TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
7 2019
Số 505

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 56
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Georg Cantor
(1845 - 1918)

Thành phố Dresden, bang Sachsen, CHLB Đức

ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC VÀO GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC LỚP 7

VŨ HỮU CHÍN

(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bất đẳng thức liên hệ độ dài ba cạnh tam giác ABC có dạng:

$$|AB-AC|<BC<AB+AC;$$
$$|AB-BC|<AC<AB+BC;$$
$$|AC-BC|<AB<AC+BC;$$

và gọi là bất đẳng thức tam giác.

DẠNG 1. MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN TRONG TAM GIÁC

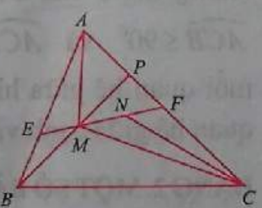
Bài toán 1. *Cho điểm M nằm trong ΔABC. Chứng minh rằng:*

a) $MB+MC<AB+AC$.

b) $\frac{1}{2}(AB+BC+AC)<MA+MB+MC<AB+BC+AC$.

c) $BM+MN+NC<AB+AC$, *trong đó M, N nằm trong ΔABC sao cho đường thẳng MN cắt hai cạnh AB, AC.*

Lời giải. a) Do điểm M nằm trong ΔABC nên đường thẳng BM cắt cạnh AC ở P. Xét ΔMPC có



$MC<MP+PC$

$\Rightarrow MB+MC<MB+MP+PC$

$\Rightarrow MB+MC<BP+PC<AB+AP+PC$

$\Rightarrow MB+MC<AB+AC$.

b) Theo phần a) ta có

$$BC<MB+MC<AB+AC$$
$$AC<MC+MA<AB+BC$$
$$AB<MA+MB<AC+BC.$$

Cộng theo từng vế các BĐT trên dẫn đến điều phải chứng minh

c) Áp dụng câu a) ta có

$BM+MN+NC<BE+EM+MN+NF+FC$

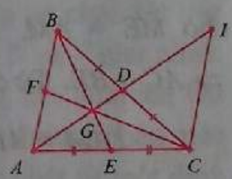
$\Rightarrow BM+MN+NC<BE+EF+FC<BE+EA+AF+FC$

$\Rightarrow BM+MN+NC<AB+AC.$

Nhận xét: Từ kết quả của phần a) ta suy ra phần b) c). Với điểm M nằm trong ΔABC ta có $MB+MC<AB+AC$, bất đẳng thức này được dùng rất nhiều trong việc giải các bài toán về bất đẳng thức hình học.

Bài toán 2. *Chứng minh trong một tam giác tổng độ dài ba đường trung tuyến lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi và nhỏ hơn chu vi của tam giác đó.*

Lời giải. Xét ΔABC, gọi AD, BE, CF là các đường trung tuyến, G là trọng tâm của ΔABC. Ta có:



$$GA+GC>AC\Rightarrow\frac{2}{3}(AD+CF)>AC$$

$\Rightarrow AD+CF>\frac{3}{2}AC$. Chứng minh tương tự có:

$$AD+BE>\frac{3}{2}AB,\ BE+CF>\frac{3}{2}BC.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có

$$AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+AC)\quad(1)$$

Trên tia đối của tia DA lấy điểm I sao cho $AD=DI$. Ta có $\Delta ADB=\Delta IDC$ (c.g.c) nên $AB=CI$. Xét ΔACI, theo bất đẳng thức tam giác có: $AI<AC+CI=AC+AB\Rightarrow AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$.

Chứng minh tương tự có:

$$BE < \frac{1}{2}(AB + BC),\ CF < \frac{1}{2}(AC + BC).$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$AD + BE + CF < AB + BC + AC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{3}{4}(AB + BC + AC) < AD + BE + CF < AB + BC + AC.$$

Nhận xét. Để chứng minh bài toán trên ta đã sử dụng tính chất ba đường trung tuyến của tam giác và vẽ thêm trung điểm của đoạn thẳng. Từ bài toán 2 ta có bài toán 3.

Bài toán 3. *Cho ΔABC với $AB \geq AC$. Gọi AD, AM theo thứ tự là đường phân giác trong, đường trung tuyến của ΔABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{AB + AC - BC}{2} < AD \leq AM < \frac{AB + AC}{2}.$$

Lời giải. • Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = AM$. Ta có: $\Delta AMC = \Delta EMB$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = BE$. Từ đó

$$2AM = AE < AB + BE = AB + AC$$

$$\Rightarrow AM < \frac{AB + AC}{2}. \quad (1)$$

• Xét ΔABD và ΔACD có:

$$AB < AD + BD, AC < AD + DC.$$

Cộng theo từng vế hai BĐT trên được:

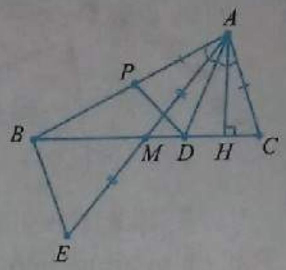
$$AB + AC < 2AD + BC \Rightarrow \frac{AB + AC - BC}{2} < AD. \quad (2)$$

Lưu ý: Chứng minh này vẫn đúng với D là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng BC.

• Dựng $AH \perp BC$, H thuộc BC.

Với $AB = AC$ thì $AM = AD$; với $AB > AC$ thì $BH > CH \Rightarrow BM < BH \Rightarrow M$ thuộc đoạn thẳng BH.

Mặt khác: $\widehat{ADB} > \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ADB}$ tù $\Rightarrow D$ thuộc đoạn thẳng BH. Lấy điểm P thuộc cạnh AB sao cho $AP = AC$, nên P nằm giữa A và B.



$\Delta ADP = \Delta ADC$ (c.g.c)

$\Rightarrow DP = DC, \widehat{APD} = \widehat{ACD}.$

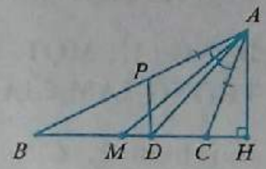
+ Nếu $\widehat{ACB} \leq 90^0$ thì $\widehat{APD} = \widehat{ACB} \leq 90^0$

$\Rightarrow \widehat{BPD} \geq 90^0 > \widehat{ACB} > \widehat{PBD}$

$\Rightarrow BD > PD = CD \Rightarrow BM < BD \Rightarrow MH > DH$

$\Rightarrow AM > AD.$

+ Nếu $\widehat{ACB} > 90^0$ thì



$\widehat{BPD} = \widehat{ACH} > \widehat{ADC} > \widehat{ABC}$

$\Rightarrow BD > PD = CD \Rightarrow BM < BD \Rightarrow MH > DH$

$\Rightarrow AM > AD.$ Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $AD \leq AM$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra điều cần chứng minh.

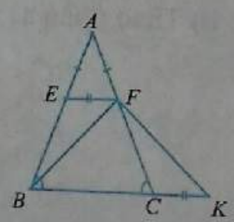
Nhận xét. Bất đẳng thức $\dfrac{AB + AC - BC}{2} < AD$ luôn đúng với điểm D bất kì thuộc cạnh BC. Để chứng minh $AD \leq AM$ phải xét hai trường hợp $\widehat{ACB} \leq 90^0$ và $\widehat{ACB} > 90^0$, đồng thời dựa vào mối quan hệ giữa hình chiếu và đường xiên, mối quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác.

DẠNG 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TAM GIÁC CÂN

Bài toán 4. *Cho ΔABC cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Chứng minh rằng $BC + EF < 2BF$.*

Lời giải. Trên tia đối của tia CB lấy điểm K sao cho $CK = EF$. Khi đó

$BC + EF = BC + CK = BK$ (1).



Ta có $\widehat{AEF} = \widehat{ACB} = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2}$,

suy ra $\widehat{BEF} = \widehat{FCK}$.

Xét ΔBEF và ΔFCK có

$$EF = CK,\ BE = CF,\ \widehat{BEF} = \widehat{FCK}.$$

Do đó $\Delta BEF = \Delta FCK$ (c.g.c),

suy ra: $BF = FK$ (2). Xét ΔBFK ta có

$$BK < BF + FK \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$BC + EF = BK < BF + FK = 2BF.$$

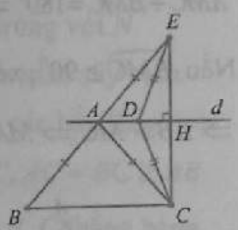
Vậy $BC + EF < 2BF$.

Nhận xét: Để chứng minh $BC + EF < 2BF$ ta phải ghép tổng của 2 đoạn thẳng : $BC + EF$ thành một đoạn thẳng bằng cách vẽ thêm hình. Khi đó bài toán chỉ còn việc so sánh độ dài đoạn thẳng BK và $2BF$. Tương tự bài toán 4 ta có bài toán 5.

Bài toán 5. *Cho ΔABC cân tại A. Lấy điểm D (khác A) sao cho $AD \,//\, BC$. Chứng minh rằng:*

$$DB + DC > AB + AC.$$

Lời giải. Dựng điểm E sao cho AD là trung trực của CE.



Ta có:

$\widehat{DAC} = \widehat{DAE} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$.

Suy ra $\widehat{CAE} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$.

Do đó:

$$\widehat{CAE} + \widehat{CAB} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{CAB} = 180^0.$$

Suy ra B, A, E thẳng hàng, $DE = DC$, $AC = AE$.

Xét ΔBDE có $DB + DC = DB + DE > BE$

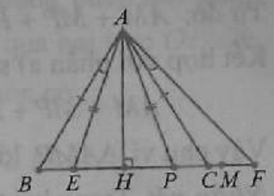
$\Rightarrow DB + DC > AB + AE = AB + AC$.

Nhận xét. Để chứng minh $DB + DC > AB + AC$, mà $AB = AC$, nên ta ghép tổng của hai đoạn thẳng AB và AC thành độ dài đoạn thẳng BE bằng cách lấy điểm E sao cho AD là trung trực của CE và chứng tỏ ba điểm B, A, E thẳng hàng.

Bài toán 6. *Cho ΔABC cân tại A, $\widehat{BAC} < 90^0$. Lấy các điểm E, F (khác B, C) trên đường thẳng BC sao cho $\widehat{BAC} = \widehat{EAF}$. Chứng minh rằng $AE + AF > AB + AC$.*

Lời giải. Hạ $AH \perp BC\,(H \in BC)$ thì $HB = HC$

Nếu E, F đều nằm ngoài đoạn thẳng BC thì $\widehat{EAF} > \widehat{BAC}$, trái giả thiết. Nếu E, F cùng thuộc đoạn thẳng BC thì $\widehat{EAF} < \widehat{BAC}$, trái giả thiết. Vậy trong hai điểm E và F có một điểm thuộc đoạn thẳng BC và một điểm nằm ngoài đoạn thẳng BC. Giả sử E thuộc đoạn thẳng BC (với E gần B hơn gần C), F nằm ngoài đoạn thẳng BC.



Lấy điểm P thuộc cạnh BC sao cho $HE = HP$.

Khi đó AC là tia phân giác $\widehat{PAF}$. Gọi M là trung điểm PF. Xét ΔAPF có AC là tia phân giác $\widehat{PAF}$, AM là đường trung tuyến.

Theo bài toán 3 ta có

$$AB + AC = 2AC \le 2AM < AP + AF = AE + AF.$$

Vậy $AE + AF > AB + AC$.

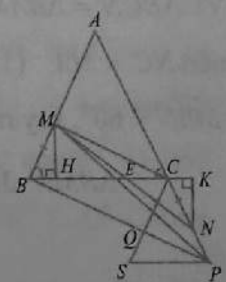
Nhận xét. Để giải bài toán trên ta phải xét các trường hợp với vai trò của điểm E và F như nhau. Trong bài toán trên có sử dụng kết quả của bài toán 3 là trong một tam giác với đường phân giác và đường trung tuyến cùng xuất phát từ một đỉnh thì độ dài đường phân giác không vượt quá độ dài đường trung tuyến.

Bài toán 7. *Cho ΔABC cân tại A. Lấy điểm M thuộc cạnh AB (khác A, B).*

a) Trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $CN = BM$. Chứng minh chu vi ΔAMN lớn hơn chu vi ΔABC.

b) Dựng đường thẳng $BP \,//\, CM$ cắt tia AC tại P. Chứng minh chu vi ΔAMP lớn hơn chu vi ΔABC.

Lời giải.



a) Dựng $MH \perp BC, NK \perp BC$, H thuộc cạnh BC, K thuộc tia đối của tia CB, MN cắt BC tại E. Từ $\Delta MBH = \Delta NCK$

$\Rightarrow BH = CK \Rightarrow BC = HK$.

Mặt khác $MN = ME + EN > HE + EK$

$\Rightarrow MN > HK = BC$. Từ đó

$$AM + AN + MN = AB - BM + AC + CN + MN$$

$$\Rightarrow AM + AN + MN > AB + AC + BC.$$

Vậy chu vi ΔAMN lớn hơn chu vi ΔABC.

b) Dựng ΔCSP với $CS \,//\, AB$, $SP \,//\, BC$, thì ΔCSP cân tại $C \Rightarrow CS = CP$ và BP cắt đoạn thẳng CS tại Q. Do $CM \,//\, BQ$, $BM \,//\, CQ$ nên:

$$BM = CQ < CS = CP \Rightarrow CN < CP \Rightarrow MN < MP.$$

Từ đó: $AM + MP + PA > AM + MN + AN$.

Kết hợp với phần a) suy ra:

$$AM + MP + PA > AB + BC + AC.$$

Vậy chu vi ΔAMP lớn hơn chu vi ΔABC.

Nhận xét. Trong bài toán trên cần chứng minh chu vi ΔAMP và chu vi ΔAMN lớn hơn chu vi ΔABC. Để chứng minh phần b) dựa vào đề bài cho tam giác cân ta vẽ thêm hình phụ là ΔCSP cân.

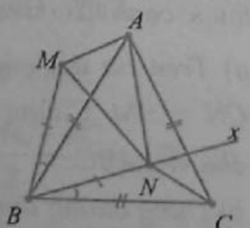
Bài toán 8. *Cho ΔABC đều và điểm M bất kì. Chứng minh trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC mỗi đoạn thẳng không lớn hơn tổng của hai đoạn thẳng kia.*

Lời giải. • Ta chứng minh $MA + MB \geq MC$.

(Tương tự: $MA + MC \geq MB$, $MB + MC \geq MA$).

Xét các trường hợp:

a) *Điểm M thuộc nửa mặt phẳng không chứa C bờ AB*



Trên nửa mặt phẳng chứa A bờ BC vẽ tia Bx sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{CBx}$. Trên tia Bx lấy điểm N sao cho $BM = BN$.

Vì $\Delta BCN = \Delta BAM$ (c.g.c)

nên $NC = MA$ (1). Do ΔBMN cân tại B và $\widehat{MBN} = 60^0$, suy ra:

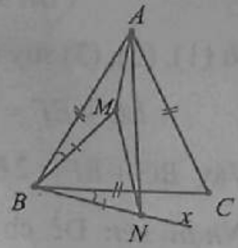
$$\Delta BMN \text{ đều} \Rightarrow BM = BN = MN.$$

Với ba điểm C, M, N, ta có:

$$MN + NC \geq MC \Rightarrow MA + MB \geq MC.$$

b) *Điểm M thuộc nửa mặt phẳng chứa điểm C có bờ AB*

Trên nửa mặt phẳng không chứa điểm A bờ BC vẽ tia Bx sao cho $\widehat{CBx} = \widehat{ABM}$,



trên tia Bx lấy điểm N sao cho $BM = BN$. Vì

$$\Delta BMA = \Delta BNC \text{ (c.g.c)}$$

nên $MA = CN$.

ΔBMN cân tại B và $\widehat{MBN} = 60^0$ nên ΔBMN đều $\Rightarrow BM = BN = MN$.

Với ba điểm C, M, N thì

$$MN + NC \geq MC \Rightarrow MA + MB \geq MC.$$

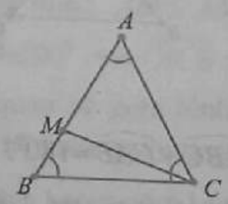
c) *Điểm M thuộc đường thẳng AB*

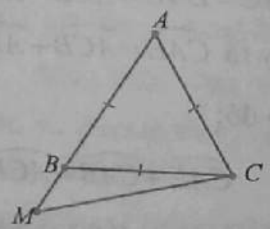
• *Với điểm M thuộc cạnh AB*, ta có:

$\widehat{AMC} + \widehat{BMC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AMC} \geq 90^0$ hoặc $\widehat{BMC} \geq 90^0$.

Nếu $\widehat{BMC} \geq 90^0$, xét ΔBMC có: $BC > MC$

$\Rightarrow AB > MC \Rightarrow MA + MB > MC$.





• *Với điểm M thuộc tia đối của tia BA (hoặc tia đối của tia AB)*. Ta có

$$MA + MB > MB + BC > MC \Rightarrow MA + MB > MC.$$

• *Với điểm M trùng A hoặc B thì* $MA + MB = MC$.

Kết luận: Trong mọi trường hợp ta có

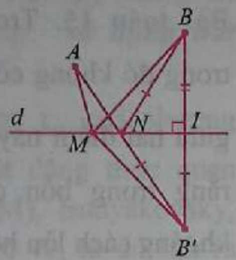
$$MA + MB \geq MC.$$

Nhận xét. Do vị trí của điểm M bất kì cho nên ta phải xét 3 trường hợp trong đó trường hợp 3 lại chia ra thành 3 trường hợp. Trong quá trình giải bài học sinh ít khi xét đủ các trường hợp. Khi giải trường hợp a, b thì theo đề bài cho tam giác đều nên ta tạo thêm hình bằng cách vẽ thêm tam giác đều. Trong BĐT trên, dấu bằng xảy ra khi tam giác suy biến thành ba điểm thẳng hàng.

DẠNG 3. MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Bài toán 9. *Cho hai điểm A và B cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d. Hãy tìm trên d điểm M sao cho MA + MB nhỏ nhất.*

Lời giải. Gọi B' là điểm đối xứng với B qua đường thẳng d, N là giao điểm của AB' với d. Gọi M là điểm bất kì thuộc d. Do B và B' đối xứng qua d nên ta có:



$$MB = MB',\ NB = NB'.$$

Suy ra: $MA + MB = MA + MB' \geq AB'$

$$\Rightarrow MA + MB \geq NA + NB' = NA + NB.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ M trùng với N.

Vậy $MA + MB$ nhỏ nhất khi M trùng với N.

Nhận xét. Trong trường hợp tam giác suy biến: Với ba điểm A, B, C bất kì ta có các bất đẳng thức

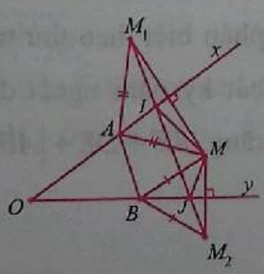
$$AB + AC \geq BC, AB + BC \geq AC, AC + BC \geq AB.$$

Dấu bằng xảy ra khi ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Nhận xét. Trong bài toán trên sử dụng phép đối xứng trục để biến đổi tổng $NA + NB$ thành độ dài đoạn thẳng AB'. Nếu lấy điểm A' đối xứng với A qua d thì tìm được điểm N_1 trùng với điểm N thoả mãn bài toán. Từ bài toán 9 ta có bài toán 10.

Bài toán 10. *Cho $\widehat{xOy} < 90^0$ và điểm M cho trước nằm trong góc đó. Tìm trên tia Ox điểm A, trên tia Oy điểm B sao cho chu vi ΔMAB nhỏ nhất.*

Lời giải. Gọi M_1 và M_2 lần lượt là điểm đối xứng với M qua Ox và Oy, I và J thứ tự là giao điểm của M_1M_2 với Ox và Oy. Khi đó với điểm A bất kì trên tia Ox, điểm B bất kì trên tia Oy có:



$$MA = M_1A, MB = M_2B.$$

Từ đó: chu vi $\Delta MAB = MA + AB + MB$

$$= M_1A + AB + M_2B \geq M_1M_2.$$

Dấu bằng xảy ra M_1, A, B, M_2 thẳng hàng. Do đó chu vi ΔMAB bé nhất bằng M_1M_2 khi và chỉ khi A trùng I và B trùng J.

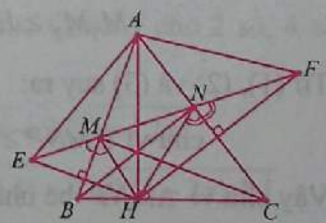
Nhận xét. Bài toán trên sử dụng phép đối xứng trục và lấy điểm M đối xứng qua hai trục Ox, Oy. Với bốn điểm M_1, A, B, M_2 luôn có:

$$M_1A + AB + M_2B \geq M_1M_2.$$

Bài toán 11. a) *Cho ΔABC nhọn, kẻ đường cao AH. Gọi E và F lần lượt là các điểm đối xứng của H qua các cạnh AB, AC. Gọi M và N lần lượt là giao điểm của EF với AB và AC. Chứng minh: $MC \perp AB, NB \perp AC$.*

b) *Cho ΔABC nhọn. Hãy tìm trên cạnh BC, CA, AB các điểm M, N, P tương ứng sao cho chu vi ΔMNP nhỏ nhất.*

Lời giải. a) Xét ΔHMN có E và F đối xứng với H qua AB và AC, nên AB và AC là các phân giác ngoài của $\widehat{HMN}$ và $\widehat{HNM}$, chúng cắt nhau tại A. Suy ra HA là phân giác trong của $\widehat{MHN}$.



Mà $AH \perp BC$ nên BC là phân giác ngoài của $\widehat{MHN}$.

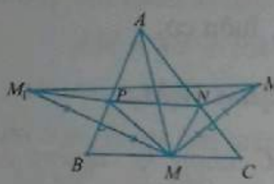
Khi đó BC và AC là hai phân giác ngoài $\widehat{MHN}$ và $\widehat{HNM}$ của ΔHMN. Mà BC cắt AC tại C, suy ra MC là phân giác trong $\widehat{HMN}$. Khi đó MC và AB là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{HMN}$ của ΔHMN. Do đó $MC \perp AB$. Chứng minh tương tự ta có $NB \perp AC$.

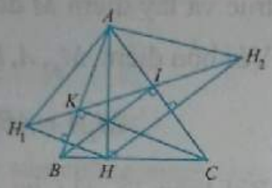
b) Lấy điểm M bất kì thuộc cạnh BC, điểm N bất kì thuộc cạnh AC, điểm P bất kì thuộc cạnh AB. Gọi M_1, M_2 là các điểm đối xứng của M qua AB và AC. Ta có $MP = M_1P, MN = M_2N$. Suy ra:

chu vi $\Delta MNP = MP + PN + MN$

$$= M_1P + PN + M_2N \geq M_1M_2 \ (1).$$

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A tới BC, H_1, H_2 lần lượt là các điểm đối xứng của H qua AB và AC. Gọi K và I lần lượt là giao điểm của H_1H_2 với AB và AC.





Theo phần a) ta có K, I thứ tự là chân các đường cao kẻ từ C và B tới AB và AC. Suy ra

Chu vi $\Delta KHI = KH + HI + IK$

$$= H_1K + KI + IH_2 = H_1H_2 \quad (2).$$

Xét ΔM_1AM_2 và ΔH_1AH_2 có:

$$\widehat{M_1AM_2} = \widehat{H_1AH_2} = 2.\widehat{BAC}$$

và $AM_1 = AM = AM_2, AH_1 = AH = AH_2$.

Vì $AM \geq AH$ nên $AM_1 \geq AH_1$ suy ra:

$$M_1M_2 \geq H_1H_2 \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

chu vi $\Delta MNP \geq$ chu vi ΔKHI.

Vậy chu vi ΔMNP bé nhất khi và chỉ khi M, N, P là chân 3 đường cao của ΔABC kẻ từ các đỉnh A, B, C tương ứng.

CÁC BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài toán 12. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến AD và BE cắt nhau tại G. Chứng minh rằng nếu $\widehat{AGB} \leq 90^0$ thì $AC + BC > 3AB$.

Bài toán 13. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} > 90^0$ và độ dài ba cạnh là ba số chẵn liên tiếp. Tính độ dài ba cạnh của tam giác đó.

Bài toán 14. Cho ΔABC có $AC > AB$, các đường cao BH và CK.

a) Chứng minh $CK > BH$.

b) So sánh $BH + AC$ và $AB + CK$.

Bài toán 15. Trong mặt phẳng cho bốn điểm, trong đó không có hai điểm nào mà khoảng cách giữa hai điểm này nhỏ hơn $\sqrt{2}$ cm. Chứng minh rằng trong bốn điểm đó tồn tại hai điểm có khoảng cách lớn hơn hoặc bằng 2 cm.

Bài toán 16. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên cạnh BC và CD có hai điểm M và N di động tương ứng sao cho $\widehat{MAN} = 45^0$. Xác định vị trí điểm M và N sao cho độ dài đoạn MN

a) nhỏ nhất.

b) lớn nhất.

Bài toán 17. Cho $\widehat{xOy} = 80^0$, hai điểm A, B cho trước nằm trong $\widehat{xOy}$ thoả mãn:

$$OA = 6\,\text{cm}, OB = 11\,\text{cm}, \widehat{xOA} = 15^0, \widehat{yOB} = 25^0$$

Trên tia Ox lấy điểm M, trên tia Oy lấy điểm N. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = AM + MN + NB.$$

Bài toán 18. Cho đa giác lồi n cạnh $(n \geq 4)$, trong đó có tất cả các đường chéo bằng nhau. Tìm giá trị lớn nhất của n.

