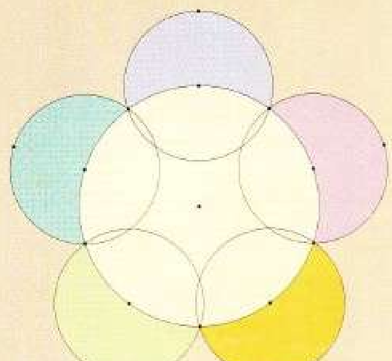
ĐN1 T. Huy

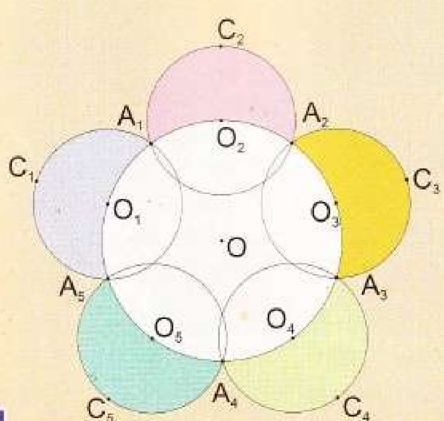
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

3 2006
Số 345

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 43
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre





TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRƯỜNG TỘ, HÀ NỘI

Trường THCS Nguyễn Trường Tộ được thành lập ngày 06-4-1996. Năm học 2005-2006 trường có 48 lớp, 2260 học sinh với 80 giáo viên và công nhân viên. Kết quả thi tốt nghiệp THCS hàng năm đều đỗ 100%, trong đó khá giỏi đạt từ 94% đến 98%, luôn dẫn đầu Quận và Thành phố. Nhiều học sinh được vào các trường chuyên của Bộ và Thành phố, kết quả thi học sinh giỏi cấp Quận, Thành phố về các bộ môn văn hóa luôn dẫn đầu Quận. Đoạt trên 1700 giải học sinh giỏi các cấp trong đó có nhiều giải cao. Các phong trào văn nghệ, TDTT v.v.... hàng năm học sinh dự thi đều đoạt giải và Huy chương cấp Thành phố, Quốc gia. Trường có hơn 10 học sinh trưởng thành đoạt Huy chương Vàng, Bạc, Đồng về Toán, Vật Lí, Tin học Quốc tế.

Hiệu trưởng **Nguyễn Hải Khoát**

Trường đã có phòng tin học với 50 máy ; phòng học tiếng ; khu nhạc họa với nhiều đàn organ và các nhạc cụ; khu thể chất có diện tích 200m^2 với các dụng cụ TDTT phục vụ cho việc học tập của học sinh và rèn luyện sức khỏe của cán bộ, giáo viên, công nhân viên ; khu nhà chức năng với 9 phòng.

Trường liên tục được đầu tư xây dựng đảm bảo Xanh – Sạch – Đẹp.

Trường có gần 40 giáo viên giỏi, chủ nhiệm giỏi và cán bộ quản lí giỏi cấp Thành phố.

Liên tục là trường Tiên tiến xuất sắc cấp Thành phố, năm học 2001-2002 trường được nhận Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ.

TRUNG HỌC CƠ SỞ

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ BẰNG CÁCH ĐÁNH GIÁ

NGUYỄN TẤT THU
(GV THPT Lê Quý Đôn, Biên Hòa, Đồng Nai)

Có nhiều cách giải phương trình vô tỉ, chẳng hạn phương pháp giải phương trình vô tỉ bằng cách dùng các biểu thức liên hợp (xem THTT số 333 tháng 3-2005). Trong bài viết này xin giới thiệu phương pháp giải phương trình vô tỉ bằng cách đánh giá và thường gặp hai cách đánh giá sau đây.

Cách 1. Tìm một nghiệm và chứng minh đó là nghiệm duy nhất

Thí dụ 1. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}=6 \qquad (1)$$

Lời giải. Điều kiện $x<2$.

Với phương trình vô tỉ dạng này ta thường dự đoán nghiệm là các giá trị của x mà biểu thức dưới căn nhận giá trị là một số chính phương. Nhận thấy nghiệm của (1) phải lớn hơn 1. Bằng cách thử ta thấy rằng (1) có một nghiệm là $x=\frac{3}{2}$. Ta chứng minh đó là nghiệm duy nhất của (1). Thật vậy

* Với $x<\frac{3}{2}$ ta có $\sqrt{\frac{6}{3-x}}<2$ và $\sqrt{\frac{8}{2-x}}<4$.

Do đó $\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}<6$. Suy ra (1) không có nghiệm trong $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$.

* Với $\frac{3}{2}<x<2$, chứng minh tương tự ta có

$$\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}>6.$$

Suy ra (1) không có nghiệm trong $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Vậy PT (1) có nghiệm duy nhất $x=\frac{3}{2}$.

Ta thấy giải phương trình bằng cách đánh giá này thì điều quan trọng là phải đoán được nghiệm của nó. Để đoán nghiệm ta nên chỉ ra khoảng chứa nghiệm và xét trường hợp đặc biệt để tìm ra nghiệm trong đó.

Thí dụ 2. Giải phương trình

$$3x(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x+2)(1+\sqrt{1+x+x^2})=0 \quad (2)$$

Lời giải

$$(2)\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{(3x)^2+3}\right)+(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{(3x)^2+3}\right)=-(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right).$$

Nhận thấy nếu $3x=-(2x+1)\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}$ thì các biểu thức trong căn ở hai vế bằng nhau. Vậy $x=\frac{-1}{5}$ là một nghiệm của (2). Hơn nữa, nghiệm của (2) nằm trong khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. Ta chứng minh $x=-\frac{1}{5}$ là nghiệm duy nhất của (2).

* Với $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{5}$ ta có $3x<-2x-1<0$

$\Rightarrow (3x)^2>(2x+1)^2$

$\Rightarrow 2+\sqrt{(3x)^2+3}>2+\sqrt{(2x+1)^2+3}$.

Từ đó suy ra

$$3x(2+\sqrt{(3x)^2+3})>-(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})$$

$$\Leftrightarrow 3x(2+\sqrt{(3x)^2+3})+(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})>0.$$

Vậy (2) không có nghiệm trong $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{5}\right)$.

* Chứng minh tương tự ta cũng đi đến (2) không có nghiệm trong $\left(-\frac{1}{5};0\right)$.

Vậy PT (2) có nghiệm duy nhất $x=-\frac{1}{5}$.

Cách 2. Đánh giá hai vế

Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ xác định trên D.

Nếu $\begin{cases} f(x) \geq m(x) \\ g(x) \leq m(x) \end{cases} \forall x \in D$ thì

$$f(x) = g(x) \text{ với } x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m(x) \\ g(x) = m(x). \end{cases}$$

Trong cách đánh giá này ta thường dùng các bất đẳng thức quen thuộc để đánh giá hai vế. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} = 2(x-1)^4(2x^2-4x+1) \quad (3)$$

Lời giải. Điều kiện $0 \leq x \leq 2$.

Đặt $t = (x-1)^2$, ta có $0 \leq t \leq 1$.

PT (3) trở thành

$$\sqrt{1+\sqrt{1-t}} + \sqrt{1-\sqrt{1-t}} = 2t^2(2t-1).$$

Nhận thấy $2t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế và rút gọn ta được

$$1+\sqrt{t} = 2t^4(2t-1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^3\sqrt{t}} = 2(2t-1)^2.$$

Vì $t \leq 1$ nên $\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^3\sqrt{t}} \geq 2$.

Từ đó suy ra $t = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy nghiệm của PT (3) là $x = 2$.

Thí dụ 4. Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x} - x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4) \quad (4)$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 1$ hoặc $x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Gọi vế trái và vế phải của (4) thứ tự là A và B.

Áp dụng BĐT Bunhiacovski cho hai bộ số $(1, 1, -x)$ và $(\sqrt{3x^2-1}, \sqrt{x^2-x}, \sqrt{x^2+1})$ ta có

$$A \leq \sqrt{(x^2+2)(5x^2-x)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.

Do $x \geq 1$ hoặc $x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $5x^2 - x > 0$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$B = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[5x^2 - x + 2(x^2+2)\right]$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}.2\sqrt{(5x^2-x)2(x^2+2)} = \sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$ và $x = \frac{4}{3}$.

Vậy nghiệm của PT (4) là $x = -1$.

Thí dụ 5. Giải phương trình

$$\sqrt{13x^2-6x+10} + \sqrt{5x^2-13x+\frac{17}{2}} + \sqrt{17x^2-48x+36} = \frac{1}{2}(36x-8x^2-21) \quad (5)$$

Lời giải. Gọi vế trái và vế phải của (5) theo thứ tự là C và D. Ta có

$$C = \sqrt{(3x+1)^2+(2x-3)^2} + \sqrt{\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{x^2+(4x-6)^2} \geq |3x+1| + \left|2x-\frac{5}{2}\right| + |x|$$

$$\geq \left|3x+1+2x-\frac{5}{2}+x\right| = \left|6x-\frac{3}{2}\right| \geq 6x - \frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{3}{2}$.

Mặt khác $D = \frac{1}{2}\left[12x-3-2(4x^2-12x+9)\right] = \frac{1}{2}\left[12x-3-2(2x-3)^2\right] \leq \frac{1}{2}(12x-3) = 6x - \frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{3}{2}$.

Vậy nghiệm của PT (5) là $x = \frac{3}{2}$.

Cuối cùng, chúng tôi xin đưa ra một số bài để các bạn luyện tập.

Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$;

2. $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 4$;

3. $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2+4x+1}$;

4. $(x+2)\sqrt{x+1} = 2x+1$;

5. $\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$;

6. $32x^2 - 4x + 1 = \sqrt{4x(8x+1)}$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN VÀ THPT HÀ NỘI - AMSTERDAM
NĂM HỌC 2005 - 2006

(Đề thi đã đăng trên THTT số 344, tháng 2 năm 2006)

NGÀY THỨ NHẤT

Bài 1. 1) ĐK để P có nghĩa là $x \neq 1$ và $x > 0$.

Ta có

$$P = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x}+1-x+\sqrt{x}-1+x+1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}.$$

2) $P = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0$. PT này có hai nghiệm $x = 4$ và $x = \frac{1}{4}$.

Bài 2. 1) Với $m = 1 - 2\sqrt{2}$, BPT đã cho có dạng $-(6\sqrt{2}+1)x > 1-4\sqrt{2} \Leftrightarrow x < \frac{4\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}+1}$.

2) BPT đã cho được viết dưới dạng

$$(3m-4)x + (1-2m) > 0 \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = (3m-4)x + (1-2m)$. Đồ thị hàm số này là một đường thẳng nên để BPT (1) đúng với mọi $x > 1$ thì

$$\begin{cases} 3m-4>0 \\ f(1) = m-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Bài 3. 1) PT hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) có dạng

$$ax^2 - 2x + a^2 = 0 \qquad (1)$$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a>0 \\ \Delta' = 1-a^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1.$$

Lúc đó nếu gọi u, v lần lượt là hoành độ của A và B thì theo định lí Viète cho PT (1) ta có

$$\begin{cases} u+v = \frac{2}{a} > 0 \\ u.v = a > 0 \end{cases}$$

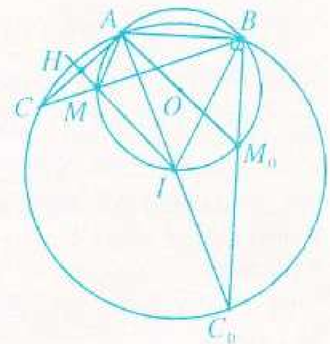
suy ra A, B nằm về bên phải trục tung (đpcm).

2) Từ kết quả 1) ta có

$$T = 2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{(2a)\left(\frac{1}{a}\right)}, \text{ hay } T \geq 2\sqrt{2}.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của T là $2\sqrt{2}$ đạt được khi và chỉ khi $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 4.



Hình 1

1) (h.1). Do I là điểm chính giữa cung lớn AB nên $IA = IB$ hay ΔAIB cân tại I.

• Nếu M thuộc cung IA (không chứa B) thì $\widehat{CMH} = \widehat{IMB}$ (đối đỉnh) (1)

Mặt khác

$$\text{sđ}\,\widehat{AMH} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\widehat{AM} + \text{sđ}\,\widehat{MI}) =$$

$$= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\widehat{IA} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\widehat{IB} = \text{sđ}\,\widehat{IMB} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra tam giác AMC cân tại M.

• Nếu M thuộc cung IB (không chứa A) thì lập luận tương tự cũng có ΔAMC cân tại M.

2) Từ kết quả câu 1) suy ra $IA = IC$, mà IA không đổi nên C nằm trên đường tròn tâm I bán kính IA. Khi $M \equiv A$ thì $C \equiv A$, còn khi $M \equiv B$ thì $C \equiv C_1$ (trong đó C_1 là giao điểm của đường thẳng qua A vuông góc với IB với đường tròn tâm I, bán kính IA). Do đó khi M chuyển động trên cung lớn $\widehat{AB}$ thì điểm C chuyển động trên cung $\widehat{AC_1}$ (đpcm).

3) Giả sử C_0 là giao điểm của AI với đường tròn tâm I, bán kính IA, còn M_0 là điểm đối xứng của A qua O. Nhận xét rằng, khi tia Ax trùng với tia AI thì M trùng M_0, lúc đó B, M_0, C_0 thẳng hàng. Từ mối liên hệ giữa độ dài dây cung và độ dài đường kính ta có $AM \leq AM_0$,

$AC \le AC_0$. Kí hiệu $p(\mathcal{H})$ là chu vi hình $\mathcal{H}$ thì $p(AMC) \le p(AM_0C_0)$.

Kết luận: Giá trị lớn nhất của $p(AMC)$ là $p(AM_0C_0)$ đạt được khi M là điểm xuyên tâm đối của A đối với đường tròn (O).

Bài 5. (Bạn đọc tự vẽ hình).

Dựng $AH \perp BC$, do $AB < AC$ nên H thuộc đoạn BM.

Ta có $AH = AM\sin\beta = \dfrac{1}{2}BC.\sin\beta$ (1)

Mặt khác $AH = AC.\sin\alpha = BC\sin\alpha.\cos\alpha$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\sin\beta = 2\sin\alpha.\cos\alpha$, dẫn đến

$$1 + \sin\beta = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 \text{ (đpcm).}$$

NGÀY THỨ HAI

Bài 6. Đặt $T = a+b+c$, lúc đó

$P = (T-a)(T-b)(T-c) - abc$

$= (ab+bc+ca)T - 2abc$ (1)

Vì T chia hết cho 4 nên trong ba số a, b, c có ít nhất một số chẵn. Từ (1) suy ra P chia hết cho 4 (đpcm).

Bài 7. 1) Đặt $u = (x+y)^2$, $v = xy$, với $m = -10$ hệ có dạng

$$\begin{cases} u^2 - 6v^2 + 23 = 0 & (2) \\ uv - 2v^2 = -10 & (3) \end{cases}$$

Từ (3) có $v^2 = \dfrac{2v^2 - 10}{v}$, thay vào (2) được $2v^4 + 17v^2 - 100 = 0$, suy ra $v^2 = 4 \Rightarrow v = -2$ (từ (3) ta thấy $v < 0$). Với $v = -2$ thì $u = 1$, dẫn đến $x+y = 1$ hoặc $x+y = -1$.

Giải các hệ $\begin{cases} x+y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$, ta đi đến kết luận hệ đã cho ứng với $m = -10$ có nghiệm (x, y) là $(-1, 2)$, $(2, -1)$, $(1, -2)$, $(-2, 1)$.

2) Nếu (x, y) là nghiệm của hệ thì $(-x, -y)$ cũng là nghiệm của hệ đó. Do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x = y = 0$. Thay $x = y = 0$ vào hệ ta gặp điều mâu thuẫn. Vậy không có giá trị nào của m để hệ bcó nghiệm duy nhất.

Bài 8. 1) Ta có $P+3 = x+(y^2+1) + (z^3+1+1) \ge x + 2y+3z$ (theo bất đẳng thức Cauchy) suy ra $P \ge x + 2y + 3z - 3$ (đpcm).

2) Áp dụng kết quả trên và bất đẳng thức Bunhiacovski ta có

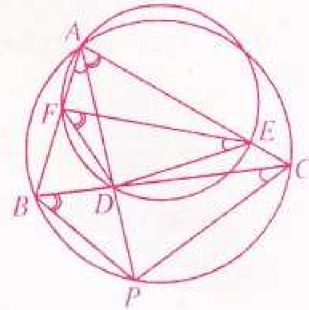
$$6(P+3) \ge (x+2y+3z)\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}\right)$$

$$\ge \left(\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2y}.\sqrt{\frac{2}{y}} + \sqrt{3z}.\sqrt{\frac{3}{z}}\right)^2 = 36$$

hay $P \ge 3$. Tóm lại, Min$P = 3$, đạt được khi $x = y = z = 1$.

Bài 9. 1) (h. 2).

Từ $DA.DP = DB.DC$ suy ra $\dfrac{DP}{DB} = \dfrac{DC}{DA}$, kết hợp với $\widehat{BDP} = \widehat{ADC}$ ta có $\Delta BDP \backsim \Delta ADC$, dẫn đến $\widehat{DPB} = \widehat{DCA}$ suy ra tứ giác $ABPC$ nội tiếp.



Hình 2

Vì các tứ giác $AEDF$ và $ABPC$ nội tiếp nên $\widehat{DEF} = \widehat{DAF} = \widehat{BCP}$; $\widehat{DFE} = \widehat{DAE} = \widehat{CBP}$.

Từ đây suy ra $\Delta DEF \backsim \Delta PCB$ (đpcm).

2) Do $\Delta DEF \backsim \Delta PCB$

nên $S' = \left(\dfrac{EF^2}{BC^2}\right).S_{PCB}$ (1)

Mặt khác $S_{PCB} = \dfrac{DP}{DA}.S$.

Vậy từ (1) ta có

$$S' = \frac{EF^2}{BC^2}.\frac{DP}{DA}.S \quad (2)$$

Ta lại có $\dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{1}{(BD+DC)^2}$

$$\le \frac{1}{4BD.DC} = \frac{1}{4DA.DP} \quad (3)$$

Từ (2), (3) ta nhận được

$$S' \le \frac{EF^2}{4DA.DP}.\frac{DP}{DA}.S = \left(\frac{EF}{2DA}\right)^2.S \text{ (đpcm).}$$

Bài 10. Xem bài báo "*Một lớp bài toán về các đường thẳng đồng quy*". THTT số 341, tháng 11 năm 2005.

QUÁCH VĂN GIANG
*(GV THPT Chu Văn An, Hà Nội
Sưu tầm và giới thiệu)*

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TIN
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TP. HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2005 - 2006

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. a) Cho $a, b > 0$, $c \neq 0$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \Leftrightarrow \sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}.$$
b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=1\\ \sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}=\sqrt{xy+2}.\end{cases}$$

Câu 2. a) Cho $p \geq 5$ là số nguyên tố sao cho $2p+1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $p+1$ chia hết cho 6 và $2p^2+1$ không phải là số nguyên tố.

b) Tính tổng các số nguyên dương từ 1 đến 1000 mà trong cách viết thập phân của chúng không chứa chữ số 4 và chữ số 5.

c) Cho tam thức bậc hai
$$P(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$
thỏa mãn điều kiện $P(x^2-2) = P^2(x) - 2$.
Chứng minh rằng $P(-x) = P(x)$ với mọi x.

Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC. Điểm D di động trên cạnh BC. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD tương ứng.

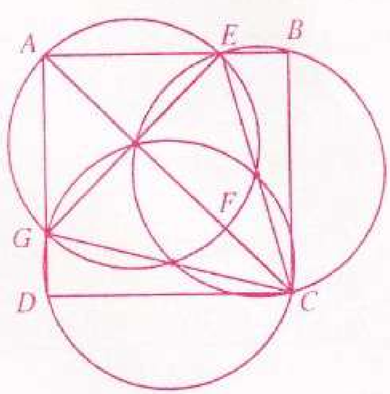
a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AO_1O_2 luôn đi qua một điểm cố định khác A.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AO_1O_2. Hãy xác định vị trí điểm D trên BC sao cho IO nhỏ nhất.

Câu 4. a) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. M là một điểm bất kì nằm trong hình vuông. Chứng minh rằng
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq 2.$$
b) Cho x, y, z, t là các số thực bất kì thuộc đoạn $[0; 1]$. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức
$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-t) + t(1-x) \leq 2.$$

Câu 5. Xét 81 chữ số, trong đó có 9 chữ số 1; 9 chữ số 2; ...; 9 chữ số 9. Hỏi có thể xếp được hay không tất cả các chữ số này thành một dãy, sao cho với mọi $k = 1, 2, ..., 9$, trong mỗi khoảng giữa hai chữ số k liên tiếp ở trên dãy có đúng k chữ số ?

TOÁN HỌC ... *(Tiếp bìa 3)*



Hình 3

Với $AB = a = 100$(cm) thì $AE = KH = xa \approx 79$ (cm).

2) Phủ $ABCD$ bằng ba hình tròn nhỏ đường kính GE, CE, CG (h. 3).

Đặt $AB = BC = a$ và $d = GE = CE = CG$ và $AE = ya$ (với $0 < y < 1$).

Trong ΔAGE vuông cân có $d^2 = 2y^2a^2$.

Trong ΔEBC vuông có $d^2 = a^2 + (1-y)^2a^2$.

Từ đó $a^2 + (1-y)^2a^2 = 2y^2a^2$

$\Rightarrow y^2 + 2y - 2 = 0$.

Giải ra được $y = \sqrt{3} - 1 \approx 0{,}7321$.

Với $AB = a = 100$(cm) thì
$$d = GE = AE\sqrt{2} = \sqrt{2}ya = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)a \approx 104 \text{ (cm)}.$$

PHI PHI

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 3

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1. (2 điểm)

1a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

$$y = x^3 - 3x + 3.$$

b) Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \frac{2004x}{x^2 - 5x + 6}.$$

Câu 2. (2 điểm)

a) Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{3} - \sqrt{3}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{B}{3} - \sqrt{3}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{C}{3} - \sqrt{3}\right) = 4\left(\operatorname{tg}\frac{A}{3} + \operatorname{tg}\frac{B}{3} + \operatorname{tg}\frac{C}{3} - \sqrt{3}\right).$$

b) Giải phương trình

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x} + \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 x} = 2.$$

Câu 3. (2 điểm)

a) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

b) Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

Câu 4. (3 điểm)

a) Cho hai đường thẳng

$$(d_1):\ \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2},$$

$$(d_2):\ \frac{x+8}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-10}{-1},$$

trong hệ tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$. Lập phương trình đường thẳng (d) cắt (d_1), (d_2) và (d) song song với trục Ox.

b) Cho tứ diện $OABC$ với $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Tính diện tích tam giác ABC theo a, b, c. Gọi α, β, γ là góc giữa OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1.$$

Câu 5. (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy cho parabol (P): $y = x^2$ ta lấy $A(-1;\ 1)$, $B(3;\ 9)$. Gọi (D) là miền phẳng giới hạn bởi đoạn AB và (D). Chứng minh rằng với M bất kì thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của (P) thì $\dfrac{S_{ABM}}{S_D} \le \dfrac{3}{4}$, ở đó S_D là diện tích miền (D), S_{ABM} là diện tích ΔABM.

ĐÀM VĂN NHỈ
(GV khoa Toán, ĐHSP Hà Nội)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

(Đề đăng trên THTT số 344, tháng 2 năm 2006)

Câu 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) Phương trình (PT) đường thẳng qua M là $y = a(x+3) + 1$. Đường thẳng là tiếp tuyến với (C) khi hệ PT sau có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+3}{x+1} = a(x+3)+1 & (1) \\ \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = a & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1), ta được PT

$$\frac{x^2+3x+3}{x+1} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}(x+3)+1.$$

Rút gọn ta được PT $x^2 + x - 1 = 0$.

PT này có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 + x_2 = -1$ và $x_1 x_2 = -1$.

Vậy qua M có hai tiếp tuyến với tích các hệ số góc là

$$a_1 a_2 = \frac{x_1^2 + 2x_1}{(x_1+1)^2} \cdot \frac{x_2^2 + 2x_2}{(x_2+1)^2}$$

$$= \frac{(x_1 x_2)^2 + 2x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 4x_1 x_2}{(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^2} = -1.$$

Suy ra hai tiếp tuyến qua M vuông góc với nhau.

Câu 2. a) ĐK $x > 0$. Đặt $t=\log_2 x \Rightarrow x=2^t$.

Ta được PT $3^t = 4^t - 1 \Leftrightarrow 3^t + 1 = 4^t$.

Dễ thấy PT thỏa mãn với $t = 1$.

Chia cả hai vế của PT cho 4^t, ta được

$$\left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t = 1.$$

Vế trái của PT là hàm nghịch biến còn vế phải bằng 1 nên $t = 1$ là nghiệm duy nhất của PT.

Với $t = 1$, ta được $x = 2$.

b) PT đã cho tương đương với

$$\frac{1+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1+\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)}{2}=\frac{1}{2}(\sin x+1).$$

$1+2\cos(2x+\pi)\cos\frac{\pi}{3}= \sin x$;

$1-\cos 2x= \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x=\sin x$.

- Với $\sin x = 0$ ta được $x = k\pi$.
- Với $\sin x=\frac{1}{2}$ ta được

$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. a) BPT $\Leftrightarrow f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}<m$.

$f'(x)=\frac{1-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{5}$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, từ đó $-1 < f(x) \le \sqrt{5}$ $\Leftrightarrow -1 < m \le \sqrt{5}$.

Do đó BPT $f(x) < m$ có nghiệm khi $m > -1$.

b) Đặt $t=\sqrt{3x+1}$ ta có $x=\frac{t^2-1}{3}$; $dx=\frac{2tdt}{3}$

$x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=2$

Ta được $I=\frac{2}{3}\int_1^2 t\, e^t dt$.

Đặt $\begin{cases} u=\frac{2t}{3} \\ dv=e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{2dt}{3} \\ v=e^t \end{cases}$

$$I=\left.\frac{2t.e^t}{3}\right|_1^2-\frac{2}{3}\int_1^2 e^t dt=\frac{2e^2}{3}.$$

Câu 4. a) Giả sử $A(a^2; a)$, $B(b^2; b)$ thuộc (P) với $a \ne b$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (a^2-1; a+1)$, $\overrightarrow{MB} = (b^2-1; b+1)$.

$MA \perp MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) + 1 = 0$ lúc đó $ab = a + b - 2$.

PT đường thẳng AB: $\frac{x-a^2}{b^2-a^2}=\frac{y-a}{b-a}$

$\Rightarrow x-a^2=(b+a).(y-a) \Rightarrow x=(b+a).y-ab$.

Thay $ab = a + b - 2$ ta được

$x=(b+a).y-a-b+2 \Rightarrow x=(b+a).(y-1)+2$.

Nếu $y = 1$, ta được $x = 2$, không phụ thuộc a, b. Vậy đường thẳng AB đi qua điểm cố định là $(2; 1)$.

b) Dễ thấy điểm $M(0; -1; 0) \in (d_1)$, $N(0; 1; 4) \in (d_2)$. Ta được $\overrightarrow{MN} = (0; 2; 4)$.

Vectơ chỉ phương của các đường thẳng (d_1), (d_2) lần lượt là $\overrightarrow{u_1}=(-1;2;3)$, $\overrightarrow{u_2}=(1;2;5)$.

Từ đó $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (4; 8; -4)$ nên

$\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN} = 0.$

Do đó (d_1), (d_2) cùng nằm trong một mặt phẳng (P).

Vì vectơ $\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (4; 8; -4)$ vuông góc với mặt phẳng (P) nên ta chọn vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_p} = (1; 2; -1)$.

Lại có điểm $M(0; -1; 0)$ nên mp(P) là

$x + 2y - z + 2 = 0.$

Ta thấy $A(1; -1; 1) \in$ mp(P). Đó là đpcm.

Câu 5. a) Gọi số tạo thành là $\overline{abcde}$. Xét các trường hợp sau:

- Nếu $e = 0$ thì khi đó $\overline{abcd}$ ứng với chỉnh hợp chập 4 của 8 chữ số khác 0 và 2.

Ta được số các số là $A_8^4 = 1680$.

- Nếu e khác 0 thì có 3 cách chọn e ($e = 4; 6; 8$).

Với mỗi cách chọn e ta có 7 cách chọn chữ số a khác 0; 2; e.

Với mỗi cách chọn e và a ta có $\overline{bcd}$ ứng với chỉnh hợp chập 3 của 7 chữ số khác a; e; 2.

(Xem tiếp trang 15)

MỘT SỐ GỢI Ý
KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Mỗi đề thi tuyển sinh vào Đại học thường có một câu về phương trình lượng giác (PTLG). Phương pháp thường gặp khi giải PTLG là thực hiện một số phép biến đổi lượng giác hợp lí để đưa bài toán về PT tích, đặt ẩn số phụ để quy về PT bậc hai, bậc ba, từ đó đưa về PT lượng giác cơ bản... Ta nói biến đổi hợp lí vì các đồng nhất thức lượng giác thường rất đa dạng.

Ví dụ, nếu cần biến đổi $\cos^4 x-\sin^4 x$, thì tùy theo đầu bài cụ thể, chúng ta sử dụng một trong các đồng nhất sau :

$$\cos^4 x-\sin^4 x = \cos^2 x-\sin^2 x = \cos 2x$$
$$= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Trong bài viết, xin được bỏ qua các phép biến đổi đơn giản hoặc viết nghiệm của các PT cơ bản.

1/ Biến đổi trực tiếp về phương trình cơ bản

Thí dụ 1. Giải phương trình

$$\cos^3 x.\sin 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\frac{3}{8} \quad (1)$$

Lời giải. Biến đổi vế trái của (12) ta có

$\cos^3 x(3\sin x-4\sin^3 x) + \sin^3 x(4\cos^3 x-3\cos x)$

$= 3\cos^3 x.\sin x-3\sin^3 x.\cos x$

$= 3\sin x.\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=\frac{3}{2}\sin 2x.\cos 2x=\frac{3}{4}\sin 4x.$

PT (1) trở thành $\sin 4x=\frac{1}{2}.$

Lưu ý. Các đồng nhất lượng giác thường gặp khi giải toán :

$$\cos^3 x.\sin 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\frac{3}{4}\sin 4x\ ;$$

$$\cos^3 x.\cos 3x+\sin^3 x.\sin 3x=\cos^3 2x\ ;$$

$$\cos^4 x+\sin^4 x= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$
$$=\frac{1+\cos^2 2x}{2}=\frac{3+\cos 4x}{4}\ ;$$

$$\cos^6 x+\sin^6 x = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$
$$=\frac{1+3\cos^2 2x}{4}=\frac{5+3\cos 4x}{8}.$$

2/ Đặt ẩn số phụ để đưa về phương trình bậc hai, bậc ba, ...

Thí dụ 2. Giải phương trình

$$1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{2}\sin 2x. \quad (2)$$

Lời giải

(2) $\Leftrightarrow 1+(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=3\sin x\cos x.$

Đặt $t=\sin x+\cos x$ thì $t=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \Rightarrow$ $|t| \le \sqrt{2}$, lúc đó $\sin x.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$. PT đã cho trở thành

$t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2 + 2t - 5) = 0.$

Chú ý đến ĐK : $|t| \le \sqrt{2}$ ta nhận được $t = -1$.

Với $t = -1$ ta được $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Lưu ý. Nếu đặt $t = \sin x + \cos x$ thì $\sin 2x = t^2 - 1$; $\sin.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$;

Nếu đặt $t = \sin x - \cos x$ thì $\sin 2x = 1 - t^2$; $\sin.\cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Trong cả hai phép đặt trên, đều có ĐK $t \le \sqrt{2}$.

Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\sin x.\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x \quad (3)$$

Lời giải

(3) $\Leftrightarrow 2\sin^2 x.\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 6\cos^3 x.$

Nhận thấy nếu $\cos x = 0$, (3) không thỏa mãn. Chia cả hai vế của (3) cho $\cos^3 x$, ta được

$$2\mathrm{tg}^2 x + 3\mathrm{tg}x.(1 + \mathrm{tg}^2 x) - 4\mathrm{tg}^3 x = 6.$$

Đặt $t = \text{tg}x$ thì

$t^3-2t^2-3t+6=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2-3)=0$.

Từ đó, dễ dàng tìm được

$\text{tg}x = 2$; $\text{tg}x = -\sqrt{3}$; $\text{tg}x = \sqrt{3}$.

Lưu ý. Nếu trong PT chỉ có các số hạng bậc nhất và bậc ba đối với $\sin x$ và $\cos x$, thì ta có thể chia hai vế của PT cho $\cos^3 x$ hoặc $\sin^3 x$ để đưa PT đã cho về PT bậc ba của $\text{tg}x$ hoặc $\text{cotg}x$.

Thí dụ 4. Giải phương trình

$$\text{tg}x + 2\sin 2x = 3 \quad (4)$$

Lời giải. ĐK $\cos x \neq 0$.

Đặt $\text{tg}x = t$, ta được PT

$$t+\frac{4t}{1+t^2}=3 \Leftrightarrow t^3-3t^2+5t-3=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2-2t+3)=0.$$

Vì $t^2-2t+3>0$ nên ta được nghiệm : $t=1 \Rightarrow \text{tg}x = 1$.

Lưu ý. Nếu PT có các số hạng : $\text{tg}x$, $\text{cotg}x$ và $\cos 2x$, $\sin 2x$, ... thì ta đặt $\text{tg}x = t$ khi đó :

$$\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2}; \ \cos 2x=\frac{1-t}{1+t^2}; \ \text{tg}2x=\frac{2t}{1-t^2}.$$

Sau đó biến đổi về một PT bậc cao đối với t.

3/ Biến đổi về phương trình tích

Thí dụ 5. Giải phương trình

$$2\sin 3x-\frac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\frac{1}{\cos x} \quad (5)$$

Lời giải. ĐK $\sin x \neq 0$; $\cos x \neq 0$.

$$2(\cos 3x-\sin 3x)+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[4(\cos^3 x+\sin^3 x)-3(\cos x+\sin x)\right]+$$

$$+\frac{\cos x+\sin x}{\sin x.\cos x}=0.$$

Nhận thấy các số hạng có thừa số chung

$\cos x + \sin x$.

Dễ dàng biến đổi PT (5) thành

$$(\cos x+\sin x)\left[2(1-4\cos x\sin x)+\frac{1}{\sin x.\cos x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(2\sin^2 2x-\sin 2x-1)=0.$$

Ta được:

$$\cos x+\sin x=0; \ \sin 2x=1; \ \sin 2x=-\frac{1}{2}.$$

Lưu ý. Các số hạng có chứa thừa số $(\cos x+\sin)$ là: $\cos 2x$; $\cos^3 x + \sin^3 x$; $\cos^4 x - \sin^4 x$; $\cos 3x - \sin 3x$; $1 + \text{tg}x$; $\text{tg}x - \text{cotg}x$;...

Cũng tương tự, các bạn tự viết các số hạng có chứa thừa số $(\cos x - \sin x)$.

Thí dụ 6. Giải phương trình

$$\cos x.\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}-\sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2} \quad (6)$$

Lời giải

$(6) \Leftrightarrow \cos x.(\cos x+\cos 2x) + \sin x(\cos 2x-\cos x) = 1$

$\Leftrightarrow \cos x.\cos 2x+\sin x.\cos 2x-\sin x\cos x-\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x.(\cos x+\sin x)-\sin x(\cos x+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos 2x-\sin x)=0$.

Ta được :

$\cos x+\sin x=0$; $\cos 2x-\sin x=0$.

Lưu ý. Nếu trong PT có chứa các số hạng là tích của nhiều thừa số đối với sin hoặc cosin thì nói chung, ta phải sử dụng công thức biến tích thành tổng sau đó tìm cách đưa về PT tích hoặc đặt ẩn số phụ để được PT bậc 2, 3...

4/ Cách đánh giá hai vế

Thí dụ 7. Giải phương trình

$$(\cos 4x-\cos 2x)^2=5+\sin 3x \quad (7)$$

Lời giải. Ta có $4\sin^2 3x.\sin^2 x=5+\sin 3x$.

Vì $0 \le \sin^2 3x \le 1$; $0 \le \sin^2 x \le 1$; $\sin 3x \ge -1$;

nên $4\sin^2 3x.\sin^2 x \le 4 \le 5+\sin 3x$

$$(7) \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 3x.\sin^2 x=1\\ \sin 3x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 3x=-1\\ \sin^2 x=1.\end{cases}$$

Từ phương trình $\sin^2 x=1 \Rightarrow \sin x = \pm 1$.

- $\sin x = 1 \Rightarrow \sin 3x = -1$ (thỏa mãn).
- $\sin x = -1 \Rightarrow \sin 3x = 1$ (loại).

Lưu ý. Các BĐT thường dùng để ước lượng:

$$|\sin x|\le 1; \ |\cos x|\le 1; \ |a\sin x+b\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}.$$

Nếu m, n là các số tự nhiên lớn hơn 2 thì

$$\sin^m x \pm \cos^n x \le \sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Bài tập. Giải các phương trình sau:

1. $\sin^2 3x=4\cos 4x+3$;

2. $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x =$
$= \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x$;

3. $\dfrac{\sin x+\sin 2x}{\sin 3x}=-1$;

4. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right).\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=\cos^4 4x$.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

LTS. *Ngày 9-2-2006 Tòa soạn THTT đã nhận được bức thư của* ***GS. TSKH. Trần Văn Nhung,*** *Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo gửi kèm một bài báo của tác giả Nairi M.Sedrakyan nêu các hướng tổng quát hóa cho một bất đẳng thức trong Kì thi Toán Quốc tế lần thứ 46 tại Mexico. Trong thư viết:* ***"Hơn 10 năm trước đây tôi đã kiến nghị nên dịch đầu đề các bài toán từ tiếng Việt ra tiếng Anh và có thêm các bài viết bằng tiếng Anh trên Tạp chí của chúng ta và rất mừng thấy rằng, những năm gần đây điều đó đã được thực hiện. Nói riêng, loạt bài của GS. TSKH. Ngô Việt Trung rất bổ ích cho việc này.***

Thiết nghĩ, hiện nay Việt Nam đang tích cực tham gia vào quá trình hội nhập quốc tế, việc tăng cường dùng các ngoại ngữ quốc tế, mà trước hết là tiếng Anh, và Công nghệ Thông tin - truyền thông trong giảng dạy, nghiên cứu, in ấn các tài liệu khoa học - kĩ thuật, mà trước hết là toán học, là rất cần thiết và bổ ích. Trong các trường Đại học, Cao đẳng nơi có điều kiện, chủ trương này sẽ sớm được thí điểm và triển khai.

Xin được giới thiệu cùng bạn đọc bài báo và đề nghị Tòa soạn cho đăng nguyên bản tiếng Anh và không cần kèm theo bản dịch tiếng Việt".

Tòa soạn xin cảm ơn Thứ trưởng và trân trọng giới thiệu toàn văn bài báo cùng bạn đọc.

AROUND AN INEQUALITY FROM THE 46th IMO

NAIRI M. SEDRAKYAN

Nairi M.Sedrakyan

Nairi Sedrakyan teaches mathematics in the Shahinyan High School of Physics and Mathematics in Yerevan, Armenia. From 1986 he has been a Jury member of the Armenian Mathematical Olympiads. From 1997 he has been Leader and Deputy leader of the Armenian team at IMO. He is author of books Inequalities: Methods of Proving, *Fizmatlit, Moscow, 2002, 256p;* Geometrical Inequalities, *Edit Print, Yerevan, 2004 (both in Russian) 364p.*

The problem No. 3 proposed at the 46th IMO was to prove the following inequality

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+x^2+z^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0\,(1)$$

where x, y, z are positive numbers and $xyz \geq 1$.

In this article a solution will be presented which deffers from the author's solution which can be found in the *Short–listed problems* of the 46th IMO.

Note that

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}=\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+\frac{1}{x^3}(y^2+z^2)}\geq\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+y^2+z^2},$$

hence

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+x^2+z^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}$$

$$\geq\frac{x^2+y^2+z^2-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\geq\frac{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}{x^2+y^2+z^2}\geq 0.$$

Hence the inequality (1) is correct.

This solution allows to make the following generalization.

Given $x, y, z > 0$ and $xyz \geq 1$, prove the following inequalities:

a) $\dfrac{x^\alpha - x^2}{x^\alpha + y^2 + z^2} + \dfrac{y^\alpha - y^2}{y^\alpha + x^2 + z^2} + \dfrac{z^\alpha - z^2}{z^\alpha + x^2 + y^2} \ge 0$ (2)

where $2 \le \alpha \le 5$.

b) $\dfrac{x^\alpha - x^2}{x^\alpha + y^2 + z^2} + \dfrac{y^\alpha - y^2}{y^\alpha + x^2 + z^2} + \dfrac{z^\alpha - z^2}{z^\alpha + x^2 + y^2} \le 0$ (3)

where $-1 \le \alpha \le 2$.

Proof

a) If $\alpha \ge 2$, then

$$\frac{x^\alpha - x^2}{x^\alpha + y^2 + z^2} = \frac{x^2 - x^{4-\alpha}}{x^2 + \frac{1}{x^{\alpha-2}}(y^2+z^2)} \ge \frac{x^2 - x^{4-\alpha}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Now we will prove, that if $2 \le \alpha \le 5$, then $x^2 + y^2 + z^2 \ge x^{4-\alpha} + y^{4-\alpha} + z^{4-\alpha}$, from which we will find that the inequality (2) holds:

Indeed, for $2 \le \alpha \le 4$, we have that $x^{4-\alpha}(x^{\alpha-2} - 1) \ge x^{\alpha-2} - 1$ hence

$$x^2 - x^{4-\alpha} + y^2 - y^{4-\alpha} + z^2 - z^{4-\alpha}$$
$$\ge x^{\alpha-2} + y^{\alpha-2} + z^{\alpha-2} - 3 \ge 3\sqrt[3]{(xyz)^{\alpha-2}} - 3 \ge 0.$$

If $4 < \alpha \le 5$ we have

$$x^{4-\alpha} + y^{4-\alpha} + z^{4-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-4}} + \frac{1}{y^{\alpha-4}} + \frac{1}{z^{\alpha-4}}$$
$$\le (yz)^{\alpha-4} + (xz)^{\alpha-4} + (xy)^{\alpha-4}$$
$$\le \frac{y^{2(\alpha-4)} + z^{2(\alpha-4)}}{2} + \frac{x^{2(\alpha-4)} + z^{2(\alpha-4)}}{2} + \frac{x^{2(\alpha-4)} + y^{2(\alpha-4)}}{2}$$
$$= x^{2(\alpha-4)} + y^{2(\alpha-4)} + z^{2(\alpha-4)}.$$

On the other hand

$$x^2 - x^{2(\alpha-4)} = x^{2(\alpha-4)}(x^{10-2\alpha} - 1) \ge x^{10-2\alpha} - 1,$$

consequently

$$x^2 + y^2 + z^2 - x^{2(\alpha-4)} - y^{2(\alpha-4)} - z^{2(\alpha-4)}$$
$$\ge x^{10-2\alpha} + y^{10-2\alpha} + z^{10-2\alpha} - 3 \ge 3\sqrt[3]{(xyz)^{10-2\alpha}} - 3 \ge 0.$$

Thus $x^2 + y^2 + z^2 \ge x^{2(\alpha-4)} + y^{2(\alpha-4)} + z^{2(\alpha-4)}$ $\ge x^{4-\alpha} + y^{4-\alpha} + z^{4-\alpha}$ and hence the point a) is proven.

b) Note that

$$\frac{x^\alpha - x^2}{x^\alpha + y^2 + z^2} \le \frac{x^\alpha - x^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

hence

$$\frac{x^\alpha - x^2}{x^\alpha + y^2 + z^2} + \frac{y^\alpha - y^2}{y^\alpha + x^2 + z^2} + \frac{z^\alpha - z^2}{z^\alpha + x^2 + y^2}$$
$$\le \frac{x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha - x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Now we will prove:

$$-1 \le \alpha \le 2,\ x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha \le x^2 + y^2 + z^2$$

from which will follow proof of inequality (3).

Indeed, when $0 \le \alpha \le 2$ we have that

$$x^2 + y^2 + z^2 - x^\alpha - y^\alpha - z^\alpha$$
$$= x^\alpha(x^{2-\alpha} - 1) + y^\alpha(y^{2-\alpha} - 1) + z^\alpha(z^{2-\alpha} - 1)$$
$$\ge 1(x^{2-\alpha} - 1) + 1(y^{2-\alpha} - 1) + 1(z^{2-\alpha} - 1)$$
$$\ge 3\sqrt[3]{(xyz)^{2-\alpha}} - 3 \ge 0.$$

When $-1 \le \alpha \le 0$ we have that

$$x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}} + \frac{1}{y^{-\alpha}} + \frac{1}{z^{-\alpha}} \le$$
$$\le (yz)^{-\alpha} + (xz)^{-\alpha} + (xy)^{-\alpha}$$
$$\le \frac{y^{-2\alpha} + z^{-2\alpha}}{2} + \frac{x^{-2\alpha} + z^{-2\alpha}}{2} + \frac{x^{-2\alpha} + y^{-2\alpha}}{2}$$
$$= x^{-2\alpha} + y^{-2\alpha} + z^{-2\alpha} \le x^2 + y^2 + z^2$$

(see the proof in the case $0 \le \alpha \le 2$).

Thus the proof of b) is completed.

A natural question arises, whether inequality (2) in the case $\alpha > 5$ (or the inequality (3) in the case $\alpha \le -1$) is still correct. Now we will prove in the another way that the inequality (2) holds also in the case $2 \le \alpha \le 6$ (a similar approach was used by *Titu Andreescu* in the case $\alpha = 5$).

We introduce the following notations:

$\beta = \frac{1}{2}\alpha$, $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$, then $a, b, c > 0$, $abc \ge 1$ and $1 \le \beta \le 3$.

Now we have to prove, that

$$\frac{a^\beta - a}{a^\beta + b + c} + \frac{b^\beta - b}{b^\beta + a + c} + \frac{c^\beta - c}{c^\beta + a + b} \ge 0 \quad (4)$$

Here we will make use of the following inequality:

$$\frac{a_1^p}{b_1^{p-1}} + \dots + \frac{a_n^p}{b_n^{p-1}} \ge \frac{(a_1 + \dots + a_n)^p}{(b_1 + \dots + b_n)^{p-1}},$$

where $p \ge 1$ and $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ are positive numbers.

The latter can be obtained by using Hölder's inequality:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{q}} \ge \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\,,$$

for $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$, $p, q > 0$ and $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Indeed we have

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\left(\frac{a_i}{b_i^{\frac{p-1}{p}}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(b_i^{\frac{p-1}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \ge \sum_{i=1}^{n} a_i\,,$$

consequently

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^p}{b_i^{p-1}}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{p-1} \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p,$$

from which we get

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^p}{b_i^{p-1}} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{p-1}}.$$

Note that

$$a^\beta+b+c=\frac{a^\beta}{1^{\beta-1}}+\frac{b^\beta}{b^{\beta-1}}+\frac{c^\beta}{c^{\beta-1}} \ge \frac{(a+b+c)^\beta}{(1+b+c)^{\beta-1}},$$

hence $\frac{1}{a^\beta+b+c}+\frac{1}{b^\beta+a+c}+\frac{1}{c^\beta+a+b}$

$$\le \frac{(1+b+c)^{\beta-1}+(1+a+c)^{\beta-1}+(1+a+b)^{\beta-1}}{(a+b+c)^\beta}$$

Let us prove now, that if $0 \le \gamma = \beta - 1 \le 2$, then

$$(1+b+c)^\gamma+(1+a+c)^\gamma+(1+a+b)^\gamma \le$$
$$\le 3(a+b+c)^\gamma \qquad (5)$$

First prove the inequality (5) in the case $\gamma = 2$. Indeed for $\gamma = 2$ the inequality (5) can be presented in the following form:

$$(a+b+c-2)^2+2(ab+bc+ca) \ge 7,$$

which is correct since

$$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \ge 3$$

and $\quad ab+bc+ac \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2} \ge 3.$

When $0 \le \gamma < 2$ then according to *Jensen's inequality* we have

$$(1+b+c)^\gamma+(1+a+c)^\gamma+(1+a+b)^\gamma$$
$$\le \left((1+b+c)^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}+\left((1+a+c)^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}+\left((1+b+b)^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}$$
$$\le 3\left(\frac{(1+b+c)^2+(1+a+c)^2+(1+a+b)^2}{3}\right)^{\frac{\gamma}{2}}$$
$$\le 3\left((a+b+c)^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}=3(a+b+c)^\gamma.$$

Thus using the inequality (5) we get

$$\frac{1}{a^\beta+b+c}+\frac{1}{b^\beta+a+c}+\frac{1}{c^\beta+a+b}$$
$$\le \frac{(1+b+c)^{\beta-1}+(1+a+c)^{\beta-1}+(1+a+b)^{\beta-1}}{(a+b+c)^\beta}$$
$$\le \frac{3(a+b+c)^{\beta-1}}{(a+b+c)^\beta}=\frac{3}{a+b+c},$$

consequently

$$\frac{1}{a^\beta+b+c}+\frac{1}{b^\beta+a+c}+\frac{1}{c^\beta+a+b} \le \frac{3}{a+b+c},$$

which is just (4) written in another way:

I think that (2) is correct for all $\alpha \ge 2$. To end I will prove it for $\alpha = 8$. We must prove, that

$$\frac{1}{a^4+b+c}+\frac{1}{b^4+a+c}+\frac{1}{c^4+a+b} \le \frac{3}{a+b+c},$$

where $a, b, c > 0$ and $abc \ge 1$.

We have

$$a^4+b+c=\frac{(a^2)^2}{1}+\frac{(b^2)^2}{b^3}+\frac{(c^2)^2}{c^3}$$
$$\ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{1+b^3+c^3},$$

hence it will be sufficient to prove that

$$(3+2(a^3+b^3+c^3))(a+b+c) \le 3(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Introduce the following notations $a+b+c = s$, $ab+bc+ac = p$. We have

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = s^2 - 2p,$$
$$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)+3abc$$
$$= s(s^2-3p) + 3abc,$$

consequently we must prove that

$$(3 + 2(s^3 - 3sp + 3abc))s \le 3(s^2 - 2p)^2,$$
$$6sabc + 3s + 6s^2p \le s^4 + 12p^2,$$
$$2(p^2 - 3sabc) + (s^2 - 3p)^2 + (p^2 - 3s) \ge 0.$$

The latter is true since

$$p^2 = (ab+bc+ac)^2 \ge$$
$$\ge 3(ab.bc+ab.ac+bc.ac) = 3sabc.$$

SỬ DỤNG MÁY TÍNH BỎ TÚI NHƯ MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

PHẠM VĂN ĐIỆP
(GV Hà Trung, Thanh Hóa)

Từ khi máy tính bỏ túi xuất hiện và phổ biến rộng rãi đã thật sự gây nên một cuộc cách mạng trong dạy và học toán ở nhà trường phổ thông. Học sinh có thể dùng máy tính thực hiện các phép tính nhanh chóng và chính xác. Trong bài viết này chúng tôi xin giới thiệu một tác dụng của máy tính - một phương pháp giải toán. Các thí dụ dưới đây thực hiện trên các máy tính CASIO *fx*-500MS và *fx*-570MS.

1. Máy tính bỏ túi và phương trình

Thí dụ 1. Giải phương trình, bất phương trình

1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3^{\cos x}-\log_6 2005\geq 0$;

2) $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$.

Khi tôi ra hai bài này cho học sinh kết quả thu được không cao lắm. Lớp có 50 học sinh chỉ có hơn 10 em giải được cả hai bài nhưng hầu hết phải dùng đạo hàm và rất phức tạp.

Duy nhất có một em giải câu 1 như sau:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3^{\cos x}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{0}+3^1=4$$

$$\log_6 2005>\log_6 1296=4.$$

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

Cách giải ngắn gọn đơn giản nhưng em học sinh này đã phải mất rất nhiều thời gian mới tìm ra được số trung gian để so sánh là 4. Nếu em học sinh kia linh hoạt hơn tính $\log_6 2005$ bằng máy tính để thấy giá trị gần đúng của nó thì thời gian sẽ được rút ngắn đi nhiều

$$\log_6 2005 = 4{,}243537...$$

Câu 2 các em đều cho rằng bài toán này khó mà làm được trong vòng 15 phút. Thực ra dùng máy tính có thể thử tìm được một nghiệm của nó là $x=3$. Ta biến đổi phương trình trên thành

$$(x-3)\left[x^2-8-\frac{32}{(\sqrt[4]{4x+4}+2)(\sqrt{4x+4}+4)}\right]=0$$

(Các bạn tự kiểm tra).

Dễ thấy hàm số

$$f(x)=x^2-8-\frac{32}{(\sqrt[4]{4x+4}+2)(\sqrt{4x+4}+4)}.$$

đồng biến trên miền xác định của nó, nên $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất. Vậy kết luận phương trình ban đầu có nghiệm $x=3$.

Với một em học sinh thành thạo máy tính để giải xong câu 2 chỉ cần 5 phút. Máy tính là công cụ đắc lực để giải các bài toán về phương trình và bất phương trình. Nên dùng máy tính để thử lại nghiệm của phương trình, bất phương trình sau khi giải xong nếu thời gian cho phép.

Với một học sinh lớp 11 thì giải phương trình bậc hai là việc quá quen thuộc. Trên máy tính cũng có chương trình giải nhanh chóng phương trình loại này. Tuy nhiên để học sinh làm quen với khái niệm lập trình nên hướng dẫn các em tìm cách giải phương trình bậc hai trên máy tính mà không dựa vào chương trình cài sẵn. Chẳng hạn làm như sau: (Trên máy *fx*-570MS).

Ta lần lượt đưa vào máy các lệnh bằng phím chữ đỏ để nhập các số *ABC*, tính $\sqrt{\Delta}$, tính hai nghiệm (mỗi lần bấm phím đỏ đều cần ấn $\boxed{\text{ALPHA}}$ trước đó, trừ dấu ( ) và +, −, ÷) như sau:

$$ABC: D=\sqrt{\ }(B^2-4AC):(-B+D)\div 2A:(-B-D)\div 2A$$

Kết thúc ta ấn $\boxed{\text{CALC}}$. Máy sẽ hiện lần lượt các chữ *ABC*. Ta nhập các hệ số của phương trình cần giải tương ứng. Thí dụ PT $x^2-5x+6=0$ thì A nhập 1, B nhập -5, C nhập 6. Ấn $\boxed{=}$ sau khi đã nhập xong. Nếu thấy hiện "Math ERROR" tức là phương trình vô nghiệm; nếu không máy sẽ lần lượt cho kết quả *ABC*, *D*, x_1, x_2 sau khi ta ấn $\boxed{=}$ liên tiếp.

Thí dụ trên cho các em học sinh biết thế nào là thuật toán, nâng cao tầm suy nghĩ của các em. Cách làm trên tương ứng như cách giải trong chương trình cài sẵn của máy. Các thầy, cô giáo có thể cho các em thực hiện bài toán tương tự với hệ bậc nhất hai ẩn, đối xứng, phương trình trùng phương... Hiệu quả sư phạm của loại toán này đặc biệt bổ ích.

2. Máy tính bỏ túi và bất đẳng thức

Khi học buổi đầu tiên về bất đẳng thức lượng giác, tôi đã cho các em học sinh làm một thực nghiệm sau đây. Mỗi em dùng máy tính, tự chọn một tam giác có các góc A, B, C tùy chọn rồi tính tổng $T = \cos A + \cos B + \cos C$. Sau khi tổng hợp kết quả từ 50 em học sinh lên bảng, tôi mời một số em nhận xét kết quả. Có vài em phát hiện ra $T \leq \frac{3}{2}$. Khẳng định rằng $T \leq \frac{3}{2}$ và yêu cầu các em chứng minh điều đó. Tiết học rất sôi nổi. Các em tiếp thu bài rất tốt.

Máy tính có thể ứng dụng làm công cụ giảng dạy toán trong nhà trường một cách hiệu quả.

Khi học đến phần nhận dạng tam giác đều có một điều mà học sinh thường băn khoăn. Ai cũng biết phương pháp chủ yếu để nhận dạng tam giác đều là dùng bất đẳng thức. Các em học sinh thường không biết phải chứng minh bất đẳng thức theo chiều nào.

Thí dụ 2. Nhận dạng ΔABC biết

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Tôi khuyên các em học sinh dùng máy tính làm hai bước sau:

Bước 1. Thay thử $A = 60^\circ$; $B = 60^\circ$; $C = 60^\circ$ xem có xảy ra đúng đẳng thức không. Nếu đúng đây là loại nhận dạng có kết quả là tam giác đều.

Bước 2. Chọn một tam giác có A, B, C tùy ý rồi thử sẽ thấy được một bất đẳng thức. Chẳng hạn với $A = 22^\circ$; $B = 55^\circ$; $C = 103^\circ$ thì

$$\sin A + \sin B + \sin C \approx 2{,}168128703 < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

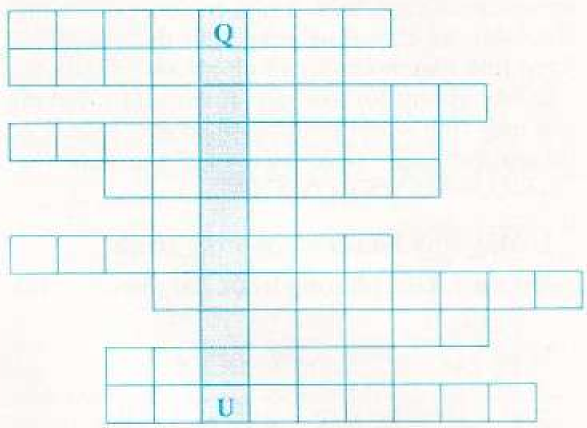
Khi đã có định hướng học sinh chỉ cần chứng minh

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Cách làm trên cho học sinh thấy để giải một bài toán không chỉ có suy luận lôgic mà còn phải có linh cảm toán học, dự đoán được quy luật, các bước đi đến kết quả.

Máy tính bỏ túi còn có thể giúp giải nhanh các hệ phương trình, giải các bài tập về thống kê. Phức tạp hơn một chút là các bài tập về dãy, chẳng hạn như bài tập về dãy Fibonaci máy tính bỏ túi có thể giải nhanh chóng. Do khuôn khổ của báo nên xin được dừng bài viết ở đây. Mong các bạn đồng nghiệp có thêm bài viết về sử dụng máy tính bỏ túi để giải toán, giúp học sinh phát triển tư duy thuật toán.

Ô CHỮ THÁNG 3



Dựa vào các gợi ý theo dòng dưới đây, bạn hãy tìm các chữ cái, không kể dấu trên mỗi dòng để biết cột dọc in đậm có nghĩa là gì nhé.

Dòng 1: Một cách gọi phụ nữ theo lối cổ.

Dòng 2: Người anh hùng dân tộc quê ở Châu Phong.

Dòng 3: Năm của cuộc khởi nghĩa đầu tiên của Việt Nam ghi được trong sử sách.

Dòng 4: Phố đặt trụ sở báo Phụ nữ Việt Nam.

Dòng 5: Người phụ nữ muốn đạp sóng dữ, chém cá kình ở biển Đông.

Dòng 6: Vắng đàn ông quạnh nhà, vắng đàn bà quạnh...

Dòng 7: Ước mơ lớn của phái đẹp.

Dòng 8: Niềm quan tâm của đa số bạn nữ.

Dòng 9: Người phụ nữ nổi tiếng thời kháng chiến 1954 - 1975.

Dòng 10: Niềm vui và tài sản lớn nhất của phụ nữ.

Dòng 11: Để cân bằng giữa công việc và gia đình.

BNH

Giải thưởng LÊ VĂN THIÊM 2005

Hội đồng Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2005 quyết định trao Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2005 cho các giáo viên và học sinh sau:

1. Giáo viên

Nguyễn Thanh Dũng, sinh năm 1961, giáo viên trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

Thành tích: Từ 1983-1997 giảng dạy tại trường Quốc học Huế. Từ 1997 đến nay giảng dạy tại trường phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh. Đã đào tạo nhiều học sinh giỏi Toán đoạt giải Quốc gia (trong đó có 1 giải Nhất, 8 giải Nhì), 1 học sinh đoạt Huy chương Bạc Olympic Châu Á - Thái Bình Dương, 2 học sinh đoạt Huy chương Bạc Olympic Toán Quốc tế.

2. Học sinh

1. ***Trần Chiêu Minh***, lớp 12, Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh. Thành tích: giải Nhì thi học sinh giỏi Toán toàn quốc 2005, Huy chương Bạc Olympic Toán Quốc tế Mexico 2005.

2. ***Trần Trọng Đan***, lớp 12, Trường THPT Trần Phú, Hải Phòng. Thành tích: giải Nhì cuộc thi giải toán "40 năm Toán học Tuổi trẻ", giải Nhất thi học sinh giỏi Toán toàn quốc 2005, Huy chương Bạc Olympic Toán Quốc tế Mexico 2005.

3. ***Đỗ Quốc Khánh***, lớp 12, Trường THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng. Thành tích: giải Ba thi học sinh giỏi Toán toàn quốc 2004, giải Nhất thi học sinh giỏi Toán toàn quốc 2005, Huy chương Đồng Olympic Toán Quốc tế Mexico 2005.

HÀ HUY KHOÁI (*Viện Toán học VN*)

HỘI THẢO CHƯƠNG TRÌNH GIẢNG DẠY TOÁN CÁC BẬC HỌC PHỔ THÔNG CỦA HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Nhân dịp đầu xuân Bính Tuất, ngày 25-02-2006 tại Học viện Kĩ thuật Quân sự, thị xã Vĩnh Yên, tỉnh Vĩnh Phúc, Hội Toán học Việt Nam đã tổ chức cuộc gặp mặt các nhà Toán học và hội thảo chương trình giảng dạy Toán các bậc học phổ thông. Tham dự có Chủ tịch Hội, các Phó chủ tịch, Tổng thư kí Hội Toán học Việt Nam; các nhà Toán học lão thành; các cán bộ nghiên cứu và giảng dạy Toán tại Viện Toán học Việt Nam, Học viện Kĩ thuật Quân sự, Viện Chiến lược và Chương trình Giáo dục,Viện Công nghệ Thông tin, Học viện An ninh; các trường Đại học Khoa học Tự nhiên ĐHQG Hà Nội, Đại học Bách khoa, Đại học Sư phạm Hà Nội, Đại học Vinh, Đại học Thái Nguyên, Đại học Đà Lạt, Cao đẳng Sư phạm Bắc Ninh, Ban Toán Nhà Xuất bản Giáo dục, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ... Sau khi GS. TSKH. *Phạm Thế Long* Chủ tịch Hội Toán học tuyên bố lí do và giới thiệu chương trình hội thảo, GS. TSKH. *Lê Tuấn Hoa* Tổng Thư kí Hội Toán học đã báo cáo hoạt động của Hội trong năm 2005. GS. TSKH. *Hà Huy Khoái* Chủ tịch Hội đồng giải thưởng Lê Văn Thiêm công bố danh sách 1 giáo viên và 3 học sinh được nhận giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2005. GS. *Hoàng Tụy* đã trao giải thưởng cho hai học sinh có mặt : *Trần Trọng Đan, Đỗ Quốc Khánh*. Tiếp đó, GS. TSKH. *Lê Tuấn Hoa* đã nêu một số góp ý về chương trình giáo dục phổ thông nói chung và chương trình môn Toán nói riêng. Các giáo sư *Hoàng Tụy*, *Đoàn Quỳnh* đã trao đổi về thực trạng của nền giáo dục Việt Nam hiện nay và cách thức thực hiện chương trình mới. Các đại biểu thảo luận rất sôi nổi và nuối tiếc vì thời gian một buổi sáng là quá ngắn.

BN

HƯỚNG DẪN GIẢI... *(Tiếp trang 7)*

Ta được số các số là $3.7.A_7^3 = 4410$.

Theo quy tắc cộng ta được số các số phải tìm là: $1680 + 4410 = 6090$.

b) Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương:

$$\frac{x^3}{y+z}+\frac{y+z}{2}+2 \ge 3.\sqrt[3]{\frac{x^3}{y+z}.\frac{y+z}{2}.2}=3x\ ;$$

$$\frac{y^3}{z+x}+\frac{z+x}{2}+2 \ge 3y\ ;$$

$$\frac{z^3}{x+y}+\frac{x+y}{2}+2 \ge 3z.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên, ta được:

$$Q+x+y+z+6 \ge 3(x+y+z)$$

$$\Rightarrow Q \ge 2(x+y+z)-6 \ge 6\ .$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 2$.

Vậy min Q = 6, khi $x = y = z = 2$.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/345. (Lớp 6) Cho

$$A = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right)\left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{1+2+3+\ldots+n}\right)$$

là tích của $n - 1$ thừa số và

$B = \dfrac{n+2}{n}$. Tính $\dfrac{A}{B}$.

NGUYỄN ANH THUẤN
(GV THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T2/345. (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm O ở trong tam giác sao cho $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$. So sánh độ dài của OB và OC.

NGUYỄN THANH HẢI
(GV THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)

Bài T3/345. Tìm các số x sao cho

$\dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 3}$ là số nguyên.

HOÀNG TRỌNG HẢO
(Hà Nội)

Bài T4/345. Cho x, y là các số thực nằm trong đoạn $\left[0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{1+y^2} + \dfrac{y}{1+x^2}$.

TRẦN TUẤN ANH
(Khoa Toán – Tin, ĐHKHTN, ĐHQG TP.HCM)

Bài T5/345. Chứng minh rằng

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \le \frac{bc}{a(1+bc)} + \frac{ca}{b(1+ca)} + \frac{ab}{c(1+ab)} \le \frac{a+b+c}{4}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = abc$.

Các đẳng thức xảy ra khi nào?

CÙ HUY TOÀN
(Khoa Công nghệ Vật liệu 02, khóa 50, ĐHBK Hà Nội)

Bài T6/345. Trên hai cạnh AB, AC của tam giác ABC lần lượt lấy hai điểm E, D sao cho $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{CD}{DA}$. Gọi giao điểm của BD và CE là M. Xác định vị trí của E, D sao cho diện tích của tam giác BMC đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó theo diện tích của tam giác ABC.

HOÀNG HẢI DƯƠNG
(GV THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, Hưng Yên)

Bài T7/345. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Tia phân giác của góc BAC cắt đường tròn (O) tại A và D. Đường tròn tâm D bán kính DB cắt đường thẳng AB tại B và Q, cắt đường thẳng AC tại C và P. Chứng minh rằng AO vuông góc với PQ.

LÊ HOÀI BẮC
(Phù Lưu, Triệu Long, Triệu Phong, Quảng Trị)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/345. Hãy xác định các tập hợp con khác rỗng A, B, C của $\mathbb{N}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$;

ii) $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$;

iii) Với mọi $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ thì $a + c \in A$, $b + c \in B$ và $a + b \in C$.

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV THPT Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai)

Bài T9/345. Cho các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_{2007}$ thuộc đoạn $[-1; 1]$ và có tổng các lập phương của chúng bằng 0. Chứng minh rằng

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_{2007}| \le \frac{2007}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Phan Thúc Trực, Công Thành, Yên Thành, Nghệ An)

Bài T10/345. Tìm tất cả các hàm số f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $f(f(m) - n) = f(m^2) + f(n) - 2n.f(m)$, với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$;

ii) $f(1) > 0$.

NGUYỄN TRỌNG HIỆP
(GV THPT Tây Hồ, Hà Nội)

Bài T11/345. Tam giác ABC có các đường trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1. Chứng minh rằng nếu bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác BCB_1, CAC_1, ABA_1 bằng nhau thì tam giác ABC là tam giác đều.

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

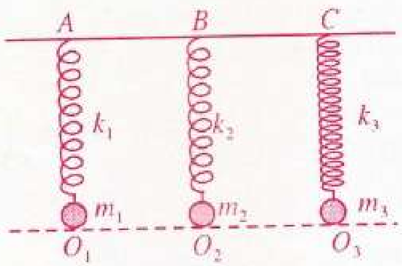
Bài T12/345. Cho mặt cầu tâm O bán kính R. Một hình chóp $S.ABC$ chuyển động sao cho các cạnh SA, SB, SC luôn tiếp xúc với mặt cầu trên theo thứ tự tại A, B, C; hơn nữa $\widehat{ASB} = 90^0$, $\widehat{BSC} = 60^0$, $\widehat{CSA} = 120^0$. Tìm tập hợp đỉnh S.

VI QUỐC DŨNG

(Thái Nguyên)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/345. Ba vật nhỏ có khối lượng m_1, m_2, m_3 (với $m_1 = m_2 = m = \frac{m_3}{2} = 0,1$ kg) được treo vào ba lò xo nhẹ có độ cứng tương ứng k_1, k_2, k_3 (với $k_1 = k_2 = k = 40$N/m). Ở vị trí cân bằng các vật nằm trên một đường thẳng nằm ngang như hình vẽ.



Biết $O_1O_2 = O_2O_3 = 2$cm. Tại thời điểm $t = 0$ người ta truyền cho vật m_1 vận tốc $v_1 = 60$cm/s hướng thẳng đứng lên trên, đồng thời kéo vật m_2 theo phương thẳng đứng xuống dưới cách vị trí cân bằng đoạn 2cm rồi thả nhẹ để hai vật dao động điều hòa. Sau khi hai vật dao động được $\frac{1}{4}$ chu kì thì vật m_3 mới được kích thích dao động.

a) Hỏi phải kích thích vật m_3 như thế nào để trong suốt quá trình dao động ba vật luôn luôn thẳng hàng? Tính k_3.

b) Tính khoảng cách cực đại giữa các vật m_1 và m_3 trong quá trình dao động.

NGUYỄN MINH TUẤN

(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

Bài L2/345. Một quả cầu lớn dẫn điện có bán kính $R = 0,2$m, được tích điện đến điện thế $V = 1000$(V). Một quả cầu nhỏ dẫn điện có bán kính $r = 0,1$cm, chưa tích điện, có gắn tay cầm cách điện. Cho hai quả cầu tiếp xúc nhau rồi đưa quả cầu nhỏ ra xa và cho phóng điện. Hỏi cần làm như vậy bao nhiêu lần để điện thế quả cầu lớn còn lại $V' = 905$(V)?

LÊ HÀ KIỆT

(DD05-LT03 khoa Điện - Điện tử, ĐHBK TP. HCM)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/345. (for 6th grade)

Let $A = \left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)...\left(1-\frac{1}{1+2+3+...+n}\right)$ (consisting of $n-1$ factors) and $B = \frac{n+2}{n}$.

Calculate $\frac{A}{B}$.

T2/345. (for 7th grade)

Let ABC be an isosceles triangle ($AB = AC$) and O be a point inside ABC such that $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$. Compare the measures of OB and OC.

T3/345. Find the numbers x such that

$$\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+3}$$

is an integer.

T4/345. Find the greatest value of the expression

$$P = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+x^2}$$

where x, y are non negative real numbers not exceeding $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

T5/345. Prove that

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \le \frac{bc}{a(1+bc)} + \frac{ca}{b(1+ca)} + \frac{ab}{c(1+ab)} \le \frac{a+b+c}{4}$$

where a, b, c are positive real numbers satisfying the condition $a+b+c = abc$.

When do equalities occur?

T6/345. Two arbitrary points E, D lie respectively on the sides AB, AC of a triangle ABC so that $\frac{AE}{EB} = \frac{CD}{DA}$. The lines BD, CE intersect at M. Determine the positions of E and D so that the area of triangle BMC attains its greatest value and calculate this value in terms of the area of triangle ABC.

T7/345. Let ABC be a triangle inscribed in a circle (O). The bisector of angle BAC cuts the circle (O) at A and D. The circle with center D and radius DB cuts the line AB at B and Q, cuts the line AC at C and P. Prove that the line AO is perpendicular to the line PQ.

(Xem tiếp trang 28)

Bài T1/341 (Lớp 6). *Tìm chữ số tận cùng của tổng gồm 502 số hạng :*

$S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + ... + n^{4n-7} + ... + 503^{2005}$.

Lời giải. Với mọi số nguyên $n \geq 2$ ta có

$n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) =$

$= n(n-1)(n+1)(n^2 - 4 + 5)$

$= 5n(n-1)(n+1) + n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$

nên $n^5 - n$ chia hết cho 2.5 = 10.

Từ đó $n^5 - n = 10k$ với $k \in \mathbb{N}$ hay $n^5 = 10k + n$.

Ta có $n^9 = n^5.n^4 = (10k + n)n^4 = 10t + n^5 =$

$= 10(t + k) + n$ với $t, k \in \mathbb{N}$.

Tổng quát $4^{4s+1} = 10v + n$ với $s, v \in \mathbb{N}$ hay n và n^{4s+1} có cùng chữ số tận cùng.

Chú ý rằng số mũ của các số hạng của tổng S có dạng $4n - 7 = 4(n-2) + 1 = 4s + 1$ với $s = n - 2$, còn cơ số của các số hạng là các số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ 2 đến 503 nên chữ số tận cùng của tổng S chính là chữ số tận cùng của tổng gồm 502 số hạng sau:

$R = (2 + 3 + ... + 9 + 0 + 1) + (2 + 3 + ... + 9 + 0 + 1) + ... + (2 + 3 + ... + 9 + 0 + 1) + 2 + 3$,

trong đó có 50 tổng các số từ 0 đến 9 và còn lại số 2 + 3 = 5.

Tổng 0 + (1+9) + (2+8) + (3+7) + (4+6) + 5 = $10t + 5$ với $t \in \mathbb{N}$, do đó

$R = 50(10t + 5) + 5 = 10v + 5$ với $v \in \mathbb{N}$.

Vậy S có chữ số tận cùng là 5.

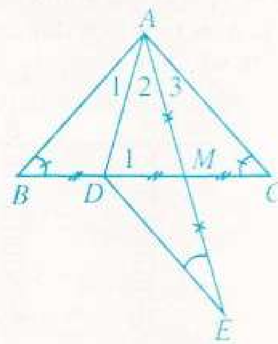
Nhận xét. Hầu hết các bạn gửi bài giải đã trả lời đúng nhưng một số bạn trình bày lập luận chưa chặt chẽ. Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Kim Huyền Trang, Phùng Quang Anh*, 6A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Tùng Lâm, Nguyễn Duy Anh*, 6A THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hải Dương:** *Nguyễn Đức Nguyên*, 6A, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn; **Quảng Ninh:** *Đỗ Thái Chung*, 6A1, THCS Nguyễn Trãi, Uông Bí; **Hà Nội:** *Nguyễn Hoàng Thiên Ngân*, 6A1, THCS Ngô Sĩ Liên, Hoàn Kiếm, *Đặng Vân Hà*, 6D, THCS Hà Nội – Amsterdam, Ba Đình; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Thu Hà*, 6B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Lê Thị Thúy, Nguyễn Thị Nga, Bùi Hà Ngọc Trâm*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Phạm Hoài Linh*, 6/4, THCS Trần Hưng Đạo, *Nguyễn Thúc Vũ Hoàng*, 6M, THCS Nguyễn Huệ, TX Đông Hà, *Nguyễn Thị Ngọc Giàu*, 6/5, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Triệu Phong; **Bình Định:** *Văn Gia Thi*, 6A1, THCS Lê Hồng Phong, TP Quy Nhơn; **TP Hồ Chí Minh:** *Mai Hoàng Bích Trâm*, 6/10, THCS Phạm Văn Chiêu, Gò Vấp.

VIỆT HẢI

Bài T2/341 (Lớp 7). *Cho tam giác ABC cân. Trên cạnh đáy BC lấy điểm D sao cho CD=2BD. So sánh số đo hai góc* $\widehat{BAD}$ *và* $\frac{1}{2}\widehat{CAD}$.

Lời giải. Gọi M là trung điểm của DC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Ta có hai tam giác AMC và EMD bằng nhau vì có $MD = MC$, $MA = ME$, $\widehat{AMC} = \widehat{EMD}$, nên $DE = AC$ và $\widehat{A_3} = \widehat{E}$.



Mặt khác, $\widehat{D_1} > \widehat{B}$ (tính chất góc ngoài của tam giác) mà $\widehat{B} = \widehat{C}$ (gt) nên $\widehat{D_1} > \widehat{C}$, suy ra $AC > AD$.

Từ đó $DE > DA$, suy ra $\widehat{A_2} > \widehat{E}$ hay $\widehat{A_2} > \widehat{A_3}$.

Vì $\widehat{A_3} = \widehat{A_1}$ (do $\Delta ABD = \Delta ACM$, c.g.c) nên $\widehat{A_2} + \widehat{A_3} > \widehat{A_1} + \widehat{A_3}$ hay $2\widehat{A_1} < \widehat{A_2} + \widehat{A_3}$.

Vậy $\widehat{BAD} < \frac{1}{2}\widehat{CAD}$.

Nhận xét. 1) Rất đông các bạn tham gia gửi bài và đều giải đúng. Các bạn có thể chứng minh được kết quả tổng quát hơn: "Trên đáy BC của tam giác cân ABC lấy điểm D sao cho $BD = \frac{1}{n}DC$ $(n \geq 2)$. Khi đó ta có $\widehat{ABD} < \frac{1}{n}\widehat{CAD}$".

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn hơn cả:

Vĩnh Phúc: *Đỗ Trang Linh*, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên, *Tạ Quang Trung*, 7A, THCS Đại Thịnh, Mê Linh; **Thanh Hóa:** *Mai Anh Bằng*, 7B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, *La Hồng Quân*, 7B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Đậu Thị Thùy Linh*, 7D, THCS Quỳnh Thiện, Quỳnh Lưu, *Vũ Đình Long*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Đặng Thị Lan Hương, Hồ Thị Quỳnh Mai*, ... và các bạn lớp 7C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Khánh Hòa:** *Trần*

Thị Ánh Nguyên, 7/7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Quảng Ngãi:** *Võ Quang Viễn*, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Bình Định:** *Tô Đình Thủy*, 5A, Tiểu học số 2, Cát Tài, Phù Cát; **TP. Hồ Chí Minh:** *Tô Nhã Quế Khanh*, 7A8, THCS Cầu Kiệu, Q. Phú Nhuận.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/341. *Tìm mọi nghiệm nguyên dương của phương trình* $x^y + x^z + x^t = x^{2005}$.

Lời giải. Vì x là số nguyên dương và $x = 1$ không thoả mãn PT nên $x \geq 2$.

Vai trò của y, z, t như nhau nên không mất tính tổng quát, có thể giả thiết $y \geq z \geq t$. Mặt khác, từ PT dễ thấy $y < 2005$.

Ta có

$x^{2005} = x^y + x^z + x^t \leq 3x^y \Rightarrow x^{2005-y} \leq 3$ (1).

Vì $x \geq 2$ nên từ bất đẳng thức (1) suy ra $2005 - y < 2 \Rightarrow y > 2003$ (nếu $2005 - y \geq 2$ thì $x^{2005-y} \geq 2^2 > 3$).

Ta được y là số nguyên thoả mãn $2003 < y < 2005$ nên $y = 2004$.

Với y = 2004, từ (1) suy ra $x \leq 3$.

Vậy x là số nguyên thoả mãn $2 \leq x \leq 3$ suy ra $x = 2$ hoặc $x = 3$.

• Nếu $x = 2$. Thay giá trị của x, y vào phương trình trong đầu bài, ta được

$2^{2004} + 2^z + 2^t = 2^{2005} \Rightarrow 2^z + 2^t = 2^{2004}$ (2)

Vì $z \geq t$ nên $2^{2004} = 2^z + 2^t \leq 2.2^z \Rightarrow z \geq 2003$.

Mặt khác, từ (2) suy ra $z < 2004$.

Ta được z là số nguyên thoả mãn $2003 \leq z < 2004$ suy ra $z = 2003$.

Thay giá trị của z vào PT (2), ta được

$2^{2003} + 2^t = 2^{2004} \Rightarrow 2^t = 2^{2003} \Rightarrow t = 2003$.

Ta được nghiệm

$(x; y; z; t) = (2; 2004; 2003; 2003)$.

• Nếu $x = 3$. Thay giá trị của x, y vào phương trình trong đầu bài, ta được

$3^{2004} + 3^z + 3^t = 3^{2005} \Rightarrow 2.3^{2004} = 3^z + 3^t$ (3)

Vì $z \geq t$ nên $3^z + 3^t \leq 2.3^z \Rightarrow z \geq 2004$.

Ta được z là số nguyên thoả mãn $2004 \leq z < 2005$ nên $z = 2004$.

Thay giá trị z vào PT (3) ta được

$3^{2004} + 3^t = 2.3^{2004} \Rightarrow 3^t = 3^{2004} \Rightarrow t = 2004$.

Ta được nghiệm

$(x; y; z; t) = (3; 2004; 2004; 2004)$.

Vì vai trò của y, z, t như nhau nên thay đổi vai trò của chúng, ta được PT có 4 nghiệm :

$(x; y; z; t) = (2; 2004; 2003; 2003)$

$(x; y; z; t) = (2; 2003; 2004; 2003)$

$(x; y; z; t) = (2; 2003; 2003; 2004)$

$(x; y; z; t) = (3; 2004; 2004; 2004)$.

Nhận xét. 1) Có thể giải bài toán bằng cách khác, tóm tắt như sau.

Chia hai vế của PT cho x^t, và biến đổi thành

$$x^{z-t}.\left(x^{2005-z} - x^{y-z} - 1\right) = 1.$$

Từ đó, dễ dàng có $\begin{cases} z = t \\ x^{y-z}\left(x^{2005-y} - 1\right) = 2. \end{cases}$

Ta được hai hệ sau:

$$\begin{cases} z = t \\ x^{y-z} = 1 \\ x^{2005-y} - 1 = 2 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} z = t \\ x^{y-z} = 2 \\ x^{2005-y} - 1 = 1 \end{cases}$$

Giải các hệ trên, ta được nghiệm của PT.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Tạ Đức Thành*, 8A3, THCS Lâm Thao; *Tạ Khánh Huyền*, 9B, *Nguyễn Trường Giang*, 7A2, THCS Phong Châu, TX Phú Thọ; **Thái Nguyên:** *Võ Tiến Tú*, 9A, THCS Đồ Cản, Phổ Yên; **Vĩnh Phúc:** *Lê Thị Tuyết Mai*, 7A1, *Lê Sơn Hải*, *Đào Minh Trung*, *Nguyễn Đăng Thanh*, 8B, *Ngô Hải Hà*, *Nguyễn Kim Hùng*, *Tạ Thế Anh*, *Văn Mạnh Tuấn*, *Trần Bá Trung*, 9A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; *Mạc Thế Trường*, *Nguyễn Thanh Thảo*, 9A, *Đỗ Tiến Quang*, 8C, THCS Lập Thạch; *Hà Ngọc Thuỷ*, 8A, THCS Thái Hoà, Lập Thạch; **Hà Nội:** *Lê Quang Huy*, 7H1, THCS Trưng Vương, Q Hoàn Kiếm ; *Phạm Duy Long*, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Hà Tây:** *Trần Đức Minh*, *Nguyễn Đức Thịnh*, *Đinh Hoàng Long*, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức; **Hưng Yên:** *Lương Xuân Thuỷ*, 9A, THCS Tiên Lữ, *Đoàn Thu Hà*, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang; **Hải Phòng:** *Nguyễn Quý Duy*, 8A1, THCS Hồng Bàng; **Thanh Hoá:** *Lê Thị Trang*, *Cao Thanh Bình*, 9B, *Cao Thanh Tùng*, 6A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; **Nghệ An:** *Nguyễn Mạnh Tuấn*, *Dương Hoàng Hưng*, 8B, *Nguyễn Đức Công*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, *Dương Phúc Thưởng*, 9A, THCS Thuận Sơn, Đô Hương, *Hồ Hữu Quân*, *Đậu Phi Lực*, 8C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Thái Bảo Toàn*, 8A, THCS Vượng Lộc, Can Lộc; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 7/7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ranh.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/341. *Giải phương trình*

$(x^2 - 12x - 64)(x^2 + 30x + 125) + 8000 = 0$ (1)

Lời giải.

(1) $\Leftrightarrow (x + 4)(x - 16)(x + 5)(x + 25) + 8000 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 9x + 20)(x^2 + 9x - 400) + 8000 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 9x)^2 - 380(x^2 + 9x) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 9x)(x^2 + 9x - 380) = 0.$

• $x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ x = -9.$

• $x^2 + 9x - 380 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{1601}}{2}.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $x = 0$, $x = -9$, $x = \dfrac{-9-\sqrt{1601}}{2}$, $x = \dfrac{-9+\sqrt{1601}}{2}$.

Nhận xét. 1) Phương trình trên có dạng:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + e = 0,$$

trong đó $a + b = c + d$. Đây là dạng toán rất quen thuộc với các bạn ở THCS.

2) Rất đông các bạn tham gia giải bài này, đa số đều giải đúng, một số bạn còn tính toán nhầm lẫn. Các bạn có lời giải gọn gàng là:

Hà Nội: *Đỗ Như Milan*, 9A1, THCS Chu Văn An, *Đặng Như Tài*, phòng 141, nhà CT1A–ĐN2, khu đô thị mới Mỹ Đình II; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hoàng Hải*, 9A3, THCS Lâm Thao, Phú Thọ; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Kim Hùng*, 9A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hải Dương:** *Ngô Thị Hải Linh*, khu 7, xã Việt Hòa, TP Hải Dương; **Nam Định:** *Trần Mạnh Linh*, 9A2, THCS Lộc Vượng, TP Nam Định; **Ninh Bình:** *Nguyễn Thanh Tùng*, 6B, THCS TTr. Nho Quan; **Nghệ An:** *Vũ Thanh Thủy*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Vương Bằng Việt*, 9/4, THCS Lê Văn Thiêm, TX Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Lê Quốc Tuấn*, 7B, THCS Nguyễn Trãi, Vĩnh Linh; **Bình Định:** *Võ Ngọc Đức*, 9A1, THCS Nhơn Hậu, Anh Nhơn.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/341. *Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng*

$$S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$$

trong đó x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lời giải. Ta có

$$S^2 = \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + 2(x^2+y^2+z^2).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho cặp số dương $\dfrac{x^2y^2}{z^2}$, $\dfrac{y^2z^2}{x^2}$ ta được

$$\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \ge 2\sqrt{\frac{x^2y^4z^2}{x^2z^2}} = 2y^2 \qquad (1)$$

Tương tự $\dfrac{y^2z^2}{x^2} + \dfrac{z^2x^2}{y^2} \ge 2z^2 \qquad (2)$

$$\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \ge 2x^2 \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ suy ra

$$S^2 \ge \frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2) + 2(x^2+y^2+z^2)$$

$$= 3(x^2+y^2+z^2) = 3.$$

Do $S > 0$ nên $S \ge \sqrt{3}$.

$$S = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{z^2} = \dfrac{z^2x^2}{y^2} = \dfrac{y^2z^2}{x^2} \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x>0, y>0, z>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\sqrt{3}$ và đạt được khi $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

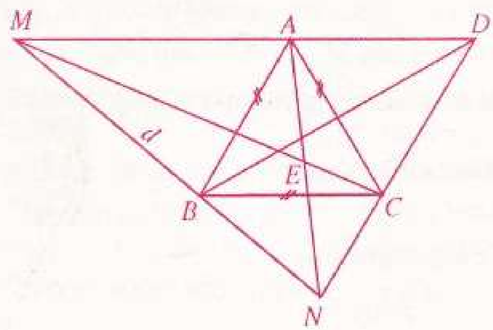
Nhận xét. Có rất nhiều bạn tham gia giải bài này, tuy nhiên một số các bạn còn lập luận thiếu chặt chẽ và tính toán nhầm lẫn. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thị Phượng*, 9A, THCS Vĩnh Tường, *Đỗ Tiến Quang*, 8C, *Nguyễn Thanh Thảo*, 9A, THCS Lập Thạch, *Nguyễn Thị Xuân*, 7A1, THCS Yên Lạc; **Hà Tây:** *Trần Đức Minh*, *Đỗ Văn Đức*, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức, *Trần Nhật Tân*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Hà Nội:** *Đặng Như Tài*, 9H, THCS Lê Quý Đôn; **Thái Bình:** *Hoàng Văn Sang*, 9A1, Phân hiệu HSG chất lượng cao, Kiến Xương; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thành Long*, *Nguyễn Hoàng Hải*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Lan*, 9A, THCS Yên Phong; **Nam Định:** *Lữ Ngọc Ánh*, 6A, THCS Yên Phong, Ý Yên; *Hà Văn Nam*, 9C, THCS Nam Thắng, Nam Trực; **Nghệ An :** *Nguyễn Quý Vy*, *Nguyễn Thị Hồng*, *Thái Thị Thu*, *Vũ Thanh Thủy*, *Hà Vĩnh Duy*, 9A, *Nguyễn Đức Công*, 9D, *Vũ Đình Long*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Vũ Văn Lý*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Thanh Hóa:** *Trịnh Quang Thanh*, 9B, THCS Hàm Rồng, *Cao Thanh Tùng*, 6A, *Lê Thị Trang*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Lê Thị Nga*, 9A, THCS Tố Như, Hoằng Hóa; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Ngô Minh Thắng*, 9/1, THCS Nguyễn Khuyến; **Quảng Ngãi:** *Võ Thị Hồng Huyên*, 8C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/341. *Cho tam giác đều ABC. Gọi D là điểm đối xứng của B qua đường thẳng AC. Đường thẳng qua B cắt các đường thẳng AD, CD lần lượt tại M, N. Các đường thẳng AN và CM cắt nhau tại điểm E. Chứng minh rằng bốn điểm A, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn.*

Lời giải. Từ giả thiết suy ra tứ giác *ABCD* là hình thoi. Đặt $AB = BC = CA = AD = CD = a$.



1) Xét trường hợp d cắt tia DA và tia DC. Theo định lí Thales ta có

$$\frac{NC}{ND}=\frac{BC}{DM}\ ;\ \frac{AM}{MD}=\frac{AB}{DN}.$$

Suy ra $CN \times AM = a^2$, từ đó $\frac{CA}{AM}=\frac{NC}{CA}$.

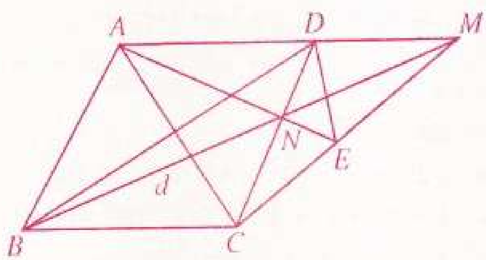
Lại có $\widehat{NCA}=\widehat{CAM}=120^0$.

Do đó $\Delta CAM \backsim \Delta NCA$. Nên $\widehat{ACM}=\widehat{CNA}$.

Mà $\widehat{CAN}\equiv\widehat{EAC}$. Do vậy $\Delta CAN \backsim \Delta EAC$. Nên $\widehat{AEC}=120^0$.

Vậy $\widehat{AEC}+\widehat{ADC}=180^0$ nên A, C, D, E đồng viên.

2) Xét trường hợp d cắt đoạn thẳng CD và cắt tia AD. Tương tự trên có $\frac{CA}{NC}=\frac{AM}{CA}$, mà $\widehat{CAM}=\widehat{NCA}=60^0$ nên $\Delta CAM \backsim \Delta NCA$.



Suy ra $\widehat{CNA}=\widehat{ACM}$. Cùng với $\widehat{CAN}\equiv\widehat{EAC}$ ta có $\Delta ACN \backsim \Delta AEC$.

Suy ra $\widehat{AEC}=\widehat{ACN}=60^0$. Do đó $\widehat{ADC}=\widehat{AEC}$.

Vậy bốn điểm A, C, E, D đồng viên.

3) Trường hợp d cắt đoạn thẳng AD và cắt tia CD: Chứng minh tương tự.

4) Nếu $d\equiv BD$. Khi đó $E\equiv N\equiv M\equiv D$ nên A, C, E, D tạo thành ba đỉnh của một tam giác.

Vậy trong mọi trường hợp có bốn điểm A, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

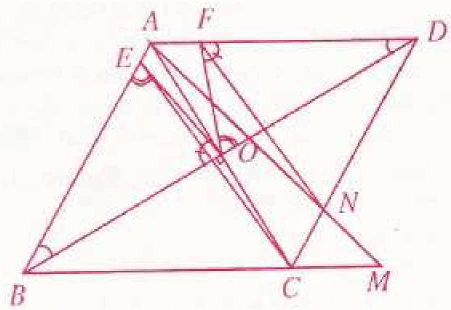
Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn:

Hưng Yên: *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ; *Nguyễn Xuân Thạch*, 7B, THCS Lê Quý Đôn, Lương Bằng, Kim Động; **Yên Bái:** *Nguyễn Duy Cương*, 9A, THCS Tô Hiệu; **Bắc Giang:** *Hà Khương Duy*, 9B, THCS TTr Bố Hạ, Yên Thế; **Hà Tây:** *Trần Ngọc Thúy*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hà Nội:** *Trần Việt Hưng*, 9G, THCS TTr Yên Viên, Gia Lâm; **Thanh Hóa:** *Trần Chí Dương*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Trần Thị Ánh Nguyên*, 9B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Hồ Phúc Lộc*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Bình Định:** *Võ Ngọc Đức*, 9A1, THCS Nhơn Hậu, An Nhơn.

VŨ KIM THỦY

Bài T7/341. *Cho tam giác đều ABC. Gọi D là điểm đối xứng của B qua đường thẳng AC. Trên tia BC lấy điểm M sao cho* $BM=\frac{4}{3}BC$. *Đường thẳng AM cắt CD tại N. Trên các đoạn thẳng AB, AD lấy các điểm E, F theo thứ tự sao cho CE // NF. Tính số đo góc EOF, trong đó O là trung điểm của AC.*

Lời giải. (Theo bạn *Trịnh Trung Thanh*, THCS Hàm Rồng, TP **Thanh Hóa**)



Dễ thấy $ABCD$ là hình thoi và O là giao điểm của AC và BD. Vì $EC\ //\ NF$ nên các tam giác BEC, DNF có các cạnh tương ứng song song, do đó $\Delta BEC \backsim \Delta DNF$. Suy ra

$$\frac{BE}{DN}=\frac{BC}{DF}\Rightarrow BE.DF=BC.DN \qquad (1)$$

Mặt khác, do $AD\ //\ CM$, $DA=BC$,

$$BM=\frac{4}{3}BC \text{ nên } \frac{DN}{CN}=\frac{DA}{CM}=\frac{BC}{CM}=3.$$

$$\Rightarrow \frac{DN}{DC}=\frac{DN}{DN+CN}=\frac{3}{1+3}=\frac{3}{4}\Rightarrow DN=\frac{3}{4}DC$$

$$\Rightarrow BC.DN=\frac{3}{4}BC^2 \qquad (2)$$

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$BO^2=BC^2-CO^2=BC^2-\frac{1}{4}BC^2=\frac{3}{4}BC^2 \ (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$BE.DF=BO^2\Rightarrow\frac{BE}{BO}=\frac{BO}{DF}=\frac{DO}{DF}.$$

Lại có $\widehat{EBO}=\widehat{ODF}=30^0$ nên $\Delta BEO \backsim \Delta DOF$.

suy ra $\widehat{BEO}=\widehat{DOF}$; $\widehat{BOE}=\widehat{DFO}$. Từ đó, dễ dàng suy ra $\widehat{EOF}=30^0$.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán thuộc loại cơ bản của hình học 8, chỉ sử dụng định lí Thales và tam giác đồng dạng. Tuy nhiên, số các bạn tham gia giải không nhiều.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt.

Hà Tĩnh: *Trần Thế Hùng*, 9A, THCS Nguyễn Du, TX Hà Tĩnh; **Bắc Giang:** *Hà Khương Duy*, 9B, THCS Bố hạ, Yên Thế; **Hải Phòng:** *Nguyễn Ngọc Huy*, 7A, THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng; **Hưng Yên:** *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ, Tiên Lữ; **Phú Thọ:** *Trần Văn Thành*, 9A2, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa:** *Đỗ Thị Mai Trang*, 8C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Thái Bình:** *Hoàng Văn Sáng*, *Nguyễn Xuân Thiện*, 9A1, THCS Thành Nê, Kiến Xương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Văn Lương*, 9^3, THCS Trần Hưng Đạo, Tx Đông Hà; **Nghệ An:** *Tăng Văn Bình*, 8B; *Nguyễn Đức Công*, 9D, Phan Sĩ Quang, 9T, THCS Lí Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T8/341. *Chứng minh rằng với bất kì số nguyên dương n (n > 2) luôn tồn tại n số nguyên dương phân biệt nhau sao cho tổng của chúng bằng bội chung nhỏ nhất của chúng và bằng n !*

Lời giải. (Theo bạn *Vũ Văn Quang*, 12A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**)

a) Nếu n lẻ ($n \ge 3$):

Đặt $a_i=\dfrac{n!}{i(i+1)}$, ($i = 1, 2, ..., n-1$) và $a_n=\dfrac{n!}{n}$.

Rõ ràng các số a_i ($i = 1, 2, ..., n$) là phân biệt (do $n \ge 3$) và

$a_1 + a_2 + ... + a_n =$

$$= n!\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n}\right)=n!.$$

Ta sẽ chứng minh BCNN $(a_1, ..., a_n) = n!$.

Thật vậy $(n!) \vdots a_i$, $\forall i = 1, 2, ..., n$.

Lại có BCNN (a_1, a_n) = BCNN $\left(\dfrac{n!}{2};\dfrac{n!}{n}\right)=n!$ (do n lẻ). Vậy nếu T là một bội chung của $a_1, ..., a_n$ thì $T \ge n!$. Do đó BCNN $(a_1, ..., a_n) = n!$

b) Nếu n chẵn: Với $n = 4$ ta chọn các số $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 8, a_4 = 12$ thỏa mãn đề bài.

Với $n \ge 6$ ta chọn $a_1=\dfrac{n!}{2}$, $a_2=\dfrac{n!}{8}$; $a_3=\dfrac{n!}{24}$, $a_i=\dfrac{n!}{i(i-1)}$ ($i = 4, 5, ..., n-1$) và $a_n=\dfrac{n!}{n-1}$.

Do $n-1$ lẻ và 8 cũng như 24 không phải là tích hai số nguyên liên tiếp nên các số a_i là phân biệt.

Ta có $a_1 + a_2 + ... + a_n =$

$$= n!\left(\sum_{i=4}^{n-1}\frac{1}{i(i-1)}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{n-1}\right)=n!$$

Ta sẽ chứng minh BCNN $(a_1, ..., a_n) = n!$. Thật vậy $(n!) \vdots a_i$, $\forall i = 1, 2..., n$ và do $n-1$ là số lẻ nên BCNN $\left(\dfrac{n!}{2},\dfrac{n!}{n-1}\right)=n!$.

Vậy BCNN $(a_1, a_2, ..., a_n) = n!$.

Nhận xét. 1) Có thể chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Đoàn Trí Dũng*, 11A1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hà Tây:** *Hoàng Thị Tuyết Nhung*, 11T, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Phú Thọ:** *Khổng Ngọc Trọng*, 10, THPT Hùng Vương, Việt Trì; **Thái Bình:** *Vũ Hữu Tiệp*, 11T, THPT chuyên; **Hải Phòng:** *Bùi Viết Sang*, 10CT, THPT Kiến An; **Thanh Hóa:** *Trịnh Hùng Linh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/341. *Chứng minh rằng*

$$2x^2+y^2+5z^2+4xy+7xz+4yz>0$$

trong đó x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + z < 0$ và $4xz > y^2$.

Lời giải

Ta có $2x^2 + y^2 + 5z^2 + 4xy + 7xz + 4yz$

$= (x + y + z)^2 + x^2 + 4z^2 + 2xy + 5xz + 2yz$

$= (x + y + z)^2 + (x^2 + 2xy + y^2) +$

$+\left(4z^2+2yz+\dfrac{y^2}{4}\right)+5xz-\dfrac{5y^2}{4}$

$=(x+y+z)^2+(x+y)^2+\left(2z+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}(4xz-y^2)$

$\ge \dfrac{5}{4}(4xz-y^2)>0$.

Nhận xét. Như vậy với bài toán này chúng ta chỉ dùng giả thiết $4xz > y^2$. Các bạn sau có giải tốt:

Bắc Ninh: *Nguyễn Ngọc Thái*, 10A1, THPT Thuận Thành số 1; **Hà Nội:** *Trần Việt Hưng*, 9G, THPT TTr Yên Viên, Gia Lâm; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Hùng Thao*, 10A1, THPT chuyên; **Hải Dương:** *Phan Tiến Thành*, 10T1, THPT Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Trần Mạnh Linh*, 9A, THCS Lộc Vượng, TP Nam Định; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Thành*, 10H, THPT Đô Lương I; **Quảng Trị:** *Trần Văn Thành*, 7A, THCS Cam Hiếu, Cam Lộ, *Nguyễn Thị Lan Hương*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, v.v...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/341. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}$$

trong đó a, b, c, d, x, y là các số thực thỏa mãn các điều kiện sau :

$$\begin{cases} a^2+b^2+40=8a+10b \\ c^2+d^2+12=4c+6d \\ 3x=2y+13. \end{cases}$$

Lời giải. ***Cách 1.*** (Bằng phương pháp tọa độ).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét điểm $M(x, y)$ thuộc đường thẳng (Δ): $3x = 2y + 13$.

Ta viết $a^2 + b^2 + 40 = 8a + 10b$ dưới dạng $(a-4)^2 + (b-5)^2 = 1$ nên điểm $N(a, b)$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + 40 = 8a + 10b$ thuộc đường tròn (C_1) tâm $I\ (4, 5)$ bán kính $R_1 = 1$.

Tương tự, ta viết $c^2 + d^2 + 12 = 4c + 6d$ dưới dạng $(c-2)^2 + (d-3)^2 = 1$ nên điểm $Q(c, d)$ thỏa mãn điều kiện

$$c^2 + d^2 + 12 = 4c + 6d$$

thuộc đường tròn (C_2) tâm $J\ (2, 3)$ bán kính $R_2 = 1$.

Lấy điểm K (u, v) đối xứng với điểm I qua đường thẳng Δ thì K có tọa độ $u = \dfrac{118}{13}$, $v = \dfrac{21}{13}$.

Ta có

$$P = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}$$
$$= MQ + MN$$
$$\geq MJ - JQ + MI - IN = MJ + MI - (R_1 + R_2)$$
$$= MJ + MK - (R_1 + R_2) \geq JK - (R_1 + R_2).$$

Do đó $P \geq JK - (R_1 + R_2) = 2(\sqrt{13}-1)$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M = M_1$, $Q = Q_1$, $N = N_1$ trong đó M_1 và Q_1 lần lượt là giao điểm của đoạn JK với (Δ) và (C_2), còn N_1 là giao điểm của đoạn M_1I với (C_1). Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng $2(\sqrt{13}-1)$.

Cách 2. (Bằng phương pháp đại số).

Sử dụng BĐT Bunhiacovski, ta có

$$[2(x-a) + 3(b-y)]^2 \leq (2^2+3^2)[(x-a)^2 + (b-y)^2]$$
$$\Rightarrow 2(x-a) + 3(b-y) \leq \sqrt{13}\sqrt{(x-a)^2+(b-y)^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{13}}(x-a) + \frac{3}{\sqrt{13}}(b-y) \leq \sqrt{(x-a)^2+(b-y)^2},$$

Tương tự, ta có

$$[46(x-c) + 9(d-y)]^2 \leq (46^2+9^2)[(x-c)^2 + (y-d)^2]$$
$$\Leftrightarrow \frac{46}{13\sqrt{13}}(x-a) + \frac{9}{13\sqrt{13}}(b-y)$$
$$\leq \sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}.$$

Từ đây, suy ra

$$P = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}$$
$$\geq \frac{2}{\sqrt{13}}(x-a) + \frac{3}{\sqrt{13}}(b-y) + \frac{46}{13\sqrt{13}}(x-a) + \frac{9}{13\sqrt{13}}(b-y)$$
$$= \frac{24}{13\sqrt{13}}(3x-2y) + \frac{1}{\sqrt{13}}(3b-2a) + \frac{1}{13\sqrt{3}}(9d-46c)$$
$$= \frac{24}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{13}}(3b-2a) + \frac{1}{13\sqrt{13}}(9d-46c).$$

Tiếp tục sử dụng BĐT Bunhiacovski, ta thu được

$$[2(a-4) + 3(5-b)]^2$$
$$\leq (2^2 + 3^2)\,[(a-4)^2 + (b-5)^2 = 13.$$

Suy ra $\quad 3b - 2a \geq 7 - \sqrt{13}$ (1)

Tương tự, cũng có

$$[46(c-2) + 9(3-d)]^2$$
$$\leq (46^2 + 9^2)\,[(c-2)^2 + (d-3)^2] = 13^2.$$

suy ra $\quad 9d - 46c \geq 13\sqrt{13}$ (2)

Từ (1) và (2), ta thu được

$$P \geq \frac{24}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{13}}(7-\sqrt{13}) - \frac{1}{13\sqrt{13}}13(5+\sqrt{13})$$
$$= 2\sqrt{13} - 2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = \frac{35}{6},\ y = \frac{9}{4},\ a = 4 + \frac{2\sqrt{13}}{13},\ b = 5 - \frac{3\sqrt{13}}{13}$$
$$c = 2 + \frac{46\sqrt{13}}{169},\ d = 3 - \frac{9\sqrt{13}}{169}.$$

Nhận xét. Đây là đề toán rất quen biết nên có rất nhiều bạn giải được và đa số các bạn đều giải tương tự cách 1 đã trình bày ở trên, cũng chính là lời giải đã được đề xuất.

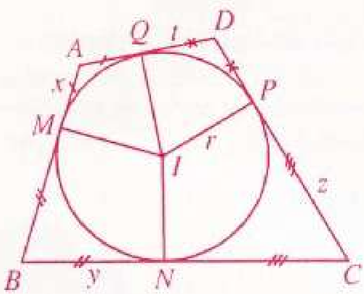
NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/341. *Xét các tứ giác lồi ABCD có đường tròn nội tiếp. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \frac{AM^2}{x_1x_2} + \frac{BN^2}{x_2x_3} + \frac{CP^2}{x_3x_4} + \frac{DQ^2}{x_4x_1}$$

trong đó $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ là một hoán vị của độ dài các cạnh $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$.

Lời giải. Để trình bày được gọn, sau khi sử dụng tính chất của tiếp tuyến phát xuất từ mỗi đỉnh của tứ giác đến đường tròn nội tiếp ta đưa vào các kí hiệu như sau: $AQ = AM = x$, $BM = BN = y$, $CN = CP = z$, $DP = DQ = t$. Thế thì: $x + y + z + t = p$, trong đó ta đã đặt: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a + b + c + d = 2p$ (vì $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ là một hoán vị của $\{a, b, c, d\}$ và p là nửa chu vi của tứ giác lồi $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I)). Ngoài ra, ta còn có hệ thức: $a+c = b+d = p$.



Bây giờ ta áp dụng BĐT Bunhiacovski – Schwarz vào hai bộ bốn số (tất cả các số này đều là số dương).

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x_1x_2}}, \frac{y}{\sqrt{x_2x_3}}, \frac{z}{\sqrt{x_3x_4}}, \frac{t}{\sqrt{x_4x_1}}\right)$$

và $\left(\sqrt{x_1x_2}, \sqrt{x_2x_3}, \sqrt{x_3x_4}, \sqrt{x_4x_1}\right)$

(sắp đặt theo thứ tự tương ứng như đã viết ở trên), ta thu được BĐT

$$\left(\frac{x^2}{x_1x_2}+\frac{y^2}{x_2x_3}+\frac{z^2}{x_3x_4}+\frac{t^2}{x_4x_1}\right)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)$$

$\geq (x + y + z + t)^2$, hay là

$$T(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) \geq \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2.$$

Suy ra

$$T \geq \frac{[(x_1+x_3)+(x_2+x_4)]^2}{4(x_1+x_3)(x_2+x_4)} \geq 1 \quad (*)$$

Dấu đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x_1x_2}=\dfrac{y}{x_2x_3}=\dfrac{z}{x_3x_4}=\dfrac{t}{x_4x_1}(=k) & \text{(i)} \\ x_1+x_3=x_2+x_4=p & \text{(ii)} \end{cases}$$

Ngoài ra, x, y, z và t còn thỏa mãn các đẳng thức sau:

$$x + y = a,\ y + z = b,\ z + t = c,\ t + x = d \quad \text{(iii)}$$

Theo tính chất của dãy các tỉ số bằng nhau, từ các đẳng thức (i), (ii) và (iii), ta được

$$k=\frac{d}{px_1}=\frac{a}{px_2}=\frac{b}{px_3}=\frac{c}{px_4}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p} \quad \text{(iv)}$$

Từ (iv) ta thu được kết luận sau đây: Biểu thức T đạt cực tiểu $T_{\min} = 1$ khi và chỉ khi:

$$x_1 = d,\ x_2 = a,\ x_3 = b,\ x_4 = c \quad \text{(v)}$$

Đồng thời khi đó (đối chiếu (i) và (v)) ta được:

$$x = \frac{da}{p},\ y = \frac{ab}{p},\ z = \frac{bc}{p},\ t = \frac{cd}{p} \quad \text{(vi)}$$

Tóm lại trong $4! = 24$ hoán vị $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ khác nhau của $\{a, b, c, d\}$ chỉ có hoán vị $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{d, a, b, c\}$ sắp xếp theo thứ tự tương ứng này thỏa mãn điều kiện đòi hỏi để biểu thức T đạt cực tiểu và giá trị cực tiểu $T_{\min} = 1$ đạt được với mọi tứ giác ngoại tiếp đường tròn.

Nhận xét. 1) Cũng qua việc giải bài toán cực trị hình học trên đây, chúng ta *phát hiện* thêm một tính chất hình học của tứ giác lồi ngoại tiếp được một đường tròn (ta gọi ngắn gọn tứ giác này là *tứ giác ngoại tiếp*). Tính chất đó được phát biểu như sau:

Nếu một tứ giác (lồi) ABCD ngoại tiếp được một đường tròn (I) mà M, N, P và Q lần lượt là tiếp điểm trên các cạnh AB, BC, CD và DA thì giữa độ dài các cạnh và các đoạn tiếp tuyến phát xuất từ các đỉnh của tứ giác có hệ thức sau đây:

$$\frac{AQ.AM}{AD.AB}+\frac{BM.BN}{BA.BC}+\frac{CN.CP}{CB.CD}+\frac{DP.DQ}{DC.DA}=1 \quad (**)$$

Đề nghị bạn đọc kiểm chứng hệ thức (**) bằng phương pháp chứng minh trực tiếp.

2) Các bạn tham gia giải bài toán cực trị trên đây khá đông và tất cả đều sử dụng BĐT Bunhiacovski. Tuy nhiên, đáng tiếc là đa số các bạn đã *hiểu không chính xác đề toán* đối với nội dung $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ là một hoán vị của $\{a, b, c, d\}$. Các bạn này mắc sai lầm ở chỗ hiểu hoán vị ở đây là đúng với tất cả ($4! = 24$) các hoán vị khác nhau của tập các số $\{a, b, c, d\}$. Bởi vậy, các bạn đó dẫn đến kết luận: $T_{\min} = 1 \Leftrightarrow a = b = c = d$ và $ABCD$ là một hình thoi, hoặc vội vàng kết luận $AM = BN = CP = DQ$ (không chứng minh mà ngộ nhận) rồi cho $ABCD$ là hình vuông!

3) Một số bạn chỉ ra được $T \geq \dfrac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+bc+cd+da)}$ nhưng không tính được $T_{\min}$. Ngoài ra, không có bạn nào chỉ ra được nhận xét 1) như đã nêu ở trên. Có một số bạn chứng minh được các đẳng thức (v) nhưng sau đó lại chứng minh sai dẫn đến $AB//CD$, $BC//DA$! và $ABCD$ là hình thoi hay hình vuông. Hoặc có bạn viết:" Việc xét dấu đẳng thức xảy ra ở (*) không thật cần thiết, chỉ cần

chỉ ra dấu "=" khi tứ giác là hình vuông là đủ". Đó là một sai lầm cơ bản mà bạn đó đã phạm phải đối với bài toán cực trị dù là hình học hay đại số.

4) Các bạn sau đây có lời giải đúng tuy trình bày chưa thật sáng sủa:

Phú Thọ: *Nguyễn Hữu Thành*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Hải Dương:** *Trần Thế Phúc*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** *Hoàng Đức Tâm*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Hữu*, THPT Nông Cống 1, *Đào Đức Huân*, 10T, THPT Lam Sơn; **Cần Thơ:** *Lê Nguyễn, Võ Quốc Bá Cẩn* 12A1, THPT Lý Tự Trọng, TP Cần Thơ.

Ngoài ra, các bạn sau đây cũng có lời giải tương đối tốt:

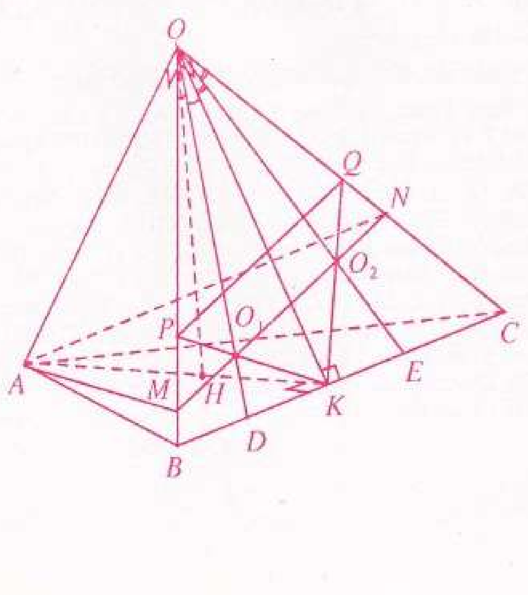
Hà Nội: *Nguyễn Thị Thu Hiền*, 10A1 Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** *Ngô Anh Tú*, 11A1, THPT Phả Lại; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hoàng Hải*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Nam Định:** *Phạm Tiến Duật*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Thanh Hóa:** *Phạm Khắc Thanh*, THPT Triệu Sơn 3, *Lê Như Mạnh*, THPT Lê Lợi, Thọ Xuân; **Nghệ An:** *Đặng Công Vinh*, 11I, THPT Nghĩa Đàn; **Hà Tĩnh:** *Trần Thế Dũng*, 10/1, THPT Nghèn, Can Lộc; **Quảng Bình:** *Đặng Ngọc Thanh*, 11 Toán, THPT chuyên Quảng Bình; **Cần Thơ:** *Nguyễn Huỳnh Vĩnh Nghi*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **BếnTre:** *Lê Văn Chánh*, 11 Toán, THPT Bến Tre.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T12/341. *Xét tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng AH cắt BC tại K. Đường thẳng qua tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác OBK, OCK theo thứ tự cắt OB, OC tại M, N. Các mặt phẳng phân giác của các góc nhị diện [B, OA, H] và [C, OA, H] lần lượt cắt BC tại D và E. Chứng minh bất đẳng thức về thể tích sau :*

$$V_{OADE}.V_{OAMN} \le \frac{\sqrt{2}-1}{2}V_{OABC}^2.$$

Lời giải. Đặt $OB = b$, $OC = c$. Dựng $AK \perp BC$, lúc đó $\widehat{BOK}$, $\widehat{COK}$ lần lượt là các góc phẳng của nhị diện $[B, OA, H]$; $[C, OA, H]$. Từ đó suy ra OD, OE tương ứng là các đường phân giác của $\widehat{BOK}$ và $\widehat{COK}$. Nhận thấy các tam giác BOE, COD theo thứ tự cân tại B và C, suy ra $BE = OB = b$; $CD = OC = c$. Do đó $DE = b + c - BC$.



Mặt khác theo BĐT Bunhiacovski

$b + c \le \sqrt{2(b^2+c^2)}$ nên $DE \le (\sqrt{2}-1)BC$.

Kết hợp với $\dfrac{V_{OABC}}{V_{OADE}} = \dfrac{BC}{DE}$, ta có

$$\frac{V_{OABC}}{V_{OADE}} \ge 1+\sqrt{2} \qquad (1)$$

Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp ΔOBK, ΔOCK. Nối KO_1, KO_2 chúng cắt OB, OC theo thứ tự tại P và Q. Vì $\widehat{OPQ} = \widehat{OKQ} = 45^0$ nên tam giác OPQ vuông cân tại O. Theo tính chất đường phân giác trong tam giác thì

$$\frac{O_1K}{O_1P} = \frac{OK}{OP}\ ;\quad \frac{O_2K}{O_2Q} = \frac{OK}{OQ},$$

mà $OP = OQ$, dẫn đến $\dfrac{O_1K}{O_1P} = \dfrac{O_2K}{O_2Q}$ suy ra $O_1O_2 // PQ$. Vậy tam giác OMN vuông cân tại O. Cũng từ đây ta thấy $\Delta OMO_1 = \Delta OKO_1$ $\Rightarrow OM = OK$. Tóm lại $OM = ON = OK$.

Do $S_{OMN} = \dfrac{1}{2}OM.ON = \dfrac{1}{2}OK^2$, suy ra

$$\frac{2}{S_{OMN}} = \frac{4}{OK^2} = 4\left(\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\right) \ge \frac{8}{OB.OC}$$

Do vậy $\dfrac{S_{OBC}}{S_{OMN}} \ge 2$, kết hợp với

$$\frac{V_{OABC}}{V_{OAMN}} = \frac{S_{OBC}}{S_{OMN}} \text{ dẫn tới } \frac{V_{OABC}}{V_{OAMN}} \ge 2 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) ta nhận được

$$V_{OADE}.V_{OAMN} \le \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right).V_{OABC}^2 \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$, hay tam giác OBC vuông cân tại O.

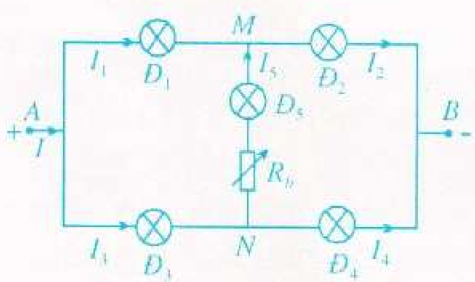
Nhận xét. Có thể dùng phương pháp lượng giác hoặc tính chất mặt phẳng phân giác của một nhị diện để giải bài toán này. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Hà Nội: *Đoàn Trí Dũng, Phạm Quang Định*, 11A1, *Nhữ Anh Tuấn*, 11A2, Khối PTCTT, ĐHSP Hà Nội; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thùy Dương, Nguyễn Tùng Lâm*, 11 Toán,THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Tây:** *Trịnh Ngọc Tú*, *Nguyễn Xuân Việt*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Văn Quang*, 12A1, *Nguyễn Văn Ngọc*, *Nguyễn Kim Thuật*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Trần Tấn Phong*, 10A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hưng Yên:** *Phan Tiến Dũng*, *Nguyễn Văn Thọ*, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** *Vũ Xuân Dương*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP Hải Dương; **Nam Định:** *Mai Thanh Tùng*, 10 Tin, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP Nam Định; **Thanh Hóa:** *Trịnh Văn Vương*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, *Trần Hồng Quân*, *Hoàng Văn Tiến*, 11A4, THPT Hậu Lộc 2, Hậu Lộc, *Nguyễn Hải*, 11A1, THPT Đông Sơn I, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Đặng Công Vinh*, 11I, THPT Nghĩa Đàn, *Nguyễn Văn Bá*, 11A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Hạnh Dung*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đăk Lăk:** *Lê Đức Quang*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP Buôn Ba Thuột; **Bạc Liêu:** *Trần Mỹ Linh*, 10T, THPT chuyên Bạc Liêu; **Cần Thơ:** *Nguyễn Huỳnh Vĩnh Nghi*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP Cần Thơ.

HỒ QUANG VINH

Bài L1/341. *Cho mạch điện như hình vẽ. $U_{AB} = 12V$. Công suất tiêu thụ của các đèn $Đ_1$; $Đ_2$; $Đ_3$; $Đ_4$; $Đ_5$ lần lượt là $P_1 = 4W$;*

$P_2 = 16W$; $P_3 = 4W$; $P_4 = 10W$; $P_5 = 1W$. Công suất tiêu thụ trên biến trở R_b là 1W. Dòng điện có chiều như hình vẽ.



a) Xác định điện trở của các đèn và điện trở phần biến trở tham gia vào mạch điện.

b) Khi điện trở phần biến trở tham gia vào mạch điện thay đổi thì độ sáng của các đèn thay đổi thế nào ? Giả sử điện trở các đèn không thay đổi.

Lời giải. a) Công suất tiêu thụ của cả mạch điện: $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_b = 36W$.

Từ $I = I_1 + I_3$ và $I_5 = I_3 - I_4$ ta có

$$3 = \frac{4}{U_{AM}} + \frac{4}{U_{AN}}$$

và $$\frac{1}{U_{AM} - U_{AN}} = \frac{2}{U_{AN}} - \frac{5}{12 - U_{AN}}.$$

Từ đó tìm được $U_{AM} = 4V$; $U_{AN} = 2V$.

Do đó $$R_1 = \frac{U_{AM}^2}{P_1} = 4\Omega;$$

$$R_2 = \frac{(U_{AB} - U_{AM})^2}{P_2} = 4\Omega;$$

$$R_3 = \frac{U_{AN}^2}{P_3} = 1\Omega;$$

$$R_4 = \frac{(U_{AB} - U_{AN})^2}{P_4} = 10\Omega;$$

$$R_5 = \frac{P_5 (U_{AM} - U_{AN})^2}{(P_5 + P_b)^2} = 1\Omega;$$

và $$R_b = \frac{P_b . (U_{AM} - U_{AN})^2}{(P_5 + P_b)^2} = 1\Omega.$$

b) Từ $I_3 = I_4 + I_5$ và $I_5 = I_2 - I_1$, suy ra (với R_b thay đổi):

$$U_{AN} = \frac{12}{11}\left(1 + \frac{45}{43 + 11R_b}\right)$$

và $$U_{AM} = 6 - \frac{108}{43 + 11R_b}.$$

Do đó tìm được:

$$I_1 = \frac{3}{2} - \frac{27}{43 + R_b}; \qquad I_2 = \frac{3}{2} + \frac{27}{43 + R_b};$$

$$I_3 = \frac{12}{11}\left(1 + \frac{45}{43 + R_b}\right); \; I_4 = \frac{6}{11}\left(2 - \frac{9}{43 + R_b}\right)$$

và $$I_5 = \frac{54}{43 + R_b}.$$

Từ các biểu thức đó suy ra: Khi R_b tăng thì các bóng $Đ_1$ và $Đ_4$ sáng hơn, còn các bóng $Đ_2$, $Đ_3$, $Đ_5$ thì tối hơn, và ngược lại, khi R_b giảm thì các bóng $Đ_1$ và $Đ_4$ tối đi, còn các bóng $Đ_2$, $Đ_3$, $Đ_5$ thì sáng hơn.

Nhận xét. Các bạn có lời giải và đáp số đúng:

Vĩnh Phúc: *Vũ Ngọc Quang*, 12A3, *Tạ Đức Mạnh*, 10A3 và *Nguyễn Minh Khương*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Minh Cường*, *Trần Thái Hà*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Hồng Phong*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** *Trịnh Văn Vượng*, 11 Toán, THPT Lam Sơn, *Phan KhắcThanh*, 11A, THPT Triệu Sơn 3; **Quảng Ngãi:** *Lê Thị Thu Thảo*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Hải Dương:** *Ngô Anh Tú*, 11A1, THPT Phả Lại; **Thái Bình:** *Vũ Quang Hiệu*, 10A4, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Phú Thọ:** *Trịnh Long Khánh*, 11A1, THPT Cẩm Khê.

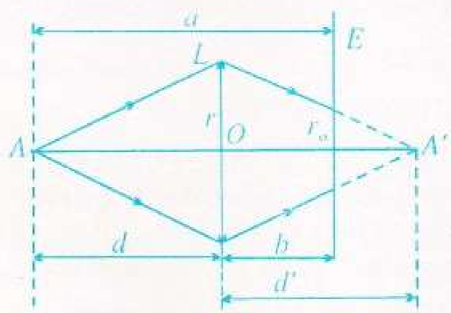
MAI ANH

Bài L2/341. *Một điểm sáng A đặt cách màn E một khoảng a = 50cm. Trong khoảng giữa A và E người ta đặt một thấu kính L sao cho A nằm trên trục chính và thấu kính song song với màn E. Khi tịnh tiến thấu kính theo trục chính trong khoảng giữa A và E một khoảng b = 20cm thì vệt sáng trên màn có bán kính nhỏ nhất.*

1) Tìm tiêu cự thấu kính.

2) Tìm vệt sáng trên màn nhỏ nhất (r_{min}), biết thấu kính có dạng phẳng lồi với chiết suất n = 1,5 và chỗ dày nhất đo được là 0,2cm.

Lời giải. 1) Ảnh tạo bởi thấu kính là ảnh thật, vì theo giả thiết các tia sáng sau khi qua thấu kính tạo vệt sáng trên màn có bán kính nhỏ nhất – tức là các tia sáng này đồng quy. Ảnh thật này phải nằm sau màn, vì nếu nằm trước màn thì khi di chuyển thấu kính ra xa A, ảnh di chuyển liên tục trên trục chính và sẽ có vị trí của thấu kính để ảnh nằm trên màn, tức trái với giả thiết. Từ các nhận xét trên và dựa vào tính chất ảnh tạo bởi thấu kính, ta thấy rằng để vệt sáng trên màn có bán kính nhỏ nhất thì phải dịch chuyển thấu kính cách E một khoảng b = 20cm.



Gọi bán kính rìa là r, bán kính vệt sáng là r_0, từ hình vẽ ta có

$$\frac{r_o}{r}=\frac{d'-b}{d'}=\frac{d'-(a-d)}{d'}.$$

Qua vài phép biến đổi ta được

$$\frac{r_o}{r}=\frac{-a}{f}+\frac{a}{d}+\frac{d}{f}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$\frac{a}{d}+\frac{d}{f}\ge 2\sqrt{\frac{a}{f}},\quad \text{suy ra}\quad \frac{r_o}{r}\ge\frac{-a}{f}+2\sqrt{\frac{a}{f}}$$

hay $r_o \ge r\left(\frac{-a}{f}+2\sqrt{\frac{a}{f}}\right)$.

Khi $\frac{a}{d}=\frac{d}{f}$ hay $d=\sqrt{af}$ thì r_0 có giá trị nhỏ nhất $r_{o\,min}$.

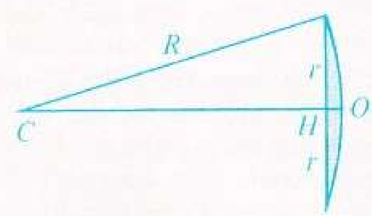
$$r_{o\,min}=r\left(-\frac{a}{f}+2\sqrt{\frac{a}{f}}\right). \qquad (1)$$

Khi $r_{0\,min}$, $d=a-b \Rightarrow (a-b)^2=af$

$$f=\frac{(a-b)^2}{a}=\frac{900}{50}=18(\text{cm})$$

2) Áp dụng công thức : $\frac{1}{f}=(n-1)\frac{1}{R}$,

R là bán kính cong của thấu kính.



$$R=(n-1)f=(1,5-1).18=9(\text{cm})$$

Ta có : $r^2=(2R-OH)OH$ suy ra

$$r=\sqrt{(2R-OH)OH}=\sqrt{(18-0,2)0,2}=1,89\ (\text{cm})$$

Thay vào biểu thức (1), ta tìm được :

$$r_{o\,min}\approx 1,89\left(-\frac{50}{18}+2\sqrt{\frac{50}{18}}\right)\approx 1,05\ (\text{cm}).$$

Nhận xét: 1) Một số bạn dùng phương pháp khảo sát hàm số cũng cho kết quả đúng.

2) Các bạn sau đây có lời giải gọn và tốt :

Nghệ An : *Vũ Ngọc Sỹ*, K5A1 THPT Diễn Châu IV, *Bùi Hoàng Vương*, 12A1 THPT Phan Bội Châu ; **Hà Tĩnh** : *Lê Hà Dũng*, 11A1, *Bùi Quốc Phúc* 11A1 THPT Hồng Lĩnh ; **Nam Định** : *Đặng Đức Tâm*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Hải Dương** : *Đào Thị Thanh Hương*, 11A1, THPT Phả Lại, Chí Linh ; **Yên Bái** : *Trần Đức Mỹ*, 12T, THPT Nguyễn Tất Thành ; **Thanh Hoá** : *Phạm Mạnh Hùng*, 12A1, THPT Triệu Sơn I ; **Phú Thọ** : *Phạm Đăng Hải*, 12C, *Nguyễn Hữu Toán*, 11 Lí, THPT chuyên Hùng Vương ; **Vĩnh Phúc** : *Đặng Minh Đức*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hưng Yên** : *Phạm Đức Linh*, 10 lí, THPT chuyên Hưng Yên.

NGUYỄN VĂN THUẬN

TIN TỨC

SỐ NGUYÊN TỐ LỚN NHẤT CHO TỚI NAY VỚI HƠN 9 TRIỆU CHỮ SỐ !

Marin Mersenne

Một nhóm các nhà khoa học thuộc Đại học Missouri, Hoa Kỳ, đã sử dụng hơn 700 máy tính để tìm ra số nguyên tố lớn nhất cho đến nay, một con số khổng lồ với **9152052** chữ số!

Phát hiện này được thực hiện vào ngày 15/12/2005 và đã được xác nhận lại vào ngày 24/12/2005, đánh dấu lần thứ hai trong năm 2005 dự án kết hợp máy tính có tên *Tìm kiếm số nguyên tố Mersenne trên Internet* (GIMPS - *Great Internet Mersenne Prime Search*) tìm ra số nguyên tố lớn nhất. Nhưng cũng tương tự như con số phát hiện hồi tháng 2/2005, số nguyên tố mới được tìm ra này vẫn chưa đạt được kích thước 10 triệu chữ số cần thiết để giành được giải thưởng 100000 USD từ Quỹ điện tử có tên là *Electronic Frontier Foundation*.

Dự án GIMPS khai thác sức mạnh của hơn 200000 máy tính được cung cấp một cách tình nguyện với nhiệm vụ tìm kiếm các số nguyên tố Mersenne. Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có thể chia hết cho 1 và chính nó. Số nguyên tố Mersenne là số nguyên tố có dạng 2^p-1 trong đó p cũng là một số nguyên tố.

Đã vài năm nay, những số nguyên tố lớn được phát hiện đều là các số *nguyên tố Mersenne*. Các số nguyên tố Mersenne trong nhiều trường hợp trước đây đã được các cá nhân tìm ra, nhưng lần này thì thành quả lại là của một nhóm tình nguyện viên. Nhóm này tới nay đã cống hiến một năng lực xử lí nhiều hơn bất cứ ai (tương đương với khả năng xử lí của một máy tính Pentium 90MHz chạy liên tục trong 67000 năm (!)). Hai giáo sư *Curtis Cooper* và *Steven Boone* là những người phụ trách dự án này.

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/345. Determine non empty subsets A, B, C of the set $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ satisfying the following conditions:

i) $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$;

ii) $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$;

iii) if $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ then $a + c \in A$, $b + c \in B$, $a + b \in C$.

T9/345. Prove that

$$|x_1 + x_2 + ... + x_{2007}| \le \frac{2007}{3},$$

where x_1, x_2, ..., x_{2007} are real numbers belonging to the segment $[-1; 1]$, so that the sum of their cubes is equal to 0. When does equality occur ?

T10/345. Find all functions f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfying the following conditions:

i) $f(f(m) - n) = f(m^2) + f(n) - 2n.f(m)$ for all $m, n \in \mathbb{Z}$;

ii) $f(1) > 0$.

T11/345. Let AA_1, BB_1, CC_1 be the medians of a triangle ABC. Prove that if the radii of the incircles of the triangles BCB_1, CAC_1, ABA_1 are all equal then ABC is an equilateral triangle.

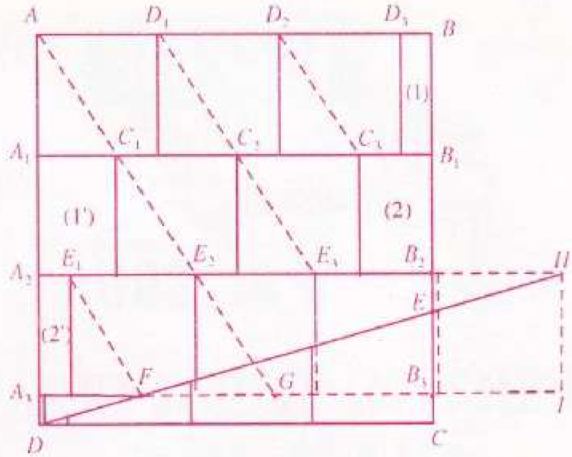
T12/345. Let be given a sphere (O) with center O and radius R. A pyramid $S.ABC$ moves so that the sides SA, SB, SC touch the sphere (O) respectively at A, B, C and so that $\widehat{ASB} = 90^0$, $\widehat{BSC} = 60^0$, $\widehat{CSA} = 120^0$. Find the locus of the apex S.

Số nguyên tố được phát hiện lần này là số nguyên tố Mersenne thứ 43 được tìm ra, bằng $\mathbf{2^{30402457}-1}$.

Bạn đọc nào quan tâm có thể xem thêm bài *"GIMPS và số nguyên tố Mersenne lớn nhất cho đến nay"* THTT số 333, tháng 3/2005.

NGUYỄN PHÚC

(Theo *http://www.diendantoanhoc.net*)



Giải đáp:

CHIA HÌNH VUÔNG THÀNH 11 HÌNH VUÔNG NHỎ BẰNG NHAU

(Đề đăng trong THTT số 342 tháng 12.2005)

Sử dụng công thức Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$ từ một hình vuông cạnh a có thể cắt ra rồi ghép lại thành hai hình vuông con cạnh b, c sao cho tổng diện tích của hai hình vuông con bằng diện tích hình vuông ban đầu... Vậy chỉ cần qua nhiều đợt cắt với tỉ lệ thích ứng, ta sẽ thu được n hình vuông con như ý muốn. Tuy vậy, nhược điểm chủ yếu của phương pháp này là số mảnh cắt trở nên rất nhiều và manh mún. Ngoài ra, ứng với mỗi giá trị n khác nhau, phương thức cắt ghép cũng khác nhau. Vấn đề ở đây là phải tìm ra một thuật toán tổng quát có thể áp dụng tiện lợi cho mọi trường hợp, đồng thời cho ra số mảnh cắt ít nhất (so với các phương pháp đang lưu hành). Sau đây xin giới thiệu với các bạn một phương pháp mới, trích từ tài liệu *Thuật toán khai triển hình vuông để ghép thành n hình vuông con bằng nhau*, một đề tài nghiên cứu của TS. Nguyễn Hanh.

Kí hiệu a là cạnh hình vuông $ABCD$, b là cạnh hình vuông con (HVC), n là số hình cần ghép. Ở đây $n = 11$. Từ $a^2 = 11b^2$ suy ra $a = \sqrt{11}.b$. Cách chia được minh họa ở hình vẽ.

Trên hình có $AB // A_1B_1 // A_2B_2 // A_3B_3$; $AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = EC = \frac{a}{\sqrt{11}} = b$.

Các đoạn thẳng A_3B_3 và DE cắt nhau tại F. Trên tia FB_3 lấy điểm định hướng (*guide point*) G sao cho $FG = b$. Nối AG cắt A_1B_1 tại C_1, cắt A_2B_2 tại E_2. Các HVC được xác định nhờ các đường song song cách đều AG, FE_1, D_1E_3, D_2C_3.

Nhìn vào hình vẽ ta thấy 2 dải ngang trên chứa 5 HVC nguyên vẹn. Ghép các mảnh cắt đầu và cuối của 3 dải theo thứ tự (1) và (1'), (2) và (2') sẽ được thêm 2 HVC. Tiếp đó chuyển tam giác A_3FD về vị trí B_2HE và tam giác DEC về vị trí FHI ta thu được thêm 4 HVC nữa. Tổng cộng là 11 HVC. (Các bạn tự lập luận việc ghép như thế tạo thành các HVC). Trong tài liệu nói trên có chứng minh chi tiết, đồng thời tổng quát hóa cho trường hợp $n > 2$ bất kì và có công thức xác định điểm G.

Với $n = 11$ theo cách này chỉ cần 18 mảnh cắt, trong lúc đó các phương pháp thông dụng phải cần đến 20 hoặc trên 20 mảnh cắt. Tuy chưa đủ cơ sở để chứng minh thuật toán cho đáp số tối thiểu, nhưng qua thực nghiệm thấy rằng phương pháp này luôn cho ta số mảnh cắt ít hơn hoặc bằng so với các phương pháp thông dụng khác (xem bảng).

Bảng đối chiếu số mảnh cắt thu được của các phương pháp cắt ghép

Số HVC cần ghép (n)	**3**	**6**	**7**	**11**	**14**	**19**	**22**	**23**
Các phương pháp thông dụng	≥ 7	≥ 11	≥ 14	≥ 20	≥ 21	≥ 30	≥ 35	≥ 34
Phương pháp đề xuất	6	11	12	18	21	28	31	32

Các bạn *Trần Minh Hoàng*, 10 Toán, THPT chuyên **Bến Tre**, *Nguyễn Thị Hoàng My*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Quy Nhơn, **Bình Định** có lời giải đúng được nhận tặng phẩm.

TRẦN CUNG
(Hà Nội)

PHƯƠNG TRÌNH CỦA ÁP LỰC MÁU

Y học là khoa học mà Toán học dường như khó có chỗ chen chân vào. Chẳng thế mà học sinh thi vào Y khoa chỉ cần một trình độ toán rất cơ bản.

Nhưng dù học ở bất cứ lĩnh vực nào của khoa học, kể cả khoa học xã hội và nhân văn, một trình độ tư duy toán học phổ thông cũng rất cần thiết, không thể thiếu được. Đối với ngành Y, các kiến thức về Xác suất - Thống kê là rất cần thiết.

Sau đây là một ví dụ về trường hợp áp dụng toán vào việc nghiên cứu sự vận hành của máu trong huyết quản.

Trong quá trình máu được chuyển vận từ tim, áp lực của máu giảm dần do lực ma sát tạo ra khi máu tiếp xúc với thành của mạch máu. Giữa hai điểm 1 và 2, lưu lượng máu D là hiệu áp lực P_1 và P_2 chia cho lực cản R

$$D = \frac{P_2 - P_1}{R}$$

Tại thời điểm tâm trương, máu chạy từ tâm nhĩ phải khi đó được hoàn toàn thư giãn (áp lực bằng 0 vì không còn chứa máu), cho đến tận những mạch máu, với áp lực trung bình được kí hiệu là PAM (pression arterielle moyenne).

Theo công thức trên, khi thay $P_2 = PAM$, $P_1 = P_{\text{tâm nhĩ phải}}$ ta có

$$PAM - P_{\text{tâm nhĩ phải}} = D \times R.$$

Vì $P_{\text{tâm nhĩ phải}}$ bằng 0 nên suy ra

$$PAM = D \times R.$$

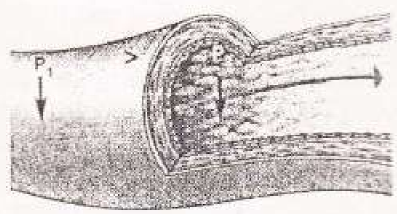
Áp lực đẩy (PP) và áp lực trung bình được tính theo áp lực trong mạch máu khi tim co bóp (tâm thu) kí hiệu PAS và khi tim thư giãn (tâm trương) kí hiệu PAD.

$$PP = PAS - PAD$$

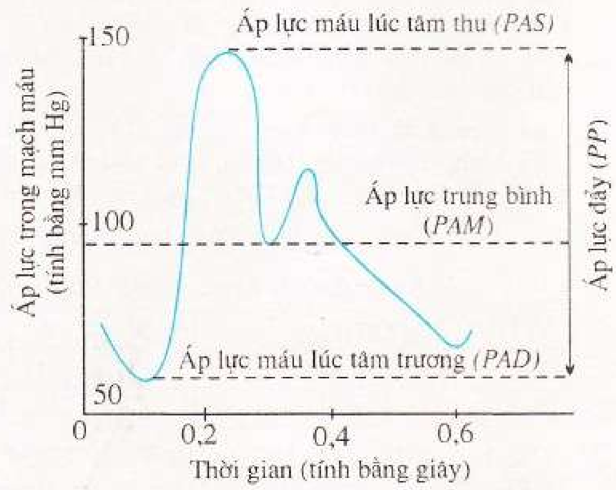
và $PAM = \dfrac{2}{3}PAD + \dfrac{1}{3}PAS$.

Các thừa số $\frac{2}{3}$ và $\frac{1}{3}$ được tính tương ứng với sự khác nhau giữa thời gian tâm trương (dài hơn) và thời gian tâm thu (ngắn hơn).

Áp lực của máu trong mạch máu



Đồ thị biểu diễn sự biến đổi của áp lực máu theo thời gian



PHAN THANH QUANG
(*theo* ***Michel Safar*** *trong* ***Dossier pour la science***)

PHÉP CỘNG LÍ THÚ

Hãy điền các chữ số thập phân khác 0 và 9 vào các kí hiệu x ở hình dưới để có phép cộng đúng sao cho các chữ số ở mỗi hàng đều phân biệt nhau, các chữ số ở mỗi cột đều phân biệt nhau.

a) Bạn tìm được tổng số lớn nhất là bao nhiêu?

b) Bạn tìm được tổng số nhỏ nhất là bao nhiêu?

$$\begin{array}{r} x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x \\ \underline{x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x} \\ x\,x\,x\,x\,x\,x\,x\,x \end{array}$$

VÂN KHANH

Giải đáp:

CHẤM BÀI KIỂM TRA

(Đề đăng trên THTT số 340, tháng 10.2005)

• Từ việc *đặt sai điều kiện cho ẩn phụ t*: $0 \le t \le 3\sqrt{2}$ nên lời giải của bạn học sinh đó đưa ra kết quả không đúng $\frac{6\sqrt{2}-9}{2} \le m \le 5$ (!)

• Nhận thấy rằng từ cách đặt $t = \sqrt{7-x}+\sqrt{2+x}$ ta có $\frac{t^2-9}{2} = \sqrt{(7-x)(2+x)}$.

Từ BĐT Bunhiacovski $\sqrt{7-x}+\sqrt{2+x} \le 3\sqrt{2}$, thì điều kiện đúng của t phải là $3 \le t \le 3\sqrt{2}$.

(Cũng có thể dùng PP đạo hàm để tìm điều kiện cho ẩn phụ t này).

• *Điều chỉnh lại lời giải.* Với cách đặt ẩn phụ như trên PT đã cho trở thành

$$-\frac{t^2}{2}+t+\frac{9}{2}=m.$$

Xét hàm $y = -\frac{t^2}{2}+t+\frac{9}{2}$ trên $\left[3;3\sqrt{2}\right]$, lúc đó $y' = -t+1 < 0$, $\forall t \in [3;3\sqrt{2}]$. Ta có bảng biến thiên sau :

t	$-\infty$	1		3		$3\sqrt{2}$	$+\infty$
y'		$+\ 0$	$-$		$-$		$-$
y				3	$\searrow$	$\frac{6\sqrt{2}-9}{2}$	

Từ bảng biến thiên ta thấy PT đã cho có nghiệm khi $\frac{6\sqrt{2}-9}{2} \le m \le 3$.

Nhận xét. Có nhiều bạn gửi bài, phân tích rõ chỗ sai trong lời giải của học sinh ấy. Tất cả đều nhất trí cho điểm kém bài này. Một số bạn giải lại bài toán bằng phương pháp đồ thị bằng cách đặt $u = \sqrt{7-x}$, $v = \sqrt{2+x}$ cũng cho đáp số đúng. Sau đây là các bạn có lời bình tốt hơn cả: *Nguyễn Mạnh Hưng*, 10A1, THPT Lý Thái Tổ, Từ Sơn, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Bình*, 11A1, THPT Nam Tiền Hải, Tiền Hải, **Thái Bình**; *Phạm Thị Như Quỳnh*, *Bạch Nguyễn Hoài Anh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh, **Nghệ An**; *Lê Thị Vân*, 11A1, THPT Đông Sơn I, Đông Sơn, **Thanh Hóa**.

NGỌC HIỀN

CÓ THIẾU SÓT KHÔNG ?

Trong một cuốn sách luyện thi Đại học, Cao đẳng có bài toán với nội dung:

Cho họ đường cong $y = f(x) = \frac{x^2+mx-6}{x-m}\ (C_m)$.

Tìm những điểm trên mặt phẳng tọa độ mà (C_m) *không đi qua với mọi m.*

Lời giải như sau :

Giả sử $M(x_0, y_0)$ là một điểm thỏa mãn điều kiện đề bài, thế thì

$$y_0 \ne \frac{x_0^2+mx_0-6}{x_0-m},\ \forall m$$

$\Leftrightarrow y_0x_0 - my_0 - x_0^2 - mx_0 + 6 \ne 0,\ \forall m.$

$\Leftrightarrow (-y_0-x_0)m + (y_0x_0 - x_0^2+6) = 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y_0 - x_0 = 0 \\ y_0x_0 - x_0^2 + 6 \ne 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y_0 = x_0 \\ x_0^2 \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -x_0 \\ x_0 \ne \pm\sqrt{3}. \end{cases}$$

Vậy những điểm cần tìm nằm trên đường thẳng $y = -x$ với $x \ne \pm\sqrt{3}$.

Theo bạn lời giải trên có thiếu sót gì không? Kết quả của bạn như thế nào?

BÙI TUẤN ANH

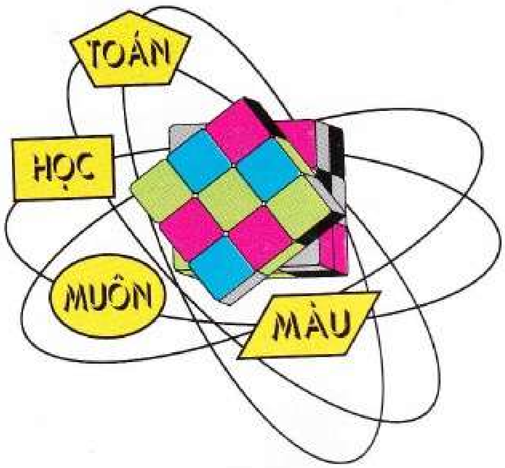
(GV THPT Yên Thủy, Hòa Bình)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 345 (3-2006)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

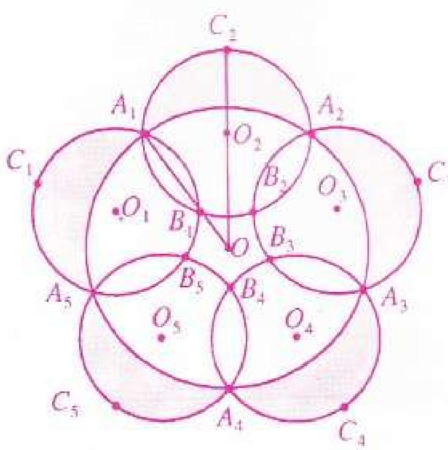
Tổng biên tập: PHAN DOÃN THOẠI. *Phó ban Phụ trách :* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC. *Thư kí Tòa soạn:* VŨ KIM THỦY.
Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ , NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, *231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.* ĐT : 08.8309049.



HÌNH HOA NĂM CÁNH

Để chuẩn bị cho ngày hội (FESTIVAL), một nhóm thanh niên dự định làm một hình hoa năm cách từ năm hình tròn bằng nhau tâm O_i bán kính r_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) để năm hình tròn này tạo nên các cánh hoa của một hình tròn lớn tâm O, nghĩa là từng cặp đường tròn (O_i) và (O_{i+1}) ($i = 1, 2, 3, 4$), (O_1) và (O_5) có điểm chung A_i và B_i tương ứng, với $OA_i \geq OB_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), sao cho năm điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cùng nằm trên đường tròn lớn tâm O như ở hình 1.

Gọi S là diện tích hình tròn lớn tâm O bán kính OA_1.



Hình 1

Dành cho bạn đọc

1) Cần sắp xếp năm hình tròn tâm O_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) như thế nào để S lớn nhất và tính S lúc đó theo r (lấy ba chữ số thập phân) ?

2) Xét trường hợp $OO_i = OA_i$ với $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Gọi S_c là diện tích của năm cánh hoa hình trăng khuyết, nghĩa là phần mặt phẳng bị giới hạn bởi đường tròn tâm O và các cung tròn $A_iC_{i+1}A_{i+1}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), cung tròn $A_1C_1A_5$ (xem bìa 1). Tính tỉ số $\dfrac{S_c}{S}$.

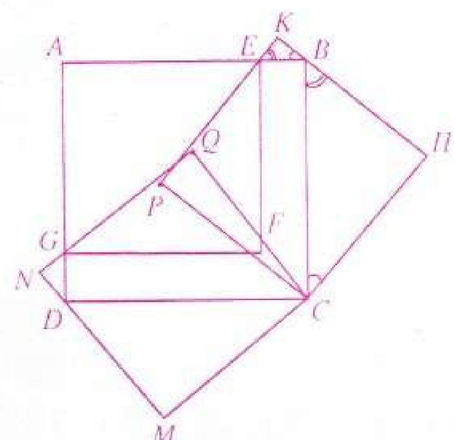
Giải đáp

PHỦ HÌNH VUÔNG BẰNG BA HÌNH NHỎ BẰNG NHAU

(Đề đăng trên THTT số 342 tháng 12.2005)

Giả sử cửa sổ là hình vuông $ABCD$. Để ba hình nhỏ phủ kín cửa sổ thì cần sắp xếp sao cho một hình nhỏ phủ một góc của hình vuông $ABCD$ (chẳng hạn góc chứa đỉnh A), và phần còn lại dọc theo cạnh BC và dọc theo cạnh CD được phủ nốt bởi hai hình nhỏ còn lại. (Bạn đọc tự xét nếu phủ theo cách khác thì không tốt bằng).

1) Phủ $ABCD$ bằng ba hình vuông nhỏ $AEFG$, $CHKP$ và $CMNQ$ (h. 2).



Hình 2

Đặt $AB = BC = a$ và $AE = AG = KH = HC = CM = xa$ (với $0 < x < 1$). Ta có $\widehat{BCH} = \widehat{EBK}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc) nên hai tam giác vuông BCH và EBK đồng dạng, suy ra

$$\frac{KB}{HC} = \frac{EB}{BC} = \frac{a - xa}{a} = 1 - x,$$

$$\frac{BH}{KH} = \frac{KH - KB}{KH} = 1 - \frac{KB}{KH} = 1 - \frac{KB}{HC} = x$$

$$BH = x.KH = x^2a.$$

Trong tam giác vuông BCH ta có $BH^2 + HC^2 = BC^2$ hay $x^4a^2 + x^2a^2 = a^2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 1 = 0$.

Giải ra được $x = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}} \approx 0{,}7861$.

(Xem tiếp trang 5)

TRƯỜNG THPT DÂN LẬP LÔMÔNÔXÔP, HÀ NỘI

Hiệu trưởng
NGƯT.**Nguyễn Phú Cường**

Từ năm 1988 được phép của Bộ Giáo dục và Đào tạo, trường Đại học Sư phạm ngoại ngữ mở các lớp bán công đầu tiên và từ 10-2-1992 trường phổ thông bán công cấp 2, 3 chuyên Ngoại ngữ Hà Nội, tiền thân của trường THPT dân lập Lômônôxôp do trường ĐH Ngoại ngữ, ĐHQG Hà Nội bảo trợ, đã ra đời. Từ hai lớp 10 đầu tiên nay trường có hơn 70 lớp, hơn 2500 học sinh và 250 giáo viên, công nhân viên. Khuôn viên trường rộng rãi có 5 đơn nguyên với hơn 13000 m^2 sàn sử dụng gồm 100 phòng học, 25 phòng làm việc, hội trường, 28 phòng dịch vụ và các nhà tập TDTT, phòng thí nghiệm, đặt tại khu đô thị mới Mỹ Đình II, Hà Nội.

Trong 13 năm qua, nhà trường đã đào tạo được 2360 học sinh có bằng Tú tài và 3470 học sinh tốt nghiệp THCS. Tỉ lệ tốt nghiệp PT thường là 99 - 100%, trong đó ở THPT có 60% đỗ CĐ và ĐH, ở THCS có 40% vượt qua các kì thi vào các lớp chuyên. Học sinh của trường đã đoạt 3 giải Quốc tế, 3 giải Quốc gia, 222 giải Thành phố, 463 giải Quận về học sinh giỏi các bộ môn văn hóa. Đoạt 133 giải Quốc tế, Quốc gia, Thành phố và Quận về TDTT và Văn nghệ. Nhiều học sinh của trường đã đi học ở các nước Pháp, Thụy Sĩ, Hoa Kỳ, Úc, Canada, Philippin, New Zeland... luôn thể hiện tốt khả năng của mình.

Trường đã được nhận: Bằng khen của Chủ tịch UBND thành phố năm 2002 về dạy tốt và học tốt, Bằng khen của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT năm 2003 về tham gia xuất sắc chương trình thay SGK THCS; Bằng khen của Thành phố về thi phổ biến giáo dục pháp luật; Giấy khen của Sở GD&ĐT Hà Nội về trường tiên tiến, Giấy khen của trường ĐHNN - ĐHQG Hà Nội về thành tích giáo dục, Giấy khen của UBND Quận Cầu Giấy về tham gia phong trào phòng chống ma túy.

Học sinh trường **THPT Dân lập Lômônôxôp** trong ngày khai giảng năm học mới

Thành tích các năm học gần đây:

+ Trường tiên tiến của Thành phố năm học 2002–2003 : 1 giải Nhất thi nói tiếng Pháp các nước ASEAN; 10 giải Thành phố, 68 giải Quận.

+ Trường tiên tiến của Thành phố năm học 2003–2004;

Đoạt 22 giải Học sinh giỏi Thành phố , 88 giải học sinh giỏi Quận, 3 giải thi tiếng Anh Thành phố và là một trong ba trường của Thành phố được thưởng về đoạt giải tập thể. Có 4 giải thi Tin học trẻ không chuyên. Các GV tham gia thi GV dạy giỏi đoạt: 1 giải Thành phố và 3 giải Quận;

Học sinh lớp 12 tham gia kì thi học sinh giỏi Thành phố đoạt 3 giải;

+ Năm học 2004–2005: Có một học sinh của trường được tham gia đội tuyển (gồm 6 học sinh Việt Nam), đi thi các môn Khoa học bằng tiếng Anh lần thứ nhất tổ chức tại Giacacta và đoạt Huy chương đồng; 30 giải học sinh giỏi Thành phố, 33 giải Quận.

Trường đang liên kết với trường Temasek ở Singapore trong việc dạy tiếng Anh cho học sinh Việt Nam tại trường.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT47M6
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT do Bộ VHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2006
Giá : 4000 đồng
Bốn nghìn đồng