

Câu 24. Chọn C.

Gọi I là tâm của mặt cầu. Vì $I \in (Oxy) \Rightarrow I(a;\ b;\ 0).$

Từ giả thiết, $AI^2 = BI^2 = CI^2$ ta tìm được $I(-2;\ 1;\ 0).$

Đường kính l của mặt cầu (S) là

$$l = 2AI = 2\sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{26}.$$

Câu 27. Chọn B. • Gọi l, h, r, C lần lượt là độ dài đường sinh, đường cao, bán kính đáy và chu vi đáy của hình nón. Từ giả thiết cho ta

$$l = 60\text{cm}, C = \frac{1}{3}\cdot 2\pi.60 = 40\pi(\text{cm}), r = \frac{40\pi}{2\pi} = 20(\text{cm})$$

và $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 40\sqrt{2}(\text{cm}).$

Do đó $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{16000\sqrt{2}\pi}{3}(\text{cm}^3) = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ (lít).

Câu 28. Chọn C. Ta có $2f'(x) - x.f''(x) - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2(3x^2 - 12x + 9) - x(6x - 12) - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Lấy điểm $M(a;\ 1) \in (C)$, ta có

$$a^3 - 6a^2 + 9a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ hay } a = 3.$$

Suy ra các tiếp tuyến cần tìm có phương trình là

$y = f'(0)(x-0) + 1 = 9x + 1,\ y = f'(3)(x-3) + 1 = 1.$

Câu 30. Chọn B. • Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u} = (1;\ 1;\ 2),\ \overrightarrow{AH} = (a-2;\ b-1;\ c-4).$

• Theo đề bài $H(a;\ b;\ c)$ là điểm thuộc d và AH có độ dài nhỏ nhất nên ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{x_H-1}{1}=\dfrac{y_H-2}{1}=\dfrac{z_H-1}{2} \\ \vec{u}.\overrightarrow{AH}=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1=b-2=\dfrac{c-1}{2} \\ 1(a-2)+1(b-1)+2(c-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow T=a^3+b^3+c^3=62.$

Câu 31. Chọn C. Ta có $f(x)\le 1 \Leftrightarrow 5^x.8^{2x^3}\le 1$

$\Leftrightarrow x\log_2 5+6x^3\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}\log_2 5+3x^2\le 0.$

Đính chính: Đề bài câu 31 này, phương án A đã viết: $x\log_2 5+2x^3\le 0$, xin sửa là: $x\log_2 5+6x^3\le 0$ (để trong 4 phương án chỉ có phương án C là sai).

Câu 32. Chọn C. • Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có hai đáy là tam giác đều có cạnh bằng a. Mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ có tâm O là trung điểm của đoạn thẳng GG' nối hai tâm của các đáy lăng trụ.

• Bán kính của mặt cầu là $R=OA=\sqrt{OG^2+GA^2}$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=a\sqrt{\frac{7}{12}}\Rightarrow S=4\pi R^2=\frac{7\pi a^2}{3}.$$

Câu 33. Chọn D.

• $y'=6x^2-12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)=-m+1 \\ f(2)=-7-m \end{array}\right.$.

• Để hàm số $f(x)$ có các giá trị cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow f(0).f(2)<0 \Leftrightarrow -7<m<1.$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-6;\ -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0\}$.

Câu 34. Chọn B. Ta có

$$I=\int_{-1}^{1} f(|2x-1|)\,dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(|2x-1|)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(|2x-1|)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(-2x+1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)dx.\ \text{Xét } M=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(-2x+1)dx.$$

Đặt $t=-2x+1\Rightarrow M=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_3^0 f(t)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^3 f(x)dx=3.$

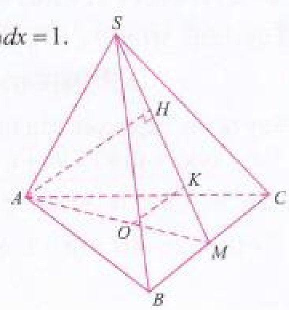
- Tương tự, $N=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)dx=1.$

$\Rightarrow I=M+N=4.$

Câu 35. Chọn C. Gọi M là trung điểm BC.

Hạ $AH\perp SM$.

Vì $BC\perp(SAM)$ nên $BC\perp AH$.



Vậy $AH\perp(SBC)$. Do đó AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC). Ta có

$$2S_{SAM}=SO.AM=AH.SM\ (*)$$

Mà $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SO=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$, $SM=\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

$(*)\Rightarrow d_1=AH=\dfrac{2a\sqrt{22}}{11}$.

Từ đó có $d=d_1+d_2=d_1+\dfrac{1}{3}d_1=\dfrac{8a\sqrt{22}}{33}$.

Câu 36. Chọn A. Đặt $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)=u$

$$\Rightarrow 9^u+6^u=4^u \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2u}+\left(\frac{3}{2}\right)^{u}-1=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{u}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow a+b=1+5=6.$$

Câu 38. Chọn B.

Biến đổi $y=\sin^3 x-3(1-\sin^2 x)-m\sin x-1$

$=\sin^3 x+3\sin^2 x-m\sin x-4.$

Đặt $t=\sin x\in[0;\ 1]$ $\left(\text{do } x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$

thì hàm số đã cho trở thành $g(t)=t^3+3t^2-mt-4$.

Yêu cầu $\Leftrightarrow g(t)$ đồng biến trên đoạn $[0;\ 1]$

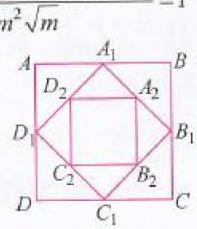
$\Leftrightarrow g'(t)=3t^2+6t-m\ge 0,\ \forall t\in[0;\ 1]$

$\Leftrightarrow m\le\min\limits_{t\in[0;1]} h(t)=h(0)=0\ (h(t)=3t^2+6t).$

Câu 42. Chọn B. Dễ dàng tìm được ba điểm cực trị của đồ thị hàm số: $A(0;m-1)$, $B(-\sqrt{m};-m^2+m-1)$ và $C(\sqrt{m};-m^2+m-1), m>0$. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Theo giả thiết

$$R=1\Rightarrow\frac{AB.AC.BC}{4S_{ABC}}=1\Rightarrow\frac{\left(\sqrt{m^4+m}\right)\left(\sqrt{m^4+m}\right)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}}=1$$

$$\Leftrightarrow m^3-2m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array}\right..$$



Câu 43. Chọn C. Ta có

$AB=a\Rightarrow S_1=a^2;$

$$A_1B_1=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow S_2=\frac{a^2}{2};A_2B_2=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}\Rightarrow S_3=\frac{a^2}{4};$$

Ta thấy $a^2,\ \dfrac{a^2}{2},\ \dfrac{a^2}{4}\cdots$ là cấp số nhân nên

$$S=a^2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{a^2\left(2^{100}-1\right)}{2^{99}}.$$

Câu 44. Chọn D.

• BPT đã cho tương đương $0 < \log_2(3^x + 1) < m$

$$\Leftrightarrow 1 < 3^x + 1 < 2^m \Leftrightarrow 3^x < 2^m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m - 1 > 0 \\ 3^x < 2^m - 1 \end{cases}.$$

• Ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^m - 1 > 0 \\ 2^m - 1 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1.$

Câu 45. Chọn A. • Nhìn vào các phương án đã cho ta loại trừ ngay phương án C và D vì mặt phẳng của chúng đi qua điểm M nên không thể song song với (P).

• Phương trình mặt phẳng $(P): \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1.$

Mà $M \in (P) \Rightarrow \dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$ (*)

Mặt khác M là trực tâm của ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c - 2b = 0 \\ c - 3a = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $a = \dfrac{14}{3};\ b = 7;\ c = 14$

$\Rightarrow (P): 3x + 2y + z - 14 = 0.$ Vậy mặt phẳng song song với mp (P) có phương trình $3x + 2y + z + 14 = 0.$

Câu 46. Chọn B.

Cách 1. Xét đường thẳng $\Delta: 4x + 3y - 1 - F = 0$ và điểm $A(a;\ b)$ trên mặt phẳng phức.

Do $\begin{cases} A \in \Delta \\ A \in (C) \end{cases} \Rightarrow \Delta \cap (C) \ne \varnothing \Rightarrow d(I;\ \Delta) \le R$

$$\Leftrightarrow \frac{|24 - F|}{5} \le 3 \Leftrightarrow |F - 24| \le 15 \Leftrightarrow 9 \le F \le 39.$$

Từ đó có $M + m = 39 + 9 = 48.$

Cách 2. Ta có PT $(C): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$

Vì $A(a;b) \in (C) \Rightarrow (a-4)^2 + (b-3)^2 = 9.$

Mặt khác $F - 24 = 4(a-4) + 3(b-3).$

Ta có: $(F-24)^2 \le 25\left[(a-4)^2 + (b-3)^2\right] = 25.9 = 225$

$\Rightarrow 9 \le F \le 39.$ Từ đó có $M + m = 39 + 9 = 48.$

Câu 47. Chọn C. ĐK $0 < x \ne \dfrac{1}{2}(*)$. PT đã cho tương đương với $(2x-1)^2 + \log_7(2x-1)^2 = 2x + \log_7 2x.$

Xét hàm $f(t) = \log_7 t + t, t > 0$ có

$$f'(t) = \frac{1}{t\ln 7} + 1 > 0, \forall t > 0.$$

Nên $(2x-1)^2 = 2x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{4} \\ x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$ thỏa mãn (*)

Do đó $x_1 + 2x_2 = \dfrac{1}{4}\left(9 + \sqrt{5}\right) = \dfrac{1}{4}\left(a + \sqrt{b}\right) \Rightarrow a + b = 9 + 5 = 14.$

Câu 48. Chọn A. • $I \in d \Rightarrow I(5 + t; -2 - 4t; -1 - 4t).$

• $d(I, (P)) = \sqrt{19} \Leftrightarrow \dfrac{|19t + 19|}{\sqrt{19}} = \sqrt{19} \Leftrightarrow t = 0$ hay $t = -2.$

+ Với $t = 0$ thì mặt cầu (S) có tâm $I(5;\ -2;\ -1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -10, b = 4, c = 2 \\ d = \left(-\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{b}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{c}{2}\right)^2 - R^2 = 11 \end{cases}.$$

+ Với $t = -2$ thì mặt cầu (S) có tâm $I(3;\ 6;\ 7)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -6, b = -12, c = -14 \\ d = 75 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + d = 43.$$

Từ đó ta chọn A.

Câu 49. Chọn D.

Ta biến đổi $f(n) = (n^2+1)\left[(n+1)^2 + 1\right]$ (*)

Sử dụng (*) ta có

$$\frac{f(2k-1)}{f(2k)} = \frac{(4k^2 - 4k + 2)(4k^2+1)}{(4k^2+1)(4k^2+4k+2)} = \frac{(2k-1)^2+1}{(2k+1)^2+1}.$$

$$u_n = \frac{1^2+1}{3^2+1} \cdot \frac{3^2+1}{5^2+1} \cdots \frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1} = \frac{1}{2n^2+2n+1}.$$

$$\Rightarrow \lim n\sqrt{u_n} = \lim \frac{1}{\sqrt{2 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 50. Chọn B.

Cách 1. Gọi $I = \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{1 + f(x)}$. Đặt $x = a - t$ ta có

$$I = -\int_a^0 \frac{dt}{1 + f(a-t)} = \int_0^a \frac{dt}{1 + \dfrac{1}{f(t)}} = \int_0^a \frac{f(x)dx}{1 + f(x)}$$

$\Rightarrow 2I = \displaystyle\int_0^a dx = a \Rightarrow I = \frac{a}{2}$. Mà $I = \dfrac{ba}{c}$ và b, c là hai số nguyên dương, $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản

$\Rightarrow b + c = 1 + 2 = 3.$ Từ đó ta chọn câu B.

Cách 2. Chọn $f(x) = 1$ là hàm số thỏa mãn các giả thiết. Dễ dàng tính được $I = \dfrac{a}{2}$. Từ đó ta chọn câu B.

PHẠM TRỌNG THƯ

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

CHUYỆN VỀ CÁC SỐ PHỨC

NGUYỄN THUỶ THANH
(Trường Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Vào thế kỷ XVI một số nhà toán học thời kỳ Phục Hưng ở Italia gần như đồng thời khám phá ra phương pháp giải đại số phương trình bậc ba. Phương pháp này đã được công bố năm 1545 bởi người không khám phá ra nó đầu tiên nhưng là một nhà bác học nổi tiếng toàn diện là nhà toán học, nhà triết học và bác sĩ *Girolamo Cardano* (1501-1576). Công trình mà Ông công bố có tên là "*Nghệ thuật vĩ đại hay là các quy tắc đại số*" (Ars magna, 1545) dài đến 40 chương. Nhà toán học Đức *F. Kleine* đã đánh giá công trình này là: "*một tác phẩm cực kỳ quý báu, nó chứa đựng những mầm mống của đại số hiện đại vượt xa tầm của toán học thời cổ đại*".

Nhưng rồi, câu chuyện tế nhị về bản quyền lại thỉnh thoảng rộ lên,… Mãi đến tận cuối thế kỷ XIX các nhà lịch sử khoa học vẫn còn đưa người yêu toán về với ký ức câu chuyện buồn và nặng nề về cuộc tranh cãi bản quyền phát minh phương pháp nói trên giữa các nhà toán học vĩ đại Italia của Thời kỳ Phục Hưng là *Nikolo Tartaglia* (1499-1557) và *G. Cardano* sau khi tác phẩm "*Nghệ thuật vĩ đại*" của *G. Cardano* ra đời.

Sống với đồng lương hưu khiêm tốn được cung cấp bởi một vị cha cố, *G. Cardano* đã dành khoảng cuối đời để hoàn thành cuốn tiểu sử tự thuật "*Về cuộc đời tôi*". Ở những trang cuối cùng Ông viết: "*Tôi thú nhận rằng trong toán học có đôi chút và trên thực tế chỉ có chút xíu kết quả là tôi đã vay mượn ở người anh của Nikolo.* 28.4.1576". Có lẽ trong thâm tâm Ông đã không yên lòng… *G. Cardano* mất ngày 21.9.1576.

Cũng đến cuối thế kỷ XIX các nhà toán học mới hiểu công trình của *G. Cardano* "*Nghệ thuật vĩ đại*" có vai trò to lớn tới mức nào trong thế kỷ XVI và từ đó mới hiểu được những lời đánh giá mà nhà bác học thiên tài Đức *G. Leibniz* dành cho *G. Cardano*: "*Cardano là một người vĩ đại dù cho ông ấy có những khiếm khuyết; nếu không có những khiếm khuyết đó Ông đã là một người tuyệt mĩ*".

Dù sao đi nữa thì công thức tìm nghiệm của phương trình bậc ba $x^3 + px + q = 0;\ p, q \in \mathbb{R}$ là

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}},\ \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

cũng đã gắn liền với tên Ông – Công thức *Cardano* – cho đến tận ngày nay.

Mặc dù ý nghĩa thực hành của công thức *Cardano* theo nhà toán học Xô Viết *A. G. Kuros* là "*rất không lớn*" nhưng nó lại trả lời được câu hỏi kinh điển về tính giải được của phương trình bậc ba bằng căn thức. Hơn thế nữa, ẩn náu đằng sau cái vẻ ngoài không ít phức tạp của nó lại là mầm mống của một trong những sáng tạo vĩ đại nhất của toán học – đó là sáng tạo ra khái niệm *số ảo* hay *số phức*.

Thật vậy, trong trường hợp khi cả ba nghiệm của phương trình bậc ba (với hệ số thực) đều là thực thì người ta đã chứng minh được rằng trong lời giải đại số của phương trình bậc ba đó phép khai căn bậc ba của số phức là không tránh khỏi, trong đó căn bậc ba của số phức là có ba giá trị. Và rốt cuộc, khi áp dụng phương pháp *Cardano* các số hạng có chứa kí hiệu i sẽ triệt tiêu nhau và nghiệm thu được là thực. Trường hợp khó khăn này (khi $\Delta < 0$) thường được gọi là *trường hợp bất khả quy*.

Trong lịch sử phát triển toán học, thông thường khái niệm số mới xuất hiện khi trong kho số đang có không đủ để thực hiện không hạn chế một phép toán nào đó. Trong trường hợp đang xét, số mới – *số phức* – xuất hiện khi các nhà toán học mở rộng phép khai căn bậc hai đối với một số bất kỳ mà người ta gặp. Chẳng hạn ở chương 37 của tác phẩm "*Nghệ thuật vĩ đại*" của mình, *Cardano* đã đặt và giải bằng đại số các phương trình bậc hai và bậc ba và thu được công thức mang tên Ông, trong đó hiện diện đầy đủ căn bậc hai và bậc ba của một số bất kỳ. Chẳng hạn, Ông đặt và giải bài toán: *chia số* 10 *thành hai phần sao cho tích của hai phần đó bằng* 40. Theo điều kiện đã cho Ông thu được phương trình bậc hai $x(10-x)=40$ và *Cardano* tìm được nghiệm $5+\sqrt{-15}$ và $5-\sqrt{-15}$. Nhưng Ông lại cho rằng "*những đại lượng cực kỳ phức tạp này là vô dụng mặc dù rất tinh xảo*". Ông gọi các nghiệm này là "*nghiệm ngụy biện*"!

Người đầu tiên nhìn thấy lợi ích to lớn do đưa số phức vào toán học mang lại và nỗ lực đầy dũng cảm, tự tin để vượt qua trường hợp bất khả quy là nhà toán học và kỹ sư người Italia là *Raffaela Bombelli* (1530-1572). Trong tác phẩm "*Đại số*" (1572) và tác phẩm "*Hình học*" còn lại dưới dạng bản thảo, *R. Bombelli* đã xem các số phức như là nghiệm của các phương trình bậc ba và phát biểu (dưới dạng hiện đại như ngày nay) các quy tắc thực hiện bốn phép tính số học trên các số phức. Thế nhưng Ông vẫn xem chúng là "*số bịa đặt vô dụng nhưng tinh xảo*".

Bombelli đã biểu diễn số $3i$ dưới dạng $\sqrt{0-9}$ (nguyên văn: *R*[0m, 9], trong đó *R* chỉ phép khai căn – Radix – còn *m* chỉ phép trừ). Chẳng hạn, Ông chứng minh rằng $\sqrt[3]{52+\sqrt{0-2209}}=4+\sqrt{0-1}$.

Bằng cách đó, trong "*Đại số*" Ông đã đưa được mọi biểu thức có chứa những "*phần tử nguỵ biện*" của *Cardano* về dạng $a+b\sqrt{0-1}$ và chứng tỏ rằng trong trường hợp bất khả quy nghiệm thực có thể xem là tổng của hai số phức dạng $a+b\sqrt{0-1}$ và $a-b\sqrt{0-1}$.

Từ đây các số phức đã dần rũ bỏ được cái phần siêu nhiên mặc dù phải đến thế kỷ XIX các nhà toán học mới hoàn toàn thừa nhận chúng.

Cuộc khủng hoảng về số phức mà hai nhà toán học vĩ đại *G. Cardano* và *R. Bombelli* tạo ra thật là sâu sắc. Nó thu hút sự quan tâm đa dạng của nhiều nhà toán học châu Âu thời Phục Hưng sau đêm dài trung cổ huyền bí. Và, họ đã lên tiếng…

Tuy không công nhận số phức nhưng *R. Descartes* (1596-1650) cũng không đả kích gay gắt mặc dù Ông vẫn cho rằng "*có đầy đủ cơ sở để xem số phức là không chân chính mà là ảo*". Thuật ngữ "*số ảo*" có từ đó. Số phức…, *số ảo*…, có người cho rằng thuật ngữ "*số ảo*" ngày nay chính là di tích của cái thuở ban đầu "ngây thơ" nhất trong số học.

Trong cuốn "*Đại số*" (1685) của mình nhà toán học Anh *J. Wallis* (1616-1703) đã chỉ rõ cách biểu diễn hình học các nghiệm phức của phương trình bậc hai với hệ số thực. Thực chất *J. Wallis* muốn khẳng định rằng các số phức không mảy may vô lý hơn chút nào so với các số âm. Thế mà các số âm được biểu diễn bởi các điểm của đường thẳng có hướng nên các số phức cũng có thể biểu diễn bởi các điểm của mặt phẳng.

Sự nghi ngờ đối với số ảo (số phức) chỉ hoàn toàn tiêu tan khi nhà toán học Nauy *Caspar Wessel* (1745-1818) đưa ra sự minh hoạ hình học đầy đủ về số phức và các phép tính trên chúng trong công trình công bố năm 1799. Đôi khi phép biểu diễn hình học số phức cũng được gọi là "*sơ đồ Argand*" để ghi nhận công lao của nhà toán học Thuỵ Sĩ *Jean-Robert Argand* (1763-1822) người thu được kết quả như của *C. Wessel* một cách độc lập. Công trình của *Wessel* tạo thành nền móng cho một lý thuyết toán học tuyệt vời mà ngày nay ta vẫn gọi là *Lý thuyết hàm biến phức* – một lý thuyết đẹp đẽ - cân đối và hoàn thiện.

Khái niệm số phức chỉ được thừa nhận hoàn toàn vào thế kỷ XIX. Trước đó, đối với các nhà toán học châu Âu số phức vẫn chỉ là đối tượng bị gán cho tính ngoại lai và bản chất của số phức vẫn chưa nhận thức rõ ràng thậm chí còn bị xem là "*thần bí*". Ví dụ điển hình về trào lưu này là quan điểm khá phổ biến được *G. Leibniz* phát biểu sau khi nghiên cứu tác phẩm "*Đại số*" (1572) của *R. Bombelli*:

"*Từ các đại lượng vô ước đã xuất hiện những số lượng không thể có hay là những số ảo – những thiên phẩm huyền diệu mà tính hữu ích của nó không ai có thể phủ nhận. Đó là nơi cư trú màu* *nhiệm và thanh khiết của tinh thần Đấng tạo hoá, đó dường như một loài lưỡng thê sống ở một chốn nào đấy giữa cái có thật và cái không có thật*".

Ngay cả *I. Newton* (1643-1727) cũng không dành cho số phức một đánh giá khách quan nào. Thậm chí Ông đã không xem các đại lượng ảo là thuộc vào khái niệm số.

Lịch sử cũng ghi lại rằng chính *Euler* vĩ đại cũng không khỏi ám ảnh bởi một số quan điểm mơ hồ về số phức mặc dù Ông là người đầu tiên dùng ký hiệu i để chỉ $\sqrt{-1}$. Trong cuốn giáo trình tốt nhất thế kỷ XVIII của mình – cuốn "*Đại số*" (1770) *L. Euler* đã từng khẳng định:

"*Căn bậc hai của các số âm không bằng không, không bé hơn không và cũng không lớn hơn không. Từ đó rõ ràng là căn bậc hai của số âm không hiện diện giữa những số có thể có [số thực!]. Do đó, chẳng có cách nào khác, chúng ta đành phải thừa nhận chúng là những số không thể có. Điều đó cũng dẫn chúng ta đến khái niệm số mà về bản chất là không thể có được gọi là những số ảo hay những con số tưởng tượng vì chúng chỉ tồn tại trong tưởng tượng*".

Tuy vậy, chính *Euler* đã dũng cảm, táo bạo và rất hoa mĩ khi đưa ra định nghĩa khôn khéo đối với hàm mũ cơ số e

$$e^{a+bi} = e^{a}\left(\cos b + i\sin b\right).$$

Công thức này là định nghĩa hàm mũ biến phức và không thể chứng minh được mặc dù có rất nhiều cơ sở để xem định nghĩa đó là khéo léo.

Nếu $a = 0$ thì $\cos b + i\sin b = e^{ib}$ (*)

và sau khi thay b bởi $-b$ thì $\cos b - i\sin b = e^{-ib}$.

Bằng cách cộng và trừ vế với vế của hai đẳng thức vừa thu được ta có

$$\cos b = \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2},\ \sin b = \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}. \quad (*)$$

Các công thức (*) được gọi là công thức Euler.

Richard Feynman (1918-1988) cho rằng đó là "*những công thức đặc biệt nhất trong toán học*".

Trong công trình "*Khảo sát các nghiệm ảo của phương trình*" (1751), bằng cách dựa trên dạng mũ của số phức $\alpha = re^{i\varphi}$; $r = |\alpha|$, $\varphi = \arg\alpha$ *Euler* đã đưa ra công thức tính lôgarit của số phức.

Vì $\alpha = re^{i\varphi} = e^{\ln r}e^{i\varphi} = e^{\ln r + i\varphi}$ nên

$$\ln\alpha = \ln r + i\left(\varphi + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Điều đáng tiếc là những người đương thời với *Euler* đã không hiểu và đánh giá hết công trình tuyệt vời này.

Nhờ công thức lôgarit số phức của *Euler* người ta đã đi đến định nghĩa hàm mũ cơ số phức tuỳ ý $\alpha \neq 0$. Vì $\alpha \neq 0$ nên $\alpha = e^{\ln\alpha}$ và vì vậy một cách "tự nhiên" người ta định nghĩa $\alpha^{\beta} = e^{\beta\ln\alpha}$.

Chẳng hạn, xét biểu thức i^{i} với $\alpha = i$, $\beta = i$.

Theo định nghĩa vừa nêu thu được $i^{i} = e^{i\ln i}$.

Nhưng $\ln i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ nên

$$i^{i} = e^{i\left[i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}.$$

Hoá ra giá trị của đại lượng "rất ảo" lại là… số thực!

Đối với toán học ngày nay, các số phức là tuyệt phẩm hoàn toàn tự nhiên của con người và *do trí tuệ con người sáng tạo ra*. Nó không ảo hơn chút nào so với chính các số thực. Nó được tạo nên nhờ việc ghép thêm vào tập hợp số thực một phần tử mới i – gọi là đơn vị ảo – mà $i^2 = -1$, tức là $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \{i\}$. Ngoài các tính chất thông thường vốn có trong $\mathbb{R}$ tập hợp số phức còn có tính chất cực kỳ đặc biệt: *$\mathbb{C}$ là trường đóng đại số*. Điều đó có nghĩa là: *mọi đa thức bậc n ($n \geq 1$) với các hệ số phức đều có n nghiệm thuộc $\mathbb{C}$ nếu mỗi nghiệm được tính một số lần bằng bội của nó*.

Các số phức có vai trò hết sức quan trọng và đa dạng trong toán học và trong ứng dụng nên người ta đã từng hy vọng mở rộng tập hợp số phức thành tập hợp số rộng hơn có thể mà trong đó vẫn giữ được mọi quy luật vốn có của tập hợp số phức. Nhưng điều đó là vô vọng! Nhà toán học vĩ đại Đức *K. Weierstrass* (1815-1897) đã chứng tỏ rằng tập hợp số phức $\mathbb{C}$ không thể mở rộng được thành tập hợp số rộng hơn bằng cách ghép thêm số mới mà trong tập hợp số rộng hơn thu được vẫn bảo toàn mọi quy luật của các phép tính đã dùng đối với số phức.

(*Xem tiếp trang 23*)

Kết quả cuộc thi GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÍ

TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM HỌC 2016-2017

LTS. Cuộc thi giải Toán và Vật lý năm học 2016-2017 trên Tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 9 năm 2016 đến tháng 8 năm 2017. Cuộc thi này được nhiều bạn trẻ yêu Toán và Vật lý cấp THCS và THPT trên cả nước tham gia giải bài khá sôi nổi. **Hà Nội, Vĩnh Phúc, Phú Thọ, Nam Định, Nghệ An, Thanh Hóa, Quảng Nam** là những tỉnh, thành phố có đông học sinh tham gia và đoạt nhiều giải cao hơn cả. Giải Xuất sắc về môn Toán thuộc về bạn: *Trần Tiến Mạnh,* 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh, **Nghệ An.** Giải Nhất môn Vật lý thuộc về bạn: *Nguyễn Việt Đức,* 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên.** Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi. Hẹn gặp các bạn ở cuộc thi tiếp theo trong năm học 2017-2018. Sau đây là danh sách **72** bạn đoạt giải Toán và **4** bạn đoạt giải Vật lí năm học 2016-2017.

MÔN TOÁN

☆ Giải Xuất sắc (1 giải)

Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh, **Nghệ An.**

☆ Giải Nhất (6 giải)

1. *Nguyễn Đặng Nhật Minh*, 8C2, THCS Archimedes Academy, Cầu Giấy, **Hà Nội.**

2. *Đặng Quang Anh,* 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa.**

3. *Nguyễn Bá Tuân*, 10A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**

4. *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam.**

5. *Nguyễn Văn Dũng*, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, **Hà Nội.**

6. *Nguyễn Hữu Thắng,* 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An.**

☆ Giải Nhì (13 giải)

1. *Đỗ Cao Bách Tùng*, 8B, THCS Trần Mai Ninh, **Thanh Hóa.**

2. *Nguyễn Đình Tuấn*, 8C THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

3. *Hoàng Quốc Khánh,* 9A, THCS Đồng Lạng, Đức Thọ, **Hà Tĩnh.**

4. *Lê Tiến Đạt*, 10A1, THPT Nông Cống I,Nông Cống, **Thanh Hóa.**

5. *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre, **Bến Tre.**

6. *Nguyễn Huy Hải*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam.**

7. *Trần Minh Hiếu*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định.**

8. *Châu Minh Khánh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long, **Vĩnh Long.**

9. *Võ Việt Anh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An.**

10. *Đỗ Trung Phương*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**

11. *Đoàn Thị Nhài*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định.**

12. *Nguyễn Danh Thắng*, 11A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**

13. *Phan Gia Anh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long, **Vĩnh Long.**

☆ Giải Ba (20 giải)

1. *Huỳnh Đặng Diệu Huyền*, 6C, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi.**

2. *Lê Hải Phong*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**

3. *Nguyễn Thu Hiền*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**

4. *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 8A5, THCS Cầu Giấy, **Hà Nội.**

5. *Nguyễn Đức Bảo*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An.**

6. *Nguyễn Lê Thanh Hằng*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam.**

7. *Lê Thành Lâm*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên.**

8. *Phùng Văn Nam*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.

9. *Phạm Trần Anh,* 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An.**

10. *Lê Hoàng Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang.**

11. *Trần Hoàng Đạt*, 11A1, THPT Mộc Lỵ, Mộc Châu, **Sơn La.**

12. *Phan Trần Hướng*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

13. *Nguyễn Thị Phương Linh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị.**

14. *Lê Hoàng Long*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình.**

15. *Phạm Quốc Thắng*, 11T1, THPT chuyên Long An, **Long An.**

16. *Nguyễn Phạm Minh Trí*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam.**

17. *Nguyễn Phùng Thái Cường*, 12A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, **Nghệ An.**

18. *Nguyễn Xuân Anh Quân*, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam.**

19. *Chu Minh Huy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên.**

20. *Nguyễn Đức Thịnh* ,12A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, **Sóc Trăng.**

☆ Giải Khuyến khích (32 giải)

1. *Nguyễn Thị Thanh Hằng*, 6A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**

2. *Hoàng Lê Bích Ngọc*, 6A, THCS Thái Thịnh, Q. Đống Đa, **Hà Nội.**

3. *Văn Quang Tuệ*, 6A2, THCS Phạm Văn Đồng, **Quảng Ngãi.**

4. *Nguyễn Công Hải*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**

5. *Vũ Minh Khải*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**

6. *Thiều Đình Minh Hùng*, 8C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**

7. *Nguyễn Thùy Dương*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ.**

8. *Diêm Đăng Hoàng*, 9A1, THCS CLC Mai Sơn, TT. Hát Lót, Mai Sơn, **Sơn La.**

9. *Phạm Ngọc Hiếu*, 9H, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hoà, **Phú Yên.**

10. *Bùi Thị Quỳnh*, 9A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ.**

11. *Phạm Lý Nhật Duy*, 10/1 THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An, **Quảng Nam.**

12. *Trần Lĩnh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long.**

13. *Nguyễn Ngọc Khánh Như*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Kon Tum, **Kon Tum.**

14. *Võ Minh Quân*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng.**

15. *Lê Cẩm Thanh Hà*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

16. *Nguyễn Minh Hải*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

17. *Bạch Quang Hiệu* 11A1, THPT Cửa Lò, **Nghệ An.**

18. *Nguyễn Quang Hùng*, 11A1, THPT Cù Huy Cận, **Hà Tĩnh.**

19. *Trịnh Hoàng Hiệp*, 11A, THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước.**

20. *Lê Hiền Khải*, 11T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, **Tây Ninh.**

21. *Lê Viết Thanh Long,* 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

22. *Hoàng Công Minh,* 11 Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, **Cà Mau.**

23. *Trần Quang Minh,* 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy, **Thái Bình.**

24. *Lê Trí Phú,* 11T1, THPT chuyên Long An, **Long An.**

25. *Hoàng Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội.**

26. *Nguyễn Thị Ngân Trúc*, 11T1, THPT chuyên Long An, **Long An.**

27. *Nguyễn Thị Phương Nhi*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**

28. *Nguyễn Hữu Thắng,* 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An.**

29. *Cao Hữu Đạt*, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh , **Nghệ An.**

30. *Trần Bá Khôi*, 12T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, **Hà Nội.**

31. *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 12T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội.**

32. *Trần Quốc Việt*, 12CT1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, **Cà Mau.**

MÔN VẬT LÝ

☆ Giải Nhất (1 giải)

1. *Nguyễn Việt Đức*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên.**

☆ Giải Nhì (3 giải)

1. *Nguyễn Phùng Hải Đăng*, 10T1, THPT chuyên Long An, **Long An**.

2. *Nguyễn Đức Quân Kiện*, 11T1, THPT chuyên Long An, **Long An**.

3. *Nguyễn Minh Long*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long.**

Các bạn đoạt giải Toán và Vật Lý nhớ gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn hoặc liên hệ trực tiếp qua số điện thoại (024) 35[illegible]606 để nhận Giấy Chứng nhận và tặng phẩm của Tạp chí.

CHUYỆN VỀ SỐ PHỨC...

(*Tiếp theo trang 20*)

Chẳng hạn, năm 1843 nhà toán học Ireland *W. Hamilton* (1805-1865) đã bứt phá ra khỏi ranh giới trường số phức và thu được các đối tượng mới gọi là quaternion – một dạng đơn giản của *số siêu phức*. Các quaternion thu được nhờ ghép thêm vào các số thực không phải một mà ba đơn vị ảo và có dạng

$$a.1 + bi + cj + dk; a,b,c,d \in \mathbb{R}; i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Nhưng ở đây *Hamilton* đành phải chấp nhận hai thoả hiệp: Các quaternion phải có bốn thành phần (chứ không phải hai thành phần như số phức) và đặc biệt là Ông phải *từ bỏ luật giao hoán* đối với phép nhân.

Hơn hai nghìn năm qua khái niệm số đã hình thành trong toán học một cách tuần tự nhờ kết quả của sự phát triển lâu dài do đòi hỏi của thực tiễn khách quan cũng như nhu cầu nội tại của bản thân toán học. Nhìn lại toàn bộ lịch sử phát triển khái niệm số, nhà toán học Đức *Leopold Kronecker* (1823-1891) đã viết:

"*Thượng đế đã tạo ra số tự nhiên, tất cả các hệ thống số còn lại đều là công trình sáng tạo của con người*".

Số phức là sản phẩm của trí tuệ con người. Sự hình thành và phát triển của nó đã kéo theo đà phát triển rầm rộ của nhiều lý thuyết toán học ở thế kỷ Ánh Sáng cho dù cơ sở lý luận có khi chưa kịp xác lập. Nhưng đúng như *J. D'Alembert* từng kêu gọi: "*Hãy tiến lên phía trước, lòng tin tưởng sẽ theo sau*!".

CÁC LỚP THCS

Bài T1/485 (Lớp 6). Cho $a = n^3 + 2n$ và $b = n^4 + 3n^2 + 1$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, hãy tìm ước chung lớn nhất của a và b.

TRƯƠNG VĂN HÒA
(GV THPT Thọ Xuân 4, Thọ Xuân, Thanh Hóa)

Bài T2/485 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 100^0$, $BC = a$, $AC = b$. Về phía ngoài tam giác, vẽ tam giác ABD cân tại D có $\widehat{ADB} = 140^0$. Tính chu vi tam giác ABD theo a và b.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/485. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^3y + xy^3 + 2x^2y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$.

TRẦN VĂN HẠNH
(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Bài T4/485. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $DA = AB = BC$. (K) là đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với AD, BC. P là một điểm thuộc (K) và nằm trong hình thang cân. PA, PB lần lượt cắt CD tại E, F. BE, BF theo thứ tự cắt AD, BC tại M, N. Chứng minh $PM = PN$.

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T5/485. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y + 1 \\ x^3 + (y-2)^3 = 7 \end{cases}.$$

LẠI QUANG THỌ
(Phòng GD& ĐT Tam Dương – Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/485. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3(a+b)}{a^2+b^2} + \frac{b^3(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{c^3(c+a)}{c^2+a^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

NGUYỄN VĂN QUÝ
(SV K56A1T1, ĐH KHTN-ĐHQG Hà Nội)

Bài T7/485. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trong (a, b), với $0 < a < b$. Chứng tỏ rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a+b}.$$

VŨ TIẾN VIỆT
(Khoa CN & ANTT, Học viện An Ninh)

Bài T8/485. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AH. Gọi M là trung điểm của BC, AM cắt OH tại G. Chứng minh rằng G nằm trên trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC và đường tròn Euler của tam giác ABC.

NGUYỄN VĂN LINH
(Hà Nội)

Bài T9/485. Cho a, b, c là ba số thực không âm thỏa mãn: $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.

NGUYỄN VĂN ÁI
(GV THPT Lê Thế Hiếu, Cam Lộ, Quảng Trị)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/485. Tìm số nguyên dương $n \leq 40$ và các số thực dương a, b, c thỏa mãn

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 1 \\ \sqrt[3]{a+n} + \sqrt[3]{b+n} + \sqrt[3]{c+n} \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

TỪ HỮU SƠN
(Sở GD&ĐT Hà Tĩnh)

Bài T11/485. Cho ba số nguyên dương a, b, c. Mỗi lần thực hiện, ta biến đổi bộ (a, b, c) thành bộ $\left(\left[\dfrac{a+b}{2}\right], \left[\dfrac{b+c}{2}\right], \left[\dfrac{c+a}{2}\right]\right)$. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn các phép biến đổi, ta sẽ thu được một bộ gồm ba số bằng nhau (kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

NGUYỄN TIẾN LÂM
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Bài T12/485. Cho (*D*) là đường tròn tiếp xúc với các tia *AB, AC* của tam giác *ABC* và tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* tại *X*. *J, K* lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác tam giác *XAB, XAC*. *P* là điểm chính giữa của cung tròn *BAC*. Chứng minh: *P*(*AXJK*) là chùm điều hòa.

TRẦN VIỆT HÙNG
(Phú Tân, Châu Thành, Sóc Trăng)

Bài L1/485. Đặt điện áp $u = U_0\cos\omega t$ (V) vào hai đầu một đoạn mạch gồm tụ điện mắc nối tiếp với một cuộn dây. Biết điện áp giữa hai đầu tụ điện lệch pha $\frac{2\pi}{3}$ so với điện áp hai đầu đoạn mạch và lệch pha $\frac{5\pi}{6}$ so với điện áp giữa hai đầu cuộn dây, điện áp hiệu dụng giữa hai đầu cuộn dây bằng 120V. Tính điện áp hiệu dụng giữa hai đầu tụ điện và giữa hai đầu đoạn mạch.

THANH LÂM
(Hà Nội)

Bài L2/485. Trên mặt chất lỏng có hai nguồn sóng kết hợp dao động đồng pha, phát đồng thời sóng có bước sóng bằng 1,2cm. Hai điểm *C* và *D* thuộc cùng một elip trên mặt chất lỏng nhận *A, B* là hai tiêu điểm. Biết hiệu số khoảng cách từ hai nguồn tới *C* và *D* lần lượt là $AC - BC = 4,8\text{cm}$ và $AD - BD = 0,4\text{cm}$. Coi biên độ sóng do mỗi nguồn gửi đến mỗi điểm trên elip nói trên đều bằng nhau. Tại thời điểm *t* nào đó, li độ của điểm *C* là 1,5 mm thì li độ của điểm *D* là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG
(Hà Nội)

Đính chính: Bài T11/484 (trang 25) số báo 484, T10.2017 đã viết nhầm $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\sqrt{5}\right)^n x^n$, xin được sửa là: Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\sqrt{5}\right)^n x_n$. Thành thật xin lỗi bạn đọc.

TH&TT

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/485 (For 6th grade). Let $a = n^3 + 2n$ and $b = n^4 + 3n^2 + 1$. For each $n \in \mathbb{N}$, find the greatest common divisor (gcd) of a and b.

Problem T2/485 (For 7th grade). Given an isosceles triangle *ABC* with $\widehat{A} = 100^0$, $BC = a$, $AC = AB = b$. Outside *ABC*, we construct the isosceles triangle *ABD* with $\widehat{ADB} = 140^0$. Compute the perimeter of *ABD* in terms of *a* and *b*.

Problem T3/485. Find all pairs of integers (x, y) such that $x^3y + xy^3 + 2x^2y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$.

Problem T4/485. Given an isosceles trapezoid *ABCD* with $AB \,//\, CD$ and $DA = AB = BC$. Let (K) be the circle which goes through *A, B* and tangent to *AD, BC*. Let *P* be a point on (K) and inside *ABCD*. Assume that *PA* and *PB* respectively intersect *CD* at *E* and *F*. Assume that *BE* and *BF* respectively intersect *AD* and *BC* at *M* and *N*. Prove that *PM* = *PN*.

Problem T5/485. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y + 1 \\ x^3 + (y-2)^3 = 7 \end{cases}.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/485. Let a, b, c be the length of three sides of a triangle. Prove that

$$\frac{a^3(a+b)}{a^2+b^2} + \frac{b^3(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{c^3(c+a)}{c^2+a^2} \ge a^2 + b^2 + c^2.$$

(Xem tiếp trang 34)

Bài T1/481. *Tìm các số nguyên không âm a, b, c thỏa mãn $9^a + 952 = (b+41)^2$ và $a = 2^b.c$.*

Lời giải. Xét hai trường hợp đối với a.

• Nếu số a chẵn, $a = 2n$ thì $9^a + 952 = 81^n + 952$ có chữ số tận cùng là 3, nhưng số chính phương bất kì không có chữ số tận cùng là 3 nên bài toán vô nghiệm.

• Nếu số a lẻ, $a = 2n + 1 = 2^b.c$ thì $b = 0$ và $a = c$ là số lẻ. Từ đó có $9^a + 952 = 41^2 = 1681$ nên $9^a = 729$, suy ra $a = 3$.

Bài toán có nghiệm $a = c = 3$, $b = 0$.❒

➢ ***Nhận xét.*** 1) Một số bạn biến đổi như sau:

$$(b+41)^2 - (3^a)^2 = 952, \text{ suy ra}$$

$$(b+41-3^a)(b+41+3^a) = 952.$$

Do $(b + 41 - 3^a) + (b + 41 + 3^a)$ là số chẵn nên hai số nguyên $b + 41 - 3^a$ và $b + 41 + 3^a$ có cùng tính chẵn lẻ, đồng thời tích của chúng bằng

$$952 = 2.476 = 4.238 = 14.68 = 28.34.$$

Từ đó tính được kết quả. Cách này dài hơn lời giải trên.

2) Các bạn sau có lời giải đúng. **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Thanh Hóa:** *Trịnh Đức Tuấn*, 6A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Đỗ Lê Trung*, 6A4, THCS Quang Trung, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Đặng Hữu Khanh*, *Nguyễn Đình Thủy*, *Nguyễn Phương Uyên*, *Nguyễn Quốc Hiếu*, *Trương Công Cảnh*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bình Định:** *Nguyễn Trọng Khôi*, 6A1, THCS Võ Xán, Tây Sơn; **Quảng Ngãi:** *Võ Thị Hồng Thu*, 6B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; *Điệp Diệu Châu*, *Văn Nguyễn Tuyết Minh*, 6B, *Đỗ Thị Như Nguyệt*, 6D, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

Bài T2/481. *Chứng minh rằng:*

$$A = \frac{1}{1000} + \frac{1}{1002} + ... + \frac{1}{2000} < \frac{1}{2}.$$

Lời giải. Cách 1. (Cách giải của bạn *Hoàng Lê Bích Ngọc*, 6A, THCS Thái Thịnh, Q. Đống Đa, **Hà Nội**). Ta xét: $B = \frac{1}{500} + \frac{1}{501} + ... + \frac{1}{1000}$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{1000}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{499}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{1000}\right) - \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{4} + ... + \frac{2}{998}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{997} - \frac{1}{998} + \frac{1}{999} + \frac{1}{1000}$$

$$= \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{1000}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - ... - \left(\frac{1}{998} - \frac{1}{999}\right)$$

Vì $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{1000} > 0; \frac{1}{4} - \frac{1}{5} > 0; ...; \frac{1}{998} - \frac{1}{999} > 0$

nên ta có $B < 1$.

Do đó $A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{500} + \frac{1}{501} + ... + \frac{1}{1000}\right) < \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$

Cách 2. (Cách giải của bạn *Đặng Hữu Khanh*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**). Ta có:

$$B = \frac{1}{1000} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1004} + ... + \frac{1}{1500}$$

$$< \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + ... + \frac{1}{1000} = \frac{251}{1000} < \frac{251}{753} = \frac{1}{3}.$$

$$C = \frac{1}{1502} + \frac{1}{1504} + \frac{1}{1506} + ... + \frac{1}{2000}$$

$$< \frac{1}{1502} + \frac{1}{1502} + ... + \frac{1}{1502} = \frac{250}{1502} < \frac{125}{750} = \frac{1}{6}.$$

Do đó: $A = B + C < \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.❒

➢***Nhận xét.*** Ngoài bạn *Ngọc* và bạn *Khanh*, các bạn có lời giải tốt là: **Quảng Ngãi:** *Lê Tuấn Kiệt*, *Cao Thị Ngọc Trâm*, *Võ Quỳnh Anh*, *Phạm Thị Thu Nhung*, *Võ Đàm Hương Giang*, *Phạm Đình Tâm*, *Văn Quang Tuệ*, 7A, *Đỗ Phạm Thùy Trang*, *Phan Ngọc Tuyết Sương*, 7C, *Nguyễn Thị Yến Nhi*, 7D, *Đỗ Phạm Kiều Trâm*, 6D, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Thành Nam*, *Nguyễn Phương Uyên, Nguyễn Hoàng Huy, Phạm Văn Quyền, Trần Xuân Mai, Kiều Đình Hải, Đào Thái Hoàng,* 7A, *Lê Văn Mạnh, Lê Hải Phong, Lê Văn Quang Trung, Nguyễn Mạnh Cảnh,* 7B, *Nguyễn Quốc Hiếu, Nguyễn Đình Thủy,* 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Nội:** *Nguyễn Ngân Chi,* 7C, THPT Lý Thái Tổ, Trung Hòa, Cầu Giấy; **Phú Thọ:** *Vũ Minh Khải, Cao Ngọc Khoa, Nguyễn Công Hải,* 7A3, THCS Lâm Thao.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/481. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$x^5 + y^5 + 2016 = (x+2017)^5 + (y-2018)^5.$$

Lời giải. *Cách* 1. Với a nguyên thì

$$a^5 - a = a(a-1)(a+1)(a^2+1)$$

chia hết cho 2 nên a^5 và a luôn cùng tính chẵn lẻ. Biến đổi phương trình đã cho thành

$$\left[(x+2017)^5 - x^5\right] - \left[y^5 - (y-2018)^5\right] = 2016 \quad (1)$$

Nhận thấy với mọi số nguyên dương x, y luôn có $(x + 2017)$ và x khác tính chẵn lẻ; $(y - 2018)$ và y cùng tính chẵn lẻ. Do đó $(x + 2017)^5$ và x^5 khác tính chẵn lẻ; $(y - 2018)^5$ và y^5 cùng tính chẵn lẻ. Suy ra $(x+2017)^5 - x^5$ là số lẻ; $y^5 - (y-2018)^5$ là số chẵn; nên vế trái của (1) là số lẻ trong khi vế phải của (1) là 2016 (số chẵn). Vì vậy không tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa mãn (1), phương trình đã cho vô nghiệm.

Cách 2. Trước hết ta chứng minh bổ đề: Với a nguyên luôn có $(a^5 - a) \vdots 5$. Thật vậy

$$\begin{aligned} a^5 - a &= a(a^2-1)(a^2+1) = a(a-1)(a+1)(a^2+5-4) \\ &= 5(a-1)a(a+1) - (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) \end{aligned}$$

Vì $a - 2, a - 1, a, a + 1, a + 2$ là 5 số nguyên liên tiếp nên có đúng 1 số chia hết cho 5, do đó tích của chúng chia hết cho 5; và $5(a-1)a(a+1) \vdots 5$. Vì vậy $(a^5 - a) \vdots 5$.

Biến đổi phương trình đã cho thành

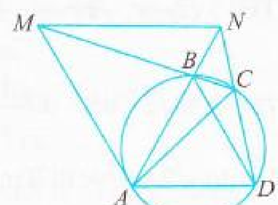
$$\left[(x+2017)^5 - (x+2017)\right] + \left[(y-2018)^5 - (y-2018)\right] - \\ -(x^5 - x) - (y^5 - y) = 2017 \quad (*)$$

Áp dụng bổ đề, ta có vế trái của (*) luôn chia hết cho 5 với mọi x, y nguyên dương. Còn vế phải của (*) là 2017 không chia hết cho 5. Vì vậy phương trình đã cho vô nghiệm.❒

➢ ***Nhận xét.*** Đây là bài toán giải phương trình sử dụng tính chia hết để chứng tỏ phương trình vô nghiệm. Kết quả của bài toán vẫn đúng với yêu cầu tìm nghiệm nguyên của phương trình. Có rất nhiều bạn tham gia giải bài, tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Thanh Hiền,* 8A4, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa:** *Phạm Anh Đức,* 8B, *Thiều Đình Minh Hùng,* 8C, *Nguyễn Tiến Đạt,* 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Quốc Hiếu,* 6A, *Nguyễn Phương Uyên, Nguyễn Văn Thành Nam,* 7A, *Lê Đình Tú,* 8D,THCS Lý Nhật Quang, *Cao Khánh Linh,* 8A, THCS cao Xuân Huy; **Quảng Ngãi:** *Lê Tuấn Kiệt,* 8C, THCS Phạm Văn Đồng; **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn,* 7/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/481. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có AB = BD. Các đường thẳng AB và DC cắt nhau tại N; đường thẳng CB cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) tại M. Chứng minh* $\widehat{AMN} = \widehat{ABD}$.



Lời giải. Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên

$\widehat{MCN} = \widehat{BAD}$ (1)

Theo giả thiết $AB = DB$

nên $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$ (2)

Lại có $\widehat{BDA} = \widehat{BAM}$ (cùng chắn cung AB) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{MCN} = \widehat{MAN}$, nên tứ giác $MACN$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{ACD}$.

Hơn nữa, $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ (cùng chắn cung AD),

do đó $\widehat{AMN} = \widehat{ABD}$. ❒

➢***Nhận xét.*** 1) Từ giả thiết bài toán ta có thể suy ra CM là tia phân giác của $\widehat{ACN}$. Kết hợp với tứ giác $AMNC$ nội tiếp, ta có ΔAMN cân tại M.

2) Các bạn sau cho lời giải tốt: **Vĩnh Long:** *Lê Nữ Hoàng Kim,* 9/1, THCS Nguyễn Trường Tộ; **Quảng Ngãi:** *Lê Tuấn Kiệt,* 8C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Hà Nội:** *Lê Tuấn Tú,* 9T, THPT dân lập

Lương Thế Vinh; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 9A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo; *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 8A1, THCS Ttr. Chờ, Yên Phong; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Linh Đan*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Ttr. Bút Sơn, Hoằng Hoá.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/481. *Giải phương trình*

$$(1-2x)\sqrt{2-x^2}=x-1. \qquad (1)$$

Lời giải. ĐK: $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$.

Đặt $\sqrt{2-x^2}=a\ (a\ge 0)\Rightarrow x^2+a^2=2. \qquad (2)$

Khi đó PT(1) trở thành:

$$(1-2x)a=x-1\Leftrightarrow a-2ax=x-1. \qquad (3)$$

Cộng theo vế PT(2) và PT(3) ta được:

$$(a-x)^2+(a-x)-1=0. \qquad (4)$$

Giải (4) ta được:

$$a-x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\sqrt{2-x^2}-x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

TH1: $\sqrt{2-x^2}-x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}=x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Do $x\le\sqrt{2}$ nên $x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\le\sqrt{2}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<0$.

Do đó $\sqrt{2-x^2}<0$. Trường hợp này bị loại.

TH2: $\sqrt{2-x^2}-x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}=x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 2-x^2=\left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 2x^2-\left(1-\sqrt{5}\right)x+\dfrac{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}{4}-2=0 \qquad (5)\end{cases}$$

Giải (5) ta được $x=\dfrac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Kết hợp với các điều kiện ta được

$$x=\frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

là nghiệm duy nhất của PT đã cho. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Một số bạn, khi biến đổi tương đương đã không đối chiếu những giá trị x tìm được với điều kiện hoặc khi biến đổi hệ quả thì không thử lại, nên dẫn đến kết quả thừa nghiệm. Một số bạn đã giải PT đã cho bằng cách biến đổi về PT đa thức bậc cao, nhưng cách này không được tự nhiên.

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT dân lập Lương Thế Vinh. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Hữu Nam*, 9G, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa. **Nghệ An:** *Lê Phùng Hiệp*, 9A, *Nguyễn Thị Linh Đan*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương. **Bến Tre:** *Ngô Quốc Bảo*, 7/1, THCS Mỹ Hóa, TP. Bến Tre. **Bình Phước:** *Phạm Thị Kim Phúc*, lớp 8, THCS Tân Thành, TX. Đồng Xoài.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/481. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+y^2}}=x^2y\\ 1+y^4-\dfrac{4y}{x}+\dfrac{3}{x^4}=0\end{cases}.$$

Lời giải. ĐK: $x\ne 0$. Ta thấy:

$x+\sqrt{1+x^2}>x+|x|\ge 0$ nên từ PT thứ nhất ta có $y>0$, kết hợp với PT thứ hai suy ra $\dfrac{y}{x}>0\Rightarrow x>0$. Biến đổi PT thứ nhất ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=y+y\sqrt{1+y^2}\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=f(y) \quad (*)$$

với $f(t)=t+t\sqrt{1+t^2}$.

Do $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $(*)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{x}$. Biến đổi PT thứ hai về dạng

$$x^4+x^4y^4-4x^3y+3=0.$$

Thay $y=\dfrac{1}{x}$ vào PT trên ta được $\left(x^2-2\right)^2=0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ vì $x > 0$. Khi đó $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy HPT có nghiệm duy nhất:

$$(x; y) = \left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \ \square$$

➤***Nhận xét.*** 1) Có nhiều lời giải sai với các lỗi phổ biến: không tìm tập xác định của HPT, tính đạo hàm sai, sử dụng biến đổi $\dfrac{1}{x}\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ mà không chứng minh $x > 0$.

2) Một số bạn chứng minh $x > 0$ tương đối dài dòng hoặc không chứng minh $x > 0$ dẫn đến việc phải thử lại. Ngoài ra, để chứng minh $x = \dfrac{1}{y}$, có thể sử dụng cách nhân liên hợp nhưng lời giải sẽ dài hơn.

3) Các bạn sau có lời giải tốt: **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Linh Đan*, 8D, THCS Lý Nhật Quang; **Bình Phước:** *Nguyễn Hoàng Đức*, 11A, THPT chuyên Quang Trung; **Đắk Nông:** *Nguyễn Tuấn Hải*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thừa Thiên Huế:** *Ngô Nguyễn Quỳnh Mơ*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc Học Huế. **Quảng Nam:** *Lê Thảo Huyền*, *Huỳnh Đinh Ngọc Trác*, 11/1, *Đàm Thị Xuân Ý*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tam Kỳ; **Nam Định:** *Lê Tiến Đạt*, *Nguyễn Thanh Huyền*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Trần Lê Phương Thảo*, 10T1, THPT chuyên Thái Bình; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Vĩnh Phúc:** *Lê Anh Dũng*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN NGỌC ĐẠI

Bài T7/481. *Cho số nguyên dương $n > 1$. Chứng minh rằng* $\dfrac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} < C_{2n}^n < \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{2n+1}}$.

Lời giải. Đặt $P = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$.