Bài toán 19. Trên đường thẳng a cho bốn điểm phân biệt theo thứ tự A, B, C, D. Gọi E là điểm bất kỳ nằm ngoài đường thẳng a. Chứng minh rằng: $AE + DE + |AB - CD| > BE + CE$.

SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC VÀO BÀI TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

(SV K61 SP Toán, ĐHQG Hà Nội)

• **Lời mở đầu.** Giải phương trình (PT) là dạng toán thường xuyên gặp nằm trong các đề thi Toán bậc THCS, THPT. Có nhiều phương pháp để giải những dạng bài này; trong bài viết này chúng tôi xin khai thác một phương pháp: ***sử dụng Bất đẳng thức*** để giải PT.

• **Phương pháp.** Nhẩm nghiệm x_0 của phương trình; sau đó sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc như: Cauchy (AM - GM), Bunyakovsky, Minkowski..... để đánh giá theo vế, từ đó tìm ra nghiệm của PT. Sau đây, xin đi vào các thí dụ cụ thể:

Thí dụ 1. *Giải phương trình*:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x+1}=x^2-x+2. \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x\geq 0$. Dễ thấy $x=1$ là nghiệm của PT(1). Từ đó, do $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, biểu thức vế trái chứa căn bậc 2 nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm, ta có:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x.1}+\sqrt{(x^2-x+1).1}$$
$$\leq\frac{x+1}{2}+\frac{(x^2-x+1)+1}{2}=\frac{x^2+3}{2}.$$

Từ (1) suy ra:

$$x^2-x+2\leq\frac{x^2+3}{2}\Leftrightarrow 2x^2-2x+4\leq x^2+3$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1\leq 0\Leftrightarrow (x-1)^2\leq 0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x-1)^2=0\\ x=1\\ x^2-x+1=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn).}$$

Do đó $x=1$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Thí dụ 2. *Giải phương trình*:

$$16x^4+5=6.\sqrt[3]{4x^3+x} \quad (2)$$

Lời giải. Do $16x^4+5\geq 5>0$, nên từ (2) suy ra

$$4x^3+x>0\Leftrightarrow x.(4x^2+1)>0\Leftrightarrow x>0.$$

Ta thấy $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm của (2) và biểu thức vế phải chứa căn bậc 3. Từ đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương ta có:

$$6.\sqrt[3]{4x^3+x}=3.\sqrt[3]{2.4x.(4x^2+1)}$$
$$\leq 2+4x+(4x^2+1)=4x^2+4x+3.$$

Do đó, từ (2) suy ra: $16x^4+5\leq 4x^2+4x+3$

$$\Leftrightarrow 16x^4-4x^2-4x+2\leq 0\Leftrightarrow 8x^4-2x^2-2x+1\leq 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^3(2x-1)+2x^2(2x-1)-(2x-1)\leq 0$$
$$\Leftrightarrow (2x-1).(4x^3+2x^2-1)\leq 0$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)^2.(2x^2+2x+1)\leq 0$$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2\leq 0\Rightarrow (2x-1)^2=0$ (do $x>0$ nên $2x^2+x+1>0$). Từ đó, đẳng thức đồng thời xảy ra, tức là: $\begin{cases}(2x-1)^2=0\\ 2=4x=4x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Do đó $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2).

Thí dụ 3. (Bài T2/476, TH&TT số 476 năm 2017). *Giải phương trình*:

$$\sqrt{2x^3-2x^2+x}+2.\sqrt[4]{3x-2x^2}=x^4-x^3+3$$

Lời giải. ĐK:

$$\begin{cases}2x^3-2x^2+x\geq 0\\ 3x-2x^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(2x^2-2x+1)\geq 0\\ x(3-2x)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x\leq\frac{3}{2}.$$

Ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình và biểu thức vế phải chứa căn thức bậc 2 và căn bậc 4. Từ đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số, 4 số thực không âm ta được

$$\sqrt{2x^3-2x^2+x}+2.\sqrt[4]{3x-2x^2}$$
$$=\sqrt{x(2x^2-2x+1)}+2.\sqrt[4]{x(3-2x).1.1}$$
$$\leq\frac{x+2x^2-2x+1}{2}+\frac{x+3-2x+1+1}{2}$$
$$=\frac{2x^2-2x+6}{2}=x^2-x+3.$$

Từ đó suy ra

$$x^4-x^3+3\leq x^2-x+3\Leftrightarrow x^4-x^3-x^2+x\leq 0$$
$$\Leftrightarrow x(x^3-x^2-x+1)\leq 0\Leftrightarrow x(x+1)(x-1)^2\leq 0$$

$\Rightarrow x(x+1)(x-1)^2=0$ (do $x\ge 0$ nên $x(x+1)\ge 0$).

Từ đó, đẳng thức đồng thời xảy ra, tức là $\begin{cases} x(x+1)(x-1)^2=0 \\ x=2x^2-2x+1 \\ x=3-2x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn). Do đó $x=1$ là nghiệm duy nhất của PT đã cho.

Thí dụ 4. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x^3+2x}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{x^3+4x^2+4x+1} \quad (3)$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} x^3+2x\ge 0 \\ 3x-1\ge 0 \\ x^3+4x^2+4x+1\ge 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2+2)\ge 0 \\ x\ge \dfrac{1}{3} \\ (x+1)(x^2+3x+1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \frac{1}{3}.$$

$(3)\Leftrightarrow \sqrt{x(x^2+2)}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{(x+1)(x^2+3x+1)}$ (4).

Ta thấy biểu thức vế trái (4) là tổng của hai căn thức bậc 2, để ý rằng $\left(\sqrt{x}\right)^2+1^2=x+1$ và $\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2+\left(\sqrt{3x-1}\right)^2=x^2+3x+1$ là hai số hạng có tích ở vế phải. Từ đó áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta được

$$\left(\sqrt{x(x^2+2)}+1.\sqrt{3x-1}\right)^2$$
$$\le \left[(\sqrt{x})^2+1^2\right].\left[(\sqrt{x^2+2})^2+(\sqrt{3x-1})^2\right]$$
$$=(x+1)(x^2+3x+1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x(x^2+2)}+\sqrt{3x-1}\le \sqrt{(x+1)(x^2+3x+1)}.$$

Kết hợp với (4), đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} x\ge \dfrac{1}{3} \\ \sqrt{x}.\sqrt{3x-1}=1.\sqrt{x^2+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{3} \\ x(3x-1)=x^2+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{3} \\ 2x^2-x-2=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{17}}{4} \text{ (thỏa mãn).}$$

Do đó $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ là nghiệm duy nhất của PT(3).

Thí dụ 5. *Giải phương trình:*

$$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=x^2-6x+11 \quad (5)$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} x-2\ge 0 \\ 4-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\le x\le 4.$

Ta thấy biểu thức vế trái là tổng của 2 căn thức bậc 4 và $(x-2)+(4-x)=2$. Từ đó, áp dụng liên tiếp bất đẳng thức Bunyakovsky ta được

$$\left(\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}\right)^4=\left[\left(\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}\right)^2\right]^2$$
$$\le\left[2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)\right]^2=4.\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)^2$$
$$\le 4.2.\left[(x-2)+(4-x)\right]=4.2.2=16$$
$$\Rightarrow \sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}\le\sqrt[4]{16}=2.$$

Từ (5) suy ra

$$x^2-6x+11\le 2\Leftrightarrow x^2-6x+9\le 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2\le 0\Rightarrow (x-3)^2=0$$

và dấu "=" xảy ra khi thỏa mãn đồng thời

$$\begin{cases} x-2=4-x \\ x-3=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=3.$$

Do đó $x=3$ là nghiệm duy nhất của PT(5).

Thí dụ 6. *Giải phương trình:*

$$2\sqrt{x^3+1}+\sqrt{\frac{x^4+16}{2}}=3x^2-6x+10 \quad (6)$$

Lời giải. ĐK: $x^3+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$. Ta thấy $x=2$ là nghiệm của PT(6), biểu thức vế trái chứa căn bậc 2. Từ bất đẳng thức Cauchy cho 2 số thực không âm và bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$2\sqrt{x^3+1}=2.\sqrt{(x+1).(x^2-x+1)}$$
$$\le (x+1)+(x^2-x+1)=x^2+2;$$
$$\left(\sqrt{\frac{x^4+16}{2}}+2x\right)^2\le(1^2+1^2).\left(\frac{x^4+16}{2}+(2x)^2\right)$$
$$=x^4+8x^2+16=(x^2+4)^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 2\sqrt{x^3+1}\le x^2+2 \\ \sqrt{\dfrac{x^4+16}{2}}+2x\le x^2+4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2\sqrt{x^3+1}\le x^2+2 \\ \sqrt{\dfrac{x^4+16}{2}}\le x^2-2x+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^3+1}+\sqrt{\frac{x^4+16}{2}}\le 2x^2-2x+6.$$

Do đó, từ (6) suy ra

$$3x^2-6x+10\le 2x^2-2x+6$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4\le 0\Leftrightarrow (x-2)^2\le 0\Rightarrow (x-2)^2=0$$

và đẳng thức đồng thời xảy ra khi

$$\begin{cases}x+1=x^2-x+1\\ \sqrt{\dfrac{x^4+16}{2}}=2x\\ x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x.(x-2)=0\\ (x^2-4)^2=0\\ x=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Do đó $x=2$ là nghiệm duy nhất của PT(6).

Thí dụ 7. *Giải phương trình*:

$$\sqrt{x^2+12x+61}+\sqrt{x^2-14x+113}=\sqrt{338} \quad (7)$$

Lời giải. ĐK:

$$\begin{cases}x^2+12x+61\ge 0\\ x^2-14x+113\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+6)^2+25\ge 0\\ (x-7)^2+64\ge 0\end{cases}.$$

Do đó căn thức có nghĩa với $\forall x\in\mathbb{R}$.

$$(7)\Leftrightarrow \sqrt{(x+6)^2+5^2}+\sqrt{(7-x)^2+8^2}=\sqrt{338}. \quad (8)$$

Ta thấy, vế trái của (8) là tổng của hai căn thức bậc 2 dạng $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$, gợi cho ta nghĩ tới bất đẳng thức Minkowki có dạng

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

(dấu '=' xảy ra khi $ad=bc$).

Từ đó

$$\sqrt{(x+6)^2+5^2}+\sqrt{(7-x)^2+8^2}$$

$$\ge\sqrt{(x+6+7-x)^2+(5+8)^2}=\sqrt{13^2+13^2}=\sqrt{338}.$$

Kết hợp với (8), đẳng thức xảy ra khi

$$(x+6).8=5.(7-x)\Leftrightarrow 8x+48=35-5x$$

$$\Leftrightarrow 13x=-13\Leftrightarrow x=-1.$$

Do đó $x=-1$ là nghiệm duy nhất của PT.

Thí dụ 8. *Giải phương trình*:

$$\sqrt{8x^2-16x+10}+\sqrt{2x^2-4x+4}=\sqrt{7-x^2+2x} \quad (9)$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases}8x^2-16x+10\ge 0\\ 2x^2-4x+4\ge 0\\ 7-x^2+2x\ge 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8(x-1)^2+2\ge 0\\ 2(x-1)^2+2\ge 0\\ (x-1)^2\le 8\end{cases}\Leftrightarrow 1-2\sqrt{2}\le x\le 1+2\sqrt{2}.$$

$$\text{PT}(9)\Leftrightarrow\sqrt{(4x^2-4x+1)+(4x^2-12x+9)}$$

$$+\sqrt{(x^2-4x+4)+x^2}=\sqrt{8-(x^2-2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(2x-1)^2+(3-2x)^2}$$

$$+\sqrt{(2-x)^2+x^2}=\sqrt{8-(x-1)^2} \quad (10)$$

Vế trái của (10) là tổng của hai căn thức bậc 2 dạng $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$. Từ đó theo bất đẳng thức Minkowski ta có

$$\sqrt{(2x-1)^2+(3-2x)^2}+\sqrt{(2-x)^2+x^2}$$

$$\ge\sqrt{(2x-1+2-x)^2+(3-2x+x)^2}$$

$$=\sqrt{(x+1)^2+(3-x)^2}=\sqrt{2x^2-4x+10}$$

$$=\sqrt{2(x-1)^2+8}\ge\sqrt{8}$$

Kết hợp với (10) ta có: $\sqrt{8-(x-1)^2}\ge\sqrt{8}$

$$\Leftrightarrow 8-(x-1)^2\ge 8\Leftrightarrow (x-1)^2\le 0\Rightarrow (x-1)^2=0$$

và dấu "=" xảy ra khi đồng thời thỏa mãn

$$\begin{cases}x-1=0\\ (2x-1).x=(3-2x).(2-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 2x^2-x=2x^2-7x+6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 6x=6\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Do đó $x=1$ là nghiệm duy nhất của PT (9).

Như vậy việc sử dụng bất đẳng thức trong bài toán giải phương trình khá hữu hiệu; nó giúp việc biến đổi đại số trở nên đơn giản, tránh cồng kềnh, đồng thời không làm mất cái đẹp bản chất của mỗi bài toán. Sau đây là một số bài tập áp dụng cho phương pháp trên:

Giải các phương trình sau:

1) $8x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{5}{2}.$

2) $\sqrt{\dfrac{x^4+16}{2}}+\sqrt{2(x^2+4)}=3x+2.$

3) $\sqrt{2x^2+2x+5}+\sqrt{2x^2-10x+17}=6.$

4) $\sqrt{x^3-2x^2+2x}+3\sqrt[3]{x^2-x+1}+2\sqrt[4]{2x-x^4}=\dfrac{x^4-x^3}{2}+6.$

5) $\sqrt{2(x^4+1)}+3.\sqrt[3]{x}=x^2+4.$

6) $3.\sqrt[3]{x^2-x+1}+\sqrt[4]{\dfrac{x^8+1}{2}}=2(x^4-3x+4).$

7) $8x^4-8x^2+1=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}.$

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH BÌNH PHƯỚC, năm học 2018 - 2019

Câu 1. 1) a) ĐKXĐ: $1 < x \neq 10$.

Đặt $a = \sqrt{x-1}; 0 < a \neq 3$. Khi đó

$$P = \left(\frac{a}{3+a} + \frac{a^2+9}{(3-a)(3+a)}\right) : \left(\frac{3a+1}{a^2-3a} - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \left(\frac{a(3-a)+a^2+9}{(3-a)(3+a)}\right) : \left(\frac{3a+1}{a(a-3)} - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \frac{3a+9}{(3-a)(3+a)} : \frac{3a+1-a+3}{a(a-3)} = \frac{3(a+3)}{(3-a)(3+a)} : \frac{2a+4}{a(a-3)}$$

$$= \frac{3(a+3)}{(3-a)(3+a)} \cdot \frac{a(a-3)}{2a+4} = \frac{-3a}{2a+4} = \frac{-3\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}+4}.$$

b) Ta có:

$$x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} - \left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} + \sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$$

$$= \sqrt{2}+1-\left(\sqrt{5}+1\right)\left|1-\sqrt{2}\right| + \sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$$

$$= \sqrt{2}+1-\sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right| - \left|1-\sqrt{2}\right| + \sqrt{5}\left|1-\sqrt{2}\right|$$

$$= \sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right) = 2.$$

Vậy $P = \frac{-3\sqrt{2-1}}{2\sqrt{2-1}+4} = -\frac{1}{2}$.

2) Ta có $P = 2x^4 + x^3(2y-1) + y^3(2x-1) + 2y^4$

$$= 2x^4 + 2x^3y - x^3 + 2xy^3 - y^3 + 2y^4$$

$$= x^3(2x+2y) + y^3(2x+2y) - (x^3+y^3)$$

$$= (2x+2y)(x^3+y^3) - (x^3+y^3)$$

$$= (2x+2y-1)(x^3+y^3) = x^3+y^3.$$

Do $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

$$= x^2-xy+y^2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

Mà $x+y=1 \Rightarrow x^2+y^2+2xy=1$

$$\Rightarrow 2(x^2+y^2)-(x-y)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2(x^2+y^2) \geq 1 \Rightarrow x^2+y^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow P \geq \frac{1}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{4}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Câu 2. 1) ĐK: $x \geq \frac{3}{2}$. Khi đó PT đã cho tương đương với $\sqrt{4x} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+5} + \sqrt{2x-3}$

$$\Leftrightarrow 5x+2+2\sqrt{4x(x+2)} = 5x+2+2\sqrt{(3x+5)(2x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x(x+2)} = \sqrt{(3x+5)(2x-3)}$$

$$\Leftrightarrow 4x(x+2) = (3x+5)(2x-3)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-7x-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=5 & \text{(nhận)} \\ x=\frac{-3}{2} & \text{(loại)} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=5$.

2) HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x(y-2)+y-2=4 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y-2)=4 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=8 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $a=x+1;\ b=y-2$ thì HPT (*) trở thành

$$\begin{cases} a.b=4 \\ a^2+b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.b=4 \\ (a+b)^2-2ab=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.b=4 \\ (a+b)^2=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.b=4 \\ \left[\begin{array}{l} a+b=4 \\ a+b=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a.b=4 \\ a+b=4 \end{cases} \\ \begin{cases} a.b=4 \\ a+b=-4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1=2 \\ y-2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1=-2 \\ y-2=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Nghiệm $(x\,;y)$ của HPT là $(1;\,4);(-3;\,0)$.

3) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2-2x-m+1=0$ (1). (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=1-(-m+1)>0 \Leftrightarrow m>0$.

Do A, B thuộc (P) nên $y_1=x_1^2; y_2=x_2^2$.

Theo đề bài ta có $y_1.y_2-x_1.x_2=12$

$$\Leftrightarrow (x_1.x_2)^2-x_1.x_2-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1.x_2=4 \\ x_1.x_2=-3 \end{array}\right..$$

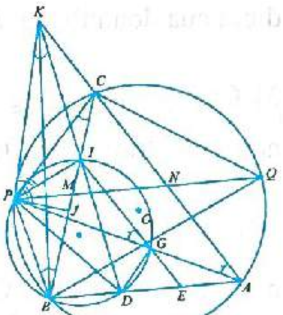
Theo hệ thức Viète ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1.x_2=-m+1 \end{cases}$.

Nếu $x_1.x_2=4$ thì $-m+1=4 \Rightarrow m=-3$ (loại).

Nếu $x_1.x_2=-3$ thì $-m+1=-3 \Rightarrow m=4$ (nhận).

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

Câu 3 a) Tứ giác $BDIP$ nội tiếp, suy ra



$\widehat{PIK}=180^0-\widehat{PID}=\widehat{PBA}$.

Mà tứ giác $CPBA$ nội tiếp, suy ra

$\widehat{PCK}=180^0-\widehat{PCA}=\widehat{PBA}$

$\Rightarrow \widehat{PIK}=\widehat{PCK}$.

Suy ra tứ giác $CIPK$ nội tiếp.

b) Tứ giác $CIPK$ nội tiếp và tứ giác $PBDI$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{PKI}=\widehat{PCI}$ và $\widehat{PDI}=\widehat{PBI}$

$\Rightarrow \Delta PKD \backsim \Delta PCB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{PK}{PC}=\frac{PD}{PB} \Rightarrow \frac{PK}{PD}=\frac{PC}{PB} \qquad (1)$$

Mà tứ giác $CPBQ$ nội tiếp suy ra $\widehat{QPB}=\widehat{BCQ}$ hay $\widehat{MPB}=\widehat{MCQ}$. Mặt khác $\widehat{PMB}=\widehat{CMQ}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \Delta MPB \backsim \Delta MCQ \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{PB}{QC}=\frac{MP}{MC} \quad (2)$$

Chứng minh tương tự có:

$$\Delta MCP \backsim \Delta MQB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{PC}{QB}=\frac{MP}{MB} \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) kết hợp với $MB=MC$ suy ra:

$$\frac{PB}{QC}=\frac{PC}{QB} \Rightarrow \frac{PC}{PB}=\frac{QB}{QC} \qquad (4)$$

Từ (1) và (4) $\Rightarrow \frac{PK}{PD}=\frac{QB}{QC} \Rightarrow PK.QC=QB.PD$.

c) Do tứ giác $BDGI$ và tứ giác $CPBA$ nội tiếp nên $\widehat{PGI}=\widehat{PBI}$ và $\widehat{PBC}=\widehat{PAC}$

$$\Rightarrow \widehat{PGI}=\widehat{PAC} \Rightarrow IG \parallel CA \Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{KD}{KI}. \qquad (5)$$

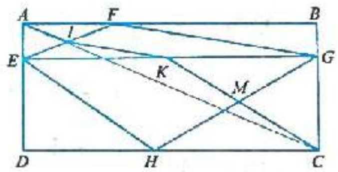
Trên BC lấy J sao cho $\widehat{KPI}=\widehat{CPJ}$. Tứ giác $CIPK$ nội tiếp, có $\widehat{IPK}=180^0-\widehat{KCI}=\widehat{BCA}$ không đổi suy ra J là điểm cố định $\Rightarrow \frac{CB}{CJ}$ không đổi. (6)

Lại có $\Delta PKI \backsim \Delta PCJ$ (g.g) và $\Delta PKD \backsim \Delta PCB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{KI}{CJ}=\frac{PK}{PC}=\frac{KD}{CB} \Rightarrow \frac{KD}{KI}=\frac{CB}{CJ}. \qquad (7)$$

Từ (5), (6) và (7) suy ra $\frac{AD}{AE}$ không đổi.

Câu 4. Gọi I, K, M theo thứ tự là trung điểm của EF, EG, GH. Tam giác AEF vuông tại A và có AI là đường trung tuyến nên $AI=\frac{1}{2}EF$. Tương tự



$MC=\frac{1}{2}GH$. Vì IK là đường trung bình của ΔEFG nên $IK=\frac{1}{2}FG$.

Tương tự $KM=\frac{1}{2}EH$. Do đó:

$$c=EF+FG+GH+HE=2(AI+IK+KM+MC).$$

Ta có $AI+IK+KM+MC \geq AC$ (vì đường gấp khúc $AIKMC \geq AC$). Suy ra $c \geq 2AC=2\sqrt{a^2+b^2}$.

(Xem tiếp trang 13)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN KHTN, ĐHQG HÀ NỘI NĂM HỌC 2019 – 2020

VÒNG 1

(Dành cho tất cả thí sinh; Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1.

1) Giải phương trình

$$\frac{26x+5}{\sqrt{x^2+30}}+2\sqrt{26x+5}=3\sqrt{x^2+30}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\\(x+2y)(2+3y^2+4xy)=27.\end{cases}$$

Câu 2.

1) Tìm tất cả các cặp (x, y) nguyên thỏa mãn

$$(x^2-x+1)(y^2+xy)=3x-1.$$

2) Với x, y là các số thực thỏa mãn $1\le y\le 2,\ xy+2\ge 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{x^2+4}{y^2+1}$.

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$, đường tròn (O) nội tiếp hình vuông $ABCD$ tiếp xúc với các cạnh AB, AD lần lượt tại các điểm E, F. Gọi giao điểm của CE và BF là G.

1) Chứng minh rằng năm điểm A, F, O, G, E cùng nằm trên một đường tròn.

2) Gọi giao điểm của FB và đường tròn (O) là $M(M\ne F)$. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng BG.

3) Chứng minh rằng trực tâm tam giác GAF nằm trên đường tròn (O).

Câu 4. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\ge\frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3.$$

THÔNG BÁO CHUYỂN TRỤ SỞ LÀM VIỆC

Từ ngày 1 tháng 8 năm 2019, Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ chuyển Trụ sở về địa điểm mới:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187 B Giảng Võ, Quận Đống Đa, Thành phố Hà Nội.

Bạn đọc liên hệ, gửi bài về Tòa soạn theo địa chỉ trên.

Số điện thoại và Email của Tạp chí vẫn giữ nguyên:

SĐT: **024.35121606 - 024.35121607**

Email: **toanhoctuoitrevietnam@gmail.com.**

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. 1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}3x^2+y^2+4xy=8\\(x+y)(x^2+xy+2)=8\end{cases}.$$

2) Giải phương trình

$$\frac{\sqrt{27+x^2+x}}{2+\sqrt{5-(x^2+x)}}=\frac{\sqrt{27+2x}}{2+\sqrt{5-2x}}.$$

Câu 2. 1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

$$\left((27n+5)^7+10\right)^7+\left((10n+27)^7+5\right)^7+\left((5n+10)^7+27\right)^7$$

chia hết cho 42.

2) Với x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y\geq 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=17x^2+17y^2+16xy$.

Câu 3. Cho tam giác ABC cân tại A, có đường tròn nội tiếp (I). Các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh CA, AB (E khác C và A; F khác B và A) sao cho EF tiếp xúc với đường tròn (I) tại điểm P. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F trên BC. Giả sử FK cắt EL tại điểm J. Gọi H là hình chiếu vuông góc của J trên BC.

1) Chứng minh rằng HJ là phân giác của $\widehat{EHF}$.

2) Ký hiệu S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của các tứ giác $BFJL$ và $CEJK$. Chứng minh rằng

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{BF^2}{CE^2}.$$

3) Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng ba điểm P, J, D thẳng hàng.

Câu 4. Cho M là tập tất cả 4039 số nguyên liên tiếp từ -2019 đến 2019. Chứng minh rằng trong 2021 số đôi một phân biệt được chọn bất kì từ tập M luôn tồn tại 3 số đôi một phân biệt có tổng bằng 0.

NGUYỄN VŨ LƯƠNG – PHẠM VĂN HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội) ***giới thiệu***

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9…

(Tiếp theo trang 11)

Câu 5. 1) Đặt $\sqrt{x}=a, a>0,\ y^2=b, b>0$.

$4y^4+6y^2-1=x \Rightarrow 4b^2+6b-1=a^2$

$\Leftrightarrow 16b^2+24b-4=4a^2$

$\Leftrightarrow 16b^2+24b+9-4a^2=13$

$\Leftrightarrow (4b+3)^2-4a^2=13$

$\Leftrightarrow (4b+3-2a)(4b+3+2a)=13.$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4b+3-2a=1\\4b+3+2a=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=9\\y=1\end{cases}$ (nhận)

hoặc $\begin{cases}4b+3-2a=13\\4b+3+2a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-3\\b=1\end{cases}$ (loại).

Vậy PT có nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(9; 1)$.

2) Ta có n chẵn $\Rightarrow n=2k, k\in\mathbb{Z}$. Suy ra

$n^3+20n+96=(2k)^3+40k+96=8(k^3+5k)+96$

$=8[(k^3-k)+6k]+96=8(k^3-k)+48k+48.2$

$=8(k-1)k(k+1)+48k+48.2.$

Do $k-1; k; k+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên $(k-1).k.(k+1)$ chia hết cho $6 \Rightarrow 8(k^3-k)\,\vdots\,48, \forall k\in\mathbb{Z}$.

Vậy với mọi số nguyên n chẵn thì $n^3+20n+96$ chia hết cho 48.

MAI VĨNH PHÚ

(GV THCS – THPT Tân Tiến, Bù Đốp, Bình Phước) ***giới thiệu***

BẠN CÓ BIẾT ?

SỐ 7 VÀ NHỮNG ĐIỀU BẠN CÓ THỂ CHƯA BIẾT

TRẦN VĂN LÂM

(Thị xã Phổ Yên, Thái Nguyên)

CON SỐ 7 TRONG TOÁN HỌC

- Số 7 là số nguyên tố lớn nhất có một chữ số.
- Đa giác đều 7 cạnh là đa giác có số cạnh nhỏ nhất không thể dựng được bằng thước và compa. Ngoài ra đa giác này còn nhiều tính chất đẹp đẽ khác nữa.
- Một tam giác tù có thể chia thành ít nhất 7 tam giác nhọn.
- Với 7 màu thì đủ để tô được bất cứ bản đồ nào trên một hình vòng xuyến (torus).
- Cách chia đơn giản nhất một hình vuông có độ dài cạnh 210 (đơn vị dài) thành 7 hình chữ nhật có độ dài cạnh phân biệt, có diện tích bằng nhau là $\dfrac{210^2}{7}$.
- *Tangram* hay còn gọi là *Thất Xảo Bản* hoặc *Thất Xảo Đồ* là một trò chơi có 7 miếng ghép (5 tam giác, 1 hình vuông và 1 hình thoi) bắt nguồn từ Trung Quốc, với 7 miếng ghép này có thể tạo ra hàng ngàn hình khác nhau. Ở Việt Nam cũng có một trò chơi tương tự dùng 7 miếng ghép mang tên là *Trí Uẩn*.
- Phương trình $x^7+y^7=z^7$ không có nghiệm nguyên (đây là một trường hợp riêng của bài toán lớn Fermat), bài toán được chứng minh năm 1840, bằng cách sử dụng đẳng thức

$$(x+y+z)^7-(x^7+y^7+z^7)=7(x+y)(y+z)(z+x)\times$$
$$\times\left((x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2+xyz(x+y+z)\right)$$

Một trong những bài toán được đề nghị bởi *David Hilbert* là: *Chứng minh rằng không thể giải được phương trình bậc 7 bằng hàm số hai biến.*

- Gieo hai con xúc xắc có sáu mặt cân đối, đồng chất cùng lúc. Khi đó xác suất để tổng hai mặt bằng 7 có xác suất cao nhất.
- Số 7 là số bé nhất không thể biểu diễn được thành tổng của bình phương ba số nguyên.
- Trong toán học có định lý về 7 đường tròn tiếp xúc nhau.
- Phép chia $\dfrac{1}{7}=0,(142857)$, tận cùng là 7 sau mỗi chu kì.

Con số 142857 được tạo thành có lẽ là số vòng (cyclic number) nổi tiếng nhất trong hệ thập phân. Khi nhân 142857 với các số từ 1 đến 6, kết quả đều là sự hoán vị và dịch chuyển của 142857:

$142857\times1=142857$; $142857\times2=285714$;
$142857\times3=428571$; $142857\times4=571428$;
$142857\times5=714285$; $142857\times6=857142$.

Đặc biệt là: $142857\times7=999999$.

Ngoài ra còn có một số đẳng thức khác như sau.

$1\times7+3=10$

$14\times7+2=100$

$142\times7+6=1000$

$1428\times7+4=10000$

$14285\times7+5=100000$

$142857\times7+1=1000000$

$1428571\times7+3=10000000$

$14285714\times7+2=100000000$

$142857142\times7+6=1000000000$

$1428571428\times7+4=10000000000$

$14285714285\times7+5=100000000000$

$142857142857\times7+1=1000000000000$

$1428571428571\times7+3=10000000000000$.

• Số 7 được coi là con số vàng vào thời kỳ Ai Cập cổ đại. Một trong nhiều bài toán cổ nhất được ghi trên giấy Papyrus tại Ai Cập có nội dung liên quan đến số 7 như sau: *Bảy gia đình nuôi 7 con mèo, mỗi con mèo ăn thịt 7 con chuột, mỗi con chuột ăn 7 cây lúa, mỗi cây lúa có 7 hạt. Hỏi số hạng của dãy số này lớn đến đâu và tổng của chúng bằng bao nhiêu ?*

• Bài toán về bảy cây cầu ở Köningsberg (Đức) do Euler giải đã khai sinh ra lý thuyết đồ thị và tô pô học.

• Các trang trí trên các dải mép tường, mép bàn, mép váy, hay những con đường dài và hẹp được gọi chung là trang trí đường viền. Người ta phân loại các kiểu trang trí đường viền tuần hoàn qua nhóm các nhóm đối xứng của chúng. Theo đó có đúng 7 kiểu khác nhau.

• Bảy bài toán thiên niên kỉ.

Ngày 24/5/2000, Viện Toán Học Clay công bố danh sách bảy bài toán chưa giải được với giải thưởng cho mỗi bài là 1000000 đô la Mỹ. Hiện tại đã giải được một bài toán trong số đó do Grigori Perelman về giả thuyết Poincare .

CON SỐ 7 TRONG MỘT SỐ LĨNH VỰC KHÁC

• "Nghiêng" là một từ có nghĩa dài nhất trong tiếng Việt có 7 chữ cái khác nhau. Trong kho tàng ca dao, tục ngữ của Việt Nam cũng có nhiều câu liên quan đến số 7 .

• Số 7 là số may mắn của người Nhật Bản. Trong văn hóa của người Nhật Bản cũng có 7 vị thần may mắn.

• Trong đạo Phật, con số 7 mang ý nghĩa to lớn, là con số của con đường đi lên. Bởi chính Đức Phật cho rằng ngài đã bước 7 bước để đến với cuộc đời, nở ra 7 đóa hoa sen.

• Theo truyền thuyết, ngày 7 tháng 7 âm lịch hàng năm chàng Ngưu Lang và nàng Chức Nữ sẽ được gặp lại nhau trên cầu Ô Thước.

• Có 7 loại quân cờ trên một bàn cờ tướng: Tướng, Sĩ, Tượng, Xe, Pháo, Mã, Tốt.

• Trong bảng tuần hoàn các nguyên tố hóa học có 7 chu kì.

• Hệ đo lường quốc tế (viết tắt SI) là hệ đo lường được sử dụng rộng rãi nhất. Trong hệ này, có bảy đơn vị cơ bản gồm:

Khối lượng(kilogam); Cường độ ánh sáng (candela); Thời gian (giây); Cường độ dòng điện (Ampe); Số hạt (mol); Độ dài (mét); Nhiệt độ (kelvin).

• Khi cho ánh sáng trắng đi qua lăng kính (hoặc hiện tượng cầu vồng) thì ánh sáng trắng phân ra thành 7 màu: Đỏ; Cam; Vàng; Lục; Lam; Chàm; Tím.

• Một tuần có 7 ngày tương ứng với bảy thiên thể, nghệ thuật có 7 ngành, âm nhạc có 7 nốt cơ bản, trên thế giới có 7 kỳ quan cổ đại, vào thứ 7 ngày 7 /7/2007 đã công bố 7 kỳ quan mới.

• Nhóm sao *Bắc Đẩu* là một mảng sao gồm có 7 ngôi sao trong chòm sao *Đại Hùng*.

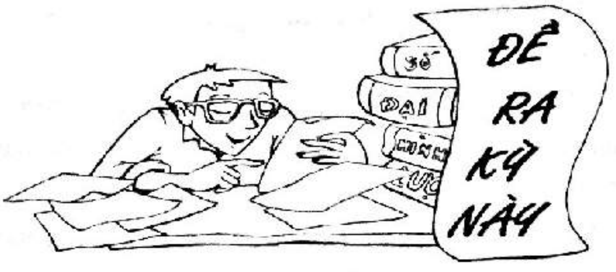
• Bạn không bao giờ gập đôi được một mảnh giấy bất kỳ quá 7 lần liên tiếp.

• Có một nghiên cứu y học cho rằng lớp da của con người được tái sinh trong 7 ngày. Các tế bào của chúng ta cũng được thay thế trong vòng 7 năm.

• Năm 1956, nhà tâm lý học *George A Miller* đăng một bài viết trong Tạp chí Tâm lý học. Trong bài viết ông nói về số 7, một số nguyên tố mà ông gặp ở nhiều nơi.

Ký ức ngắn hạn của chúng ta được chứng minh là có hiệu quả tốt khi nhớ tối đa 7 điều. Chúng ta có thể phân biệt và đánh giá về bảy chủng loại khác nhau. Tầm chú ý của chúng ta cũng sẽ nhớ được khoảng bảy vật thể khi liếc mắt. Miller cũng khám phá các lĩnh vực khác liên quan tới việc chúng ta ghi nhận và lưu giữ thông tin và ngạc nhiên phát hiện rằng số bảy dường như xuất hiện ở mọi nơi. Miller không đưa ra kết luận rằng điều này có ý nghĩa gì sâu sắc, nhưng nói rằng rất có thể số bảy đặc biệt hơn những gì chúng ta vẫn tưởng và cần nghiên cứu thêm.

Bạn đọc hãy tìm hiểu xem con số 7 còn những điều gì thú vị và huyền bí nữa không nhé !



CÁC LỚP THCS

Bài T1/505 (Lớp 6). Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $2a$ là số chính phương và $3a$ là số lập phương.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)

Bài T2/505 (Lớp 7). Tìm các chữ số a, b, c, d khác 0 và từng đôi một khác nhau sao cho số tự nhiên $\overline{abcda1}$ (chữ số tận cùng là 1) thỏa mãn $\overline{abcda1}-4n=n^2$, trong đó n là số nguyên dương.

NGUYỄN TẤN NGỌC
(*GV THCS phường Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định*)

Bài T3/505. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ bậc n với các hệ số nguyên không âm không lớn hơn 8 và $P(9)=32078$.

TRƯƠNG QUANG AN
(*Lớp Toán – Tin 32, Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi*)

Bài T4/505. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Trung điểm bốn đoạn thẳng AB, AC, CD, DB thứ tự là M, N, P, Q. Độ dài bốn cạnh AB, BC, CD, DA thứ tự là a, b, c, d. Diện tích của tứ giác $MNPQ$ là S. Giả sử hai cạnh đối AD và BC vuông góc với nhau. Chứng minh $\frac{(c-a)^2-(b-d)^2}{8}\le S\le\frac{(b+d)^2-(c-a)^2}{8}$.

NGUYỄN HỮU DỰ
(*Xóm 3, xã Quỳnh Liên, huyện Quỳnh Liên, thị xã Hoàng Mai, Nghệ An*)

Bài T5/505. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^5+y^5+z^5+\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}+\frac{10}{xyz}.$$

LẠI QUANG THỌ
(*Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc*)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/505. Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}=x^2-2.$$

TRẦN VĂN LÂM
(*Xóm Tiến Bộ, thôn Vân Trai, xã Tân Phú, thị xã Phổ Yên, Thái Nguyên*)

Bài T7/505. Cho phương trình

$$\frac{1}{3}x^5+2x^4-5x^3-7x^2+12x-1=0. \quad (1)$$

a) Chứng minh (1) luôn có 5 nghiệm phân biệt.

b) Giả sử x_i $(i=\overline{1,5})$ là các nghiệm của (1). Tính tổng $S=\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i-1}{x_i^5+6x_i^4-3}$.

NGUYỄN TIẾN LÂM
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Bài T8/505. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có bất đẳng thức sau

$$\left(1+\sin^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin^2\frac{B}{2}\right)\left(1+\sin^2\frac{C}{2}\right)\ge\frac{125}{64}.$$

PHẠM DUY KHÁNH
(*GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An*)

Bài T9/505. Cho các số thực dương a, b, c và $-2<k<2$. Chứng minh rằng

$$27(a^2+kab+b^2)(b^2+kbc+c^2)(c^2+kca+a^2)\ge(k+2)^3(ab+bc+ca)^3.$$

PHẠM THANH HÙNG
(*Lớp Cao học Toán Giải tích khóa 19, Đại học Cần Thơ*)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/505. Có một người sử dụng bản đồ trên điện thoại di động để đi từ một điểm A đến một điểm B. Anh ta đã đến được điểm B sau một số lần cứ đi một đoạn thẳng lại phải chỉnh lại hướng bằng cách quay một góc nhọn theo chiều kim đồng hồ (từ hướng đi ngay trước đó). Biết rằng tổng các góc phải điều chỉnh này bằng $\alpha<180^0$. Chứng minh rằng độ dài đoạn đường anh ta đã đi không vượt quá $\frac{AB}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

VŨ ĐÌNH HÒA
(*GV Khoa CNTT, ĐHSP Hà Nội*)

Bài T11/505. Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi $a_1=2020,\ a_{n+1}=1+\frac{2}{a_n}, \forall n\ge1.$

a) Chứng minh rằng:

$$2n<a_1+a_2+\ldots+a_n<2n+2018$$

với mọi $n=1, 2, \ldots$

b) Tìm số thực a lớn nhất thỏa mãn

$$\sqrt{x^2+a_1^2}+\sqrt{x^2+a_2^2}+\ldots+\sqrt{x^2+a_n^2}\ge n\sqrt{x^2+a^2}$$

với mọi $x\in\mathbb{R}, n=1, 2, \ldots$

KIỀU ĐÌNH MINH
(*GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ*)

Bài T12/505. Cho tam giác ABC không cân tại A. Điểm M thuộc đoạn BC. I_1, I_2 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABM, ACM. N, P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AM, AB, AC và đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_1I_2. J_1, J_2 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác APN, AQN. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AI_1I_2, AJ_1J_2, MI_1I_2$ thuộc BC.

NGUYỄN MINH HÀ
(*GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội*)
LÊ VIẾT ÂN
(*TP. Hồ Chí Minh*)

Bài L1/505. Ba điểm O, A, B cùng nằm trên một nửa đường thẳng xuất phát từ O. Tại O đặt một nguồn điểm phát sóng âm đẳng hướng ra không gian, môi trường không hấp thụ âm. Mức cường độ âm tại A là 60 dB, tại B là 40 dB. Xác định mức cường độ âm tại điểm M trong đoạn AB có $MB = 2MA$.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

Bài L2/505. Đoạn mạch điện AB mắc nối tiếp theo thứ tự lần lượt gồm cuộn dây thuần cảm, biến trở và tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi và tần số góc ω (với $5\omega^2 LC = 3$). Khi $R = R_0$ thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch đạt cực đại. Gọi M và N lần lượt là điểm nối giữa cuộn cảm thuần với biến trở và biến trở với tụ điện. Biết điện áp ở hai đầu MB có biểu thức là $u_{MB} = 290\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ (V), viết biểu thức điện áp ở hai đầu đoạn mạch AN.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/505 (Lớp 6). Find the smallest positive interger a so that $2a$ is a square and $3a$ is a cube.

Problem T2/505 (Lớp 7). Find different non-zero digits a, b, c, d so that $\overline{abcda1} - 4n = n^2$ for some postitive integer n (the last digit of $\overline{abcda1}$ is 1).

Problem T3/505. Find all polynomials $P(x)$ whose the coefficients are integers between 0 and 8 and $P(9) = 32078$.

Problem T4/505. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral. Denote the midpoints of AB, AC, CD, DB respectively M, N, P, Q. Let the lengths of the sides AB, BC, CD, DA respectively be a, b, c, d. Let the area of $MNPQ$ be S. Assume that AD and BC are perpendicular. Show that

$$\frac{(c-a)^2-(b-d)^2}{8} \le S \le \frac{(b+d)^2-(c-a)^2}{8}.$$

Problem T5/505. Let x, y, z be positive numbers such that $x + y + z = 3$. Find the minimum value of the expression

$$P = x^5 + y^5 + z^5 + \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} + \frac{10}{xyz}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/505. Find all real solutions of the equation

$$\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} = x^2-2.$$

Problem T7/505. Given the equation

$$\frac{1}{3}x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 12x - 1 = 0. \quad (1)$$

a) Show that (1) has 5 distinct roots.

b) Let x_i $(i = \overline{1,5})$ be the roots of (1). Find the sum $S = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i - 1}{x_i^5 + 6x_i^4 - 3}$.

Problem T8/505. Given any triangle ABC show that

$$\left(1+\sin^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin^2\frac{B}{2}\right)\left(1+\sin^2\frac{C}{2}\right) \ge \frac{125}{64}.$$

Problem T9/505. Given positive numbers a, b, c and a number $-2 < k < 2$. Prove that

$$27(a^2+kab+b^2)(b^2+kbc+c^2)(c^2+kca+a^2) \ge (k+2)^3(ab+bc+ca)^3.$$

(*Xem tiếp trang 27*)

Bài 1/501. *Tìm số tự nhiên x sao cho*

$$\frac{x-1}{2018}+\frac{x-7}{503}=\frac{x-3}{1008}+\frac{x-9}{670}.$$

Lời giải. Ta nhận thấy 2019 = 2018 + 1 = 503.4 + 7 = 1008.2 + 3 = 670.3 + 9 nên có thể biến đổi như sau

$$\frac{x-1}{2018}-1+\frac{x-7}{503}-4=\frac{x-3}{1008}-2+\frac{x-9}{670}-3$$, hay là

$$\frac{x-2019}{2018}+\frac{x-2019}{503}=\frac{x-2019}{1008}+\frac{x-2019}{670}$$, hay là

$$(x-2019)\left(\frac{1}{2018}+\frac{1}{503}\right)=(x-2019)\left(\frac{1}{1008}+\frac{1}{670}\right)$$, hay là

$$(x-2019)\left[\frac{1}{2018}+\frac{1}{503}-\left(\frac{1}{1008}+\frac{1}{670}\right)\right]=0.\ (*)$$

Đặt $A=\frac{1}{2018}+\frac{1}{503}-(\frac{1}{1008}+\frac{1}{670})$ thì

$$A=\frac{2521}{2018.503}-\frac{1678}{1008.670}=\frac{2521.1008.670-1678.2018.503}{2018.503.1008.670}.$$

Tử số của A có chữ số tận cùng khác chữ số không nên số A khác số không, do đó từ (*) suy ra $x-2019=0$, hay là $x=2019$. Vậy $x=2019$ là số duy nhất phải tìm.

Nhận xét. Một số bạn khi biến đổi đã viết nhầm dấu hoặc nhầm số. Nhiều bạn không giải thích rõ biểu thức A khác số không. Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ**: *Nguyễn Ngọc Anh, Nguyễn Thị Trà Giang, Nguyễn Thị Huyền Trang, Vũ Minh Đức*, 6A3, THCS Lâm Thao; *Nguyễn Thùy Linh*, 6C, THCS Cao Mại, Lâm Thao; **Hà Nội**: *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An**: *Trần Quang Vinh, Hoàng Minh Thông, Hồ Ngọc Việt*, 6A, *Trần Phương Mai, Phạm Ngọc Trinh, Đặng Minh Đạt, Trần Minh Hoàng, Đặng Anh Tiến, Hồ Thục Nguyên*, 6B, *Lê Tiến Hợp*, 6C, *Nguyễn Cảnh Nam Khánh, Lê Văn Quang Hiếu, Võ Ánh Dương*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, *Lê Văn Mạnh*, 6C, THCS Võ Thị Sáu, Đô Lương; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Minh Nhật*, 6B, THCS Xuân Lộc, Can Lộc; **Quảng Ngãi**: *Cao Nguyễn Quỳnh Hương*, 6C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; **Sóc Trăng**: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/501. *Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm (x; y) thỏa mãn phương trình*

$$1+3^{x+1}+2.3^{3x}=y^3 \qquad (1)$$

Lời giải. • Với $x=0$ thì dễ thấy không tồn tại số nguyên y thỏa mãn (1).

• Với $x\ge 1$, PT(1) được viết lại thành:

$$3^{x+1}(1+2.3^{2x-1})=(y-1)(y^2+y+1) \qquad (2)$$

Đặt $d=$ ƯCLN $(y-1),(y^2+y+1)$ thì

$$\begin{cases} d \mid y-1 \\ d \mid y^2+y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid y^2-y \\ d \mid y^2+y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid y-1 \\ d \mid 2y+1 \end{cases} \Rightarrow d \mid 3.$$

Mặt khác từ (1) suy ra y chia cho 3 dư 1 nên $d=3$.

Do ƯCLN $(y-1),(y^2+y+1)=3$ nên từ (2) suy ra:

$$3^x \mid y-1 \text{ hoặc } 3^x \mid y^2+y-1.$$

+ TH1: $3^x \mid y-1$. Đặt $y=k.3^x+1,\ k\in\mathbb{Z}^+$, thay vào (1) được: $1+3^{x+1}+2.3^{3x}=(k.3^x+1)^3$

$$\Leftrightarrow 3^{x+1}+2.3^{3x}=k^3.3^{3x}+k^2.3^{2x+1}+k.3^{x+1}.$$

Nếu $k\ge 2$ thì $k^3.3^x+k^2.3^{2x+1}+k.3^{x+1}$

$$\ge 8.3^x+4.3^{2x+1}+2.3^{x+1}>3^{2x+1}+2.3^{2x}.$$

Suy ra $k=1$. Thay vào PT trên ta được:

$$3^{x+1}+2.3^{3x}=3^{3x}+3^{2x+1}+3^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 3^{3x}=3^{2x+1}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=4.$$

+ TH2: $3^x \mid y^2+y-1$. Nếu $x\ge 2$ thì

$9\,|\,y^2+y+1 \Rightarrow 9\,|\,4y^2+4y+4$ hay $9\,|\,(2y+1)^2+3$.

Nhưng do $3\,|\,2y+1 \Rightarrow 9\,|\,(2y+1)^2$ nên $(2y+1)^2+3$ chia cho 9 có số dư là 3, vô lý. Vậy $x=1 \Rightarrow y=4$.

Tóm lại, PT(1) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ là $(1; 4)$.

➤***Nhận xét.*** Số bài giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Hoàng Xuân Tú*, 6A, THCS Tô Hoàng, Q. Đống Đa; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An:** *Nguyễn Công An*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Võ Thị Hồng Thu*, 7B, THPT Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

HỒ HẢI

Bài T3/501. *Cho* $0\le a\le 2, 0\le b\le 2, 0\le c\le 2$ *và* $a+b+c=3$. *Chứng minh rằng* $3\le a^3+b^3+c^3\le 9$.

Lời giải. Ta có

$$a^3-3a+2=(a^3-a^2)+(a^2-a)-2(a-1)$$

$$=(a^2+a-2)(a-1)=(a+2)(a-1)^2\ge 0 \text{ (vì } a\ge 0).$$

Suy ra $a^3\ge 3a-2$. Tương tự: $b^3\ge 3b-2, c^3\ge 3c-2$.

Do đó: $a^3+b^3+c^3\ge 3a-2+3b-2+3c-2$

$$=3(a+b+c)-6=3.3-6=3.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Do vai trò của *a, b, c* trong bài toán là như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b, a\ge c$. Ta có:

$3a\ge a+b+c=3\Rightarrow a\ge 1$. Từ $b\ge 0, c\ge 0, 2\ge a\ge 1$ suy ra: $a^3+b^3+c^3\le a^3+b^3+c^3+3bc(b+c)$

$$=a^3+(b+c)^3=a^3+(3-a)^3$$

$$=a^3+27-27a+9a^2-a^3=9(a^2-3a+2)+9$$

$$=9(a-1)(a-2)+9\le 9.$$

$a^3+b^3+c^3=9 \Leftrightarrow bc(b+c)=0$ và $(a-1)(a-2)=0$

$\Leftrightarrow a=2$ và (b, c) là một hoán vị của $(1, 0)$.

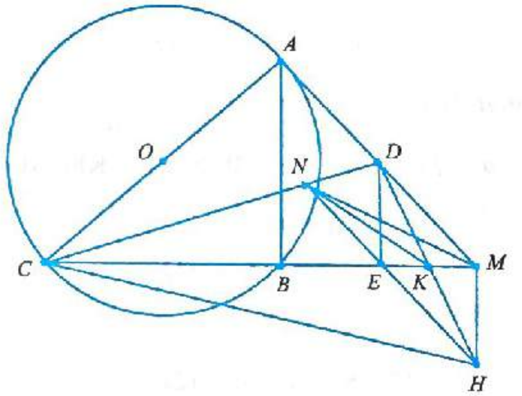
Như vậy $a^3+b^3+c^3\le 9$ đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c)$ là một hoán vị của $(0, 1, 2)$. Khẳng định của bài toán đã được chứng minh.

➤***Nhận xét.*** Đây là BĐT lớp 8 dạng cơ bản. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Thanh Hóa:** *Lê Đức Chinh*, 8B, *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, *Nguyễn Duy Long*, 9A, THCS Tố Như, Hoằng Lộc, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trương Công Cảnh*, *Đặng Hữu Khanh*, *Phạm Văn Quyền*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, 9G, THCS Nguyễn Trãi, TP. Đông Hà; **Quảng Ngãi:** *Võ Thị Hồng Thu*, 8B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 9/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T4/501. *Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC với đường tròn (O) (B nằm giữa M và C). Gọi D, E, K lần lượt là trung điểm của MA, MB, ME. H là điểm đối xứng với D qua K. Đường thẳng HE cắt CD tại N. Chứng minh rằng CNKH là tứ giác nội tiếp.*

Lời giải.



Dễ thấy tứ giác *DMHE* là hình bình hành, suy ra *MH // DE*, ta có

$\widehat{KHE}=\widehat{KDM}$ (so le trong) (1)

Lại có, *DK* là đường trung bình của tam giác *AME* nên *DK // AE*, ta có

$\widehat{KDM}=\widehat{EAM}$ (so le trong) (2)

Mặt khác, *DE* là đường trung bình của tam giác *AMB* nên *AB // DE*, ta có

$\widehat{EDM}=\widehat{BAM}$ (so le trong) (3)

Mà $\widehat{BAM}=\widehat{ACB}$ (cùng chắn cung *AB*) (4)

Nên từ (3) và (4), suy ra $\widehat{EDM}=\widehat{ACE}$, nên tứ giác *ADEC* nội tiếp, ta có $\widehat{DAE}=\widehat{DCE}$. (5)

Từ (1), (2) và (5) suy ra $\widehat{KHN}=\widehat{KCN}$. Do đó tứ giác *CNKH* nội tiếp. □

Nhận xét. Các bạn có tên dưới đây có lời giải tốt.

Quảng Ngãi: *Phạm Đình Tâm*, 9A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Phú Thọ:** *Trần Công Hưng*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, 9G, THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà; **Nghệ An:** *Nguyễn Huy Hoàng*, *Lê Anh Đức*, *Lê Văn Mạnh*, *Lê Văn Quang Trung*, 9B, *Đặng Hữu Thanh*, *Trương Công Cảnh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Tất Đạt*, 9A1, THCS Yên Phong; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Trọng Tâm*, *Trương Ngọc Tâm*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; *Nguyễn Duy Long*, 9A, THCS Tố Như, Hoằng Hóa; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đặng Quốc Bảo*, 9A2, THCS Tăng Nhơn Phú B.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/501. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2x\sqrt{x}+3x\sqrt{y}+\sqrt{y}=138 \\ y\sqrt{y}+6\sqrt{x}.y+8\sqrt{x}=213 \end{cases}.$$

Lời giải. ĐK: $x \ge 0;\ y \ge 0$.

Đặt $a=\sqrt{x};\ b=\sqrt{y}, a\ge 0;\ b\ge 0$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2a^3+3a^2b+b=138 & (1) \\ b^3+6ab^2+8a=213 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8a^3+12a^2b+4b=552 & (2) \\ b^3+6ab^2+8a=213 & (3) \end{cases}$$

Cộng theo vế của (2), (3), ta được:

$$\left(8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3\right)+\left(8a+4b\right)=765$$

$$\Leftrightarrow (2a+b)^3+4(2a+b)=765.$$

Đặt $t=2a+b,\ t\ge 0$, phương trình trở thành:

$$t^3+4t-765=0$$

$$\Leftrightarrow (t-9)\left(t^2+9t+85\right)=0 \Leftrightarrow t=9 \text{ (vì } t^2+9t+85>0\text{)}.$$

Với $t=9$, ta có: $2a+b=9 \Leftrightarrow b=9-2a\ge 0$.

Thay vào (1): $2a^3+3a^2(9-2a)+(9-2a)=138$

$$\Leftrightarrow 4a^3-27a^2+2a+129=0$$

$$\Leftrightarrow (a-3)\left(4a^2-15a-43\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ 4a^2-15a-43=0 \end{array}\right.$$

Phương trình

$$4a^2-15a-43=0 \Leftrightarrow a=\frac{15\pm\sqrt{913}}{8}.$$

Cả hai nghiệm này bị loại vì

$$a=\frac{15-\sqrt{913}}{8}<0;$$

$$a=\frac{15+\sqrt{913}}{8}>\frac{9}{2}\Rightarrow b=9-2a<0.$$

Với $a=3 \Rightarrow b=9-2a=3$.

Ta có $a=3;\ b=3 \Rightarrow x=9;\ y=9$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(9;9)$.

Nhận xét. Điều then chốt của lời giải là sau khi đặt $a=\sqrt{x};\ b=\sqrt{y}$, biến đổi được

$$(2a+b)^3+4(2a+b)=765.$$

Từ đó tính được $t=2a+b=9$; thế $b=9-2a$ vào (1) tìm được *a, b* suy ra *x, y*. Tất cả các bạn gửi bài giải đều làm theo cách này. Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hà Nội: *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Nghệ An:** *Lê Anh Đức, Lê Văn Mạnh, Lê Văn Quang Trung*, 9B, *Trương Công Cảnh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** *Trần Công Hưng*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Thanh Hóa:** *Trương Ngọc Tâm, Nguyễn Trọng Tâm*, 9D, *Lê Đức Chính*, 8B, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút sơn, Hoằng Hóa; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Hoàng Long*, 9G, THCS Nguyễn Trãi, TP. Đông Hà.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/501. *Giải phương trình*

$$12\sqrt[3]{x^2+4}.\sqrt{2x-3}=\left(x^2+16x-12\right).\sqrt[3]{x-1} \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $2x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{3}{2}$.

Cách 1. Với $x\ge\frac{3}{2}$ thì $\sqrt[3]{x-1}\ne 0$. Chia hai vế của (1) cho $\sqrt[3]{x-1}$, ta được

$$12\sqrt[3]{\frac{x^2+4}{x-1}}.\sqrt{2x-3}=x^2+16x-12. \quad (2)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho các số dương, ta có

$$12\sqrt[3]{\frac{x^2+4}{x-1}}=3.\sqrt[3]{\frac{x^2+4}{x-1}.8.8}$$

$$\le\frac{x^2+4}{x-1}+8+8=\frac{x^2+16x-12}{x-1};$$

$$\sqrt{2x-3}=\sqrt{(2x-3).1}\le\frac{2x-3+1}{2}=x-1.$$

Suy ra

$$\text{VT}(2)=12\sqrt[3]{\frac{x^2+4}{x-1}}.\sqrt{2x-3}\le\frac{x^2+16x-12}{x-1}.(x-1)$$

$$=x^2+16x-12=\text{VP}(2).$$

Nghiệm của (1) là giá trị của x để VT(2) = VP(2), tức là $\begin{cases}\dfrac{x^2+4}{x-1}=8\\ 2x-3=1\end{cases}\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Cách 2. Đặt $a=\sqrt[3]{x^2+4},b=\sqrt[3]{x-1}$ $(a>0,b>0)$ thì phương trình (1) trở thành

$$12a\sqrt{2b^3-1}=(a^3+16b^3)b \qquad (3)$$

Áp dụng BĐT Cauchy với các số dương, ta có

$$\text{VT}(3)=12a\sqrt{2b^3-1}\le12a.\frac{2b^3-1+1}{2}=12ab^3;$$

$$\text{VP}(3)=\left(a^3+16b^3\right)b=\left(a^3+8b^3+8b^3\right)b$$

$$\ge3\sqrt[3]{a^3.8b^3.8b^3}.b=12ab^3.$$

Do đó, phương trình (3) tương đương với

$\begin{cases}2b^3-1=1\\ a^3=8b^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$. Từ đó tìm được $x = 2$.

Nhận xét. Đây là bài toán giải phương trình vô tỉ mà ẩn nằm trong dấu căn bậc hai và bậc ba. Vì vậy ta nên sử dụng bất đẳng thức để đánh giá. Đa số các bạn gửi bài đều giải theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Ngô Văn Minh Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nam Định**: *Trần Huy Lực*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nam**: *Phan Thế Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Hà Tĩnh**: *Lê Đình Trí Tuệ*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Long**: *Lê Minh Tâm*, *Phan Lương Quốc Trung Tín* 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bình Định**: *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2, THPT số 2 Phù Cát; **Trà Vinh**: *Đỗ Ngọc Anh*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Thiện Thanh; **Phú Yên**: *Đỗ Lai Tin Đạt*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Đồng Tháp**: *Huỳnh Tấn Phúc*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/501. *Tìm hệ số của* x^3 *trong khai triển thành đa thức của* $(1+x)(1+2x)(1+3x)...(1+nx)$.

Lời giải. Hệ số của x^3 là

$$a_3=\frac{n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)}{48}.$$

Đặt $f(x)=(1+x)(1+2x)(1+3x)...(1+nx)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$.

Ta có $a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!},k=0,1,\dots,n$ với $f^{(k)}(0)$ là đạo hàm cấp k của đa thức $f(x)$ tại điểm $x = 0$.

Ta có : $f'(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+2x}+...+\dfrac{n}{1+nx}\right)$.

Với $x=0$ ta có $a_0=f'(0)=1+2+...+n$ và

$$f''(x)=(f'(x))'=f'(x)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+2x}+...+\frac{n}{1+nx}\right)-$$

$$-f(x)\left(\frac{1^2}{(1+x)^2}+\frac{2^2}{(1+2x)^2}+...+\frac{n^2}{(1+nx)^2}\right)$$

$$f''(0)=f'(0)(1+2+...+n)-(1^2+2^2+...+n^2)$$

$$=(1+2+...+n)^2-(1^2+2^2+...+n^2).$$

Đạo hàm bậc 3 sẽ là $f'''(x)=(f''(x))'$

$$=f''(x)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+2x}+...+\frac{n}{1+nx}\right)-$$

$$-2f'(x)\left(\frac{1^2}{(1+x)^2}+\frac{2^2}{(1+2x)^2}+...+\frac{n^2}{(1+nx)^2}\right)+$$

$$+2f(x)\left(\frac{1^3}{(1+x)^3}+\frac{2^3}{(1+2x)^3}+...+\frac{n^3}{(1+nx)^3}\right).$$

Thay $x = 0$ vào biểu thức trên, ta có :

$$f'''(0)=f''(0)(1+2+...+n)-2f'(0)(1^2+2^2+...+n^2)+$$
$$+2(1^3+2^3+...+n^3)$$

$$=(1+2+...+n)^3-3(1+2+...+n)(1^2+2^2+...+n^2)$$
$$+2(1^3+2^3+...+n^3)$$

$$=\frac{n^3(n+1)^3}{8}-\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{4}+\frac{n^2(n+1)^2}{2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)}{8}$$

$$\Rightarrow a_3=\frac{f'''(0)}{3!}=\frac{n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)}{48}.$$

Nhận xét. Có ít bạn giải bài này, một số bạn có đáp số sai và một số bạn chưa có được con số cuối cùng. Các bạn có đáp số đúng là các bạn :

Bắc Ninh: *Nguyễn Đăng Phong*, 11A, THPT Yên Phong 2, xã Yên Trung, huyện Yên Phong; **Bình Định:** *Nguyễn Bá Chinh*, 12A1, THPT Ngô Lê Tân, Phù Cát; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà nội.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T8/501. *Cho tam giác ABC, BC = a, CA = b, AB = c. Gọi r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh* $\frac{r_a}{r_b}+\frac{r_b}{r_c}+\frac{r_c}{r_a}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

Lời giải. Ký hiệu S_{ABC} là diện tích, p là nửa chu vi của ΔABC. Khi đó

$$S_{ABC}=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c.$$

BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{p-b}{p-a}+\frac{p-c}{p-b}+\frac{p-a}{p-c}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \quad (1)$$

Đặt $x = 2(p - c)$, $y = 2(p - b)$, $z = 2(p - a)$ thì $a=\frac{x+y}{2}, b=\frac{z+x}{2}, c=\frac{y+z}{2}$. BĐT(1) trở thành:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge\frac{z+x}{y+z}+\frac{y+z}{x+y}+\frac{x+y}{z+x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y}-\frac{z+x}{y+z}+\frac{y}{z}-\frac{x+y}{z+x}+\frac{z}{x}-\frac{y+z}{x+y}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z(x-y)}{y(y+z)}+\frac{x(y-z)}{z(z+x)}+\frac{y(z-x)}{x(x+y)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{y}{z}+1}+\frac{\frac{y}{z}-1}{\frac{z}{x}+1}+\frac{\frac{z}{x}-1}{\frac{x}{y}+1}\ge 0 \quad (2)$$

Đặt $\frac{x}{y}=m, \frac{y}{z}=n, \frac{z}{x}=p$ thì $m.n.p = 1$. BĐT(2) trở thành: $\frac{m-1}{n+1}+\frac{n-1}{p+1}+\frac{p-1}{m+1}\ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{m+n}{n+1}+\frac{n+p}{p+1}+\frac{p+m}{m+1}\ge 3 \quad (3)$$

Theo BĐT Schwarz, ta có:

$$VT(3)=\frac{(m+n)^2}{(m+n)(n+1)}+\frac{(n+p)^2}{(n+p)(p+1)}+\frac{(p+m)^2}{(p+m)(m+1)}$$

$$\ge\frac{4(m+n+p)^2}{m^2+n^2+p^2+mn+np+pm+2(m+n+p)}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$4(m+n+p)^2 \ge 3(m^2+n^2+p^2+mn+np+pm)+6(m+n+p)$$

$$\Leftrightarrow (m+n+p)^2+3(mn+np+pm)-6(m+n+p)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (m+n+p-3)^2+3(mn+np+pm-3)\ge 0.$$

Rõ ràng BĐT cuối đúng vì theo BĐT Cauchy thì: $mn+np+pm\ge 3\sqrt[3]{m^2n^2p^2}=3$. Vậy BĐT ở đầu bài được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m=n=p \Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$ hay ΔABC đều.

➤***Nhận xét.*** Số lời giải gửi về Tòa soạn khá nhiều, các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Ngô Văn Minh Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Q. Hà Đông; **Hà Giang:** *Lê Trường Giang*, 10 Toán, THPT chuyên Hà Giang, TP. Hà Giang; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Lê Đình Trí Tuệ*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ, Cam Lộ; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Danh Lân*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Nhật Hào*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Bình Định:** *Nguyễn Bá Chinh*, 12A1, THPT Ngô Lê Tân, Phù Cát, *Nguyễn Ngọc Nhân*, 10A2, THPT số 2 Phù Cát; **Long An:** *Võ Hoàng Phúc Khang*, 10T1, THPT chuyên Long An, TP. Tân An; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Sóc Trăng:** *Đậu Đức Quân*, 12A2 Toán, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Vĩnh Long:** *Lê Ngô Minh Đức*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/501. *Cho các số dương a,b,c,d thoả mãn các điều kiện $a \ge b \ge c \ge d$ và $abcd = 1$. Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng*

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{k}{d+1} \ge \frac{3+k}{2} \quad (1).$$

Lời giải. (Dựa theo đa số các bạn)

Với $a = b = c = n \in \mathbb{N}^*$ thì $d = \frac{1}{n^3}$ và (1) có dạng

$$\frac{3}{n+1}+\frac{k}{\frac{1}{n^3}+1} \ge \frac{3+k}{2} \quad (2).$$

Chuyển qua giới hạn hệ thức (2) khi $n \to +\infty$ ta thu được $k \ge \frac{3+k}{2} \Leftrightarrow k \ge 3$. Tiếp theo ta chứng minh (1) đúng với $k = 3$, tức là

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{3}{d+1} \ge 3 \quad (3).$$

Để ý rằng với mọi cặp số dương x, y mà $xy \ge 1$ thì $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1} \ge \frac{2}{xy+1}$ (4). Thật vậy

$$(4) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{xy+1}\right)+\left(\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{xy+1}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(x^2+1)(xy+1)}+\frac{y(x-y)}{(y^2+1)(xy+1)}) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(xy-1)}{(x^2+1)(y^2+1)(xy+1)}) \ge 0.$$

Mặt khác, theo giả thiết thì $a \ge b \ge c \ge d$ và $(ab)(cd) = 1$ nên $\sqrt{ab} \ge 1 \ge \sqrt{cd} \ge d$.

Sử dụng (4), ta thu được

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1} \ge \frac{2}{\sqrt{ab}+1} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{cd}}+1} \ge \frac{2}{\frac{1}{d}+1} = \frac{2d}{d+1}$$

và $\frac{1}{c+1} \ge \frac{1}{\frac{1}{d}+1} = \frac{d}{d+1}$.

Từ đó, suy ra: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{3}{d+1}$

$$=\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)+\frac{1}{c+1}+\frac{3}{d+1}$$

$$\ge \frac{2d}{d+1}+\frac{d}{d+1}+\frac{3}{d+1} = 3.$$

Vậy (3) được chứng minh.

Kết luận. Vậy $k = 3$ là hằng số nhỏ nhất để BĐT (1) luôn đúng với mọi bộ số dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a \ge b \ge c \ge d$ và $abcd = 1$.

Nhận xét. Ta cũng có thể khảo sát trực tiếp bất đẳng đẳng thức (1) bằng phương pháp đạo hàm. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Hà Nội: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. **Hà Tĩnh:** *Lê Đình Trí Tuệ*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11T, THPT chuyên Hưng Yên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/501. *Cho n là số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 6. Tìm số nguyên dương lớn nhất m để trong n số nguyên dương phân biệt bất kỳ không vượt quá m luôn tồn tại 4 số phân biệt mà một số bằng tổng của 3 số còn lại.*

Lời giải. Ta thấy $m \ge n$. Xét n số nguyên dương $m-n+1, m-n+2, ..., m$. Tổng của ba số phân biệt nhỏ nhất bằng:

$$(m-n+1)+(m-n+2)+(m-n+3) = 3m-3n+6.$$

Suy ra:

$$m \ge 3m-3n+6 \Leftrightarrow m \le \frac{3n-6}{2} \Rightarrow m \le \left[\frac{3n-6}{2}\right].$$

Ta sẽ chứng minh $m = \left[\frac{3n-6}{2}\right] = n-3+\left[\frac{n}{2}\right]$ thỏa mãn đề bài. Thật vậy, giả sử $a_1 < a_2 < ... < a_n$ là các số nguyên dương không vượt quá m.

Đặt $s = \left[\frac{n}{4}\right]+2$ và $t = 2-\left[\frac{n}{2}\right]+2\left[\frac{n}{4}\right]$. Ta thấy

$$s \le \frac{n}{4}+2 < n \text{ (do } n \ge 6)$$

và $t = 2\left(\left[\frac{n}{4}\right]+1\right)-\left[\frac{n}{2}\right] > 2.\frac{n}{4}-\left[\frac{n}{2}\right] \ge 0.$

Vì $\left[\frac{n}{4}\right]+2\le\frac{n}{4}+2\le\frac{n}{2}$ với mọi $n\ge 8$ nên $\left[\frac{n}{4}\right]+2\le\frac{n}{2}$ với mọi $n\ge 8$. Với $n=6$ hoặc $n=7$ thì

$\left[\frac{n}{4}\right]+2=\left[\frac{n}{2}\right]$. Do đó $s-t=\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]\ge 2$.

Xét các số nguyên dương

$$a_n-a_1>a_{n-1}-a_2>...>a_2-a_1$$

và $a_2+a_3<a_2+a_4<...<a_2+a_s<...<a_{s-1}+a_s$.

Số các số đang xét là

$$(n-1)+(s-2)+(s-t-2)=n+2s-t-5$$

$$=n+2\left(\left[\frac{n}{4}\right]+2\right)-\left(2-\left[\frac{n}{2}\right]+2\left[\frac{n}{4}\right]\right)-5=n-3+\left[\frac{n}{2}\right]=m.$$

Ta có:

$$a_n-a_i=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+...+(a_{i+1}-a_i)\ge n-i.$$

Suy ra $a_i\le a_n-n+i\le m-n+i$ với mọi $i=1,2,...,n-1$. Do đó

$$a_{s-1}+a_s\le m-n+s-t+m-n+s=2m-2n+2s-t$$

$$=2\left(n-3+\left[\frac{n}{2}\right]\right)-2n+2\left(\left[\frac{n}{4}\right]+2\right)-\left(2-\left[\frac{n}{2}\right]+2\left[\frac{n}{4}\right]\right)$$

$$=3\left[\frac{n}{2}\right]-4\le n+\left[\frac{n}{2}\right]-4=m-1.$$

Hơn nữa $a_n-a_1\le m-1$. Như vậy m số nguyên dương đang xét không vượt quá $m-1$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau. Hai số này phải có dạng a_i-a_1 và a_j+a_k với $2\le i\le n$ và $2\le j<k\le s$ nào đó, tức là $a_i-a_1=a_j+a_k$ hay $a_1=a_i-a_j-a_k$. Khi đó $a_i>a_k$ nên $i>k$. Bốn số a_1,a_i,a_j,a_k thỏa mãn đề bài. Vậy số nguyên lớn nhất thỏa mãn đề bài là $m=\left[\frac{3n-6}{2}\right]$.

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán số học khó, không có bạn nào giải được bài này.

NHƯ HOÀNG

Bài T11/501. *Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất để tồn tại hai dãy* $\{a_i\},\{b_i\}$ *thỏa mãn:*

a) $a_i,b_i\in\{1,2018,2018^2,2018^3,...\},i=1,2,...,k;$

b) $a_i\ne b_i\in\{1,2018,2018^2,2018^3,...\},i=1,2,...,k;$

c) $a_i\le a_{i+1},b_i\le b_{i+1};$

d) $\sum_{i=1}^{k}a_i=\sum_{i=1}^{k}a_i.$

Lời giải. (Theo *bạn Lê Chí Cường*, 10A8, THPT Cam Lộ, huyện Cam Lộ, tỉnh **Quảng Trị**).

Với $k=2019$, tồn tại hai dãy thỏa mãn bài toán là:

$$\left\{\underbrace{2018^n,2018^n,...,2018^n}_{2018\text{ số}},2018^{n+2}\right\}$$

và $\left\{\underbrace{2018^{n+1},2018^{n+1},...,2018^{n+1}}_{2019\text{ số}}\right\}$, $(n\in\mathbb{N})$.

Ta chứng minh $k=2019$ là số nguyên nhỏ nhất sao cho tồn tại hai dãy thỏa mãn bài toán.

Thật vậy, xét hai dãy số $\{a_i\},\{b_i\}$ bất kỳ thỏa mãn ba điều kiện a), b), c). Ta sẽ chứng minh hai dãy số này không thỏa mãn điều kiện d). Do điều kiện b) nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a_k<b_k$. Từ điều kiện a) suy ra: $a_k=2018^p,b_k=2018^{p+q}$ với $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}^*$. Do đó từ điều kiện c) ta có:

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\le ka_k=k.2018^p\le 2018^{p+1}\le 2018^{p+q}=b_k<\sum_{i=1}^{k}b_i.$$

Vậy điều kiện d) không xảy ra và ta có điều phải chứng minh.

➢***Nhận xét.*** 1) Với $k=2019$, có nhiều cách chọn hai dãy $\{a_i\},\{b_i\}$, chẳng hạn ngoài cách chọn như lời giải trên, ta có thể chọn:

$$a_1=a_2=...=a_{2018}=1,a_{2019}=2018^2;$$
$$b_1=b_2=...=b_{2019}=2018;...$$

2) Để chứng minh với $k\le 2018$ không tồn tại hai dãy $\{a_i\},\{b_i\}$ thỏa mãn bài toán, ta có thể lập luận như sau: Giả sử nếu có hai dãy $\{a_i\},\{b_i\}$ thỏa mãn bài toán, thì từ điều kiện b) có $a_1\ne b_1$, giả sử $a_1<b_1$. Từ điều kiện a) ta có

$$0 \le m < n : a_1 = 2018^m, b_1 = 2018^n.$$

Theo c) $b_1 < b_i\ \forall i = 1, ..., k$ và mỗi b_i là một lũy thừa của 2018 nên $\sum_{i=1}^{k} b_i \vdots 2018^n$. Từ d) có $\sum_{i=1}^{k} a_i \vdots 2018^n$.

Mà $0 \le m < n \Leftrightarrow m+1 \le n \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i \vdots 2018^{m+1}$, kết hợp với các điều kiện a), c), d) suy ra dãy $\{a_i\}$ phải thỏa mãn: $a_1 = a_2 = ... = a_t = 2018^m$ với $1 \le t < k$ và $a_j = 2018^p$ với $p \ge m+1, j = t+1, ..., k$

$$\Rightarrow \sum_{i=t+1}^{k} a_i \vdots 2018^{m+1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{t} a_i \vdots 2018^{m+1}$$

$$\Leftrightarrow t.2018^m \vdots 2018^{m+1} \Rightarrow t \ge 2018.$$

Điều này mâu thuẫn với $t < k \le 2018$. Suy ra đpcm.

3) Các bạn tham giải giải bài này chủ yếu giải theo một trong hai cách trên. Ngoài bạn *Cường*, các bạn có lời giải tốt là: **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì. **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên. **Bình Định:** *Nguyễn Bá Chinh*, 12A1, THPT Ngô Lê Tân, Phù Cát.

TRẦN HỮU NAM

Bài T12/501. *Cho tam giác ABC có $AB + AC = 2BC$ nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. Gọi M_a là trung điểm của BC. Chứng minh rằng các đường tròn đường kính HM_a và AO tiếp xúc với nhau.*

Lời giải. Ta cần có hai bổ đề.

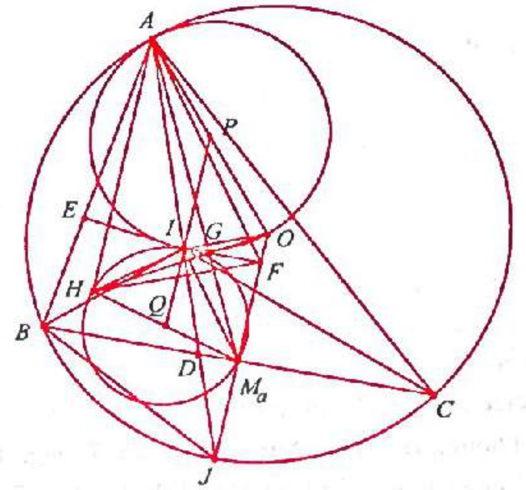
Bổ đề 1. Cho tam giác *ABC*, (*O*) là đường tròn ngoại tiếp, *I* là tâm đường tròn nội tiếp. *J* là giao điểm thứ hai của *AI* và (*O*). Khi đó $BJ = CJ = IJ$.

Bổ đề 2. Nếu *O, H, G* theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và trọng tâm của tam giác *ABC* thì *G* thuộc *OH* và $\dfrac{\overline{GO}}{\overline{GH}} = -\dfrac{1}{2}$.

Phép chứng minh các bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán T12.

Gọi *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*; *J* là giao điểm thứ hai của *AI* và (*O*); *D* là giao điểm của *AI* và *BC*; *E* là hình chiếu của *I* trên *AB*; *G* là trọng tâm của tam giác *ABC*; *F* là giao điểm của *IG* và *OJ*; *P*, *Q* theo thứ tự là trung điểm của *AO* và HM_a; (*P*), (*Q*) theo thứ tự là các đường tròn đường kính *AO* và HM_a.



Dễ thấy

$$AE = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{2BC - BC}{2} = \frac{BC}{2} = \frac{2BM_a}{2} = BM_a.$$

Từ đó, chú ý rằng $\widehat{AEI} = 90° = \widehat{BM_aJ}$, suy ra $\Delta AEI = \Delta BM_aJ$. Do đó $AI = BJ$.

Theo bổ đề 1, $BJ = IJ$.

Vậy $AI = IJ$ (1). Từ (1) suy ra $OI \perp AI$.

Điều đó có nghĩa là *I* thuộc (*P*) (2).

Từ (1), áp định lí Menelaus cho tam giác AJM_a, suy ra: $1 = \dfrac{\overline{FM_a}}{\overline{FJ}} . \dfrac{\overline{IJ}}{\overline{IA}} . \dfrac{\overline{GA}}{\overline{GM_a}} = \dfrac{\overline{FM_a}}{\overline{FJ}} .(-1).(-2) = 2.$

Do đó $FM_a = M_aJ$ (3).

Từ (1) và (3) suy ra $AF \parallel IM_a$ (4).

Dễ thấy

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AI}{DI} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB + AC}{DB + DC} = \frac{2BC}{BC} = 2 = \frac{AG}{M_aG} \quad (5).$$

Từ (1) và (5) suy ra *G* là trọng tâm của tam giác *AJF*. Do đó, theo bổ đề 2: $\dfrac{\overline{GI}}{\overline{GF}} = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{\overline{GO}}{\overline{GH}}$.

Vậy $OI \parallel HF$. Từ đó, chú ý rằng $OI \perp AI$, suy ra $AI \perp HF$.

Từ (5), chú ý rằng H là trực tâm của tam giác ABC, suy ra $FI \equiv GI \,//\, BC \perp AH$. Vậy I là trực tâm của tam giác AHF. Do đó $AF \perp IH$ (6).

Từ (4) và (6) suy ra $IM_a \perp IH$.

Điều đó có nghĩa là I thuộc (Q) (7).

Từ (1), chú ý rằng $AH \,//\, OM_a$, suy ra

$$PI \,//\, FJ \equiv OM_a \,//\, PQ.$$

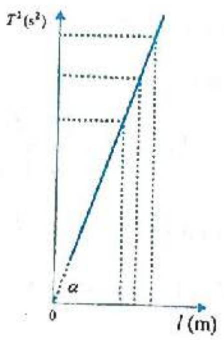
Nói cách khác P, I, Q thẳng hàng (8).

Từ (2), (7) và (8) suy ra (P), (Q) tiếp xúc với nhau (tại I).

Nhận xét. Bài toán này không khó, khá nhiều bạn tham gia giải. Xin nêu tên tất cả các bạn: **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Tất Đạt*, 9A1, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** *Ngô Văn Minh Thắng*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hà Tĩnh:** *Lê Đình Trí Tuệ*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Minh Châu, Nguyễn Duy Phước, Nguyễn Phước Minh, Hoàng Bảo Minh Châu*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Sóc Trăng:** *Lâm Khánh Hòa*, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Tấn Phúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/501. *Một học sinh thực hiện thí nghiệm kiểm chứng chu kì dao động điều hòa của con lắc đơn phụ thuộc vào chiều dài của con lắc. Từ kết quả thí nghiệm, học sinh này vẽ đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của T^2 vào chiều dài l của con lắc. Học sinh này đo được góc hợp bởi giữa đường thẳng đồ thị với trục Ol là $\alpha = 76{,}1^0$. Lấy $\pi = 3{,}14$, theo kết quả thí nghiệm của học sinh này, hãy xác định gia tốc trọng trường tại nơi làm thí nghiệm.*



Hướng dẫn giải. Từ đồ thị ta có:

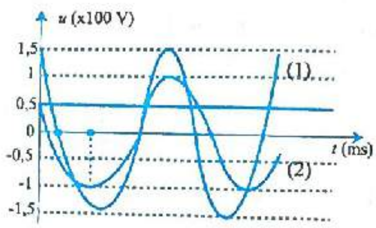
$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{l}{T^2} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4\pi^2}{\tan\alpha}$$

$$= \frac{4.3{,}14^2}{\tan 76{,}1^o} = 9{,}76 \text{ m/s}^2.$$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào tham gia giải bài này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/501. *Một cuộn cảm thuần L được mắc vào nguồn (1) thì cường độ dòng điện là 3 A. Nếu mắc L vào nguồn (2) thì cường độ dòng điện hiệu dụng qua mạch là bao nhiêu ? Biết đồ thị phụ thuộc thời gian của điện áp nguồn (1) và nguồn (2) được mô tả ở hình dưới.*



Lời giải. Từ đồ thị ta thấy:

$$\frac{T_1}{4} = 5.10^{-3} \Rightarrow T_1 = 0{,}02s\,;$$

$$\frac{T_2}{12} + \frac{T_2}{4} = \frac{25}{3}.10^{-3} \Rightarrow T_2 = 0{,}025s.$$

Xét U_1: $1{,}5.100 = 3.100\pi L \Rightarrow L = \dfrac{0{,}5}{\pi}(H)$.

$$U_2 = 1.100 = I.L.80\pi \Rightarrow I = 2{,}5(A).$$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào tham gia giải bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

TIN TỨC

Vào ngày 26/6/2019 tại Hà Nội *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* đã tổ chức buổi họp Hội đồng Biên tập Tạp chí. Đến dự buổi họp có các thành viên Ban Cố vấn khoa học Tạp chí: GS. *Đoàn Quỳnh*, GS.TSKH. *Trần Văn Nhung*; các Uỷ viên Hội đồng Biên tập và các cộng tác viên thân thiết: GS.TSKH. *Nguyễn Văn Mậu*, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội; TS. *Trần Đình Châu*, Bộ Giáo dục và Đào tạo, PGS. TS. *Vũ Dương Thụy*, PGS.TS. *Phan Doãn Thoại*, PGS.TS. *Tạ Duy Phượng*, PGS.TSKH. *Vũ Đình Hoà*, TS. *Nguyễn Việt Hải*,… Về phía NXBGD Việt Nam có: TS. *Phan Xuân Thành*, Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam, TS. *Trần Quang Vinh*, TS. *Đặng Thanh Hải*, Phó Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam cùng các Cán bộ Toà soạn Tạp chí. TS. *Trần Hữu Nam*, Tổng Biên tập Tạp chí TH&TT đã đọc báo cáo tình hình hoạt động của Tạp chí TH&TT 6 tháng đầu năm 2019 và phương hướng hoạt động trong thời gian tới. Trong buổi họp các Uỷ viên Hội đồng Biên tập đã đóng góp nhiều ý kiến quý báu về mặt nội dung nhằm khơi gợi niềm say mê, sáng tạo của các bạn trẻ yêu toán trên cả nước.

TS. *Phan Xuân Thành*, Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam đã phát biểu chúc mừng Tạp chí, một tờ báo có uy tín lâu năm của nhiều thế hệ học sinh đam mê toán học. Ông mong muốn tờ Tạp chí đến tay bạn đọc nhiều hơn nữa, góp phần vào việc phát hiện, bồi dưỡng các nhân tài toán học cho đất nước Việt Nam.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

PROBLEM… TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

(Tiếp theo trang 17)

Problem T10/505. A man using a map on his phone walked from the point A to the point B. He arrived B after a few straight walks and correspondingly a few rotations of the phone (to find the right directions). Assume that each time he needed to rotate his phone clockwisely an acute angle from the previous direction. Given that the sum of all the angles is α which is less than 180^0. Show that the total distance that he walked is less than or equal to $\dfrac{AB}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Problem T11/505. Given the real sequence (a_n) determined as follows

$$a_1 = 2020,\ a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}, \forall n \geq 1.$$

a) Prove that $2n < a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 2n + 2018$ for any arbitrary $n = 1, 2, \ldots$

b) Find the maximal real number a such that the inequality

$$\sqrt{x^2+a_1^2} + \sqrt{x^2+a_2^2} + \ldots + \sqrt{x^2+a_n^2} \geq n\sqrt{x^2+a^2}$$

holds for any given $x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots$

Problem T12/505. Given a triangle ABC which is not an isosceles triangle with the vertex angle A. Let M be on the side BC. Let I_1, I_2 respectively be the incenters of the triangles ABM, ACM. Assume that N, P, Q respectively be the second intersections between AM, AB, AC and the circumcircle of AI_1I_2. Let J_1, J_2 respectively be the incenters of the triangles APN, AQN. Prove that the radical center of the circumcircles of $AI_1I_2, AJ_1J_2, MI_1I_2$ belongs to BC.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science - Vietnam National University, Hanoi*)

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN XUẤT HIỆN TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC

TRẦN VĂN HẠNH
(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Các bài toán tích phân hay và khó trong các đề thi tự luận trước đây thì công cụ máy tính bỏ túi sẽ làm dễ đi. Vì lẽ đó nên trong các đề thi thử đại học ở các trường trung học phổ thông hiện nay có những bài toán tích phân hạn chế sử dụng máy tính bỏ túi. Trong bài viết này, chúng tôi xin đưa ra các dạng toán đó được giải với kiến thức ngoài chương trình phổ thông.

I. Dạng PT vi phân với biến số phân li

Biến đổi biểu thức cho về dạng

$$a(f(x))f'(x)dx = g(x)dx.$$

Lấy tích phân 2 vế ta được

$$A(f(x)) = G(x) + C \text{ với } C \in \mathbb{R},$$

trong đó $A(f(x))$ là nguyên hàm của $a(f(x))$ và $G(x)$ là nguyên hàm của $g(x)$.

Thí dụ 1.1. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(0) = 1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x}{x^2+1}$. Tính $f(2\sqrt{2}) - 2f(1)$.*

A. $3 - 2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** $4 - 2\sqrt{3}$.

Lời giải. Từ $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x}{x^2+1}$, lấy nguyên hàm 2 vế ta có: $\ln|f(x)| = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

Do $f(0) = 1$ nên $C = 0$. Do đó $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Vậy $f(2\sqrt{2}) - 2f(1) = 3 - 2\sqrt{2}$.

Thí dụ 1.2 (Đề thi THPT Quốc gia, 2018). *Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(2) = -\dfrac{2}{9}$ và $f'(x) = 2xf^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị $f(1)$ bằng*

A. $-\dfrac{35}{36}$ **B.** $-\dfrac{2}{3}$ **C.** $-\dfrac{19}{36}$ **D.** $-\dfrac{2}{15}$.

Lời giải. Ta có: $f'(x) = 2xf^2(x)$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x.$$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $-\dfrac{1}{f(x)} = x^2 + C$.

Do $f(2) = -\dfrac{2}{9}$ nên $C = \dfrac{1}{2}$. Suy ra:

$-\dfrac{1}{f(x)} = x^2 + \dfrac{1}{2}$. Vậy $f(1) = -\dfrac{2}{3}$.

Thí dụ 1.3. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và $f(x) > -1$, $f(0) = 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.*

A. 0 **B.** 3 **C.** 7 **D.** 9

Lời giải. Ta có: $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{3}} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{f(x)+1}\,\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{x^2+1}\,\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(\sqrt{3})+1} - \sqrt{f(0)+1} = \sqrt{3+1} - \sqrt{0^2+1}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3}) = 3.$$

Thí dụ 1.4. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên $[0;1]$ thỏa mãn*

$$f^4(x).[f'(x)]^2.(x^2+1) = 1 + f^3(x) \text{ và } f(x) > 0,$$

$\forall x \in [0;1]$. Biết $f(0) = 2$, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $3 < f(1) < \dfrac{7}{2}$ **B.** $\dfrac{5}{2} < f(1) < 3$

C. $\dfrac{3}{2} < f(1) < 2$ **D.** $2 < f(1) < \dfrac{5}{2}$.

Lời giải. Ta có: $f^4(x).[f'(x)]^2.(x^2+1) = 1 + f^3(x)$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)f'(x)}{\sqrt{1+f^3(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Lấy nguyên hàm 2 về ta được :

$$\frac{2}{3}\sqrt{1+f^3(x)} = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C.$$

Thay $x = 0$ ta được $C = 2$. Do đó:

$$\frac{2}{3}\sqrt{1+f^3(x)} = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + 2.$$

Thay $x = 1$ ta được:

$$\frac{2}{3}\sqrt{1+f^3(1)} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + 2$$

$$\Rightarrow f^3(1) = \left[\frac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+3\right]^2 - 1 \Rightarrow f(1) \approx 2,6.$$

II. Sử dụng bất đẳng thức tích phân

- Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $f(x) \ge 0$, $\forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.
- Nếu $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $f(x) \ge g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

Thí dụ 2.1. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $3f(x) + xf'(x) \ge x^{2019}, \forall x \in [0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng*

A. $\dfrac{1}{2021.2022}$ **B.** $\dfrac{1}{2018.2021}$

C. $\dfrac{1}{2019.2021}$ **D.** $\dfrac{1}{2020.2022}$.

Lời giải. Ta có: $3f(x) + xf'(x) \ge x^{2019}$

$$\Rightarrow 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) \ge x^{2021}$$

$$\Rightarrow \left(x^3 f'(x)\right)' \ge x^{2021}$$

Do đó: $\int_0^t \left(x^3 f(x)\right)' dx \ge \int_0^t x^{2021} dx,\ \forall t \in [0;1]$

$$\Rightarrow x^3 f(x)\Big|_0^t \ge \frac{x^{2022}}{2022}\Big|_0^t \Rightarrow t^3 f(t) \ge \frac{t^{2022}}{2022}$$

$$\Rightarrow f(t) \ge \frac{t^{2019}}{2022} \text{ hay } f(x) \ge \frac{x^{2019}}{2022}.$$

Suy ra: $\int_0^1 f(x)dx \ge \int_0^1 \dfrac{x^{2019}}{2022}dx = \dfrac{1}{2020.2022}$.

Thí dụ 2.2. *Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, đặt $g(x) = 1 + 3\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x) \ge f^2(x), \forall x \in [0;1]$, giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 \sqrt{g(x)}dx$ bằng*

A. $\dfrac{5}{2}$ **B.** $\dfrac{4}{3}$ **C.** $\dfrac{7}{4}$ **D.** $\dfrac{9}{5}$.

Lời giải. Từ $g(x) = 1 + 3\int_0^x f(t)dt$

$$\Rightarrow g(x) \ge 1,\ g(0) = 1 \text{ và } g'(x) = 3f(x).$$

Từ $g(x) \ge f^2(x) \Rightarrow \sqrt{g(x)} \ge f(x) = \dfrac{1}{3}g'(x)$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} \le 3. \text{ Do đó:}$$

$$\int_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}dx \le 3\int_0^t dx \Rightarrow 2\sqrt{g(t)} - 2 \le 3t$$

hay $\sqrt{g(x)} \le \dfrac{3}{2}x + 1$.

Vậy $\int_0^1 \sqrt{g(x)}dx \le \int_0^1 \left(\dfrac{3}{2}x+1\right)dx = \dfrac{7}{4}$.

Thí dụ 2.3. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm dương và liên tục trên $[0,1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(0) = 1$ và*

$$3\int_0^1 \left[f'(x)f^2(x) + \frac{1}{9}\right]dx \le 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx.$$

Tính $\int_0^1 f^3(x)dx$.

A. $\dfrac{3}{2}$ **B.** $\dfrac{5}{4}$ **C.** $\dfrac{5}{6}$ **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải. Ta có:

$$3\int_0^1 \left[f'(x)f^2(x) + \frac{1}{9}\right]dx \le 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)}f(x)-\frac{1}{3}\right]^2 dx \le 0.$$

Suy ra: $\sqrt{f'(x)}f(x)-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow f^2(x)f'(x)=\frac{1}{9}.$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $f^3(x)=\frac{1}{3}x+C.$

Do $f(0)=1$ nên $C=1$.

Vậy $\int_0^1 f^3(x)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x+1\right)dx=\frac{7}{6}.$

III. Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky

Chứng minh rằng nếu $f(x), g(x)$ là 2 hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì ta có:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx. \quad (1)$$

Chứng minh. Ta có: $(tf(x)+g(x))^2 \ge 0, \forall t\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow t^2f^2(x)+2tf(x)g(x)+g^2(x)\ge 0.$$

Lấy tích phân 2 vế ta có:

$$t^2\int_a^b f^2(x)dx+2t\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\ge 0,$$

$\forall t\in\mathbb{R}$.

Do tam thức bậc 2 đúng với mọi t nên

$$\Delta'\le 0 \Leftrightarrow \left(\int_a^b f(x)g(x)\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $g(x)=-tf(x), t\in\mathbb{R}$.

Thí dụ 3.1. *Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1,1]$ thỏa mãn $\int_{-1}^1 f^2(x)dx\le 2$ và $\int_{-1}^1 f(x)dx=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $I=\int_{-1}^1 x^2f(x)dx$.*

A. $-\frac{4\sqrt{5}}{15}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{15}$ **D.** -1.

Lời giải. Ta có:

$$I=\int_{-1}^1 x^2f(x)dx=\int_{-1}^1(x^2-t)f(x)dx, \forall t\in\mathbb{R}.$$

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$I^2=\left(\int_{-1}^1(x^2-t)f(x)dx\right)^2\le\int_{-1}^1(x^2-t)^2dx\int_{-1}^1 f^2(x)dx$$

$$\le 4\int_0^1(x^2-t)^2dx=4\int_0^1(x^4-2x^2t+t^2)dx$$

$$=4\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{1}{5}\right), \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow I^2\le\min_{t\in\mathbb{R}}4\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{1}{5}\right)=\frac{16}{45}$$

$$\Rightarrow -\frac{4\sqrt{5}}{15}\le I\le\frac{4\sqrt{5}}{15}.$$ Vậy $\min(I)=-\frac{4\sqrt{5}}{15}.$

Thí dụ 3.2. *Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$ và $\int_0^1\frac{[f'(x)]^2}{e^x}dx=\frac{1}{e-1}$. Tính $I=\int_0^1 f(x)dx$.*

A. $\frac{e-2}{e-1}$ **B.** $\frac{e-1}{e-2}$ **C.** 1 **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}\right)^2dx.\int_0^1\left(\sqrt{e^x}\right)^2dx\ge\left(\int_0^1 f'(x)dx\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{e-1}(e-1)\ge(f(1)-f(0))^2=1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}=t\sqrt{e^x}, t\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'(x)=te^x\Rightarrow\int_0^1 f'(x)dx=t\int_0^1 e^xdx$$

$$\Rightarrow f(1)-f(0)=t(e-1)$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{e-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^x}{e-1}.$$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$f(x)=\frac{e^x}{e-1}+C$. Do $f(0)=0$ nên $C=-\frac{1}{e-1}$.

Do đó $f(x)=\frac{e^x-1}{e-1}$. Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\frac{e-2}{e-1}.$

Thí dụ 3.3. *Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1[f'(x)]^2dx=\frac{1}{11}$ và $\int_0^1 x^4f(x)dx=-\frac{1}{55}$.*

Tính $\int_0^1 f(x)\,dx$.

A. $-\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{-1}{55}$ D. $\frac{1}{11}$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^4 dx \end{cases}$, ta có: $\begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{x^5}{5} \end{cases}$.

Do đó:

$$-\frac{1}{55} = \int_0^1 x^4 f(x)\,dx = \frac{x^5}{5} f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{5}\int_0^1 x^5 f'(x)\,dx$$

$\Rightarrow \int_0^1 x^5 f'(x)\,dx = \frac{1}{11}$. Áp dụng bất đẳng thức (1) có: $\left(\frac{1}{11}\right)^2 = \left(\int_0^1 x^5 f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 x^{10}dx.\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$

$$= \frac{1}{11}.\frac{1}{11}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $f'(x) = tx^5,\ t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\int_0^1 x^5 f'(x)\,dx = \frac{1}{11} \Rightarrow \int_0^1 x^5 t x^5\,dx = \frac{1}{11}$

$$\Rightarrow t\frac{x^{11}}{11}\Big|_0^1 = \frac{1}{11} \Rightarrow t = 1.$$

Suy ra: $f'(x) = x^5 \Rightarrow f(x) = \frac{x^6}{6} + C$

mà $f(1) = 0$ nên $C = -\frac{1}{6}$.

Do đó: $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{6}\left(x^6 - 1\right)dx = -\frac{1}{7}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, đặt $g(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x) \le \sqrt{f(x)},\ \forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{g(x)}$ bằng

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{2}{8}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, đặt $g(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x) \ge [f(x)]^3,\ \forall x \in [0;1]$ giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{g^2(x)}dx$ bằng

A. $\frac{5}{3}$ B. 4 C. $\frac{4}{3}$ D. 5.

3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{6}{5}$.

4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x dx = \frac{\pi}{4}$. Tính $f(2018\pi)$.

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1.

5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0,1]$, $f(x), f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0,1]$ thỏa mãn các điều kiện $f(0) = 2$ và $\int_0^1 \left[f'(x)f^2(x) + 1\right]dx = 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx$.

Tính $\int_0^1 f^3(x)dx$.

A. $\frac{15}{4}$ B. $\frac{15}{2}$ C. $\frac{17}{2}$ D. $\frac{19}{2}$.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC KARAMATA ĐỂ CHỨNG MINH VÀ SÁNG TẠO CÁC BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

HOÀNG MINH QUÂN (*GV THPT Ngọc Tảo, Hà Nội*)

Bất đẳng thức Karamata là một bất đẳng thức quan trọng và có rất nhiều ứng dụng trong chứng minh các bất đẳng thức hay tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm nhiều biến. Đặc biệt, trong việc chứng minh các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác. Bài báo trình bày một số ví dụ minh họa thể hiện vẻ đẹp cũng như tính ngắn gọn và cách sáng tạo ra bài toán mới mà bất đẳng thức Karamata mang lại.

1. Hàm lồi

Định nghĩa 1.1 (Hàm lồi). Hàm số $f(x)$ được gọi là *lồi* trên tập $[a;b]\subset\mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1,x_2\in[a,b]$ và với mọi cặp số dương α,β có tổng $\alpha+\beta=1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)\le\alpha f(x_1)+\beta f(x_2).\qquad(1.1)$$

Nếu dấu đẳng thức trong (1.1) xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là *hàm lồi chặt* trên $[a,b]$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là *lõm* trên $[a;b]\subset\mathbb{R}$ nếu $-f(x)$ là hàm lồi trên $[a;b]\subset\mathbb{R}$. Tương tự, ta cũng có định nghĩa về hàm lồi (lõm) trên các tập (a,b), $(a,b]$ và $[a,b)$.

Dưới đây, ta ký hiệu $I(a,b)$ là một trong bốn tập hợp (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ và $[a,b]$.

Định lí 1.1 (Tiêu chuẩn hàm lồi). Hàm $f(x)$ có đạo hàm bậc hai trên $I(a,b)$ là lồi khi và chỉ khi $f''(x)\ge 0$ với mọi $x\in I(a,b)$.

Một số ví dụ

Thí dụ 1.1 Hàm số $f(x)=\sqrt{\cos x}$ có

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}};$$

$$f''(x)=-\frac{\sqrt{\cos x}}{2}-\frac{\sin^2 x}{4.\cos x.\sqrt{\cos x}}<0$$

nên là hàm lõm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Thí dụ 1.2. Hàm số $f(x)=\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{1+\sin\frac{x}{2}}$ có

$$f'(x)=\frac{-1}{2+2\sin\frac{x}{2}};\ f''(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}}{(2+2\sin\frac{x}{2})^2}>0$$

trên $(0,\pi)$ nên là hàm lồi trên $(0,\pi)$.

Thí dụ 1.3. Hàm số $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{\sin x}\right)$ có

$$f'(x)=\frac{-\cot x}{1+\sin x};\ f''(x)=\frac{1+\sin x+\sin x.\cos^2 x}{\sin^2 x(1+\sin x)^2}>0$$

nên là hàm lồi trên $(0,\pi)$.

Thí dụ 1.4. Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ là hàm lồi trên $(0,\pi)$.

Thí dụ 1.5. Hàm số $f(x)=\sin x$ có

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x$$

nên là hàm lõm trên $(0;\pi)$.

2. Bất đẳng thức Karamata

Định nghĩa 2.1 (Các bộ trội). Cho hai bộ số $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ và $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$. Ta nói rằng bộ x trội hơn bộ y và ta viết $x\succ y$ hoặc $y\prec x$ nếu chúng thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(1) $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n$ và $y_1 \ge y_2 \ge ... \ge y_n$;

(2) $x_1 + x_2 + ... + x_k \ge y_1 + y_2 + ... + y_k$, $\forall k = \overline{1, n-1}$;

(3) $x_1 + x_2 + ... + x_n = y_1 + y_2 + ... + y_n$.

Định lí 2.1 (Bất đẳng thức Karamata).

Cho hai bộ số thực $(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $(y_1, y_2, ..., y_n)$, $(x_i, y_i \in I(a,b))$ thỏa mãn điều kiện $x \succ y$. Khi đó, với mọi hàm lồi chặt f ta đều có

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$$
$$\ge f(y_1) + f(y_2) + ... + f(y_n). \quad (2.1)$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh BĐT Karamata cho trường hợp $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ là hàm lồi nhờ sử dụng phương pháp quy nạp toán học,.

Bước 1. Với $n = 2$, không hạn chế tổng quát, coi $x = (x_1, x_2)$ với $x_1 \ge x_2$ và $y = (y_1, y_2)$ với $y_1 \ge y_2$. Vì $x \succ y$ nên ta có

$x_1 \ge y_1$, $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Leftrightarrow y_2 = (x_1 - y_1) + x_2 \ge x_2$.

Như vậy, $x_1 \ge y_1 \ge y_2 \ge x_2$.

Vì $y_1 \in [x_2; x_1]$ nên tồn tại $\alpha \in [0;1]$ sao cho $y_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$. Khi đó:

$$y_2 = x_1 + x_2 - y_1 = x_1 + x_2 - (\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)$$
$$= (1-\alpha) x_1 + \alpha x_2.$$

Do f là hàm lồi, theo (1.1) ta có:

$$f(y_1) + f(y_2) = f[\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2] + f[(1-\alpha) x_1 + \alpha x_2]$$
$$\le [\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)] + [(1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2)]$$
$$= f(x_1) + f(x_2).$$

Vậy BĐT(2.1) đúng trong trường hợp $n = 2$.

Bước 2. Giả sử BĐT(2.1) đúng với n, tức là nếu

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, ..., x_n) \\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \text{với} \begin{cases} x_i \ge x_{i+1}, \forall i = \overline{1, n-1} \\ y_i \ge y_{i+1}, \forall i = \overline{1, n-1} \end{cases}$$

và $\begin{cases} \sum_{k=1}^{m} x_k \ge \sum_{k=1}^{m} y_k, \forall m = \overline{1, n-1} \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = y_1 + y_2 + ... + y_n \end{cases}$

và f là hàm lồi thì ta có

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$$
$$\ge f(y_1) + f(y_2) + ... + f(y_n).$$

Ta sẽ chứng minh BĐT(2.1) đúng với $n+1$, tức là nếu có

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) \\ y = (y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}) \end{cases} \text{với} \begin{cases} x_i \ge x_{i+1}, \forall i = \overline{1, n} \\ y_i \ge y_{i+1}, \forall i = \overline{1, n} \end{cases}$$

và $\begin{cases} \sum_{k=1}^{m} x_k \ge \sum_{k=1}^{m} y_k, \forall m = \overline{1, n} \\ x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} = y_1 + y_2 + ... + y_n + y_{n+1} \end{cases}$

thì ta sẽ chứng minh:

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) + f(x_{n+1})$$
$$\ge f(y_1) + f(y_2) + ... + f(y_n) + f(y_{n+1}). \quad (2.2)$$

Vì $x_1 \ge y_1$ và $x_1 + x_2 = y_1 + (x_1 + x_2 - y_1)$ nên theo chứng minh trong bước 1, ta có

$$f(x_1) + f(x_2) \ge f(y_1) + f(x_1 + x_2 - y_1).$$

Do đó ta có:

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) + f(x_{n+1})$$
$$= [f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_3) + ... + f(x_n) + f(x_{n+1})]$$
$$\ge [f(y_1) + f(x_1 + x_2 - y_1)]$$
$$+ f(x_3) + ... + f(x_n) + f(x_{n+1}) = f(y_1)$$
$$+ [f(x_1 + x_2 - y_1) + f(x_3) + ... + f(x_n) + f(x_{n+1})].$$

Do $(x_1 + x_2 - y_1, x_3, ..., x_{n+1}) \succ (y_2, y_3, ..., y_{n+1})$ nên theo giả thiết qui nạp ta có:

$$[f(x_1 + x_2 - y_1) + f(x_3) + ... + f(x_n) + f(x_{n+1})]$$
$$\ge f(y_2) + ... + f(y_n) + f(y_{n+1}).$$

Vậy cuối cùng ta có

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) + f(x_{n+1})$$
$$\ge f(y_1) + [f(x_1 + x_2 - y_1) + f(x_3) + ... + f(x_n) + f(x_{n+1})]$$
$$\ge f(y_1) + f(y_2) + ... + f(y_n) + f(y_{n+1}).$$

Vậy bất đẳng thức (2.2) được chứng minh. Theo nguyên lý quy nạp, bất đẳng thức (2.1) được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_i = y_i$, $\forall i = \overline{1, n}$.

3. Sắp thứ tự trong tam giác

Nếu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ là các góc của tam giác thì

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi.$$

Không mất tổng quát, giả sử $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \alpha_3$.

Nhận xét 3.1. Với mọi tam giác thì

$$(\pi, 0, 0) \succ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \succ \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \quad (1)$$

Nhận xét 3.2. Với tam giác có ba góc nhọn thì

$$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right)\succ(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\succ\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \qquad (2)$$

Nhận xét 3.3. Với tam giác tù thì

$$(\pi,\pi,0)\succ(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\succ\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) \qquad (3)$$

Chứng minh. a) Vì $\alpha_1\ge\alpha_2\ge\alpha_3$ nên

$$\begin{cases}3\alpha_1\ge\pi\\3\alpha_3\le\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1\ge\dfrac{\pi}{3}\\ \alpha_3\le\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1\ge\dfrac{\pi}{3}\\ \alpha_1+\alpha_2=\pi-\alpha_3\ge\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi.\end{cases}$$

Vậy $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\succ\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$. Mặt khác

$$\begin{cases}\alpha_1<\pi\\ \alpha_1+\alpha_2<\pi+0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi+0+0\end{cases}\quad\text{nên } (\pi,0,0)\succ(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3).$$

b) Theo câu a) ta có $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\succ\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

Vì tam giác có ba góc nhọn nên

$$\begin{cases}\alpha_1<\dfrac{\pi}{2}\\ \alpha_1+\alpha_2<\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}+0.\end{cases}$$

Do đó $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right)\succ(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

c) Vì tam giác là tù nên

$$\begin{cases}\alpha_1>\dfrac{\pi}{2}\\ \alpha_3\le\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1>\dfrac{\pi}{2}\\ \alpha_1+\alpha_2=\pi-\alpha_3\ge\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi.\end{cases}$$

Do đó $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\succ\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

Mặt khác theo câu a) ta có $(\pi,0,0)\succ(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

Từ đó ta có $(\pi,0,0)\succ(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\succ\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Phát hiện và chứng minh các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác

Thí dụ 4.1. *Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ta luôn có*

$$1<\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos A}<\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Lời giải. Giả sử $A\ge B\ge C$. Theo nhận xét 3.2, với mọi tam giác có ba góc nhọn ta có

$$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right)\succ(A,B,C)\succ\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right).$$

Áp dụng BĐT Karamata cho hàm lõm $f(x)=\sqrt{\cos x}$ (Thí dụ 1.1) ta được:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\ge f(A)+f(B)+f(C)$$
$$\ge f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(0)$$

hay $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\ge\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\ge 1$.

Dấu bằng ở BĐT thứ nhất xảy ra tại $A=B=C=\frac{\pi}{3}$. Ở BĐTthư hai dấu bằng không xảy ra. Vậy ta có

$$1<\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Thí dụ 4.2. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có bất đẳng thức sau:*

$$\sqrt{3}\le\frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{C}{2}}<2.$$

Lời giải. Giả sử $A\ge B\ge C$. Với mọi tam giác ABC ta có $(\pi,0,0)\succ(A,B,C)\succ\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

Áp dụng BĐT Karamata cho hàm lồi $f(x)=\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{1+\sin\frac{x}{2}}$ trên $(0,\pi)$ (Thí dụ 1.2) ta được:

$$3.f\left(\frac{\pi}{3}\right)\le f(A)+f(B)+f(C)\le f(\pi)+2f(0)$$

hay $\sqrt{3} \le \dfrac{\cos\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}} + \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{C}{2}} \le 2.$

Dấu '=' xảy ra ở BĐT thứ nhất khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ hay tam giác ABC đều. Dấu '=' ở BĐT thứ hai không xảy ra. Vậy

$$\sqrt{3} \le \frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{C}{2}} < 2.$$

Thí dụ 4.3. *Cho tam giác ABC tù. Chứng minh rằng*

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin A}\right) \ge 6+4\sqrt{2}.$$

Lời giải. Giả sử $A \ge B \ge C$. Theo nhận xét 3.3

$$(\pi,0,0) \succ (A,B,C) \succ \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Karamata với hàm lồi $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{\sin x}\right)$, trên $(0,\pi)$ (Thí dụ 1.3), ta được: $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \le f(A)+f(B)+f(C)$

hay $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)$

$\le \ln\left(1+\dfrac{1}{\sin A}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{\sin B}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{\sin C}\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left[\left(1+\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)\right]\left(1+\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)$

$\le \ln\left[\left(1+\dfrac{1}{\sin A}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sin B}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sin C}\right)\right]$

$\Rightarrow 6+4\sqrt{2} \le \left(1+\dfrac{1}{\sin A}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sin B}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sin C}\right).$

Dấu'=' xảy ra khi $A=\dfrac{\pi}{2}, B=C=\dfrac{\pi}{4}.$

Thí dụ 4.4. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có*

$$\frac{h_a}{bc.\sin A}+\frac{h_b}{ac.\sin B}+\frac{h_c}{ab.\sin C} \ge \frac{\sqrt{3}}{R}. \qquad (1)$$

Lời giải. Ta có

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{abc}{4R} \Rightarrow \frac{h_a}{bc} = \frac{1}{2R} \Rightarrow \frac{h_a}{bc.\sin A} = \frac{1}{2R.\sin A}$$

Vậy (1) được viết lại thành

$$\frac{1}{2R.\sin A}+\frac{1}{2R.\sin B}+\frac{1}{2R.\sin C} \ge \frac{\sqrt{3}}{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C} \ge 2\sqrt{3}.$$

Ta có $(\pi,0,0) \succ (A,B,C) \succ \left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right).$

Áp dụng BĐT Karamata cho hàm lõm $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ ta có: $f(A)+f(B)+f(C) \ge 3f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

hay $\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C} \ge 2\sqrt{3}.$

Dấu'=' xảy ra khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}.$

Thí dụ 4.5. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có* $\sin A+\sin B+\sin C \le \cos\left(\dfrac{A+B}{4}\right)+\cos\left(\dfrac{C+B}{4}\right)+\cos\left(\dfrac{A+C}{4}\right).$

Lời giải. BĐT đã cho được viết lại thành

$\sin A+\sin B+\sin C$

$$\le \sin\left(\frac{\pi+C}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi+B}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi+A}{4}\right)$$

Giả sử $A \ge B \ge C$, suy ra:

$A \ge \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow A \ge \dfrac{\pi+A}{4};$

$C \le \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow A+B \ge \dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow A+B \ge \dfrac{\pi+A}{4}+\dfrac{\pi+B}{4}.$

Do đó $(A,B,C) \succ \left(\dfrac{\pi+A}{4},\dfrac{\pi+B}{4},\dfrac{\pi+C}{4}\right).$

Áp dụng BĐT Karamata cho hàm lõm $f(x)=\sin x$ trên $(0;\pi)$ ta được:

$\sin A+\sin B+\sin C$

$$\le \sin\left(\frac{\pi+C}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi+B}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi+A}{4}\right).$$

Dấu '=' xảy ra khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$.

Thí dụ 4.6. *Chứng minh với mọi tam giác ABC, ta có*

$$1<\sin^{\alpha}\frac{A}{2}+\sin^{\alpha}\frac{B}{2}+\sin^{\alpha}\frac{C}{2}\le\frac{3}{2^{\alpha}} \text{ với } 0<\alpha\le 1.$$

Lời giải. Với mọi tam giác ABC, ta có

$$(\pi,0,0)\succ(A,B,C)\succ\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right).$$

Xét hàm số $f(x)=\sin^{\alpha}\dfrac{x}{2}$ trên $(0;\pi)$.

Với $1\ge\alpha>0$ *thì* $f(x)=\sin^{\alpha}\dfrac{x}{2}$ *là hàm lõm.*

Áp dụng BĐT Karamata ta có

$$f(\pi)+2f(0)\le f(A)+f(B)+f(C)\le 3.f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

hay $\sin^{\alpha}\dfrac{\pi}{2}+2.\sin^{\alpha}(0)\le\sin^{\alpha}\dfrac{A}{2}+\sin^{\alpha}\dfrac{B}{2}+\sin^{\alpha}\dfrac{C}{2}$

$$\le 3.\sin^{\alpha}\frac{\pi}{6}$$

hay $1\le\sin^{\alpha}\dfrac{A}{2}+\sin^{\alpha}\dfrac{B}{2}+\sin^{\alpha}\dfrac{C}{2}\le 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\alpha}$.

Dấu '=' ở BĐT thứ nhất không xảy ra. Dấu "=" ở BĐT thứ hai xảy ra khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$.

Vậy $1<\sin^{\alpha}\dfrac{A}{2}+\sin^{\alpha}\dfrac{B}{2}+\sin^{\alpha}\dfrac{C}{2}\le 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\alpha}$.

Thí dụ 4.7. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}.$$

Lời giải. Ta có: $(A,B,C)\succ\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin x}}$ là hàm lồi trên $(0;\pi)$.

Áp dụng BĐT Karamata với hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin x}}$ ta được:

$$f(A)+f(B)+f(C)\ge 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}\ge\frac{3.1}{1+\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$.

Thay lời kết. Thông qua các thí dụ trên, ta thấy việc sử dụng bất đẳng thức Karamata trong chứng minh bất đẳng thức lượng giác trong tam giác cho lời giải ngắn gọn, đồng thời để sáng tác bài toán mới, ta chỉ cần xây dựng các hàm lồi (lõm) và kết hợp các bộ trội (Định lí 2.1) để xây dựng và chứng minh nhiều bất đẳng thức mới. Sau đây là một số bài toán để các bạn luyện tập.

5. Bài tập (Chứng minh bằng bất đẳng thức Karramuta hoặc bằng các phương pháp khác).

Bài 5.1. Cho $n\ge 4, 0\le a_i\le\dfrac{\pi}{2}, i=1,2,...,n.$ Kí hiệu $S:=\sum_{i=1}^{n}a_i\le 2\pi$. Chứng minh rằng

$$4\le\sum_{i=1}^{n}\sin a_i\le n\sin\frac{S}{n}.$$

Bài 5.2. Cho tam giác ABC có ba góc trong lần lượt là $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. Chứng minh rằng:

1) $0<\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

2) $0<\sqrt{\sin\alpha_1}+\sqrt{\sin\alpha_2}+\sqrt{\sin\alpha_3}\le 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$.

3) $0<\sin\alpha_1.\sin\alpha_2.\sin\alpha_3\le\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

4) $\dfrac{3}{4}\le\sin^2\left(\dfrac{\alpha_1}{2}\right)+\sin^2\left(\dfrac{\alpha_2}{2}\right)+\sin^2\left(\dfrac{\alpha_3}{2}\right)<1$.

5) $0<\sin\dfrac{\alpha_1}{2}.\sin\dfrac{\alpha_2}{2}+\sin\dfrac{\alpha_1}{2}.\sin\dfrac{\alpha_3}{2}+\sin\dfrac{\alpha_2}{2}.\sin\dfrac{\alpha_3}{2}\le\dfrac{3}{4}$.

Bài 5.3. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh:

1) $2 < \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2) $2 < \sqrt{\sin\alpha_1} + \sqrt{\sin\alpha_2} + \sqrt{\sin\alpha_3} \le 3\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$.

3) $0 < \sin\frac{\alpha_1}{2}.\sin\frac{\alpha_2}{2}.\sin\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{1}{8}$.

4) $\frac{1}{2} < \sin\frac{\alpha_1}{2}.\sin\frac{\alpha_2}{2} + \sin\frac{\alpha_1}{2}.\sin\frac{\alpha_3}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2}.\sin\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{3}{4}$.

Bài 5.4. Cho tam giác ABC tù, có ba góc trong lần lượt là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Chứng minh rằng:

1) $0 < \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 < 1 + \sqrt{2}$.

2) $0 < \sqrt{\sin\alpha_1} + \sqrt{\sin\alpha_2} + \sqrt{\sin\alpha_3} < 1 + (2)^{\frac{3}{4}}$.

3) $0 < \sin\alpha_1.\sin\alpha_2.\sin\alpha_3 < \frac{1}{2}$.

4) $0 < \sin\frac{\alpha_1}{2}.\sin\frac{\alpha_2}{2} + \sin\frac{\alpha_1}{2}.\sin\frac{\alpha_3}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2}.\sin\frac{\alpha_3}{2}$

$$< \frac{2-\sqrt{2}}{4} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}.$$

Bài 5.5. Cho tam giác ABC có 3 góc trong lần lượt là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Chứng minh rằng:

1) $2 < \cos\frac{\alpha_1}{2} + \cos\frac{\alpha_2}{2} + \cos\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2) $2 < \cos^2\frac{\alpha_1}{2} + \cos^2\frac{\alpha_2}{2} + \cos^2\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{9}{2}$.

3) $\cos\alpha_1.\cos\alpha_2.\cos\alpha_3 \le \frac{1}{8}$.

4) $0 < \cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

5) $\cos\alpha_1.\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1.\cos\alpha_3 + \cos\alpha_2.\cos\alpha_3 \le \frac{3}{4}$.

Bài 5.6. Cho tam giác ABC nhọn, có ba góc trong lần lượt là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Chứng minh rằng:

1) $0 < \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 \le \frac{3}{2}$.

2) $\frac{1}{2} < \cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Bài 5.7. Cho tam giác ABC tù, có ba góc trong lần lượt là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Chứng minh rằng:

$$0 < \cos\frac{\alpha_1}{2}.\cos\frac{\alpha_2}{2}.\cos\frac{\alpha_3}{2} < \frac{1+\sqrt{2}}{4}.$$

Bài 5.8. Cho tam giác ABC không nhọn có ba góc trong lần lượt là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. CMR

$$\tan\frac{\alpha_1}{2} + \tan\frac{\alpha_2}{2} + \tan\frac{\alpha_3}{2} \ge 2\sqrt{2} - 1.$$

Bài 5.9. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng với mọi $m \ge 1$ ta có:

1) $\tan^m\alpha_1 + \tan^m\alpha_2 + \tan^m\alpha_3 \ge 3^{\frac{m+2}{2}}$.

2) $3^{-\frac{m-2}{2}} \le \tan^m\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \tan^m\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) + \tan^m\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)$.

3) $0 < \tan\frac{\alpha_1}{2}.\tan\frac{\alpha_2}{2}.\tan\frac{\alpha_3}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Bài 5.10. (Hệ quả của Bài 5.9) Cho tam giác ABC nhọn, có ba góc trong lần lượt là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Khi ấy:

1) $\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2 + \tan\alpha_3 \ge 3\sqrt{3}$.

2) $\tan^2\alpha_1 + \tan^2\alpha_2 + \tan^2\alpha_3 \ge 9$.

3) $\sqrt{3} \le \tan\frac{\alpha_1}{2} + \tan\frac{\alpha_2}{2} + \tan\frac{\alpha_3}{2}$.

4) $\tan^2\frac{\alpha_1}{2} + \tan^2\frac{\alpha_2}{2} + \tan^2\frac{\alpha_3}{2} \ge 1$.

KHÔNG AI ĐUỔI ĐƯỢC CHÚNG TA RA KHỎI THIÊN ĐƯỜNG CỦA LÝ THUYẾT TẬP HỢP

NGUYỄN THỦY THANH
(GV Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Câu hỏi đầu tiên hoàn toàn hợp lý cần có câu trả lời là: Tập hợp là gì? Tiếc thay, ít nhất là đến nay không thể đưa ra định nghĩa chặt chẽ về tập hợp.

Khái niệm tập hợp thuộc vào số những khái niệm đơn giản nhất của toán học, không định nghĩa được qua các khái niệm khác mà chỉ có thể mô tả, giải thích thông qua các ví dụ. Các đối tượng tạo nên tập hợp được gọi là phần tử của tập hợp đó. Một tập hợp được xác định nếu hoặc liệt kê ra tất cả các phần của nó hoặc chỉ rõ dấu hiệu đặc trưng để phân biệt các phần tử của tập hợp với các đối tượng không phải là phần tử của tập hợp.

Khái niệm tập hợp hữu hạn phần tử đơn giản đến nỗi ngày nay người ta đã cho các em học sinh tiểu học làm quen, trải nghiệm trong giờ học, giờ chơi. Đó là những tập hợp mà khi đếm lần lượt các phần tử của nó tới một lúc nào đó các em đếm được phần tử cuối cùng. Tập hợp này được gọi là tập hợp hữu hạn.

Bên cạnh đó còn tồn tại những tập hợp mà khi đếm: mãi mãi vẫn còn những phần tử chưa được đếm tới. Tập hợp loại này có tên gọi là tập hợp vô hạn phần tử. Vậy vô hạn là gì? Đó là câu hỏi mà các nhà bác học vĩ đại nhất từ xa xưa đến giờ vẫn tìm cách luận giải… Trong Tiếng Việt thuật ngữ vô hạn có thể xem là đồng nghĩa với các từ: vô cực, vô cùng, vô tận, vô số, … Nhưng có lẽ từ sát nghĩa nhất là vô số.

Ta hãy xem hơn hai nghìn năm trước khi nói về tập hợp các số nguyên tố *Euclid* đã né tránh dùng thuật ngữ vô hạn một cách khéo léo thế nào khi ông phát biểu khẳng định: "*Số các số nguyên tố tồn tại nhiều hơn bất cứ một số lượng nào định gán cho nó*" và điều đó cũng có nghĩa rằng tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.

Từ đó có thể hiểu một cách nôm na rằng tập hợp vô hạn là tập hợp có vô số phần tử phân biệt nhau.

Chẳng hạn, tập hợp vô hạn "*đơn giản*" đầu tiên mà Thượng đế đã ban cho con người là tập hợp các số tự nhiên

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n,\ n+1, ...\}.$$

Đó là tập hợp vô hạn, có thể đếm nhưng không bao giờ đếm hết …


Georg Cantor
(1845 - 1918)

Công lao bất tử của *G. Cantor* (1845 - 1918) là đã dám cả gan lao vào lĩnh vực "*vô hạn*" với quyết tâm thuần hóa nó mà không ngại va chạm không những với những các nghịch lý hay những định kiến xuất phát từ các nhà triết học mà còn phải va chạm với những thành kiến mà nhiều nhà toán học vĩ đại thời bấy giờ nhằm vào ông. Chỉ với điều này, *G. Cantor* xứng đáng trở thành người sáng lập một khoa học mới – một khoa học mà ngày nay là nền tảng và ngôn ngữ của toàn bộ toán học. Theo *Nicolas Bourbaki* (bút danh của nhóm các nhà toán học Pháp) thì: "*Ngày nay, về mặt lôgic mọi người đều thừa nhận rằng toàn bộ nền toán học hiện đại đều có thể rút ra từ một nguồn duy nhất – Lý thuyết tập hợp (LTTH)*".

NHỮNG KẾT QUẢ CƠ BẢN NHẤT CỦA LÝ THUYẾT TẬP HỢP CỦA G. CANTOR

Trong cuốn "Cơ sở của Lý thuyết tập hợp" (1883) nhà sáng lập LTTH viết: "*Nói chung tôi hiểu tập hợp là một cái gì rất nhiều và có thể hình dung nó như một cái thống nhất, tức là một tập hợp bất kỳ các phần tử xác định liên kết với nhau thành một thể thống nhất bởi một quy luật nào đó*".

Khái niệm quy luật được *G. Cantor* xem là khái niệm xuất phát, không định nghĩa được. Tuy nhiên, trong quan điểm của ông khái niệm đó có vai trò cốt yếu.

Những khái niệm mấu chốt của LTTH ngây thơ (không phải lý thuyết tập hợp tiên đề hóa) là: tập hợp, quan hệ liên thuộc, tập hợp con, các phép toán trên tập hợp, ánh xạ tập hợp, phép tương ứng đơn trị một – một, số lượng và lực lượng của tập hợp, tập hợp đếm được, …

Cùng với đó, ông đưa vào ý niệm về tập hợp rỗng (ký hiệu $\varnothing$): là tập hợp không chứa một phần tử nào. Tập hợp $\varnothing$ là tập hợp con của bất cứ tập hợp $\mathcal{M}$ nào. Tập hợp rỗng $\varnothing$ là tập hợp duy nhất có đúng một tập hợp con là chính nó.

Một tư tưởng rất đơn giản nhưng hết sức tài tình và độc đáo của *Cantor* là sự xác lập phép tương ứng và sau đó là tương ứng đơn trị một – một giữa hai tập hợp.

Giả sử $\mathcal{M}$ và $\mathcal{N}$ là hai tập hợp tùy ý. Người ta nói rằng giữa các phần tử của $\mathcal{M}$ và các phần tử của $\mathcal{N}$ thiết lập được một phép tương ứng nếu xác định được một quy tắc ghép một phần tử của tập hợp này với một phần tử của tập hợp kia thành từng cặp và hai phần tử trong cùng một cặp được gọi là tương ứng với nhau trong phép tương ứng ấy. Phép tương ứng được gọi là đơn trị một – một nếu trong phép tương ứng đó mỗi phần tử của $\mathcal{M}$ đều tương ứng với một và chỉ một phần tử của $\mathcal{N}$ và ngược lại, mỗi phần tử của $\mathcal{N}$ tương ứng với một và chỉ một phần tử của $\mathcal{M}$.

Nếu giữa các tập hợp $\mathcal{M}$ và $\mathcal{N}$ tồn tại một phép tương ứng đơn trị một – một thì *Cantor* gọi $\mathcal{M}$ và $\mathcal{N}$ là những tập hợp tương đương với nhau và ký hiệu $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$. Khi hai tập hợp tương đương với nhau thì ông gọi chúng có lực lượng bằng nhau hay cùng một bản số. Đối với các tập hợp hữu hạn thì lực lượng (bản số) chính là số phần tử của nó. Các bản số của những tập hợp vô hạn được gọi là bản số siêu hạn. Lực lượng (bản số) của tập hợp $\mathcal{M}$ thường được ký hiệu là card $\mathcal{M}$, trong đó card là phần tử đầu của từ cardinality có nghĩa là bản số.

Gần một phần tư thế kỷ *Cantor* đã dành để nghiên cứu một cách hệ thống các tập hợp vô hạn dựa trên quan điểm xác lập phép tương ứng đơn trị một – một và từ đó ông so sánh lực lượng của chúng. Ta xét một vài ví dụ

i) Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, n+1, ...\}$ và tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ có lực lượng bằng nhau với phép tương ứng đơn trị một – một là

$$f(n)=\begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \dfrac{1-n}{2} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}, n\in\mathbb{N}.$$

ii) Tập hợp $\mathbb{N}$ và tập hợp các số chẵn có lực lượng bằng nhau với phép tương ứng đơn trị một – một là $\varphi(n) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

iii) Cũng như vậy, bằng phương pháp rất đặc trưng mang tên *G. Cantor – phương pháp đường chéo*, ông đã chứng minh rằng tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ tương đương với tập $\mathbb{Q}$ các số hữu tỷ.

Các ví dụ vừa trình bày minh họa cho một tính chất "*ngược đời*" của tập hợp vô hạn (mà trước đây *Galileo* từng gọi là *nghịch lý: một tập hợp vô hạn có thể tương đương với một trong các tập hợp con thực sự của nó*! Điều đó không có gì lạ vì đối với tập hợp vô hạn điều khẳng định: "*toàn thể lớn hơn bộ phận*" không còn đúng nữa).

Và *G. Cantor* đã bắt đầu vén dần cái màn bí mật của cái vô hạn bởi định nghĩa mới về tập hợp vô hạn: Một tập hợp được gọi là vô hạn nếu nó chứa một tập hợp con thực sự có cùng lực lượng với toàn bộ tập hợp.

Nhờ phương pháp đường chéo nổi tiếng của mình *Cantor* đã chứng minh rằng: tập hợp các số tự nhiên không tương đương với tập hợp các điểm của đoạn thẳng.

Đến đây, với quá trình khảo sát tinh vi, *Cantor* đã chứng tỏ rằng: ít nhất là có hai loại vô hạn.

Loại thứ nhất. Đó là cái vô hạn của tập hợp các số tự nhiên và của mọi tập hợp vô hạn tương đương với nó. Loại vô hạn này được gọi là vô hạn "*alep – zero*" χ_0, trong đó χ_0 là chữ cái đầu của bảng chữ cái Do Thái. Các tập hợp lực lượng alep – zero χ_0 được gọi là tập hợp đếm được. Tên gọi này có nguồn gốc từ chỗ là các phần tử của mỗi tập hợp trong đó đều có thể đánh số bởi một dãy tăng không bị chặn các số tự nhiên.

Một trong những thành tựu (nếu không muốn nói là "*bất ngờ kỳ diệu*" thì không thể diễn tả bởi tính từ khác) mà *G. Cantor* mang lại là: *mặc dù tập hợp mọi số tự nhiên* $\mathbb{N}$, *mọi số nguyên* $\mathbb{Z}$, *mọi số hữu tỷ* $\mathbb{Q}$ *và tập hợp các số đại số* $\mathbb{A}$ *thỏa mãn dãy các bao hàm thức* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$ *nhưng chúng lại có bản số siêu hạn (tức là lực lượng) bằng nhau.* Nói cách khác, mặc dù chúng có mật độ "*đông đúc*" tưởng rất khác nhau nhưng lực lượng lại như nhau và cùng bằng χ_0. Thêm vào đó, thành tựu đặc biệt đẹp đẽ này cũng làm cho người ta đỡ phải lúng túng khi tiếp cận với cái vô hạn …

Đối với các tập hợp đếm được, *G. Cantor* còn chứng minh được rằng:

i) *Mọi tập hợp vô hạn đều chứa một tập hợp con đếm được.*

ii) *Một bộ phận bất kỳ của tập hợp đếm được hoặc là hữu hạn hoặc là tập hợp đếm được.*

iii) *Trong số mọi tập hợp vô hạn, tập hợp số tự nhiên có lực lượng bé nhất.* Từ đó, lực lượng đếm được χ_0 của tập hợp đếm được là bé nhất trong tất cả các lực lượng siêu hạn. Sự mở rộng tiếp theo của khái niệm số đã dẫn đến hệ thống số thực. Bằng phương pháp đường chéo *G. Cantor* đã chứng minh được rằng tập hợp số thực $\mathbb{R}$ là không đếm được. Như vậy, còn có kiểu vô hạn khác nữa …

Loại thứ hai. Đó là loại vô hạn của các đoạn thẳng của đường thẳng. Ta hiểu khoảng $(a, b) \subset \mathbb{R}$ là tập hợp tất cả các số thực x mà $a < x < b$; còn đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$ là tập hợp tất cả các số thực x mà $a \le x \le b$. Lực lượng của tập mọi số thực (và của mọi tập hợp tương đương với nó) được gọi là lực lượng continuum hay ngắn gọn lực lượng C, trong đó "C" là chữ cái đầu của từ Latinh continuum, nghĩa là liên tục: card $\mathbb{R} = C$. Chẳng hạn, tập hợp các số thực trong khoảng (0, 1) không đếm được và card $(0, 1) = C$; tập hợp các số vô tỷ có lực lượng C: card $\mathbb{I} = C$

Về tập hợp lực lượng continuum, *Cantor* còn chứng minh được kết quả "*sâu sắc nhất*" của mình rằng: "*Tập hợp các điểm của một hình vuông hay tập hợp các điểm của một hình lập phương (thậm chí: cả mặt phẳng hay cả không gian 3 – chiều) cũng chỉ có lực lượng C*".

Bản thân *G. Cantor* cũng bất ngờ và có phần không tin vào chính mình. Trong thư gửi *R. Dedekind* (năm 1877) báo tin điều này, ông viết: "*Tôi nhìn thấy điều đó nhưng không thể kiểm tra nó*".

Trong lý thuyết tập hợp "*ngây thơ*" hai thành tựu sau đây được xem là tinh vi nhất. Trong thành tựu thứ nhất *G. Cantor* đã lý giải một cách sâu sắc vấn đề: cần hiểu tập hợp vô hạn này lớn hơn tập hợp vô hạn kia theo nghĩa nào. Đó là định lý *Cantor – Bernstein* (1898) khẳng định rằng: *Nếu mỗi tập hợp trong hai tập hợp cho trước là tương đương với một bộ phận của tập hợp kia thì các tập hợp đã cho tương đương với nhau.*

Trong một thời gian dài *G. Cantor* đã không thành công trong việc chứng minh định lý này. Ông đã thông báo và trao đổi với *R. Dedekind* (1831-1916) những khó khăn chưa vượt qua được. *R. Dedekind* đã làm quen với bài toán này với các sinh viên của mình ở *Gottingen.* Đến đầu thập niên chín mươi của thế kỷ XIX định lý này được một sinh viên của *R. Dedekind* còn rất trẻ là *Felix Bernstein* (1878 - 1956) ở *Gottingen* chứng minh. Định lý này cơ sở để phân cấp độ cái vô hạn mà cốt lõi là hệ quả: *hai tập hợp bất kỳ hoặc "như nhau" (tương đương, lực lượng bằng nhau) hoặc một trong hai tập hợp lớn hơn tập hợp kia.*

Bên cạnh đó *G. Cantor* còn luận giải một cách rất tao nhã cách nhận biết tập hợp này lớn hơn hay bé hơn tập hợp kia. Ông lập luận như sau.

Giả sử cho hai tập hợp vô hạn $\mathcal{M}$ và $\mathcal{N}$. Nếu mỗi phần tử $a \in \mathcal{M}$ đều có thể đặt tương ứng với phần tử xác định $b \in \mathcal{N}$ nhưng không phải mọi phần tử $b \in \mathcal{N}$ đều tương ứng với phần tử xác định $a \in \mathcal{M}$ thì theo *G.Cantor*, một cách tự nhiên, người ta xem – đúng hơn là thừa nhận theo định nghĩa – rằng lực lượng của tập hợp $\mathcal{M}$ bé hơn lực lượng của tập hợp $\mathcal{N}$. Từ đó ông kết luận: card $\mathcal{M} <$ card $\mathcal{N}$ nếu chỉ bằng các phần tử của $\mathcal{M}$ thì không đủ để "*đánh số*" hết mọi phần tử của $\mathcal{N}$. Thật là một luận giải vừa giản đơn vừa mộc mạc với hiệu quả bất ngờ … Đặc biệt ông đã mang cái khuôn mẫu mộc mạc này để xét hai tập hợp vô hạn $\mathbb{Q}$ các số hữu tỷ và tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực. Vì $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nên tập hợp mọi phần tử của $\mathbb{Q}$ và do đó cũng chính tập hợp mọi số tự nhiên là không đủ để "*đánh số*" các phần tử của $\mathbb{R}$.

Từ đó card $\quad = \mathrm{card}\mathbb{N} < \mathrm{card} \quad \Rightarrow \chi_0 < C$. Như vậy tập hợp lực lượng continium có lực lượng lớn hơn so với tập hợp đếm được. Một câu hỏi tự nhiên: có tồn tại hay không những tập hợp có lực lượng lớn hơn lực lượng C?

Và *G. Cantor* đã cho câu trả lời: tồn tại cả một dây chuyền các loại vô hạn. Hơn thế nữa, *G. Cantor* còn chỉ ra "*thuật toán*" tìm tập hợp lớn hơn tập hợp đã cho. Đó chính là thành tựu thứ hai của *G. Cantor* trong LTTH "*ngây thơ*".

Thành tựu này được rút ra từ *Định lý Cantor* khẳng định rằng: "*Lực lượng của tập hợp mọi tập hợp con của tập hợp khác rỗng* ($\neq \varnothing$) *tùy ý* $\mathcal{M}$ *là lớn hơn lực lượng chính của tập hợp* $\mathcal{M}$" (năm 1878).

Chẳng hạn, *G. Cantor* đã chứng minh rằng: *Tập hợp mọi tập hợp con của tập hợp đếm được bất kỳ là có lực lượng C lớn hơn lực lượng đếm được*. Như vậy từ *tập hợp vô hạn* cho trước bất kỳ bao giờ cũng tìm được tập hợp lớn hơn tập hợp ấy nhờ "*thuật toán*" thành lập tập hợp mọi tập hợp con của nó với lực lượng lớn hơn. Việc sử dụng liên tiếp "*thuật toán*" nêu trên sẽ sinh ra một dây chuyền vô hạn các tập hợp vô hạn ngày càng lớn hơn. Tương ứng với điều đó là tồn tại các tập hợp vô hạn với lực lượng lớn bao nhiêu tùy ý. Điều đó cũng chứng tỏ rằng không có bản số nào là lớn nhất.

Công lao của *G. Cantor* còn ở chỗ ông không dừng lại ở sự so sánh giản đơn các tập hợp vô hạn như ở trên mà còn xây dựng nên số học mới tương ứng gọi là *số học các bản số*. Vì mỗi tập hợp đều tương ứng với một lực lượng – đó là sự mở rộng trực tiếp khái niệm số tự nhiên – hay bản số xác định nên các phép toán trên các tập hợp có thể chuyển thành các phép tính trên các bản số. Trong trường hợp các tập hợp hữu hạn ta có số học thông thường, đối với tập hợp vô hạn ta sẽ có số học các bản số siêu hạn. Số học các bản số siêu hạn khác số học các số tự nhiên. Điều đó, trước hết liên quan đến tính chất của tập hợp hữu hạn và tập hợp vô hạn (khác nhau về tính chất: chẳng hạn, đối với tập hợp vô hạn điều khẳng định "*Toàn thể lớn hơn bộ phận*" không còn đúng nữa!). Ta xét ví dụ đơn giản sau đây.

Giả sử xét hai tập hợp $\mathcal{M}$ và $\mathcal{N}$ trong ba trường hợp sau đây.

i) Nếu $\mathcal{M}$ và $\mathcal{N}$ là hai tập hợp hữu hạn sao cho $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \varnothing$ và $\mathcal{M}$ chứa ba phần tử còn $\mathcal{N}$ chứa năm phần tử thì $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ chứa tám phần tử.

ii) Giả sử $\mathcal{M}$ là tập hợp hữu hạn gồm α_0 phần tử còn $\mathcal{N}$ là tập hợp đếm được với lực lượng alep – zero χ_0. Tập hợp $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ là đếm được nên bản số của nó là χ_0. Như vậy $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ và $\mathcal{N}$ đều là đếm được nên: $\alpha_0 + \chi_0 = \chi_0$.

iii) Giả sử cả $\mathcal{M}$ và $\mathcal{N}$ đều là các tập hợp đếm được. Khi đó cả $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ cũng là đếm được và do đó ta có đẳng thức: $\chi_0 + \chi_0 = \chi_0$.

KHÔNG TỪ BỎ THIÊN ĐƯỜNG CỦA LÝ THUYẾT TẬP HỢP

Tư tưởng và thành tựu của *G. Cantor* được đón nhận không như nhau. Một số nhà toán học lớn như *R. Dedekind* và *C. Weierstrass* (1815 - 1897) thừa nhận ý nghĩa đặc biệt của LTTH nên đã hết lòng khích lệ *Cantor*. Bên cạnh đó *G. Cantor* cũng bị nhiều người phản đối, công kích, thậm chí thóa mạ. Tuy nhiên LTTH của *Cantor* vẫn được thừa nhận rộng rãi trên Hội nghị các nhà toán học Quốc tế lần thứ nhất tại Zürich năm 1897. Tại đây các nhà toán học thừa nhận LTTH đã mang lại khả năng áp dụng nó trong bất cứ lĩnh vực nào của toán học và trên thực tế toàn bộ nền toán học đã sử dụng ngôn ngữ của lý thuyết đó.

Đặc biệt, trong báo cáo của mình tại Hội nghị các nhà toán Quốc tế lần thứ hai năm 1900 tại Paris, nhà toán học vĩ đại Pháp *H. Poincare* (1854 - 1912) đã dõng dạc tuyên bố rằng nhờ sự sáng tạo của *G. Cantor* mà "*Hôm nay chúng ta có thể nói rằng chúng ta đã đạt được sự chính xác tuyệt đối*".

Tuy nhiên cũng chính trong thời gian này, trong LTTH người ta đã phát hiện ra những mâu thuẫn dưới dạng các nghịch lý. Đó là nghịch lý *Cantor* (1895) về *tập hợp mọi tập hợp có thể có*; nghịch lý *Russel* (1902) về *tập hợp chính tắc là tập hợp không tự chứa nó như một phần tử* (chẳng hạn: tập hợp các số tự nhiên không phải là số tự nhiên!). Để giải thích nghịch lý của mình một cách dễ hiểu hơn chính *B.*

Russel đã viện dẫn đến "*nghịch lý người thợ cạo râu*" …

Sự phát hiện này đã tạo nên cơn bão giáng xuống toàn bộ nền toán học, tạo nên cuộc khủng hoảng sâu rộng mà theo lời *A. A. Fraenkel* và *Y. Bar Hillel* thì "*cuộc khủng hoảng thứ ba* [*này*] *về căn cứ toán học là chưa vượt qua được cho đến nay* [1966]". Cùng với các nghịch lý là nỗi buồn nhân thế … Người ta đã công kích *G. Cantor* một cách dữ dội mà có lẽ lý do chủ yếu là một số nhà toán học đương thời chưa dung nhận ngay những sáng tạo đầy táo bạo của ông. Có người gọi "*LTTH của G. Cantor là mây mù trong sương mù*" đã "*làm suy đồi giới trẻ*"… Đặc biệt, sinh thời, thầy cũ của *G. Cantor* là nhà toán học và triết học *L. Kronecker* (1823 - 1891) cũng công kích *G. Cantor* một cách nặng nề. Trung thành với giáo lý của mình Thượng đế đã tạo ra các số tự nhiên …", nên theo *L. Kronecker* những gì không được xây dựng trên nền tảng số tự nhiên đều bị ông cho là sản phẩm không chính thống …

Rồi cả *H. Poincare*, người từng ca ngợi *G. Cantor* tám năm về trước, giờ đây tại Hội nghị Rima (1908) cũng đã than vãn một cách đầy tuyệt vọng: "*các thế hệ mai sau sẽ xem LTTH như một chứng bệnh cần phải giải cứu họ thoát khỏi*".

Lịch sử đã chứng tỏ rằng một kết luận như vậy đã tỏ ra quá ư vội vàng. Đúng là LTTH đã sản sinh ra nguyên nhân của các cuộc tranh luận và cũng từ đó mới nảy sinh những nghi vấn về cơ sở của chính bản thân nó. Trên cơ sở đó, người ta có dịp nhìn lại một cách thấu đáo, kỹ càng và tinh tế một chặng đường hình thành và củng cố nền toán học hiện đại ở cái thủa ban đầu …

Trong tác phẩm "*Cơ sở lý thuyết tập hợp*" (năm 1914) *F. Hausdorff* (1868 - 1942) đã nhận xét một cách chính xác rằng LTTH là "*Lĩnh vực mà trong đó không có cái gì hiển nhiên và trong đó những điều khẳng định hợp chân lý nhiều khi lại biểu lộ ra một cách ngược đời, còn những cái giống như thật lại tỏ ra giả tạo*".

Cho dù phải chịu những áp lực nặng nề và những lúng túng bối rối lúc đầu, *G. Cantor* vẫn khẳng định "*Tôi tin LTTH của tôi chắc chắn như tảng đá*".

Năm 1899, ông thông báo với *R. Dedekind* quan điểm xử lý của mình rằng: *mọi tập hợp có thể phân thành những tập hợp có bao hàm "mâu thuẫn" bên trong và những tập hợp không bao hàm "mâu thuẫn" bên trong.* Do đó cần hạn chế việc sử dụng quá ư tự do các khái niệm tập hợp: đặc biệt cần biết loại bỏ những khái niệm có bao hàm mâu thuẫn bên trong. Tiếc thay, đến nay chưa có dấu hiệu nào để nhận biết đâu là tập hợp loại đó!

D. Hilbert (1862 - 1943) và *R. Dedekind* rất ủng hộ và khích lệ *G. Cantor*. Đặc biệt *D. Hilbert* đã đưa nội dung LTTH vào Bài toán thứ nhất trong "*Các bài toán thế kỷ*" của ông gọi là Giả thiết continuum: *Tồn tại hay không tập hợp* $\mathcal{M}$ *với lực lượng m thỏa mãn hệ thức* $\chi_0 < m < C$? Bài toán này được giải năm 1963 bởi nhà toán học Hoa Kỳ *P. J. Cohen*. Mặc dù là tác giả của một nghịch lý, nhà toán học và triết học người Anh *B. Russel* (1872 - 1970) lên tiếng bảo vệ *G. Cantor* và gọi "*Cantor là một trong những nhà tư tưởng vĩ đại nhất thế kỷ* XIX".

B. Russel còn viết: "*Việc giải quyết những vấn đề mà từ lâu che phủ cái vô hạn toán học một cách huyền bí, có lẽ là thành tựu vĩ đại nhất mà thế kỷ của chúng ta phải tự hào*".

Còn tác giả của "*Những bài toán thế kỷ*" *D. Hilbert* thì khẳng định: "*Tôi hình dung rằng đây là đóa hoa tuyệt trần nhất của tư duy toán học và là một trong những thành tựu vĩ đại nhất của hoạt động con người trong lĩnh vực tư duy thuần túy*".

Cho dù chưa tìm được cách giải quyết mĩ mãn cuộc khủng hoảng lần thứ ba về cơ sở toán học nhưng các nhà toán học cũng cảm thấy an lòng khi tòa lâu đài toán học mà nhân loại đã dày công chăm lo, hoàn thiện và phát triển mấy nghìn năm qua vẫn còn nguyên vẹn.

Năm tháng trôi đi, sẽ có lúc các nhà toán học thuộc các thế hệ ngoảnh nhìn lại cái thời khắc tuy ngắn ngủi nhưng tràn đầy hạnh phúc của sự sáng tạo. Khi toán học "*còn sống trong Thiên Đường*" như *P. du Bois Reymond* (1831 -1889) từng hồi tưởng lại… Và, chắc chắn như *D. Hilbert* từng dõng dạc: "*Không ai đuổi được chúng ta ra khỏi Thiên Đường mà G. Cantor đã tạo ra*".

Nhìn vào toàn bộ cấu trúc của toán học hiện đại sẽ không quá lời khi khẳng định rằng *G. Cantor* là một trong số thật ít ỏi các nhà toán học có tư tưởng độc đáo, táo bạo nhất mọi thời đại và sự sáng tạo ra LTTH của ông là một trong những đóng góp đột phá cho toán học từ thời Cổ Hy Lạp đến nay.

Tiếng Anh qua các bài toán

BÀI SỐ 46

Problem. A function $f: X \to Y$ is called one-to-one if $f(x_1) = f(x_2)$ implies that $x_1 = x_2$. A function $f: X \to Y$ is called onto if $\forall y_0 \in Y, \exists x_0 \in X : f(x_0) = y_0$. Show that in the special case when $X = Y$ is a finite set, then a function $f: X \to X$ is one-to-one if and only if it is onto.

Solution. We can assume that $X = \{1, 2, ..., n\}$ for some positive integer n.

First, suppose that the function $f: X \to X$ is one-to-one. By definition, the set $Z = \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$ is a set of n different elements. But Z is a subset of X which is also a set of n different elements. Therefore $Z = X$ and hence we can conclude directly that the function $f: X \to X$ is onto.

Now, suppose that the function $f: X \to X$ is onto. Then it is easy to see that we have $X = Z$ where $Z = \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$. But then $Z = \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$ is a set of n different elements. Thus the function $f: X \to X$ is one-to-one.

TỪ VỰNG

one-to-one : *một-một (đơn ánh)*

onto : *toàn ánh*

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 43

Bài toán. *Cho hình hộp (xiên) ABCD. A'B'C'D' với ABCD, A'B'C'D' là hình chữ nhật, $AB=a, AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABCD) là điểm O, giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(A'BD)$.*

Lời giải. Ta có thể tính khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ thông qua thể tích khối chóp $B'.A'BD$ và diện tích của tam giác $A'BD$. Vì khoảng cách này không phụ thuộc vào khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng đáy $(ABCD)$, do đó ta có thể giả sử khoảng cách thứ hai bằng a. Ta có $V_{B'.A'BD} = \frac{1}{6}V_{\text{hình hộp}} = \frac{1}{6}a.a\sqrt{3}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ và $S_{A'BD} = \frac{1}{2}A'O.BD = \frac{1}{2}a.2a = a^2$.

Từ đó: $d(B'; A'BD)) = \frac{3V_{B'.A'BD}}{S_{A'BD}} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{6} : a^2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. ❒

Lưu ý. Bài toán này được sưu tầm từ một đề kiểm tra toán của tỉnh **Nam Định.**

➤***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Huy*, 12A1 – K12, THPT Yên Phong số 2, Yên Phong; **Hà Nam:** *Phan Thế Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Bảo Minh Châu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế ; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A, khu phố 1, phường 7, TP. Bến Tre.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 26. *Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình:* $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

Cách 1.

Định hướng. Dễ nhận ra rằng, phương trình (PT) đã cho tương đương với:

$$(x+y)^2 = xy(xy+1).$$

Điều đó cho ta $xy = 0$ hoặc $xy + 1 = 0$. Từ đó giúp có được các nghiệm nguyên của PT đã cho.

Lời giải. $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy \Leftrightarrow (x+y)^2 = xy(xy+1)$.

$(x+y)^2$ là một số chính phương, xy và $xy+1$ là hai số nguyên liên tiếp nên phải có $xy = 0$ hoặc $xy + 1 = 0$.

+ Với $xy = 0$ ta có: $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

+ Với $xy + 1 = 0 \Leftrightarrow xy = -1 \Rightarrow x = 1$; $y = -1$ hoặc $x = -1$; $y = 1$.

Thử lại, ta có các nghiệm nguyên của PT đã cho là:

$(x = 0; y = 0)$; $(x = 1; y = -1)$; $(x = -1; y = 1)$.

Cách 2.

Định hướng. Dễ nhận ra rằng, PT đã cho tương đương với: $(2x+y)^2 = y^2(4x^2-3)$.

Xét các trường hợp $y = 0$, $y \neq 0$ giúp ta tìm được các nghiệm nguyên của PT đã cho.

Lời giải.

$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + 4y^2 = 4x^2y^2$

$\Leftrightarrow (2x+y)^2 = 4x^2y^2 - 3y^2 \Leftrightarrow (2x+y)^2 = y^2(4x^2-3)$.

- Nếu $y = 0$ ta có $(2x+0)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

- Nếu $y \neq 0$ thì cần phải có $4x^2 - 3$ là số chính phương. Đặt $4x^2 - 3 = z^2\ (z \in \mathbb{N})$, ta có:

$$(|2x| + z).(|2x| - z) = 3.$$

Mà $|2x| + z \in \mathbb{N}$ nên $|2x| - z \in \mathbb{N}$ và $|2x| + z \geq |2x| - z$ do vậy $|2x| + z = 3, |2x| - z = 1$. Từ đó có $|2x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Với $x = 1$ thì $y = -1$; $x = -1$ thì $y = 1$. Vậy các nghiệm nguyên của PT đã cho là $(x = 0; y = 0)$; $(x = 1; y = -1)$; $(x = -1; y = 1)$.

Cách 3.

Định hướng. Trong trường hợp x và y khác 0, nếu đặt ƯCLN$(x; y) = d$ tức là $x = x_1d, y = y_1d$ với $d \in \mathbb{N}^*$, ƯCLN$(x_1, y_1) = 1$. giúp ta tìm được d, từ đó tìm được nghiệm nguyên của PT.

Lời giải.

- Nếu $x = 0$ thì $y = 0$.

- Xét x, y khác 0, đặt $(x, y) = d$, $d \in \mathbb{N}^*$, $x = x_1d, y = y_1d$ với $(x_1; y_1) = 1$. Ta có:

$(x_1d)^2 + (x_1d)(y_1d) + (y_1d)^2 = (x_1d)^2(y_1d)^2$

$$x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 = d^2x_1^2y_1^2.$$

Vì $x_1^2 \vdots x_1; x_1y_1 \vdots x_1; d^2x_1^2y_1^2 \vdots x_1$ nên $y_1^2 \vdots x_1$, mà $(x_1, y_1) = 1$ nên $x_1 = \pm 1$. Tương tự có $y_1 = \pm 1$. Do vậy: $d^2 \in \{1; 3\} \Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = 1$.

Thử lại, ta có nghiệm nguyên của PT đã cho là $(x = 0; y = 0)$; $(x = 1; y = -1)$; $(x = -1; y = 1)$.

Cách 4.

Định hướng. Xem PT đã cho là PT bậc hai ẩn x dạng $ax^2 + bx + c = 0$. Lưu ý rằng khi $a \neq 0$, PT có nghiệm nguyên khi biệt thức Δ là số chính phương.

Lời giải.

$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \Leftrightarrow (y^2-1)x^2 - yx - y^2 = 0$ (*)

- Xét $y = 1$ ta có (*) $\Leftrightarrow -x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

- Xét $y = -1$ ta có (*) $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- Xét $y \neq \pm 1$ ta có: $\Delta = y^2 + 4y^2(y^2-1)$

$$= y^2(1+4y^2-4) = y^2(4y^2-3)$$

phải là số chính phương.

Nếu $y = 0$ thì từ (*) có $x = 0$.

Nếu $y \neq 0$ thì cần có $4y^2-3$ là số chính phương. Đặt $4y^2-3 = t^2 (t \in \mathbb{N})$. Xem cách giải 2 có $y = \pm 1$ (không thích hợp vì $y \neq \pm 1$).

Vậy các nghiệm nguyên của PT đã cho là

$(x=0; y=0)$; $(x=1; y=-1)$; $(x=-1; y=1)$.

Cách 5.

Định hướng. Nhận thấy rằng nếu $|x| \leq |y|$ thì ta có $x^2y^2 \leq 3y^2$, từ đó giúp ta nhanh chóng tìm được nghiệm nguyên của PT.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $|x| \leq |y|$. Ta có: $x^2 \leq y^2$; $xy \leq |xy| \leq y^2$ suy ra

$$x^2y^2 = x^2 + xy + y^2 \leq y^2 + y^2 + y^2 = 3y^2.$$

- Nếu $y = 0$ thì $x = 0$.

- Nếu y khác 0 ta có $x^2 \leq 3$ nên $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $x = 1$ thì có $y = -1$; với $x = -1$ thì có $y = 1$.

Vậy các nghiệm nguyên của PT đã cho là

$(x=0; y=0)$; $(x=1; y=-1)$; $(x=-1; y=1)$.

Cách 6.

Định hướng. Để ý rằng nếu: $2 \leq |x| \leq |y|$ thì

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2} = 1$$

mà $1 = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (vô lý), từ đó giúp có thêm cách giải mới.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $|x| \leq |y|$.

- Nếu $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ta có $y = 0$.

- Nếu $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, thì:

Với $x = 1$ có $y = -1$; với $x = -1$ có $y = 1$.

- Nếu $|x| \geq 2$ ta có: $x^2 \geq 4$; $|xy| \geq x^2 \geq 4$; $y^2 \geq 4$.

Do đó: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2} = 1$.

Mà $1 = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$: vô lý.

Vậy các nghiệm nguyên của PT đã cho là

$(x=0; y=0)$; $(x=1; y=-1)$; $(x=-1; y=1)$.

Cách 7.

Định hướng. Biến đổi

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \Leftrightarrow (2xy+1)^2 - (2x+2y)^2 = 1$$

từ đó ta tìm được các nghiệm nguyên của PT đã cho.

Lời giải.

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + 4y^2 = 4x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow (4x^2y^2 + 4xy + 1) - (4x^2 + 8xy + 4y^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow (2xy+1)^2 - (2x+2y)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow [(2x+1)+(2x+2y)][(2xy+1)-(2x+2y)] = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2xy+1)+(2x+2y)=(2xy+1)-(2x+2y)=1\\(2xy+1)+(2x+2y)=(2xy+1)-(2x+2y)=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2xy+1=1;\ 2x+2y=0\\2xy+1=-1;\ 2x+2y=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0\\x=1, y=-1;\ x=-1, y=1\end{array}\right..$$

Vậy các nghiệm nguyên của PT đã cho là

$(x=0; y=0)$; $(x=1; y=-1)$; $(x=-1; y=1)$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)

Nhận xét. Ngoài 7 cách giải nêu trên của bạn *Nguyễn Đức Tấn*, người giới thiệu bài toán 26, Tòa soạn Tạp chí TH&TT còn nhận được một số cách giải tương tự như những cách trong bài viết trên từ các bạn: *Đậu Công Nho*, GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**; *Nguyễn Văn Bản*, GV THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, **Điện Biên**; *Nguyễn Văn Luân*, GV THCS Hợp Tiến, Nam Sách, **Hải Dương**; *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**; *Phùng Chí Tự*, GV THPT Anhxtanh, *Ngô Văn Minh Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**; *Trần Mạnh Hùng*, GV THCS Êa Yông, huyện Krông Păk, **Đăk Lăk**; *Lê Ngô Nhật Huy*, 111A khu phố 1, phường 7, TP. Bến tre, **Bến Tre**. Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 28 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.8.2019.

BÀI TOÁN 28. *Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a+b=\frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{4}{a} + \frac{1}{4b}.$$

ĐOÀN CÁT NHƠN

(*GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định*)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

Trong bài kỳ này là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 503, T5.2019.

Bài 34 (Rumania Mathematical Olympiad, 2006). *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2. \quad (1)$$

Lời giải. Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{a}-\frac{2}{b}-\frac{2}{c}+3$$

$$+2(ab+bc+ca)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a^2}+\frac{(b-1)^2}{b^2}+\frac{(c-1)^2}{c^2}$$

$$+2(ab+bc+ca)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 12.$$

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$ab+bc+ca+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6. \quad (2)$$

Thật vậy, theo nguyên lý Dirichlet thì trong ba số $a-1, b-1, c-1$ ta luôn chọn được hai số có tích không âm, không mất tính tổng quát ta giả sử

$$(a-1)(b-1)\ge 0 \Leftrightarrow ab\ge a+b-1.$$

Khi đó: $\text{VT}(2)\ge \frac{4}{a+b}+\frac{1}{c}+a+b-1+c(3-c)$

$$=\frac{4}{3-c}+\frac{1}{c}+2+2c-c^2,\ (0<c<3).$$

Ta chứng minh: $\frac{4}{3-c}+\frac{1}{c}+2+2c-c^2\ge 6.$ (3)

Ta có: $(3)\Leftrightarrow \frac{4}{3-c}+\frac{1}{c}\ge c^2-2c+4$

$$\Leftrightarrow 3(c+1)\ge (3c-c^2)(c^2-2c+4)$$

$$\Leftrightarrow c^4-5c^3+10c^2-9c+3\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (c-1)^2(c^2-3c+3)\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng và ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Hoan nghênh các bạn *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**; *Nguyễn Văn Bản*, GV THCS Thanh Yên, huyện Điện Biên, **Điện Biên**; *Ngô Văn Minh Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội** đã gửi về Tòa soạn khá nhiều cách giải cho bài toán này và các cách giải đều đúng. Dưới đây xin đưa ra một cách giải khá gọn của bạn *Trương Quang An*:

Ta có: $x+\frac{1}{x}\ge 2, \forall x>0.$ Do đó

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-(a^2+b^2+c^2)$$

$$=\left(\frac{1}{a}-a\right)\left(\frac{1}{a}+a\right)+\left(\frac{1}{b}-b\right)\left(\frac{1}{b}+b\right)+\left(\frac{1}{c}-c\right)\left(\frac{1}{c}+c\right)$$

$$\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-(a+b+c)\right)$$

$$\ge 2\left(\frac{9}{a+b+c}-(a+b+c)\right)=0.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1.$

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.8.2019.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 36. *Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). M là một điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn (O) không chứa A. Gọi D, E, H lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng*

$$\frac{BC}{MD}=\frac{CA}{ME}+\frac{AB}{MH}.$$

PHÙNG CHÍ TỰ

(*GV THPT Anhxtanh Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: KHI NÀO DIỆN TÍCH LỚN NHẤT?

(*Đề đăng trên TH&TT số* 501, *tháng* 3 *năm* 2019)

Phân tích. Trong lời giải đã chứng minh được $S \le \frac{5}{2}$ và lập luận cho thấy đẳng thức $S = \frac{5}{2}$ không xảy ra, nhưng từ đó không thể kết luận được S không có giá trị lớn nhất.

Lời giải đúng. Gọi H là trung điểm của PQ thì

$$IH = d(I, \Delta) \le IA = \sqrt{2}.$$

Đặt $t = IH^2$, $0 < t \le 2$, thì

$$HP = \sqrt{IP^2 - IH^2} = \sqrt{5 - t} \Rightarrow PQ = 2\sqrt{5-t}.$$

Do đó diện tích tam giác IPQ là

$$S = \frac{1}{2} PQ.IH = \sqrt{5t - t^2}.$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{5t - t^2}$, $t \in (0; 2]$ có

$$f'(t) = \frac{5 - 2t}{2\sqrt{5t - t^2}} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \notin (0; 2].$$

Ta có bảng biến thiên

t	0	2	$\frac{5}{2}$
$f'(t)$	$+$		$+$ 0 $-$
$f(t)$	$0 \nearrow \sqrt{6}$		

Ta có: $f(t) = \sqrt{6} \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow IH = IA = \sqrt{2}$, tức là khi $H \equiv A$. Vậy để diện tích ΔIPQ lớn nhất thì Δ đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA} = (1; -1)$ là vectơ pháp tuyến và do đó Δ có phương trình

$$1.(x-2) - 1.(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm trong lời giải bài toán.

KIHIVI

MỘT CÁCH CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC !

Bài toán. *Cho x, y, z là các số thực dương, chứng minh rằng*

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \ge x\sqrt{zx} + y\sqrt{xy} + z\sqrt{yz}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$$

ta có:

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} = \left(x\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 + \left(y\sqrt{\frac{y}{z}}\right)^2 + \left(z\sqrt{\frac{z}{x}}\right)^2$$

$$\ge x\sqrt{\frac{x}{y}}.y\sqrt{\frac{y}{z}} + y\sqrt{\frac{y}{z}}.z\sqrt{\frac{z}{x}} + z\sqrt{\frac{z}{x}}.x\sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$= xy\sqrt{\frac{x}{z}} + yz\sqrt{\frac{y}{x}} + zx\sqrt{\frac{z}{y}}. \quad (1)$$

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \ge \sqrt{\frac{xy}{z}}.\sqrt{\frac{yz}{x}} + \sqrt{\frac{yz}{x}}.\sqrt{\frac{zx}{y}} + \sqrt{\frac{zx}{y}}.\sqrt{\frac{xy}{z}}$$

$$= x + y + z$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{z}\sqrt{zx} + \frac{yz}{x}\sqrt{xy} + \frac{zx}{y}\sqrt{yz}$$

$$\ge x\sqrt{zx} + y\sqrt{xy} + z\sqrt{yz}$$

$$\Rightarrow xy\sqrt{\frac{x}{z}} + yz\sqrt{\frac{y}{x}} + zx\sqrt{\frac{z}{y}}$$

$$\ge x\sqrt{zx} + y\sqrt{xy} + z\sqrt{yz}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \ge x\sqrt{zx} + y\sqrt{xy} + z\sqrt{yz}.$$

Bạn có nhận xét gì về lời giải trên? Còn lời giải của bạn ?

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 505 (7.2019)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower,
Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Vũ Hữu Chín – Ứng dụng bất đẳng thức tam giác vào giải toán hình học lớp 7.

7 *Hoàng Lê Nhật Tùng* – Sử dụng bất đẳng thức vào bài toán giải phương trình vô tỷ.

10 Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Bình Phước, năm học 2018 - 2019.

12 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2019 - 2020.

14 **Bạn có biết**
Trần Văn Lâm – Số 7 và những điều bạn có thể chưa biết.

16 **Đề ra kỳ này**
T1/505, ..., T12/505, L1/505, L2/505.
Problems in This Issue

18 **Giải bài kỳ trước**
T1/501, ..., T12/501, L1/501, L2/501.
Solutions to Previous Problems

27 **Tin tức**
Problems in This Issue

28 **Diễn đàn dạy học toán**
Trần Văn Hạnh – Phương trình vi phân và bất đẳng thức tích phân xuất hiện trong đề thi đại học.

32 **Phương pháp giải toán**
Hoàng Minh Quân – Ứng dụng bất đẳng thức Karamata để chứng minh và sáng tạo các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác.

38 **Lịch sử toán học**
Nguyễn Thủy Thanh – Không ai đuổi được chúng ta ra khỏi thiên đường của lý thuyết tập hợp.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** - *Bài số* 46.
Bài dịch số 43

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán**

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay**

47 **Sai lầm ở đâu?**
Thái Nhật Phượng – Một cách chứng minh bất đẳng thức!

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

BẠN CÓ BIẾT!

Làm thế nào cắt bánh pizza thành 5, 7 hay 11 phần đều nhau? Hãy tham khảo cách của các nhà toán học sau đây

Chia bánh Pizza sao cho đều nhau vẫn là một bài toán khó, nhất là khi phải chia đều cho một nhóm với số người rất lẻ như 5 hay 7 người. Nhưng với phương pháp chia bánh của hai nhà toán học đến từ trường đại học Liverpool, thì dù là 5, 7, hay 11 phần, cũng đều sẽ có cách dễ chia bánh ra đều chằn chặn.

Theo lời của hai nhà toán học, thì phương pháp này xuất phát từ một bài toán đã có từ rất lâu, về việc chia một hình tròn ra thành nhiều phần bằng nhau.

"Chúng tôi biết có đáp án cho bài toán này, tuy nhiên, chúng tôi muốn đưa ra một đáp án khác hơn một chút và đẹp mắt hơn một chút, thay vì chia thành các hình quạt như thông thường."

Phương pháp này đã được xuất bản trong báo cáo mang tên *'Infinite Families Of Monohedral Disk Tilings'* vào năm 2016.

TRƯƠNG QUANG AN

(*Xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, tỉnh Quảng Ngãi*) **sưu tầm**

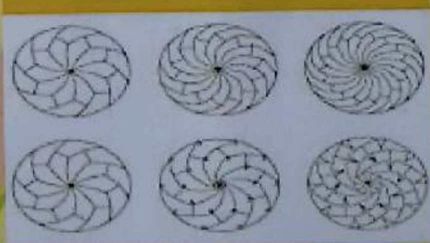
Đây là một chiếc Pizza, và nếu như bạn muốn cắt nó thành 12 miếng "bằng nhau chằn chặn" một cách hoa mỹ nhất, thì bạn có thể thử qua phương pháp "Monohedral disc tiling" của hai nhà toán học Joel Haddley và Stephen Worsley - đến từ Đại học Liverpool tại Anh. Với phương pháp này, bạn hoàn toàn có thể chia chiếc Pizza thành bao nhiêu phần bằng nhau cũng được.

Bước 1
Cắt chiếc Pizza thành hình ngôi sao 6 cánh cong như hình dưới đây

Bước 2
Chia đôi các miếng Pizza vừa cắt

12 miếng 18 miếng 24 miếng

Hai nhà toán học đã chứng minh được rằng bạn hoàn toàn có thể chia chiếc Pizza theo bất cứ số phần lẻ nào – dù là 5, 7 hay 9 phần đi chăng nữa.



Và dưới đây là một chiếc Pizza được cắt theo kiểu như trên.

GIẢI ĐÁP: ĐỐ VUI T5.2019:

BÀI THƠ GHI NỢ

Chuyện kể rằng: Có hai ông bạn thơ từ Hà Nội xuống chơi, *Tú Xương* giục vợ làm cơm đãi khách. Cảnh nhà túng bấn không có sẵn món nhắm, *Tú Xương* ra chợ Rồng (Nam Định) chọn mua cân xương rẻ quạt và hai cái chân giò. Lúc thanh toán, sờ túi không còn hào nào, ông nài nỉ với cô bán thịt:

- Nhà có khách, vội quá, tôi quên tiền ở nhà. Tôi là Tú Xương, xin khất cô, mai tôi đến trả đủ, có được không?

Cô hàng thịt đã từng đọc thơ Tú Xương, nhã nhặn đáp:

- Cũng được. Giờ em xin bác mấy chữ để làm tin!

Tú Xương gật gù cầm bút viết: *Tú tài đi chợ quên tiền*
Xương sườn, giò lợn, bạn hiền chờ ăn.
Nợ đời nặng gánh phong trần
Em đâu nỡ để tần ngần khách thơ!

Trong thơ *Tú Xương* không hề đả động đến chuyện khất nợ tiền. Cô hàng thịt vốn là người thông minh, ham thích thơ không những hiểu ngay nội dung bài thơ khất nợ của *Tú Xương*, phục tài thơ của ông còn gói thêm quả tim và đôi cật lợn để ông thết đãi bạn thơ.

Theo các bạn tại sao cô hàng thịt lại hiểu ngay đây đúng là bài thơ khất nợ của Tú Xương?

NGUYỄN THANH GIANG (*Hưng Yên*)

Lời giải. Đáp án chính là bốn từ đầu của bốn câu thơ: *Tú Xương Nợ Em*.

ĐỐ VUI !

PHÂN CHIA HÌNH VUÔNG KHUYẾT THÀNH CÁC PHẦN BẰNG NHAU

Cho một hình vuông $ABCD$ với cạnh AB = 6cm và bị khuyết một ô vuông đơn vị như ở hình 1. Bạn hãy phân chia vuông $ABCD$ theo cạnh của các ô vuông đơn vị để được:

a) Bảy hình đa giác bằng nhau; b) Năm hình đa giác bằng nhau.

Hình 1

Ta gọi hai hình đa giác là bằng nhau nếu di chuyển một hình đa giác này trên mặt phẳng hoặc lấy đối xứng qua một trục thì được hình đa giác kia.

ĐAN QUỲNH (*Hà Nội*)

NÓI KHÔNG VỚI SÁCH LẬU, SÁCH GIẢ - CẦN SỰ CHUNG TAY CỦA CẢ XÃ HỘI

Hướng đến mục đích nâng cao nhận thức xã hội trong việc chung tay ngăn chặn và loại trừ sách lậu - sách giả, vừa qua, NXB Giáo dục Việt Nam và Đại sứ quán Vương quốc Anh tại Việt Nam đã phối hợp tổ chức Hội thảo chống xuất bản phẩm lậu.

Trong những năm qua, hoạt động in lậu, in giả, in nối bản trái phép (gọi chung là in lậu) tại Việt Nam diễn ra với quy mô lớn và tính chất ngày càng phức tạp. Đối tượng in lậu dùng nhiều thủ đoạn để đối phó, tránh sự phát hiện, xử lý của các cơ quan chức năng. Theo thống kê của NXB Giáo dục Việt Nam, từ năm 2010 đến nay, NXB Giáo dục Việt Nam đã phát hiện hơn 500.000 bản sách thành phẩm, hơn 100.000 đĩa CD và gần 8 tấn bán thành phẩm sách giáo dục bị in lậu, tàng trữ để tiêu thụ tại nhiều tỉnh thành trong cả nước. Không chỉ sách của các nhà xuất bản Việt Nam mà sách của các đơn vị xuất bản nước ngoài (cả trong và ngoài Việt Nam) cũng bị in lậu, phát hành lậu trên thị trường Việt Nam với số lượng không nhỏ.

Tại Hội thảo chống xuất bản phẩm lậu được tổ chức ngày 20/6/2019 vừa qua, NXB Giáo dục Việt Nam đã trưng bày hàng trăm bản sách giáo dục bị in lậu, thống kê và trưng bày các lỗi sai cả về nội dung và hình thức trong sách lậu, sách giả. Có thể nói, những lỗi sai về kiến thức, thiếu hụt nội dung, lỗi chính tả, hình ảnh nhoè, mờ, mất nét, sai màu, … đã ảnh hưởng không nhỏ tới chất lượng nội dung, hình thức sách, thậm chí ảnh hưởng đến việc phát triển tư duy khoa học của học sinh. Bên cạnh đó, sách giả, sách lậu cũng gây tổn hại không nhỏ về vật chất, tinh thần cho các nhà xuất bản, đơn vị làm sách và các tác giả.

Hội thảo được tổ chức không chỉ góp phần nâng cao nhận thức về vấn đề chống vi phạm bản quyền đối với xuất bản phẩm mà còn kêu gọi các lực lượng xã hội cùng quan tâm, chia sẻ các giải pháp góp sức ngăn chặn, đẩy lùi xuất bản phẩm lậu trên thị trường Việt Nam.

Dưới đây là một số hình ảnh trong Hội thảo

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT07M9

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 07 năm 2019

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng