TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

12 2006
Số 354

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 43
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

Khối THPT chuyên
Đại học Sư phạm Hà Nội

40 năm

KHỐI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

XÂY DỰNG VÀ TRƯỞNG THÀNH

PGS. TS NGUYỄN VĂN BÌNH
Trưởng khối THPT Chuyên

Năm học 1966-1967 lớp chuyên Toán (tên gọi lúc đó là lớp Toán Đặc biệt) đầu tiên của khoa Toán trường Đại học Sư phạm (ĐHSP) Hà Nội được thành lập (theo quyết định của Thủ tướng ngày 4/9/1965) với nhiệm vụ phát hiện, bồi dưỡng học sinh năng khiếu, phục vụ mục tiêu lâu dài là tạo nguồn đào tạo những cán bộ khoa học kĩ thuật giỏi, chuyên gia , nhà nghiên cứu cho đất nước . . .

Ngày 24/12/1966, 33 học sinh khóa học đầu tiên thực hiện hành trình gần 80 cây số đến nơi sơ tán (thôn Tống Xá, huyện Phù Cừ, tỉnh Hưng Yên) đánh dấu sự ra đời chính thức của khối Trung học phổ thông (THPT) chuyên ĐHSP Hà Nội. Từ đó đến nay khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội đã trải qua ba giai đoạn phát triển :

- Giai đoạn 1966-1995: Khối trực thuộc khoa Toán của trường ĐHSP Hà Nội .
- Giai đoạn 1995-2005: Khối có thêm lớp chuyên Tin và được đổi tên thành "Khối phổ thông chuyên Toán - Tin ĐHSP Hà Nội". Quy mô được mở rộng từ 3 lớp (giai đoạn 1966-1993) đến 9 lớp với 17 cán bộ, giáo viên (giai đoạn 1993-2005) .
- Giai đoạn từ 2005 đến nay: Tháng 4 năm 2005, khối tách khỏi khoa Toán Tin và trở thành một đơn vị độc lập trực thuộc trường ĐHSP Hà Nội . Quy mô của khối tiếp tục được mở rộng với các môn chuyên Toán, Tin, Lí, Hóa, Sinh, Văn. Khối có 13 lớp (năm học 2005-2006), 17 lớp (năm học 2006-2007). Về cơ sở vật chất, khối được Ban giám hiệu trường ĐHSP Hà Nội dành cho khu nhà D1 làm nơi học tập với 16 phòng học, 2 phòng thực hành Tin học, 1 phòng học đa năng và một số phòng làm việc của các thầy cô giáo. Đội ngũ cán bộ giáo viên được bổ sung, tăng cường nay đã có tới 30 người.

Trải qua 40 năm xây dựng và trưởng thành, khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội đã gặt hái được không ít thành công: đoạt 39 Huy chương các loại (10 Huy chương Vàng, 19 Huy chương Bạc, 10 Huy chương Đồng) trong các kì thi Olympic Toán và Tin Quốc tế; đoạt gần 300 giải (Nhất, Nhì, Ba) trong các kì thi học sinh giỏi Toán và Tin Quốc gia. Trong các kì thi tốt nghiệp THPT và tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng, học sinh của khối luôn luôn đạt thành tích xuất sắc (năm học 2005-2006: khối có 104 học sinh thi tuyển vào các trường đại học trong toàn quốc thì có 69 em đạt 25 điểm trở lên, lớp chuyên Toán có 5 em đỗ Thủ khoa). Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội tự hào là đã góp phần bồi dưỡng, đào tạo cho đất nước nhiều cán bộ kĩ thuật, nhiều chuyên gia, nhà nghiên cứu giỏi (chỉ tính trong khoảng 250 học sinh của 12 khóa đầu tiên đã có hơn 80 người bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ , Tiến sĩ Khoa học; nhiều người được phong học hàm Phó Giáo sư , Giáo sư).

Những nỗ lực của thầy và trò khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội đã được ghi nhận bằng sự yêu mến, tin cậy của phụ huynh học sinh, sự lựa chọn của đông đảo học sinh trên toàn quốc. Ghi nhận những đóng góp của khối, Nhà nước đã ba lần tặng thưởng Huân chương Lao động (hạng Ba năm 1986, hạng Nhì năm 1996, hạng Nhất năm 2001).

Kỉ niệm 40 năm thành lập, thầy và trò khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội phấn khởi, tự hào tiếp bước các thế hệ đi trước, chinh phục những đỉnh cao mới và thực hiện nhiệm vụ được Bộ Giáo dục và Đào tạo và trường ĐHSP Hà Nội giao phó , đồng thời đáp ứng yêu cầu ngày càng cao của xã hội.

VẼ TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC ĐỂ GIẢI TOÁN

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Trong một số bài toán hình học có liên quan đến góc, nhiều khi vẽ tia phân giác của một góc nhằm tạo thêm mối quan hệ về góc, cạnh sẽ giúp giải bài toán dễ dàng hơn. Ta thường vẽ tia phân giác của một góc trong các trường hợp dưới đây.

1 Trong bài toán có đề cập tới mối quan hệ góc này với nửa góc kia, ta thường vẽ tia phân giác của góc lớn.

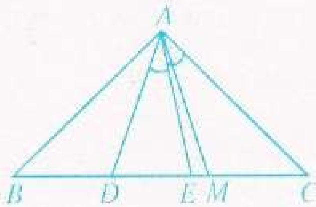
✪ **Bài toán 1.** *Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho CD = 2.BD. So sánh* $\widehat{BAD}$ *và* $\frac{1}{2}\widehat{DAC}$.

Nhận xét. Để so sánh $\widehat{BAD}$ và $\frac{1}{2}\widehat{DAC}$, ta vẽ tia phân giác AE của $\widehat{DAC}$ (h. 1).

Lời giải. Do $\widehat{ADC} > \widehat{B} = \widehat{C}$ nên $AC > AD$. Vẽ tia phân giác AE và trung tuyến AM của tam giác DAC. Ta có

• $\frac{ED}{EC} = \frac{AD}{AC} < 1$, suy ra $ED < EC$ nên $CE > \frac{CD}{2} = CM$.

Từ đó $\widehat{CAE} > \widehat{CAM}$ (1)



Hình 1

• $\Delta BAD = \Delta CAM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAM}$ (2)

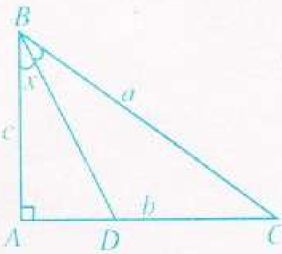
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAD} < \frac{1}{2}\widehat{DAC}$. □

✪ **Bài toán 2.** *Chứng minh rằng:*

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x \ (0^\circ < x < 45^\circ).$$

Nhận xét. Bài toán đề cập tới góc $2x$ và góc x. Ta vẽ tia phân giác của góc $2x$.

Lời giải. (h.2). Vẽ tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 2x$ và tia phân giác BD. Gọi độ dài các cạnh BC, CA, AB thứ tự là a, b, c.



Hình 2

Ta có

$$\frac{DA}{c} = \frac{DC}{a} = \frac{b}{c+a}$$

$$\Rightarrow DA = \frac{bc}{c+a};\ DC = \frac{ab}{c+a}.$$

Ta có công thức về đường phân giác (xem THTT số 340 tháng 10.2005):

$$BD^2 = BA.BC - DA.DC = ca - \frac{ab^2c}{(c+a)^2}$$

$$= \frac{ca(c^2+2ca+a^2-b^2)}{(c+a)^2} = \frac{ca(c^2+2ca+c^2)}{(c+a)^2}$$

$$= \frac{2c^2a}{c+a}.$$

Từ đó $2\sin x.\cos x = 2\frac{AD}{BD}.\frac{AB}{BD} = \frac{2bc^2}{c+a} : \frac{2c^2a}{c+a}$

$$= \frac{b}{a} = \sin 2x. \ \square$$

2 Vẽ tia phân giác của một góc để tạo ra được các quan hệ về góc và về cạnh mới.

✪ **Bài toán 3.** *Cho tam giác ABC cân tại A có* $\widehat{A} = 36^\circ$. *Tính* $\dfrac{AB}{BC}$.

Nhận xét. Vẽ tia phân giác BD thì tạo ra được quan hệ về góc $\widehat{B_1} = \widehat{A}$, $\widehat{D_1} = \widehat{C}$ và quan hệ về cạnh $AD = BD = BC$. (h.3).

Lời giải. Vẽ tia phân giác BD. Ta có $\widehat{B_1} = 72^\circ : 2 = 36^\circ = \widehat{A}$; $\widehat{D_1} = \widehat{A} + \widehat{B_1} = 72^\circ = \widehat{C}$ nên $AD = BD = BC$.

Theo tính chất đường phân giác thì

$$\frac{DA}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{AC}{AB+BC}$$

suy ra $DC = \dfrac{AB.BC}{AB+BC}$.

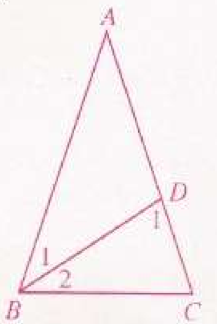
Mặt khác $DC = AC - AD = AB - BC$ nên

$$\frac{AB.BC}{AB+BC} = AB - BC$$

$$\Rightarrow AB.BC = AB^2 - BC^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - \frac{AB}{BC} - 1 = 0.$$

Từ đó, tính được $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ❐



Hình 3

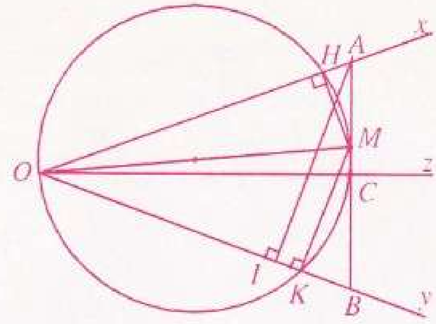
❸ Vẽ tia phân giác của một góc khi dự đoán được một đường đi qua một điểm cố định nằm trên tia phân giác của một góc cố định.

✪ **Bài toán 4.** *Cho góc* $\widehat{xOy}$ *khác* 180° *và một điểm M trong góc đó sao cho MH + MK = a (a là độ dài cho trước) với H và K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống Ox và Oy. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MHK đi qua hai điểm cố định khi M di động trong góc xOy.*

Nhận xét. Vẽ hai vị trí của hình ta dự đoán được đường tròn (MHK) đi qua C thuộc tia phân giác của góc xOy. (h. 4).

Lời giải. Do $\widehat{OHM} = \widehat{OKM} = 90^\circ$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác MHK đi qua điểm cố định O.

Vẽ tia phân giác Oz của góc xOy.



Hình 4

Qua M kẻ $AB \perp Oz$ tại C với $A \in Ox$, $B \in Oy$.

Kẻ $AI \perp Oy$ tại I thì $OA = OB$. Nếu C khác M thì C thuộc đường tròn (MHK) do $\widehat{MCO} = 90^\circ$.

Ta có: $S_{AOB} = S_{AOM} + S_{MOB}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}OB.AI = \frac{1}{2}OA.MH + \frac{1}{2}OB.MK$$

$$\Rightarrow AI = MH + MK = a \Rightarrow A \text{ cố định}$$

$$\Rightarrow B \text{ và } C \text{ cố định.}$$

Vậy đường tròn (MHK) đi qua hai điểm cố định O và C. ❐

Mời các bạn tham gia giải một số bài toán sau đây.

Bài 1. Cho góc x với $0^\circ < x < 45^\circ$. Chứng minh rằng: a) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

b) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$; c) $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

Bài 2. Giả sử M là một điểm ở trong tam giác ABC sao cho $CM = CB$. Chứng minh rằng $AB > AM$.

Bài 3. Cho tam giác ABC ($AC > AB$). Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng $\widehat{CEF} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 2(\widehat{B} - \widehat{C})$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng

$$a^2 b = (b-c)(b+c)^2.$$

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{DAC} = 130^\circ$, $\widehat{DBC} = 110^\circ$, $\widehat{ABD} = \widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính $\widehat{ADC}$ và $\widehat{BCD}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An

NĂM HỌC 2006-2007

MÔN TOÁN

NGÀY THỨ NHẤT

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1 (*2 điểm*)

Cho biểu thức

$$P=\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Chứng minh $P<\frac{1}{3}$ với $x\geq 0$ và $x\neq 1$.

Bài 2 (*2 điểm*)

Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-3=0$ (1) (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm sao cho nghiệm này bằng ba lần nghiệm kia.

Bài 3 (*2 điểm*)

a) Giải phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$.

b) Cho a, b, c là các số thực thoả mãn:

$$\begin{cases} a\geq 0;\, b\geq 0 \\ a+2b-4c+2=0 \\ 2a-b+7c-11=0. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=6a+7b+2006c$.

Bài 4 (*4 điểm*)

Cho tam giác ABC cân tại A với $AB>BC$. Điểm D di động trên cạnh AB, không trùng với A và B. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tiếp tuyến của (O) tại C và D cắt nhau tại K.

a) Chứng minh tứ giác $ADCK$ nội tiếp.

b) Tứ giác $ABCK$ là hình gì ? Tại sao ?

c) Xác định vị trí điểm D sao cho tứ giác $ABCK$ là hình bình hành.

NGÀY THỨ HAI

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 5 (*3 điểm*)

a) Giải phương trình $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+x}=2$.

b) Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $x+y+z=0$. Đặt $a=x^2-yz$, $b=y^2-xz$, $c=z^2-xy$. Chứng minh $ax+by+cz=0$.

Bài 6 (*2,5 điểm*)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x\,;\,y)$ thoả mãn $x^2-(5+y)x+2+y=0$.

b) Cho 2006 số thực $a_1, a_2, \dots, a_{2006}$ thoả mãn

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1}=a_n^2+a_n \end{cases} \quad \text{với } n=1,2,\dots,2005.$$

Đặt $A=\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\dots+\frac{1}{a_{2006}+1}$.

Tính phần nguyên của A.

(Xem tiếp trang 5)

Lời giải

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

THPT chuyên HÀ NỘI - AMSTECDAM và THPT CHU VĂN AN Hà Nội

MÔN : *TOÁN – TIN*

(Đề thi đăng trên THTT số 353, tháng 11 năm 2006)

Bài 1. 1) ĐK $x \neq 0$. Đưa PT (*) về dạng:

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - (2a+1)\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2a - 3 = 0$$

Đặt $t = x - \dfrac{1}{x}$ thì $t^3 + 3t = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$.

PT đã cho trở thành

$$t^3 + 3t - (2a+1)t + 2a - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t - 2a + 3) = 0.$$

Với $a = 1$ ta có $t^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Thay $t = 1$ vào PT $t = x - \dfrac{1}{x}$ được $x^2 - x - 1 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Chú ý rằng $t = x - \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - tx - 1 = 0$. PT này có $a.c = -1 < 0$ nên với mỗi t, PT luôn có hai nghiệm trái dấu.

2) Để PT (*) có nhiều hơn hai nghiệm dương, cần và đủ là PT $t^2 + t - 2a + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Nghĩa là:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 2 - 2a + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4(-2a+3) > 0 \\ a \neq \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > \dfrac{11}{8} \\ a \neq \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Bài 2. Gọi hai số của dãy là a và b thỏa mãn $a - b = 30000$ (*). Theo định nghĩa của dãy ta có $a \vdots b \Rightarrow (a-b) \vdots b \Rightarrow 30000 \vdots b \Rightarrow 2^4.3.5^4 \vdots b$. Theo cách xác định b thì b chỉ có thể là: 2; 2.3; 2.3.5. Lần lượt thay vào (*) để tìm a ta được một đáp số: $b = 2.3.5 = 30$. $a = 2.3.5.7.11.13 = 30030$.

Bài 3. Xét hệ

$$\begin{cases} \sqrt{2x}\, y^2 - z^4 \geq 7 & (1) \\ \sqrt{-x^2y^2 + 8xy + 9} - \sqrt{x^2 - 4} \geq 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) & (2) \end{cases}$$

Ta thấy $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2.$

Ta có $\sqrt{-x^2y^2 + 8xy + 9} = \sqrt{25 - (xy-4)^2} \leq 5$.

$\sqrt{-x^2y^2 + 8xy + 9} - \sqrt{x^2 - 4} \leq 5$.

Nếu $x \geq 3$ thì $2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) > 6$ nên BPT (2) vô nghiệm.

Vậy $2 \leq x < 3$. Do x nguyên nên x chỉ có thể bằng 2.

Thay $x = 2$ vào (2) ta được $y = 2$.

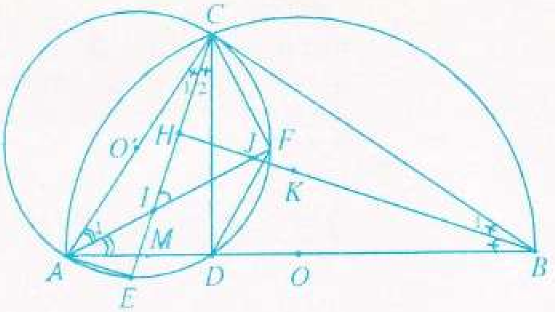
Thay $x = y = 2$ vào (1) ta được

$-1 \leq z \leq 1$ mà z nguyên nên $z \in \{-1; 0; 1\}$

Vậy hệ trên có ba nghiệm

$(x; y; z) = (2; 2; -1); (2; 2; 0); (2; 2; 1)$.

Bài 4. 1) $\widehat{ACD} = \widehat{CBA}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà CE là phân giác $\widehat{ACD}$, BH là phân giác $\widehat{CBA}$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$. Mà $\widehat{C_1} + \widehat{ECB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{ECB} = 90^\circ \Rightarrow BH \perp CE$ (1)



Ta có $\widehat{AEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AE \perp CE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE // BH$.

2) Vì AF là phân giác $\widehat{CAD}$ nên $\overset{\frown}{FC} = \overset{\frown}{FD} \Rightarrow FC = FD$ (3). $\widehat{CIF} = \widehat{A_1} + \widehat{C_1} = \frac{1}{2}(\widehat{CAB} + \widehat{ACD})$ $= 45^\circ$, mà $\widehat{AFC} = 90^\circ$, suy ra tam giác CFI vuông cân, từ đó $FI = FC$ (4).

Từ (3) và (4) có $FI = FD$ nên ΔFID đều $\Leftrightarrow \widehat{AFD} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{CAD} = 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{CAF} = 15^\circ$.

Khi đó $DF = FC = AC.\sin 15^\circ$

$= (AB.\cos 30^\circ).\sin 15^\circ = R\sqrt{3}\sin 15^\circ$.

$$S_{FID} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2\sin^2 15^\circ \left(= R^2.\frac{6\sqrt{3}-9}{16}\right).$$

3) Gọi M là giao điểm của CE với AB. Tam giác MBC có BH vừa là phân giác vừa là đường cao nên nó cân tại $B \Rightarrow H$ là trung điểm $CM \Rightarrow DH$ là trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông $CDM \Rightarrow HD = HC$ mà $HK = HD$ (gt) $\Rightarrow HC = HK$. Do đó tam giác CHK vuông cân tại $H \Rightarrow \widehat{HCK} = 45^\circ$ mà $\widehat{ACB} = 90^\circ$ và $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ nên CK là phân giác $\widehat{DCB}$, suy ra K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác vuông CDB. Dễ thấy I và J cũng là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác vuông ACD; ABC. Trong tam giác ABC vuông tại C thì bán kính đường tròn nội tiếp là $\frac{AC+CB-AB}{2}$.

Suy ra $d_1 + d_2 + d_3$

$$= \frac{AD+CD-AC}{2} + \frac{AC+CB-AB}{2} + \frac{CD+DB-BC}{2} = CD$$

với d_1, d_2, d_3 theo thứ tự là các khoảng cách từ I, J, K đến AB.

Có $CD \le CO = R$ (O là trung điểm AB).

Vậy $d_1 + d_2 + d_3$ lớn nhất khi và chỉ khi C là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$.

Bài 5. Xét $A = \{1, 2, 3..., 2006^{2007}\}$

$\forall x \in A$ thì $1 \le \sqrt[2007]{x} \le 2006$.

Xét 2006 tập hợp: [1; 2); [2; 3); [3; 4)... [2005; 2006); {2006} mà có tới 2007 số thuộc 2006 tập trên, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai số thuộc cùng một tập. Gọi hai số đó là x, y ta có $0 < \left|\sqrt[2007]{x} - \sqrt[2007]{y}\right| < 1$.

VŨ QUỐC LƯƠNG
(GV THCS Chu Văn An, Hà Nội)
Giới thiệu

ĐỀ THI ... *(Tiếp trang 3)*

Bài 7 (1 *điểm*)

Cho ba số dương x, y, z thoả mãn

$$x + y + z = \frac{xy}{z}.$$

Chứng minh rằng $(y+z)^4 + (z+x)^4 < (x+y)^4$.

Bài 8 (2,5 *điểm*)

Cho đường tròn tâm O, bán kính R và dây BC bé hơn $2R$, các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại A. M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC và không trùng với B, C. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. BM cắt HK tại P, CM cắt HI tại Q.

a) Chứng minh rằng $PQ // BC$.

b) Xác định vị trí của điểm M để tích $MH.MI.MK$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 9 (1 *điểm*)

Trong tam giác ABC có ba góc nhọn ta lấy một điểm M bất kì. Chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ M tới ba đỉnh của tam giác không bé hơn hai lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ M tới ba cạnh của tam giác đó.

THÁI VIẾT THẢO
(Sở GD-ĐT Nghệ An) giới thiệu

NGHĨ VỀ 40 NĂM CHUYÊN TOÁN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

HỒ TÚ BẢO (*)
(Cựu học sinh Khóa 1 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội)

Hơn bốn mươi năm về trước, ngay khi đế quốc Mỹ ồ ạt leo thang chiến tranh Việt Nam và quyết đưa miền Bắc nước ta trở lại thời kì đồ đá, ngành giáo dục đã làm nhiều việc chuẩn bị cho công cuộc xây dựng đất nước sau ngày chiến thắng. Từ trong bom đạn chiến tranh, các lớp phổ thông chuyên Toán đã ra đời. Khóa đầu tiên của chuyên Toán miền Bắc (1965-1967) đặt ở khoa Toán Đại học Tổng hợp Hà Nội (ĐHTHHN), nay là Đại học Khoa học Tự nhiên ĐHQG Hà Nội. Năm 1966 các lớp chuyên Toán toàn miền Bắc được mở ở về hai trường Đại học Sư phạm. Học sinh trúng tuyển ở các tỉnh Khu Bốn cũ và hai tỉnh Nam Định, Ninh Bình học tại Đại học Sư phạm Vinh, học sinh trúng tuyển của các tỉnh còn lại học tại đại học Sư phạm Hà Nội (ĐHSPHN). Chuyên Toán của ĐHTHHN không mở năm 1966, nhưng năm sau đã mở lại. Học sinh các tỉnh sau này gồm cả Nam Định được chia đều theo điểm cho chuyên Toán ĐHSPHN và ĐHTHHN. Những năm đầu còn dùng tên "lớp Toán đặc biệt", rồi "lớp Toán năng khiếu". Băn khoăn mãi rồi sau cái tên "chuyên Toán" mới được nghĩ ra và dùng cho đến nay.

Bốn mươi năm là một quãng đường dài để nhớ lại và suy nghĩ về những gì đã làm được và nên làm tới đây. Trước hết bao giờ cũng là nhớ về các thầy cô đã dành nhiều tâm huyết cho việc đào tạo ở chuyên Toán ĐHSPHN: các thầy Hoàng Chúng, Lê Đình Phi, Nguyễn Quốc Trinh, Vũ Tuấn, Lê Khắc Bảo, Vũ Dương Thuỵ, Nguyễn Mạnh Cảng, Ngô Xuân Sơn, Phan Văn Viện, Nguyễn Ngọc Uy, Nguyễn Huy Đoan,... rồi các thầy cô dạy các môn khác: Bạch Kim Dung, Nguyễn Cao Sơn (Văn), Lâm Mai Sơn (Sử), Tạ Bảo Kim (Địa), Vũ Tráng (Sinh vật), Nguyễn An Nghi (Hoá), Dương Ngọc Anh (Lí), Lê Bích Loan (Giáo dục công dân), Lê Phong (Nhạc, Nga văn), ... Nhiều học sinh của khối giờ đã là thầy cô giáo dạy Toán ở đây, như thầy Doãn Minh Cường (Khóa 1), hiện là Phó Chủ nhiệm Khối chuyên của ĐHSPHN.

Một điều luôn được đánh giá như thành tích nổi bật của các lớp chuyên là số học sinh đạt kết quả cao trong các kì thi học sinh giỏi Quốc gia và Quốc tế. Từ khi Việt Nam tham gia Olympic Toán Quốc tế, chuyên Toán ĐHSPHN cùng với chuyên Toán ĐHTH HN là nguồn cung cấp thành viên cho đội tuyển Quốc gia. Tuy chưa đạt được nhiều thành tích như chuyên Toán ĐHTHHN, chuyên Toán ĐHSPHN hầu như năm nào cũng đoạt giải.

Tuy nhiên, hai điều sau còn quan trọng hơn khi nói về đóng góp cho xã hội của các lớp chuyên Toán nói chung và của chuyên Toán ĐHSPHN nói riêng. Một là, với những rèn luyện ban đầu nơi đây, nhiều người đã tiếp tục học và làm toán hoặc đi tiếp vào những ngả đường khác nhau của khoa học. Nhiều người đã theo đuổi các nghiên cứu về Vật lí lí thuyết, Cơ học lượng tử, Hóa học, Sinh học phân tử, Tin học, các phương pháp tính toán trong Khoa học vật liệu, Toán và Tin học, Sinh học, Y học, ... Có thể kể ra một số học sinh chuyên Toán ĐHSPHN đã đeo đuổi nghiệp làm Toán với nhiều kết quả như PGS. TSKH Nguyễn Tự Cường, PGS. TSKH Đặng Hùng Thắng, PGS. TSKH Phạm Huy Điển, PGS. TSKH Vũ Đình Hòa, GS.TSKH Vũ Kim Tuấn, GS. TSKH Đỗ Đức Thái, PGS. TSKH Nguyễn Đình Công, PGS. TSKH Nguyễn Đông Yên, GS. TSKH Đinh Tiến Cường, ... Một con số không nhỏ các bạn đã dành cả cuộc đời cho sự nghiệp dạy toán, dạy người như Phan

Văn Lân (cựu học sinh khóa 1) là Giám đốc Sở Giáo dục Phú Thọ, Nguyễn Trọng Cầu (cựu học sinh khóa 10) là Phó giám đốc Sở Giáo dục - Đào tạo Hải Dương, ... và nhiều người đang là trụ cột cho phong trào dạy Toán giỏi khắp đất nước. Hai là, nhiều người đã theo học, tự học hoặc rèn luyện qua thực tế, thành những cá nhân xuất sắc trong nhiều lĩnh vực, thành các nhà quản lí, nhà ngoại giao, thương nhân, doanh nhân, bác sĩ, kĩ sư, ... như PGS. TS. Nguyễn Lân Việt (cựu học sinh khóa 2) là Hiệu trưởng Đại học Y Hà Nội, Lê Đình Long (cựu học sinh khóa 7) là Tổng Giám đốc của Ngân hàng Thương mại cổ phần Quốc tế Việt Nam VIBank, ...

Mặc dù những việc chúng ta đã làm được ở các lớp chuyên là rất đáng ca ngợi và tự hào, nhưng đứng trước những thay đổi và thách thức của thời cuộc, khi nhìn về quá trình trưởng thành và nhu cầu về một đội ngũ những cá nhân xuất sắc ở nhiều lĩnh vực rất cần cho việc xây dựng đất nước, đề nghị của tôi là chúng ta *chuyển việc đào tạo "chuyên" thành đào tạo "toàn diện với chất lượng cao" cho những học sinh xuất sắc toàn diện hoặc có năng khiếu đặc biệt*. Cụ thể, nên xem xét chuyển khối chuyên Toán-Tin của ĐHSPHN, cùng các khối chuyên khác, thành một trường THPT với hai khối về khoa học Tự nhiên và khoa học Xã hội, gọi đơn giản là trường THPT của ĐHSPHN. Những điều cơ bản là:

- Các em được tuyển chọn là các em *hoặc xuất sắc toàn diện* về khoa học Tự nhiên (Xã hội), hoặc có *năng kiếu vượt trội* về một (vài) môn của khoa học Tự nhiên (Xã hội) ở bậc THCS.

- Các em được *học tập toàn diện*, được học tốt về *tiếng Việt và tiếng Anh*. Các em có năng khiếu vượt trội về một môn nào đó sẽ được *sinh hoạt ngoại khóa* trong các nhóm do các thầy cô giỏi dẫn dắt.

- Trường *gồm các thầy cô dạy giỏi ở tất cả các môn* và có *cơ sở vật chất để học tập tốt*.

Tại sao nên làm trường này mà không phải trường chuyên? Sau đây là vài lí do:

- Người tài phải được đào tạo và rồi trưởng thành qua thực tiễn. Đây là con đường của hàng chục năm. *Không cần và không nên hướng quá sớm các em vào một lĩnh vực hẹp của khoa học*. Sớm quá, hẹp quá sẽ dễ bị cùn và không đi được đường dài, ít khả năng thích nghi và tự thay đổi.

- *Con người cần có hiểu biết toàn diện*, trước và cùng lúc với việc đi vào một lĩnh vực hẹp. Trước hết là vì hạnh phúc của chính các em. Ngoài ra, kiến thức toàn diện là rất cần cho khoa học. Chẳng hạn nếu không viết và nói tiếng Việt đúng, không biết diễn đạt và giao tiếp chắc các em không thể giỏi tiếng Anh, và vì thế cũng rất hạn chế trong nghiên cứu khoa học, khó thành nhà khoa học giỏi.

- Chỉ một vài em trong số mấy chục em xuất sắc tuyển chọn mỗi năm sẽ tiếp tục làm Toán, vậy có nên tiếp tục duy trì chuyên Toán? Tư duy toán học hay một phương pháp tư duy nào khác phổ quát hơn nên được trang bị cho các em? Một môi trường học tập phổ thông với thầy bạn giỏi, được kích thích khát khao, được dẫn dắt sáng tạo, được dạy và luyện cách suy nghĩ, cách làm việc khoa học, theo tôi là cần thiết hơn cho hầu hết những người ưu tú của tương lai, kể cả các nhà toán học. Môi trường này cho phép một vài em có năng khiếu đặc biệt vẫn được phát triển, và cho phép những em xuất sắc khác phấn đấu với lòng tự tin và niềm kiêu hãnh trước một tương lai với nhiều ngả đường có thể theo đuổi. Nôm na là ta *không nên nuôi "gà chọi", mà nuôi các loại "gà đẻ trứng vàng"*.

Với lòng trân trọng và biết ơn sâu sắc với khối chuyên Toán-Tin ĐHSPHN, chúng ta cùng nhìn lại mục tiêu và con đường của các lớp chuyên hiện nay, và mạnh dạn thực hiện các thay đổi cần thiết trong những năm tới đây.

(*) Giáo sư Tiến sĩ Tin học tại Viện Khoa học và Công nghệ tiên tiến Nhật Bản.

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT

năm học 2005-2006

Bảng A

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV Trường ĐHSP Hà Nội)

NGÀY THỨ NHẤT

Bài 1. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+6}.\log_3(6-y)=x\\ \sqrt{y^2-2y+6}.\log_3(6-z)=y\\ \sqrt{z^2-2z+6}.\log_3(6-x)=z.\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện xác định $x, y, z < 6$. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}\log_3(6-y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}} & (1)\\ \log_3(6-z)=\dfrac{y}{\sqrt{y^2-2y+6}} & (2)\\ \log_3(6-x)=\dfrac{z}{\sqrt{z^2-2z+6}} & (3)\end{cases}$$

Nhận thấy $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}$ là hàm tăng

(do $f'(x)=\dfrac{6-x}{(x^2-2x+6)\sqrt{x^2-2x+6}}>0$ với $x < 6$), còn $g(x) = \log_3(6 - x)$ là hàm giảm với $x < 6$. Nếu (x, y, z) là một nghiệm của hệ phương trình ta chứng minh $x = y = z$. Không mất tổng quát giả sử $x = \max(x, y, z)$ thì có hai trường hợp:

1) $x \geq y \geq z$. Do $g(x)$ là hàm giảm, suy ra
$\log_3(6 - y) \geq \log_3(6 - z) \geq \log_3(6 - x)$
$\Rightarrow x \geq z \geq y$. Do $y \geq z$ nên $z = y$.
Từ (1) và (2) ta có $x = y = z$.

2) $x \geq z \geq y$.

Tương tự $\log_3(6 - y) \geq \log_3(6 - x) \geq \log_3(6 - z) \Rightarrow z \geq x \geq y$. Do $x \geq z$ nên $z = x$. Từ (1) và (3) ta lại có $x = y = z$.

Phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất $x = 3$. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x, y, z) = (3, 3, 3)$.

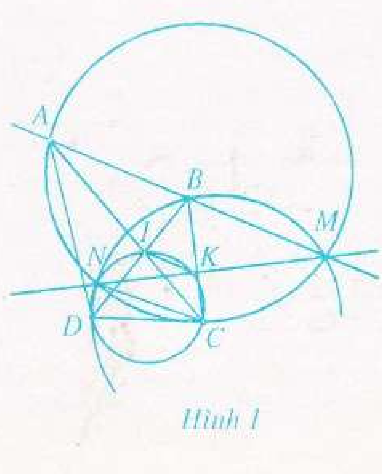
Bài 2. *Cho tứ giác lồi ABCD. Xét một điểm M di động trên đường thẳng AB sao cho M không trùng với A và B. Gọi N là giao điểm thứ hai khác M của đường tròn (MAC) và đường tròn (MBD). Chứng minh rằng:*

1) Điểm N di động trên một đường tròn cố định;

2) Đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

((XYZ) kí hiệu đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z).

Lời giải. Chứng minh sau đây đúng cho trường hợp hình vẽ. Với các vị trí khác của M thì chứng minh hoàn toàn tương tự (lúc đó có thể thay sự bằng nhau bởi sự bù nhau của góc).



Hình 1

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ (h. 1).

1) Thấy $DCIN$ là tứ giác nội tiếp vì $\widehat{ICN}=\widehat{IDN}$ $(=\widehat{AMN})$. Do đó N chạy trên một đường tròn cố định.

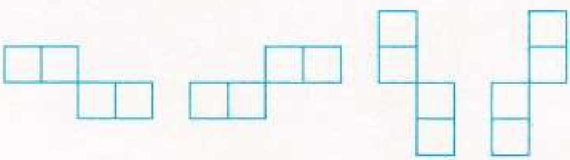
2) Qua I kẻ đường thẳng l song song với AB cắt đường thẳng MN tại điểm K, $IKCN$ là tứ giác nội tiếp do $\widehat{ICN}=\widehat{IKN}$ $(=\widehat{AMN})$. Do đó K là giao điểm thứ hai của l với đường tròn (IDC) nên là điểm cố định. Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định.

Bài 3. *Cho m và n là các số nguyên lớn hơn 3. và bảng ô vuông kích thước $m \times n$ (bảng gồm m hàng và n cột).*

Cho phép đặt bi vào các ô vuông con của bảng theo cách sau: Mỗi lần, đặt 4 viên bi vào 4 ô vuông con (mỗi ô 1 viên) mà 4 ô đó tạo thành một trong các hình dưới đây (h. 2):

Hỏi bằng cách trên, ta có thể đặt bi vào các ô vuông con của bảng sao cho số bi trong mỗi ô vuông con đều bằng nhau hay không, nếu:

1) $m = 2004$ và $n = 2006$?
2) $m = 2005$ và $n = 2006$?



Hình 2: Cấu hình 4 ô vuông.

Lời giải.

1) Nhận thấy: Bằng cách thực hiện hai lần phép đặt bi, ta có thể đặt vào mỗi ô vuông con của bảng 4×2 một viên bi. Có thể phân chia bảng 2004×2006 thành các bảng 4×2. Từ đó bằng cách thực hiện một số hữu hạn lần phép đặt bi của đề bài, ta có thể đặt bi vào tất cả các ô vuông con của bảng 2004×2006 sao cho số bi trong mỗi ô đều bằng nhau (bằng 1).

2) Bằng phản chứng, ta chứng minh câu trả lời cho bài toán là "Không". Thật vậy, giả sử ngược lại, sau một số hữu hạn lần thực hiện phép đặt bi của đề bài, ta đã đặt được vào mỗi ô vuông con của bảng 2005×2006 là k viên bi.

Tô tất cả các ô vuông con thuộc các hàng lẻ của bảng bởi màu đen và coi các ô không được tô màu có màu trắng. Khi đó, số ô màu đen bằng 2.10032 và số ô màu trắng bằng 2006.1002.

Ta thấy, ở mỗi lần đặt bi ta đều đặt đúng 2 viên bi vào các ô màu đen và đúng 2 viên bi vào các ô màu trắng. Do đó, sau mỗi lần đặt bi, số bi trong các ô màu đen và số bi trong các ô màu trắng luôn bằng nhau.

Suy ra, khi ở mỗi ô có k viên bi ta phải có $2.10032.k = 2006.1002.k$, hay $k = 0$. Điều vô lí này chứng tỏ giả sử ban đầu là sai, vì thế ta có điều muốn chứng minh.

Bài 4. *Cho hàm số $f(x) = -x+\sqrt{(a+x)(b+x)}$ trong đó a và b là hai số thực dương khác nhau cho trước.*

Chứng minh rằng với mỗi số thực s thuộc khoảng $(0;\ 1)$ đều tồn tại duy nhất số thực dương α sao cho $f(\alpha)=\left(\dfrac{a^s+b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}$.

Lời giải. $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0;\infty]$. Ta chứng minh các khẳng định sau:

a) $f(x)$ tăng thật sự trên $[0;\infty]$.

b) $f(0) = \sqrt{ab}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{a+b}{2}$.

c) Với mọi $0 < s < 1$, ta có

$$\sqrt{ab}<\left(\frac{a^s+b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}\le\frac{a+b}{2}.$$

Bài toán được giải sau khi ta chứng minh các khẳng định a) b) c).

Chứng minh a) Ta có

$$f'(x)=-1+\frac{2x+a+b}{2\sqrt{(a+x)(b+x)}}=\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x})^2}{2\sqrt{(a+x)(b+x)}}>0.$$

Chứng minh b) Hiển nhiên $f(0)=\sqrt{ab}$ và

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+(a+x)(b+x)}{x+\sqrt{(a+x)(b+x)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+b+\frac{ab}{x}}{1+\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)\left(\frac{b}{x}+1\right)}}=\frac{a+b}{2}.$$

Chứng minh c) BĐT trái là hiển nhiên theo BĐT Cauchy. Đặt $m=\left(\frac{a^s+b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}$, $x=\frac{a}{m}, y=\frac{b}{m}$ thì $x^s+y^s=2$. Theo BĐT Bernoulli ta có

$$x=(1+x^s-1)^{\frac{1}{s}}\geq 1+\frac{x^s-1}{s},$$

$$y=(1+y^s-1)^{\frac{1}{s}}\geq 1+\frac{y^s-1}{s},$$

(không đồng thời xảy ra đẳng thức). Cộng theo vế được $x+y>2$ suy ra BĐT phải.

Bài 5. *Hãy xác định tất cả các đa thức P(x) với hệ số thực thỏa mãn hệ thức sau:*

$$P(x^2)+x(3P(x)+P(-x))=(P(x))^2+2x^2 \qquad (1)$$

với mọi số thực x.

Lời giải. Giả sử $P(x)$ là đa thức cần tìm.

Dễ thấy $\deg P>0$.

1) Xét $\deg P=1$. Khi đó $P(x)=ax+b$, $a\neq 0$, thế vào (1), ta được:

$$(a^2-3a+2)x^2+2b(a-2b)x+b^2-b\equiv 0 \quad (2)$$

Từ (2) tìm được ($a=1$, $b=0$), ($a=2$, $b=0$), ($a=2$, $b=1$).

Ta được các đa thức: $P(x)=x$, $P(x)=2x$ và $P(x)=2x+1$.

2) Xét $\deg P=n>1$.

Đặt $P(x)=ax^n+S(x)$, $a\neq 0$, (3)
trong đó $S(x)$ là một đa thức, $\deg S=k<n$.

Thế (3) vào (1), ta được

$$(a^2-a)x^{2n}+(S(x))^2-S(x^2)+2ax^n.S(x)\equiv$$
$$(3+(-1)^n)ax^{n+1}+(3S(x)+S(-x))x-2x^2 \qquad (4)$$

Vì bậc của đa thức nằm ở vế phải của (4) bằng $n+1$ và $n+1<2n$ nên từ (4) ta được $a^2-a=0$, hay $a=1$. Do đó, từ (4) ta có

$$2x^n.S(x)+(S(x))^2-S(x^2)$$
$$\equiv(3+(-1)^n)x^{n+1}+(3S(x)+S(-x))x-2x^2 \qquad (5)$$

Vì bậc của đa thức nằm ở vế trái của (5) bằng $n+k$ và bậc của đa thức nằm ở vế phải của (5) bằng $n+1$ nên từ (5) suy ra phải có $k=1$. Hơn nữa, trong (5) thay $x=0$ ta được $(S(0))^2-S(0)=0$, hay $S(0)=0$ hoặc $S(0)=1$. Như vậy, $S(x)$ có dạng: $S(x)=px$ hoặc $S(x)=px+1$.

Trường hợp 1. $S(x)=px$. Thế vào (5), ta được

$$(3+(-1)n-2p)x^{n+1}-(p^2-3p+2)x^2\equiv 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3+(-1)n-2p=0\\ p^2-3p+2\quad=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $p=1, n\equiv 1 \pmod 2$ hoặc
$p=2, n\equiv 0 \pmod 2$.

Từ đó, ta được các đa thức:
$P(x)=x^{2n+1}+x$ và $P(x)=x^{2n}+2x$.

Phép thử trực tiếp cho thấy các đa thức vừa tìm được ở trên thỏa mãn (1).

Trường hợp 2. $S(x)=px+1$.
Thế vào (5), ta được

$$(3+(-1)n-2p)x^n+1-2x^n-(p^2-3p+2)x^2$$
$$-2(p-2)x\equiv 0.$$

Suy ra $2=0$. Vô lí, chứng tỏ không tồn tại đa thức $S(x)$ thỏa mãn (5), do đó không tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn (1) trong trường hợp này.

Tóm lại, tất cả các đa thức $P(x)$ cần tìm theo yêu cầu của đề bài là:
$P(x)=x$; $P(x)=x^{2n}+2x$, $P(x)=x^{2n+1}+x$, $n\in\mathbb{N}$ tùy ý.

Bài 6. *Xét tập hợp số S có 2006 phần tử. Ta gọi một tập con T của S là tập con "bướng bỉnh" nếu với hai số u, v tùy ý (có thể u = v) thuộc T luôn có u + v không thuộc T. Chứng minh rằng:*

(Xem tiếp trang 15)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

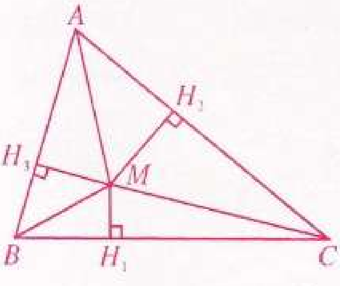
Bàn về MẤY BÀI TOÁN CỰC TRỊ trong đa giác

VŨ QUỐC LƯƠNG
(GV THCS Chu Văn An, Hà Nội)

I. Ba bài toán cực trị trong tam giác và mở rộng sang đa giác

Chúng ta đều đã gặp ba bài toán sau: Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thuộc miền tam giác ABC sao cho (h.1)

1. *Tổng $MA + MB + MC$ đạt giá trị bé nhất.*



Hình 1

2. *Tổng $MH_1 + MH_2 + MH_3$ đạt giá trị bé nhất, trong đó MH_1, MH_2, MH_3 là các khoảng cách từ M tới ba cạnh tam giác.*

3. *Tổng $MH_1 + MH_2 + MH_3$ đạt giá trị lớn nhất.*

Bài toán 1 được gọi là bài toán Torricelli, điểm M cần tìm được gọi là điểm Torricelli. Kết quả của ba bài toán này đã được giải quyết. Cụ thể là:

– Với bài toán 1: + Nếu tam giác ABC có cả ba góc đều nhỏ hơn 120^o thì điểm M cần tìm là điểm nhìn ba cạnh dưới góc 120^o.

+ Nếu tam giác ABC có một góc không nhỏ hơn 120^o, thì điểm M cần tìm là đỉnh của góc đó.

– Với bài toán 2: Điểm M cần tìm trùng với đỉnh tam giác có đường cao nhỏ nhất, hoặc toàn bộ miền tam giác ABC nếu tam giác đó đều.

– Với bài toán 3: Điểm M cần tìm trùng với đỉnh có đường cao lớn nhất hoặc toàn bộ miền tam giác ABC nếu tam giác đó đều.

Đương nhiên, ta cần xem xét liệu có lời giải cho bài toán tổng quát được hay không? Ba bài toán cực trị tương ứng cho đa giác là: *Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Tìm điểm M thuộc miền đa giác sao cho:*

Bài toán 1. (Bài toán Torricelli): *Đại lượng $\sum_{i=1}^{n} MA_i$ đạt giá trị bé nhất.*

Bài toán 2. *Đại lượng $\sum_{i=1}^{n} MH_i$ đạt giá trị bé nhất.*

Bài toán 3. *Đại lượng $\sum_{i=1}^{n} MH_i$ đạt giá trị lớn nhất, trong đó MH_i là khoảng cách từ M tới cạnh A_iA_{i+1} của đa giác* (với $A_{n+1} \equiv A_1$).

II. Nhận xét

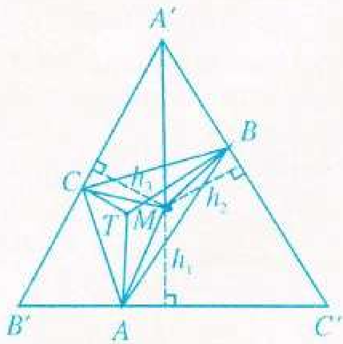
Bài toán 1 cho tam giác ABC có nhiều cách giải, nhưng đều không thể áp dụng vào việc giải bài toán tổng quát. Tôi chú ý tới một lời giải hay sau, mà nhờ đó có thể áp dụng vào bài toán 1 cho đa giác quát đồng thời giải luôn được bài toán 2 và 3 mặc dù ta thấy rằng bài toán 1 với bài toán 2 và 3 không có vẻ liên quan gì với nhau.

1) Một tính chất "đẹp" của tam giác đều: *Trong một tam giác đều, tổng các khoảng cách từ một điểm M bất kì tới ba cạnh tam giác là một hằng số không phụ thuộc vào điểm M* (bạn đọc tự chứng minh).

2) Áp dụng giải một phần bài toán 1 trong tam giác. Ta chứng minh mệnh đề: *Nếu tam giác*

ABC có điểm T nhìn ba cạnh dưới ba góc 120^o, thì T chính là điểm Torricelli của tam giác đó.

Chứng minh. (h. 2) Qua A, B, C dựng các đường thẳng tương ứng vuông góc với TA, TB, TC. Chúng cắt nhau tại A', B', C'. Do



Hình 2

$\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{ATC} = 120^o$, nên tam giác $A'B'C'$ đều. Lấy M là một điểm bất kì trong tam giác ABC. Gọi h_1, h_2, h_3 thứ tự là các khoảng cách từ M tới ba cạnh $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ của tam giác $A'B'C'$. Rõ ràng $MA \geq h_1$, $MB \geq h_2$, $MC \geq h_3$ nên $MA + MB + MC \geq h_1 + h_2 + h_3$. Áp dụng tính chất "đẹp" cho tam giác đều $A'B'C'$, ta có:

$TA + TB + TC = h_1 + h_2 + h_3$.

Vậy $TA + TB + TC \leq MA + MB + MC$ (đpcm).

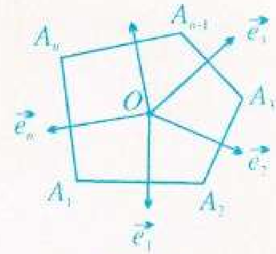
Nhận xét. Tính chất "đẹp" của tam giác đều còn có ở những đa giác không đều, chẳng hạn, hình bình hành cũng có tính chất "đẹp" tương tự như của tam giác đều và các đa giác đều. Ta gọi đó là những *tam giác hằng số, tứ giác hằng số, đa giác hằng số*. Để tìm được điều kiện cần và đủ để một đa giác lồi bất kì là *đa giác hằng số*, ta cần chính xác hóa khái niệm này và mở rộng cho cả trường hợp điểm M ở miền ngoài đa giác. Về khái niệm *đa giác hằng số* tôi đã viết trong bài: *Từ mở rộng đến đi sâu vào bản chất* trong THTT số 189, tháng 3 năm 1993. Nay xin nhắc lại một số kết quả quan trọng nhất.

III. Đa giác hằng số và vectơ đặc trưng của một đa giác

1) *Định nghĩa 1.* Đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ là một *đa giác hằng số* nếu như tổng các khoảng cách từ một điểm M trong mặt phẳng chứa đa giác tới các cạnh của đa giác là một hằng số, không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Chú ý. Khoảng cách từ M tới mỗi cạnh của đa giác được hiểu là *độ dài đại số*, dương hay âm tùy theo M và đa giác ở cùng phía hay khác phía với cạnh đó.

2) *Định nghĩa 2.* (h. 3). Cho đa giác $A_1A_2...A_n$. *Hệ vectơ đơn vị của đa giác đó* là hệ $\{\vec{e}_1, \vec{e}_i, ...\vec{e}_n\}$ đặt tại một điểm gốc O bất kì, trong đó các vectơ $\vec{e}_i$ được xác định như sau: $\begin{cases} |\vec{e}_i| = 1 \\ (\vec{e}_i, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}) = +90^o, i = \overline{1,n}. \end{cases}$



Hình 3

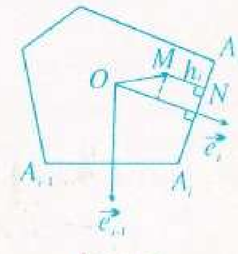
3) *Định nghĩa 3. Vectơ đặc trưng* $\vec{T}$ của đa giác $A_1A_2...A_n$ là vectơ tổng của hệ vectơ đơn vị của đa giác: $\vec{T} = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i$.

Như vậy, với một đa giác cho trước, có duy nhất một hệ vectơ đơn vị (không phụ thuộc gốc O đã chọn) và một vectơ đặc trưng $\vec{T}$.

4) *Định lí – Áp dụng vào giải bài toán 2 và 3.*

a) *Định lí.* Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ với vectơ đặc trưng $\vec{T}$. Nếu kí hiệu $\sum_{i=1}^{n} r_i$, $\sum_{i=1}^{n} \overline{h_i}$ tương ứng là tổng các khoảng cách từ O (O nói ở định nghĩa 2) và từ M tới các cạnh đa giác thì $\sum_{i=1}^{n} \overline{h_i} = \sum_{i=1}^{n} r_i - \overrightarrow{OM}.\vec{T}$ (1) ($\overrightarrow{OM}.\vec{T}$ là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\vec{T}$).

Chứng minh. (h. 4) Gọi N là hình chiếu vuông góc của M xuống $\overline{A_iA_{i+1}}$.



Hình 4

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$. Nhân vô hướng cả hai vế với $\vec{e}_i$, ta được

$\overline{h_i} = r_i - \overrightarrow{OM}.\vec{e}_i$.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \overline{h_i} = \sum_{i=1}^{n} r_i - \overrightarrow{OM}.\vec{T}$ (1) (đpcm).

b) *Áp dụng vào giải bài toán 2, bài toán 3 cho đa giác*

Xét các điểm M thuộc miền đa giác thì $\overline{h_i} = h_i$ và (1) trở thành

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} r_i - \overrightarrow{OM}.\vec{T} =$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} r_i - |\vec{T}|.\underset{\vec{T}}{\text{Ch}}\,\overrightarrow{OM} \qquad (2)$$

(với $\underset{\vec{T}}{\text{Ch}}\,\overrightarrow{OM}$ là kí hiệu hình chiếu của $\overrightarrow{OM}$ trên $\vec{T}$). Trong hệ thức (2) nếu lấy O cố định ở miền trong đa giác thì $\sum_{i=1}^{n} r_i$ là hằng số. Vậy $\sum_{i=1}^{n} h_i$ nhỏ nhất hay lớn nhất tùy theo $\underset{\vec{T}}{\text{Ch}}\,\overrightarrow{OM}$ nhỏ nhất hay lớn nhất. Lúc đó điểm M sẽ thuộc biên của đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Với đa giác cho trước, ta hoàn toàn xác định được điểm M chính xác bằng thước và compa. Trong trường hợp đặc biệt $\vec{T} = \vec{0}$, thì $\sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} r_i$, điểm M cần tìm là toàn bộ miền đa giác (nói riêng: M thuộc biên của đa giác).

5) *Điều kiện cần và đủ để một đa giác là đa giác hằng số. Áp dụng để giải một phần bài toán 1.*

Từ định lí ở trên ta có hệ quả sau đây.

a) *Hệ quả.* Điều kiện cần và đủ để giác $A_1A_2...A_n$ là một ta giác hằng số là vectơ đặc trưng $\vec{T} = \vec{0}$.

Chứng minh. Thật vậy, $A_1A_i...A_n$ là đa giác hằng số khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} r_i$ với mọi M thuộc mặt phẳng chứa đa giác đó.

Áp dụng công thức (1) có $\sum_{i=1}^{n} \overline{h_i} = \sum_{i=1}^{n} r_i - \overrightarrow{OM}.\vec{T}$.

Vậy $A_1A_2...A_n$ là đa giác hằng số

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\vec{T} = 0, \forall M \Leftrightarrow \vec{T} = \vec{0}$ (đpcm).

b) *Giải một phần bài toán 1 bằng khái niệm đa giác hằng số*

Ta có mệnh đề đủ sau:

Nếu đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ có điểm T thỏa mãn hệ thức $\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{TA_i}}{|\overrightarrow{TA_i}|} = \vec{0}$ thì điểm T chính là điểm Torricelli của đa giác đó.

Gợi ý. Qua các đỉnh A_i ta dựng các đường thẳng vuông góc với TA_i, các đường này cắt nhau tạo thành một đa giác $B_1B_2 ... B_n$ "ngoại tiếp" đa giác $A_1A_2... A_n$ và đa giác $B_1B_2 ... B_n$ là một đa giác hằng số (do vectơ đặc trưng $\vec{T}$ của đa giác này chính là $\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{TA_i}}{|\overrightarrow{TA_i}|} = \vec{O}$). Sau đó chứng minh tương tự như trong trường hợp tam giác (h. 2)

Ta thấy lời giải bài toán 1 trong tam giác đã được mở rộng sang cho đa giác bằng việc mở rộng tính chất của tam giác đều sang đa giác hằng số.

Mệnh đề trên chỉ là điều kiện đủ để nhận biết điểm Torricelli, còn nếu không có điểm T như vậy, thì không có kết luận gì. (Ta cũng thấy được khó khăn này trong trường hợp tam giác có một góc không nhỏ hơn 120^o).

Bài toán 1 vẫn còn một "khoảng trắng", mong rằng các bạn sẽ tiếp sức giải quyết nốt.

Các bạn thấy đấy: Nếu các bạn học tập một cách chủ động, sáng tạo và biết "ngạc nhiên" trước một lời giải thì bạn có thể tìm ra biết bao điều hay và thú vị. Nếu bạn đọc kĩ bài này thì bạn có thể giải được bốn bài toán tổng quát sau đây:

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ và bộ số α_i ($i = \overline{1, n}$). Tìm điểm M ở miền đa giác sao cho:

1) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MA_i$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MH_i$ *đạt giá trị nhỏ nhất, trong đó MH_i với $i = \overline{1, n}$ là khoảng cách từ M tới các cạnh đa giác.*

3) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MH_i$ *đạt giá trị lớn nhất.*

4) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MH_i$ *là một hằng số cho trước.*

Chúc các bạn thành công.

Khai thác một bài toán BẤT ĐẲNG THỨC

TÔN THẤT HIỆP
(GV THPT Phan Đăng Lưu, Thừa Thiên - Huế)

Trong bài viết này chúng tôi đưa ra một bài toán bất đẳng thức quen thuộc và giải nó; đồng thời sử dụng các phép suy luận như đặc biệt hoá, tổng quát hoá; các phương pháp tư duy phân tích, tư duy tổng hợp để hình thành nên các bài toán mới và nêu cách giải chúng. Trong bài này kí hiệu $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71$.

Bài toán 1. *Cho hai số thực x, y thỏa mãn* $x > y \geq e$. *Chứng minh rằng* $y^x > x^y$.

Lời giải. Ta có $y^x > x^y \Leftrightarrow \frac{\ln y}{y} > \frac{\ln x}{x}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t}$, $t \in [e; +\infty)$, ta có

$f'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln t = 1 \Leftrightarrow t = e$ và

$f'(t) < 0$ với thì $t > e$ suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(e; +\infty)$. Vì vậy với $x > y \geq e$

thì $f(y) > f(x) \Leftrightarrow \frac{\ln y}{y} > \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow y^x > x^y$. □

Lời bình.

Nếu áp dụng bài toán 1 cho $m, n \in \mathbb{N}$ với $m > n \geq 3$ thì $n^m > m^n$. Vấn đề đặt ra là có tồn tại số a lớn nhất để cho $n^m \geq m^n + a$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq 3$ hay không? Trước khi giải quyết vấn đề này, ta tìm a trong một số trường hợp của m và n. Chẳng hạn khi cho $n = 3$ hoặc $m = n + 1$, chúng tôi đã tìm được giá trị a lớn nhất trong các trường hợp này là 17.

Bài toán 2. a) *Tìm a lớn nhất sao cho* $3^m \geq m^3 + a$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$.

b) *Tìm a lớn nhất sao cho* $n^{n+1} \geq (n+1)^n + a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Lời giải.

a) Xét dãy số (u_m) với $u_m = 3^m - m^3$, $m \geq 4$.

* Đặt $T_m = u_{m+1} - u_m = 2.3^m - 3m^2 - 3m - 1$, ta chứng minh $T_m > 0$, $\forall m \geq 4$.

Với $m = 4$, ta có $T_4 = 17 > 0$.

Giả sử $T_m > 0$, $m \geq 4$, khi đó

$$T_{m+1} = 2.3^{m+1} - 3(m+1)^2 - 3(m+1) - 1$$
$$= 3T_m + (6m^2 - 4) > 0.$$

Do đó $T_m > 0, \forall m \geq 4$. Từ đó (u_m) là dãy số tăng. Vậy với $\forall m \geq 4$, ta có $u_m \geq u_4 = 17 \Rightarrow 3^m \geq m^3 + 17$.

* Giả sử tồn tại số a_0 sao cho $a_0 > 17$ và $3^m \geq m^3 + a_0$, $\forall m \geq 4$ thì $3^4 \geq 4^3 + a_0$, trái với giả sử $a_0 > 17$.

Vậy $a = 17$ là lớn nhất.

b) Xét dãy số (v_n) với $v_n = n^{n+1} - (n+1)^n$, $n \geq 3$.

* Chứng minh (v_n) là dãy tăng với mọi $n \geq 3$.

Ta có $v_{n+1} > v_n$

$$\Leftrightarrow (n+1)^{n+2} - (n+2)^{n+1} > n^{n+1} - (n+1)^n$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^{n+1}\left(n+1+\frac{1}{n+1}\right) > (n+2)^{n+1} + n^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow n+1+\frac{1}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad (1)$$

Ta chứng minh (1) đúng với mọi $n \geq 3$.

Thật vậy ta có

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+1+\sum_{k=2}^{n+1} C_{n+1}^{k} \cdot \frac{1}{(n+1)^{k}}$$

$$= 2+\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!.(n+1)^{k}} < 2+\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}$$

$$< 2+\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)k} = 2+\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$= 3-\frac{1}{n+1} < 3.$$

Mặt khác ta có $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 1$ suy ra

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 4 < n+1+\frac{1}{n+1}, \forall n \geq 3.$$

BĐT (1) đã được chứng minh. Vậy (v_n) là một dãy tăng, do đó với mọi $n \geq 3$ ta có $v_n \geq v_3 = 17$ hay $n^{n+1} \geq (n+1)^n + 17$.

* Giả sử tồn tại số a_0 sao cho $a_0 > 17$ và

$n^{n+1} \geq (n+1)^n + a_0$, $\forall n \geq 3 \Rightarrow 3^4 \geq 4^3 + a_0$ $\Rightarrow 17 \geq a_0$, trái với giả sử $a_0 > 17$.

Vậy $a = 17$ là lớn nhất.

Từ cách giải câu b) của bài toán 2, chúng tôi tìm ra lời giải của bài toán 3.

✪ **Bài toán 3.** *Tìm a lớn nhất sao cho* $n^m \geq m^n + a$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq 3$.

Hướng dẫn. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq 3$, xét hàm số $f(x) = n^x - x^n$, $x \in [n; +\infty]$; chứng minh hàm số $f(x)$ là hàm số tăng trên khoảng $(n; +\infty)$. Từ đó tìm được $a = 17$.

Từ cách giải của bài toán 3 và bài toán1, chúng tôi đề xuất bài toán sau đây.

✪ **Bài toán 4.** *Tìm tất cả các nghiệm nguyên (m; n) của phương trình:* $n^m = m^n + 17$.

ĐS: Phương trình có ba nghiệm nguyên $(m; n)$ là $(1; 18)$, và $(4; 3)$, $(-16; 1)$.

LỜI GIẢI... *(Tiếp trang 10)*

1) Nếu S là tập hợp gồm 2006 số nguyên dương đầu tiên thì mỗi tập con "bướng bỉnh" của S đều có không quá 1003 phần tử.

2) Nếu S là tập hợp gồm 2006 số nguyên dương tùy ý thì tồn tại một tập con "bướng bỉnh" của S có 669 phần tử.

Lời giải. 1) Xét A là tập con "bướng bỉnh" gồm x phần tử $a_1 < a_2 < \ldots < a_x$ của $S = \{1, 2, \ldots, 2006\}$. Khi đó $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_x - a_1\}$ là một tập con gồm $x - 1$ phần tử của S. Do A là tập con "bướng bỉnh" cho nên $A \cap B = \varnothing \Rightarrow x + (x - 1) \leq 2006 \Rightarrow x \leq 1003$.

2) Giả sử tập hợp đã cho là $S = \{a_1, \ldots, a_{2006}\}$. Gọi P là tích của tất cả các ước số lẻ của $\prod_{i=1}^{2006} a_i$. Dễ thấy tồn tại số nguyên tố p có dạng $p = 3r + 2$ là ước của $3P + 2$. Số nguyên tố p này nguyên tố cùng nhau với tất cả các số a_i đã cho. Với mỗi số $a \in S$, dãy $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ là một hoán vị của $1, 2, \ldots, p-1$ theo mod p nên tồn tại *tập hợp* A_a gồm $r + 1$ số nguyên $x \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ để xa theo mod p thuộc $A = \{r+1, \ldots, 2r+1\}$. Với mỗi $x \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, kí hiệu $S_x = \{a \in S : xa \in A\}$, ta có

$$|S_1| + |S_2| + \ldots + |S_{p-1}| = \sum_{a \in S} |A_a| = 2006.(r+1).$$

Do đó tồn tại x_0 sao cho

$$|S_{x_0}| \geq \frac{2006.(r+1)}{3r+1} > 668.$$

Chọn B là tập con gồm 669 phần tử của S_{x_0}, khi đó B là một tập con "bướng bỉnh" của S.

Thật vậy, nếu chọn $u, v, w \in B$ (u có thể bằng v), thì $x_0u, x_0v, x_0w \in A$. Kiểm tra thấy $x_0u + x_0v \neq x_0w \pmod p$, cho nên $u + v \neq w$.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/354. (Lớp 6)

a) Tìm tất cả các số tự nhiên có thể viết được dưới dạng tổng hai số nguyên lớn hơn 1 và nguyên tố cùng nhau.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên có thể viết được dưới dạng tổng ba số nguyên lớn hơn 1 và đôi một nguyên tố cùng nhau.

TRẦN QUỐC HOÀN
(K50CA- ĐH Công nghệ, ĐHQG Hà Nội)

Bài T2/354. (Lớp 7) Cho tam giác ABC có góc $\widehat{ABC}$ nhọn. Cho K là một điểm thuộc cạnh AB và H là hình chiếu vuông góc của nó trên BC. Một tia Bx cắt đoạn KH tại E, cắt đường thẳng đi qua K và song song với BC tại F. Chứng minh rằng $\widehat{ABC}=3\widehat{CBF}$ khi và chỉ khi $EF = 2BK$.

TRẦN ANH TUẤN
(GV THCS Nhân Phú, Lý Nhân, Hà Nam)

Bài T3/354. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho tích các chữ số của nó bằng

$$(n-86)^2(n^2-85n+40).$$

NGUYỄN XUÂN THUỶ
(K29D Toán, ĐHSP Hà Nội 2)

Bài T4/354. Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca < \sqrt{3}d^2,$$

trong đó a, b, c, d là các số thực thoả mãn các điều kiện sau :

i) $0 < a, b, c < d$;

ii) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}=\dfrac{2}{d}.$

ĐẶNG THANH HẢI
(GV Học viện Phòng không - Không quân, Hà Tây)

Bài T5/354. Giải phương trình

$$x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^3+x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}.$$

HOÀNG ANH TUẤN
(GV TTGDTX Văn Bàn, Lào Cai)

Bài T6/354. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $AM = 3MD$. Kẻ tia Bx cắt cạnh CD tại I sao cho $\widehat{ABM}=\widehat{MBI}$. Kẻ tia phân giác BN ($N\in CD$) của góc $\widehat{CBI}$. Tính diện tích tam giác BMN.

LƯƠNG VĂN BÁ
(GV THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài T7/354. Cho BC là dây cung cố định (không là đường kính) của đường tròn. Trên cung lớn BC lấy một điểm A bất kì không trùng với B và C. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Giao điểm thứ hai của đường thẳng BC với các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH và ACH lần lượt là E và F. EH cắt cạnh AC tại M, FH cắt cạnh AB tại N. Hãy xác định vị trí điểm A sao cho độ dài đoạn MN là ngắn nhất.

PHẠM THỊ BÉ
(Kiến Xương, Thái Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/354. Có bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó có 3 chữ số lẻ khác nhau và 3 chữ số chẵn khác nhau mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần?

ĐỖ THANH HÂN
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

Bài T9/354. Với mỗi số nguyên dương n, ta xét hàm số f_n trên $\mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f_n(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x^2 + x + 1.$$

a) Chứng minh rằng hàm số f_n đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm duy nhất.

b) Gọi giá trị nhỏ nhất của hàm số f_n là S_n đạt tại điểm x_n. Chứng minh rằng :

i) $S_n > \dfrac{1}{2}$ với mọi n và không tồn tại số thực $a > \dfrac{1}{2}$ sao cho $S_n > a$ với mọi n.

ii) (S_n) $(n = 1, 2, ...)$ là dãy giảm và $\lim S_n = \frac{1}{2}$.

iii) $\lim x_n = -1$.

TRẦN TUẤN ANH
(*Khoa Toán-Tin ĐHKHTN, ĐHQG TP. HCM*)

Bài T10/354. Cho

$$A=\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{16x^2+\sqrt{100x^2+39x+\sqrt{3}}}}}.$$

Hãy tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá A khi $x = 20062007$.

ĐÀM HUY ĐÔNG
(*Phòng Giáo dục Văn Giang, Hưng Yên*)

Bài T11/354. Cho tam giác ABC với các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh BC, CA, AB. Các tia IA, IB, IC cắt đường tròn (I) tại A_2, B_2, C_2 theo thứ tự. Đặt $B_iC_i = a_i$, $C_iA_i = b_i$, $A_iB_i = c_i$ (i = 1, 2). Chứng minh rằng

$$\frac{a_2^3b_2^3c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \ge \frac{216r^6}{abc}.$$ Đẳng thức xảy ra khi nào ?

LÊ QUỐC THUỶ
(*CB phòng Kế toán UBND tỉnh Quảng Trị*)

Bài T12/354. Cho tứ diện $OABC$ có $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA} = 180^0$. Gọi OA_1, OB_1, OC_1 theo thứ tự là đường phân giác trong của các tam giác OBC, OCA, OAB. Gọi OA_2, OB_2, OC_2 theo thứ tự là đường phân giác trong của các tam giác OAA_1, OBB_1, OCC_1. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{AA_1}{A_2A_1}\right)^2+\left(\frac{BB_1}{B_2B_1}\right)^2+\left(\frac{CC_1}{C_2C_1}\right)^2 \ge \left(2+\sqrt{3}\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

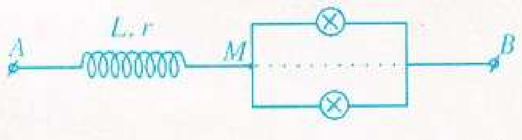
TRẦN VŨ HOÀNG ĐẢO
(*GV THPT Lê Quý Đôn, Long An*)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/354. Một người đang chạy với vận tốc $\vec{v}$ trên mặt đất, ném một hòn đá với vận tốc ban đầu $\vec{u}$ so với người đó. Biết $u = v$, hãy tìm góc β hợp bởi vectơ $\vec{u}$ với phương ngang để tầm ném xa theo phương ngang của hòn đá là lớn nhất. Bỏ qua sức cản không khí và chiều cao người.

LÊ HÀ KIỆT
(*SV DD05LT05 khoa Điện - Điện tử ĐHBK TP. Hồ Chí Minh*)

Bài L2/353. Cho mạch điện như hình vẽ.



Đặt vào A, B một hiệu điện thế xoay chiều có giá trị hiệu dụng $U = 220$V và tần số $f = 50Hz$. Giữa M và B có thể mắc vào các bóng đèn giống nhau ghi 110V–55W. Khi mắc vào giữa M và B hai bóng đèn thì các đèn sáng bình thường và công suất tiêu thụ trên toàn mạch là $P = 180$W. Hỏi có thể mắc vào giữa M và B bao nhiêu bóng đèn để công suất tiêu thụ trên toàn mạch là lớn nhất ?(Coi rằng điện trở các bóng đèn khi hoạt động có giá trị không đổi).

NGUYỄN MINH TUẤN
(*GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/354. (for 6th grade)

a) Find all natural number, each of which can be written as the sum of two relatively prime integers greater than 1.

b) Find all natural numbers, each of which can be written as the sum of three pairwise relatively prime integers greater than 1.

T2/354. (for 7th grade)

Let ABC be a triangle with acute angle $\widehat{ABC}$. Let K be a point on the side AB, and H be its...

(*Xem tiếp trang 28*)

★ Bài T1/350. (Lớp 6). *Chứng minh rằng*

$A = 2005^{2007^{2006}} + 2006^{2005^{2007}} + 2007^{2006^{2005}}$

chia hết cho 102.

Lời giải.

• Xét tích các số dạng $am + 1$ hoặc $an - 1$, trong đó a, m, n là các số nguyên ta có kết quả sau:

$$(am + 1)(an + 1) = a^2mn + am + an + 1 = ak + 1 \qquad (1)$$

$$(am - 1)(an - 1) = a^2mn - am - an + 1 = ah + 1 \qquad (2)$$

$$(am + 1)(an - 1) = a^2mn - am + an - 1 = at - 1 \qquad (3)$$

trong đó k, h, t là các số nguyên.

• Ta thấy $102 = 3.34$ mà $(3, 34) = 1$ nên nếu chứng minh được A chia hết cho 3 và 34 thì A chia hết cho 102.

Lấy $a = 3$ ta thấy $2007 = 3.669 = 3n$ nên

$$2007^{2006^{2005}} = (3n)^{2006^{2005}} = 3r \qquad (4)$$

Theo (1) có

$$2005^{2007^{2006}} = \left(3(n-1)+1\right)^{2007^{2006}} = 3k+1 \qquad (5)$$

Theo (1), (2), (3) với $2005^{2007} = 2s + 1$ có

$$2006^{2005^{2007}} = (3n-1)^{2s+1} = (3h+1)^s(3n-1) = 3u - 1 \qquad (6)$$

Từ (4) (5) (6) với n, r, k, h, s, u là các số nguyên ta được $A = 3k + 1 + 3u - 1 + 3r = 3(k + u + r)$ chia hết cho 3. (*)

Mặt khác lấy $a = 34$ ta thấy $2006 = 34.59 = 34n$ nên

$$2006^{2005^{2007}} = (34n)^{2005^{2007}} = 34r \qquad (7)$$

Theo (1) có

$$2007^{2006^{2005}} = (34n+1)^{2007^{2005}} = 34k + 1 \qquad (8)$$

Theo (1), (2), (3) với $2007^{2006} = 2m + 1$ có

$$2005^{2007^{2006}} = (34n-1)^{2m+1} = (34h+1)^m(34n-1) = 34v - 1 \qquad (9)$$

Từ (7), (8), (9) với n, r, k, h, m, v là các số nguyên ta được

$A = 34v - 1 + 34r + 34k + 1 = 34(v + r + k)$ chia hết cho 34. (**)

Từ (*) và (**) ta có A chia hết cho 102. □

Nhận xét. 1) Khá đông các bạn sử dụng đồng dư thức nên lời giải gọn, nhưng ở lớp 6 phổ thông không học khái niệm này. Một số bạn trình bày chưa chuẩn xác, chẳng hạn "2007: 17 dư 1", hoặc "2005 = BS3 + 1", hoặc không chỉ ra (3, 34) = 1.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Đinh Văn Việt*, 6A2, THCS II TTr. Thanh Ba; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Phương Liên, Hoàng Quỳnh Liên, Nguyễn Thị Huân, Nguyễn Kiều Anh, Bùi Thị Ngọc Bích, Nguyễn Hoàng Hào, Tạ Thị Việt Chinh*, 6A1, THCS Yên Lạc, *Phùng Thị Nhung, Lê Văn Dũng, Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Kiều Thị Thùy Nguyên*, 6A1, THCS Thạch Đà, Mê Linh, *Lê Thanh Nga*, 6A1, THCS Trưng Vương, Mê Linh, *Lương Phúc Quang*, 6C, THCS Vĩnh Tường; **Hà Tây:** *Tạ Việt Anh*, 6A1, THCS Võng Xuyên, Phúc Thọ; **Hà Nội:** *Lê Hồng Dung*, 6A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Cầu Giấy, *Nguyễn Hoàng Thiện Ngân*, 6A1, THCS Ngô Sĩ Liên, Hoàn Kiếm, *Đỗ Trường Sơn*, 6E, THCS Phan Chu Trinh, Ba Đình; **Bắc Ninh:** *Vũ Thắng*, 6B, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Nam Định:** *Trần Thị Nhàn*, 6A3, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Thắng*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Viết Trung*, 6B, THCS Nguyễn Trãi, Tân Kỳ; **Thừa Thiên – Huế:** *Hoàng Phước Nhã Thi*, 6/1, THCS Nguyễn Tri Phương, TP. Huế; **Bình Định:** *Từ Thị Thanh Nhàn*, 6A1, THCS Phù Cát; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Bảo Nhi*, 6/5, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Ngọc Yến*, 6A3, THCS Lê Hồng Phong, Liên Nghĩa, Đức Trọng.

VIỆT HẢI

★ Bài T2/350. (Lớp 7) *Xét tổng gồm n số hạng*

$$S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+\ldots+n},$$

với $n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm số hữu tỉ a nhỏ nhất để $S_n < a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Ta đã biết, với k là số nguyên dương thì

$$\frac{1}{1+2+\ldots+k} = \frac{2}{k(k+1)} = 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Thay lần lượt $k = 1, 2, \ldots, n$ ta được

$$S_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}.$$

Như vậy $S_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta sẽ chứng minh $a = 2$ là số hữu tỉ nhỏ nhất để $S_n < a, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, giả sử tồn tại số hữu tỉ $b < 2$ sao cho $S_n < b, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó $S_n = 2-\frac{2}{n+1} < b \Rightarrow 2-b < \frac{2}{n+1}$.

Vì $b < 2$ nên $2 - b > 0$, suy ra $n + 1 < \frac{2}{2-b}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Điều này không xảy ra khi ta chọn n là số nguyên lớn hơn $\frac{2}{2-b}$.

Vậy số hữu tỉ cần tìm là $a = 2$. ❐

Nhận xét. 1) Nhiều bạn gửi bài về Tòa soạn, đều tìm ra kết quả $a = 2$, tuy nhiên còn thiếu lập luận $a = 2$ là số hữu tỉ nhỏ nhất hoặc lập luận chưa chính xác.

2) Các bạn sau có lời giải tốt :

Bắc Ninh: *Vũ Thắng*, 6B, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Phú Thọ:** *Nguyễn Quốc Hùng*, 7E, THCS Văn Lang, Việt Trì, *Trần Thủy Linh*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Minh Hiếu*, 7A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; *Mạc Thị Thu Huệ*, 7A, THCS Đồng Quế, Lập Thạch; **Hải Dương:** *Vũ Tuấn Anh*, 7A2, THCS Vũ Hữu, Bình Giang; **Nghệ An:** *Đậu Thế Vũ*, 7B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Nguyễn Văn Quân*, Đội I, Xuyên Lộc.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/350. *Tìm các nghiệm tự nhiên (x; y) của phương trình*

$$(x^2 + 4y^2 + 28)^2 = 17(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49).$$

Lời giải. Ta biến đổi phương trình như sau:

$$[x^2+4(y^2+7)]^2=17[x^4+(y^2+7)^2]$$
$$\Leftrightarrow x^4+8x^2(y^2+7)+16(y^2+7)^2$$
$$=17x^4+17(y^2+7)^2$$
$$\Leftrightarrow 16x^4-8x^2(y^2+7)+(y^2+7)^2=0$$

$\Leftrightarrow[4x^2-(y^2+7)]^2=0$. Ta thấy

$$4x^2-y^2-7=0 \Leftrightarrow (2x+y)(2x-y)=7 \quad (1)$$

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $2x+y \geq 2x-y$ và $2x+y \geq 0$.

Do đó, từ (1) suy ra $\begin{cases}2x+y=7\\2x-y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=3.\end{cases}$

Vậy phương trình có một nghiệm tự nhiên là $(x; y) = (2; 3)$. ❐

Nhận xét. 1) Có thể giải bài toán bằng cách sử dụng bất đẳng thức Bunhiacovski để chứng minh $[x^2+4(y^2+7)]^2 \leq 17[x^4+(y^2+7)^2]$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $4x^2=y^2+7$, rồi làm như trên.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Tuấn Phong*, 7A1, THCS Chu Văn An, *Lê Hồng Dung*, 6A1, THPT Nguyễn Tất Thành, *Đỗ Trường Sơn*, 6E, THCS Phan Chu Trinh, *Nguyễn Nguyệt Anh* 7A11, THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Thắng*, 6B, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Lê Văn Dũng, Lê Thị Thanh Loan*, 6A1, THCS Thạch Đà, Mê Linh; *Phùng Ngọc Quý, Nguyễn Thị Ngọc, Nguyễn Thị Giang A, Bùi Văn Toàn, Lê Thị Tuyết Mai, Nguyễn Thị Kim Tuyến*, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; *Mạc Thị Thu Quế*, 7A, THCS Đồng Quế, *Khổng Hoàng Trang*, 7D, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; **Phú Thọ:** *Triệu Thị Quỳnh Mai*, 7A3, *Tạ Đức Trung*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hải Dương:** *Mạc Đức Huy*, 7C, THCS Phạm Sư Mạnh, Kim Môn; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Tiến Liên*, 7A, THCS Yên Trường, Yên Định, *Trương Quốc Cường*, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Hà Tây:** *Nguyễn Thị Ngọc Anh*, 7A1, THCS Tế Tiêu, TT Đại Nghĩa, Mĩ Đức; **Nam Định:** *Phạm Phi Điệp*, 7A, THCS Yên Thọ, Ý Yên, *Nguyễn Thu Trang*, 7A, THCS Hồng Thuận, Giao Thủy; **Nghệ An:** *Đinh Thị Thủy*, 7A, THCS Diễn Kim, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Lê Công Minh*, 7A, THCS Bình An, Can Lộc; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thị Ngọc Giàu*, 7^5, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Triệu Phong; **Bình Định:** *Lê Thị Hoàng Nguyên*, 6A1, THCS Nhơn Lộc, An Nhơn; **Gia Lai:** *Nguyễn Phú Đức*, 7/5, THCS Nguyễn Du, TP Pleiku; **Ninh Thuận:** *Tô Đình Tân*, 7_3, THCS Nguyễn Trãi, TX Phan Rang; **Đồng Nai:** *Nguyễn Văn Nhơn*, 7E, THCS Nguyễn Hữu Cảnh, Cẩm Mỹ.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T4/350. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{x+z}=\frac{1}{3}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{4}\end{cases} \quad (I)$$

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $x \neq -y$, $y \neq -z$, $z \neq -x$. (1)

Khi đó: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = \dfrac{xy+xz}{2} \\ x+y+z = \dfrac{yz+yx}{3} \\ x+y+z = \dfrac{zx+zy}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{xy+xz}{2} = \dfrac{yz+yx}{3} = \dfrac{zx+zy}{4} = \dfrac{xy+yz+zx}{4,5}$

$= \dfrac{yz}{2,5} = \dfrac{zx}{1,5} = \dfrac{xy}{0,5}$.

Do $z \neq 0$, $y \neq 0$ nên suy ra: $y = \dfrac{5}{3}x$, $z = 5x$.

Thay vào phương trình đầu của (I), ta được:

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\dfrac{5}{3}x+5x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{23}{10}, y = \dfrac{23}{6}, z = \dfrac{23}{2}$.

Các giá trị này thỏa mãn điều kiện (1) và thỏa mãn hệ (I). Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x\,;\,y\,;\,z)$ là $\left(\dfrac{23}{10};\dfrac{23}{6};\dfrac{23}{2}\right)$. ❐

Nhận xét. 1) Trong gần 200 bạn tham gia giải bài này chỉ có 10 bạn giải sai, còn lại đều đúng. Sử dụng tính chất các tỉ số bằng nhau: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\pm c}{b\pm d}$ sẽ cho lời giải gọn gàng hơn.

2) Các bạn có lời giải tốt là:
Vĩnh Phúc: *Trần Bá Trung*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Tạ Đức Thành*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hưng Yên:** *Phạm Trung Kiên*, 8A1, THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi; **Hải Dương:** *Trần Văn Hạnh*, Đội 9, Nghĩa An, Ninh Giang; **Thanh Hóa:** *Trịnh Thanh Giang*, 9B, THCS Hàm Rồng, TP. Thanh Hóa, *Nguyễn Tiến Liên*, 7A, THCS Yên Trường, Yên Định; **Nghệ An:** *Dương Hoàng Hưng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Trần Thị Mến*, 9E, THCS Trà Lĩnh, Phú Lộc, Can Lộc.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T5/350. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \sqrt{2x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{4z+1}$$

trong đó x, y, z là ba số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=4$.

Lời giải.

• Từ giả thiết $x+y+z=4$ áp dụng BĐT Bunhiacovski ta có

$$P^2 = \left(\sqrt{2}.\sqrt{x+\frac{1}{2}} + \sqrt{3}.\sqrt{y+\frac{1}{3}} + \sqrt{4}.\sqrt{z+\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$\leq (2+3+4)\left(x+y+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{183}{4}.$$

suy ra $P \leq \dfrac{\sqrt{183}}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=4 \\ \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}\left(y+\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{4}\left(z+\dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{17}{27}$; $y = \dfrac{49}{36}$; $z = \dfrac{217}{108}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{\sqrt{183}}{2}$.

• Đặt $a = \sqrt{2x+1}$, $b = \sqrt{3y+1}$, $c = \sqrt{4z+1}$ thì $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$. Ta có

$a^2+b^2+c^2 = 3+2(x+y+z)+(y+2z)$

$\geq 3+2.4 = 11;$

$(a-1)(b-1)+(b-1)(c-1)+(c-1)(a-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca \geq -3+2(a+b+c) = 2P-3.$

Từ đó suy ra $P^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\geq 11+2(2P-3) \Rightarrow (P+1)(P-5) \geq 0 \Rightarrow P \geq 5.$

$P = 5 \Leftrightarrow x = 4; y = z = 0.$

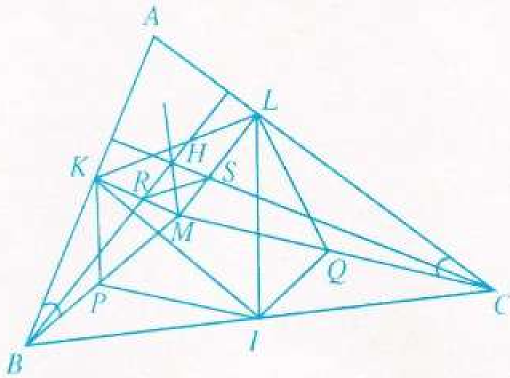
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5. ❐.

Nhận xét. 1) Đa số các bạn tham gia giải đều làm đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn:
Phú Thọ: *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Thái Nguyên:** *Đào Hoàng Tùng*, 8A3, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Hải Dương:** *Trần Văn Hạnh*, Đội 9, Nghĩa An, Ninh Giang, *Phạm Ngọc Dương*, 9B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Thái Bình:** *Nguyễn Quốc Trường*, 9A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải; **Nam Định:** *Trần Thị Hồng Vân*, 9D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực; **Thanh Hóa:** *Hoàng Kiên An*, 9E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn; **Nghệ An:** *Hồ Hữu Quân*, 9C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Đậu Thế Vũ*, 7B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Kiên Giang:** *Võ Đức Huy*, 9/4, THCS Lê Quý Đôn, TP. Rạch Giá; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 7/7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Đắk Lắk:** *Nguyễn Hoàng Phương*, 9E, THCS Chu Văn An, Eakar.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T6/350. *Giả sử M là một điểm nằm trong tam giác nhọn ABC thỏa mãn điều kiện $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$. Gọi K, L theo thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ M tới AB, AC. Chứng minh rằng hai điểm K, L cách đều trung điểm* *của cạnh BC và trung tuyến xuất phát từ M của tam giác MKL luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi bên trong tam giác ABC.*

Lời giải. • Gọi P, Q, I lần lượt là trung điểm của BM, CM, BC. Ta có $IPMQ$ là hình bình hành. Từ đó $IP = MQ$, $MP = QI$ và $\widehat{MPI} = \widehat{MQI}$ (1)



Xét ΔKMB vuông có : $KP = \dfrac{1}{2}MB$ nên $KP = IQ$.

Tương tự $PI = LQ$.

Mặt khác $\widehat{KPM} = 2\widehat{ABM}$; $\widehat{LQM} = 2\widehat{ACM}$.

Do giả thiết $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$ nên $\widehat{KPM} = \widehat{LQM}$ (2).

Từ (1) và (2) có $\widehat{KPI} = \widehat{LQI}$.

Vậy $\Delta KPI = \Delta IQL$ (c.g.c).

Suy ra $KI = LI$ hay K, L cách đều trung điểm của cạnh BC.

• Gọi H là trực tâm ΔABC, S là giao điểm của CH với ML và R là giao điểm của BH với MK.

Ta có $\Delta BKM \backsim \Delta CLM$. Nên $\dfrac{BK}{CL} = \dfrac{KM}{LM}$.

$\Delta BKR \backsim \Delta CLS$, nên $\dfrac{BK}{CL} = \dfrac{KR}{LS}$.

Do đó $\dfrac{KM}{LM} = \dfrac{KR}{LS}$ hay $\dfrac{KR}{KM} = \dfrac{LS}{LM}$.

Theo định lí Thales đảo suy ra $RS // KL$.

Cùng với $MRHS$ là hình bình hành nên MH đi qua trung điểm của RS, suy tiếp ra MH đi qua trung điểm của KL. Nói cách khác, trung tuyến xuất phát từ đỉnh M của ΔMKL luôn đi qua trực tâm H của ΔABC. ❐

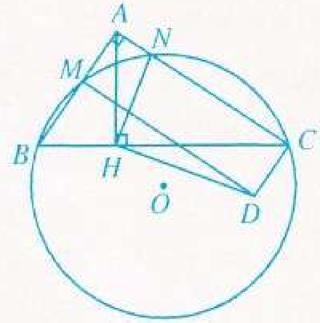
Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn:

Bắc Giang: *Tạ Ngọc Cảnh*, 9A, THCS Đức Thắng, Hiệp Hòa; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoàng Hải*, 10A1, THPT chuyên; **Hưng Yên:** *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ; **Thái Bình:** *Phạm Mạnh Cường*, 9C, THCS TTr. Quỳnh Côi; **Thanh Hóa:** *Lê Trần Mạnh*, 8D, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Yên:** *Phan Long Trí Yên*, 8H, THCS Hùng Vương, Tuy Hòa; **Kiên Giang:** *Võ Đức Huy*, 9/4, THCS Lê Quý Đôn, Rạch Giá.

VŨ KIM THỦY

★Bài T7/350. *Cho tam giác ABC vuông ở A và đường cao AH. Một đường tròn đi qua B và C cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Vẽ hình chữ nhật AMDC. Chứng minh rằng HN vuông góc với HD.*

Lời giải.



Do tứ giác $BMNC$ nội tiếp nên $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$, dẫn đến $\Delta AMN \backsim \Delta HCA$.

Vậy $\dfrac{AM}{CH} = \dfrac{AN}{AH}$

$\Rightarrow \dfrac{CD}{CH} = \dfrac{AN}{AH}$ (1)

(vì $AMDC$ là hình chữ nhật).

Mặt khác $\widehat{HCD} = \widehat{HAN}$ (hai góc có các cạnh tương ứng vuông góc) (2)

Từ (1), (2) có $\Delta HAN \backsim \Delta HCD$.

Do đó $\widehat{AHN} = \widehat{CHD}$, mà $\widehat{AHN} + \widehat{CHN} = 90^\circ$

nên $\widehat{CHD} + \widehat{CHN} = 90^\circ$, hay $HN \perp HD$. ❐

Nhận xét. 1) Bài toán vẫn đúng khi đường tròn đi qua B và C cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự ở M và N. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Hữu Thanh*, 8A3, *Tạ Đức Thành*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hưng Yên:** *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ; **Hải Dương:** *Tạ Văn Đức*, 9B, THCS Thượng Vũ, Kim Thành; **Nam Định:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 9H, THCS Hàn Thuyên, TP. Nam Định; **Hòa Bình;** *Bùi Minh Đức*, 8A3, THCS Chi Nê, Lạc Thủy; **Đắk Lắk:** *Bùi Đình An*, Tân Lập, Eakpam, CưM'gar; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Nguyễn Văn Triển*, 8A, THCS Đội I, Xuyên Lộc.

HỒ QUANG VINH

★Bài T8/350. *Cho a là một số tự nhiên lớn hơn 1. Xét tập hợp khác rỗng $A \subset \mathbb{N}$ thỏa mãn* *điều kiện: Nếu $k \in A$ thì $k + 2a \in A$ và $\left[\frac{k}{a}\right] \in A$ (kí hiệu $[x]$ chỉ phần nguyên của x). Chứng minh rằng $A = \mathbb{N}$.*

Lời giải. (Theo bạn *Hoàng Đức Ý*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**).

• Trước hết ta chứng minh số $0 \in A$. Thật vậy giả sử trái lại, gọi k ($k > 0$) là phần tử bé nhất của A thì $\left[\frac{k}{a}\right] \le \frac{k}{a} < k$ do $a > 1$. Vì $\left[\frac{k}{a}\right] \in A$ nên mâu thuẫn với việc k là phần tử bé nhất của A. Vì $0 \in A$ nên $0 + 2a = 2a \in A \Rightarrow 2a + 2a = 4a \in A$. Tương tự như vậy với mọi $k \in N$ ta có $2ka \in A$. Suy ra $2k = \left[\frac{2ka}{a}\right] \in A$. Vậy A chứa tất cả các số chẵn.

• Bây giờ giả sử $n \in \mathbb{N}$ bất kì. Trong hai số na và $na + 1$ có một số chẵn. Gọi số đó là $2k$. Khi đó $na \le 2k < na + a = (n + 1)a$ (do $a > 1$) thành thử $\left[\frac{2k}{a}\right] = n$. Vì $2k \in A$ nên $n \in A$. Vậy $\mathbb{N} = A$. ❐

Nhận xét. Bài này được nhiều bạn tham gia giải với rất nhiều cách khác nhau. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Đà Nẵng:** *Nguyễn Như Quốc Trung*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** *Đào Anh Tú*, 10A2 Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội; **Bắc Giang:** *Nguyễn Ngọc Ánh*, 10T, THPT chuyên; **Ninh Bình:** *Trần Thị Tươi*, 11 chuyên, THPT Lương Văn Tụy; **Thanh Hóa:** *Trần Hoàng Đại*, THPT Triệu Sơn, Triệu Sơn; **Hải Phòng:** *Lê Trung Hiếu*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú; **Hà Tĩnh:** *Phạm Quốc Duẩn*, 11T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Phúc:** *Trần Tấn Phong*, 11A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hải Dương:** *Phan Tiến Thành*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T9/350. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho*

$$9f(8x) - 9f(4x) + 2f(2x) = 100x, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Viết điều kiện (1) dưới dạng

$3[3f(8x) - 2f(4x) - 40x] = 3f(4x) - 2f(2x) - 20x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ hay $3g(2x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

trong đó $g(x) = 3f(4x) - 2f(2x) - 20x$ (3)

Từ (2), bằng quy nạp toán học, ta thu được

$$g(x) = \frac{1}{3^n} g\left(\frac{x}{2^n}\right), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Từ giả thiết $f(x)$ liên tục suy ra $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (4), chuyển qua giới hạn, ta thu được $g(x) \equiv 0$. Do vậy, từ (3), ta có

$$3f(4x) - 2f(2x) - 20x = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Viết (5) dưới dạng

$$3h(2x) = 2h(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (6)$$

trong đó $h(x) = f(2x) - 5x$ (7)

Tương tự, từ (6), bằng quy nạp, ta được

$$h(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^n h\left(\frac{x}{2^n}\right), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

Từ giả thiết liên tục đối với $f(x)$, suy ra $h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (8), chuyển qua giới hạn, có $h(x) \equiv 0$. Cùng với (7) suy ra $f(x) = \frac{5}{2}x$.

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = \frac{5}{2}x$ thỏa mãn điều kiện bài ra. ❐

Nhận xét. Đây là đề toán quen biết về phương trình hàm cơ bản và thuộc loại trung bình nên nhiều bạn giải được như trên. Đề bài được suy từ phương trình sai phân (nhân tính) tuyến tính quen biết dạng $9u_{n+2} - 9u_{n+1} + 2u_n = 0$, trong đó $u_n = g(2^n.x)$ và $g(x) = f(x) - \frac{5}{2}x$, và có thể giải bài toán đã cho trong lớp hàm tùy ý, không đòi hỏi tính liên tục của ẩn hàm.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T10/350. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$$

trong đó a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1.

Lời giải. Ta có

$$P = a(b - c)^3 + b(c - a)^3 - c.(a - b)^2((b-c) + (c-a))$$

$$= (a(b - c)^2 - c(a - b)^2)(b - c)$$
$$+ (b(c - a)^2 - c.(a - b)^2)(c - a)$$
$$= (ab^2 + ac^2 - ca^2 - cb^2)(b - c)$$
$$+ (bc^2 + ba^2 - ca^2 - cb^2)(c - a)$$

$= (ac - b^2)(c - a)(b - c) + (a^2 - bc)(b - c)(c - a)$
$= (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$
$= (a - b)(b - c)(c - a)$.

Chú ý. Nếu kí hiệu $P = P(a, b, c)$ thì
$P(a, c, b) = (a - c)(c - b)(b - a)$
$= -(a - b)(b - c)(c - a) = -P(a, b, c)$.

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P là hai số đối nhau.

Do các số a, b, c có vai trò hoán vị vòng quanh trong P nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a > b$, $a > c$ (nếu trong ba số a, b, c có hai số bằng nhau thì $P = 0$). Khi đó $a - b > 0$, $c - a < 0$. Bởi vậy để tìm giá trị lớn nhất của P ta chỉ cần xét trường hợp $a > c > b$.

Đặt $a + b = d$ ta có $d + c = 1$.
$P = (a - b)(b - c)(c - a) = (a - b)(c - b)(a - c)$
$\le (a + b).c.(a + b - c) = d.c(d - c)$.

Dùng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương nhận được (các số thực dương u, v sẽ được xác định sau):

$$P = \frac{1}{u.v}.ud.vc(d-c) \le \frac{1}{u.v}\left(\frac{ud+vc+d-c}{3}\right)^3$$
$$= \frac{1}{uv}\left(\frac{(u+1)d+(v-1)c}{3}\right)^3 \qquad (2)$$

Ta cần chọn các số thực dương u, v để $u + 1 = v - 1$ và tồn tại $d > c > 0$ mà $ud = vc = d - c$.

Ta suy ra $\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{d}{d-c} - \frac{c}{d-c} = 1$.

Kết hợp với $v - u = 2$, ta có $u.v = 2$.

Tức là $-u$, v là hai nghiệm của phương trình $t^2 - 2t - 2 = 0$. Giải phương trình nhận được $u = \sqrt{3} - 1$, $v = \sqrt{3} + 1$.

Thay vào (2) có $P \le \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}(d+c)}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{18}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ud = vc = d - c$, tức là $ud = d - c = 2d - 1$, $d = \frac{1}{2-u} = \frac{1}{3-\sqrt{3}}$ $= \frac{3+\sqrt{3}}{6}$; $c = 1 - d = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$, tức là $a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$, $b = 0$, $c = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P theo thứ tự là $\frac{\sqrt{3}}{18}$ và $-\frac{\sqrt{3}}{18}$. □

Nhận xét. 1) Cách lí luận để chọn u, v trong bất đẳng thức (2) được gọi là phương pháp cân bằng số. Các bạn học sinh THCS đủ kiến thức để tiếp cận phương pháp này. Các bạn học sinh THPT có thể dùng đạo hàm để khảo sát hàm số

$f(c) = d.c(d - c) = (1 - c).c(1 - 2c)$ với $0 < c < \frac{1}{2}$.

2) Các bạn học sinh THCS và lớp 10 sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoàng Hải, Nguyễn Huy Hoàng, Trần Bá Trung*, 10A1, THPT chuyên; **Hải Dương:** *Phạm Ngọc Dương*, 9B, THCS Phú Thái, Kim Thành; *Trần Thế Phúc*, 10A1, THPT Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Trần Thị Hồng Vân*, 9D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực; **Thanh Hóa:** *Hoàng Kiên An*, 9E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn; **Thái Bình:** *Nguyễn Tiến Hưởng*, 10A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Luật*, 10A1, THPT Cao Thắng, Hương Sơn; **Quảng Trị:** *Trần Văn Thành*, 7A, THCS Cam Hiếu, Cam Lộ; **Đắk Lắk:** *Nguyễn Đình Quốc Bảo*, 10T, THPT Nguyễn Du; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Đinh Ngọc Thái*, 10T, THPT Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T11/350. *Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I và trọng tâm là G. Gọi R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA, IAB. Gọi R'_1, R'_2, R'_3 tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB. Chứng minh rằng*

$R'_1 + R'_2 + R'_3 \ge R_1 + R_2 + R_3$.

Lời giải. Cho ΔABC. Kí hiệu $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và m_a, m_b, m_c là độ dài các trung tuyến xuất phát từ A, B, C tương ứng. Trước hết ta hãy chứng minh một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC, với mọi điểm M ta có

$$\frac{MB.MC}{AB.AC} + \frac{MC.MA}{BC.BA} + \frac{MA.MB}{CA.CB} \ge 1 \qquad (1)$$

Chứng minh.

Trường hợp 1. M thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

* Nếu M trùng với một đỉnh của ΔABC thì đẳng thức xảy ra trong (1).

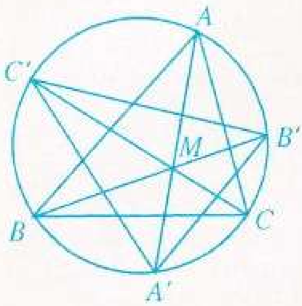
* Nếu M không trùng với đỉnh của ΔABC.

Không mất tính tổng quát giả sử M thuộc $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của đường tròn ngoại tiếp ΔABC (Bạn đọc tự vẽ hình).

Ta có: $S_{ABMC} > S_{ABC}$

nên $\dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{MCA}}{S_{BCA}} + \dfrac{S_{MAB}}{S_{CAB}} > 1$.

Từ đó với chú ý rằng: $\widehat{BMC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$; $\widehat{CMA} = \widehat{CBA}$; $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$, ta suy ra (1).



Trường hợp 2.

M không thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Gọi A', B', C' là giao điểm thứ hai của AM, BM, CM với đường tròn ngoại tiếp ΔABC (hình vẽ).

Dễ thấy:

$$\begin{cases} \Delta MAB \backsim \Delta MB'A' \\ \Delta MAC \backsim \Delta MC'A' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{MA'}{B'A'} \\ \dfrac{MC}{AC} = \dfrac{MA'}{C'A'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{MB.MC}{AB.AC} = \frac{MA'^2}{A'B'.A'C'}.$$

Tương tự như thế suy ra:

$$\frac{MB.MC}{AB.AC} + \frac{MC.MA}{BC.BA} + \frac{MA.MB}{CA.CB}$$

$$= \frac{B'C'.MA'^2 + C'A'.MB'^2 + A'B'.MC'^2}{B'C'.C'A'.A'B'}$$

$$\geq \frac{B'C'.I'A'^2 + C'A'.I'B'^2 + A'B'.I'C'^2}{B'C'.C'A'.A'B'}$$

$= 1$ (kết quả quen thuộc).

(I' là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta A'B'C'$).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ M là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta A'B'C'$ $\Leftrightarrow$ ΔABC nhọn và M là trực tâm của tam giác.

Hệ quả. $\dfrac{m_b.m_c}{bc} + \dfrac{m_c m_a}{ca} + \dfrac{m_a m_b}{ab} \geq \dfrac{9}{4}$.

Chứng minh: Áp dụng bất đẳng thức trong bổ đề với M là trọng tâm ΔABC.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đều. Trở lại việc giải bài toán. Theo định lí sin trong tam giác có:

$$R_1 = \frac{BC}{2\sin\widehat{BIC}} = \frac{a}{2\sin\left(90^\circ + \dfrac{A}{2}\right)} = \frac{2R\sin A}{2\cos\dfrac{A}{2}}$$

$$= 2R\sin\frac{A}{2}.$$

Tương tự, ta có: $R_2 = 2R\sin\dfrac{B}{2}$, $R_3 = 2R\sin\dfrac{C}{2}$.

Vậy $R_1 + R_2 + R_3 = 2R\left(\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2}\right)$

$$\leq 2R.\frac{3}{2} = 3R \quad (2)$$

Theo định lí sin trong tam giác có:

$$R'_1 = \frac{a}{2\sin\widehat{BGC}} = \frac{a.GB.GC}{2GB.GC\sin\widehat{BGC}} = \frac{\dfrac{4}{9}am_bm_c}{4S_{GBC}}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{am_bm_c}{S_{ABC}} \text{ (vì } S_{ABC} = 3S_{GBC})$$

$$= \frac{1}{3}\frac{am_bm_c}{\dfrac{abc}{4R}} = \frac{4}{3}R\frac{m_bm_c}{bc}.$$

Tương tự, ta có: $R'_2 = \dfrac{4}{3}R\dfrac{m_cm_a}{ca}$; $R'_3 = \dfrac{4}{3}R\dfrac{m_am_b}{ab}$

Từ đó và hệ quả có: $R'_1 + R'_2 + R'_3$

$$= \frac{4}{3}R\left(\frac{m_bm_c}{bc} + \frac{m_cm_a}{ca} + \frac{m_am_b}{ab}\right) \geq \frac{4}{3}R.\frac{9}{4} = 3R \quad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra $R'_1 + R'_2 + R'_3 \geq R_1 + R_2 + R_3$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đều. ❒

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đã phát hiện BĐT

$$\frac{m_bm_c}{bc} + \frac{m_cm_a}{ca} + \frac{m_am_b}{ab} \geq \frac{9}{4}$$

khá quen thuộc đã có trong THTT số 289 (7/2001), 348 (6/2006).

2) Có 46 bạn tham gia giải và đều giải đúng. Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Hán Thanh Hải*, 11K3, THPT chuyên Hùng Vương; **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Bằng*, 12A1, THPT Nguyễn Tất Thành; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Văn Giang*, *Nguyễn Quang Giang*, 11A1, THPT chuyên

Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** *Nguyễn Ngọc Uyển*, 11A3, THPT Phú Thành, Kinh Môn; **Thanh Hóa:** *Đỗ Ngọc Tuấn*, 10A1, THPT Hoằng Hóa 2; **Nghệ An :** *Đinh Viết Thắng*, 11A1, THPT Diễn Châu IV, *Nguyễn Văn Trường*, K46A10, ĐH Vinh; **Quảng Trị:** *Lê Quốc Khánh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Tiến Vũ*, 11B1, THPT Bình Sơn; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Như Đức Trung*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Lê Nguyễn*, 12A1, THPT Lý Tự Trọng.

NGUYỄN MINH HÀ

★**Bài T12/350.** *Cho tứ diện ABCD có độ dài các cạnh $BC = a$; $DA = a_1$; $CA = b$; $DB = b_1$; $AB = c$, $DC = c_1$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện; A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là giao điểm của AG, BG, CG, DG với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện và R là bán kính mặt cầu đó. Chứng minh rằng*

$$\frac{4}{R} \le \frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GB_1} + \frac{1}{GC_1} + \frac{1}{GD_1}$$

$$\le \frac{4\sqrt{6}}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{c_1}\right) \quad (*)$$

Ghi chú: Do sơ xuất tác giả bài toán T12/350 đã ghi hệ số ở vế phải của (*) là $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Xin sửa lại như trên. Toà soạn thành thực xin lỗi bạn đọc.

Lời giải. (Dựa theo *Nguyễn Thanh Long*, 12A0, THPT Nguyễn Huệ, Kỳ Anh, **Hà Tĩnh**).

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện và đặt $OG = d$. Để trình bày được gọn gàng, chúng ta sẽ sử dụng kí hiệu $\sum GA; \sum \frac{1}{GA_1}; \sum a$, ..., trong đó A chạy qua các đỉnh A, B, C, D; A_1 chạy qua các đỉnh A_1, B_1, C_1, D_1 và a chạy qua độ dài các cạnh của tứ diện $ABCD$.

1) Trước hết, ta chứng minh BĐT bên trái của BĐT kép (*).

Từ $\sum \overrightarrow{GA} = \vec{0}$, ta dễ dàng thiết lập được hệ thức sau (công thức Leibniz)

$$\sum GA^2 = 4(R^2 - d^2) \quad (1)$$

Ta có: $GA.R = GA.|\overrightarrow{OA}| \ge \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{OA}$

$= \overrightarrow{GA}\left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}\right) = \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{GA}$ và ba BĐT nữa tương tự. Từ đó ta thu được BĐT sau

$$\left(\sum GA\right).R \ge \sum GA^2 \quad (2)$$

Sử dụng công thức về phương tích của một điểm đối với một đường tròn, ta được

$$GA.GA_1 = ... = GD.GD_1 = -\mathcal{P}_{G/(O;R)} = R^2 - d^2.$$

Từ đó dễ dàng thiết lập được đẳng thức sau

$$\sum \frac{1}{GA_1} = \left(\frac{1}{R^2 - d^2}\right).\sum GA \quad (3)$$

Đến đây, từ (1), (2) và (3) ta thu được BĐT bên trái của BĐT kép (*) cần tìm. Dấu đẳng thức ở BĐT này xảy ra khi và chỉ khi dấu đẳng thức xảy ra ở (2), và do đó khi và chỉ khi $O \equiv G$, nghĩa là khi $ABCD$ là một *tứ diện gần đều* ($a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$).

2) Bây giờ, ta thiết lập BĐT bên phải của (*).

Từ $\sum \overrightarrow{GA} = \vec{0}$ ta dễ dàng thiết lập được đẳng thức sau

$$\sum a^2 = 4\sum GA^2 \quad (4)$$

Và do đó, từ (1) và (4) ta được hệ thức

$$\sum a^2 = 16(R^2 - d^2) \quad (5)$$

Áp dụng BĐT Cauchy–Bunhiacovski và hệ thức (1) ở trên, ta được

$$\sum GA \le \sqrt{4\sum GA^2} = 4\sqrt{R^2 - d^2} \quad (6)$$

Sau đó, từ (3) và (6) ta được

$$\sum \frac{1}{GA_1} \le \frac{4}{\sqrt{R^2 - d^2}} \quad (7)$$

Cũng vẫn theo BĐT Cauchy–Bunhiacovski ta được hai BĐT sau:

$$6\left(\sum a^2\right) \ge \left(\sum a\right)^2 \quad (8)$$

và $$\left(\sum a\right).\left(\sum \frac{1}{a}\right) \ge 36 \quad (9)$$

Từ (8) và (9) suy ra

$$\sqrt{\left(\sum a^2\right)}.\left(\sum \frac{1}{a}\right) \ge 6\sqrt{6} \quad (10)$$

Đến đây, từ (1), (4), (10) và (7) ta thu được BĐT bên phải của BĐT (*) cần tìm; đó là

$$\sum \frac{1}{GA_1} \le \frac{4\sqrt{6}}{9}\left(\sum \frac{1}{a}\right).$$

Dấu đẳng thức xảy ra ở BĐT này khi và chỉ khi $a = a_1 = b = b_1 = c = c_1$, nghĩa là khi và chỉ khi $ABCD$ là một *tứ diện đều*.

Ta đi đến kết luận: Dấu đẳng thức đồng thời xảy ra ở BĐT kép (*) khi và chỉ khi $ABCD$ là một *tứ diện đều*. ❒

Nhận xét. 1) Tất cả các bạn tham gia giải bài toán này đều giải đúng và đều đã sửa lại phần đánh giá ở BĐT bên phải của (*) cho đúng. Một số bạn chỉ ra rằng $\sum \frac{1}{GA_1} \le \frac{4\sqrt{6}}{9}\left(\sum \frac{1}{a}\right) < \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\sum \frac{1}{a}\right)$ rồi nhận xét dấu đẳng thức ở BĐT bên phải của (*) nêu trong đề toán khi chưa sửa không thể xảy ra. Đáng tiếc một vài bạn còn mắc sai lầm, chẳng hạn như khi $O \equiv G$ thì lại kết luận $ABCD$ là một tứ diện đều, hoặc một tứ diện trực tâm!

2) Nhiều bạn chỉ ra rằng bài toán T12/350 này trong không gian tương tự như bài toán trong hình học phẳng được dùng làm đề thi chọn HSG Quốc gia bảng A năm 1991. Đó là bài toán mà kí hiệu cho gọn thì viết như sau:

Chứng minh BĐT: $\frac{3}{R} \le \sum \frac{1}{GA_1} \le \sqrt{3}\left(\sum \frac{1}{BC}\right)$.

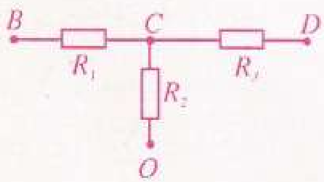
Bạn *Võ Thị Chung*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị** còn chỉ ra rằng bài toán T12/350 đã được dùng làm đề thi cho cuộc thi Olympic 30–4 năm 2001, khối 11.

3) Ngoài hai bạn đã nêu trên, các bạn sau đây có lời giải gọn gàng hơn cả:

Hà Nội: *Nguyễn Đức Bằng*, 12A1, THPT Nguyễn Tất Thành; **Phú Thọ:** *Hán Thanh Hải*, 11K3, THPT chuyên Hùng Vương; **Hải Dương:** *Nguyễn Ngọc Uyển*, 12A3, THPT Phúc Thành, Kinh Môn; **Nghệ An:** *Hoàng Đức Nghĩa*, 10A1, THPT Phan Bội Châu, TP Vinh; **Thừa Thiên – Huế:** *Nguyễn Phi Hùng*, 11CT, ĐHKH Huế; **TP Đà Nẵng:** *Nguyễn Như Đức Trung*, 11a1, *Nguyễn Như Quốc Trung*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Long:** *Chương Công Danh*, 10T1, *Võ Thanh Hùng*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Kiên Giang:** *Trần Minh Hảo*, 11 Toán, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

★Bài L1/350. *Cho một sơ đồ mạch điện như hình bên. Đặt vào B và O một hiệu điện thế U_{BO} = 3V thì vôn kế mắc vào D và O chỉ giá trị U_1 = 2V. Nếu thay vôn kế bằng một ampe kế thì ampe kế chỉ I_3 = 0,12A. Nếu bỏ ampe kế đi, mà đặt vào D và O một hiệu điện thế U_{DO} = 3V, còn vôn kế mắc vào B và O thì vôn kế chỉ U_2 = 2V. Hãy xác định R_1, R_2, R_3. Cho biết vôn kế có điện trở rất lớn, ampe kế có điện trở nhỏ không đáng kể.*



Lời giải. Vẽ mạch điện trong từng trường hợp.

* Khi đặt hiệu điện thế U_{DO} = 3V vào D và O mà $U_{BO} = U_2$ = 2V thì $U_{DC} = U_{DO} - U_{BO}$ = 1(V) $\Rightarrow U_{CO} = U_{DO} - U_{DC}$ = 2(V).

$$\Rightarrow \frac{U_{DO}}{U_{CO}} = \frac{3}{2} = \frac{R_3+R_2}{R_2} \Rightarrow R_2 = 2R_3.$$

+ Khi đặt hiệu điện thế U_{BO} = 3V vào B và O.

– Mắc vôn kế vào D và O: $U_{DO} = U_1$ = 2V = U_{CO}

$$\Rightarrow U_{BC} = U_{BO} - U_{CO} = 1(\text{V}) \Rightarrow \frac{B_{BO}}{U_{CO}} = \frac{3}{2} = \frac{R_1+R_2}{R_2}$$

$\Rightarrow R_2 = 2R_1$.

– Mắc ampe kế vào D và O thì ta có

R_1 nt $(R_2//R_3)$ và $R_{CO} = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3} = \frac{2}{3}R_3 = \frac{2}{3}R_1$.

Từ đó $U_{CO} = \frac{R_{CO}}{R_1+R_{CO}}.U_{BO} = \frac{6}{5}$ (V).

Vì $I_3 = I_A$ = 0,12A nên $R_3 = \frac{U_{CO}}{I_3} = 10(\Omega)$.

Vậy $R_2 = 2R_3 = 20(\Omega)$ và $R_1 = \frac{R_2}{2} = R_3 = 10(\Omega)$. ❒

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn, đầy đủ:

Yên Bái: *Đỗ Đức Thọ*, 11 Lí, THPT Nguyễn Tất Thành; **Sơn La:** *Lê Vũ Hải*, 11 Lí, THPT chuyên Sơn La; **Hà Tây:** *Đặng Thái Trung*, 10 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ, *Đỗ Mạnh Cường*, 11A1, THPT Phùng Khắc Khoan, Thạch Thất; **Hòa Bình:** *Vũ Thị Thu Hường*, 11 Tin, THPT Hoàng Văn Thụ; **Phú Thọ:** *Thế Anh*, 11A1, THPT Phong Châu; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Quang Giang*, *Phạm Văn Giang*, 11A1, *Đỗ Đại Dương*, *Đặng Văn Sơn*, *Đặng Xuân Đức*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Đào Quang Huy*, 12A1, THPT Quế Võ I; **Hà Nội:** *Đoàn Trí Dũng*, 11A1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hà Nam:** *Đinh Hoàng Thanh*, 10A2, THPT chuyên Hà Nam; **Nam Định:** *Bùi Thị Yến*, 11A2, THPT Tống Văn Trân, Ý Yên; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Kim Loan*, 11 Lí, *Nguyễn Thị Kim Anh*, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Vũ Quang Hiệu*, 11A1, THPT Quỳnh Côi; **Hải Dương:** *Nguyễn thị Thanh Huyền*, 10 Lí, THPT Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Hồ Thanh Sơn*, *Trần Bách Hải Cường*, 9A2, THCS Hồng Bàng, Q.Hồng Bàng; **Thanh Hóa:** *Lê Bá Ngọc*, 11F, THPT Lam Sơn, *Đỗ Ngọc Tuấn*, 10A2, THPT Hoằng Hóa 2; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Bích Đào*, 10 Lí, ĐH Vinh, *Lê Đình Khiết*, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thanh Long*, 12A10, THPT Nguyễn Huệ, Kì Anh; **Quảng Ninh:** *Vũ Nam Phong*, 12E1, THPT Cẩm Phả; **Quảng Nam:** *Trần Văn Ngọc Tan*, 12/1, THPT Hoang Diệu, Điện Bàn; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Tiến Vũ*, 11B1, THPT Bình Sơn; **Quảng**

Bình: *Đinh Thanh Hà*, 10A1, THPT số 1, Quảng Trạch; **Bình Định:** *Lê Thanh Bình*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Hạ Tiêu Dao*, 12A3, THPT DL Duy Tân, Tuy Hòa; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trương Đức Toàn*, 11CL, THPT Nguyễn Thượng Hiền; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Nguyễn Phúc Hưng*, 12THPT , Võ Thị Sáu, Đất Đỏ; **Vĩnh Long:** *Ngô Quốc Duy*, 12/10, THPT Lưu Văn Lợi TX. Vĩnh Long; **Tiền Giang:** *Trương Mai Thanh Tâm*, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang, Mỹ Tho.

MAI ANH

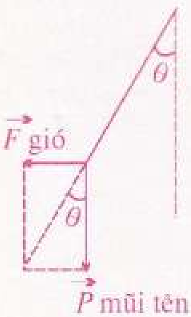
★Bài L2/350. *Một người bắn cung chắc chắn bắn trúng đích (mục tiêu) cách xa 100m khi không có gió. Khi có gió thổi vuông góc với đường bay của mũi tên, người bắn cung phải nhắm vào một điểm mới, cách đích (mục tiêu) một đoạn nhỏ là D theo chiều ngược với chiều gió thổi.*

Để đo lực của gió tác dụng vào mũi tên, người ấy treo mũi tên vào một thanh cứng. Bỏ qua khối lượng của thanh cứng và lực cản của gió vào thanh. Gió làm lệch thanh giữ mũi tên đi theo một góc nhỏ θ khỏi phương thẳng đứng.

a) Lập một biểu thức cho độ lệch D theo thời gian bay t, góc lệch θ và gia tốc g.

b) Hãy tính D với t = 2s, θ = 0,05 rad, g = 9,8m/s².

Lời giải. a) Trước hết tính lực của gió tác dụng vào mũi tên.



Hình 1

Từ hình 1 ta có

$F_{gió} = mg\tan\theta$

Từ đây suy ra

$$a = \frac{F_{gió}}{m} = g\tan\theta \quad (1)$$

Giả sử để bắn trúng đích, người bắn cung phải cho mũi tên bay với vận tốc đầu $\vec{v}_0$ chếch với phương đến đích một góc α.

Chọn hệ toạ độ xOy như hình 2. Do lực của gió là không đổi, nên phương trình chuyển động của mũi tên theo các phương Oy và Ox có dạng:

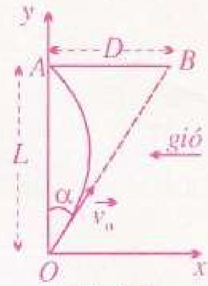
Theo phương Oy: $y = v_0\cos\alpha.t$ (2)

Theo phương Ox: $x = v_0\sin\alpha.t - \frac{1}{2}at^2$ (3)

Khi mũi tên trúng đích thì $y = L$, còn $x = 0$; từ (2) và (3) ta được:

$L = v_0\cos\alpha.t$ (4)

$0 = v_0\sin\alpha.t - \frac{1}{2}at^2$ (5)



Hình 2

Từ (4) và (5) suy ra $L\tan\alpha = \frac{1}{2}at^2$. Theo hình 2 $D = L\tan\alpha$,

vậy $D = \frac{1}{2}g\tan\theta.t^2$.

b) Áp dụng bằng số với t = 2s, $\theta = 0{,}05$ rad, $g = 9{,}8$ m/s².

Vì $\theta = 0{,}05$ rad là nhỏ nên $D = \frac{1}{2}g\tan\theta.\,t^2 \approx \frac{1}{2}g\theta\,t^2$.

Thay số ta được $D \approx 0{,}98$ m. ❐

∢Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn và tốt: **Vĩnh Phúc**: *Văn Đăng Sơn*, 11A3, *Nguyễn Quang Giang*, 11A3, *Phạm Văn Giang*, 11A1; **Hải Phòng**: *Lý Trần Đức Anh*, 11 Toán, THPT năng khiếu Trần Phú; **Bà Rịa – Vũng Tàu**: *Nguyễn Phúc Hưng*, 12A1, THPT Võ Thị Sáu, huyện Đất Đỏ; **Nghệ An**: *Phan Duy Thắng*, 11A4, THPT chuyên Đại học Vinh, *Đậu Lệ Thuỷ*, 11A, THPT Quỳnh Lưu IV; **Phú Yên**: *Hạ Tiêu Dao*, 12A3, THPT Dân lập Duy Tân, thành phố Tuy Hoà; **Thái Nguyên**: *Nguyễn Hồng Phong*, 12 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Thanh Hoá**: *Nguyễn Văn Cường*, 11A2, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hoá; **Hà Tây**: *Nguyễn Ngọc Đăng*, 10A1, THPT Phú Xuyên A; **Phú Thọ**: *Thế Anh*, 11A1, THPT Phong Châu.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Đọc lại cho đúng

Trong lời giải bài T11/349 THTT số 353 (11.2006) đã in thiếu đôi chỗ, xin được giải thích như sau:

1) Trong bổ đề 1 (trang 24, cột phải) kí hiệu $\alpha = S_{MBC}$, $\beta = S_{MCA}$, $\gamma = S_{MAB}$.

2) Để tính $\frac{S}{S_2}$ (trang 25, cột phải) dùng bổ đề 1 với M là giao điểm của AA_2, BB_2, CC_2 rồi sử dụng bổ đề 2.

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

orthogonal projection on the line BC. A ray Bx cuts the segment KH at E and cuts the line passing through K parallel to BC at F. Prove that $\widehat{ABC} = 3\widehat{CBF}$ when and only when $EF = 2BK$.

T3/354. Find all natural numbers n such that the product of the digits of n is equal to

$$(n-86)^2(n^2-85n+40).$$

T4/354. Prove that $ab+bc+ca < \sqrt{3}d^2$, where a, b, c, d are real numbers satisfying the following conditions:
i) $0 < a, b, c < d$;
ii) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\frac{2}{d}$.

T5/354. Solve the equation

$$x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^3+x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}.$$

T6/354. Let $ABCD$ be a square with sides equal to a. On the side AD, take the point M such that $AM = 3MD$. Draw the ray Bx cutting the side CD at I such that $\widehat{ABM}=\widehat{MBI}$. The angle bisector of $\widehat{CBI}$ cuts the side CD at N. Calculate the area of triangle BMN.

T7/354. Let BC be a fixed chord (which is not a diameter) of a circle. On the major arc BC of the circle, take a point A not coinciding with B, C. Let H be the orthocenter of triangle ABC. The second points of intersection of the line BC with the circumcircles of triangles ABH and ACH are E and F respectively. The line EH cuts the side AC at M and the line FH cuts the side AB at N. Determine the position of A so that the measure of the segment MN attains its least value.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/354. How many are there natural 9-digit numbers with 3 distinct odd digits, 3 distinct even digits and every even digit in each number appears exactly two times (in this number).

T9/354. For every positive integer n, consider the function f_n defined on $\mathbb{R}$ by

$$f_n(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x^2 + x + 1.$$

a) Prove that the function f_n attains its least value at a unique value x_n of x.

b) Let S_n be the least value of f_n. Prove that:

i) $S_n > \frac{1}{2}$ for all n and there does not exist a real number $a > \frac{1}{2}$ such that $S_n > a$ for all n.

ii) (S_n) $(n = 1, 2, \dots)$ is a decreasing sequence and $\lim S_n = \frac{1}{2}$.

iii) $\lim x_n = -1$.

T10/354. Let

$$A=\sqrt{x^2+\sqrt{4x^2+\sqrt{16x^2+\sqrt{100x^2+39x+\sqrt{3}}}}}.$$

Find the greatest integer not exceeding A when $x = 20062007$.

T11/354. Let ABC be a triangle with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, with inradius r and with incenter I. Let A_1, B_1, C_1 be respectively the touching points of the sides BC, CA, AB with the incircle. The rays IA, IB, IC cut the incircle respectively at A_2, B_2, C_2. Let $B_iC_i = a_i$, $C_iA_i = b_i$, $A_iB_i = c_i$ $(i = 1, 2)$. Prove that

$$\frac{a_2^3b_2^3c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \geq \frac{216r^6}{abc}.$$

When does equality occur ?

T12/354. Let $OABC$ be a tetrahedron with

$$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COA}=180^\circ;$$

OA_1, OB_1, OC_1 are internal angle bisectors respectively of the triangles OBC, OCA, OAB; OA_2, OB_2, OC_2 are internal angle bisectors respectively of the triangles OAA_1, OBB_1, OCC_1. Prove that

$$\left(\frac{AA_1}{A_2A_1}\right)^2+\left(\frac{BB_1}{B_2B_1}\right)^2+\left(\frac{CC_1}{C_2C_1}\right)^2 \geq \left(2+\sqrt{3}\right)^2.$$

When does equality occur?

Giải đáp bài:

Lời giải MỘT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

(Đề đăng trên THTT số 347, tháng 5.2006)

Ta thấy khi thay $x = -1$ vào PT đã cho thì vế trái khác vế phải. Chứng tỏ $x = -1$ không phải là nghiệm của PT đó. Nhìn vào cách làm của lời giải đã nêu có thể khẳng định rằng nguyên nhân dẫn đến chỗ sai nói trên nằm ở khâu xét điều kiện để đẳng thức ở bất đẳng thức (BĐT)

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \qquad (1)$$

xảy ra. Thật thế, ta thấy

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \ge ac+bd \qquad (2)$$

Rõ ràng theo BĐT Bunhiacovski thì

$$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \ge |ac+bd| \ge ac+bd.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} ac=bd \\ ac+bd \ge 0 \end{cases}$ (3)

Như vậy từ việc xét sai điều kiện để BĐT (1) trở thành đẳng thức (ac = bd!) dẫn đến sai lầm khi kết luận x = −1 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Giải lại bài toán: Với PT đã cho, áp dụng BĐT (1) như lời giải, đi đến

$$f(x) \ge \sqrt{2(x^2+9)} \qquad (4)$$

Theo phân tích trên thì đẳng thức ở (4) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2(x-1)=x(3-x) \\ 2=(x+2)(1-x) \\ (x-1)(3-x)+2x \ge 0 \\ 2(1-x)+x+2 \ge 0. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ này vô nghiệm, nên PT đã cho vô nghiệm.

Một số bạn dùng phương pháp vectơ chứng minh lại BĐT (1) và tìm đúng điều kiện để đẳng thức ở (1) xảy ra. Sau đây là các bạn có đáp án đúng, lời bình hay:

Đặng Anh Tuấn, 12A2, khối THPT chuyên, ĐHSP **Hà Nội**; *Lê Thị Nguyệt*, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Trịnh Thị Hằng*, 12T1, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Nguyễn Thanh Long*, 12A10, THPT Nguyễn Huệ, Kỳ Anh, **Hà Tĩnh**; *Đinh Ngọc Thái*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.

NGỌC HIỂN

Giá trị nhỏ nhất, "Quá nhỏ"?

Bài toán. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2a + 3b$, với a, b, là các số thực thỏa mãn điều kiện $2a^2 + 3b^2 \le 5$.*

Lời giải. Đặt $B = 2a^2 + 3b^2$ thì $B \le 5$.

Xét $A + B = 2a + 3b + 2a^2 + 3b^2$

$= 2(a^2 + a) + 3(b^2 + b)$

$$= 2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(b+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \ge -\frac{5}{4} \qquad (1)$$

Ta lại có $B \le 5$ nên $-B \ge -5$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $A \ge -\frac{25}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $-\frac{25}{4}$ đạt được khi $a = b = -\frac{1}{2}$.

Theo các bạn $-\frac{25}{4}$ có phải giá trị nhỏ nhất của A không? Kết quả của bạn như thế nào?

NGUYỄN THANH HÀI
(GV THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)

Câu lạc bộ

Mời thi thơ Tết

Bính Tuất đang dần qua
Chào đón Đinh Hợi tới
Để mừng Mùa Xuân mới
Tạp chí mình thi thơ.
Bài gửi ngay từ giờ
Thể loại không hạn chế
Thơ tự do dễ viết
Thơ bảy chữ bốn câu
Cả lục bát, thơ Đường...
Đều hoan nghênh nhiệt liệt!
Chủ đề nói về Tết,
Tết ắt có mùa xuân
Trong bức tranh tưng bừng
Có những người làm toán.
Độ dài nên hạn chế
Nhớ không quá một trang
Bạn nào ý ngập tràn
Thi ba bài luôn thể.
Nào những cây bút trẻ
Nào những bậc cao niên
Nam, nữ khắp mọi miền
Gửi thơ về báo Toán!

Chủ nhiệm CLB

THỂ LỆ GỬI BÀI CHO TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

- Bài cần đánh máy hoặc viết tay sạch sẽ, không dập xóa, trên một mặt giấy. Hình vẽ rõ ràng. Không gửi bản photocopy. Nếu bài đã chế bản nên gửi kèm file. Phông chữ nên là unicode.
- Mỗi bài dài không quá 2000 chữ hoặc không quá 4 trang A4 chế bản vi tính.
- Bài dịch cần gửi kèm bản photocopy bài gốc.
- Mỗi đề ra đều có kèm lời giải và không ghi 2 đề trên cùng 1 tờ giấy. Không nhận đề ra của học sinh phổ thông.
- Bài viết cho mục *Học sinh tìm tòi* cần có thẩm định của thầy giáo Toán và xác nhận của Hiệu trưởng.
- Ghi đầy đủ họ và tên thật, số điện thoại, địa chỉ để tiện liên hệ. Mỗi bài chỉ gửi một lần. Bài không đăng không trả lại bản thảo.
- Ảnh tập thể gửi đăng phải là ảnh màu, cỡ nhỏ nhất 9×12. Sau ảnh ghi rõ nội dung ảnh và tên người chụp.
- Đối với bài giải gửi dự thi, mỗi bài viết trên một tờ giấy riêng. Phía trên bên trái ghi số thứ tự của bài, bên phải ghi rõ họ tên, ngày sinh, trường lớp, địa chỉ gia đình. Bài chỉ gửi về một địa chỉ : *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội.* Ngoài phong bì ghi rõ : *Dự thi giải toán số tạp chí ...* Không gửi bài giải của nhiều số tạp chí trong cùng một phong bì. Bài gửi có dán tem. Không cần gửi thư bảo đảm.
- Thời hạn nhận bài giải *Đề ra kì này* là hai tháng tính từ cuối tháng số tạp chí đó. Các bài giải cho các chuyên mục khác là 1 tháng.
- Bài đã gửi cho TH&TT thì không gửi cho các tạp chí khác.

THTT

SÁCH MỚI 2006 THUỘC TỦ SÁCH TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

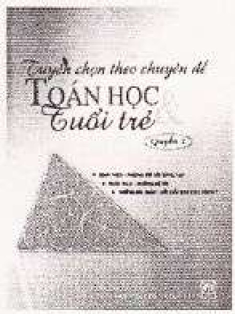
ẨN SAU ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ

Sách tập hợp các bài viết đã đăng trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (1970 - 2005). Một nửa nội dung cuốn sách trình bày các vấn đề của toán sơ cấp, có ích cho các bạn trước các kì thi học sinh giỏi và thi vào các trường Đại học, Cao đẳng. Có những phần kiến thức tác giả bổ sung một số vấn đề mà SGK chưa đề cập. Phần còn lại được viết ra nhằm giúp học sinh tập dượt tư duy sáng tạo, mở ra những triển vọng để độc giả có thể đi xa hơn trong công việc sáng tạo toán học, tạo được nguồn hứng khởi trong việc làm toán.

Các bạn học sinh yêu toán, các sinh viên khoa Toán của các trường Đại học, Cao đẳng và các thầy cô giáo, các bậc phụ huynh đều có thể tìm thấy ở đây những điều bổ ích.

Sách dày 164 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bán lẻ là 21500 đồng.

Tuyển chọn theo chuyên đề TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ QUYỂN 2



Từ các bài đã in trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ những năm gần đây, sách tập hợp lại các bài viết theo ba chuyên đề nhằm phục vụ độc giả làm tài liệu tham khảo bổ ích.

Chuyên đề thứ nhất : **Toán THCS - Những tìm tòi sáng tạo**

Chuyên đề thứ hai : **Toán THCS - Những đề thi**

Chuyên đề thứ ba : **Những bài toán - Lời giải sao cho đúng?**

Sách dày 252 trang, khổ 19 x 26,5 cm, giá bán lẻ là 30000 đồng.

Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

Để biết thông tin chi tiết xin liên hệ:

ĐT/FAX: 04.5144272; Email: toanhoctt@yahoo.com

Bạn muốn có cuốn đóng tập cả năm 2006?

Đây là cách lưu giữ và sử dụng tạp chí THTT có hiệu quả. Các thầy cô giáo sẽ có tài liệu tham khảo sử dụng cho nhiều năm, tránh thất lạc. Các thư viện sẽ có tài liệu giúp các bạn đọc tra cứu và đọc THTT có hệ thống.

Cuốn đóng tập bao gồm cả 12 số tạp chí của năm 2006 có bìa cứng, giá bán lẻ là 65000 đồng sẽ có mặt trên thị trường vào tháng 1/2007. Do số lượng có hạn, bạn nên đăng kí ngay với tòa soạn nếu muốn có cuốn sách này.

Trân trọng cảm ơn!

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 354 (12-2006)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Ảnh bìa 1

- *Ảnh trên*: Ban phụ trách khối THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội.
- *Ảnh dưới* : Tập thể giáo viên khối THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội.

Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Mĩ thuật :* MINH THƠ. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ , NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330

LỊCH ST GD CHÍNH TRỊ - GIÁO DỤC

LỊCH CHÍNH TRỊ - GIÁO DỤC 2007

Sáu loại lịch:

Lịch tiểu (7.5x10.5 cm)
Lịch trung Poluya (10.5x15 cm)
Lịch trung màu (10.5x14.5 cm)
Lịch đại (14.5x20.5 cm)
Lịch siêu đại (24x34 cm)
Lịch cực đại (28x38 cm)

NXB Chính trị Quốc gia, NXB Giáo dục, NXB Bách khoa Hà Nội, NXB Bưu điện, NXB Công an nhân dân, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, NXB Đồng Nai, NXB Hội Nhà văn, NXB Khoa học xã hội, NXB Kim đồng, NXB Thế giới, NXB Trẻ, NXB Tư pháp, NXB Y học phối hợp xuất bản, phát hành lịch Blốc 2007 với các thông tin ghi trên lịch thiết thực, bổ ích; hình thức trình bày mang tính truyền thống, hấp dẫn.

Nội dung ghi trên lịch

1. Số liệu lịch chính xác theo bảng lịch chính thức của Ban lịch nhà nước

* Lịch dương (ngày, thứ trong tuần, tháng, năm ghi bằng tiếng Việt và Tiếng Anh)

* Lịch âm dương (giờ, ngày, tháng, năm, tiết khí tính theo Can Chi ghi bằng tiếng Việt và Tiếng Trung Quốc)

* Lịch tuần lễ (có trong lịch siêu đại và cực đại)

2. Thông tin khoa học bổ ích phục vụ sản xuất nông nghiệp và đời sống

* Lịch khí tượng * Lịch canh nông Thông tin về thời vụ và kĩ thuật canh tác cây trồng, chăm sóc vật nuôi	có trong lịch Tiểu, Trung, Đại

* Giải thích về 24 Tiết khí

* Lí giải tại sao Việt Nam đón Tết Đinh Hợi trước Trung Quốc một ngày

3. Thông tin về lịch sử, văn hoá xã hội, giáo dục trong nước và thế giới

* Các sự kiện, tri thức lịch sử, chính trị, xã hội

* Ngày truyền thống các ngành và các tổ chức

* Kỉ niệm chẵn năm ngày sinh, ngày mất các danh nhân, các nhà văn hoá, các nhà giáo dục trong và ngoài nước

* Lễ hội dân gian truyền thống

4. Nội dung thơ ca, tục ngữ, danh ngôn, câu đối tri thức văn học, văn hoá Việt Nam và nước ngoài được tuyển chọn theo chủ đề: Tinh hoa xử thế.

5. Lịch cực đại có 365 câu đối về truyền thống văn hoá, giáo dục Việt Nam.

Tổng đại lí phát hành

• Trung tâm phát hành tại Hà Nội:
NXB Giáo dục tại TP. Hà Nội,
187B Giảng Võ.
ĐT: 04. 8562496. Fax: 04. 8562493

• Trung tâm phát hành tại Đà Nẵng:
NXB Giáo dục tại TP.Đà Nẵng,
15 Nguyễn Chí Thanh.
ĐT: 0511. 827373. Fax: 0511. 894504

• Trung tâm phát hành tại TP. Hồ Chí Minh:
NXB Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh,
231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5.
ĐT: 08. 8358423. Fax: 08. 8390727

Lịch chính trị giáo dục có bán tại:

Các đại lí, cửa hàng của các công ti Sách - TBTH, công ti Văn hoá phẩm của các tỉnh, thành phố;
Các đại lí, cửa hàng bán lẻ lịch trên toàn quốc

TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHÍ LINH, HẢI DƯƠNG

40 năm

Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo Trần Văn Nhung cùng Ban giám hiệu Nhà trường

Trường THPT Chí Linh là trường trung tâm của huyện miền núi Chí Linh, tỉnh Hải Dương. Nhà trường có con em của 9 dân tộc thiểu số trong huyện học tập. Trường được thành lập từ năm 1966. Bốn mươi năm qua nhà trường không ngừng phát triển về số lượng và chất lượng.

Nằm trên một diện tích 2,5ha, cơ ngơi nhà trường hiện nay rất khang trang và sạch đẹp với 28 phòng học cao tầng kiên cố, 2 phòng vi tính có 50 máy đã hòa mạng, 3 phòng học bộ môn, 1 phòng nghe nhìn, 1 phòng công nghệ có đầy đủ trang thiết bị hiện đại cùng với hệ thống phòng thư viện, phòng thiết bị, vườn hoa, cây cảnh, sân chơi, bãi tập, đáp ứng đủ nhu cầu cho thầy và trò dạy học theo tinh thần đổi mới hiện nay. Chất lượng dạy và học của trường ngày càng nâng cao, tỉ lệ học sinh giỏi cấp tỉnh, học sinh đỗ tốt nghiệp THPT, đặc biệt là học sinh đỗ vào các trường Đại học, Cao đẳng trong 10 năm qua luôn là trường đứng vào tốp đầu của các trường THPT trong tỉnh. Có năm nhà trường đạt 52% học sinh đỗ vào các trường Đại học, Cao đẳng với nhiều Thủ khoa và nhiều điểm 10 các môn Toán, Lí, Hóa. Tuy là trường miền núi nhưng trong 40 năm qua nhà trường đã có 16 học sinh đoạt giải Quốc gia. Đội ngũ thầy cô giáo vững vàng về chuyên môn, nghiệp vụ: 100% đạt chuẩn, trong đó có 21% đã và đang học Thạc sĩ và các chương trình sau đại học, trên 100 lượt các thầy cô giáo đạt danh hiệu *Chiến sĩ thi đua* và *Giáo viên giỏi* từ cấp cơ sở trở lên. Các tổ bộ môn của nhà trường hoạt động rất đều tay và vững vàng về chuyên môn, nghiệp vụ; nhiều tổ đạt danh hiệu *Tập thể lao động Tiên tiến Xuất sắc*. Với đội ngũ giáo viên trẻ và có năng lực chuyên môn, tổ Toán nhiều năm được công nhận là *Tập thể lao động Tiên tiến Xuất sắc* và được Ủy ban Nhân dân tỉnh Hải Dương tặng *Bằng khen*.

Với sự phấn đấu nỗ lực của thầy, trò và sự quan tâm của các cấp lãnh đạo, trường THPT Chí Linh đã được Nhà nước tặng *Huân chương lao động hạng Ba* và đang phấn đấu đạt trường chuẩn Quốc gia vào cuối năm 2006. Trường THPT Chí Linh rất tin tưởng vào tương lai của mình.

Tập thể giáo viên tổ Toán trường THPT Chí Linh, Hải Dương

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT56M6
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ti CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2006
Giá : 5000 đồng
Năm nghìn đồng