Dễ thấy $C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = 2^{2n}P$. Ta có

$$1 > \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)$$

$$= \frac{(1.3).(3.5)...[(2n-1)(2n+1)]}{2^2.4^2...(2n)^2}$$

$\Rightarrow 1 > (2n+1)P^2$. Từ đó suy ra $P < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$\Rightarrow C_{2n}^n < \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{2n+1}}$. Tương tự:

$$1 > \left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)...\left(1-\frac{1}{(2n-1)^2}\right)$$

$$= \frac{(2.4).(4.6)...[(2n-2)(2n)]}{3^2.5^2...(2n-1)^2} \Rightarrow 1 > \frac{1}{4nP^2}.$$

Từ đó suy ra $P > \dfrac{1}{\sqrt{4n}} \Rightarrow C_{2n}^n > \dfrac{2^{2n}}{2\sqrt{n}}$. $\square$

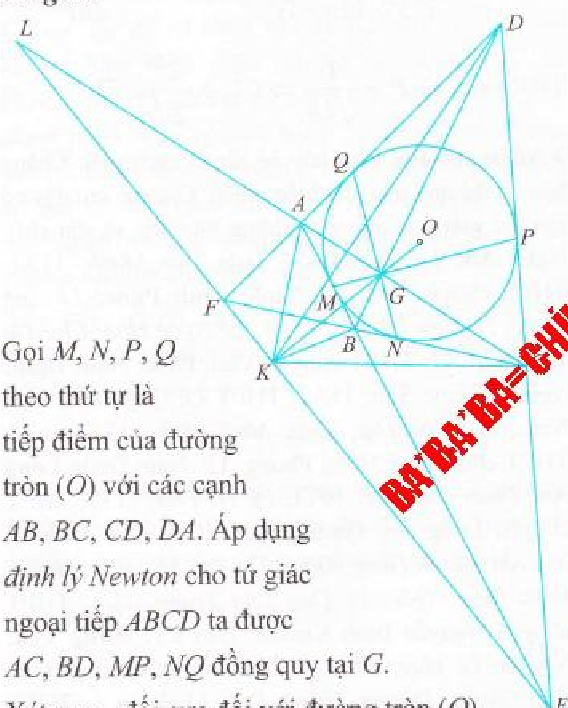
➤***Nhận xét.*** Bài toán này có nhiều cách giải. Chẳng hạn có thể quy nạp khá hiển nhiên. Các em sau đây có gửi lời giải (có một em không viết tên và địa chỉ): **Nghệ An:** *Lê Đình Hiếu*, *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH TP. Vinh; **Vĩnh Phúc:** *Lê Anh Dũng*, *Nguyễn Lê Sơn*, 11A1, *Lê Ngọc Hoa*, *Chu Thị Thanh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Nguyễn Hùng Sơn*, 11A2, THPT Lê Quý Đôn, Trực Ninh, *Lê Tiến Đạt*, *Trần Minh Hiếu*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Long An:** *Phan Quý Lộc*, 10T1, *Lê Trí Phú*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Quảng Nam:** *Đàm Thị Xuân Ý*, *Nguyễn Thanh Hùng*, *Đặng Thị Trà My*, 10/1, *Huỳnh Đinh Ngọc Trác*, *Lê Đào Văn Trung*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tam Kỳ; **Hưng Yên:** *Nguyễn Lê Huy*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, *Dương Thành Đạt*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Bình Định:** *Nguyễn Công Khải*, 10T, THPT Tây Sơn, Tây Sơn; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 12T1, *Trần Lĩnh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Thanh Hóa:** *Thiều Đình Minh Hùng*, 8C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Bút Sơn, Hoằng Hóa, *Đỗ Cao Bách Tùng*, 8B, THCS Trần Mai, TP. Thanh Hóa, *Lê Tiến Đạt*, 11A1, THPT Nông Cống 1; **Bắc Giang:** *Hoàng Mai Phương*, *Chu Thị Ngân*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang, TP. Bắc Giang; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Tường Duy Bảo*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn;

Bình Phước: *Trịnh Hoàng Hiệp*, 11A, THPT chuyên Quang Trung, *Nguyễn Đình Thịnh*, 12T3, THPT chuyên Bình Long; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Đắk Nông:** *Nguyễn Tuấn Hải*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh; **Thái Bình:** *Trần Lê Phương Thảo*, 10T1, THPT chuyên Thái Bình; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

VŨ ĐÌNH HOÀ

Bài T8/481. *Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). E, F, G theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng (AB, CD), (AD, CB), (AC, BD). K là giao điểm của EF và OG. Chứng minh rằng* $\widehat{AKG}=\widehat{CKG}, \widehat{BKG}=\widehat{DKG}$.

Lời giải.



Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (O) với các cạnh AB, BC, CD, DA. Áp dụng *định lý Newton* cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$ ta được AC, BD, MP, NQ đồng quy tại G.

Xét cực – đối cực đối với đường tròn (O).

Theo *định lý La Hire*: G thuộc MP là đường đối cực của điểm E nên đường đối cực của G đi qua E. Mặt khác G thuộc NQ là đường đối cực của điểm F nên đường đối cực của G đi qua F. Vậy EF là đường đối cực của G đối với (O), suy ra $CG \perp EF$, hay $OK \perp EF$. Từ đó, nếu gọi L là giao điểm của EF và AC thì $(ACGL) = -1$ (hàng điểm điều hoà cơ bản) $\Rightarrow K(ACGL) = -1$, mà $KG \perp KL$ (do $OK \perp EF$), nên $\widehat{AKG}=\widehat{CKG}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{BKG}=\widehat{DKG}$. □

➤***Nhận xét.*** Hầu hết các lời giải gửi về Tòa soạn đều sử dụng tính chất của chùm điều hoà để giải bài toán này. Sau đây là danh sách học sinh có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Vũ Thanh Thảo*, 11 Toán, THPT Sơn Tây; **Vĩnh Phúc:** *Kim Thị Hồng Lĩnh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Bắc Giang:** *Chu Thị Ngân*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hưng Yên:** *Dương Thành Đạt*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Lê Tiến Đạt*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh, *Bạch Quang Hiệu*, 11A1, THPT Cửa Lò; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Trung Kiên*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Đàm Thị Xuân Ý*, 10/1 THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Huỳnh Tuyên*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bình Phước:** *Lưu Trí Cường*, 11T4; THPT chuyên Bình Long; **Sóc Trăng:** *Huỳnh Gia Bảo*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Long An:** *Phan Quý Lộc*, 10T1, THPT chuyên Long An.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/481. *Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn* $2^x+4^y+8^z=4$. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức* $S=\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}$.

Lời giải. Đặt $a=2^x$, $b=4^y$, $c=8^z$.

Ta có $a, b, c \geq 1$ và $a+b+c=4$.

Chú ý $T=a.b.c=2^x.2^{2y}.2^{3z}=2^{x+2y+3z}=2^{6S}$.

Do đó S đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) khi và chỉ khi T đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Giá trị lớn nhất: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số thực dương ta có

$$T=abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$\Rightarrow S\leq\frac{1}{6}\log_2\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{1}{2}\log_2\frac{4}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{4}{3}\Leftrightarrow x=2y=3z=\log_2\frac{4}{3}$.

Giá trị nhỏ nhất: Nhận xét: nếu $p\geq 1, q\geq 1$ là các số thực thì $(p-1)(q-1)\geq 0\Rightarrow pq\geq p+q-1$. (*)

Áp dụng nhận xét (*) ta có

$$T = abc \geq (a+b-1)c \geq a+b-1+c-1 = 2.$$

$\Rightarrow 6S \geq 1 \Rightarrow S \geq \frac{1}{6}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là một hoán vị của các số $(1, 1, 2)$

$\Leftrightarrow (x, 2y, 3z)$ hay là một hoán vị của $(0, 0, 1)$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) \in \left\{(1,0,0), \left(0,\frac{1}{2},0\right), \left(0,0,\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của S bằng $\frac{1}{2}\log_2\frac{4}{3}$, giá trị nhỏ nhất của S bằng $\frac{1}{6}$. ❒

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán cơ bản, hay. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Bắc Giang:** *Chu Thị Ngân*, *Hoàng Mai Phương*, 11T, THPT chuyên Bắc Giang; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 10T1, *Dương Thành Đạt*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Lê Sơn*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hoá:** *Thiều Đình Minh Hùng*, 8C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá, *Đỗ Cao Bách Tùng*, 8B, THCS Trần Mai Ninh, *Lê Tiến Đạt*, 11A1, THPT Nông Cống I; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Tuấn Khánh*, 11A1, THPT Cù Huy Cận, Đức Giang, Vũ Quang; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Hoàng Minh Đức*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Long An:** *Lê T[illegible]i*, 11T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/481. *Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) sao cho $2^m.3^n - 1$ là số chính phương.*

Lời giải. (của bạn *Dương Thành Đạt*, 11 Toán1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**)

Ta có $2^m.3^n - 1 = x^2$ $(x \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2^m.3^n$ (1)

Với $n \geq 1$: Khi đó $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow x^2 \equiv -1 \pmod 3$. Điều này không xảy ra vì $x^2 \equiv 0$ hoặc $x^2 \equiv 1 \pmod 3$. Vậy $n < 1 \Rightarrow n = 0$. Khi đó (1) trở thành $x^2 + 1 = 2^m$.

Với $m \geq 2$ thì $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow x^2 \equiv -1 \pmod 4$ không xảy ra vì $x^2 \equiv 0$ hoặc $x^2 \equiv 1 \pmod 4$.

Vậy $m \in \{0, 1\}$.

Với $m = 1$, $x^2 + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$, thoả mãn.

Với $m = 0$, $x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$, thoả mãn.

Đáp số: $(m, n) = (0, 0)$ và $(m, n) = (1, 0)$. ❒

➢***Nhận xét.*** Đây là một bài toán dễ và có nhiều bạn tham gia giải bài này. Trong số các lời giải tốt có các bạn: **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Nam Định:** *Lê Tiến Đạt*, 12T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Lê Sơn*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hoá:** *Thiều Đình Minh Hùng*, 8C, THCS Bút Sơn, Hoằng Hoá; **Quảng Nam:** *Đàm Thị Xuân Ý*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Nghệ An:** *Lê Đình Tú*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bình Phước:** *Nguyễn Tấn Tài*, 11A, THPT chuyên Quang Trung.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/481. *Cho dãy số (u_n) thỏa mãn*

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \log_{\frac{1}{4}} u_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó khi n dần đến vô cực.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Từ giả thiết đã cho, suy ra $u_n > 0$, $n = 2, 3, ...$

Tiếp theo, ta chứng minh $u_n < \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Với $n = 1$ thì $u_1 = 0 < \frac{1}{2}$.

Giả sử $u_k < \frac{1}{2}$ thì từ $\log_{\frac{1}{4}} u_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{u_n} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, suy ra $u_{n+1} < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \log_{\frac{1}{4}} x$, với $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Khi đó $f'(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \ln\frac{1}{4} - \frac{1}{x\ln\frac{1}{4}} > \ln\frac{1}{4} - \frac{1}{x\ln\frac{1}{4}}$

$$> \frac{2}{\ln\frac{1}{4}} - \frac{1}{x\ln\frac{1}{4}} > \frac{1}{x\ln\frac{1}{4}} - \frac{1}{x\ln\frac{1}{4}} = 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right].$$

Vậy $f(x)$ là hàm đồng biến trong $\left(0;\frac{1}{2}\right]$ nên

$$f(x)<f\left(\frac{1}{2}\right)=0,\forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right].$$

Từ đây suy ra $u_{n+1} > u_n$, tức (u_n) là dãy tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn, giả sử là a. Khi đó, chuyển qua giới hạn, ta thu được $\log_{\frac{1}{4}} a=\left(\frac{1}{4}\right)^a \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$, do $f(x)$ là hàm đồng biến trong $\left(0;\frac{1}{2}\right]$ nên nghiệm đó là duy nhất. ❐

➤***Nhận xét.*** 1) Đây là dạng toán cơ bản về dãy số sinh bởi hàm mũ, cần viện trợ các kiến thức về đạo hàm của hàm siêu việt. Một số bạn đã tìm được giới hạn thông qua tính chất của hàm ngược.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bắc Giang:** *Hoàng Mai Phương*, 11T, THPT chuyên Bắc Giang; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân; **Bình Phước:** *Nguyễn Hoàng Đức*, 12A, THPT chuyên Quang Trung; **Hưng Yên:** *Dương Thành Đạt*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Dương Đông Dư*, 11T2, Quốc Học Huế; **Long An:** *Nguyễn Thị Ngân Trúc*, *Lê Thị Thú*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Nam Định:** *Trần Minh Hiếu*, *Lê Tiến Đạt*, 12T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Nam:** *Lê Đào Văn Trung*, *Phan Văn Chính*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Lê Sơn*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

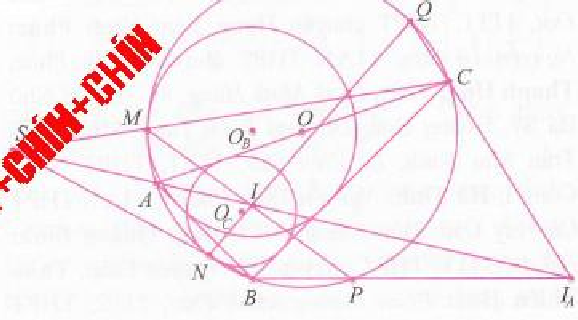
NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/481. *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, (O_B), (O_C) theo thứ tự là các đường tròn mixtilinear ứng với các đỉnh B, C (đường tròn mixtilinear ứng với đỉnh B là đường tròn tiếp xúc với hai cạnh BA, BC đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O)). M, N theo thứ tự là tiếp điểm của (O) và (O_B), (O_C). (M), (N) theo thứ tự là các đường tròn có tâm là M, N và tiếp xúc với AC, AB. Chứng minh rằng tâm vị tự ngoài của (M), (N) thuộc BC.*

Lời giải. Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC không cân tại A, (O) là đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường tròn nội tiếp. (O_B), (O_C) theo thứ tự là các đường tròn mixtilinear ứng với các đỉnh B, C. M, N theo thứ tự là tiếp điểm của (O) và (O_B), (O_C). Khi đó AI, BN, CM đồng quy.*

Chứng minh. Gọi S là giao điểm của BN và CM; P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của MI, NI và (O); I_A là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A của tam giác ABC (h.1).



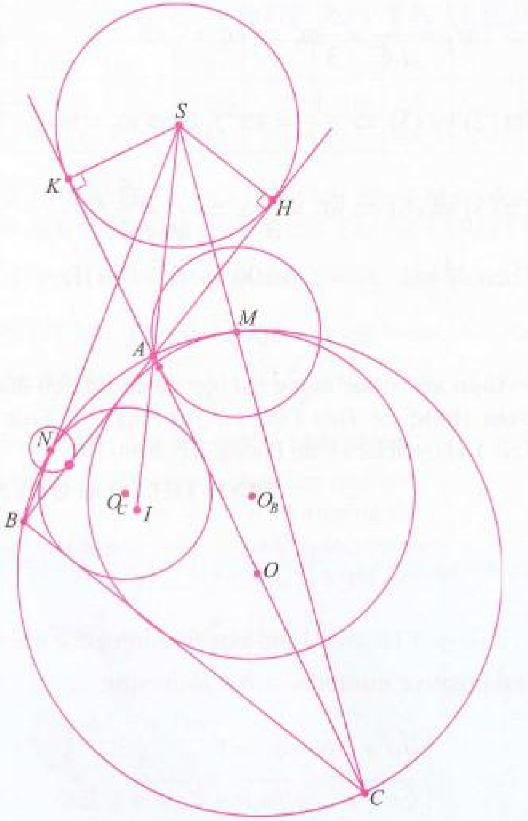
Hình 1

Dễ thấy P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cung $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$. Do đó $I_A = BP \cap CQ$.

Từ đó, chú ý rằng $S = BN \cap CM; I = PM \cap QN$, áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} BQM \\ CPN \end{pmatrix}$, suy ra S, I, I_A thẳng hàng. Kết hợp với A, I, I_A thẳng hàng, suy ra S, I, A thẳng hàng. Nói cách khác AI, BN, CM đồng quy.

Bổ đề 2. *Nếu S_1, S_2, S_3 theo thứ tự là tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (O_2), (O_3); (O_3), (O_1); (O_1), (O_2) thì S_1, S_2, S_3 thẳng hàng.*

Bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày cách chứng minh ở đây.



Hình 2

Trở lại giải bài toán T12/481.

Gọi S là giao điểm của BN và CM; H, K theo thứ tự là hình chiếu của S trên AB, AC (h.2).

Theo bổ đề 1, S, A, I thẳng hàng. Từ đó AS là phân giác của $\widehat{HAK}$. Vậy đường tròn (S), tâm S, bán kính $SH = SK$, tiếp xúc với AH, AK.

Từ đó, chú ý rằng B là tâm vị tự ngoài của (N), (S) và C là tâm vị tự ngoài của (S), (M), theo bổ đề 2, suy ra tâm vị ngoài của (M), (N) thuộc BC. ❐

➤***Nhận xét.*** Chỉ có năm bạn tham gia giải bài toán này. Nhìn chung lời giải của các bạn đều phải tính toán nhiều. Xin nêu tên cả năm bạn: **Bắc Giang:** *Chu Thị Ngân*, 11T, THPT chuyên Bắc Giang, TP. Bắc Giang; **Thanh Hóa:** *Lê Tiến Đạt*, 11A1, THPT Nông Cống I, Nông Cống; **Quảng Nam:** *Lê Hà Khiêm*, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An; **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Long An:** *Phạm Quý Lộc*, 10T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/481. *Hai vật nhỏ có khối lượng lần lượt là m_1 và m_2 với $m_1 = 3m_2$ đang dao động điều hòa cùng biên độ 10 cm trên hai đường thẳng cùng song song với trục Ox và có hình chiếu của vị trí cân bằng lên trục Ox trùng với O. Thời điểm ban đầu, vật m_1 có li độ $5\sqrt{3}$ cm và đang chuyển động nhanh dần còn vật m_2 đi qua vị trí cân bằng theo chiều âm. Biết hình chiếu của chúng lên trục Ox gặp nhau lần đầu ở vị trí có tọa độ −5 cm và đang chuyển động ngược chiều nhau. Tính tỉ số giữa động năng của vật m_1 và của vật m_2 tại thời điểm hình chiếu của chúng trên trục Ox gặp nhau lần thứ 2017.*

Lời giải. Thời điểm gặp nhau ở vị trí $x = -5$cm: $t = \dfrac{T_1}{4} = \dfrac{5T_2}{12}$ suy ra $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{5}{3}$.

Áp dụng công thức $A^2 = x^2 + \dfrac{v^2}{\omega^2}$

nên khi gặp nhau ta có: $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{3}{5}$.

Tỉ số động năng của 2 vật khi hình chiếu của chúng gặp nhau lần thứ 2017 là:

$$\frac{W_{d1}}{W_{d2}} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2} = \frac{27}{25}. \ ❐$$

➤***Nhận xét.*** Có hai bạn có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Lê Sơn*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** *Nguyễn Đặng Sơn*, 12A, THPT Nam Sách.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/481. *Cho mạch điện RLC mắc nối tiếp, trong đó $R^2C < 2L$. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều $u = U\sqrt{2}\cos 2\pi ft$, trong đó U có giá trị không đổi, f có thể thay đổi được. Khi $f = f_1$ thì điện áp hiệu dụng trên tụ có giá trị cực đại, mạch tiêu thụ công suất bằng 75% công suất cực đại. Khi tần số của dòng điện là $f_2 = f_1 + 100$ Hz thì điện áp hiệu dụng trên cuộn cảm thuần có giá trị cực đại. Để điện áp hiệu dụng trên điện trở đạt cực đại thì tần số của dòng điện phải bằng bao nhiêu?*

Lời giải. Vì: $\mathscr{P} = 0,75\mathscr{P}_{\max} \Rightarrow \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow RI^2 = 0,75\frac{U^2}{R} \Rightarrow \frac{RU^2}{R^2(Z_{L1} - Z_{C1})^2} = 0,75\frac{U^2}{R}$$

$\Rightarrow 3R^2+3(Z_{L1}-Z_{C1})^2=4R^2 \Rightarrow R^2=3(Z_{L1}-Z_{C1})^2$ (1)

Khi $U_{C\max}$: $2\pi f_1=\sqrt{\dfrac{L}{C}-\dfrac{R^2}{2}}$. (2)

Khi $U_{L\max}$: $2\pi f_2=\dfrac{1}{C\sqrt{\dfrac{L}{C}-\dfrac{R^2}{2}}}$. (3)

Từ (2) $\Rightarrow Z_{L1}^2=Z_{C1}.Z_{L1}-\dfrac{R^2}{2}$. (4)

Từ (1) và (4)

$\Rightarrow 3(Z_{L1}-Z_{C1})^2=2Z_{L1}(Z_{C1}-Z_{L1})=3Z_{C1}=5Z_{L1}$

$\Rightarrow 2\pi f_2=\dfrac{1}{LC}=\dfrac{5}{3}\omega_1^2 \Rightarrow \omega_0^2=\dfrac{5}{3}\omega_1^2$. (5)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{1}{LC}=4\pi^2 f_1 f_2 \Rightarrow \omega_0^2=\omega_1\omega_2$. (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \omega_2=\dfrac{5}{3}\omega_1 \Rightarrow f_2=\dfrac{5}{3}f_1$.

Theo đề bài: $f_2=f_1+100 \Rightarrow f_1=150\,\text{Hz}$

$\Rightarrow f_0=50\sqrt{15}$ Hz. ❒

➤***Nhận xét.*** Chúc mừng hai bạn đã có lời giải đúng: **Nam Định:** *Lê Tiến Đạt, Vũ Thị Diệp*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

PROBLEM...

(Tiếp theo trang 25)

Problem T7/485. Given a function $f(x)$ which is continuous on $[a,b]$ and differentiable on (a,b), where $0<a<b$. Prove that there exists $c\in(a,b)$ such that

$$f'(c)=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a+b}.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T8/485. Given a triangle ABC inscribed the circle (O). Construct the altitude AH. Let M be the midpoint of BC. Assume that AM intersects OH at G. Prove that G belongs to the radical axis of the circumcircle of BOC and the Euler circle of ABC.

Problem T9/485. Given three nonnegative real numbers a,b,c satisfying $ab+bc+ca=1$. Find the minimum value of the expression

$$P=\frac{\left(a^3+b^3+c^3+3abc\right)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/485. Find positive integers $n\le 40$ and positive numbers a,b,c satisfying

$$\begin{cases}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=1\\ \sqrt[3]{a+n}+\sqrt[3]{b+n}+\sqrt[3]{c+n}\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

Problem T11/485. Given three positive integers a,b,c. Each time, we transform the triple (a,b,c) into the triple

$$\left(\left[\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{b+c}{2}\right],\left[\frac{c+a}{2}\right]\right).$$

Prove that after a finite number of such transformations, we will get a triple with equal components. (The notation $[x]$ denotes the biggest integer which does not exceed x).

Problem T12/485. Given a triangle ABC. Let (D) be the circle which is tangent to the rays AB, AC and is internally tangent to the circumcircle of ABC at X. Let J, K respectively be the incenters of the triangles XAB, XAC. Let P be the midpoint of the arc BAC. Prove that $P(AXJK)$ is a harmonic range.

Translated by **NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN**

(College of Science - Vietnam National University, Hanoi)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 25

Problem. *Let (C) be the graph of the function $f(x)=x^4+2x^3+nx^2+8x+16$. Find the parameter n such that there exists a line which intersects (C) at 4 distinct points.*

Solution: First, we observe that finding the intersections between (C) and the line $y = ax + b$ is equivalent to finding the intersections between the graph of $y=x^4+2x^3+nx^2$ and the line $y = ax + b - (8x + 16)$.

Therefore we can assume that $f(x)=x^4+2x^3+nx^2$.

And similarly, for this problem, we can ignore any linear part "$px + q$" whenever it arises.

Second, by changing variable and ingnoring the linear part, we can transform $f(x)=x^4+2x^3+nx^2$ into a biquadratic form of which we understand very well. More specifically, we have

$$(x+a)^4+2(x+a)^3+n(x+a)^2=$$
$$x^4+4ax^3+6a^2x^2+\ldots+2x^3+6ax^2+\ldots+nx^2.$$

Therefore if we change the variable $x:=x-\frac{1}{2}$ and ignore the linear part, we can assume that

$$f(x)=x^4+\left(n-\frac{3}{2}\right)x^2.$$

Notice that, changing variable means translating the graphs left or right. And for our problem, we can do any graph translation without lost of generality.

For the last function $f(x)=x^4+\left(n-\frac{3}{2}\right)x^2$, we can check that its graph has *W*-shape or *V*-shape depending on $n-\frac{3}{2}$ is negative or not (more carefully, we can investigate the sign of derivative $f'(x)$). From the information about the graph, we see that those required lines in the problem exist if and only if $n-\frac{3}{2}<0$ or $n<\frac{3}{2}$.

Remark: I learnt about the problem and the above solution via some online material.

Từ vựng:

graph	: đồ thị
parameter	: tham số
ignore	: bỏ qua, không tính đến
linear	: tuyến tính
biquadratic form	: dạng trùng phương
translate	: tịnh tiến
generality	: sự tổng quát
investigate	: khảo sát

BÀI DỊCH SỐ 23

Bài toán. *Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số tuần hoàn và có đạo hàm. Chứng minh rằng:*

(i) Hàm f bị chặn, nghĩa là tồn tại số M sao cho $f(x) \le M, \forall x$.

(ii) f' cũng là hàm số tuần hoàn.

Lời giải. Vì *f* là hàm tuần hoàn nên tồn tại số $T > 0$ sao cho

$$f(x) = f(x + T),\ \text{với mọi } x.$$

Trong trường hợp đặc biệt, tập giá trị của hàm *f* bằng $f([0; T])$.

Ở đây, kí hiệu $f([0; T])$ là tập hợp: $\{f(x) \mid x \text{ thuộc đoạn } [0; T]\}$.

Mặt khác *f* là hàm liên tục trên đoạn $[0; T]$ nên *f* đạt giá trị lớn nhất trên $[0; T]$.

Từ đó (i) được chứng minh.

Để chứng minh phần (ii), chúng ta sử dụng định nghĩa của đạo hàm. Thật vậy với mọi x_0, ta có

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x+T\to x_0+T}\frac{f(x+T)-f(x_0+T)}{(x+T)-(x_0+T)}=f'(x_0+T),$$

trong đó đẳng thức thứ hai có được là do *f* là hàm tuần hoàn.

Chú ý: Chúng ta có thể sử dụng các tính chất trên để chỉ ra một hàm số không tuần hoàn, chẳng hạn bạn có thể áp dụng phương pháp này để chứng tỏ rằng các hàm số $f(x)=\sin x^2$, $f(x)=\cos x^2$,... là không tuần hoàn.

Nhận xét. *Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài đến Toà soạn sớm:* **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Cảnh Minh Phước*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Nguyễn Thanh Hùng*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

ĐỊNH LÝ THẶNG DƯ TRUNG HOA VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

I. MỞ ĐẦU

Định lý thặng dư Trung Hoa là tên người phương Tây đặt thêm, người Trung Quốc gọi nó là bài toán "*Hàn Tín điểm binh*". Hàn Tín là một danh tướng thời Hán Sở, từng được phong tước vương thời Hán Cao Tổ Lưu Bang đang dựng nghiệp. Sử ký Tư Mã Thiên viết rằng Hàn Tín là tướng trói gà không nổi, nhưng rất có tài về quân sự. Tục kể rằng khi Hàn Tín điểm quân số ông cho quân lính xếp hàng 3, hàng 5, hàng 7 rồi báo cáo số dư mỗi hàng, từ đó ông tính chính xác quân số đến từng người. Cách điểm quân số đã được ông thể hiện qua bài thơ sau:

Tam nhân đồng hành thất thập hy.
Ngũ thụ mai hoa trấp nhất chi
Thất tử đoàn viên chính bán nguyệt
Trừ bách linh ngũ tiện đề chi.

Dịch

Ba người cùng đi ít bảy chục
Năm cỗ mai hoa hăm mốt cành
Bảy gã sum vầy vừa nửa tháng
Trừ trăm linh năm biết số thành

(Người dịch: Trình Đại Vỹ đời nhà Minh).

Bản chất của bài toán Hàn Tín điểm binh đấy là việc giải HPT đồng dư bậc nhất

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \ldots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases},$$

trong đó $m_1, m_2,..., m_k$ là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau, với bài toán của Hàn Tín thì $k = 3$; $m_1 = 3$; $m_2 = 5$; $m_3 = 7$.

Định lý Thặng dư Trung Hoa

Cho k số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau $m_1, m_2,..., m_k$ và $a_1, a_2,..., a_k$ là k số nguyên tùy ý, khi đó HPT đồng dư tuyến tính

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \ldots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất modulo $m_1m_2...m_k$.

Chứng minh định lý

1. *Chứng minh sự duy nhất*: Giả sử hệ có hai nghiệm x, y, suy ra $x \equiv y \pmod{m_i}, \forall i = \overline{1;k}$.

Vì $m_1, m_2,..., m_k$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên $x \equiv y$ (mod $m_1m_2...m_k$) tức là x và y cùng thuộc một lớp thặng dư modulo $m_1m_2...m_k$.

2. *Chứng minh sự tồn tại*: Ta sẽ viết các nghiệm như là một tổ hợp tuyến tính của các số $a_1, a_2,..., a_k$. Chẳng hạn $x = A_1a_1 + A_2a_2 + ... + A_ka_k$ với các A_i phải tìm thỏa mãn $A_j \equiv 0 \pmod{m_i}$ $\forall j \neq i$ và $A_j \equiv 1 \pmod{m_i}$.

Đặt $N_1 = m_2m_3...m_k$; $N_2 = m_1m_3...m_k$; ... ;
$N_i = m_1m_2...m_{i-1}m_{i+1}...m_k$; ... Khi đó vì $(m_i, m_1) = (m_i, m_2) = ... = (m_i, m_{i-1}) = (m_i, m_{i+1}) = ... = (m_i, m_k) = 1$ nên $(N_i, m_i) = 1$ và $m_j \mid N_i, \forall j \neq i$. Vì $(N_i, m_i) = 1$ nên tồn tại N^{-1}_i sao cho $N_iN^{-1}_i \equiv 1 \pmod{m_i}$.

Đến đây ta đặt $A_i = N_iN^{-1}_i$ thì

$$A_i \equiv 1 \pmod{m_i};\ A_i \equiv 0 \pmod{m_j},\ \forall j \neq i$$
$$(\text{vì } N_i \equiv 0 \pmod{m_j} \Rightarrow A_i \equiv 0 \pmod{m_j}).$$

Khi đó $x = A_1a_1 + A_2a_2 + ... + A_ka_k$
$= N_1N_1^{-1}a_1 + N_2N_2^{-1}a_2 + ... + N_kN_k^{-1}a_k$

sẽ thỏa $x \equiv N_kN_k^{-1}a_k \equiv a_i \pmod{m_i}$ (vì tất cả các thừa số còn lại đều chia hết cho m_i).

Nhận xét. Định lý thặng dư Trung Hoa khẳng định về sự tồn tại duy nhất của một lớp thặng dư các số nguyên thỏa mãn HPT đồng dư tuyến tính. Do đó có thể sử dụng định lý để giải quyết những bài toán về sự tồn tại và đếm các số nguyên thỏa mãn một hệ các điều kiện về quan hệ đồng dư, quan hệ chia hết…, hay đếm số nghiệm của PT đồng dư, chứng minh cho bài toán số học chia hết. Việc sử dụng hợp lý các bộ $m_1, m_2, ..., m_k$ và bộ $a_1, a_2, ..., a_k$ trong định lý cho ta nhiều kết quả khá thú vị và từ đó ta có thể lập được nhiều bài toán hay và khó.

Sau đây tôi đưa ra một số ứng dụng của định lý thặng dư Trung Hoa để giải các bài toán số học mà chúng ta thường gặp.

II. ÁP DỤNG CƠ BẢN GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ TUYẾN TÍNH

Vận dụng tư tưởng của định lý **thặng dư Trung Hoa**, chúng ta có thể xây dựng một phương pháp hiệu quả trong việc giải HPT đồng dư tuyến tính.

Cách giải

- *Bước* 1. Đặt $m = m_1m_2...m_n = N_im_i$ với $i = 1, 2, ..., n$.
- *Bước* 2. Tìm các nghiệm N_i^{-1} của PT $N_ix \equiv 1 \pmod{m_i}$.
- *Bước* 3. Tìm được một nghiệm của hệ là:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} N_iN_i^{-1}a_i.$$

- *Bước* 4. Kết luận nghiệm: $x \equiv x_0 \pmod m$.

Thí dụ 1. *Đầu tiên ta đến với bài thơ đố dân gian Việt Nam:*

Trung Thu

Trung thu gió mát trăng trong.
Phố phường đông đúc, đèn lồng sao sa
Rủ nhau đi đếm đèn hoa
Quẩn quanh, quanh quẩn biết là ai hay
Kết năm chẵn số đèn này
Bảy đèn kết lại còn hai ngọn thừa
Chín đèn thì bốn ngọn dư.
Đèn hoa bao ngọn mà ngẩn ngơ lòng.
(Cho biết số đèn trong khoảng 600 đến 700)

Lời giải. Sử dụng định lý thặng dư Trung Hoa ta giải như sau. Gọi số đèn là x $(x \in \mathbb{Z}, 600 \le x \le 700)$, từ bài thơ ta có HPT đồng dư: $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \\ x \equiv 4 \pmod 9 \end{cases}$.

$$N_1 = 7\cdot 9 = 63 \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow N_1^{-1} = 2;$$
$$N_2 = 5\cdot 9 = 45 \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow N_2^{-1} = 5;$$
$$N_3 = 5\cdot 7 = 35 \equiv 8 \pmod 9 \Rightarrow N_3^{-1} = 8.$$

Từ đó ta có

$x = 2.63.0 + 5.45.2 + 8.35.4 = 1570 \equiv 310 \pmod{315}$
$\Rightarrow x = 310 + 315k, k \in \mathbb{Z}.$

Do $x \in \mathbb{Z}, 600 \le x \le 700$ từ đó suy ra $k = 1$ và $x = 625$. Vậy số đèn là 625.

Hoặc giải theo các Cụ thời xưa như sau: Gọi x là số đèn (x là số nguyên dương trong khoảng 600 đến 700), x chia hết cho 5, x chia cho 7 dư 2, x chia cho 9 dư 4. Chú ý rằng số dư khi chia cho 7 và cho 9 đều ít hơn số chia 5 đơn vị, suy ra $x + 5$ sẽ chia hết cho cả 5; 7; 9. Bội số chung nhỏ nhất của 5; 7; 9 nằm trong khoảng 600 đến 700 là $315 \times 2 = 630$. Vậy số đèn sẽ là $630 - 5 = 625$.

Thí dụ 2. *Giải PT đồng dư $x^2 \equiv 1 \pmod{144}$.*

Lời giải. Vì $144 = 16.9$ và $(16,9) = 1$ nên theo định lý thặng dư Trung Hoa, nghiệm của bài toán chính là nghiệm của HPT $\begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{16} \\ x^2 \equiv 1 \pmod 9 \end{cases}$.

PT $x^2 \equiv 1 \pmod{16}$ có 4 nghiệm: $x \equiv \pm 1, \pm 7 \pmod{16}$.
PT $x^2 \equiv 1 \pmod 9$ có 2 nghiệm: $x \equiv \pm 1 \pmod{16}$.
Do đó ta có tất cả 8 hệ sau

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{16} \\ x \equiv 1 \pmod 9 \end{cases} (1), \quad \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{16} \\ x \equiv -1 \pmod 9 \end{cases} (2),$$
$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{16} \\ x \equiv 1 \pmod 9 \end{cases} (3), \quad \begin{cases} x \equiv -1 \pmod{16} \\ x \equiv -1 \pmod 9 \end{cases} (4),$$
$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{16} \\ x \equiv 1 \pmod 9 \end{cases} (5), \quad \begin{cases} x \equiv 7 \pmod{16} \\ x \equiv -1 \pmod 9 \end{cases} (6),$$
$$\begin{cases} x \equiv -7 \pmod{16} \\ x \equiv 1 \pmod 9 \end{cases} (7), \quad \begin{cases} x \equiv -7 \pmod{16} \\ x \equiv -1 \pmod 9 \end{cases} (8).$$

Cả 8 hệ đều ứng với $k = 2$ và

$$N_1 = 9 \equiv 9 \pmod{16} \Rightarrow N_1^{-1} = 9 \Rightarrow N_1N_1^{-1} = 81;$$
$$N_2 = 16 \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow N_2^{-1} = 4 \Rightarrow N_2N_2^{-1} = 64.$$

Vậy PT ban đầu có tất cả 8 nghiệm sau

$(1): x = 1.81 + 1.64 = 145 \equiv 1 \pmod{144};$
$(2): x = 1.81 + (-1).64 = 17 \equiv 17 \pmod{144};$
$(3): x = (-1).81 + 1.64 = -17 \equiv 127 \pmod{144};$
$(4): x = (-1).81 + (-1).64 = -145 \equiv 143 \pmod{144};$
$(5): x = 7.81 + 1.64 = 631 \equiv 55 \pmod{144};$
$(6): x = 7.81 + (-1).64 = 503 \equiv 71 \pmod{144};$
$(7): x = (-7).81 + 1.64 = -503 \equiv 73 \pmod{144};$
$(8): x = (-7).81 + (-1).64 = -631 \equiv 89 \pmod{144}.$

Nhận xét. Như vậy dựa vào định lý thặng dư Trung Hoa ta có thể đếm được số nghiệm của một PT đồng dư. Chúng ta hãy cụ thể hóa ý tưởng này thông qua Thí dụ 3 và 4 sau đây.

Thí dụ 3. *Cho m là một số nguyên dương. Tìm số nghiệm của PT: $x^2 \equiv x \pmod m$.*

Lời giải. Giả sử $m = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ $(p_i \in \wp, \alpha_i \in \mathbb{N}^*)$.

Ta có $x^2 \equiv x \pmod m \Leftrightarrow x^2 \equiv x \left(\bmod p_i^{\alpha_i}\right) (\forall i = 1, 2, ..., k)$
$\Leftrightarrow x(x-1) \equiv 0 \left(\bmod p_i^{\alpha_i}\right) (\forall i = 1, 2, ..., k).$

Vì $(x, x-1) = 1$ nên PT $x(x-1) \equiv 0 \left(\bmod p_i^{\alpha_i}\right)$ có hai nghiệm là $x \equiv 0 \left(\bmod p_i^{\alpha_i}\right)$ và $x \equiv 1 \left(\bmod p_i^{\alpha_i}\right)$.

Theo định lí thặng dư Trung Hoa, với mỗi bộ $a_1, a_2, ..., a_k$, HPT $x \equiv a_i \left(\bmod p_i^{\alpha_i}\right), i = 1, 2, ..., k$ luôn có nghiệm duy nhất modulo m. Do mỗi PT

$x(x-1)\equiv 0\left(\bmod p_i^{\alpha_i}\right)$ đều có hai nghiệm modulo $p_i^{\alpha_i}$ nên PT đã cho có 2^k nghiệm.

Thí dụ 4 (VMO 2008). *Cho $m=2007^{2008}$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương $n\le m$ thoả mãn điều kiện:*

$$n(2n+1)(5n+2)\,\vdots\, m.$$

Lời giải. Ta có $m=9^{2008}.223^{2008}=3^{4016}.223^{2008}=n_1.n_2$.

Do $(10, m)=1$ suy ra $n(2n+1)(5n+2)\,\vdots\, m$

$\Leftrightarrow m|10.5.2n(2n+1)(5n+2)=10n(10n+5)(10n+4)$

$\Leftrightarrow m|x(x+5)(x+4)$, trong đó $x=10n$. Ta có:

$$m|x(x+5)(x+4)\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv 0(\bmod 10)\\ x(x+5)(x+4)\equiv 0(\bmod n_1)\\ x(x+5)(x+4)\equiv 0(\bmod n_2)\end{cases}.$$

Vì 3 không là ước chung của x, $x+4$, $x+5$ nên $x(x+5)(x+4)\equiv 0 \pmod{n_1}$ khi và chỉ khi

$x\equiv r_1 \pmod{n_1}$ ở đó $r_1\in\{0,-4,-5\}$.

Tương tự $x(x+5)(x+4)\equiv 0 \pmod{n_2}$ khi và chỉ khi

$x\equiv r_1 \pmod{n_1}$ ở đó $r_1\in\{0,-4,-5\}$.

Do đó $m|n(2n+5)(5n+4)$

$\Leftrightarrow x\equiv 0 \pmod{10}; x\equiv r_1 \pmod{n_1}; x\equiv r_2 \pmod{n_2}$. (1)

Ta tìm số các số nguyên dương $x\le 10n_1.n_2$ thoả mãn (1). Với mỗi cách chọn $r_1\in\{0,-4,-5\}$ và $r_2\in\{0,-4,-5\}$, theo định lí thặng dư Trung Hoa ta có duy nhất một số $x\le 10n_1.n_2$ thoả mãn (1). Vậy có 9 số thoả mãn điều kiện bài ra.

Bài toán tổng quát. *Cho $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ $\left(p_i\in\wp,\alpha_i\in\mathbb{N}^*\right)$ và $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Khi đó PT đồng dư $f(x)\equiv 0 \pmod m$ có nghiệm khi và chỉ khi tất cả các PT đồng dư $f(x)\equiv 0\left(\bmod p_i^{\alpha_i}\right), i=\overline{1,k}$ có nghiệm. Nếu gọi số nghiệm của PT $f(x)\equiv 0\left(\bmod p_i^{\alpha_i}\right)$, $i=\overline{1,k}$ là n_i thì PT $f(x)\equiv 0 \pmod m$ có đúng $n_1n_2...n_k$ nghiệm modulo m.*

III. ÁP DỤNG ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN CHỨNG MINH SỰ TỒN TẠI TRONG SỐ HỌC

Thí dụ 1. *Cho $p,q\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},(p,q)=1$. Chứng minh rằng tồn tại $k\in\mathbb{Z}$ sao cho $(pq-1)^nk+1$ là hợp số với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.*

Lời giải. Do $(p, q)=1$, theo định lí thặng dư Trung Hoa $\exists k\in\mathbb{N}^*$ thoả mãn HPT đồng dư

$$\begin{cases}k\equiv 1 \pmod p\\ k\equiv -1 \pmod q\end{cases}.$$

Nếu $n\,\vdots\,2\Rightarrow(pq-1)^n\equiv 1 \pmod q\Rightarrow(pq-1)^nk\equiv -1 \pmod q$

$\Rightarrow(pq-1)^nk+1\equiv 0 \pmod q$.

Nếu $n\not\vdots\, 2\Rightarrow(pq-1)^n\equiv -1 \pmod q$

$\Rightarrow(pq-1)^nk\equiv -1 \pmod q\Rightarrow(pq-1)^nk+1\equiv 0 \pmod q$.

Vậy $(pq-1)^nk+1$ là hợp số với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán để $(pq-1)^nk+1$ là hợp số thì ta cần chỉ ra rằng khi nào $(pq-1)^nk+1$ chia hết cho p hoặc q (qua việc xét tính chẵn lẻ của n), từ đó ta xây dựng được HPT đồng dư: $\begin{cases}k\equiv 1 \pmod p\\ k\equiv -1 \pmod q\end{cases}$.

Thí dụ 2 (Nordic 1998).

1) Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho tồn tại dãy $(x_1, x_2,..., x_n)$ là hoán vị của $(1, 2,..., n)$ thoả mãn: $x_1+x_2+\dots+x_k\,\vdots\, k$ với mọi $k=1,2,...,n$.

2) Tồn tại hay không một dãy vô hạn $x_1, x_2, x_3,...$ là hoán vị của $\mathbb{N}$ và thoả mãn: $x_1+x_2+\dots+x_k\,\vdots\, k$ với mọi $k\in\mathbb{N}$?

Lời giải. 1) $n=1$ thoả mãn, $n=3$ thoả mãn với dãy tương ứng là 1, 3, 2.

Giả sử $n\in\mathbb{N}^*$ thoả mãn đề bài khi đó ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}\,\vdots\, n\Rightarrow n \text{ là số lẻ.}$$

Giả sử $n\ge 5$, đặt $m=\dfrac{n+1}{2}$.

Theo gt $\sum_{i=1}^{n-1}x_i=\sum_{i=1}^{n-1}i=mn-x_n\,\vdots\, n-1$ nên suy ra

$x_n\equiv mn\equiv m \pmod{n-1}$, $1\le x_n\le n\Rightarrow x_n=m$.

Tương tự ta có $\sum_{i=1}^{n-2}x_i=m(n-1)-x_{n-1}\,\vdots\, n-2$

$\Rightarrow x_{n-1}\equiv m(n-1)\equiv m \pmod{n-2}$, $1\le x_{n-1}\le n$

$\Rightarrow x_{n-1}=m=x_n$, vô lý.

Vậy chỉ có $n=1$, $n=3$ thoả mãn điều kiện đề bài.

2) Ta sẽ xây dựng một dãy $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ thoả mãn điều kiện đề bài. Lấy $x_1=1, x_2=3, x_3=2$.

Giả sử $x_1, x_2,..., x_N$ là một dãy thoả mãn điều kiện $x_1+x_2+\dots+x_k\,\vdots\, k$ với mọi $k=1,2,...,N$.

Đặt $x_1+x_2+...+x_N=s$. Gọi n là số nguyên dương bé nhất không nằm trong dãy $x_1, x_2,..., x_N$.

Do $(N+1, N+2)=1$ nên theo định lí thặng dư Trung Hoa tồn tại một số nguyên $m>x_1, x_2,..., x_N$ thoả mãn

$$\begin{cases}m\equiv -s\left(\bmod (N+1)\right)\\ m\equiv -s-n\left(\bmod (N+2)\right)\end{cases}.$$

Đặt $x_{N+1} = m$, $x_{N+2} = n$, ta có dãy $x_1, x_2,..., x_N, x_{N+1}, x_{N+2}$ thoả mãn các điều kiện của bài toán vì

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N + x_{N+1} = s + m \vdots (N+1);$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{N+1} + x_{N+2} = s + m + n \vdots (N+2)$$

và $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \vdots k$ với mọi $k = 1, 2, ..., N$.

Do đó $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \vdots k$ với mọi $k = 1, 2, ..., N+2$ hiển nhiên dãy $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ xây dựng như trên thoả mãn điều kiện đề bài.

Thí dụ 3 (BalKan 2000). *Cho A là một tập hợp khác rỗng các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m sao cho mọi phần tử của tập mA đều là lũy thừa của một số tự nhiên với số mũ lớn hơn 1.*

Lời giải. Giả sử $A = \{a_1, a_2,..., a_k\}$. Gọi $p_1, p_2,..., p_N$ là tất cả các ước số nguyên tố của số $\prod_{i=1}^{k} a_i$. Với mỗi $i = 1, 2,..., k$ tồn tại các số nguyên không âm $\alpha_{i,j}$ sao cho $a_i = \prod_{j=1}^{N} p_j^{\alpha_{i,j}}$. Gọi $q_1, q_2,..., q_k$ là các số nguyên tố phân biệt. Theo định lý thặng dư Trung Hoa, với mỗi $j \in \{1, 2,..., N\}$ tồn tại $\beta_j \equiv -\alpha_{i,j} \pmod{q_i}$, $i = 1, 2,..., k$.

Đặt $m = \prod_{j=1}^{N} p_j^{\beta_j}$. Khi đó

$$ma_i = \prod_{j=1}^{N} p_j^{\alpha_{i,j}+\beta_j} = \left[\prod_{j=1}^{N} p_j^{\frac{\alpha_{i,j}+\beta_j}{q_i}}\right]^{q_i}$$ là lũy thừa của một số tự nhiên với số mũ lớn hơn 1. Ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 4. *Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số k nguyên dương chẵn sao cho với mỗi số nguyên tố p thì số $p^2 + k$ là hợp số.*

Lời giải. Nếu $p = 2$ thì $p^2 + k$ là hợp số với mọi số k chẵn.

Nếu $p > 3$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Suy ra với mọi k chẵn và $k \equiv 2 \pmod 3$ thì $p^2 + k$ là hợp số (bội của 3).

Nếu $p = 3$ thì $p^2 + k = 9 + k \equiv 0 \pmod 5$ với $k \equiv 1 \pmod 5$.

Do đó, gọi k là số nguyên dương thoả mãn HPT đồng dư

$$\begin{cases} k \equiv 0 \pmod 2 \\ k \equiv 2 \pmod 3 \\ k \equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$$

thì $p^2 + k$ là hợp số với mọi số nguyên tố p (đpcm).

Thí dụ 5 (mathlink.ro). *Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ không có nghiệm nguyên sao cho với mọi số nguyên dương n, tồn tại số nguyên dương x thoả mãn $P(x) \vdots n$.*

Lời giải. Xét đa thức $P(x) = (2x + 1)(3x + 1)$. Với mỗi số nguyên dương n, ta biểu diễn n dưới dạng $n = 2^k(2m + 1)$.

Vì $(3, 2^k) = 1$ nên tồn tại a sao cho $3a \equiv -1 \pmod{2^k}$.

Vì $(2, 2m + 1) = 1$ nên tồn tại b sao cho

$$2b \equiv -1 \pmod{2m+1}.$$

Vì $(2^k, 2m + 1) = 1$ nên theo định lí thặng dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên x là nghiệm của HPT đồng dư:

$$\begin{cases} x \equiv -a \pmod{2^k} \\ x \equiv -b \pmod{2m+1} \end{cases}.$$

Theo lập luận trên $P(x) = (2x+1)(3x+1) \vdots n$ (đpcm).

Thí dụ 6. *Cho $n, h \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại n số tự nhiên liên tiếp thỏa mãn mỗi số đều có ít nhất h ước số nguyên tố phân biệt.*

Lời giải. Do tập hợp các số nguyên tố là vô hạn nên ta có thể chọn nh số nguyên tố phân biệt

$$p_1 < p_2 < ... < p_h < ... < p_{nh}.$$

Theo định lý thặng dư Trung Hoa thì tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ là nghiệm của HPT

$$\begin{cases} k \equiv -1 \pmod{p_1 p_2 \cdots p_h} \\ k \equiv -2 \pmod{p_{h+1} p_{h+2} \cdots p_{2h}} \\ \ldots \\ k \equiv -i \pmod{p_{(i-1)h+1} p_{(i-1)h+2} \cdots p_{ih}} \\ \ldots \\ k \equiv -n \pmod{p_{(n-1)h+1} p_{(n-1)h+2} \cdots p_{nh}} \end{cases}.$$

Từ đó ta có n số tự nhiên liên tiếp là $k + 1$, $k + 2$,..., $k + n$ thỏa mãn mỗi số đều có ít nhất h ước số nguyên tố phân biệt.

Thí dụ 7 (HSG Trại hè Hùng Vương 2014). *Chứng minh rằng tồn tại 16 số nguyên dương liên tiếp sao cho không có số nào trong 16 số đó có thể biểu diễn được dưới dạng $|7x^2 + 9xy - 5y^2|$ $(x, y \in \mathbb{Z})$.*

Lời giải. Đặt $|7x^2 + 9xy - 5y^2| = A$

$$\Rightarrow 28A = \left|(14x + 9y)^2 - 13.17y^2\right|.$$

Ta xét số dư khi chia A cho 9,13 và 17 thu được

- A chia cho 9 không có số dư là 3, 6;
- A chia cho 13 không có số dư là 1, 3, 4, 9, 10, 12;
- A chia cho 17 không có số dư là 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16.

Theo định lý thặng dư Trung Hoa tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn: $\begin{cases} n \equiv -4 \pmod 9 \\ n \equiv -2 \pmod{13} \\ n \equiv 0 \pmod{17} \end{cases}$. Rõ ràng

• $n+7$; $n+10$ không có dạng
$$\left|7x^2+9xy-5y^2\right| \ (x,y\in\mathbb{Z}),$$

• $n+3$; $n+5$; $n+6$; $n+11$; $n+12$; $n+14$ không có dạng $\left|7x^2+9xy-5y^2\right| \ (x,y\in\mathbb{Z})$,

• $n+1$; $n+2$; $n+4$; $n+8$; $n+9$; $n+13$; $n+15$; $n+16$ không có dạng $\left|7x^2+9xy-5y^2\right| \ (x,y\in\mathbb{Z})$.

Suy ra tồn tại 16 số nguyên dương liên tiếp $n+1$; $n+2$; ...; $n+15$; $n+16$ thỏa mãn.

IV. ÁP DỤNG TRONG CÁC BÀI TOÁN VỀ CHỨNG MINH CHIA HẾT VÀ TÌM SỐ NGUYÊN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Thí dụ 1 (Shortlisted IMO 1998). *Xác định tất cả $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho với n này tồn tại $m\in\mathbb{Z}$ sao cho:*
$$2^n-1\,\big|\,m^2+9.$$

Lời giải. Ta chứng minh $2^n-1\,\big|\,m^2+9 \Leftrightarrow n=2^s\ (s\in\mathbb{N}^*)$.

Điều kiện cần. Đặt $n=2^s t\ \left(s\in\mathbb{N}, t\in\mathbb{N}^*, (t,2)=1\right)$.

Nếu $t\ge 3$, ta có $2^t-1\,\big|\,2^n-1 \Rightarrow 2^t-1\,\big|\,m^2+9$.

Ta có $2^t-1\equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow \exists p\in\wp\ (p\ne 3): p\equiv -1 \pmod 4$ và $p\,\big|\,2^t-1$ (vì $2^t-1\ne 3^k$ với $t\ge 3$)

$\Rightarrow p\,\big|\,m^2+9=m^2+3^2 \Rightarrow p\,\big|\,3 \Rightarrow p=3$ (mâu thuẫn).

Do đó $t=1$ tức là $n=2^s$.

Điều kiện đủ. Với $n=2^s$, ta có $2^n-1=2^{2^s}-1$
$$=(2-1)(2+1)\left(2^2+1\right)\left(2^{2^2}+1\right)\ldots\left(2^{2^{s-1}}+1\right).$$

Từ đó $2^n-1\,\big|\,m^2+9 \Rightarrow 2^{2^t}+1\,\big|\,m^2+9, \forall t=\overline{1,s-1}$.

Mà $\left(2^{2^\alpha}+1, 2^{2^\beta}+1\right)=1\ (\alpha\ne\beta)$ nên theo định lí thặng dư Trung Hoa HPT $x\equiv 2^{2^t}\left(\bmod\, 2^{2^{t+1}}+1\right)$ với $t=\overline{0,s-2}$ có nghiệm. Do đó tồn tại
$$c\in\mathbb{Z}: c\equiv 2^{2^t}\left(\bmod\, 2^{2^{t+1}}+1\right)$$
$$\Rightarrow c^2+1\equiv 0\left(\bmod\, 2^{2^{t+1}}+1\right), \forall t=\overline{0,s-2}.$$

Từ đây suy ra $2^n-1\,\big|\,9\left(c^2+1\right)=m^2+9$, trong đó $m=3c$.

Nhận xét. Cái khó của bài toán là dự đoán dạng của n (thông qua một số thí dụ cơ sở). Với điều kiện đủ ta cần xây dựng được HPT đồng dư có $m_1, m_2, \ldots, m_s$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

Thí dụ 2. *Tìm tất cả các số nguyên dương a sao cho: $2^n-n^2\,\big|\,a^n-n^a$, với mọi số n nguyên dương $n\ge 5$.*

Lời giải. Chọn số nguyên tố p sao cho
$$p>\max\left\{2,\ a,\ \left|a^2-2^a\right|\right\}.$$

Theo định lý thặng dư Trung Hoa, tồn tại $n\in\mathbb{N}^*, n\ge 5$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} n\equiv 2 \pmod p \\ n\equiv 2 \pmod{p-1}\end{cases}$.

Khi đó $2^n-n^2\equiv 2^2-2^2\equiv 0 \pmod p \Rightarrow p\,\big|\,a^n-n^a$.

Mà $a^n-n^a\equiv a^2-2^a \pmod p \Rightarrow p\,\big|\,a^2-2^a$.

Do $p>\left|a^2-2^a\right|$ nên $a^2-2^a=0 \Rightarrow a\in\{2;4\}$.

Thử lại $a=2$, $a=4$ thỏa mãn.

Thí dụ 3. *1) Cho số nguyên dương n không có ước chính phương khác 1. Chứng minh rằng nếu $a^n-1\,\vdots\, n$ thì $a^n-1\,\vdots\, n^2$.*

2) Tìm $n\in\mathbb{Z}^+, n>1$ có tính chất với mọi $a\in\mathbb{Z}^+$ nếu $a^n-1\,\vdots\, n$ thì $a^n-1\,\vdots\, n^2$.

Lời giải. 1) Nếu $n=p\in\wp, \forall a\in\mathbb{N}^*$ có $a^p-1\,\vdots\, p$
$\Leftrightarrow a^p-a+a-1\,\vdots\, p \Leftrightarrow a\equiv 1 \pmod p$. Từ đó
$$a^p-1=(a-1)\left(a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots+a+1\right)\equiv 0 \left(\bmod\, p^2\right).$$

Nếu $n=p_1.p_2\ldots p_k$ thì $a^n-1=a^{p_1p_2\ldots p_k}-1\,\vdots\, p_1p_2\ldots p_k$.

Ta có $\left(a^{\prod_{j\ne i}p_j}\right)^{p_i}-1\,\vdots\, p_i \Rightarrow \left(a^{\prod_{j\ne i}p_j}\right)^{p_i}-1\,\vdots\, p_i^2$

$\Rightarrow a^{p_1p_2\ldots p_k}-1\,\vdots\,\left(p_1p_2\ldots p_k\right)^2$ hay $a^n-1\,\vdots\, n^2$.

2) Ta chứng minh $n=2^\alpha p_1p_2\ldots p_k, 0\le\alpha\le 2, \alpha\in\mathbb{Z}$, $p_i\in\wp$, phân biệt, $(p_i,2)=1, i=\overline{1,k}$.

Điều kiện đủ. Ta chỉ cần xét $n=4p_1p_2\ldots p_k$, $p_i\in\wp, (p_i,2)=1$ là nghiệm của bài toán, $i=\overline{1,k}$ là đủ.

$A=a^{p_1p_2\ldots p_k}, a^n-1=A^4-1\,\vdots\, 4$, do A lẻ nên
$A^4-1=(A-1)(A+1)\left(A^2+1\right)\vdots\, 16 \Rightarrow a^n-1\,\vdots\, 4^2$.

$B=a^4, a^n-1=B^{p_1.p_2\ldots p_k}-1\,\vdots\, p_1p_2\ldots p_k$

$\Rightarrow a^n-1=B^{p_1.p_2\ldots p_k}-1\,\vdots\,\left(p_1p_2\ldots p_k\right)^2$ theo phần 1).

Mà $\left(4^2, p_1^2\ldots p_k^2\right)=1 \Rightarrow a^n-1\,\vdots\,\left(4p_1p_2\ldots p_k\right)^2=n^2$.

Điều kiện cần. Giả sử
$$n=p^\alpha q, p\in\wp, (p,2)=1, (q,2)=1,\ q,\alpha\in\mathbb{N}.$$

Lấy $a=pq+1 \Rightarrow a^n-1=a^{p^\alpha q}-1=p^{\alpha+1}h, (h,p)=1$ (chứng minh bằng quy nạp).

Do đó $\begin{cases} a^n - 1 \vdots a - 1 \vdots q \\ a^n - 1 \vdots p^{\alpha} \end{cases}$.

Do $a^n - 1 \vdots n \Rightarrow a^n - 1 \vdots n^2 \Rightarrow p^{\alpha+1} h \vdots p^{2\alpha} q^2$

$\Rightarrow \alpha + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 1$. Vậy số mũ của α là 0 hoặc 1.

Xét $p = 2$, giả sử $n = 2^{\alpha} t, t \in \mathbb{N}, (t, 2) = 1$ thì

$$5^{2t} - 1 = 25^t - 1 = 8m,\ m \in \mathbb{N}, m \text{ lẻ}.$$

Theo định lý thặng dư Trung Hoa tồn tại số nguyên dương a là nghiệm HPT đồng dư $\begin{cases} a \equiv 5 (\operatorname{mod} 16) \\ a \equiv 1 (\operatorname{mod} t) \end{cases}$.

Đặt $A = a^t \Rightarrow a^n - 1 = A^{2^{\alpha}} - 1 =$

$\left(A^2 - 1\right)\left(A^2 + 1\right)...\left(A^{2^i} + 1\right)....\left(A^{2^{\alpha-1}} + 1\right) = 2^{\alpha+2} V, (V, 2) = 1$

vì $A^2 - 1 = a^{2t} - 1 \equiv 25^t - 1 \equiv 8 (\operatorname{mod} 16)$,

$$A^{2^i} + 1 \equiv 2 (\operatorname{mod} 4),\ \forall i = \overline{1, s-1}.$$

Do $a^n - 1 \vdots n$ thì $a^n - 1 \vdots n^2$, tức là

$2^{\alpha+2} V \vdots 2^{2\alpha} t^2 \Rightarrow \alpha + 2 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 2 \Leftrightarrow \alpha \in \{0, 1, 2\}$.

Vậy $n = 2^{\alpha} p_1 p_2 ... p_k, 0 \leq \alpha \leq 2, \alpha \in \mathbb{Z}, p_i \in \wp$ phân biệt, $(p_i, 2) = 1, i = \overline{1, k}$.

Nhận xét. Cái khó của bài toán nằm ở phần 2 với điều kiện cần, để giải quyết được vấn đề này ta cần nắm vững số mũ đúng của một số với một số nguyên tố và chọn được bộ $a_2, ..., a_k$ hợp lý của HPT đồng dư.

Thí dụ 4 (Selection tests for the BMO and IMO Romanian teams 2006). *Cho a, b là các số nguyên dương, sao cho với mỗi số nguyên dương n ta có* $a^n + n \mid b^n + n$. *Chứng minh rằng* $a = b$.

Lời giải. Giả sử $a \neq b$. Ta có khi $n = 1$ thì $a + 1 \mid b + 1 \Rightarrow b > a$. Gọi p là số nguyên tố: $p > b$.

Theo định lí thặng dư Trung Hoa tồn tại số nguyên dương n là nghiệm HPT đồng dư $\begin{cases} n \equiv 1 (\operatorname{mod}(p-1)) \\ n \equiv -a (\operatorname{mod} p) \end{cases}$,

chọn $n = (a + 1)(p - 1) + 1$. Theo định lí Fermat,

$$a^n = a^{(a+1)(p-1)+1} = a\left(\underbrace{a^{p-1}...a^{p-1}}_{a+1 \text{ lần}}\right) \equiv a (\operatorname{mod} p)$$

$\Rightarrow a^n + n \equiv a + n \equiv 0 \ (\operatorname{mod} p) \Leftrightarrow p \mid a^n + n \Rightarrow p \mid b^n + n$ (1).

Mà theo định lí Fermat, $b^n + n \equiv b - a \ (\operatorname{mod} p)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $p \mid b - a$ vô lí. Vậy điều giả sử $a \neq b$ là sai, do đó $a = b$.

Thí dụ 5. *Chứng minh rằng mọi số N nguyên dương là tích của 2015 số nguyên tố lẻ phân biệt đều là ước của vô số số có dạng* $a^{a+1} + (a+1)^a$, *với a là số nguyên dương.*

Lời giải. *Nhận xét*: với số p là số nguyên tố lẻ, tồn tại $a \in \mathbb{N}^*$ thoả mãn $p \mid a^{a+1} + (a+1)^a$. Thật vậy

Chọn $\begin{cases} a \equiv -2 \ (\operatorname{mod} p) \\ a + 1 \equiv 0 \ (\operatorname{mod} p-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv -2 \ (\operatorname{mod} p) \\ a \equiv -1 \ (\operatorname{mod} p-1) \end{cases}$. (*)

Theo định lý thặng dư Trung Hoa hệ (*) có nghiệm

$$a = p - 2 + kp(p-1), k \in \mathbb{N}^*.$$

Khi $N = p_1 p_2 ... p_{2015}$, p_j là số nguyên tố lẻ. Theo nhận xét trên với mỗi $p_j \left(j = \overline{1, 2015}\right)$ luôn tồn tại a_j mà $p_j \left| a_j^{a_j+1} + \left(a_j + 1\right)^{a_j}\right.$. Xét HPT đồng dư

$$a \equiv a_j \left(\operatorname{mod} p_j\right) \left(j = \overline{1, 2015}\right)$$

theo định lý thặng dư Trung Hoa hệ luôn tồn tại vô hạn số a như vậy (đpcm).

Nhận xét. Qua hai Thí dụ 4 và 5 cho ta thấy một lời giải đẹp nếu ta biết cách sử dụng thành thạo Định lý thặng dư Trung Hoa.

Thí dụ 6. *Cho n là số nguyên dương lẻ và n > 3. Gọi k, t là các số nguyên dương nhỏ nhất để các số kn + 1 và tn đều là số chính phương. Chứng minh rằng n là nguyên tố khi và chỉ khi* $\min\{k, t\} > \frac{n}{4}$.

Lời giải. $(\Rightarrow)$ Giả sử n là số nguyên tố. Khi đó $n \mid tn$ và tn là số chính phương nên $n^2 \mid tn \Rightarrow n \mid t$, điều này dẫn đến $t \geq n > \frac{n}{4}$. Mặt khác, đặt $u^2 = kn + 1$

$\Rightarrow u^2 \equiv 1 (\operatorname{mod} n),\ n \in \wp \quad \Rightarrow (u+1) \vdots n$ hoặc $(u-1) \vdots n \Rightarrow u - 1 \geq n$ (do $u > 1$) $\Rightarrow kn + 1 \geq (n-1)^2$

$\Rightarrow k \geq n - 2 \Rightarrow k \geq \frac{n}{4}$. Từ hai điều trên có $\min\{k, t\} > \frac{n}{4}$.

$(\Leftarrow)$ TH1. n chỉ có một ước số nguyên tố.

Đặt $n = p^{\alpha} (p \in \wp, p \geq 3)$. Nếu α chẵn, ta lấy $t = 1 < \frac{n}{4} \Rightarrow tn = p^{\alpha}$ là số chính phương mâu thuẫn với giả thiết. Nếu α lẻ, $\alpha \geq 3$, ta lấy $t = p < \frac{p^{\alpha}}{4} = \frac{n}{4} \Rightarrow tn = p^{\alpha+1}$ là số chính phương mâu thuẫn với giả thiết. Do đó $\alpha = 1 \Rightarrow n = p \in \wp$.

TH2. n có ít nhất hai ước số nguyên tố phân biệt. Khi đó n có thể biểu diễn dưới dạng

$n = p^{\alpha} m \ \left(p \in \wp, p \geq 3, m \in \mathbb{N}^*,\ (m, 2) = (m, p) = 1\right)$.

Theo định lý thặng dư Trung Hoa tồn tại $s \in \mathbb{Z}$ sao cho

$\begin{cases} s \equiv 1 \pmod{p^{\alpha}} \\ s \equiv -1 \pmod{m} \end{cases}$, suy ra $n \mid s^2 - 1$. Hơn nữa, có thể chọn $s \in \mathbb{Z}$ sao cho $|s| \le \dfrac{n}{2}$. Vì $s \not\equiv 1 \pmod{m}$ và $s \not\equiv -1 \pmod{p^{\alpha}}$ dẫn đến $|s| \neq -1$ tức là $s^2 \neq 1$. Bây giờ ta lấy $k = \dfrac{s^2 - 1}{n} \Rightarrow k \in \mathbb{N}^*$. Mặt khác $kn + 1 = s^2$ là số chính phương và $k = \dfrac{s^2 - 1}{n} < \dfrac{s^2}{n} \le \dfrac{\frac{n^2}{4}}{n} = \dfrac{n}{4}$, mâu thuẫn với $\min\{k, t\} > \dfrac{n}{4}$. Do đó trường hợp này không xảy ra. Vậy $n = p \in \wp$.

V. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Giải HPT đồng dư $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$ (với $0 < x < 120$).

3. Cho các số nguyên dương n, h, d. Chứng minh rằng luôn tồn tại một cấp số cộng n số hạng có công sai d, sao cho mọi số hạng của cấp số cộng đều có ít nhất h ước số nguyên tố phân biệt.

4 (Korea MO 1999). Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2n - 1$ chia hết cho 3 và tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ sao cho $4m^2 + 1$ chia hết cho $\dfrac{2n-1}{3}$.

5. Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Giả sử rằng có một tập hữu hạn các số nguyên tố $A = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ sao cho với mọi số nguyên a luôn tồn tại số $p_i \in A$ sao cho $f(a)$ chia hết cho p_i. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên tố p sao cho $f(x)$ chia hết cho p với mọi số nguyên x.

6. Cho các số nguyên dương a, b. Chứng minh rằng luôn tồn tại m số liên tiếp của dãy số $a + b, a + 2b, a + 3b, ..., a + nb, ...$ là hợp số.

7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, luôn tồn tại tập hợp S gồm n phần tử sao cho bất kì tập con nào của S cũng có tổng các phần tử là lũy thừa với số mũ lớn hơn 1 của một số tự nhiên.

8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, luôn tồn tại dãy n số tự nhiên liên tiếp sao cho bất kì số nào trong dãy cũng đều có ước dạng $2^k - 1$, với k là số tự nhiên lớn hơn 1.

9. Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên có bậc nguyên dương, sao cho $f(k)$ là số nguyên tố với mọi số nguyên dương k.

10 (Czech-Slovak 1997). Chứng minh rằng tồn tại một dãy số tăng $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ các số tự nhiên sao cho với mọi $k \in \mathbb{N}$, dãy $\{k + a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ chỉ chứa hữu hạn các số nguyên tố.

11. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương a thỏa mãn các điều kiện sau

1) tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}$, $(x, y) = 1$ sao cho $a^2 = x^3 + y^3$,

2) tồn tại $b \in \mathbb{Z}$ sao cho $b^2 + 3$ chia hết cho $a^2(a^2 + 3)$.

12. Cho $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ là n đa thức với hệ số nguyên khác 0. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên sao cho với mọi $i = \overline{1;n}$ ta luôn có $P(x) + f_i(x)$ là đa thức bất khả quy trên $\mathbb{Z}$.

13 (Bulgaria TST 2003). Ta gọi một tập hợp các số nguyên dương C là tốt nếu với mọi số nguyên dương k thì tồn tại a, b khác nhau trong C sao cho $(a + k, b + k) > 1$. Giả sử ta có một tập tốt mà tổng các phần tử trong đó bằng 2003. Chứng minh rằng ta có thể loại đi một phần tử c trong C sao cho tập còn lại vẫn là tập tốt.

14. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ($n \ge 2$), luôn tồn tại hai số nguyên dương a, b sao cho $(a + i, b + j) > 1$, $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n - 1\}$.

15. Ta gọi một hình vuông là hình vuông tốt, nếu nó có 4 đỉnh là các điểm nguyên, đồng thời đoạn thẳng nối tâm O với tất cả các điểm nguyên trên biên và trong hình vuông đó chứa ít nhất một điểm nguyên khác hai đầu mút. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n đều tồn tại một hình vuông tốt dạng $n \times n$.

16. Tìm số nguyên dương n sao cho với mọi hệ thặng dư thu gọn n là $\{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}\}$ ta có

$$a_1 a_2 ... a_{\varphi(n)} \equiv -1 \pmod{n}.$$

17 (USA-TST 2009). Chứng minh rằng tồn tại một dãy số tăng $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ các số tự nhiên sao cho với mọi n thì $a_1 a_2 ... a_n - 1$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

18 (Moldova TST 2009).

a) Chứng minh rằng tập các số nguyên có thể phân hoạch thành các cấp số cộng với công sai khác nhau.

b) Chứng minh rằng tập các số nguyên không thể viết được dưới dạng hợp của các cấp số cộng với công sai đôi một nguyên tố cùng nhau.

19. Cho số nguyên dương $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau. Tìm số nghiệm của PT đồng dư $x^2 + x \equiv 0 \pmod{n}$.

20. Cho tập $A_n = \{a \in \mathbb{N} \mid 1 \le a \le n, (a, n) = 1\}$. Tìm $|A_n|$.

21. Tồn tại hay không số nguyên dương n để $n.2^{2^{2015}} - n - 81$ là số chính phương?

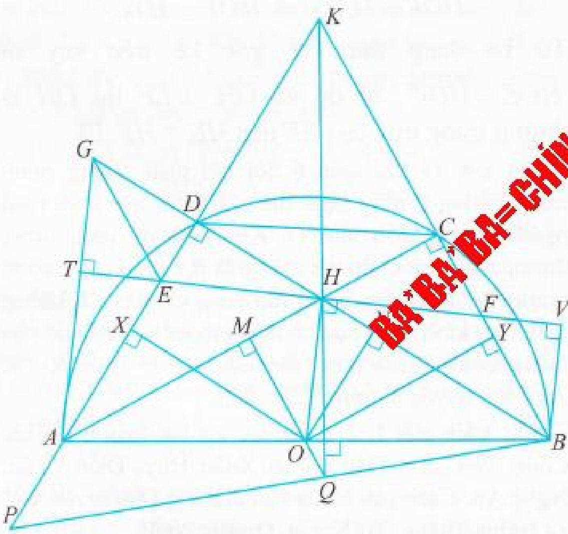
22. Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m thỏa mãn hệ đồng dư

$$\begin{cases} 2^m \equiv 2015 \pmod{3^n} \\ 2^m \equiv 3^{2015} \pmod{2^n} \end{cases}.$$

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

✪ BÀI TOÁN 6. *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và dây CD không là đường kính. Gọi H là giao điểm của các đường thẳng AC và BD. Đường thẳng qua H vuông góc với HO cắt AD, BC lần lượt tại E, F. Chứng minh: HE = HF.*

Lời giải. Khi giải bài toán này cần xét hai trường hợp: điểm H nằm trong đường tròn (O) (h.1) và điểm H nằm ngoài đường tròn (O) (h. 2).



Hình 1

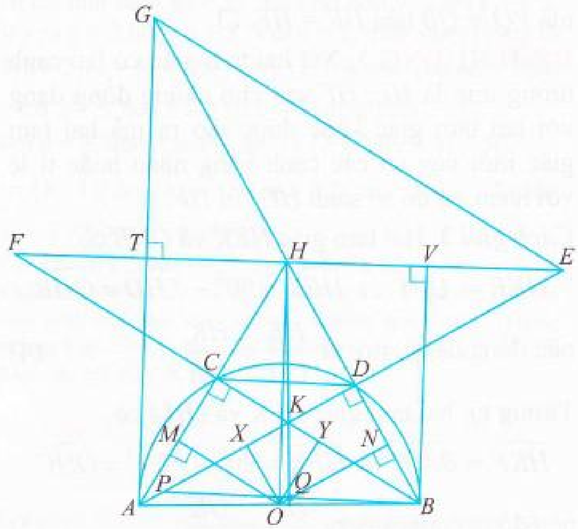
Từ giả thiết của bài toán có

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{OHE} = 90^0. \quad (1)$$

Giả sử các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm K thì K là trực tâm tam giác ABH nên

$$KH \perp AB. \quad (2)$$

Hai tam giác HAB và HDC có $\widehat{CAB} = \widehat{CDH}$ và $\widehat{HBA} = \widehat{HCD}$ nên đồng dạng, suy ra $\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{HD}{HC}$ hay là $HA.HC = HB.HD$. (3)



Hình 2

Những điều kiện này sẽ được sử dụng trong các cách giải dưới đây.

ĐỊNH HƯỚNG 1. Tìm hai tam giác bằng nhau chứa HE, HF là hai cạnh tương ứng.

Cách giải 1. Trên tia đối của tia HB lấy điểm G sao cho $HG = HB$. Từ đó và $AO = OB$ suy ra OH là đường trung bình của ΔABG nên $AG // OH$, mà $OH \perp EH$, do đó $AG \perp EH$.

Từ đó và (1) suy ra $EG \perp AH$ nên $EG // BC$.

Hai tam giác HEG và HFB có

$\widehat{EHG} = \widehat{FHB}$, $HG = HB$, $\widehat{EGH} = \widehat{FBH}$

nên $\Delta HEG = \Delta HFB$ (g.c.g), suy ra $HE = HF$.❐

ĐỊNH HƯỚNG 2. Tìm ba đường thẳng đồng quy sao cho chúng cắt hai đường thẳng song song và định ra trên hai đường này những đoạn thẳng bằng nhau, trong đó có $HE = HF$.

Cách giải 2. Ta thấy có ba đường thẳng đồng quy cắt đường thẳng HE tại ba điểm H, E, F là KE, KH, KF nên cần tạo thêm một đường thẳng song song với HE. Kẻ đường thẳng ON vuông góc với BD tại N và cắt đường thẳng HK tại Q.

Từ đó và (2) thì đường thẳng $BQ \perp OH$ và BQ đường thẳng AD tại P.

Trong tam giác ABP thì OQ là đường trung bình nên $PQ = QB$.

Xét các tam giác đồng dạng ta có

$$\frac{HE}{PQ} = \frac{HK}{KQ} = \frac{HF}{QB}$$

mà $PQ = QB$ nên $HE = HF$. ❐

ĐỊNH HƯỚNG 3. Xét hai tam giác có hai cạnh tương ứng là HE, HF sao cho chúng đồng dạng với hai tam giác khác được tạo ra mà hai tam giác mới này có các cạnh bằng nhau hoặc tỉ lệ với nhau, từ đó so sánh HE với HF.

***Cách giải* 3.** Hai tam giác HEK và OHB có

$\widehat{HKE} = \widehat{ABH}$ và $\widehat{HEK} = 90^0 - \widehat{EHD} = \widehat{OHB}$

nên đồng dạng, suy ra $\dfrac{HE}{OH} = \dfrac{HK}{OB}$. (4)

Tương tự, hai tam giác HFK và OHA có

$\widehat{HKF} = \widehat{BAH}$ và $\widehat{HFK} = 90^0 - \widehat{FHC} = \widehat{OHC}$

nên đồng dạng, suy ra $\dfrac{HF}{OH} = \dfrac{HK}{OA}$. (5)

Từ hai đẳng thức (4), (5) và $OA = OB$ dẫn đến $HE = HF$. ❐

***Cách giải* 4.** Kẻ $OM \perp AC$ tại M và kẻ $ON \perp BD$ tại N thì $OM // BC$ và $BC = 2OM$, còn $ON // AD$ và $AD = 2ON$.

Hai tam giác HBC và HAD có $\widehat{HBC} = \widehat{HAD}$ và $\widehat{BHC} = \widehat{AHD}$ nên đồng dạng, suy ra

$$\frac{HC}{HD} = \frac{BC}{AD} = \frac{OM}{ON}.$$

Hai tam giác vuông HED và OHN có

$\widehat{HED} = \widehat{OHN}$ nên đồng dạng, suy ra

$$\frac{HE}{OH} = \frac{HD}{ON}. \quad (7)$$

Tương tự, hai tam giác vuông HFC và OHM có $\widehat{HFC} = \widehat{OHM}$ nên đồng dạng, suy ra

$$\frac{HF}{OH} = \frac{HC}{OM}. \quad (8)$$

Từ (6), (7), (8) có $\dfrac{HE}{HF} = \dfrac{HD.OM}{HC.ON} = 1$ nên

$$HE = HF. \ ❐$$

***Cách giải* 5.** Kẻ $AT \perp EF$ tại T và kẻ $BV \perp EF$ tại V thì $AT // OH // BV$ mà $AO = OB$ nên $HT = HV$.

Hai tam giác vuông HED và HBV có

$\widehat{EHD} = \widehat{BHV}$ nên đồng dạng,

suy ra $\dfrac{HE}{HB} = \dfrac{HD}{HV}$ hay là $HE.HV = HB.HD$. (9)

Tương tự, hai tam giác vuông HFC và HAT có $\widehat{FHC} = \widehat{AHT}$ nên đồng dạng,

suy ra $\dfrac{HF}{HA} = \dfrac{HC}{HT}$ hay là $HF.HT = HA.HC$. (10)

Từ (3), (9), (10) và $HT = HV$ dẫn đến $HE = HF$. ❐

ĐỊNH HƯỚNG 3. Nếu $HE = HF$ mà $OH \perp EF$ thì OH là đường trung trực của EF, do đó ta xét các góc nội tiếp trong các đường tròn đường kính OE và OF để chứng tỏ $\widehat{HOE} = \widehat{HOF}$.

***Cách giải* 6.** Kẻ $OX \perp AD$ tại X và kẻ $OY \perp BC$ tại Y thì $DA = 2DX$ và $CB = 2CY$.

Hai tam giác vuông HDA và HCB có

$\widehat{AHD} = \widehat{BHC}$ nên đồng dạng,

suy ra $\dfrac{DH}{DA} = \dfrac{CH}{CB}$ do đó $\dfrac{DH}{DX} = \dfrac{CH}{CY}$.

Từ đó hai tam giác vuông HDX và HCY đồng dạng, suy ra $\widehat{HXD} = \widehat{HYC}$.

Xét hai đường tròn đường kính OE và OF có

$\widehat{HOE} = \widehat{HXD}$ và $\widehat{HOF} = \widehat{HYC}$.

Từ ba đẳng thức về góc kể trên suy ra $\widehat{HOE} = \widehat{HOF}$, từ đó và $OH \perp EF$ thì OH là đường trung trực của EF nên $HE = HF$. ❐

Nhận xét. 1) Bài toán 6 đòi hỏi phải chứng minh trong cả hai trường hợp: điểm H nằm trong và nằm ngoài đường tròn tâm O. Khi điểm H nằm trong đường tròn tâm O thì bài toán 6 là *Bài toán con bướm*, nhưng *bài toán con bướm* vẫn đúng khi dây AB không là đường kính. Bạn đọc có thể xem thêm *bài toán con bướm* trong *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học & Tuổi trẻ*, quyển 3, trang 128 - 129.

2) Các cách giải 1, 2, 3 của tác giả bài toán 6 là *Đậu Công Nho*, GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**. Cách giải 6 của bạn *Trương Quang An*, GV xã Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi.**

NGUYỄN VIỆT HẢI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải bài toán 8 sau đây về Toà soạn TH&TT trước ngày 30.12.2017.

Bài toán 8. Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$0 \le ab + bc + ca - 2abc \le \frac{7}{27}.$$

NGUYỄN TRỌNG THỌ

(*GV THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà Tĩnh*)

LÊ THỊ HỒNG HÀ

(*Chuyên Toán, Đại học Vinh*)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

Trong bài kỳ này là lời giải các bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 483, T9.2017.

Bài 9. (IMO 1961) *Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích là S. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}S.$$

Lời giải. Vì a, b, c là độ dài ba cạch của một tam giác nên $a+b-c>0; b+c-a>0; c+a-b>0$ và

$$a+b+c=(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b).$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\sqrt[3]{a+b+c}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(a+b+c)^4}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{16.\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{c+a-b}{2}\right)}.$$

Áp dụng công thức Heron ta được:

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^4} \ge 3\sqrt[3]{16.S^2} \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 3\sqrt{3}.4.S.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức quen thuộc

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 3\sqrt{3}.4.S \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}S.$$

Từ BĐT (*), dấu đẳng thức của bài toán xảy ra khi và chỉ khi: $a+b-c=b+c-a=c+a-b \Leftrightarrow a=b=c$, khi đó tam giác đã cho là tam giác đều. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Có nhiều cách giải bài trên và lời giải trên tuy không mới, nhưng lại là lời giải ngắn gọn, dễ hiểu đối với học sinh. Thông qua lời giải này có thể làm chặt hơn bài toán đã cho như sau:

Gọi a, b, c là độ dài ba cạch của một tam giác có diện tích là S. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \ge 4\sqrt{3}.S$$

Bài 10. (IMO 2001) *Cho x, y, z là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+8zx}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+8xy}} \ge 1.$$

Lời giải. Đặt $x=a^3, y=b^3, z=c^3$, BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\frac{a^6}{a^6+(2bc)^3}}+\sqrt{\frac{b^6}{b^6+(2ca)^3}}+\sqrt{\frac{c^6}{c^6+(2ab)^3}} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2bc}{a^2}\right)^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2ca}{b^2}\right)^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2ab}{c^2}\right)^3}} \ge 1.$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{1+\left(\frac{2bc}{a^2}\right)^3}=\sqrt{\left(1+\frac{2bc}{a^2}\right)\left(1-\frac{2bc}{a^2}+\frac{4b^2c^2}{a^4}\right)}$$

$$\le \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{2bc}{a^2}\right)+\left(1-\frac{2bc}{a^2}+\frac{4b^2c^2}{a^4}\right)\right]$$

$$=1+\frac{2b^2c^2}{a^4} \le 1+\frac{b^4+c^4}{a^4}=\frac{a^4+b^4+c^4}{a^4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2bc}{a^2}\right)^3}} \ge \frac{a^4}{a^4+b^4+c^4}. \quad (1)$$

Tương tự: $$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2ca}{b^2}\right)^3}} \ge \frac{b^4}{a^4+b^4+c^4}; \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2ab}{c^2}\right)^3}} \ge \frac{c^4}{a^4+b^4+c^4}. \quad (3)$$

Cộng theo vế các BĐT (1), (2), (3) ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2bc}{a^2}\right)^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2ca}{b^2}\right)^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2ab}{c^2}\right)^3}}$$

$$\geq \frac{a^4+b^4+c^4}{a^4+b^4+c^4}=1.$$

Vậy $\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+8zx}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+8xy}}\geq 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Nhận xét. Lời giải trên là khá tự nhiên, ngắn gọn, học sinh dễ hiểu được. Lời giải này khác với lời giải trong đáp án của kỳ thi và cũng khác với các lời giải đã đăng trên một số sách báo trong nước. Từ bài này có thể mở rộng thành hai bài mới như sau

1) Cho x, y, z là ba số thực dương và $0\leq \alpha\leq 1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}-\alpha x}+\frac{y}{\sqrt{y^2+8zx}-\alpha y}+\frac{z}{\sqrt{z^2+8xy}-\alpha z}\geq \frac{3}{3-\alpha}.$$

2) Cho x, y, z là ba số thực dương và $p,q\in\mathbb{Z}^+, p\geq 2q$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt[p]{(x^2+8yz)^q}}+\frac{y}{\sqrt[p]{(y^2+8zx)^q}}+\frac{z}{\sqrt[p]{(z^2+8xy)^q}}\geq (x+y+z)^{\frac{p-2q}{p}}.$$

NGÔ VĂN THÁI

(GV THPT Phạm Quang Thẩm, Vũ Thư, Thái Bình)

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 13. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho trong k số tùy ý của tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ luôn tồn tại hai số a và b thỏa mãn điều kiện ab chia hết cho $a+b$.

Bài 14. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ sao cho với mọi số nguyên a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$ đẳng thức sau đây đúng

$$f^2(a)+f^2(b)+f^2(c)$$
$$=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a),$$

ở đây ký hiệu $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên.

VŨ ĐÌNH HÒA

(GV khoa Công nghệ thông tin, ĐHSP Hà Nội)

NGƯỜI ĐƯA ĐÒ

Đã bao lần đưa khách sang sông
Vẫn nghe xao xuyến ở trong lòng
Dẫu nhọc nhằn cũng không quản ngại
Trò thành đạt thấy lòng thêm vui

Có gì bâng khuâng mà nhớ mãi
Mỗi chuyến đò là chuỗi yêu thương
Lòng nặng trĩu đong đầy kỷ niệm
Ngày hiến chương ôn lại những chuyến đò

Đẹp sao giai điệu nghề cao quý
Xây cho đời bao thế hệ tương lai
Bằng tâm hồn, hát bài ca sư phạm
Để thỏa lòng đưa khách sang sông

Cho hôm nay và mãi mai sau
Trọn đam mê, đưa đò làm lẽ sống
Dẫu vui buồn, chua ngọt, đắng cay
Luôn cho đời bài hát hăng say
Bài hát - Nghề sư phạm

Nguyễn Quang Thi

(Trường THPT Bảo lộc, Lâm Đồng)

BÀI THƠ TẶNG THẦY

Tôi viết bài thơ tặng thầy tôi,
Người lái đò trên dòng sông thơ mộng.
Viết ánh trăng khuya trên chồng giáo án,
Chờ những sớm mai ánh bình minh sáng bừng bục giảng,
Bụi phấn rơi chẳng ngại trắng mái đầu...

Lữ khách qua sông bước tiếp những nhịp cầu,
Hành trang mang theo là dòng sông tri thức.
Mang theo cả bài giảng văn đầu đời vừa học:
Yêu quê hương mình qua những lũy tre xanh..

Yêu những dòng kênh, ngọn suối mát lành
Vẫn mãi ngàn xưa từ thượng nguồn trôi xuôi về biển
Ngã rẽ nghìn khơi giữa dòng đời mải miết
Cũng hướng về duy chỉ một nơi...

Những phi công làm chủ bầu trời,
Bác sĩ, kỹ sư, mỗi cuộc đời mỗi người mỗi việc,
Đều hết thảy ra đi từ mái trường thân thuộc,
Nơi học những bài văn rằng "Uống nước nhớ nguồn"...

Bùi Minh Đức

(SV khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

GIẢI ĐÁP: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH !

(*Đề đăng trên TH&TT số* 481, *tháng* 7 *năm* 2017)

Phân tích. 1) Sai lầm của bạn Đông là không chỉ rõ hệ PT ban đầu tương đương với hệ PT nào. Chú ý rằng PT(3) là PT hệ quả của hệ (1), (2). Do đó khi ghép PT $x = y$ với PT(1) để được hệ $\begin{cases} x = y \\ x^3 = 3y^2 - 3x \end{cases}$ có nghiệm $(x; y) = (0; 0)$ là chính xác. Nhưng khi xét PT $x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y + 3 = 0$ thì bạn Đông không ghép với PT(1) hoặc (2) để có một hệ tương đương với hệ đã cho. Điều này dẫn đến kết luận $(-1; -1)$ cũng là nghiệm của hệ đã cho là không chính xác.

Lời giải đúng. Cách 1 (*Cải tiến từ lời giải của bạn Đông*).

Trừ theo vế các PT (1), (2) suy ra

$$x^3 - y^3 = 3(y^2 - x^2) + 3(y - x)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y + 3) = 0. \quad (3)$$

• Xét $x = y$, thay vào PT (1) ta có:

$$x^3 - 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Do đó hệ có nghiệm $(x, y) = (0, 0)$.

• Xét $x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + (3 + y)x + y^2 + 3y + 3 = 0.$$

Ta có: $\Delta_x = (3 + y)^2 - 4(y^2 + 3y + 3) = -3(y + 1)^2 \le 0$

PT có nghiệm khi $\Delta_x = 0 \Leftrightarrow y = -1$. Khi đó PT trở thành: $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Thay cặp số $(x; y) = (-1; -1)$ vào PT(1) (hoặc (2)) ta thấy không thỏa mãn. Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x ; y) = (0; 0)$.

Cách 2 (*Của bạn Lê Hoàng Bảo, 11 toán, THPT chuyên Tiền Giang*).

Viết lại HPT ban đầu dưới dạng $\begin{cases} x^3 + 3x = 3y^2 \\ y^3 + 3y = 3x^2 \end{cases}$.

Cộng chéo hai vế của hệ trên ta được:

$$x^3 + 3x^2 + 3x = y^3 + 3y^2 + 3y. \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t^2 + 3t$ có

$f'(t) = 3t^2 + 6t + 3 = 3(t + 1)^2 \ge 0$ với $\forall t$ nên f là hàm số đồng biến. Do (*) $\Leftrightarrow f(x) = f(y)$ nên $x = y$. Từ đó giải PT: $x^3 + 3x = 3x^2 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y) = (0; 0)$.

Nhận xét. Ngoài bạn *Bảo*, các bạn sau đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng: **Bắc Giang:** *Hoàng Mai Phương*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang. **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Hải Dương:** *Nguyễn Đặng Sơn*, 12A, THPT Nam Sách, Nam Sách. **Hà Nội:** *Đinh Bảo Anh*, 11A1, THPT Hồ Xuân Hương, số 1 Nguyễn Quý Đức, Q. Thanh Xuân. **Thừa Thiên Huế:** *Phan Hoàng Minh Đức*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế. **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

KIHIVI

A CÓ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT KHÔNG ?

Trong giờ bài tập Đại số ở lớp 10A1. Thầy giáo có ra bài tập sau:

Biểu thức $A = (x - 1)(x - 3)(x^2 - 4x + 7)$ *có đạt giá trị nhỏ nhất không? Vì sao?*

Bạn *Diệu Linh* đã thực hiện lời giải như sau:

Ta có: $A = (x - 1)(x - 3)(x^2 - 4x + 7)$

$$= (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x + 7).$$

Đặt $t = x^2 - 4x + 3$, khi đó

$$A = t(t + 4) = t^2 + 4t = (t + 2)^2 - 4 \ge -4, \ \forall t.$$

Suy ra A nhận giá trị nhỏ nhất là -4 khi

$$t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = -2$$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$: phương trình này vô nghiệm. Vậy biểu thức A không đạt giá trị nhỏ nhất.

Cả lớp tỏ ra khen ngợi bạn *Diệu Linh* về lời giải nhanh và rõ ràng.

Các bạn có đồng ý với lời giải trên không, nếu không bạn giải thế nào?

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT Nguyễn Bình Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 485 (11.2017)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 48, Lê Văn Lương, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN NGỌC ĐẠI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG ***Mĩ thuật:*** QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN ***Thiết kế, chế bản:*** MAI ANH

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

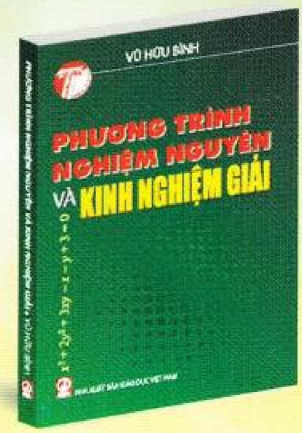
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lí, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell, Pythagore, Fermat, Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ...tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Bưu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến www.sachtoan24h.com (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

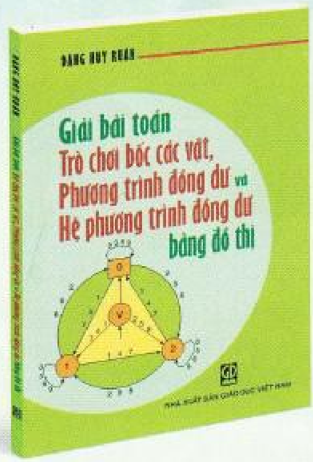
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

GIẢI BÀI TOÁN TRÒ CHƠI BỐC CÁC VẬT, PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẰNG ĐỒ THỊ

của tác giả GS. TS. NGND ĐẶNG HUY RUẬN

Sách dày 112 trang, khổ 17x24cm, giá bìa: 30.000 đồng.



Nội dung của sách trình bày phương pháp giải bài toán trò chơi bốc các vật, phương trình đồng dư tuyến tính, hệ phương trình đồng dư tuyến tính và phương trình đồng dư bậc cao bằng đồ thị. Nói cụ thể hơn: Nội dung chủ yếu của cuốn sách là trình bày thuật toán xây dựng đồ thị có hướng với các cung được gán nhãn trên bảng chữ cái thập phân mà nhãn của đồ thị nhận được chính là tập nghiệm của phương trình hay hệ phương trình đồng dư.

Sách gồm hai phần chính:

Phần trò chơi bốc các vật trình bày thuật toán để người đi đầu chiến thắng bằng cách bốc được vật cuối cùng (hoặc không phải bốc vật cuối cùng).

Phần phương trình và hệ phương trình đồng dư được trình bày trong bốn chương cuối cuốn sách.

Chương IV trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$ với a, m là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, còn $b \in \{0, 1, ..., m-1\}$.

Chương VI trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư tuyến tính.

Chương VII trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư bậc cao.

Chương V trình bày về thuật toán giải phương trình đồng dư tuyến tính dạng đặc biệt $x \equiv b \pmod{m}$. Tập nghiệm của phương trình này chính là tập số đồng dư với b theo module m. Bởi vậy đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình này được gọi là nguồn đồng dư.

Cuốn sách không những trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo một module, mà còn trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo nhiều module và một số cấu trúc khác, chẳng hạn, nguồn sinh tất cả các số nguyên dương chia hết cho 7, mà mỗi số này đều có chữ số lẻ và chữ số chẵn đan xen nhau.

Trong khi Quý độc giả giảng dạy, hướng dẫn hoặc làm việc về đồng dư mà có nguồn đồng dư theo module m bên cạnh thì có thể chỉ ra hàng chục số gồm nhiều chữ số chia hết cho m trong chốc lát.

Tin tưởng rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường đại học và cao đẳng ngành toán cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn số học.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 04.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 04. 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT11M7

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2017

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng