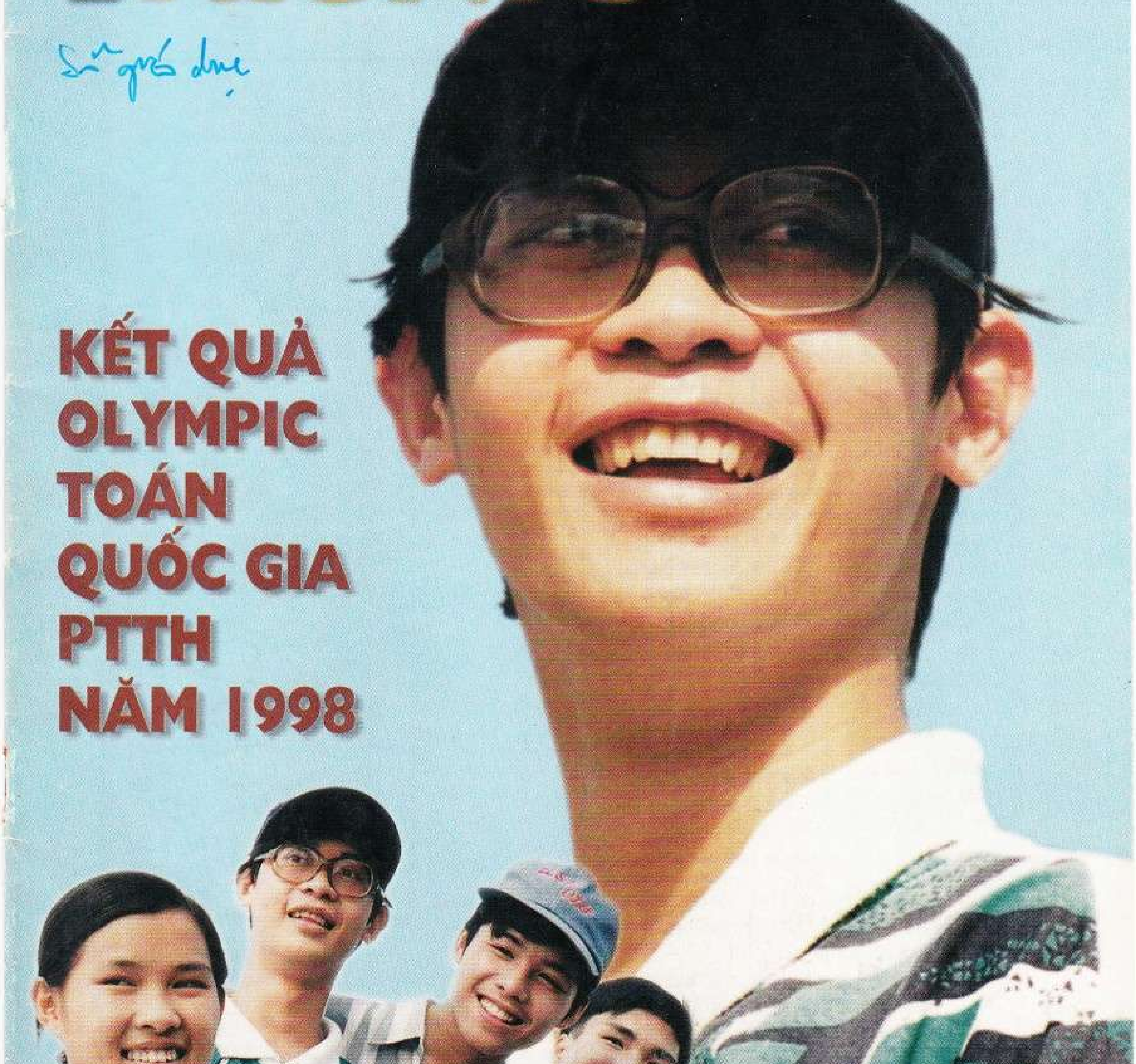
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 35 - RA HÀNG THÁNG
Số 6 (252)
1998

Sở giáo dục



KẾT QUẢ OLYMPIC TOÁN QUỐC GIA PTTH NĂM 1998

Cuộc thi mi-ni VUI HÈ '98

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

• **Bìa 1 :** * Nguyễn Anh Hoa, 12 chuyên toán Lê Hồng Phong, Nam Định đạt giải nhất Olympic toán Quốc gia năm học 1997-1998 với số điểm tối đa.

* Trịnh Kim Chi (Hà Tĩnh), Nguyễn Anh Hoa (Nam Định), Đỗ Quang Yên (Thanh Hóa), Vũ Việt Anh (ĐHSP-ĐHQG HN) - Ảnh : *Hoài Linh.*

Trụ sở tòa soạn :
25 Hàn Thuyên, Hà Nội ĐT : 8.262477 - 9714359
Đại diện tại miền Nam :
TRẦN CHÍ HIẾU ĐT: 8.323044
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP Hồ Chí Minh

Biên tập : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trị sự : VŨ ANH THƯ
Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH

Dành cho các bạn

TRUNG HỌC CƠ SỞ

TỨ GIÁC NỘI TIẾP VÀ NGOẠI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

LÊ QUỐC HÀN
(*Nghệ An*)

Đọc tiêu đề bài báo, chắc chắn nhiều bạn sẽ băn khoăn : tứ giác nội tiếp và tứ giác ngoại tiếp đường tròn là những vấn đề quá quen thuộc đối với toán học phổ thông, liệu còn gì mới để trao đổi ? Xin thưa : có đấy ! Bởi vì, khi con người còn tồn tại trên trái đất, thì vẫn còn nhiều bí mật ngay cả với những đối tượng gần gũi nhất còn được khám phá (*Số nguyên tố* là loại số "*đơn giản*" nhất, nhưng một công thức chung biểu diễn các số nguyên tố vẫn còn là ước mơ xa của loài người !).

Trở lại vấn đề của chúng ta. Xin nhắc lại rằng : *nếu qua các đỉnh của một tứ giác vẽ được một đường đường tròn, thì tứ giác đã cho được gọi là một tứ giác nội tiếp.* Điều này không phải bao giờ cũng thực hiện được, mà phải ấn định lên tứ giác một số điều kiện nào đó. Những điều kiện ấy có thể là điều kiện cần, cũng có thể là điều kiện đủ. Xin bạn hãy khảo sát mệnh đề sau :

Mệnh đề. Đối với tứ giác $ABCD$ cho trước, các khẳng định sau là tương đương :

1) $ABCD$ là tứ giác nội tiếp

2) $\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180^o$

3) $\angle ABC=\angle ACD$

4) $AC.BD=AB.CD+AD.BC$

5) $MA.MC=MB.MD$, trong đó $M=AC\cap BD$

6) H, I, K thẳng hàng.

7) $R_a.R_b=R_c.R_d$, trong đó R_a, R_b, R_c, R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ABC, BCD, CDA.

8) Tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật, trong đó O_1, O_2, O_3, O_4 là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ABC, BCD, CDA.

9) $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ trong đó $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$, $d=DA$ và $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

Sự tương đương giữa các khẳng định trên, hầu hết đã được các sách giáo khoa và các sách tham khảo trình bày (1, 2, 3, 5), hoặc là những định lí mang tên các nhà toán học, (4) là nội dung *định lí Ptôlêmê*, (6) là nội dung *đường thẳng Simsơn*...), hoặc đã được đăng trong tạp chí "Toán học và tuổi trẻ" ở mục "Đề ra kì này" (7, 8). Tuy nhiên, hầu hết các khẳng định ấy đều nêu lên dưới dạng điều kiện *cần*, và tác giả bài báo này đã kiểm tra một cách cẩn thận rằng chúng cũng là điều kiện *đủ*. Ta có thể chứng minh được : "Nếu tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp thì $\dfrac{AB}{DH}+\dfrac{BC}{DI}=\dfrac{CA}{DK}$, trong đó H, I, K là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AB, BC, CA".

Dưới đây là hai phép chứng minh :

Phương pháp chứng minh thứ nhất (Bắt chước cách chứng minh *định lí Ptôlêmê*) Trên AC lấy điểm E sao cho :

$\angle EDA=\angle BDC$

Từ giả thiết $ABCD$ là tứ giác nội tiếp, suy ra

$\Delta DAE\sim\Delta DBC$

$\Rightarrow\dfrac{EA}{DK}=\dfrac{BC}{DI}$ (1)

Và $\Delta DCE\sim\Delta DBA$

$\Rightarrow\dfrac{CE}{DK}=\dfrac{AB}{DH}$ (2)

Cộng từng vế (1) và (2), ta có : $\dfrac{CA}{DK}=\dfrac{AB}{DH}+\dfrac{BC}{DI}$

Phương pháp thứ hai (*Sử dụng định nghĩa hàm số cotang của góc nhọn.* Từ tứ giác $ABCD$ nội tiếp, ta có $\angle DCI=\angle DAB$; $\angle DCK=\angle DBA$ và $\angle DAK=\angle DBC$.

Suy ra :

1 - THT16

$\frac{CI}{DI} = \frac{HA}{DH};\frac{CK}{DK} = \frac{HB}{DH}$ và $\frac{KA}{DK} = \frac{BI}{DI} = \frac{BC}{DC} + \frac{CI}{DI}$. Cộng từng vế ba đẳng thức đó, ta có đpcm.

Điều muốn tâm sự ở đây là : Cho đến nay, *tác giả bài báo này chưa chứng minh được điều khẳng định ngược lại* :"Hệ thức 6 là điều kiện *đủ để* ABCD nội tiếp được trong một đường tròn";

Cuối cùng, nếu các bạn đã giải quyết được vấn đề đó, xin bạn hãy nối thêm điều kiện 10 cho mệnh đề trên ; và phát biểu (sau khi đã chứng minh cẩn thận) một mệnh đề tương tự cho tứ giác ngoại tiếp, hoặc một tứ giác vừa nội tiếp vừa ngoại tiếp (tất nhiên với những đường tròn có thể khác nhau). Để tiếp sức một phần cho các bạn, xin nêu lên một số bài tập sau :

1. Chứng minh rằng $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp khi và chỉ khi các đường tròn nội tiếp hai tam giác ABC và ACD tiếp xúc nhau.

2. Chứng minh rằng $ABCD$ là tứ giác nội - ngoại tiếp khi và chỉ khi $S = \sqrt{abcd}$.

3. Giả sử tồn tại một đường tròn tiếp xúc với bốn cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác $ABCD$ tại M, N, P, Q. Chứng minh rằng $ABCD$ là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi $MP \perp NQ$.

4. Giả sử tồn tại một đường tròn có tâm trên cạnh AB và tiếp xúc với ba cạnh còn lại của tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tứ giác $ABCD$ nội tiếp được một đường tròn là

$$AB = AD + DC + CB.$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

BÀI SỐ 6

Problem. Prove that if a number n is relatively prime to 10 then the 101th power of the number n has the same last three digits as n.

Solution. We have to prove that $n^{101} - n = n(n^{100} - 1)$ is divisible by 1000. Since n is relatively prime to 10, that means $n^{100} - 1$ is divisible by 1000. Since n is odd,

$$n^{100} - 1 = (n^{50} - 1)(n^{50} + 1)$$

is divisible by 8. Since n is not divisible by 5, n can be written in the form $5k \pm 1$ or $5k \pm 2$. By Newton's binomial formula we have

$$(5k \pm 1)^{100} = (5k)^{100} \pm 100(5k)^{99} + \dots \pm 100(5k) + 1.$$

Therefore, $(5k \pm 1)^{100} - 1$ is divisible by 125. Similarly,

$$(5k \pm 2)^{100} = (5k)^{100} \pm 100(5k)^{99}2 + \dots \pm 100(5k)2^{99} + 2^{100}.$$

$$2^{100} = (5 - 1)^{50} = 5^{50} - 50(5)^{49} + \dots - 50.5 + 1.$$

Therefore, $(5k \pm 2)^{100} - 1$ is also divisble by 125. So n is divisible by $8.15 = 1000$.

Từ mới :

relatively prime = nguyên tố cùng nhau
power = lũy thừa
last = cuối
as = như
we have to = ta phải
that means = điều này có nghĩa
odd = lẻ
form = dạng
binomial = nhị thức
formula = công thức
similarly = tương tự
also = cũng

NGÔ VIỆT TRUNG

TỪ ĐIỂN VUI *(Tiếp theo bìa 3)*

+ "Muốn hiểu về hình vuông ư? Hãy đi tìm bản gốc của câu thơ này :

Giấu một chùm hoa trong một hình vuông
Cô bé ngập ngừng sang nhà hàng xóm".

NGỌC MAI
(Kim Giang, Hà Nội)

+ "là người mẫu" lí tưởng nhất của mọi thời đại (có người nào thích bề ngang lại bằng bề dọc bao giờ!)

TRẦN NGUYỄN THÙY CHUNG
(12A3, Phan Chu Trinh, Đà Nẵng)

• ***Bình mà không luận:*** Nhiều định nghĩa vẫn bị "ám ảnh" bởi cái nghĩa "khô" của toán học. Hỡi các "nhà từ điển vui", hãy thoáng hơn, bay bổng lên và xa... toán hơn ! Khái niệm **phân số** đang chờ tiếp... "con mắt tinh nghịch" của các bạn !.

LTN

Bài T1/248. *Chứng minh rằng nếu $a \geq 4$, $b \geq 5$, $c \geq 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$ thì $a + b + c \geq 16$.*

Lời giải. của rất nhiều bạn.

Do $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ nên ta đặt $a = 4 + x$, $b = 5 + y$, $c = 6 + z$ $(x, y, z \geq 0)$

$$a^2+b^2+c^2=(4+x)^2+(5+y)^2+(6+z)^2=90$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+8x+10y+12z+77=90$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+8x+10y+12z=13$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+12x+12y+12z \geq 13$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^2+12(x+y+z) \geq 13 \ (1)$$

+ Nếu $x + y + z < 1$ bất đẳng thức (1) không xảy ra.

Vậy $x+y+z \geq 1$. Từ đó suy ra

$$a+b+c=4+5+6+x+y+z$$

$$\Rightarrow \quad a+b+c \geq 16 \text{ (dpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x+y+z=1$ tức là $x=y=0$ và $z=1$, khi đó $a=4$, $b=5$, $c=7$.

Nhận xét. Có rất nhiều bạn gửi lời giải. Hầu hết các lời giải đều tốt.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/248. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 & (1) \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 & (2) \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 & (3) \end{cases}$$

Lời giải. Cộng từng vế của ba phương trình ta có

$$(x-2)^3+(y-2)^3+(z-2)^3=0 \qquad (*)$$

+ Nếu $x > 2$ thì từ (1) ta có $y^3 = 6x(x-2)+8 > 8$ $\Rightarrow y > 2$; kết hợp với (2) thì $z^3 = 6y(y-2)+8 > 8$ $\Rightarrow z > 2$. Vậy $(x-2)^2 + (y-2)^3 + (z-2)^3 > 0$ không thỏa mãn (*).

*nếu $x < 2$ thì từ (3) ta có: $6z(z-2) = x^3 - 8 < 0$

$\Rightarrow 0 < z < 2$; kết hợp (2) : $6y(y-2) < z^3 - 8 < 0$

$\Rightarrow 0 < y < 2$. Vậy $(x-2)^3+(y-2)^3+(z-2)^3 < 0$ không thỏa mãn (*).

Do đó $x = 2$, thay vào (1) có $y = 2$. Thay $y = 2$ vào (2) có $z = 2$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 2$.

Nhận xét. 1) Có nhiều lời giải khác nhau để dẫn đến $x = y = z = 2$. Chẳng hạn xét $f(t) = \sqrt[3]{6t^2 - 12t + 8}$ có tập giá trị là $[\sqrt[3]{2}; +\infty)$ và đồng biến với $t \geq \sqrt[3]{2}$ thì hệ có dạng

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = f(y) \\ x = f(z) \end{cases}$$

Ta có $x, y, z \geq \sqrt[3]{2}$, nên khi $x > y$ thì $f(x) > f(y) \Rightarrow y > z$ $\Rightarrow f(y) > f(z) \Rightarrow z > x$. Vậy $x > y > z > x$ vô lí. Tương tự khi $x < y$ cũng vô lí, suy ra $x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow y = z$.

2) Các bạn *Phạm Tuấn Anh*, 8C, THCS năng khiếu tỉnh **Thanh Hóa**; *Bùi Quang Minh*, 9CT, Trần Phú, Phủ Lý, **Hà Nam**; *Nguyễn Công Hảo*, 8D, THCS Trần Đăng Ninh, Hà Đông, **Hà Tây**; đã giải bài toán tổng quát hơn: tuy nhiên còn tổng quát hơn được nữa.

3) Bạn *Lê Thanh Tùng*, 9A, THCS Trưng Nhị, **Hà Nội** có nhận xét đúng về xuất xứ của bài toán. Rất cám ơn.

4) Nhiều bạn mắc sai lầm khi lập luận để giải bài này :

* *Sai lầm 1:* "Do vai trò x, y, z như nhau nên giả sử được $x \geq y \geq z$". Thực ra x, y, z hoán vị vòng quanh nên phải xét hai thứ tự khác nhau $x \geq y \geq z$ và $y \geq x \geq z$.

* *Sai lầm 2:* $(z-x)(z^2+zx+x^2) = (z-2)^3 \Rightarrow z - x = z - 2$ $\Rightarrow x = 2$.

* *Sai lầm 3:* Ta có

$y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = x^3 - 6z^2 + 12z - 8$ $\Leftrightarrow (x-2)^3 = (y-2)^3 = (z-2)^3 \Leftrightarrow x = y = z = 2$"

Không hiểu bạn này dùng phép biến đổi gì lạ vậy ?

5) Có 552 bạn gửi lời giải và hầu hết giải đúng. Các bạn lập luận ngắn gọn và mạch lạc hơn : *Vương Đình Hiệp*, 9A, Nam Sách, **Hải Dương**; *Ngô Quốc Anh*, 9C, Chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Đắc Lắc**; *Nguyễn Lương Hoàng*, 9A, Quốc học Quy Nhơn, **Bình Định**; *Nguyễn Hoa Cương*, 8[14], Thái Nguyên, Nha Trang, **Khánh Hòa**; *Trần Tất Đạt*, 8/2, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Hoàng Văn Long*, 9B, Chu Van An, Thanh Hà, **Hải Dương**; *Nguyễn Ninh Thuận*, 9/1, THCS Quang Trung, Tân Phú, **Đồng Nai**; *Đặng Phương Thảo*, 8A2, Lương Thế Vinh, **Nam Định**; *Nguyễn Thảo Lan*, 7A, Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Phạm Kim Anh*, 8A, PTTH Tư Nghĩa II, **Quảng Ngãi**; *Nguyễn Huy Thắng*, 9D, Đặng Thai Mai, Vinh, **Nghệ An**; *Lương Thế Nhân*, 9A, Chuyên tỉnh **Bạc Liêu**...

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/248. *Trên mặt phẳng cho 6 điểm mà khoảng cách của chúng khác nhau từng đôi một, và không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nối từng cặp điểm với nhau bằng những đoạn thẳng ta thu được một số tam giác. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng là cạnh nhỏ nhất của một tam* *giác và đồng thời là cạnh lớn nhất của một tam giác khác.*

Lời giải. Quy ước, gọi mỗi tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong số 6 điểm đã cho một cách vắn tắt là tam giác.

Với mỗi tam giác, ta tô cạnh lớn nhất của nó bởi màu xanh. Sau khi làm như thế đối với tất cả các tam giác, ta tô màu đỏ tất cả đoạn thẳng không được tô màu xanh.

Gọi một trong 6 điểm đã cho là A. Theo trên mỗi đoạn thẳng, trong số 5 đoạn nối A với 5 điểm còn lại, được tô hoặc bởi màu xanh hoặc bởi màu đỏ. Do đó, theo nguyên lí Diricle, tồn tại 3 đoạn có cùng màu. Gọi 3 đoạn đó là AB, AC, AD. Xảy ra.

• *TH1: AB, AC, AD cùng có màu xanh.* Khi đó vì cạnh lớn nhất của ΔBCD có màu xanh nên một trong các tam giác ABC, ABD, ACD là tam giác có cả 3 cạnh cùng được tô màu xanh.

• *TH2: AB, AC, AD cùng có màu đỏ.* Khi đó, vì các đoạn thẳng nối được có độ dài khác nhau đôi một nên BC, CD, DB tương ứng là cạnh lớn nhất của ΔABC, ΔACD, ΔADB. Suy ra, ΔBCD có cả 3 cạnh cùng được tô màu xanh. Tóm lại, tồn tại một tam giác mà cả 3 cạnh của nó cùng được tô màu xanh. Cạnh nhỏ nhất của tam giác này sẽ là cạnh lớn nhất của một tam giác khác. (đpcm).

Nhận xét. 1) Bài toán trên là bài toán thi Olympic Toán của Balan năm 1976. Gần đây, bài toán này cùng lời giải của nó đã được giới thiệu trên Tạp chí TH&TT qua bài viết "Nhân một bài thi học sinh giỏi của G.S. Hoàng Chúng (Xem TH&TT số 6/1993, tr.1-3). Tuy nhiên, trong tổng số 160 bạn gửi lời giải tới T.S. có tới 90 bạn cho lời giải sai hoặc không chính xác.

2) Một số bạn cho rằng, nếu "trong mỗi tam giác ta tô màu cạnh nhỏ nhất của nó" thì "trong 5 đoạn nối từ 1 điểm tới 5 điểm còn lại chỉ có nhiều nhất một đoạn được tô màu vì trong mỗi tam giác, theo giả thiết, chỉ có đúng một cạnh nhỏ nhất". Lập luận này cho thấy các bạn đã không hiểu đúng chính cách tô màu mà các bạn đã nêu ra. Và điều đáng nói hơn nữa, là các bạn không biểu lộ một chút băn khoăn nào khi lại chứng minh được, rằng tồn tại một tam giác có 3 cạnh cùng được tô màu !

3) Rất nhiều bạn đã cho lời giải chỉ khác lời giải đã trình bày ở trên (phần Lời giải) ở cách tô màu các đoạn thẳng. Cụ thể, các bạn đã đưa ra các cách tô màu sau :

• *Cách 1.* Trong mỗi tam giác, ta tô màu đỏ cạnh lớn nhất và tô màu xanh hai cạnh còn lại.

• *Cách 2.* Trong mỗi tam giác, ta tô màu đỏ cạnh lớn nhất và tô màu xanh hoặc màu đỏ hai cạnh còn lại.

• *Cách 3.* Trong mỗi tam giác, ta tô màu đỏ cạnh nhỏ nhất, tô màu xanh cạnh lớn nhất và tô màu xanh hoặc màu đỏ cạnh còn lại.

Về các cách tô màu trên, có thể thấy :

+ Nếu tô màu theo cách 1 thì tất cả các đoạn thẳng sẽ được chia ra làm 3 loại: loại 1 gồm tất cả các đoạn màu đỏ, loại 2 gồm tất cả các đoạn màu xanh và loại 3 gồm các đoạn có màu xanh, đỏ lẫn lộn. Vì thế, các lập luận tiếp theo sau sẽ là các lập luận sau.

+ Nếu tô màu theo cách 2 thì trong trường hợp tốt nhất (trường hợp không có đoạn nào bị tô cả 2 màu xanh, đỏ) sự tồn tại của Δ có 3 cạnh màu đỏ chưa giúp ta có được khẳng định như mong muốn, bởi lẽ cạnh màu đỏ chưa hẳn đã là cạnh lớn nhất của một tam giác nào đó.

+ Dễ thấy, cách tô màu cách 3 tổng hợp được tất cả các nhược điểm của hai cách tô màu cách 1 và cách 2.

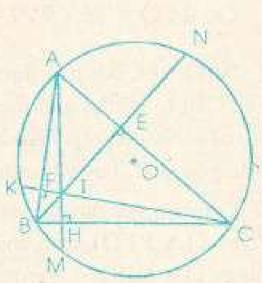
4) Các bạn có lời giải tốt hơn cả : **Vĩnh Long:** *Lê Đức Trí*, 8T, trường Nguyễn Bỉnh Khiêm. **TP Hồ Chí Minh:** *Ngô Trung Hiếu*, 9T, Nguyễn Du, Q.I. **Khánh Hòa:** *Hà Nguyên Vũ*, 8^{14} trường Thái Nguyên, Nha Trang. **Thừa Thiên - Huế:** *Trần Đình Khiêm, Phan Hà Hữu Nguyên, Hoàng Bảo Thiện*, 8^1, 9^1 PTCS Nguyễn Tri Phương, TP Huế); *Đinh Trung Hiếu*, 9A PTCS Phú Bài, Hương Thủy. **Quảng Ngãi:** *Phạm Tuấn Anh*, 9A trường Lê Khiết. **Quảng Trị:** *Trần Việt Anh*, 9^2 THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà. **Quảng Bình:** *Hà Thị Hải Yến*, 9B, THCS hải Đình, Đồng Hới. **Nghệ An:** *Nguyễn Xuân Toán*, 9A, TTCLC Diễn Châu. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Xuân Hòa, Trịnh Thị Kim Duyên, Nguyễn Thị Hồng, Nguyễn Thùy Linh, Hoàng Lan Anh, Lê Ngọc Khoa, Lê Thị Thúy, Bùi Việt Hùng* (8A trường CLC Hoằng Hóa); *Nguyễn Việt Hà, Lê Vĩnh Thịnh*, 8B, 8C trường NK TP Thanh Hóa; *Vũ Đức Nghĩa*, 9B THCS Đông Cương. **Ninh Bình:** *Đinh Quyết Tiến*, 7A THCS Yên Ninh A. **Nam Định:** *Nguyễn Khánh An, Trần Đức Thịnh, Vũ Thanh Tùng*, $9A^6$ THCS Trần Đăng Ninh. **Hà Tây:** *Lưu Tiến Đức*, 9B THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa. **Hà Nội:** *Trần Đoàn Việt*, $8A_1$ THCS Nguyễn Trường Tộ; *Ngô Thế Hùng*, 8C Amsterdam; *Nguyễn Hoàng Thạch*, 8C THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm; *Nguyễn Minh Chính*, 9A THCS Yên Hòa. **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đăng Quý*, 9A THCS Thuận Thành, *Phùng Văn Thủy*, 9A THCS Lê Văn Thịnh, Gia Lương. **Hải Dương:** *Tô Minh Hoàng*, 9A PTNK Hải Dương; *Lê Đình Tiến, Nguyễn Quỳnh Hoa*, 8A, 9T trường Nguyễn Trãi. **Hưng Yên:** *Nguyễn Thu Thủy, Nguyễn Hồng Tươi*, 9TL PTNK Hưng Yên. **Vĩnh Phúc:** *Lăng Thị Phượng*, 8B THCS Lập Thạch; *Lê Kim Thu, Trần Hương Xuân*, 7A, $8A_1$ THCS Hai Bà Trưng, Mê Linh. **Phú Thọ:** *Đào Đức Minh*, $8A_1$ THCS Phong Châu).

5) Bạn Đ.T. Hiếu (TT-Huế) nhận xét rằng, kết quả của bài toán không thay đổi nếu số điểm cho trước là 5. Bạn Hiếu đã chứng minh sai nhận xét của mình. Đề nghị bạn đọc suy nghĩ và cho ý kiến về nhận xét nêu trên.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T4/248. *Các đường cao AH, BE và CF của tam giác nhọn ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác đó tại các điểm thứ hai tương ứng M, N, K.. Tính* $\frac{AM}{AH}+\frac{BN}{BE}+\frac{CK}{CF}$

Lời giải. Giả sử I là trực tâm. Do $AFHC$ và $ABMC$ là các tứ giác nội tiếp nên $\angle BCM = \angle BAM = \angle ICH$. Suy ra ΔICM cân. Ta có $IH = HM$. Tương tự $EN = EI$, $IF = KF$.



Do đó

$$\frac{AM}{AH}+\frac{BN}{BE}+\frac{CK}{CF}=$$
$$=3+\frac{HM}{AH}+\frac{KF}{CF}+\frac{NE}{BE}$$
$$=3+\frac{IH}{AH}+\frac{IF}{CF}+\frac{IE}{BE}=$$
$$=3+\frac{S_{BIC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AIB}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AIC}}{S_{ABC}}=3+\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=4.$$

Nhận xét: Bài này còn có thể giải theo nhiều cách khác.

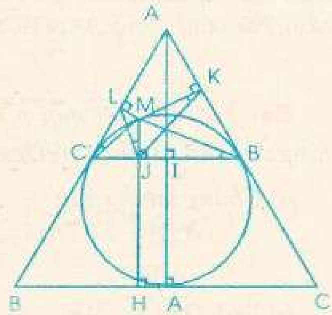
Giải tốt bài này có các bạn : **Lào Cai:** *Nguyễn Tiến Quang, Nguyễn Đức Cường*, 9, THCS Lê Quý Đôn; **Yên Bái:** *Tạ Xuân Hiển*, 8K, THCS Lê Hồng Phong, *Phạm Thùy Linh*, 9E, THCS Yên Thịnh; **Thái Nguyên:** *Mai Nguyên Dũng*, 9A1, THCS Chu Văn An; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Vũ *Sơn*, 9B, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 9A NK Yên Phong, *Nguyễn Thị Ngừng*, 7D, Đình Tổ, Thuận Thành; **Hưng Yên:** *Nguyễn Hồng Tươi*, 9TL, NK HY; **Hải Dương:** *Tô Minh Hoàng*, 9T PTNK HD, *Ngô Xuân Bách*, 8A PT Nguyễn Trãi, *Nguyễn Cao Cường*, 9B THCS Chu Văn An, Thanh Hà, *Nguyễn Phương Thảo*, 9A, Nguyễn Trãi, *Lê Minh Đức*, 8A, Lê Quý Đôn; **Bắc Giang:** *Nguyễn Quý Hoàng*, THCS thị trấn Thắng, Hiệp Hòa; **Hòa Bình:** *Đào Mạnh Tùng*, 9, Yên Thủy, *Nguyễn Thị Linh Giang*, 7A Võ Thị Sáu, Lạc Sơn; **Quảng Ninh:** *Lê Quang Bình*, 9B Trọng điểm THCS Hạ Long, *Nguyễn Hải Minh*, 9A Trọng điểm THCS Uông Bí; **Hà Tây:** *Trần Ngọc Diệp*, 9K, THCS Lê Lợi, *Vũ Cao Cường*, $9A_1$ THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, *Nguyễn Thúy Hồng*, 9B THCS Thường Tín; **Hải Phòng:** *Nguyễn Quý Hà*, 9T, THCS Chu Văn An, *Nguyễn Hoàng Long*, $9A_1$, THCS Hồng Bàng, *Vũ Thanh Bình*, 8T, THCS Chu Văn An; **Hà Nội:** *Phan Vũ Toàn*, 8A Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, *Đỗ Trường Giang*, $9A_1$, THCS Đông Anh; **Nam Định:** *Phạm Quang Định*, $9A_1$, PTCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Trần Đức Hiệu*, 9I, Hàn Thuyên, *Doãn Quý Hiếu*, $9A_6$ Trần Đăng Ninh, *Phùng Văn Thắng*, 8A, THCS Giao Thủy, *Nguyễn Đức Chính*, 9B THCS Hải Hậu, *Phạm Xuân Trường*, 9A THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh; **Thanh Hóa:** Lê Thị Thúy, 8A NK Hoằng Hóa, *Nguyễn Lê Minh*, 9B, Đặng Thai Mai; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Khắc Trung*, $8A_1$ Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Bình:** *Hoàng Anh*, 8B Hải Đình, Đồng Hới; **Quảng Trị:** Lê Hoàng Nam, THCS số 2 Đông Hà; **Thừa Thiên - Huế:** *Trương Đình Nhật*, 9A, TT Phú Bài; **Quảng Nam:** *Trương Văn Hiệu*, 9 THCS Lương Thế Vinh, Duy Xuyên; **Quảng Ngãi:** *Phạm Tuấn Anh*, 9A, Lê Khiết, *Hồ Tú Thuần*, C_2 Nguyễn Nghiêm; **Bình Định:** *Bùi Thị Thu Ngân*, $9A_1$, Quốc học; **Phú Yên:** *Phạm Thái Bình*, 9A Lương Văn Chánh; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoa Cương*, 8^{14}, Thái Nguyên; **Đồng Nai:** *Vũ Xuân Ngọc Tín*, $6T_1$ THCS Quang Trung, *Nguyễn Hồng Hà*, 9^5, PTCS Tam Hòa, Biên Hòa; **Đắc Lắc:** *Võ Nhật Quý*, A, C2-3 Krông pắc; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Nguyễn Văn Thành*, 9T, Lê Quý Đôn; **TP Hồ Chí Minh:** *Khúc Ngọc Vinh*, 9/19 Hồng Bàng, Q5, *Ngô Trung Hiếu*, 9T Nguyễn Du, QI; **Tây Ninh:** *Đào Duy Bình*, $7A_1$, PTTH Dương Minh Châu; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Chí Trung Kiên*, 9T Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Tháp:** *Lê Trọng Duy*, 8T, THCB Sa Đéc; **Bạc Liêu:** *Lương Thế Nhân*, 9A, chuyên Bạc Liêu; **Cà Mau:** *Phạm Chí Thanh*, $9A_1$, THCS Đầm Dơi, *Trần Hữu Quốc Thu*, $9A_1$, chuyên Phan Ngọc Hiển.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/248. *Cho tam giác đều ABC, đường tròn nội tiếp của tam giác tiếp xúc với 3 cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Gọi M là một điểm bất kì trên cung nhỏ B'C' và H, K, L lần lượt là hình chiếu của M lên các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng* $\sqrt{MH}=\sqrt{MK}+\sqrt{ML}$

Lời giải. Gọi giao điểm của MH với C'B' là J, AA' với $C'B'$ là I. Ta đã biết kết quả sau

$$ML + MK + MJ = AI = A'I$$



Mặt khác đpcm
$$\Leftrightarrow MH = MK + ML + 2\sqrt{MK.ML}$$
$$\Leftrightarrow MJ + JH = MK + ML + 2\sqrt{MK.ML}$$

Mà $JH = IA' = ML + MK + MJ$

nên $2MJ = 2\sqrt{MK.ML}$

$\Leftrightarrow MJ = \sqrt{MK.ML}$ (1)

Ta có : $\angle MKJ = \angle MB'J = \angle MC'L = \angle MJL$

Tương tự ta có : $\angle MJK = \angle MLJ$

Nên $\Delta MLJ \sim \Delta MJK$

Vậy (1) đúng, suy ra dpcm.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Lào Cai: *Nguyễn Đức Cường*, 9, PTCS Lê Quý Đôn; **Thái Nguyên:** *Dương Thế Anh*, 9A1, Chu Văn An; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Vũ Sơn*, 9B, PTCS Yên Lạc, *Trần Trung Hiếu*, 9B THCS Lập Thạch; **Bắc Giang:** *Dương Mạnh Hồng*, 9A THCS Hiệp Hòa; **Bắc Ninh:** *Lê Sơn Tùng*, 9A Lê Văn Thịnh, Gia Lương; **Hải Dương:** *Vũ Bá Toản*, 9A1, PTNK Cẩm Giàng, *Trần Quang Khải*, 9A THCS Phú Thứ, Kinh Môn, *Lê Minh Đức*, 8A, Lê Quý Đôn, *Nguyễn Cao Cường*, 9B THCS Chu Văn An, *Lê Thị Thu Trang*, 9A, Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 8T, Chu Văn An, *Bùi Thanh Dương*, 8CT, Trần Phú; **Hà Nội:** *Đỗ Trường Giang*, 9A, THCS Đông Anh; **Nam Định:** *Đỗ Minh Tuấn, Trần Đức Thịnh, Doãn Quý Hiếu*, 9A6, Trần Đăng Ninh, *Trần Đức Hiệu*, 9I, Hàn Thuyên, *Nguyễn Trung Quân*, 9A1, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Nguyễn Xuân Trường*, 8A THCS Giao Thủy; **Thanh Hóa:** *Lưu Ngọc Tuấn*, 9C, NK Thanh Hóa, *Nguyễn Lê Minh*, 9B, THCS Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Bùi Tăng Ngọc*, 9A, THCS Đô Lương, *Nguyễn Chu Chính*, PTTH ĐHSP Vinh, *Vũ Ngọc Dũng*, 9B Đặng Thai Mai, Vinh, *Đinh Thanh Thường*, 9A, Nguyễn Trãi, Tân Kỳ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Trọng Hiếu*, 9A Phú Bài, Hương Thủy; **Quảng Nam:** *Nguyễn Hoàng Anh Vũ*, A, THCS Nguyễn Hiền, Điện Bàn; **Quảng Ngãi:** *Trần Thái An Nghĩa*, 8J, Trần Hưng Đạo, *Hà Quang Đạt*, 8J, Trần Hưng Đạo; **Khánh Hòa:** *Hà Nguyên Vũ*, 8, Thái Nguyên, Nha Trang, **Đắc Lắc:** *Hà Nguyên Vũ*, 8, Thái Nguyên, Nha Trang; **Đắc Lắc:** *Ngô Quốc Anh*, 9C chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **TP Hồ Chí Minh:** *Huỳnh Kỳ Anh, Ngô Trung Hiếu*, 9T, chuyên Nguyễn Du, Q1, *Huỳnh Công Thành*, 9A, Nguyễn Du; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Thị Ngọc Lan*, 9 TH chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Cà Mau:** *Trần Vũ Thanh*, 9T, THCB Cà Mau, *Phan Chí Thanh*, 9A, THCS Đầm Dơi.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/248. *Với mọi $n \in N$, kí hiệu $T(n)$ là tổng các chữ số của n viết trong hệ thi thập phân.*

a) Chứng minh rằng

$$\alpha T(\beta) + \beta T(\alpha) - 2T(\alpha\beta) \vdots 9$$

b) Tính $Q = \sum_{k=1}^{1998} T(k)$

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Xuân Thành*, 10A THCB Đào Duy Từ, TP **Thanh Hóa**)

a) Dễ thấy với $\forall \alpha$ kép $\in N$ thì $T(\alpha) \equiv \alpha \pmod 9$

Vậy $\alpha T(\beta) \equiv \alpha\beta \pmod 9$

$\beta T(\alpha) \equiv \alpha\beta \pmod 9$

$T(\alpha\beta) \equiv \pmod 9$

Suy ra $\alpha T(\beta) + \beta T(\alpha) - 2T(\alpha\beta) \equiv$

$\equiv \alpha\beta + \alpha\beta - 2\alpha\beta \equiv 0 \pmod 9$

b) $Q = \sum_{k=1}^{1998} T(k) = \sum_{k=1}^{999} T(k) + T(1999-k)$

Dễ thấy với $1 \le k \le 999$ thì

$$T(k) + T(1999-k) = T(1999) = 28$$

Do đó $Q = 28 \times 999 = 27972$.

Nhận xét. Bài này được rất đông các bạn tham gia giải. Câu b) có thể giải theo nhiều cách, trong đó cách giải nêu trên của bạn Thành (và một số bạn khác nữa) là ngắn gọn nhất. Tuy vậy cũng không ít bạn tính sai câu b.

Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Đặng Hoàng Minh Hiếu*, 11A PTTH chuyên **Thái Bình**; *Nguyễn Thanh Tùng*, 11A ĐHQG; *Nguyễn Đức Mạnh*, 12A Cổ Loa, Đông Anh, **Hà Nội**. *Trần Đại Nghĩa*, Nguyễn Trãi; *Lê Đình Tiến*, 8A, Nguyễn Trãi **Hải Dương**. *Nguyễn Đức Trường*, 9A, Vinh, **Nghệ An**. *Lưu Văn Mạnh*, 11A2 Ba Đình, Nga Sơn, **Thanh Hóa**. *Trần Đình Khiêm*, 9[1] Nguyễn Tri Phương; *Đinh* Trung Hiếu, 9A, Phú Bài, Hương Thủy; *Nguyễn Chu Chính*, 10A1 Đại học Vinh, **Thừa Thiên - Huế**. *Võ Duy*, 10T, Lê Quý Đôn, **Khánh Hòa**; *Nguyễn Trung Hiếu*, 11A chuyên **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Chí Trung Kiên*, 9T thị xã **Vĩnh Long**. *Trần Diệu Linh*, 10T NK Hàn Thuyên; *Nguyễn Thị Hảo* 11A Lý Thái Tổ, Tiên Sơn, **Bắc Ninh**. *Lê Đại Dương*, 10A1 Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**. *Trịnh Việt Anh*, 11T Trần Phú, **Hải Phòng**. *Phạm Đình Thắng*, 11A PTTH chuyên **Yên Bái**. *Nguyễn Ngọc Chiến*, 11A, chuyên Ba Đình, Nga Sơn, **Thanh Hóa**. *Lê Anh Dũng*, 12CT, chuyên Nguyễn Du; *Nguyễn Văn Lý*, 11A Ngô Gia Tự, **Đắc Lắc**. *Lê Thọ Kha*, 10T Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**. *Hồ Từ Thuần*, 8C2 Nguyễn Nghiêm, **Quảng Ngãi**. *Lê Văn Cường*, 11T, Lương Văn Tụy, **Ninh Bình.**

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/248. *Chứng minh đẳng thức*

$$(1 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots)^2 = 2^n$$

Lời giải. (của đa số các bạn).

Xét số phức $z = 1 + i$.

Tacókhaitriển

$(1+i)^n = (1 - C_n^2 + C_n^4 - ...) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - ...)$

Vậy: $|z^n| = |(1+i)^n| = \sqrt{2^n}$ (1)

$|(1+i)^n| =$

$= \sqrt{(1-C_n^2+C_n^4-...)^2 + (C_n^1-C_n^3+C_n^5-...)^2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có ngay đpcm.

Nhận xét. Nhiều bạn giải trực tiếp bằng phương pháp quy nạp toán học. Các bạn sau đây có lời giải đúng.

Hà Nội: *Lê Hải Bình, Nguyễn Minh Phương, Hoàng Tùng, Vũ Thái Hòa, Tạ Quang Cường, Lưu Minh Ngọc, Lê Thị Tuyến, Cung Thái Sơn, Nguyễn Đức Mạnh, Nguyễn Phong Thiên.* **TP Hồ Chí Minh:** *Lê Quang Nấm, Trần Quang Vinh.* **Đà Nẵng:** *Nguyễn Hoàng Thành.* **Trà Vinh:** *Bùi Minh Khoa.* **Tây Ninh:** *Đoàn Hồng Anh.* **Quảng Ninh:** *Phan Thanh Nam.* **Phú Thọ:** *Đoàn Văn Ngọc.* **Bình Định:** *Nguyễn Minh Trung.* **Thái Nguyên:** *Vũ Tuấn Anh, Nguyễn Hoài Thanh.* **Đồng Nai:** *Phan Thị Thu Hằng, Hà Minh Ngọc.* **Ninh Bình:** *Nguyễn Thanh Sơn, Vũ Hải Châu, Lê Văn Cường.* **Hà Tây:** *Lê Xuân Đại, Vũ Tuấn Anh, Nguyễn Danh Tùng, Nguyễn Đức Trung, Nguyễn Mạnh Hà.* **Yên Bái:** *Nguyễn Kiên, Lê Minh Đức.* **Vĩnh Long:** *Cao Minh Quang, Trần Hữu Nhơn, Nguyễn Minh Trường, Ninh Hồng Phúc.* **Bạc Liêu:** *Lương Thế Nhân, Trương Yến Nhi, Trần Thế Minh.* **Quảng Trị:** *Ngô Quang Thắng, Võ Như Phương, Lê Thọ Kha, Lê Thị Phương Vy, Đào Thị Mỹ Châu.* **Nam Định:** *Đinh Văn Nghĩa, Nguyễn Trường Giang.* **Thái Bình:** *Đặng Hoàng Minh Hiếu, Ngô Hoàng Vịnh, Lê Quang Việt.* **Hải Dương:** *Phạm Văn Hải, Nguyễn Huy Khương, Phùng Đức Tuấn, Trần Đại Nghĩa, Đào Thu Mai, Nguyễn Văn Luật, Vũ Văn Tâm.* **Quảng Bình:** *Phạm Hồng Thuyên, Hoàng Minh Dũng, Trần Chí Hòa, Nguyễn Trng Kiên, Đỗ Quang Hải, Nguyễn Hoa, Nguyễn Công Chức.* **Quảng Ngãi:** *Lê Hoàng Đức Khánh, Trương Quang Trí, Võ Lê Vi Khanh, Bùi Quang Minh.* **Hải Phòng:** *Trần Văn Hà, Phạm Gia Vĩnh Anh, Vũ Huy Toàn, Vũ Quốc Huy, Nguyễn Hữu Tuấn, Trịnh Việt Anh.* **Bắc Giang:** *Nguyễn Minh Hoàng, Đào Thị Chi, Nguyễn Tiến Mạnh, Đặng Hoàng Việt Hà.* **Đắc Lắc:** *Nguyễn Tuấn Anh, Lê Đình Bình, Lê Anh Dũng, Đặng Ngọc Châu.* **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Vĩnh, Trần Nam Dũng, Đinh Trần Nam, Đào Công Lợi, Thái Minh Dũng, Lê Thị Hồng Na, Vũ Đình Vịnh, Nguyễn Duy Hùng, Lê Hồng Hà, Trần Bá Đôn, Đinh Thanh Thường, Nguyễn Việt Hải, Phan Thanh Trung, Trần Khoa Văn...* **Khánh Hòa:** *Trần Trung Dung, Võ Duy, Trần Tuấn Anh, Hà Nguyên Vũ, Nguyễn Hoa Cương.* **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hồng Quân, Phạm Hồng Nhật, Lê Thị Thanh An, Nguyễn Duy Tâm, Phạm Doanh Tuyên, Võ Văn Phong, Đào Xuân Trường, Phạm Hoàng Hà, Cao Thế Thụ, Trịnh Quốc Khánh.* **Hòa Bình:** *Nguyễn Anh Tuấn, Đỗ Quang Dương, Hà Khánh Toàn.* **Thanh Hóa:** *Nguyễn Khuyến Lân, Mai Duy Quang, Trần Duy Hùng, Hoàng Hạnh Quyết, Lê Xuân Dũng, Đỗ Huy Cường, Nguyễn Trường Sinh, Lưu Văn Mạnh, Nguyễn Việt Cường, Lê Khắc Hòa...*

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/248. *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình:* $\sqrt{x+2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$

Lời giải. Giả sử (x, y, z) là nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho. Khi đó:

$\sqrt{x+2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$

$\Rightarrow x+2\sqrt{3} = y+z+2\sqrt{yz}$

$\Rightarrow [x-(y+z)]^2 + 4\sqrt{3}[x-(y+z)] + 12 = 4yz$ (1)

Từ (1) suy ra: $x = y = z$ (2), vì nếu ngược lại, $x \neq y \neq z$, thì $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ (!) do:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{-[x-(y+z)]^2 - 12 + 4yz}{4[x-y(+z)]}$$

Với $x = y + z$, từ (1) ta được $y = 3 \Rightarrow y = 1$, $z = 3$ hoặc $y = 3, z = 1$. Vì thế từ (2) ta được $x = 4$.

Bằng phép thử trực tiếp, dễ thấy $(x = 4, y = 3, z = 1)$ và $(x = 4, y = 1, z = 3)$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Nhận xét. 1) Có 500 bạn gửi lời giải tới T.S. và trong số này có 191 bạn là học sinh bậc THCS và 309 bạn là học sinh bậc THPT.

2) Có một bạn cho lời giải sai do đã nhầm $\sqrt{3}$ là số nguyên! Một số bạn cho lời giải khá rườm rà. Bên cạnh đó, nhiều bạn lại cho lời giải quá vắn tắt do đã bỏ qua việc chứng minh $y = 3$ (hoặc $x = y + z$).

NGUYỄN KHẮC MINH

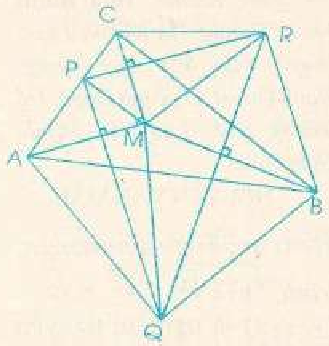
Bài T9/248. *Giả sử M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle AMC = 90°$, $\angle AMB = 150°$ và $\angle BMC = 120°$. Gọi P, Q, R là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMC, AMB và BMC. Hãy so sánh diện tích của hai tam giác PQR và ABC.*

Lời giải. (của *Lê Minh Đức*, $12A_1$ PTTH chuyên Yên Bái.)

Dễ thấy *A, M* đối xứng với nhau qua *PQ*; *B, M* đối xứng với nhau qua QR; *C, M* đối xứng với nhau qua RP (hình vẽ)

$$\text{Vậy}: \begin{cases} S(MPQ) = S(QPQ) \\ S(MQR) = S(BQR) \\ S(MRP) = S(CRP) \\ S(PQR) = S(PQR) \end{cases}$$

$\Rightarrow 2S(PQR) = S(AQBRC)$



$\Rightarrow S(PQR) = \frac{1}{2} S(AQBRC)$

• Cũng vì sự đối xứng nói trên ta có:
$\angle AQB = 2\angle PQR = 2(180^\circ - \angle AMB) = 2(180^\circ - 150^\circ) = 60^\circ$
$\angle BRC = 2\angle QRP = 2(180^\circ - \angle BMC) = 2(180^\circ - 120^\circ) = 120^\circ$

Vậy : $S(PQR) = \frac{1}{2} S(AQBRC)$

$= \frac{1}{2}[S(ABC) + S(AQB) + S(BRC)]$

$= \frac{1}{2}\left[S(ABC) + \frac{\sqrt{3}AB^2}{4} + \frac{CB^2}{4\sqrt{3}} \right] \geq$

$\geq \frac{1}{2} S(ABC) + \frac{1}{4} AB.CB$

$> \frac{1}{2} S(ABC) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB.CB \sin \angle ABC$

(vì $\angle ABC < 90^\circ$)

$= \frac{1}{2} S(ABC) + \frac{1}{2} S(ABC) = S(ABC)$

Tóm lại $S(PQR) > S(ABC)$.

Nhận xét. a) Có khoảng 250 bạn giải bài này, đa số đều giải đúng. Có vài bạn không giải đúng và không hiểu đúng nghĩa câu hỏi "Hãy so sánh diện tích của hai tam giác *PQR* và *ABC*".

2) Bạn *Nguyễn Duy Tân*, 11A, PTTH chuyên **Vĩnh Phúc** đã đề xuất bài toán tổng quát sau : Cho ΔABC, M nằm trong tam giác. P, Q, R theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMC, AMB, BMC. Khi đó : $S(PQR) \geq S(ABC)$

Hơn thế, bạn Tâm còn phát biểu bất đẳng thức hình học trên dưới dạng lượng giác.

3) Bạn Đỗ Tuyết Nhung - Hà Nội - Amsterdam đã giải bài toán này bằng một công cụ mạnh : Tích ngoài của hai véctơ.

4) Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Lê Đại Dương*, 10A1, Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng.** *Đỗ Hoàng Hiệp*, 11A, Trần Phú, **Vĩnh Phúc**. *Nguyễn Đức Giang*, 8A, Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, **Hà Nội.** *Lê Thành Công*, 9B, Đông Hưng, **Thái Bình.** *Vũ Thái Hòa*, 10A ĐHSP-ĐHQG **Hà Nội.** *Trần Quang Vinh*, trường Lê Quý Đôn, ý Yên, **Nam Định**. *Trần Bá Đôn*, 11T, ĐHKH, **Thừa Thiên - Huế.** *Bùi Minh Khoa*, 10A1, trung học chuyên **Trà Vinh.**

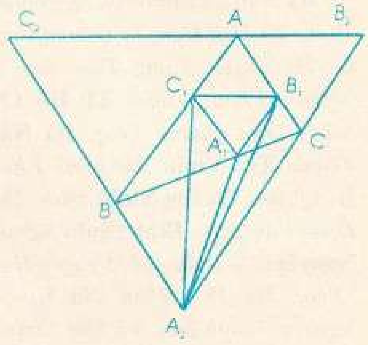
NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/248. *Cho tam giác ABC ($BC = a$; $CA = b$; $Ab = c$). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của các đường phân giác trong của các góc A, B, C với các cạnh đối diện. Qua A, B, C kẻ các đường thẳng song song với B_1C_1; C_1A_1; A_1B_1 chúng cắt nhau tạo thành tam giác $A_2B_2C_2$. Chứng minh*

$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8R}$$

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Lời giải. *Bổ đề 1.* Cho các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ thỏa mãn điều kiện: A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các đoạn BC, CA, AB; A, B, C theo thứ tự thuộc các đoạn B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 ; $B_1C_1 // B_2C_2$, $C_1A_1 // C_2A_2$; $A_1B_1 // A_2B_2$.



h.1

Khi đó: $S^2(ABC) = S(A_1B_1C_1) \cdot S(A_2B_2C_2)$

Chứng minh. Nối A_2C_1 ; A_2B_1. Ta thấy :

$$\begin{cases} S(A_2C_1A_1) = S(BC_1A_1) \ (A_2B // A_1C_1) \\ S(A_2B_1A_1) = S(CB_1A_1) \ (A_2C // A_1B_1) \end{cases}$$

Suy ra :

$S(ABC) = (S(AC_1A_1B_1) + S(BC_1A_1) + S(CB_1A_1)$

$= S(AC_1A_1B_1) + S(A_2C_1A_1) + S(A_2B_1A_1)$

$= S(AC_1A_2B_1)$ (1)

Gọi h, h_1, h_2 là các khoảng cách từ: A tới B_1C_1, A_2 tới B_1C_1, A_2 tới B_2C_2. Dễ thấy $h + h_1 = h_2$. Vậy :

$S(AC_1A_2B_1) = SAC_1B_1) + S(A_2C_1B_1)$

$= \frac{1}{2}h \cdot B_1C_1 + \frac{1}{2}h_1 . B_1C_1 = \frac{1}{2}(h + {}_1)B_1C_1 =$

$= \frac{1}{2}h_2 \cdot B_2C_2 \cdot \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = S(A_2B_2C_2)\sqrt{\frac{S(A_1B_1C_1)}{S_{(A_2}B_2C_2)}}$

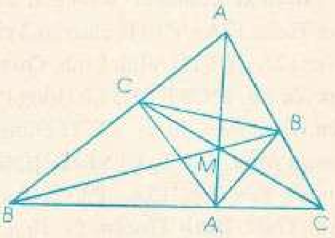
(vì $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$)

$= \sqrt{S(A_1B_1C_1)\, S(A_2B_2C_2)}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$$S^2(ABC) = S(A_1B_1C_1)\,S(A_2B_2C_2)$$

Bổ đề 2. Cho ΔABC, M là điểm bất kì trong tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1.



h.2

Khi đó:

$$S(A_1B_1C_1) = \frac{2xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)}\,.\,S(ABC)$$

ở đây: $x = S(MBC)$; $y = S(MCA)$; $z = S(MAB)$

Chứng minh: Ta có:

$$S(MB_1C_1) - \frac{MB_1}{MB}\cdot\frac{MC_1}{MC}\,S(MBC) =$$

$$= \frac{MB_1}{MB}\cdot\frac{MC_1}{MC}\cdot\frac{MA_1}{AA_1}\,S(ABC)$$

Dễ thấy: $\dfrac{MB_1}{MB} = \dfrac{y}{x+z}$; $\dfrac{MC_1}{MC} = \dfrac{z}{x+y}$;

$$\frac{MA_1}{AA_1} = \frac{x}{x+y+z} = \frac{x}{S(ABC)}$$

Suy ra: $S(MB_1C_1) = \dfrac{xyz}{(x+z)(x+y)}$

Tương tự như vậy ta có:

$$S(MC_1A_1) = \frac{xy}{(y+z)(y+x)}$$

$$S(MA_1B_1) = \frac{xyz}{(z+x)(z+y)}$$

Vậy : $S(a_1B_1C_1) =$

$= S(MB_1C_1) + S(MC_1A_1) + S(MA_1B_1)$

$=$

$$xyz\left[\frac{1}{(x+z)(x+y)} + \frac{1}{(y+z)(y+x)} + \frac{1}{(z+x)(z+y)}\right]$$

$$= \frac{2xyz(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\,S(ABC)$$

Nhờ hai bổ đề trên, bài toán của ta được giải một cách dễ dàng :

Nhờ bổ đề 1, ta có:

$$S(A_2B_2C_2) = \frac{S^2(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} \qquad (1)$$

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Ta có :

$$\frac{S(IBC)}{a} = \frac{S(ICA)}{b} = \frac{S(IAB)}{c}$$

Theo bổ đề 2, ta có:

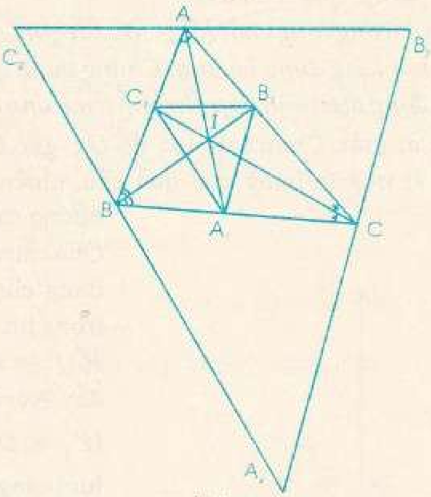
$$S(A_1B_1C_1) = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\,S(ABC) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$S(A_2B_2C_2) = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)\,S(ABC)}{2abc}$$

vì $S(ABC) = \dfrac{abc}{4R}$ nên :

$$S(A_2B_2C_2) = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8R}$$



h.3

Nhận xét. 1) Có khoảng 250 bạn giải bài này, đa số đều giải đúng.

2) Các bổ đề 1, 2 là những kết quả cơ bản của hình học hằng và bài toán này chỉ là hệ quả trực tiếp của hai bổ đề trên. Tuy nhiên nhiều bạn không biết các kết quả này.

3) Một bạn lớp 11A, PTTH chuyên **Thái Bình** có ý định mở rộng bổ đề cho đa giác. Không đúng đâu!

4) Bổ đề 2 có kết quả tương tự cho tứ diện. Bạn đọc hãy tự phát biểu và chứng minh

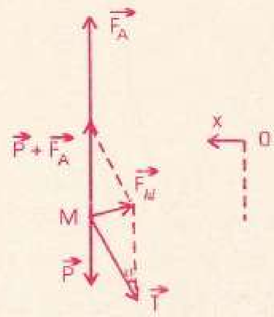
5) Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Hoàng Tùng*, 10A, PTCT-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG **Hà Nội**. *Lê Hải Bình*, 10 Tin PTTH Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**. *Phan Thị Thu Hằng*, 11 toán PTTH Lương Thế Vinh, **Đồng Nai.** *Vũ Mạnh Cường*, 10T, chuyên cấp III Vĩnh Phúc, Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc.** *Triệu Tuấn Đạt*, *Vũ Ngọc Minh*, 8T, PTCS Chu Văn An, **Hải Phòng**. *Đào Thị Chi*, 7B THCS Song Khê, Yên Dũng, **Bắc Giang.** *Trương Yến Nhi*, 9A

PTTH chuyên **Bạc Liêu**. *Trần Thế Vinh*, 10T PTTH Nguyễn Trãi, Hải Dương.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/248. *Một quả cầu có thể tích $V = 50cm^3$, có khối lượng $m = 10g$, được gắn vào một sợi dây mảnh. Đầu còn lại của sợi dây được gắn với đáy bể đựng chất lỏng. Khối lượng riêng của chất lỏng $D = 1500kg/m^3$. Đẩy cho dây neo quả cầu lệch khỏi phương thẳng đứng 5^o rồi thả tay cho quả cầu dao động. Chiều dài của dây neo $l = 1m$. Trong khi dao động quả cầu luôn luôn ở trong lòng chất lỏng. Ma sát giữa quả cầu và chất lỏng được bỏ qua. Chứng minh quả cầu dao động điều hòa, lập phương trình dao động.*

Lời giải. Chọn trục tọa độ Ox, gốc O trùng với vị trí cân bằng của quả cầu, chiều dương hướng sang trái. Quả cầu chịu tác dụng của 3 lực: trọng lực $\vec{P}$ ($P = mg$, lực đẩy Acsimét $\vec{F}_A$ ($F_A = DVg$) và lực căng $\vec{T}$ của dây. Ở thời điểm t, góc lệch là α, quả cầu ở vị trí M có tọa độ x, với $\sin\alpha \approx \frac{x}{l}$. Hợp lực tác dụng lên quả cầu $F_{hl} = -(F_A - P)\sin\alpha \approx -(F_A - P)\frac{x}{l}$.



Áp dụng định luật II Niutơn $F_{hl} = ma = mx''$ suy ra phương trình $x'' + \frac{F_A - P}{ml}x = 0$; phương trình này có nghiệm $x = A\sin(\varpi t + \varphi)$, với

$$\varpi = \sqrt{\frac{F_A - P}{ml}} = \sqrt{\left(\frac{DV - m}{m}\right)\frac{g}{l}} = \sqrt{65} \approx 8,1$$

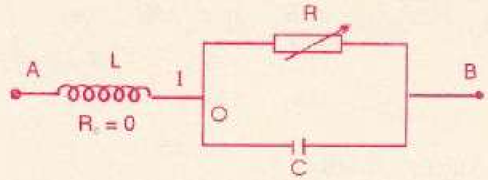
rad/s. Chứng tỏ quả cầu dao động điều hòa.

Chọn gốc thời gian khi quả cầu đi qua vị trí cân bằng tìm được $\varphi = 0$, $A = \frac{\pi}{36}m \approx 0,087$m. Phương trình dao động $x = 0,087\sin(8,1)t$; hoặc $\alpha = 0,087\sin(8,1)t$ (rad). Chú ý rằng phải có điều kiện $F_A > P$ hay $m < DV$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn: *Thi Trần Anh Tuấn*, 12A2, PTTH chuyên **Trà Vinh**. *Nguyễn Việt Tiến*, 12A1, PTTH Vĩnh Linh, **Quảng Trị**. *Nguyễn Văn Nguyên Vũ*, 12C8 PTTH Lê Hồng Phong, Tuy Hòa, **Phú Yên.** *Trần Bảo*, 12A1, PTTH Đông Hà, **Quảng Trị**. *Lê Quang Nẫm*, 12CT, PTNK ĐHQG **TP Hồ Chí Minh.** *Nguyễn Văn Hòa*, 12A2, PTTH chuyên Trần Hưng Đạo, Phan Thiết, **Bình Thuận.** *Lê Tiến Dũng*, 11TL, trường Lê Qúy Đôn, **Quảng Trị**. *Triệu Văn Dũng*, 11A, PTTH Phong Châu, **Phú Thọ**. *Phạm Văn Yên*, 11A, PTTH Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**. *Mai Anh Tuấn*, 12A2 PTTH chuyên Lê Qúi Đôn, **TP Đà Nẵng.**

MAI ANH

Bài L2/248. *Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ với $L = \frac{1}{\pi}H$; $U_{AB} = 100V$. Chứng tỏ rằng ta có thể tìm được một giá trị của C để dòng điện hiệu dụng I_R qua R không phụ thuộc R. Tính I_R khi đó.*



Lời giải. Dùng phương pháp giản đồ véctơ: vẽ véctơ $\vec{U}_{OB}$ (dùng làm trục pha), từ đó dựng I_R (cùng phương U_{OB}) và $\vec{I_C} \perp U_{OB}$) và vẽ $\vec{I} = \vec{I_R} + \vec{I_C}$. Sau đó vẽ $\vec{U}_{OA}$ ($\perp \vec{I}$) và $\vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AO} + \vec{U}_{OB}$. Từ giản đồ suy ra $U^2 = U_{OB}^2 + U_{OA}^2 - 2U_{OB}U_{OA}\sin\varphi$ với

$$\sin\varphi = \frac{I_C}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}}.$$

Do đó tìm được

$$I = \sqrt{\frac{(R^2 + Z_C^2)}{R^2(Z_L - Z_C)^2 + Z_L^2 Z_C^2}} \cdot U_{AB}$$

và $U_{OB} = \frac{RZ_C}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} I$

suy ra $I_R = \frac{U_{OB}}{R} = \frac{Z_C.U_{AB}}{\sqrt{R^2(Z_L - Z_C)^2 + Z_L^2 Z_C^2}}$.

(Xem tiếp trang 18)

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/252. Chứng minh rằng trong 12 số nguyên tố phân biệt $a_1, a_2, ..., a_{12}$ luôn tồn tại 6 số - giả sử là $a_1, a_2, ..., a_6$ - thỏa mãn $(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 + a_6) \vdots 1800$.

NGUYỄN HỮU BẰNG
(Nghệ An)

Bài T2/252. Giải phương trình

$$2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$$

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

Bài T3/252. Xét các số $x, y, z > 1$ thỏa mãn điều kiện : $x + y + z = xyz$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{y-2}{x^2} + \frac{z-2}{y^2} + \frac{x-2}{z^2}$$

NGUYỄN QUANG HẢI
(Phú Thọ)

Bài T4/252 Cho tam giác ABC với phân giác trong AD. Lấy các điểm E và F nằm giữa A, D sao cho $\angle ABE = \angle CBF$. Chứng minh rằng $\angle ACE = \angle BCF$.

PHẠM THỊ THANH QUỲNH
(Hải Phòng)

Bài T5/252. M là một điểm nằm bên trong tam giác ABC. Đường thẳng AM, BM, CM, cắt BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Tìm vị trí của điểm M sao cho biểu thức :

$\frac{AM}{MA_1}\frac{BM}{MB_1}\frac{CM}{MC_1}$ đạt giá trị bé nhất.

NGUYỄN BÁ ĐANG
(Hải Dương)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/252. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn : $x^2 + y^2 = z^2$. Biết z là một số tự nhiên lẻ và x, y là lũy thừa của một số nguyên tố.

ĐOÀN THẾ PHIỆT
(Nam Định)

Bài T7/252. Cho số thực $\alpha > 2$. Cho dãy các số thực dương $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn điều kiện :

$$a_n^{\alpha} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng, dãy $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$ và hãy tìm giới hạn đó.

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Hà Nội)

T8/252. Điền 29 số nguyên dương đầu tiên vào các ô vuông con của bảng 6 × 5 như sau :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12		13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	29

Cho phép thay đổi vị trí của các số trong bảng theo quy tắc : Mỗi lần, lấy một số nằm ở ô kề với ô trống rồi chuyển số đó sang ô trống.

Hỏi nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép chuyển số nói trên đối với bảng số ban đầu ta có thể nhận được bảng số sau hay không :

29	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12		13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	1

NGUYỄN KHẮC MINH
(Hà Nội)

Bài T9/252. Gọi H_i, D_i, M_i lần lượt là chân các đường cao, phân giác, trung tuyến hạ từ đỉnh A_i của tam giác $A_1A_2A_3$ $(i = 1, 2, 3)$. Có tồn tại hay không một tam giác $A_1A_2A_3$ có độ dài 3 cạnh khác nhau sao cho :

$D_iH_i = D_iM_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

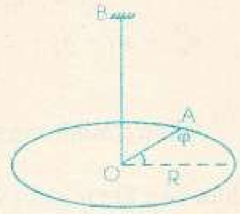
Bài T10/252. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thỏa mãn điều kiện $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0}$. Δ là đường thẳng bất kì qua M theo thứ tự cắt các mặt phẳng (BCD) (CDA) (DAB) (ABC) tại A_1, B_1, C_1, D_1. Chứng minh rằng :

$$\frac{\alpha}{\overline{MA_1}} + \frac{\beta}{\overline{MB_1}} + \frac{\gamma}{\overline{MC_1}} + \frac{\delta}{\overline{MD_1}} = 0$$

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

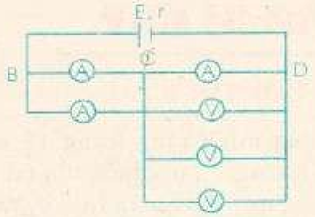
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

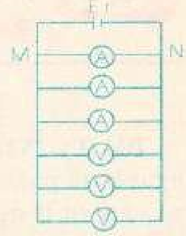
Bài L1/252. Một hệ cấu tạo từ một đĩa đồng tính nằm ngang A, có khối lượng m, bán kính R và một thanh mỏng OB có hệ số xoắn k. Tìm biên độ dao động xoắn bé và năng lượng dao động, nếu tại thời điểm ban đầu người ta quay lệch đĩa một góc φ_0 khỏi vị trí cân bằng và truyền cho nó một vận tốc góc φ_0



NGUYỄN CKÔNG MỸ
(Hà Tĩnh)

Bài L2/252. Có 3 ampe kế giống nhau và 3 vôn kế giống nhau mắc vào 1 nguồn điện (E, r) theo 2 sơ đồ vẽ dưới đây. Trong 2 cách đều thấy vôn kế chỉ 6 Vôn và mạch ngoài tiêu thụ công suất 36 Watt.





a) Cách mắc nào lợi hơn ?

b) Tính số chỉ của ampe kế và vôn kế khi chỉ có 1 ampe kế nối tiếp với 1 vôn kế rồi mắc vào nguồn điện.

TRẦN VĂN MINH
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/252. Prove that among 12 given distinct prime numbers $a_1, a_2, ..., a_{12}$, there exist always 6 numbers, let them be $a_1, a_2, ..., a_6$, satisfying the condition :

$$(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 + a_6) \;\vdots\; 1800$$

T2/252. Solve the equation :

$$2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$$

T3/252. Consider the numbers $x, y, z > 1$ satisfying the condition : $x + y + z = xyz$. Find the least value of the expression

$$P = \frac{y-2}{x^2} + \frac{x-2}{y^2} + \frac{x-2}{z^2}$$

T4/252. Let be given a triangle ABC and its inner angled-bisector AD. Let E and F be two points on the segment AD such that $\angle ABE = \angle CBF$. Prove that $\angle ACE = \angle BCF$.

T5/252. M is an arbitrary point inside the triangle ABC. The lines AM, BM, CM cut respectively the sides BC, CA, AB at A_1, B_1, C_1. Find the position of M so that the expression

$$\frac{AM}{MA_1} \cdot \frac{BM}{MB_1} \cdot \frac{CM}{MC_1}$$

attains its least value.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/252. Find all positive integers x, y, z satisfying the condition $x^2 + y^2 = z^2$ such that z is an odd number, and each x and y is a power of a prime number.

T7/252. Let be given a real number $\alpha > 2$ and a sequence of positive real numbers $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfying the condition : $a_n^{\alpha} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$ for all $n \geq 2$.

Prove that the sequence $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ has a finite limit when $n \to \infty$ and find this limit.

T8/252. Let be given the following 6 × 5 - square grid (each sque is marked by one of the first 29 positive integers, a square is left blank).

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12		13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	29

Each time, one can take the number in a square adjacent to the blank square and put it in the latter.

29	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12		13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	1

Can we obtain, after a finite number of such movings, the following grid from the given grid ?

T9/252. Let A_iH_i, A_iD_i, A_iM_i be respectively the altitude, the inner angled-bisector and the median issued from the vertex A_i of a triangle $A_1A_2A_3$ ($i = 1, 2, 3$). Does there exist a scalene triangle $A_1A_2A_3$ such that

$$D_iH_i = D_iM_i, \ \forall i = 1, 2, 3.$$

T10/252. Let be given a tetrahedron $ABCD$ and a point M satisfying the condition:
$\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} + \delta\vec{MD} = \vec{0}$. An arbitrary line Δ, passing through M, cuts the planes (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) respectively at A_1, B_1, C_1, D_1. Prove that

$$\frac{\alpha}{MA_1} + \frac{\beta}{MB_1} + \frac{\gamma}{MC_1} + \frac{\delta}{MD_1} = 0$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO CÁC LỚP CHUYÊN TOÁN - TIN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI I

(NĂM HỌC 1997-1998)

I. ĐỀ THI

Ngày thi thứ nhất (thời gian 180')

Câu 1. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương đều có

$$5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) \vdots 91$$

Câu 2. Cho x, y là hai số dương thay đổi luôn thỏa mãn điều kiện $xy = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A = \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4}$$

Câu 3. Giải phương trình :

$$\sqrt{x+1} + 2(x+1) = x - 1 + \sqrt{1-x} + 3\sqrt{1-x^2}$$

Câu 4. Xét một hình vuông và một hình tam giác. Nếu hai hình có diện tích bằng nhau thì hình nào có chu vi lớn hơn ?

Câu 5. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 45^\circ$; $BC = a$; O là tâm đường tròn ngoại tiếp B' và C' là chân các đường cao hạ từ B và C xuống các cạnh AC và AB tương ứng. Gọi O' là điểm đối xứng của điểm O qua đường thẳng $B'C'$.

1. Chứng minh rằng A, B', O', C' cùng nằm trên một đường tròn.

2. Tính $B'C'$ theo a.

Ngày thi thứ hai (thời gian 180')

Câu 6. Với giá trị nào của tham số a, phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$|2x - a| + 1 = |x + 3|$$

Câu 7. Giải hệ phương trình 4 ẩn sau đây :

$$\begin{cases} x + y = 3 & (1) \\ xz + yt = 4 & (2) \\ xz^2 + yt^2 = 6 & (3) \\ xz^3 + yt^3 = 10 & (4) \end{cases}$$

Câu 8. Tìm các cặp số nguyên tố p, q thỏa mãn phương trình sau :

$$5^{2^p} + 1997 = 5^{2q^2} + q^2$$

Câu 9. Trong tất cả tứ giác lồi với hai đường chéo có độ dài đã cho và góc giữa hai đường chéo có độ lớn đã cho, xác định tứ giác có chu vi nhỏ nhất.

Câu 10. Hãy xét xem khẳng định sau đây đúng hay sai ?

"Với mọi m, n nguyên dương đều có

$$\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}\text{"}.$$

II. ĐÁP ÁN

Câu 1. $A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n)$

$$= 25^n - 18^n) - 12^n - 5^n) \vdots 7$$

$$= (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n) \vdots 13$$

$\rightarrow A \vdots 9$ (Áp dụng

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1})$)

Câu 2. Cách 1 :

$$(x^2 + y^2) \geq 0 \Rightarrow x^4 + y^2 \geq 2x^2y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^4 + y^2} \leq \frac{x}{2x^2 y} = \frac{1}{2xy} = \frac{1}{2}$$

Tương tự : $\frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow A \geq 1$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = \frac{x}{xy} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

$\Rightarrow \text{Max}A = 1.$

Cách 2: $\frac{x}{x^4 + y^2} = \frac{x^3}{x^6 + y^2x^2} = \frac{x^3}{x^6 + 1}$

$$\frac{y}{x^2 + y^4} = \frac{yx^4}{x^6 + y^4x^4} = \frac{x^3}{x^6 + 1}$$

Do đó $A = \frac{2x^3}{x^6 + 1} = 1 - \frac{(x^3 - 1)^2}{x^6 + 1} \leq 1$

Max$A = 1$ đạt khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 1 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$

Câu 3. Đặt $a = \sqrt{x+1}$, $v = \sqrt{1-x} \ge 0$. Phương trình trở thành :

$$u + 2u^2 = -v^2 + v + 3uv$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 2uv + v^2 + u^2 - uv - u - v = 0$$

$$\Leftrightarrow (u - v)(2u - v + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - v = 0 \\ 2u - v + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x} + 1 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{24}{25} \end{array}\right.$$

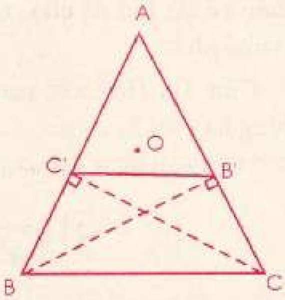
(Mỗi phương trình có không quá một nghiệm).

Câu 4. Kí hiệu a, b, c là 3 cạnh tam giác đã cho : h_a là đường cao thuộc cạnh a, x là cạnh hình vuông đã cho. Ta có :

$b \ge h_a$; $c \ge h_a \rightarrow b + c > 2ha$ (đẳng thức không đồng thời xảy ra)

$\rightarrow a + b + c > a + 2h_a \ge \sqrt{a.2h_a} = 2\sqrt{4s} = 4\sqrt{x} = 4\sqrt{x^2} = 4x$. Vậy chu vi tam giác lớn hơn chu vi hình vuông

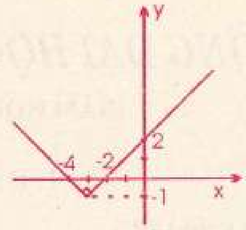
Câu 5. a) O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \rightarrow \angle BOC = 2A = 2.45^\circ = 90^\circ \Rightarrow B, C', O, B', C$ nằm trên đường tròn đường kính $BC \rightarrow \angle C'OB' = 180^\circ - \angle C'CA = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

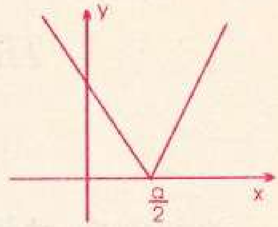


Mà O' đối xứng với O qua $B'C'$ nên $\angle C'O'B' = \angle C'OB' = 135^\circ = 180^\circ - \hat{A} \rightarrow A, C', O', B'$ nằm trên cùng một đường tròn.

b) $BB'CC'$ là hình thang cân nội tiếp trong một đường tròn ($B'O // CC'$) $\rightarrow B'C' = OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 6. Cách 1 : Phương trình $\Leftrightarrow |2x - a| = |x + 3| - 1$. Đồ thị $y = |2x - a|$ và đồ thị $y = |x + 3| - 1$ có dạng





Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ hai đồ thị có điểm chung duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{a}{2} = -4$ hoặc $\dfrac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = -8; a = -4$.

Cách 2: Phương trình tương đương với 4 hệ sau đây :

$$(\text{I}) \begin{cases} 2x - a \ge 0 \\ x + 3 \ge 0 \\ 2x - a + 1 = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2 \\ 2(a + 2) - a \ge 0 \\ a + 2 + 3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2 \\ a \ge 4 \end{cases}$$

$$(\text{II}) \begin{cases} 2x - a \le 0 \\ x + 3 \le 0 \\ a - 2x + 1 = -x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 4 \\ 2(a + 4) - a \le 0 \\ a + 4 + 4 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 4 \\ a \le -8 \end{cases}$$

$$(\text{III}) \begin{cases} 2x - a \ge 0 \\ x + 3 \le 0 \\ 2x - a + 1 = -x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a-4}{3} \\ 2\dfrac{a-4}{3} - a \ge 0 \\ \dfrac{a-4}{3} + 3 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a-4}{3} \\ a \le 8 \end{cases}$$

$$(\text{IV}) \begin{cases} 2x - a \le 0 \\ x + 3 \ge 0 \\ a - 2x + 1 = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a-2}{3} \\ 2\dfrac{a-2}{3} - a \le 0 \\ \dfrac{a-2}{3} + 3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a-2}{3} \\ a \ge -4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất chỉ trong 2 trường hợp :

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \geq -4 \\ a + 2 = \dfrac{a-2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq 8 \\ a + 4 = \dfrac{a-4}{3} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -4 \\ a = -8. \end{array}\right.$$

Đáp số : $a = -4$; $a = -8$.

Câu 7. Cách 1 : Nhân hai vế của (2) với $(z+t)$ ta có $(xz^2 + yt^2) + zt(x+y) = 4(z+t)$

$\rightarrow 6 + 3zt = 4(z+t)$

Nhân hai vế của (3) với $(z+t)$ ta có

$(xz^3 + yt^3) + zt(xz + yt = 6(z+1)$

$\rightarrow 10 + 4zt = 6(z+t)$

Ta được hệ $\begin{cases} 6 + 3zt = 4(z+t) \\ 5 + 2zt = 3(z+t) \end{cases}$

Giải ra được $\begin{cases} z + t = 3 \\ zt = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1\ ;\ t = 2 \\ z = 2\ ;\ t = 1 \end{array}\right.$

Thế $z = 1$; $t = 2$ trở lại hệ ta được $x = 2$; $y = 1$

Thế $z = 2$; $t = 1$ trở lại hệ ta được $x = 1$; $y = 2$.

Đáp số : $\left[\begin{array}{l} x = 2\ ;\ y = 1\ ;\ z = 1\ ;\ t = 2 \\ x = 1\ ;\ y = 2\ ;\ z = 2\ ;\ t = 1 \end{array}\right.$

Cách 2: Đặt $u = z + t$; $v = zt$ thì zt là hai nghiệm của phương trình : $x^2 - ux + v = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^2 - uz + v = 0 \\ t^2 - ut + v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xz^2 - uxz + vx = 0 \\ \underline{yt^2 - uyt + vy = 0} \end{cases}$$

$$6 - 4u + 3v = 0$$

$$\text{Và} \begin{cases} z^3 - uz^2 + vz = 0 \\ t^3 - ut^2 + vt = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xz^3 - uxz^2 + vxz = 0 \\ \underline{yt^3 - uyt^2 + vyt = 0} \end{cases}$$

$$\rightarrow 10 - 6u + 4v = 0$$

Từ đó tính được $u = 3$; $v = 2$. Giải tiếp như cũ.

Câu 8. Cách 1: Nếu $q = 2$ thì vế trái chẵn, vế phải lẻ, vô lí.

Nếu $q = 3$ thì phương trình trở thành

$5^{2p} + 1997 = 5^{18} + 9$

$\rightarrow 1997 - 9 = 1998 \vdots 5$ vô lí

Nếu $q > 8$ thì $q_2^2 \equiv 1$ (mod); $5^2 \equiv 1$ (mod 3)

$\rightarrow 5^{2p} : 5^{2p^2} \equiv 1 \pmod 3) : 1997 \equiv 2 \pmod 3$

$\rightarrow$ vế trái : vế phải không chia hết cho 3, vô lí.

Kết luận : Không có p, q nguyên tố thỏa mãn phương trình :

Cách 2: $5^{2p} + 1997 = 5^{2p^2} + q^2$

$\Leftrightarrow 5^{2p} - 52q^2 + 1995 = q^2 - 2 \Rightarrow q^2 - 2 \vdots 5$

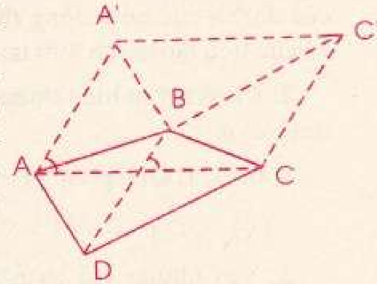
$\Rightarrow \equiv 2 \pmod 5$. Vô lí vì $\forall q \in z; q^2 \not\equiv \pmod 5$.

Không tồn tại p, q.

Cách 3 : $5^{2p} - 1 + 1996 = (5^{2p^2} - 1) + q^2 - 1$

Nếu p nguyên tố thì $(q^2 - 1) \vdots 3$; $5^{2p} - 1 \vdots 24$; $5^{2p^2} - 1 \vdots 24 \Rightarrow 1996 \vdots 3$ vô lí.

Nếu $q = 2$; $q = 3$ xét trực tiếp, phương trình vô nghiệm.



Câu 9. Dựng hình bình hành $\hat{A}A'C'C$ thì chu vi $ABCD = (BA + BC') + (BC + BA') \geq AC' + CA'$. Tứ giác $AA'CC'$ là hình bình hành xác định với 2 cạnh có độ dài đã cho (= độ dài 2 đường chéo đã cho) và góc giữa 2 cạnh đã cho (= góc giữa 2 đường chéo của $ABCD$) $\Rightarrow AC'.CA'$ xác định. Chu vi $ABCD$ bé nhất :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A, B, C' \text{ thẳng hàng} \\ A', B, C \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DC \,//\, AB\ (\equiv BC') \\ AD \,//\, BC\ (\equiv BA') \end{cases}$$

$\Leftrightarrow ABCD'$ là hình bình hành.

Câu 10. Đặt $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{2}$. Ta sẽ chứng tỏ khẳng định là đúng tức là :

$$\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \geq \frac{1}{\alpha n^2} \text{ (1). } \forall m, n \text{ nguyên dương.}$$

Thật vậy, nếu (1) không đúng thì suy ra $\dfrac{m}{n} - \sqrt{2} < \dfrac{1}{\alpha n^2}$?

$$\Rightarrow m < n\sqrt{2} + \frac{1}{\alpha n} \Rightarrow m + n\sqrt{2} < 2n\sqrt{2} + \frac{1}{\alpha n}.$$

$$\Rightarrow n(m + n\sqrt{2}) < n\left(2n\sqrt{2} + \frac{1}{\alpha n}\right)$$

$$= 2n^2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 2n^2\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$= n^2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + n^2(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$= n^2((\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})(n^1 - 1) \leq$$

$$\leq n^2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \alpha n^2$$

$$\Rightarrow n(m + n\sqrt{2}) < \alpha n^2 \Rightarrow \frac{1}{n(m + n\sqrt{2})} > \frac{1}{\alpha n^2} \text{ (2)}$$

Mặt khác vì $m^2 \neq 2n^2 \; \forall$ m, n nguyên dương nên $|m^2 - 2n^2| \neq 0 \Rightarrow |m^2 - 2n^2| \geq 1$ do đó:

$$\left|\frac{m - n\sqrt{2}}{n}\right| = \frac{|m^2 - 2n^2|}{n(m + n\sqrt{2})} \geq \frac{1}{n(m + n\sqrt{2})} \text{ (3)}$$

(2), (3) $\Rightarrow$ (1) trái giả thiết (1) không đúng. Vậy (1) đúng với $\forall$ m, n nguyên dương.

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN NĂM 1997 HỌC VIỆN QUAN HỆ QUỐC TẾ

Câu I. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$

1. Với những giá trị nào của m thì hàm số cực đại và cực tiểu; đồng thời các điểm cực đại và cực tiểu lập thành một tam giác đều.

2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số ứng với $m = 1$.

Câu II. 1. Giải phương trình :

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^x = (\sqrt{5})^x$$

2. Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - (m+2)x + 2m < 0 \\ x^2 + (m+7)x + 7m < 0 \end{cases}$$

Câu III. 1. Giải phương trình :

$$\sqrt{\sin x} + \sin x + \sin^2 x + \cos x = 1$$

2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có :

$$\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2} \geq$$

$$\geq 3\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$

Câu IV. 1. Tìm họ nguyên hàm của hàm số :

$$f(x) = (\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x)$$

2. Cho Elip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm $A(-2, 0)$.

Giả sử M là điểm di động trên Elip. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên trục Oy. Giả sử AH cắt OM tại P. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên Elip thì P luôn luôn chạy trên một đường cong (C) cố định. Vẽ đồ thị đường cong (C).

Câu V. 1. Cho x, y, z là những số dương. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{3}\,(x+y+z)$$

2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$ với $AA' = a$, $AB = b$, $AD = c$. Tính thể tích của tứ diện $ACB'D'$ theo a, b, c.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1. $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

Nếu hàm số có cực đại, cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và cực tiểu lập thành một tam giác đều thì y' phải có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow m > 0$. Với $m > 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{m}$. Đồ thị có điểm cực đại $A(0, 2m + m^4)$ và 2 điểm cực tiểu ($B(-\sqrt{m}, m^4 - m^2 + 2m)$,

$C(\sqrt{m}, m^4 - m^2 + 2m)$.

Các điểm A, B, C là 3 đỉnh một tam giác đều $\Leftrightarrow AB = BC \Leftrightarrow AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m^4 = 3m \Leftrightarrow m^3 = 3$ (do $m > 0$) $\Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$ (thỏa mãn điều kiện $m > 0$). Đáp số : $m = \sqrt[3]{3}$.

2. Bạn đọc tự giải.

Câu II. 1. Đặt $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $c = \sqrt{5}$ thì $0 < a < c < b$ và phương trình đã cho có dạng :

$$a^x + b^x = c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^x = 1 \;(1)$$

* $\forall x \geq 0$ thì $\left(\frac{b}{c}\right)^x \geq 1$; $\left(\frac{a}{c}\right)^x > 0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x > 1 \;\forall x \geq 0$$

*) $\forall x < 0$ thì $\left(\frac{a}{c}\right)^x > 1$; $\left(\frac{b}{c}\right)^x > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x > 1 \;\forall x < 0$$

Do đó (1) vô nghiệm.

2. Xét hệ

$$(H)\begin{cases} x^2 - (m+2)x + 2m < 0 & (2) \\ x^2 + (m+7)x + 7m < 0 & (3) \end{cases}$$

- Nếu $m \geq 0$ thì $x^2 - (m+2)x + 2m \geq 0 \;\forall x \leq 0$ $\Rightarrow \forall x \leq 0$ không là nghiệm của (2) $\Rightarrow \forall x \leq 0$ không là nghiệm của (H).

Mặt khác $x^2 + (m+7)x + 7m > 0 \;\forall x > 0 \Rightarrow \forall x > 0$ không thỏa mãn (3) $\Rightarrow \forall x > 0$ không là nghiệm (H). Vậy $\forall m \geq 0$, (H) vô nghiệm.

- Nếu $m < 0$ thì rõ ràng $x = 0$ là 1 nghiệm của $(H) \Rightarrow \forall m < 0$, ($H$ có nghiệm. Tóm lại, (H) có nghiệm $\Leftrightarrow m < 0$.

Câu III. 1. $\sqrt{\sin x} + \sin x + \sin^2 x + \cos x = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\sin x} + \sin x = \cos^2 x - \cos x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \sqrt{\sin x} + \sin x = \frac{1}{4} + \cos^2 x - \cos x$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} = \cos x - \frac{1}{2} \\ \sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = -\cos x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\sin x} = \cos x - 1 \\ \sqrt{\sin x} = -\cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x \le 0 \\ \sin x = \cos^2 x \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \begin{cases} \cos x \le 0 \\ \sin^2 + \sin x - 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ \begin{cases} \cos x \le 0 \\ \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ \begin{cases} \cos x \le 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \pi - \text{arc}\sin\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

2. Đặt $x = \text{cotg}\frac{A}{2}, y = \text{cotg}\frac{B}{2}, z = \text{cotg}\frac{C}{2}$ thì $x, y, z > 0$ và dễ dàng chứng minh được rằng $x + y + z = xyz$. Do đó đpcm $\Leftrightarrow$

$z + y + z \ge 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$

$\Leftrightarrow x + y + z \ge \frac{3(xy + yz + zx)}{xyz}$

$\Leftrightarrow (x + y + z)xyz \ge 3(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow (x + y + z)(x + y + z) \ge 3(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz\, zx$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \text{cotg}\frac{A}{2} = \text{cotg}\frac{B}{2} = \text{cotg}\frac{C}{2} \Leftrightarrow A = B = C = \Delta$ đều.

Câu IV.

1. $\sin^4 x + \cos^4 x =$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin^2 x\cos^2 x =$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos^4 x;$

$\sin^6 + \cos^6 x =$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x) =$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x =$

$= 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right)\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x\right)$

$= \frac{15}{32} + \frac{3}{32}\cos^2 4x + \left(\frac{5}{32} + \frac{9}{32}\right)\cos 4x =$

$= \frac{15}{32} + \frac{3}{64}(1 + \cos 8x) + \frac{7}{16}\cos 4x =$

$= \frac{33}{64} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{3}{64}\cos 8x$

$\Rightarrow \int f(x)dx = \frac{33}{64}x + \frac{7}{64}\sin 4x + \frac{3}{512}\sin 8x + C.$

2. Elip đã cho nhận Ox làm trục đối xứng và điểm A (-2, 0) thuộc trục đối xứng đó nên (C) cũng nhận Ox làm trục đối xứng, vì vậy chỉ cần xét M chạy trên nửa phía trên trục hoành của elip. Gọi k là hệ số góc của đường thẳng OM thì OM có phương trình : $y = kx$.

Thế $y = kx$ vào $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ta được $\frac{x^2}{4} + k^2x^2 = 1$

$\Leftrightarrow (4k^2 + 1)x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{4k^2 + 1} \Rightarrow$

$x = \frac{\pm 2}{\sqrt{4k^2 + 1}}$.

Chú ý rằng nếu $k \ge 0$ thì OM nằm trong góc phần tư (I) $\Rightarrow x \ge 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{4k^2 + 1}}$, còn nếu $k < 0$ thì OM nằm trong góc phần tử (II) $\Rightarrow x < 0 \Rightarrow$ $x = \frac{-2}{\sqrt{4k^2 + 1}}$. Vậy :

a) Với $k \ge 0$ thì M có tọa độ $x = \frac{2}{\sqrt{4k^2 + 1}}$,

$y = \frac{2k}{\sqrt{4k^2 + 1}}$ $\Rightarrow H$ có tọa độ $\left(0, \frac{2k}{\sqrt{4k^2 + 1}}\right)$

$\Rightarrow AH$ có phương trình $\frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{2k}{\sqrt{4k^2+1}}} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y + \sqrt{4k^2 + 1}}{2k} = 1.$

Để tìm tọa độ giao điểm OM và AH (tức là tọa độ P) ta thế $y = kx$ vào phương trình $AH \Rightarrow$

$$\frac{x}{-2} + \frac{kx\sqrt{4k^2+1}}{2k} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{4k+1} - 1)x = 2.$$

Vậy P có tọa độ $\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{4k^2+1} - 1} & (4) \\ y = kx \quad (5) \end{cases}$

Khử k từ hệ (4), (5): (4) $\Rightarrow \sqrt{4k^2+1} = \dfrac{2}{x} + 1$

$\Rightarrow 4k^2 + 1 = \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{4}{x} + 1 \Rightarrow k^2 = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow k^2x^2 = 1 + x$ (5) $\Rightarrow y^2 = 1 + x$.

Do đó P chạy trên parabôn $y^2 = 1 + x$.

b) Với $k < 0$ thì M có tọa độ $x = \dfrac{-2}{\sqrt{4k^2+1}}$, $y = \dfrac{-2k}{\sqrt{4k^2+1}}$; H có tọa độ $\left(0, \dfrac{-2k}{\sqrt{1+4k^2}}\right)$.

Giải tương tự như trong a) ta cũng được P chạy trên parabôn $y^2 = 1 + x$.

Vậy khi M chạy trên nửa elip phía trên trục hoành thì P chạy trên $y^2 = 1 + x$ parabôn này nhận Ox làm trục đối xứng $\Rightarrow$ khi M chạy trên cả elip thì P chạy trên đường cong (C): $y^2 = 1 + x$. Bạn đọc tự vẽ (C).

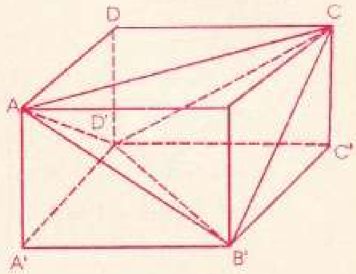
Câu V. 1. Có $x^2 + xy + y^2 = 3\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+xy+y^2} \geq \dfrac{(x+y)\sqrt{3}}{2}$ (dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = y$). Do đó

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y+y+z+z+x) = \sqrt{3}(x+y+z).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z > 0$.

2. Hình hộp chữ nhật có thể tích $V_{hộp} = abc$.



$V_{AA'B'D'} = \dfrac{1}{6}abc$;

$V_{CC'D'B'} = \dfrac{1}{6}abc$;

$V_{BB'AC} = \dfrac{1}{6}abc$;

$V_{DD'AC} = \dfrac{1}{6}abc$

$\Rightarrow V_{ACB'D'} = abc - \dfrac{4}{6}abc = \dfrac{1}{3}abc$.

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC *(Tiếp trang 10)*

Nếu $Z_L = Z_C$ thì $I_R = \dfrac{U_{AB}}{Z_L}$ không phụ thuộc R.

Như vậy, với một tần suất dòng điện f bất kì, ta có tìm được một giá trị của $C = \dfrac{1}{L\omega^2} = \dfrac{1}{4\pi f^2}$ (F) để I_R không phụ thuộc R; khi đó ta có $I_R = \dfrac{50}{f}$ (A). Chẳng hạn với f = 50Hz thì $C = \dfrac{10^{-4}}{\pi}$ (F) và $I = 1A$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng. Nguyễn Trung Kiên, 12a2, THCB Lệ Thủy; *Trần Xuân Tông*, 12A1, THCB Lệ Thủy, **Quảng Bình.** *Nguyễn Mạnh Hùng*, 12A, PTTH chuyên Yên Bái, **Yên Bái.** *Lê Tiến* Dũng *11LT;* Võ Như Phương, *12 chuyên* Lê Quý Đôn; *Nguyễn Việt Tiến*, 12A1, PTTH Vĩnh Linh, **Quảng Trị.** *Nguyễn Quang Hưng*, 11CL, PTTHNK Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình.** *Huỳnh Hoàng Vương*, 11CL; *Lê Đình Bình*, 12T, PTTH chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Đắc Lắc.** *Nguyễn Văn Nguyên Vũ*, 12C8, PTTH Lê Hồng Phong, Tuy Hòa, **Phú Yên.** *Vũ Đăng Huyền*, 12G, PTTH Tứ Kì, **Hải Dương.** *Lương Minh Đức*, 10L, PTTH chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An.** *Trịnh Thị Nhiên*, 11A, THCB Ba Đình, Nga Sơn, **Thanh Hóa.** *Trần Ngọc Hiển*, 11TL, PTTH Phan Bội Châu, Vinh; *Lê Duy Bình*, 12A3, PTTH Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, **Nghệ An.** *Ninh Hồng Phúc*, 12T, chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long.** *Trương Quảng Trí*, 12A1, THCB Sơn Tịnh I, **Quảng Ngãi.** *Lê Quang Nẩm*, 12CT, PTNK ĐHQG **TP. Hồ Chí Minh.** *Mai Anh Tuấn*, 12A2, chuyên Lê Quý Đôn, **TP Đà Nẵng.**

MAI ANH

ĐÍNH CHÍNH

Xin sửa lại biểu thức của Bài T8/251 thành

$$1996f(x) - \frac{1997}{1998}f\left(\frac{x}{1999}\right) = 1996x^{2000}$$

Xin lỗi bạn đọc và tác giả.

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI ĐẠI HỌC

Những ứng dụng của PHƯƠNG PHÁP ĐỒNG BẬC

VŨ ĐỨC CẢNH
(Hà Nội)

PHƯƠNG pháp đồng bậc (hay còn gọi là đẳng cấp) là một phương pháp hay được sử dụng trong việc giải phương trình hay chứng minh bất đẳng thức. Đối với nhiều bài toán, phương pháp đồng bậc tỏ ra đặc biệt có hiệu quả, đôi khi đó là cách giải độc đáo.

Theo phương pháp này, người ta thường sử dụng các giả thiết của bài toán để tìm ra một hệ thức liên hệ giữa các biến số mà ở đó mỗi hạng tử có cùng bậc. Đối với bài toán giải phương trình, hệ thức đó thường được sử dụng để tìm ra quan hệ giữa các ẩn bằng cách coi nó là phương trình của một ẩn số và các tham số rồi giải phương trình này. Đối với bài toán chứng minh bất đẳng thức, hệ thức đó được dùng để chứng minh bất đẳng thức do đề ra một cách trực tiếp hay gián tiếp.

Mong rằng qua các ví dụ dưới đây, bạn đọc sẽ rút ra được những kinh nghiệm nhất định khi giải toán bằng phương pháp đồng bậc.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^5 + y^5 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Giải. Ta có :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^5 + y^5 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 & (1) \\ x^2y^2(x + y) = 0 & (2) \end{cases}$$

Xảy ra các trường hợp sau :

+ Nếu $x = 0$ thì kết hợp với (1) ta được $y = 1$

+ Nếu $y = 0$ thì kết hợp với (1) ta được $x = 1$.

+ Nếu $x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y$ thì $x^3 = -y^3 \Leftrightarrow$ $x^3 + y^3 = 0$ nên (1) không được thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là : $(x = 0; y = 1)$ và $(x = 1; y = 0)$.

Ví dụ 2. (ĐHQGHN 1997 - khối D) : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 & (1) \\ xy(x - y) = 2 & (2) \end{cases}$$

Giải. Từ (1) và (2) suy ra :

$$2(x^3 - y^3) = 7xy(x - y)$$

$$\Leftrightarrow 2(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 7xy(x - y)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(2x^2 - 5xy + 2y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \ (3)$$

(Do từ (2) suy ra $x - y \neq 0$)

Coi phương trình (3) là phương trình ẩn x, còn y là tham số. Giải (3) ta được $x = 2y$ hoặc $x = \frac{y}{2}$.

+ Trường hợp $x = 2y$, ta có

$$\begin{cases} x = 2y \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 7y^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

+ Trường hợp $x = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2x$, ta được :

$$\begin{cases} y = 2x \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^3 - (2x)^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Dễ dàng thử lại thấy các cặp $(x = 2; y = 1)$ và $(x = -1; y = -2)$ là nghiệm của hệ đã cho.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là :

$$(x; y) \in \{(2; 1); (-1; -2)\}$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x - y)(2xy + 3) \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

Giải.

$$\begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x - y)(2xy + 3) \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 - 9y^3 = (x - y)(2xy + x^2 - xy + y^2 \\ x^2 - xy + y^3 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = x^3 - y^3 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 8y^3 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x = 2; y = 1)$ và $(x = -2; y = -1)$

Ví dụ 4. (Viện Đại học mở Hà Nội 1995).

Giải phương trình :

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x \qquad (1)$$

Giải. Ta có :

$(1) \Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{2} \cdot \sqrt{2}\,\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = m\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = n\pi \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m\frac{\pi}{2} \\ x = n\pi - \frac{\pi}{4} \end{array} \right. \qquad (m, n \in \mathbf{Z})$$

Ví dụ 5. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng :

$$6(ab + bc + ca) + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \le 2 \; (1)$$

Giải. Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 6(ab + bc + ca)(a + b + c) + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \le 2(a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3+b^3+c^3) \ge a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b) + a^2(a-c) + b^2(b-c) + b^2(b-a) + c^2(c-a) + c^2(c-b) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2-b^2) + (b-c)(b^2-c^2) + (c-a)(c^2-a^2) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) + (b-c)^2(b+c) + (c-a)^2(c+a) \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng ở trên là đúng do $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$. Suy ra (1) cũng đúng (đpcm).

Ví dụ 6. Cho các số x, y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^2 - 2xy + 3y^2$.

Giải. + Xét trường hợp $y = 0$ thì $x^2 = 2$ và ta có $A = 2$.

+ Xét trường hợp $y \neq 0$, đặt $t = \frac{x}{y}$. Ta có :

$$\frac{A}{2} = \frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{t^2 - 2t + 3}{t^2 + t + 1} = f(t)$$

$$f'(t) = \frac{(2t-2)(t^2+t+1) - (2t+1)(t^2-2t+3)}{(t^2+t+1)^2} =$$

$$= \frac{3t^2 - 4t - 5}{(t^2 + t + 1)^2}$$

$$f'(t) \le 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 5 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{19}}{3} = t_1 \le t \le t_2 = \frac{2 + \sqrt{19}}{3}$$

Từ đó ta có bảng biến thiên sau :

t	$-\infty$		t_1		t_2		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	−	0	+	
$f(t)$	1	↗	$f(t_1)$	↘	$f(t_2)$	↗	1

Vì $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = 1$ nên từ bảng biến thiên trên, suy ra

$$\max f(t) = f(t_1) = \frac{38 + 2\sqrt{19}}{38 - 7\sqrt{19}}$$

$$\min f(t) = f(t_2) = \frac{38 - 2\sqrt{19}}{38 + 7\sqrt{19}}$$

Do đó $\max A = 2f(t_1)$ và $\min A = 2f(t_2)$.

Kết luận : $\max A = \dfrac{76 + 4\sqrt{19}}{38 - 7\sqrt{19}}$

$\min A = \dfrac{76 - 4\sqrt{19}}{38 + 7\sqrt{19}}$

Để kết thúc bài viết này, xin đề nghị bạn đọc giải các bài tập sau :

1) Cho $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh : $a^3 + b^3 + c^3 \ge a + b + c$

2) Cho $x^2 - xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của biểu thức $M = xy + y^2$.

3) (ĐHQGHN-1997 - Khối A):

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 3y = 4\dfrac{y}{x} \\ y - 3x = 4 \cdot \dfrac{x}{y} \end{cases}$$

4) (ĐH Mỏ - Địa chất - 1997)

Giải hệ : $\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x \\ x(x^2 + y^2) = 10y \end{cases}$.

KẾT QUẢ CUỘC THI OLYMPIC TOÁN QUỐC GIA PTTH NĂM HỌC 1997-1998

Cuộc thi chọn học sinh giỏi toán PTTH năm học 1997-1998 diễn ra trong hai ngày: 13 và 14 tháng 3 năm 1998. Mỗi ngày thí sinh phải làm 3 bài toán trong thời gian 180 phút. Các đội dự thi được chia thành 2 bảng : bảng A dành cho học sinh các lớp chuyên toán PTTH thuộc trường đại học và các tỉnh, thành phố vốn có truyền thống học giỏi toán, bảng B cho các tỉnh, thành phố còn lại với mức độ đề thi dễ hơn bảng A.

Tham dự cuộc thi có 65 đội với 467 học sinh, trong đó bảng A có 34 đội với 278 thí sinh, bảng B có 31 đội với 189 thí sinh. Điểm tối đa của bài thi là 40.

Kết quả như sau : Ở bảng A có 4 giải nhất từ 39 đến 40 điểm, 32 giải nhì từ 32 đến 37,5 điểm, 56 giải ba từ 26 đến 31,5 điểm và 48 giải khuyến khích từ 21,5 đến 25,5 điểm. Số thí sinh đạt giải là 140, chiếm 50% số thí sinh. Các thí sinh đạt giải nhất, nhì, ba là 92, chiếm 66% số thí sinh đạt giải.

Ở bảng B có 1 giải nhất 38,5 điểm, 18 giải nhì từ 32 đến 37 điểm, 18 giải ba từ 26 đến 31 điểm và 27 giải khuyến khích từ 20 đến 24,5 điểm.

Số thí sinh đạt giải là 64, chiếm 34% số thí sinh. Các thí sinh đạt giải nhất, nhì, ba là 37, chiếm 58% số thí sinh đạt giải.

Dưới đây là danh sách các học sinh PTTH đạt giải trong kì thi chọn học sinh giỏi toán quốc gia năm học 1997-1998.

BẢNG A

GIẢI NHẤT (4 giải)

Tống Quốc Trượng (**Hải Dương**); Nguyễn Anh Hoa (**Nam Định**); Đỗ Quang Yên (**Thanh Hóa**); Nguyễn Hoàng Anh (**ĐH KHTN-ĐHQG Hà Nội**).

GIẢI NHÌ (32 giải)

Phạm Huy Tùng, Nguyễn Lưu Sơn, Đào Thị Thu Hà (nữ), Bùi Mạnh Hùng, Phạm Trần Quân, Nguyễn Minh Tuấn (**ĐH KHTN-ĐHQG Hà Nội**); Vũ Việt Anh, Nguyễn Sĩ Phong, Nguyễn Quốc Thắng, Lê Thái Hoàng (**ĐHSP-ĐHQG Hà Nội**); Lê Hồng Hà, Nguyễn Tiến Trung (**ĐHSP Vinh**), Lưu Minh Đức, Trịnh Lê Tuấn (**ĐHQG TP Hồ Chí Minh**); Phan Linh, Nguyễn Long, Ngô Văn Sáng, Đỗ Trung Thông (**Hà Nội**); Trịnh Kim Chi (nữ, **Hà Tĩnh**), Nguyễn Thị Hằng (nữ), Phùng Đức Tuấn (**Hải Dương**); Đặng Anh Tuấn (**Hải Phòng**); Nguyễn Mạnh Tiến (**Hưng Yên**); Phạm Văn Quốc, Phạm Văn Quyền (**Nam Định**); Trần Nam Dũng, Nguyễn Thịnh (**Nghệ An**), Trần Đức Thuận (**Quảng Bình**); Nguyễn Hữu Hội (**Quảng Ngãi**); Đỗ Hồng Sơn (**TP Hồ Chí Minh**), Đoàn Nhật Dương (**Thái Bình**), Lê Xuân Trung (**Thanh Hóa**)

GIẢI BA (56 giải)

Phạm Hoàng Anh, Tạ Duy Thắng, Nguyễn Trung Tú (**ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội**); Phạm Nguyễn Thu Trang (nữ), Nguyễn Bá Hải, (**ĐHSP-ĐHQG Hà Nội**), Nguyễn Đức Trung, Hoàng Thanh Phúc (ĐHSP Vinh), Nguyễn Lê Lực, Lê Quang Nẫm, Lý Minh Tuấn, Nguyễn Việt Linh (**ĐHQG TP Hồ Chí Minh**), Phạm Khánh Sơn (**Đà Nẵng**); Trần Việt Bình, Nguyễn Đức Mạnh, Trần Phương (**Hà Nội**); Nguyễn Đức Xuân Bình, Đoàn Khánh Hoàng, Nguyễn Phan Lĩnh, Trịnh Minh Ngọc (**Hà Tĩnh**); Dương Thị Vân Thanh (nữ); Trần Đại Nghĩa, Phạm Văn Hải, Đỗ Hoài Nam, Hoàng Xuân Quý (**Hải Dương**); Phạm Thu Hương (nữ), Phạm Tuấn Minh (**Hải Phòng**); Đỗ Văn Hải, Dương Mạnh Hùng (**Hưng Yên**); Đỗ Ngọc Anh, Hoàng Mạnh Quang, Phan Tuấn Giang (**Nam Định**); Đặng Đức Hạnh (**Nghệ An**); Nguyễn Thanh Sơn, Nguyễn Văn Thành, Vũ Hải Châu, Hoàng Văn Tuấn (**Ninh Bình**); Bùi Minh Mẫn, Tạ Đức Dũng, Nguyễn Thị Hồng Nhung (nữ), Nguyễn Minh Phương, Đào Mạnh Thắng (**Phú Thọ**) Nguyễn Hoa (**Quảng Bình**); Trần Lê Nam (**Quảng Ngãi**); Vũ Đức Phú (**TP Hồ Chí Minh**); Phạm Thái Bình, Trần Văn Hoàng, Kiều Phúc Khánh, Nguyễn Thành Phương (**Thái Bình**), Bùi Văn Bình, Lê Huy Bình, Đoàn Tiến Dũng, Vũ Đình Phương, Viên Ngọc Quang (**Thanh Hóa**), Nguyễn Duy Tân, Đỗ Trung Kiên, Hoàng Hữu Hiệp (**Vĩnh Phúc**).

GIẢI KHUYẾN KHÍCH (48 giải)

Bùi Việt Hà (**ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội**); Trần Trung Thành, Bùi Thị Thu Cúc (nữ), Lưu Hoàng Đức, Trần Đông Hải (**ĐHSP-ĐHQG Hà Nội**); Phạm Nguyên Thạch (**ĐHSP Vinh**); Trần Hữu Hoàng Phú (**ĐHKH-Huế**); Phạm Hưng Lộc, Lê Minh Tuấn (**ĐHQG TP Hồ Chí Minh**); Đặng Hoàng Việt Hà, Phạm Văn Thịnh, Nguyễn Tiến mạnh, Vũ Duy Tuấn (**Bắc Giang**); Nguyễn Thái Hòa (**Bình Định**); Phạm Thị Thu Hằng (nữ) Lê Khắc Huỳnh (**Đồng Nai**); Nguyễn Minh Công (**Hà Nội**); Nguyễn Quang Hải, Bùi Xuân Hảo, Ngô Đình Trung, Tạ Duy Phong (**Hà Tây**); Lê Đăng Khoa (**Hà Tĩnh**); Tạ Thành Định, Đoàn

Thái Sơn (**Hải Phòng**); Châu Văn Đồng, Lê Hiến Mai, Nguyễn Thái Thọ (**Nghệ An**); Đỗ Thành Chung, Nguyễn Văn Đức, Vũ Hồng Việt (**Ninh Bình**) ; Trần Anh Tuấn (**Phú Thọ**); Trương Vĩnh Lân, Trần Hữu Lực (**Quảng Bình**); Trần Quang Minh (**Quảng Nam**); Trần Văn Nghĩa (**Quảng Ngãi**); Nguyễn Trung Tuân (**Quảng Ninh**); Bùi Thế Anh, Đỗ Quốc Dũng, Nguyễn Hữu Nguyên (**TP Hồ Chí Minh**) Nguyễn Trương Thanh (**Thái Bình**), Hoàng Sĩ Nguyên, Vũ Ngọc Sơn, Hoàng Sĩ Hùng (**Thái Nguyên**); Lê Văn Quốc Anh, Nguyễn Hữu Chúc (**Thừa Thiên - Huế**); Cao Thế Thụ, Phạm Hoàng Hà, Lê Mạnh Tuấn (**Vĩnh Phúc**).

BẢNG B

GIẢI NHẤT (1 giải)

Hoàng Mai Quỳnh (**Ninh Thuận**)

GIẢI NHÌ (18 giải)

Nguyễn Hữu Phúc (**Bến Tre**), Vũ Hải Đông, Lê Anh Dũng, Mai Đức Thanh, Phan Thắng (**Đắk Lắk**); Nguyễn Anh Dũng, Đỗ Quang Dương, Trần Anh Tuấn, Phùng Minh Đức, Lâm Viết Hoan, Hà Khánh Toàn (**Hòa Bình**); Nguyễn Quốc Dũng (**Ninh Thuận**); Trần Hữu Nhơn (**Vĩnh Long**); Nguyễn Ngọc Chiến, Nguyễn Quốc Huy, Lê Minh Đức, Nguyễn Kiên, Đỗ Năng Tùng (**Yên Bái**).

GIẢI BA (18 giải)

Nguyễn Trung Kiên (**An Giang**), Trần Thị Hoàng Quyên (nữ), Nguyễn Thanh Sơn (**Cà Mau**); Trương Xuân Nghiêu, Lê Thế Tân, Nguyễn Thiên Bình, (**Đắk Lắk**); Bùi Xuân Hùng, Ngô Hồng Quang (**Hòa Bình**); Phan Huy Đạo, Thân Huỳnh Vĩnh Bảo, Nguyễn Tiến Hằng, Trần Nguyên Phương, Trương Anh Tuấn (**Lâm Đồng**); Nguyễn Văn Hữu (**Lào Cai**); Trần Bắc (**Vĩnh Long**); Tạ Xuân Hưng, Nguyễn Đăng Trung, Lê Hồng Hải (**Yên Bái**)

GIẢI KHUYẾN KHÍCH (27 giải)

Huỳnh Đỉnh, Phạm Minh Đức, Ngô Huy Biên (**Bà Rịa - Vũng Tàu**); Lê Thị Thanh Hải (nữ) (**Bình Dương**); Nguyễn Ngọc Huy (**Bình Thuận**); Huỳnh Duy Thanh (**Bến Tre**); Đặng Minh Thanh, Bùi Triệu Giang (**Cần Thơ**); Phan Đình Thế Huân, Nguyễn Quang Vinh (**Đồng Tháp**); Hồ Thiên Sơn (**Gia Lai**); Nguyễn Thái Đức, Trần Kim Tuyến (**Lâm Đồng**); Hoàng Phương Đông, Phạm Quốc Hưng (**Lào Cai**); Bùi Quang Tiến (**Lạng Sơn**); Nguyễn Văn Minh, Đỗ Tuấn Anh (**Sơn La**); Châu Công Điền, Lưu Huỳnh Quốc Dũng (**Tiền Giang**); Trần Minh Mạnh, Nguyễn Đức Thành, Hồ Tuấn Nam (**Tuyên Quang**); Tống Kim Anh (nữ), Bùi Trần Hạnh Loan (nữ), Cao Minh Quang, Nguyễn Hà Hải Đăng (**Vĩnh Long**).

Dưới đây xin giới thiệu đề thi.

BẢNG A

Bài 1. Cho số thực $a \geq 1$. Xét dãy số (x_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ được xác định bởi : $x_1 = a$.

$$x_{n+1} = 1 + \ln\left(\frac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right) \text{ với } n = 1, 2, 3, ...$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2. Cho mặt cầu tâm O ngoại tiếp hình tứ diện $ABCD$. Vẽ các đường kính AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Gọi A_o, B_o, C_o, D_o lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng:

a) Các đường thẳng A_oA_1, B_oB_1, C_oC_1 và D_oD_1 đồng quy ở một điểm. Gọi điểm này là F.

b) Đường thẳng đi qua F và qua trung điểm một cạnh của tứ diện $ABCD$ thì vuông góc với các cạnh đối diện của cạnh đó.

Bài 3. Cho dãy số nguyên dương (a_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định bởi : $a_0 = 20$, $a_1 = 100$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n + 20$ với $n = 0, 1, 2, ...$

Tìm số nguyên dương h nhỏ nhất có tính chất :

$a_{n+h} - a_n$ chia hết cho 1998 với mọi $n \in N$.

Bài 4. Chứng minh rằng không tồn tại dãy vô hạn các số thực (x_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

i) $|x_n| \leq 0{,}666$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

ii) $|x_n - x_m| \geq \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{m(m+1)}$ với mọi $m \neq n$ (m, n là các số nguyên dương).

Bài 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F(x, y) = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2}$$

trong đó x, y là các số thực.

Bài 6. Tìm tất cả các số nguyên dương n để có đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn

$$P(x^{1998} - x^{-1998}) = x^n - x^{-n}$$

với mọi số thực $x \neq 0$.

BẢNG B

Bài 1. Cho số thực a. Xét dãy số (x_n) ($n = 1, 2, 3...$) được xác định bởi :

$$x_1 = a, x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1} \text{ với } n = 1, 2, 3,...$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2. Cho điểm P nằm trên mặt cầu (S) bán kính R. Xét các hình chóp $PABC$ có góc tam diện vuông tại đỉnh P và ba điểm A, B, C nằm trên mặt cầu đó. Chứng minh rằng các mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC.

Bài 3. Cho các số nguyên a, b. Xét dãy số nguyên (a_n) ($n = 0, 1, 2, ...$) được xác định bởi :

$a_o = a, a_1 = b, a_2 = 2b - a + 2,$

$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ với $n = 0, 1, 2, ...$

a) Tìm công thức tổng quát của a_n.

b) Tìm tất cả các số nguyên a, b để a_n là số chính phương với mọi $n \geq 1998$.

Bài 4. Cho n số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ ($n \geq 2$) thỏa mãn :

$$\frac{1}{x_1+1998} + \frac{1}{x_2+1998} + ... + \frac{1}{x_n+1998} = \frac{1}{1998}$$

Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}{n-1} \geq 1998$.

Bài 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} + \sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

trong đó x, y là các số thực thỏa mãn $2x - y = 2$.

Bài 6. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương lẻ n đều tồn tại và duy nhất đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc n thỏa mãn :

$$P(x - x^{-1}) = x^n - x^{-n}$$

với mọi số thực $x \neq 0$.

Nếu n là số nguyên dương chẵn thì có tìm được đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc n thỏa mãn điều kiện trên hay không ?

NGUYỄN VIỆT HẢI

VỀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT... *(Tiếp trang 24)*

$$x_1^2 + y_1^2 = 5^t(x_1 - y_1)(*)$$

với $x = mx_1, y = my_1, x_1 > y_1 \geq 1$.

- nếu $t = 0$ ta trở về trường hợp i) phương trình vô nghiệm.

- nếu $t = 1$ ta trở về trường hợp ii) phương trình (*) có các nghiệm (x_1, y_1) là (3; 1) và (2; 1).

Vậy các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn bài toán là : $(3m; m), (m; 3m), (2m; m), (m; 2m)$ với $m \in \{3; 7; 19; 3.7; 3.19; 7.19; 3.7.19\}$

Ví dụ 3. Giả sử a, b là các số nguyên dương sao cho $15a + 16b$ và $16a - 15b$ đều là các số chính phương. Tìm giá trị nhỏ nhất của số nhỏ nhất trong hai số chính phương ấy.

(IMO lần thứ 37).

Giải. Giả sử $15a + 16b = m^2$

$16a - 15b = n^2, \quad m, n \in \mathbf{N}$

Khi đó, ta có:

$$m^4 + n^4 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2)$$

hay $m^4 + n^4 = 481(a^2 + b^2)$

suy ra $m^4 + n^4 \vdots 481$ mà $481 = 13.37$ nên theo hệ quả 2 và nhận xét 2 ta có $m \vdots 481$ và $n \vdots 481$ do đó giá trị nhỏ nhất của số nhỏ nhất trong hai số m^2 và n^2 là 481^2 với $a = 31.481$ và $b = 481$.

Các bạn thân mến! Qua các ví dụ chắc các bạn đã thấy ứng dụng của định lí trên và các hệ quả. Sau đây chúng tôi xin gửi đến các bạn một số bài tập.

Bài 1. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình.

a) $4xy - x - y = z^2$

b) $19x^2 + 28y^2 = 729$

c) $x^2 + y^2 = 3z^2$

Bài 2. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 13y^2 = z^2 \\ 13x^2 + y^2 = t^2 \end{cases}$$

Bài 3. Cho x và y là các số nguyên khác 0, sao cho $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ là số nhiều nguyên và là ước của 1978. Chứng minh rằng $x = y$. (Chọn đội tuyển quốc gia CHLB Đức 1979).

VỀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN TỐ VÀ ỨNG DỤNG CỦA NÓ

ĐOÀN QUANG MẠNH
(*Hải Phòng*)

Số nguyên tố có nhiều tính chất lí thú, mà các bài toán về số nguyên tố, nhất là trong các kì thi chọn học sinh giỏi trong nước và quốc tế, đều là các bài toán hay và khó. Ở bài báo này, chúng tôi xin trình bày một tính chất của các số nguyên tố và ứng dụng của nó.

1. Định lí. Giả sử $p = 2^t.k + 1$ là số nguyên tố lẻ, $t \in \mathbf{N}$ và k là số tự nhiên lẻ. Khi đó, nếu các số x, y tự nhiên sao cho $x^{2^t} + y^{2^t} \vdots p$ thì x và y đồng thời chia hết cho p.

Chứng minh. Ta chứng minh định lí bằng phản chứng. Giả sử x không chia hết cho p, từ giả thiết suy ra y cũng không chia hết cho p. Theo định lí Fecma nhỏ ta có:

$$\begin{cases} x^{p-1} \equiv 1 \pmod p \\ y^{p-1} \equiv 1 \pmod p \end{cases}$$

hay $\begin{cases} x^{2^t k} \equiv 1 \pmod p \\ y^{2^t k} \equiv 1 \pmod p. \end{cases}$

Suy ra $x^{2^t k} + y^{2^t k} \equiv 2 \pmod p$ (*)

mà theo giả thiết :

$$x^{2^t} + y^{2^t} \equiv 0 \pmod p$$

nên $x^{2^t k} + y^{2^t k} \equiv 0 \pmod p$ (**) (do k lẻ).

2. Các hệ quả. Chú ý rằng $t \geq 1$ vì p là số nguyên tố lẻ. Khi $t = 1$ và $t = 2$ ta có các hệ quả sau:

Hệ quả 1. Các số nguyên tố dạng $p = 4k + 3$ có tính chất sau: nếu các số x, y tự nhiên thỏa mãn $x^2 + y^2 \vdots p$ thì $x \vdots p$ và $y \vdots p$.

Hệ quả 2. Các số nguyên tố dạng $p = 4k + 1$, k là số tự nhiên lẻ, có tính chất sau: nếu các số x, y tự nhiên thỏa mãn $x^4 + y^4 \vdots p$ thì $x \vdots p$ và $y \vdots p$.

Hệ quả 3. Giả sử a, b là hai số tự nhiên khác 0 nguyên tố cùng nhau. Khi đó các ước số nguyên tố lẻ của $a^2 + b^2$ chỉ có dạng $4m + 1$, $m \in \mathbf{Z}$

Chứng minh hệ quả 3. Giả sử ngược lại $a^2 + b^2$ có ước số nguyên tố dạng $4k + 3$, theo hệ quả 1 thì a và b có một ước chung khác 1 trái với giả thiết $(a, b) = 1$ (đpcm).

Ta có hai nhận xét quan trọng sau:

Nhận xét 1. Với mọi số a tự nhiên thì $a^2 + 1$ không chỉ có ước số nguyên tố dạng $4k + 3$.

Nhận xét 2. Nếu $m = p_1.p_2...p_r$, trong đó p_i là các số nguyên tố phân biệt dạng $4k + 3$ (hoặc $4k + 1$, k lẻ) $i = 1, 2, ..., r$ thì từ $x^2 + y^2 \vdots m$ (tương ứng $x^4 + y^4 \vdots m$) ta suy ra $x \vdots m$ và $y \vdots m$

3. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1. Giải phương trình nghiệm nguyên.

$$x^2 - y^3 = 7$$

Giải. Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$$x^2 + 1 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4).$$

* nếu y chẵn, suy ra $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod 4$ hay $x^2 \equiv 3 \pmod 4$ (vô lí) * nếu y lẻ, $y^2 - 2y + 4 = (y - 1)^2 + 3$ có dạng $4k + 3$ và do đó $x^2 + 1$ có ước nguyên tố dạng $4k + 3$ trái với nhận xét 1. Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$ là số nguyên và lẻ ước của 1995.

Thi học sinh giỏi Bungary 1995)

Giải. Ta chỉ cần tìm các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $x > y \geq 1$. Khi đó:

$$x^2 + y^2 = k(x - y), k \backslash 1995$$

Xét các trường hợp sau:

i) $k = 1$ ta có $x^2 + y^2 = (x - y)$ dễ thấy phương trình không có nghiệm nguyên dương.

ii) $k = 5$ ta có $x^2 + y^2 = 5(x - y)$

$\Leftrightarrow (2x - 5)^2 + (2y + 5)^2 = 50$

Phương trình có nghiệm là (3; 1) và (2; 1)

iii) $k = 5^t.m$, $t \in \{0, 1\}$, $m \in \{3; 7; 19; 3.7; 3.19; 7.19; 3.7.19\}$ Theo hệ quả 1 và nhận xét 2 ta có:

TỪ ĐIỂN VUI

Định nghĩa **hình vuông** hay định nghĩa **phân số** một cách nghiêm túc thì... ai nói làm nữa ở Câu lạc bộ. Rất nhiều bạn có *"gen từ điển học"*. Xin giới thiệu một số định nghĩa để các bạn cùng đối chiếu cho vui :

- ***Hình vuông***

+ "Là một thế giới nhỏ bé mà trong thế giới đó, tất cả mọi mặt của nó đều cân bằng".

NGUYỄN THỊ THU NGA
(7A, THCS Lê Quý Đôn, Kim Động, Hưng Yên).

+ "là hình công bằng nhất trong dòng họ tứ giác"

TĂNG VĂN TIẾN
(THCS Phúc Thành, Kim Thành, Hải Dương)

+ "là cháu của mọi tứ giác, nhưng cũng là ông của mọi tứ giác"

LÊ MINH
(11A, PTTH Thiệu Hóa I, Thanh Hóa)

+ "là tên nhà giàu tham lam chiếm đoạt tất cả các tài sản quý giá của dòng họ nhà tứ giác".

LÊ QUANG NẤM
(12T, PTNK ĐHQG TP HCM).

+ "là con út trong gia đình tứ giác nên nó là thành viên mang nhiều dòng máu nhất của dòng họ".

NGUYỄN THỊ SOA
(9A, THCS Đào Viên, Quế Võ, Bắc Ninh)

(Xem tiếp trang 2)

MỜI CÁC BẠN HÃY THAM GIA CUỘC THI MI NI VUI HÈ '98

Vừa nghe nói đến cuộc thi, có bạn đã vội bực mình mà "đe" Câu lạc bộ, rằng :

"Nghỉ hè... tạp chí vẫn không tha
Thi cử suốt năm... chán quá ta !
Căng óc, căng đầu còn chết dí
Mỏi lưng, mỏi cổ vẫn bò ra...
Nhìn đề, "sôi máu" thôi sao được !
Nhập cuộc, "ngứa tay" nghỉ nổi à ?
Ừ! Tớ thử chơi... cho biết mặt
Phen này... giải báo... ắt về ta !"

Biết rằng, đó là những lời "mắng yêu", nên Câu lạc bộ càng "lạc quan" và quyết định "tung ra" trong hai số tạp chí 252-253, mỗi số 3 câu hỏi để các bạn thi xem... phen này... giải lớn sẽ về... ai ? Kết quả cuộc thi công bố trong số 256 (tháng 10 năm 1998).

Câu I: Các bạn có nhận ra nhà toán học nào trong ba chân dung ở đây không ? Bạn thử phát biểu một định lí của nhà toán học đó.

Câu II: Bạn hãy bố trí 8 điểm trên mặt phẳng sao cho : trung trực của mỗi đoạn thẳng nối hai điểm đều đi qua 2 trong các điểm đã cho.

Câu III:

Cho vào đầu chẳng được chi
Cho vào chỗ khác kiểu gì cũng hơn !

Theo bạn, cho cái gì mà... "kỳ" thế ?

Xin các bạn gửi các câu trả lời về Câu lạc bộ trước này 30 tháng 07 năm 1998 (theo dấu bưu điện). Có giải cho từng câu đấy nhé ! Câu lạc bộ xin mời cả các thầy, các cô giáo tham gia thêm cho ... vui.

Giải đáp bài

CHIA ĐÔI ĐOẠN THẲNG

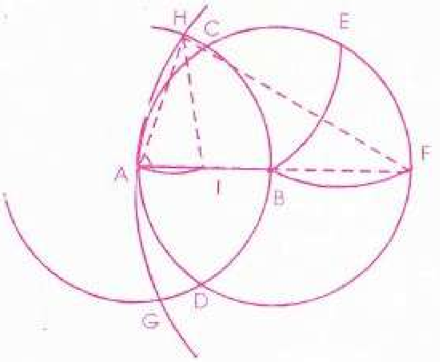
Chỉ bằng compa ta phải xác định trung điểm I của đoạn thẳng AB theo các bước như sau :

- Vẽ hai đường tròn $(A; AB)$ và $(B; BA)$. Hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm C và D.

- Vẽ đường tròn $(C; CB)$ đường tròn này cắt $(B; BA)$ tại E.

- Vẽ đường tròn $(E; EB)$ đường tròn này cắt $(B; BA)$ tại F.

Để ý rằng $AB = AC = CE = EF$ nên ta thấy F nằm trên đường kính đi qua AB của $(B; BA)$.



- Vẽ đường tròn $(F; FA)$ đường tròn này cắt đường thẳng AB tại điểm thứ hai là I.

Ta thấy hai tam giác cân AFH và AHI là đồng dạng với nhau (vì có cung góc đáy $\angle HAF$) với tỉ số đồng dạng $\dfrac{AH}{AF} = \dfrac{AB}{2AB} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\dfrac{AI}{AH} = \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{1}{2}$.

(dựa theo NGUYỄN ĐÌNH HÒA, 8B, Việt Trì, Phú Thọ)

Nhận xét: Các bạn sau đây cũng có đáp án tốt : *Nghiêm Thanh Tùng*, 12B, Thăng Long, Hà Nội; *Phạm Sỹ Vinh*, 8A, Hưng Dũng, Vinh, Nghệ An; *Nguyễn Tuấn Anh*, 8B, Hải Đình, Đồng Hới, Quảng Bình; *Phùng Thế Vũ*, 9₃, Phan Chu Trinh, Khánh Hòa; *Lưu Nhật Tân*, 8¹, Nguyễn Du, Gò Vấp, TP. Hồ Chí Minh.

BÌNH PHƯƠNG

CÂN HAI LẦN

Có 4 quả bóng thật và một quả bóng giả, có hình dáng bên ngoài giống hệt nhau. Các quả bóng thật có khối lượng bằng nhau và khác khối lượng của quả bóng giả. Có một quả bóng thật đã được đánh dấu.

Chỉ dùng hai lần một cân thăng bằng với 2 đĩa cân hãy xác định quả bóng giả và xét xem nó nặng hay nhẹ hơn một quả bóng thật.

VŨ ĐỨC CẢNH

Hỏi: Cháu và các bạn cháu tranh luận gay gắt với nhau về đồ thị hàm số $y = (2 - x^2)^2$ in trên số báo 250. Tại sao đồ thị tại điểm (0; 4) lại vẽ quá nhọn ? Cháu cho là tại máy in ? Ý kiến các cô, chú như thế nào ?

LÊ VĂN HẢI
(12G, PTTH Tứ Kỳ, Hải Dương)

Đáp : Phát hiện của cháu rất đúng ! Không những thế, đồ thị còn thể hiện sai cả 2 điểm uốn và sai tính lồi của đồ thị trên miền giữa 2 điểm uốn này. Đây là lỗi... khi kiểm tra lại bản thảo vi tính. Xin cảm ơn cháu và xin đính chính với bạn đọc.

Hỏi : Các kiến thức, cách giải hay các định lí nêu trên tạp chí có thể áp dụng cho các kì thi tốt nghiệp phổ thông trung học và thi đại học được không ?

NGUYỄN THANH TÙNG
(11B1, Quốc học Huế, Trị Thiên Huế)

Đáp : Nói chung là được, nhưng không được dựa vào các định lí... chưa có trong sách giáo khoa. Trong các kì thi mà em hỏi thì... không đến mức phải dùng đến các định lí ngoài sách giáo khoa.

Hỏi : Trong bài "Họ đường cong tiếp xúc với một đường cố định" của tác giả Trần Phương ở số tạp chí 228, thí dụ 1 (bài 1) liệu có thiếu giả thiết $m \neq -1$ không ?

NGUYỄN VIỆT ANH
(207, TT Bộ Tư Pháp, Cống Vị, Hà Nội)

Đáp : Em băn khoăn... hoàn toàn chính xác. Để toán phải có giả thiết $m \neq -1$! Cảm ơn em.

Hỏi : Em nhờ một người bạn giải toán giải giúp bài :"Biết rằng : $a + b + c$ và c là những số nguyên lẻ. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm nguyên"... nhưng chúng em vẫn đang ở trong vòng rắc rối ! Vậy nên "gỡ" như thế nào đây ?

LÊ ĐĂNG THƠ
(37/33, tổ 1, phường 1, Cao Lãnh, Đồng Tháp)

Đáp : Giả sử phương trình có nghiệm $x = x_0 \in \mathbf{Z}$ thì $ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \Rightarrow ax_0(x_0 - 1) + (a + b)x_0 + c = 0$

Ta có $ax_0(x_0 - 1)$ là số nguyên chẵn, $(a + b)x_0$ cũng là số nguyên chẵn (vì $a + b$ nguyên chẵn). Vậy $ax_0(x_0 - 1) + (a + b)x_0 + c$ là số nguyên lẻ. Mâu thuẫn này khẳng định kết luận của bài toán. Thế nào... hai em ? Chúc các em "tỉnh" hơn.

L.T.N

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT54M8

Chế bản tại Tòa soạn.
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 1998

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng