BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

5
2003

SỐ 311 - NĂM THỨ 40 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Phó Chủ tịch UBND Thành phố Hà Nội Nguyễn Quốc Triệu
trao Huân chương Lao động Hạng Nhất cho Trường THCS Đống Đa

Trường THCS Đống Đa - Hà Nội

SỐ 1, SỐ 0 VÀ SỰ NGHI NGỜ CÓ LÍ

Từ hơn 50 năm nay, các nhà nghiên cứu Tin học chủ yếu dồn sức nghiên cứu làm sao tăng công suất của việc tính toán. Từ việc thử nghiệm hạt nhân đến thống kê tài chính, đều phải tính toán trên con số. Cuộc chạy đua tăng công suất tính toán không có hồi kết, mà càng ngày càng "cấp tập" hơn. Nhưng có tin được các con số do máy vi tính cung cấp không ? Nói cách khác có thể tin cậy vào độ chính xác của các máy vi tính ở mức độ nào ?

Đứng về phương diện toán học, điều đó là không thể được ! Theo tiêu chuẩn quốc tế dùng trong các phép tính toán khoa học, mọi số thực đều được biểu diễn trong máy vi tính bởi một dãy 64 số 0 và 1 : số đầu tiên của 64 bit đó chỉ dấu của số (0 chỉ số dương, 1 chỉ số âm), 52 số tiếp theo chỉ các chữ số tạo thành số đó, 11 số còn lại chỉ vị trí của dấu phẩy. Máy vi tính chỉ có khả năng cho 2^{64} số (vào khoảng mười tỉ tỉ số). Mà các số thực thì nhiều vô hạn. Số 1,1 chẳng hạn không tương ứng với một dãy hữu hạn bit nào. Nó chỉ có thể đưa vào máy vi tính bằng một giá trị gần đúng có thể biểu thị được qua 64 bit.

Nhưng chính cái sự gần đúng đó đã dẫn đến thảm kịch. Thực vậy, đồng hồ số của dàn tên lửa Patriot của Mỹ trong chiến tranh vùng Vịnh 1991 đã đếm thời gian mà mỗi giây có sai số là một phần triệu giây non hơn. Cái sai số quỷ quái đó cứ dồn lại qua một trăm giờ, thành ra sai đến ba phần mười giây sớm hơn. Kết quả là ngày 25 tháng 2 năm 1991, ở Dharhan, Arập Xêut, vào lúc 20h45, tên lửa Patriot bắn hụt một tên lửa Scud của Irăc. Tên lửa của Irăc bắn trúng vào căn cứ của Mỹ. Kết quả: 28 chết, 98 bị thương. Quân đội Mỹ đã được phía Israel báo trước về những sai lầm trong tính toán trước đó hai tuần. Nhưng đến ngày 26 tháng 2 bảng điều chỉnh sai sót mới gửi đến Dharhan. Chậm mất một ngày...

Sai lầm đó là loại có thể tránh được. Nhưng không phải lúc nào cũng tránh được. Ví dụ nếu xét đến hành trình của các hành tinh, sự thay đổi của khí tượng, và những hiện tượng thiên nhiên khác mang quá nhiều thông số ban đầu, thay đổi quá nhanh và liên tục, thì các con số gần đúng do máy vi tính cung cấp khó có thể phản ánh đúng sự thực, nếu không nói là sai nhiều với sự thực. Tình hình sẽ còn tệ hại hơn nữa !

Ta đã biết phép nhân và phép cộng các số thực thỏa mãn luật kết hợp và phân phối :

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

Nhưng qua phép tính gần đúng thì các kết quả ở 2 vế mỗi đẳng thức trên hầu hết không còn bằng nhau nữa ! Thế mà vai trò của dấu ngoặc trong chương trình tin học rất quan trọng. François Colonna, nhà nghiên cứu tin học Pháp đã tính toán theo từng vế của các đẳng thức trên và cho biết : xuất phát từ những điều kiện ban đầu như nhau, các phương trình giống nhau, thế mà quỹ đạo của bốn hành tinh trên ba máy vi tính lại khác nhau ! Thật là một sự kiện rất đáng buồn và nguy hiểm !

Vậy thì phải đánh giá độ tin cậy của các con số như thế nào ? Ngoài độ không chính xác của các mô hình, các con số làm tròn cũng làm cho kết quả rất là ngẫu nhiên.

Dựa vào thời tiết của ngày hôm sau để đánh giá dự báo thời tiết của ngày hôm trước là việc làm có thể gọi là bình thường (nếu sai thì rút kinh nghiệm!). Nhưng đối với tên lửa hoặc tàu vũ trụ thì đâu có thể rút kinh nghiệm được nữa !

Giải pháp duy nhất là tăng số *bit* biểu thị cho số thực. François Colonna cho rằng *"có 70 cấp về độ lớn trong vũ trụ, từ cực nhỏ, đến cực lớn. Phải xác định số thực qua 70 chữ số trong cách viết thập phân, thì may ra mới tránh được sai sót trong các số gần đúng"*. Trong hệ nhị phân điều đó được biểu diễn bởi 256 bit, là điều mà hiện nay, và chắc còn lâu nữa, máy vi tính chưa thể làm được.

Trong khi chờ đợi thì sự cải tiến các mô hình số, và sự phân tích đúng đắn các kết quả bằng số do máy vi tính cung cấp là cách duy nhất giúp chúng ta tiếp cận chân lí khoa học.

QUANG PHAN

(Theo Hervé Poirier trong Science et Vie số 999)

VẬN DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC VÀO GIẢI TOÁN HÌNH 7

VŨ THANH HƯƠNG
(GV THCS Đống Đa, Hà Nội)

Áp dụng và khai thác bất đẳng thức (BĐT) tạo mầm mống cho sự sáng tạo toán học, đặc biệt ở lớp 7 khi học sinh phải chuyển kĩ năng và tư duy từ dạng đẳng thức sang bất đẳng thức. Bài viết này trình bày việc vận dụng bất đẳng thức tam giác vào giải các bài toán từ đơn giản đến phức tạp mà nếu đòi hỏi giải bài toán không qua các bước trung gian, không biết vẽ thêm hình phụ sẽ khó khăn hơn nhiều.

Bất đẳng thức liên hệ giữa độ dài 3 cạnh tam giác ABC có dạng

$$AB-AC < BC < AB+BC \qquad (1)$$

và gọi là *bất đẳng thức tam giác.*

Bài toán 1. *Cho điểm M nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng :*

1) $MB + MC < AB + AC$

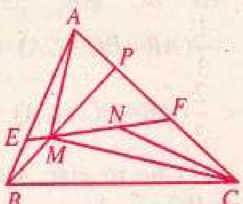
2) $\frac{1}{2}(AB+BC+CA) < MA + MB + MC < AB + BC + CA$

3) $BM + MN + NC < AB + AC$, *trong đó N là điểm nằm trong ΔABC sao cho đường thẳng MN cắt hai cạnh AB, AC.*

Lời giải. (h. 1)

1) Đường thẳng BM cắt AC ở P. Áp dụng BĐT (1) có :

$MB+MC < MB+MP+PC$
$= BP+PC < AB+AP+PC$
$= AB+AC.$



Hình 1

2) Theo trên có :

$BC < MB+MC < AB+AC$
$CA < MC+MA < AB+BC$
$AB < MA+MB < AC+BC$

Cộng theo từng vế các BĐT trên dẫn đến điều phải chứng minh.

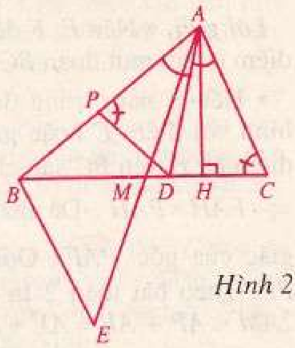
3) Áp dụng câu 1) có

$BM + MN + NC <$
$< BE + EM + MN + NF + FC = BE + EF + FC$
$< BE + EA + AF + FC = AB + AC.$

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC với $AB \geq AC$. Gọi AD, AM lần lượt là đường phân giác, đường trung tuyến của ΔABC. Chứng minh rằng :*

$$\frac{AB+AC-BC}{2} < AD \leq AM < \frac{AB+AC}{2}.$$

Lời giải. 1) Kéo dài AM một đoạn $ME = AM$ (h. 2) thì $\Delta AMC = \Delta EMB$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = BE$. Từ đó $2AM = AE < AB+BE = AB+AC$ $\Rightarrow AM < \dfrac{AB+AC}{2}$.



Hình 2

2) Áp dụng BĐT (1) có :

$AB < AD + BD$; $AC < AD + DC$

Cộng theo từng vế hai BĐT trên có

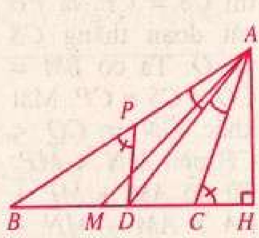
$$AB + AC < 2AD + BC \Rightarrow \frac{AB+AC-BC}{2} < AD$$

Chứng minh này vẫn đúng với D là điểm bất kì nằm bên trong đoạn BC.

3) Dựng $AH \perp BC$. Với $AB = AC$ thì $AM = AD$. Với $AB > AC$ thì $BH > CH \Rightarrow BM < BH \Rightarrow$ M thuộc đoạn BH, hơn nữa $\widehat{ADB} > \widehat{ADC} \Rightarrow$ $\widehat{ADB}$ tù $\Rightarrow D$ thuộc đoạn BH.

Lấy điểm P trên AB sao cho $AP = AC \Rightarrow$ $\Delta ADP = \Delta ADC$ (c.g.c) $\Rightarrow DP = DC$, $\widehat{APD} = \widehat{ACD}$.

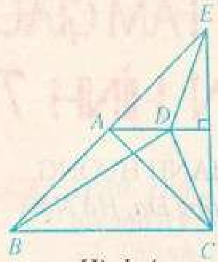
• Nếu $\widehat{ACB} \leq 90^o$ (h. 2) thì $\widehat{APD} = \widehat{ACB}$ $\leq 90^o \Rightarrow \widehat{BPD} \geq 90^o >$ $\widehat{ACB} > \widehat{PBD} \Rightarrow BD >$ $PD = CD \Rightarrow BM < BD$ $\Rightarrow MH > DH \Rightarrow AM > AD$



Hình 3

• Nếu $\widehat{ACB} > 90^o$ (h.3) thì $\widehat{BPD} = \widehat{ACH} >$

$> \widehat{ADC} > \widehat{ABC} \Rightarrow BD > PD = CD \Rightarrow BM < BD \Rightarrow MH > DH \Rightarrow AM > AD$.



Hình 4

Bài toán 3. *Cho ΔABC với $AB = AC$. Lấy điểm D (khác A) sao cho $AD//BC$. Chứng minh rằng $DB + DC > AB + AC$.*

Lời giải. (h. 4) Dựng CE nhận AD làm đường trung trực. Ta có $DB+DC = DB+DE > BE = AB + AE = AB+AC$.

Bài toán 4. *Cho ΔABC với $AB = AC$. Lấy các điểm E, F (khác B, C) trên đường thẳng BC sao cho $\widehat{BAC} = \widehat{EAF}$. Chứng minh rằng*

$$AE + AF > AB + AC \qquad (2)$$

Lời giải. • Nếu E, F đều nằm ngoài hoặc có 1 điểm ở đầu mút đoạn BC thì (2) đúng.

• Nếu E nằm trong đoạn BC (các bạn tự vẽ hình với điểm E hoặc gần B hoặc gần C). Lấy điểm H, P trên BC sao cho $AH \perp BC$, $HE = HP$ $\Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{PAH}$. Dễ thấy rằng AC là tia phân giác của góc $\widehat{PAF}$. Gọi M là trung điểm của PF. Theo bài toán 2 ta có $AB + AC = 2AC \leq 2AM < AP + AF = AE + AF$.

Bài toán 5. *Cho ΔABC với $AB = AC$. Lấy điểm M thuộc cạnh AB.*

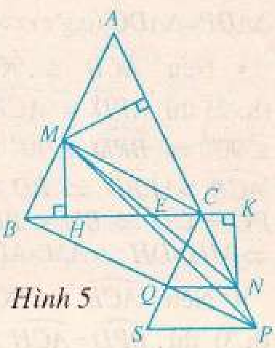
1) Kéo dài AC một đoạn $CN = BM$. Chứng minh rằng $AM + MN + NA > AB + BC + CA$

2) Dựng đường thẳng $BP//CM$, cắt tia AC tại P. Chứng minh rằng

$$AM + MP + PA > AB + BC + CA.$$

Lời giải. (h. 5) Dựng $MH \perp BC$ và $NK \perp BC$. Dễ thấy $\Delta MBH = \Delta NCK \Rightarrow BH = CK \Rightarrow BC = HK$. Ta có $MN = ME + EN > HE + EK = HK$. Từ đó $AM + AN + MN > AB + AC + BC$.

2) Dựng ΔCSP với $CS//AB$ còn $PS//BC$ thì $CS = CP$ và PB cắt đoạn thẳng CS tại Q. Ta có $BM = CQ < CS = CP$. Mặt khác $CN = CQ < CP$ nên $MN < MP$. Từ đó $AM + MP + PA > AM + MN + AC + CN > AB + BC + CA$.

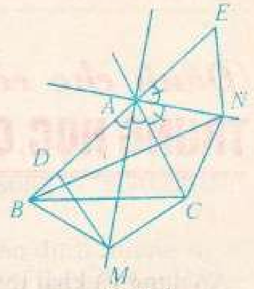


Hình 5

Bài toán 6. *Cho ΔABC với $AB > AC$. Điểm M (khác A) thuộc đường phân giác trong và điểm N (khác A) thuộc đường phân giác ngoài của góc A. Chứng minh rằng :*

1) $AB-AC > MB-MC$

2) $AB+AC < NB+NC$



Hình 6

Lời giải. Trên đường thẳng AB dựng $AD = AC = AE$ như ở hình 6. Suy ra $MD = MC$ và $NE = NC$. Ta có : $AB - AC = AB - AD = BD < MB - MD = MB - MC$ và $AB + AC = AB + AE = BE < NB + NE = NB + NC$.

Mời các bạn hãy sử dụng, khai thác bất đẳng thức tam giác cho các bài toán khác.

BÀI TẬP.

1) Gọi AM, BN, CP là ba đường trung tuyến của ΔABC. Chứng minh rằng :

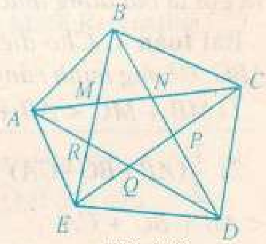
$$\frac{3}{4}(AB+BC+CA) < AM+BN+CP < AB+BC+CA$$

2) Trên hình 9 đặt

$s = AM+MB+BN+NC+CP+PD+DQ+QE+ER+RA$

$u = AB+BC+CD+DE+EA$

$v = MN+NP+PQ+QR+RM$



Hình 9

Chứng minh rằng :

$u < s < 2u - v$

3) Cho ΔABC. Lấy các điểm D, E, F lần lượt trên các cạnh AB, BC, CA sao cho $\frac{AD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CA} = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3}(AB+BC+CA) < DE + EF + FD < \frac{2}{3}(AB+BC+CA)$$

4) Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AD và BC cắt nhau.

1) Giả sử N là một điểm nằm bên trong $ABCD$. Chứng minh rằng $NA = NB + NC + ND \geq AC + BD$

2) Qua trung điểm M của AC kẻ $PQ//BD$ sao cho $PM = MQ = \frac{BD}{2}$. Chứng minh rằng

$$AP + PC + CQ + QA \leq AB + BC + CD + DA$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, NAM ĐỊNH 2002

VÒNG I

(Dành cho mọi thí sinh
Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu I. 1) Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của n, luôn có :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

2) Tính tổng :

$$S=\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

Câu II. Tìm trên đường thẳng $y = x + 1$ những điểm có tọa độ thỏa mãn đẳng thức :

$$y^2-3y\sqrt{x}+2x=0$$

Câu III. Cho hai phương trình sau :

$$x^2-(2m-3)x+6=0$$
$$2x^2+x+m-5=0$$

(x là ẩn, m là tham số)

Tìm m để hai phương trình đã cho có đúng một nghiệm chung.

Câu IV. Cho đường tròn (O, R) với hai đường kính AB và MN. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A cắt các đường thẳng BM và BN tương ứng M_1 và N_1. Gọi P là trung điểm của của AM_1, Q là trung điểm của AN_1.

1) Chứng minh tứ giác MM_1N_1N nội tiếp được trong một đường tròn.

2) Nếu $M_1N_1 = 4R$ thì tứ giác $PMNQ$ là hình gì ? Chứng minh ?

3) Đường kính AB cố định, tìm tập hợp tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ khi đường kính MN thay đổi.

Câu V. Cho đường tròn (O, R) và hai điểm A, B nằm phía ngoài đường tròn (O) với $OA = 2R$. Xác định vị trí của điểm M trên đường tròn (O) sao cho biểu thức : $P = MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất ấy

VÒNG II.

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, chuyên Tin
Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu VI.

1) Với a và b là 2 số dương thỏa mãn $a^2 - b > 0$. Chứng minh :

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

2) Không sử dụng máy tính và bảng số, chứng tỏ rằng :

$$\frac{7}{5}<\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}<\frac{29}{20}$$

Câu VII. Giả sử x, y là các số dương thỏa mãn đẳng thức $x + y = \sqrt{10}$. Tìm giá trị của x và y để biểu thức sau :

$$P=(x^4+1)(y^4+1)$$

đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất ấy ?

Câu VIII. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{y-z}+\dfrac{z}{z-x}=0\\[2mm]\dfrac{x}{(x-y)^2}+\dfrac{y}{(y-z)^2}+\dfrac{z}{(z-x)^2}=0\end{cases}$$

Câu IX. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O, R) với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Lấy điểm I bất kì ở phía trong của tam giác ABC và gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ điểm I đến các cạnh BC, AC và AB của tam giác. Chứng minh :

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}}$$

Câu X. Cho tập hợp $\mathscr{P}$ gồm 10 điểm trong đó có một số cặp điểm được nối với nhau bằng đoạn thẳng. Số các đoạn thẳng có trong tập $\mathscr{P}$ nối từ điểm A đến các điểm khác gọi là bậc của điểm A. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được 2 điểm trong tập hợp $\mathscr{P}$ có cùng bậc.

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG QUỐC HỌC, THỪA THIÊN - HUẾ

(Đề thi đã đăng trong THTT số 310 tháng 4/2003)

Câu I. a) Đặt

$P = \sqrt{1+4x+4x^2} + \sqrt{4x^2-12x+9}$

$= \sqrt{(1+2x)^2} + \sqrt{(3-2x)^2}$

$= |1+2x| + |3-2x| \geq |1+2x+3-2x| = 4$

$P = 4 \Leftrightarrow (1+2x)(3-2x) \geq 0$

Vậy GTNN của P là 4 khi $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

b) Đặt $x_0 = \sqrt[3]{70-\sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$ hay $x_o^3 = \left(\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}\right)^3$, lúc đó x_0 là nghiệm của PT $x^3 = 70 - \sqrt{4901} + 3\sqrt[3]{(70-\sqrt{4901})(70+\sqrt{4901})}\,x + 70 + \sqrt{4901}$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x - 140 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2+5x+28) = 0$

mà $x^2 + 5x + 28 > 0$ (do $\Delta < 0$) $\Rightarrow x = 5$.

Câu II. a) Từ phương trình (2) có :

$x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-3)x + (y-2)^2 = 0$

PT bậc hai ẩn x này có nghiệm, tức là

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y-3)^2 - 4(y-2)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (y-3+2y-4)(y-3-2y+4) \geq 0$

$\Leftrightarrow (3y-7)(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}$ (3)

b) Tương tự : $x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + (x-4)y + x^2 - 3x + 4 = 0$

PT bậc hai ẩn y này có nghiệm, tức là :

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 - 4(x^2-3x+4) \geq 0$

$\Leftrightarrow x(4-3x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{3}$. (4)

Từ (3) và (4) có

Do $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$ và $1 \leq y \leq \frac{7}{3}$ nên :

$x^4 + y^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^4 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{256}{81} + \frac{49}{9} = \frac{697}{81}$

$x^4 + y^2 = \frac{697}{81} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ và $y = \frac{7}{3}$

Nhưng khi $x = \frac{4}{3}$ và $y = \frac{7}{3}$ thì $x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 1 \neq 0$

Do đó hệ phương trình trên vô nghiệm.

Câu III. Ta có : $3x^2 + 7y^2 = 2002 \Leftrightarrow 3x^2 = 2002 - 7y^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 7(286 - y^2)$

Mặt khác $(3, 7) = 1$ nên $x \vdots 7 \Leftrightarrow x^2 \vdots 7^2$

Từ đó suy ra : $(286 - y^2) \vdots 7$

$\Leftrightarrow [287 - (y^2+1)] \vdots 7 \Leftrightarrow (y^2+1) \vdots 7$.

Giả sử $y = 7k + r$ với $0 \leq r \leq 6$ thì $y^2 + 1 = (7k+r)^2 + 1 = 7(7k^2 + 2kr) + r^2 + 1$. Thử thấy với r bằng 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 thì $r^2 + 1$ đều không chia hết cho 7 nên $y^2 + 1$ không chia hết cho 7.

Do đó không tồn tại hai số nguyên x, y để $3x^2 + 7y^2 = 2002$.

Câu IV. Gọi $A_1, A_2, A_3, ..., A_{12}$ là các đỉnh của đa giác lồi 12 cạnh.

Do đa giác đã cho là đa giác lồi nên ba đỉnh bất kì nào của nó cũng tạo thành một tam giác.

Kí hiệu $A_iA_jA_k$ là tam giác có các đỉnh là các đỉnh của đa giác lồi, trong đó $i = 1, 2, ..., 12$; $j = 1, 2, ..., 12$; $k = 1, 2, ..., 12$ với i, j, k đôi một khác nhau. Đỉnh A_i có 12 cách chọn từ 12 đỉnh $A_1, ..., A_{12}$. Sau khi chọn đỉnh A_i thì có 11 cách chọn A_j. Sau khi đã chọn A_iA_j thì có 10 cách chọn A_k. Như vậy có 12.11.10 = 1320 cách chọn tam giác $A_iA_jA_k$.

Với cách chọn trên một tam giác $A_iA_jA_k$ được viết lại 6 lần. Ví dụ : $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_2$, $A_2A_1A_3$, $A_2A_3A_1$, $A_3A_1A_2$ và $A_3A_2A_1$. Do đó số tam giác có được là : 1320 : 6 = 220 (tam giác).

Câu V. Ta có $\Delta MBH \backsim \Delta ADN$ suy ra : $\frac{MB}{AD} = \frac{BH}{DN} \Rightarrow MB.DN = BH.AD$ (1)

Mặt khác $\Delta OHB \backsim \Delta AOD \Rightarrow \frac{BH}{DO} = \frac{OB}{AD} \Rightarrow DO.OB = BH.AD$ (2)

(Xem tiếp trang 6)

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

Sách giáo khoa TOÁN 7 – NHỮNG ĐIỀU MỚI MẺ VÀ LÍ THÚ !

TÔN THÂN
(Viện KHGD Hà Nội)

Học sinh lớp 7 được tiếp cận với số thực, được làm quen với thống kê mô tả và định lí Pi-ta-go!

Được viết căn cứ vào Chương trình Toán THCS của Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành ngày 24-1-2002, SGK Toán 7 đã lôi cuốn các em học sinh (HS) vào một cuộc tìm tòi, khám phá những kiến thức toán học bổ ích và lí thú, những kiến thức có nhiều ứng dụng trong thực tế và ứng dụng vào việc học tập các môn học khác.

Về Đại số, sách Toán 7 đã củng cố và hệ thống hóa lại các phép tính cộng, trừ, nhân, chia số hữu tỉ (trên cơ sở các phép tính về phân số đã được học ở lớp 6) và bổ sung thêm phép tính lũy thừa với số mũ tự nhiên của một số hữu tỉ. Qua việc giúp HS khám phá các tính chất của tỉ lệ thức, của dãy tỉ số bằng nhau, sách Toán 7 đã cung cấp cho HS công cụ để giải được nhiều bài toán chia theo tỉ lệ thường gặp trong đời sống. HS được mở rộng thêm hiểu biết về số thập phân hữu hạn, số thập phân vô hạn tuần hoàn, về các quy ước làm tròn số được ứng dụng nhiều trong đời sống. Đặc biệt, HS được giới thiệu một cách nhẹ nhàng, dễ hiểu về số vô tỉ, căn bậc hai, số thực. Việc giới thiệu này nhằm mục đích sớm hoàn chỉnh khái niệm số cho HS, tạo điều kiện thuận lợi cho HS trong thực hành tính toán và học các phần tiếp theo.

Sách Toán 7 giúp HS nhận biết được hai đại lượng tỉ lệ thuận (nghịch), biết vận dụng các tính chất của các đại lượng đó để giải các bài toán có liên quan đến đại lượng tỉ lệ thuận (nghịch) và các bài toán thực tiễn về chia tỉ lệ. Qua một số ví dụ cụ thể, sách tạo điều kiện cho HS tiếp cận với một khái niệm toán học quan trọng : hàm số. HS được hướng dẫn vẽ hệ trục tọa độ, biểu diễn một cặp số, xác định tọa độ của một điểm trên mặt phẳng tọa độ, biết cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax$ và biết dạng của đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}$.

Sách Toán 7 dành một chương để hệ thống lại một số kiến thức và kĩ năng về thống kê mà HS đã biết ở bậc Tiểu học và ở lớp 6 đồng thời giới thiệu một số khái niệm cơ bản và quy tắc tính toán đơn giản để qua đó cho HS làm quen với thống kê mô tả, một bộ phận của khoa học thống kê. Học xong chương này, HS biết tiến hành thu thập số liệu từ những cuộc điều tra nhỏ, đơn giản, gần gũi trong học tập và trong cuộc sống ; lập được bảng "tần số" ; biết vẽ biểu đồ ; biết cách tính số trung bình cộng và biết tìm mốt của dấu hiệu.

Từ các biểu thức số và các phép tính trên các biểu thức số, sách dẫn dắt HS đến khái niệm biểu thức đại số với chú ý rằng trong biểu thức đại số, coi chữ là "đại diện" cho số. Từ đó, HS tiếp thu dễ dàng các phép tính : nhân đơn thức ; cộng, trừ các đơn thức đồng dạng ; cộng, trừ đa thức (một biến, nhiều biến). HS biết tính giá trị của một biểu thức đại số, biết kiểm tra xem một số có phải là nghiệm của một đa thức hay không.

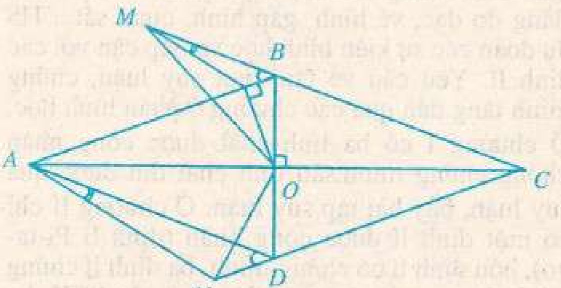
Về Hình học, các kiến thức được trình bày theo con đường kết hợp trực quan và suy diễn. Bằng đo đạc, vẽ hình, gấp hình, quan sát... HS dự đoán các sự kiện hình học và tiếp cận với các định lí. Yêu cầu về tập dượt suy luận, chứng minh tăng dần qua các chương ở phần hình học. Ở chương I có ba tính chất được công nhận không chứng minh,sáu tính chất thu được qua suy luận, bảy bài tập suy luận. Ở chương II chỉ có một định lí được công nhận (định lí Pi-ta-go), bốn định lí có chứng minh, ba định lí chứng minh thông qua các câu hỏi gợi ý của SGK, ba định lí HS tự chứng minh. Ở chương III, hầu hết các định lí được chứng minh hoặc hướng dẫn chứng minh trừ hai định lí về sự đồng quy của ba đường trung tuyến và của ba đường cao. Sách Toán 7 tiếp tục bổ sung những kiến thức mở đầu hình học phẳng đã được giới thiệu ở lớp 6. Đó là khái niệm về hai đường thẳng vuông góc, hai đường thẳng song song ; quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song của hai đường thẳng ; tiên đề Ơ-clit về đường thẳng song song. Tiếp đó, sách hướng dẫn HS đo các góc của một số tam giác, cắt ghép hình, nêu dự đoán về tổng số đo các góc của mỗi tam giác rồi dùng suy luận để chứng minh định lí về tổng ba góc của một tam giác. Ba trường hợp bằng nhau của hai tam giác được thừa nhận thông qua việc vẽ tam giác biết ba cạnh, biết hai cạnh và góc xen giữa, biết một cạnh và hai góc kề cạnh đó. Các dạng tam giác đặc biệt được giới thiệu bao gồm tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông, tam giác vuông cân. Định lí Pi-ta-go (thuận và đảo) được giới thiệu dưới dạng một kết quả được thừa nhận nhằm mục đích tăng cường tính toán trong hình học (bên cạnh rèn luyện suy diễn lô-gich) và tạo thuận lợi cho việc nghiên cứu các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông, về quan hệ giữa các đường xiên và hình chiếu của chúng.

Sách Toán 7 giới thiệu cho HS quan hệ giữa các yếu tố cạnh, góc trong tam giác ; giới thiệu các đường đồng quy của tam giác và tính chất của chúng. Để cho chương trình Hình học 7 đỡ nặng nề, định lí về đường trung bình của tam giác được chuyển lên lớp 8, định lí về hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau không đưa vào chương trình và SGK lớp 7.

(Kì sau đăng tiếp)

LỜI GIẢI ĐỀ THI... *(Tiếp trang 4)*

Từ (1) và (2) ta có : $MB.DN = DO.OB \Rightarrow \dfrac{MB}{OB} = \dfrac{DO}{DN}$.



Thêm vào đó : $\widehat{MBO} = 180^o - \widehat{CBD} = 180^o - \widehat{CDB} = \widehat{ODN}$ nên : $\Delta MBO \backsim \Delta ODN \Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{NOD}$.

Từ đó suy ra : $\widehat{MON} = 180^o - (\widehat{MOB} + \widehat{NOD}) = 180^o - \left(\widehat{MOB} + \widehat{OMB}\right) = 180^o - \widehat{OBC} = 110^o$.

Hướng dẫn giải

NGUYỄN PHƯỚC

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 62

Problem. Find formulas for the integers which are the sides of a rectangular triangle.

Solution. Let x, y, z be the positive integers which are the sides of a rectangular triangle. We have to find all integral solutions of the equation $x^2 + y^2 = z^2$.

If two integers among x, y, z have a common factor, then it is also a factor of the third integer. Therefore, we may assume that $x = ta$, $y = tb$, $z = tc$, where a, b, c, t are integers such that a, b, c are pairwise relatively prime. If a and b are both odd numbers, then $a^2 + b^2$ is divisible by 2 but not by 4, which gives a contradiction since c must be even and hence c^2 is divisible by 4. If a is even, then b, c must be odd. Put

$$u = \frac{a}{2},\ v = \frac{c+b}{2},\ w = \frac{c-b}{2}.$$

Then $u^2 = v.w$, where u, v, w are integers such that v, w are relatively prime (because $v-w = b$, $v + w = c$). Hence v, and w must be both squares of integers:

$$v = r^2,\ w = s^2.$$

So we get

$$x = 2trs,\ y = t(r^2 - s^2),\ z = t(r^2 + s^2),$$

where t, r, s are arbitrary integers with $r > s$. Similarly, if b is even, we get

$$x = t(r^2 - s^2),\ y = 2trs,\ z = t(r^2 + s^2).$$

It is easy to check that these two formulas for x, y, z give all solutions of the problem.

Từ mới:

rectangular = có góc vuông (tính từ)
integral = nguyên (tính từ)
solution = lời giải, nghiệm
common = chung, thông thường (tính từ)
factor = thừa số, nhân tử (danh từ), phân tích thành nhân tử (động từ)
pairwise = từng đôi một (phó từ)
relatively prime = nguyên tố cùng nhau (tính từ)
odd = lẻ (tính từ)
contradiction = sự mâu thuẫn
square = vuông, bình phương, bậc hai
arbitrary = bất kỳ, tùy ý (tính từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 2

(Đề đã đăng trong THTT số 310 tháng 4/2003)

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải

II. 2) Đưa PT về dạng $m = -x^3 + ax^2 - 4$ (1)

Xét vị trí tương đối giữa đồ thị ($\mathscr{C}_a$) của hàm số $y = -x^3 + ax + 4$ và đường thẳng (Δ_m) có PT $y = m$ (với $-4 < m < 0$)

Nếu $a = 0$ thì $y' = -3x^2 \le 0$, $\forall x$ suy ra hàm y nghịch biến trên R. Lúc đó ($\mathscr{C}_a$) cắt (Δ_m) tại đúng 1 điểm. Vậy $a \ne 0$. Tính $y' = -3x^2 + 2ax$. Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2a/3 \end{array}\right.$. Với $a > 0$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$2a/3$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	-4	$\nearrow$	$\frac{4a^3}{27}-4$	$\searrow$	

Điều kiện để (Δ_m) (với $-4 < m < 0$) cắt ($\mathscr{C}_a$) tại 3 điểm phân biệt là $\frac{4a^3}{27}-4 \ge 0 \Leftrightarrow a \ge 3$.

Với $a < 0$, lập bảng biến thiên thấy trường hợp này không thỏa mãn đề bài. Vậy $a \ge 3$ là các giá trị cần tìm.

Câu II. 1). ĐK : $-1 \le x, y \le 1$.

• Áp dụng BĐT Bu-nhia-côp-xki ta có :

$\sqrt{2} = 1.\sqrt{1-x} + 1.\sqrt{1-y} \le \sqrt{1+1}\sqrt{1-x+1-y}$

$\Rightarrow x + y \le 1$ (1)

Tương tự :

$\sqrt{6} = 1.\sqrt{1+x} + 1.\sqrt{1+y} \le \sqrt{1+1}.\sqrt{1+x+1+y}$

$\Rightarrow x + y \ge 1$ (2)

Từ (1), (2) suy ra hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ \sqrt{1-x}=\sqrt{1-y} \\ \sqrt{1+x}=\sqrt{1+y} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

Thử lại đúng. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

II.2) Biến đổi $A = \sqrt{\frac{x+2}{x}} - \sqrt[3]{\frac{x+3}{x}}$

$$= \left[\sqrt{1+\frac{2}{x}} - \left(1+\frac{1}{x}\right)\right] + \left[\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}\right]$$

Nhân mỗi biểu thức trong ngoặc vuông với biểu thức liên hợp được

$$A = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}} + \frac{\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}}$$

Từ đó $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left[\sqrt{\frac{x+2}{x}} - \sqrt[3]{\frac{x+3}{x}}\right] =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}}$$

$$+ \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Câu III. 1) Đặt $t = \frac{2x+1}{3x}$ (với $x \ge \frac{1}{10}$)

$\Rightarrow \frac{2}{3} < t \le 4$ (*) (lưu ý rằng hàm $t = \frac{2x+1}{3x}$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{10}, +\infty\right)$, có tiệm cận ngang $t = \frac{2}{3}$). Phương trình đã cho trở thành

$\sin 3t + \sin t - 2\cos^2 t = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin t - 4\sin^3 t + \sin t - 2\cos^2 t = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin t(1 - \sin^2 t) - 2\cos^2 t = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 t(4\sin t - 2) = 0$

• Với $\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Từ đó và (*) suy ra $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{3\pi - 4}$

• Với $\sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$

Từ đó và (*) thì $t = \dfrac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{2}{5\pi-4}$. Vậy PT có nghiệm : $x = \dfrac{1}{3\pi-4}$; $x = \dfrac{2}{5\pi-4}$.

III. 2) Ta có :

$$r_a r_b r_c = \frac{S}{p-a}.\frac{S}{p-b}.\frac{S}{p-c}$$

$$= \frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow (r_a r_b r_c)^2 = \frac{S^6}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}$$

$$= \frac{S^6.p^2}{S^4} = \frac{S^3.p^2}{p.r} = S^3.\frac{p}{r} = \frac{S^3}{2r}(a+b+c)$$

$$= S^3\left(\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}\right) \geq 3\sqrt{3}.S^3$$

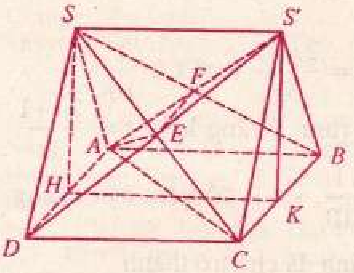
$$\Rightarrow \sqrt[6]{(r_a r_b r_c)^2} \geq \sqrt[6]{3\sqrt{3}}\,\sqrt[6]{S^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{r_a r_b r_c} \geq \sqrt[4]{3}.\sqrt{S}$$

Vậy $\sqrt[3]{r_a r_b r_c} \geq \sqrt[4]{3}.\sqrt{S}$

$\Leftrightarrow \text{cotg}\dfrac{A}{2}+\text{cotg}\dfrac{B}{2}+\text{cotg}\dfrac{C}{2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều (đpcm).

Câu IV. 1) Ta có $SHKS'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ SS' song song và bằng HK do đó $SDCS'$, $SABS'$ là các hình bình hành.



Giả sử SC cắt DS' tại E và SB cắt AS' tại F.

Phần chung của hai hình chóp $SABCD$ và $S'ABCD$ là khối đa diện $EDC.FAB$. Gọi V là thể tích của phần chung đó.

Ta có : $V = V_{SABCD} - V_{SADEF}$

Xét : $\dfrac{V_{SAEF}}{V_{SACB}} = \dfrac{SA.SE.SF}{SA.SC.SB} = \dfrac{SE}{SC}.\dfrac{SF}{SB} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow V_{SAEF} = \dfrac{1}{4}V_{SACB} = \dfrac{1}{8}V_{SABCD}$

Lại có $\dfrac{V_{SADE}}{V_{SADC}} = \dfrac{SA.SD.SE}{SA.SD.SC} = \dfrac{SE}{SC} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{SADE} = \dfrac{1}{2}V_{SADC} = \dfrac{1}{4}V_{SABCD}$

Vậy $V = \left(1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}\right)V_{SABCD} = \dfrac{5}{24}a^2h$

IV. 2) Tìm tập hợp các điểm M trên đường thẳng $y = m$ từ đó kẻ được đến đường tròn $(\mathscr{C})$ có PT $x^2 + y^2 = 9$ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) hợp với nhau góc 45°. Lúc đó $\widehat{AMB} = 45°$ (1) hoặc $\widehat{AMB} = 135°$ (2) (Bạn đọc tự vẽ hình).

1) Xét $\widehat{AMB} = 45°$. Trong tam giác vuông OMB có $OM = \dfrac{OB}{\sin(\pi/8)} = \dfrac{3}{\sin(\pi/8)}$

Trong đó : $\sin\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$\Rightarrow OM = \dfrac{6}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ nên M thuộc đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ có tâm O (0, 0) bán kính $R_1 = \dfrac{6}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

2) Xét $\widehat{AMB} = 135°$. Tương tự như trên M thuộc đường tròn $(\mathscr{C}_2)$ tâm O (0, 0) bán kính $R_2 = \dfrac{6}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Để trên đường thẳng $y = m$ có đúng 4 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán thì đường thẳng $y = m$ phải cắt $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ tại 4 điểm phân biệt.

Từ đó suy ra $\dfrac{-6}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} < m < \dfrac{6}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Câu V. 1) Ta có

$$I = \int_0^1 \frac{(1+x^4-x^2)+x^2}{(1+x^2)(x^4-x^2+1)}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}dx$$

Tính $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; Đặt $x = \text{tg}t$ $(0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{4}) \Rightarrow$

$dx = (1+\text{tg}^2 t)dt \Rightarrow I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} dt = \frac{\pi}{4}$.

Tính $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$; Đặt $z = x^3 \Rightarrow dz = 3x^2dx \Rightarrow$

$I_2 = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{12} \Rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{3}$.

V. 2) • Số cách chọn 3 người bất kì : $C_{12}^3 = 220$ (cách)

• Số cách chọn 3 người trong đó có ít nhất 1 cặp là vợ chồng : $C_3^1.C_{10}^1 = 30$ (cách)

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là : 220 - 30 = 190 (cách).

Hướng dẫn giải

TRẦN THANH VŨ

(Nghệ An)

ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 3

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I. Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 - x + m}{x - 1}\ (C_m)\ (m \neq 0)$$

1) Khảo sát hàm số với $m = 1$.

2) Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho các tiếp tuyến với đồ thị tại A, B vuông góc với nhau.

3) Tìm m để tam giác tạo bởi một tiếp tuyến bất kì của đồ thị (C_m) và 2 đường tiệm cận có diện tích nhỏ hơn 2.

Câu II. 1) Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có các góc thỏa mãn điều kiện sau thì nó là tam giác đều

$$\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) = \frac{3}{2}(\sin A + \sin B + \sin C)$$

2) Tìm m để hai phương trình sau tương đương :

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1 \text{ và } \cos x + m\sin 2x = 0$$

Câu III. 1) Giải phương trình :

$$\log_2 \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 4x + 3} = x^2 - 3x + 2$$

2) Giải bất phương trình : $3^x + 5^x < 2.4^x$

Câu IV. 1) Hãy lập phương trình các cạnh của một hình vuông ngoại tiếp elip $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y + 2z + 2 = 0$ và 2 điểm A (4; 1; 3), B(2; -3; -1).

Hãy tìm điểm M thuộc (P) sao cho $MA^2 + MB^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu V. 1) Tính $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

2) Tìm hệ số có giá trị lớn nhất khi khai triển $\left(\frac{1}{2} + \frac{2x}{3}\right)^{10}$ ra một đa thức.

NGUYỄN ANH DŨNG

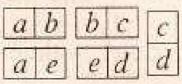
(Hà Nội)

PROBLEMS... *(Tiếp trang 13)*

(Tiếp trang 13)

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/311. Each domino consists of two squares having a common side, on its first and second squares are marked x and respectively y dots. Thid momino is denoted by (x, y) or (y, x). For every non ordered pair of number x, y, there's only one domino (x, y). Divide the set of dominoes with $1 \le x \le 5$, $1 \le y \le 5$ into three groups, each group is presented as a closed circuit



where the numbers a, b, c, d, e are not necessarily distinct. How many such dividings are there ?

T9/311. Prove that for every $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, holds

$$\sin x \le \frac{4}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2.$$

T10/311. Prove that for every triangle ABC, hold

$$\sqrt{3} \le \frac{\cos(A/2)}{1+\sin(A/2)} + \frac{\cos(B/2)}{1+\sin(B/2)} + \frac{\cos(C/2)}{1+\sin(C/2)} < 2$$

T11/311. Le $ABCD$ be a convex a quadrilateral, the diagonals AC and BD of which are orthogonal. The lines BC and AD intersect at I, the lines AB and CD intersect at J. Prove that the quadrilateral $BDIJ$ is inscribable when and only when $AB.CD = AD.BC$.

T12/311. The tetrahedron $ABCD$ has its four altitudes concurrent at a point H inside the tetrahedron. Let M, N, P be respectively the midpoints of BC, CD, DB. Let R and R_1 be respectively the circumradii of the tetrahedra $ABCD$ and $HMNP$. Prove that $R = 2R_1$.

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

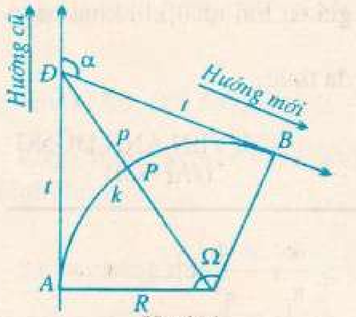
XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG DẠNG CUNG TRÒN TRONG XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH GIAO THÔNG

NGÔ VĂN ĐANG
(*Phú Thọ*)

Trong hình học, một đường tròn được xác định khi ta biết tâm và bán kính. Nhưng để xác định những cung tròn có bán kính lớn ngoài thực địa có địa hình phức tạp như việc triển khai thi công những đoạn đường cong trong xây dựng cầu đường lại không đơn giản là phải cần biết 2 yếu tố trên. Thực tế trong các bản vẽ thiết kế đường và công trình trên đường, tâm của cung tròn chỉ có ý nghĩa về lí thuyết trong thiết kế bình đồ (sơ đồ mặt bằng công trình), còn khi triển khai thi công người ta không cần xác định vị trí của nó và nhiều khi cũng không thể xác định được. Vậy làm thế nào để dựng đường cung tròn mà không cần sử dụng trực tiếp đến vị trí tâm và bán kính.

Trước khi vào giải quyết bài toán trên, để tiện theo dõi ta thống nhất 3 vấn đề có liên quan là :

1) Các yếu tố hình học trong thiết kế đường : (hình 1) đỉnh góc chuyển hướng (góc ngoặt) là Đ, góc chuyển hướng α, tâm cung tròn O, góc ở tâm Ω (dễ thấy $\Omega = \alpha$), bán kính R, các tiếp điểm : tiếp điểm đầu A, tiếp điểm cuối B, chiều dài cung tròn k, chiều dài tiếp tuyến t, điểm giữa cung tròn (phân cự) P, chiều dài phân cự ĐP = p. Góc α đo được trong quá trình khảo sát, R xác định theo yêu cầu thiết kế. Từ α, R người ta tính được các giá trị của t, k, p:



Hình 1

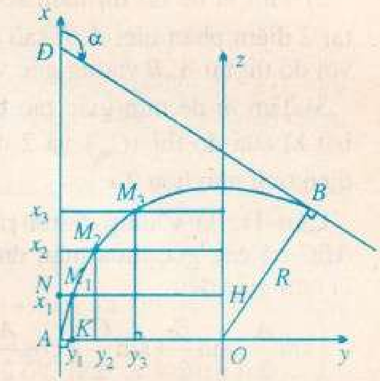
$$t = R\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2},\ k = \frac{\pi R\alpha^o}{180^o},\ p = R\left(\frac{1}{\cos(\alpha/2)} - 1\right)$$

2) Trong đo đạc người ta cũng lập một hệ trục tọa độ vuông góc để xác định vị trí của một điểm bất kì trên mặt đất nhưng trục tung và trục hoành được đổi chỗ cho nhau so với hệ trục tọa độ Đề-các trong sách giáo khoa.

3) Trong xây dựng cầu đường, việc xác định một cung tròn được hiểu là xác định những điểm riêng lẻ thuộc cung tròn đó, dĩ nhiên càng xác định nhiều điểm thì độ chính xác càng cao.

Trở lại bài toán trên: cho một cung tròn có các giá trị α, R, t, k, p được ghi trong thiết kế và biết 3 điểm A, B, P. Hãy xác định nhiều điểm khác thuộc cung tròn đó trên thực địa.

Phương pháp tọa độ : Lập một hệ trục tọa độ vuông góc xAy đi qua tiếp điểm A (hình 2). Giả sử có điểm M_1 (x_1, y_1) thuộc cung tròn với $x_1 = AN$, $y_1 = AK$. Qua tâm O dựng nửa đường thẳng $Oz//Ax$. Đường thẳng NM_1 cắt Oz tại H. Ta thấy ngay rằng $x_1 = AN = OH$. Vì M_1 thuộc đường tròn tâm O nên



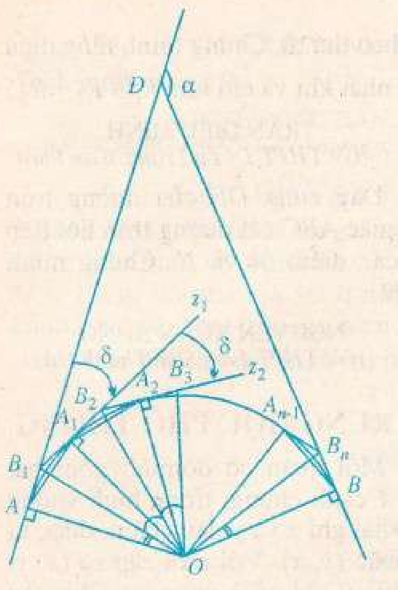
Hình 2

$$OH^2 + HM_1^2 = OM_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 + (R - y_1)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow y_1 = R - \sqrt{R^2 - x_1^2} = R\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{R^2}}\right) \qquad (1)$$

Ta xác định M ngược với quá trình phân tích đó : Trên trục Ax, từ A lần lượt đặt các đoạn x_o, x_1, ..., x_n $(0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < R)$, theo (1) ta tính được các giá trị tương ứng của y_1, y_2, ..., y_n từ đó xác định được các điểm M_i với tọa độ $M_i\,(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ thuộc cung tròn tâm O, bán kính R.

Phương pháp dựng nhiều tiếp tuyến. Chia góc $\Omega = \alpha$ ra n phần sao cho $\delta = \dfrac{\Omega}{n}$ khá nhỏ (hình 3). Tại các điểm A_1, A_2, ..., A_{n-1} thuộc cung tròn mà $\widehat{AOA_1} = \widehat{A_1OA_2} = ... = \widehat{A_{n-1}OB} = \delta$ dựng các tiếp tuyến với cung tròn đã cho, các cặp tiếp tuyến tại A và A_1, A_1 và A_2, ... lần lượt



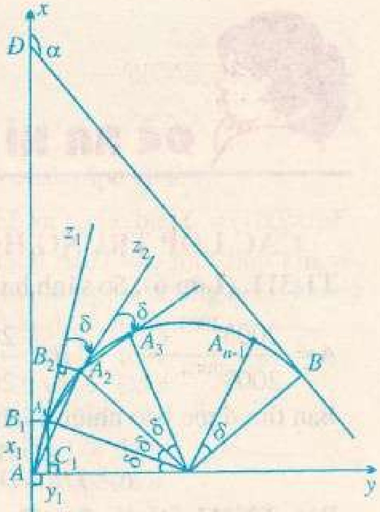
Hình 3

cắt nhau tại $B_1, B_2, ..., B_n$. Dễ dàng chứng minh được rằng các tam giác $B_1OB_2, B_2OB_3, ..., B_{n-1}OB_n$ là những tam giác cân bằng nhau và $B_1B_2 = B_2B_3 = ... = B_{n-1}B_n = 2R\text{tg}\frac{\delta}{2} = 2AB_1 = 2B_nB$.

Ta có $\widehat{B_1A_1A} = \widehat{B_1AA_1} = \frac{\delta}{2}$ (2 góc nội tiếp đều bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung) và $\widehat{ĐB_1A_1} = \widehat{B_1AA_1} + \widehat{B_1A_1A} = \delta$. Tương tự các góc chuyển hướng tại $B_2, B_3, ..., B_n$ đều có giá trị bằng δ. Ta xác định $A_1, A_2, ... A_{n-1}$ ngược với quá trình phân tích đó. Trên $AĐ$ và từ A do $AB_1 = R\text{tg}\frac{\delta}{2}$, tại B_1 dựng $\widehat{ĐB_1z_1} = \delta$, trên B_1z_1 dựng $B_1A_1 = R\text{tg}\frac{\delta}{2}$ và $B_1B_2 = 2R\text{tg}\frac{\delta}{2}$, tại B_2 dựng $\widehat{z_1B_2z_2} = \delta$ và tương tự xác định được các điểm $A_2, B_3, ..., A_{n-1}, B_n$ thì $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ là những điểm nằm trên cung tròn tâm O, bán kính R.

Phương pháp kéo dài dây cung. Chia góc $\Omega = \alpha$ ra làm n phần sao cho $\delta = \frac{\Omega}{n}$ khá nhỏ (h. 4). Các tam giác: $AOA_1, A_1OA_2, ..., A_{n-1}OB$ là những tam giác cân bằng nhau và $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}B = 2R\sin\frac{\delta}{2} = h$. Có $\widehat{ĐAA_1} = \frac{1}{2}\widehat{AOA_1} = \frac{\delta}{2}$ (góc giữa tiếp tuyến và 1 dây bằng nửa góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{AA_1}$), $\widehat{A_1AA_2} = \widehat{A_1A_2A} = \frac{1}{2}\widehat{AOA_1} = \frac{1}{2}\widehat{A_1OA_2} = \frac{\delta}{2}$ (góc nội tiếp chắn 2 cung $\overset{\frown}{AA_1} = \overset{\frown}{A_1A_2}$).

Ta có $\widehat{A_1AA_2} + \widehat{A_1A_2A} = \widehat{z_1A_1z_2} = \delta$. Từ đó suy ra cách dựng các điểm $A_1, A_2, ...$ như sau :



Hình 4

Trên $AĐ$ dựng $\widehat{ĐAz_1} = \frac{\delta}{2}$ và trên tia Az_1 dựng $AA_1 = h = 2R\sin\frac{\delta}{2}$. Trên A_1z_1 dựng $\widehat{z_1A_1z_2} = \delta$ và trên A_1z_2 dựng $A_1A_2 = h$. Cứ như thế ta dựng được các điểm $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ nằm trên cung tròn cần xác định.

Phương pháp kéo dài dây cung và phương pháp dựng nhiều tiếp tuyến được áp dụng trong trường hợp địa hình phức tạp, bị che khuất nhiều.

Bạn thấy không, như vậy chỉ bằng những kiến thức toán học sơ cấp trong chương trình phổ thông, ta đã giải quyết được một bài toán thực tế đặt ra tưởng chừng không đơn giản.

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

T1/311. (Lớp 6). So sánh hai phân số sau :

$$A=\frac{2003^{2003}+1}{2003^{2004}+1},\quad B=\frac{2003^{2002}+1}{2003^{2003}+1}$$

Bạn tìm được bao nhiêu cách giải ?

ĐỖ HỒNG HÀ
(GV THCS Đống Đa, Hà Nội)

Bài T2/311. (Lớp 7). Cho tam giác ABC. Dựng đoạn thẳng BD sao cho $\widehat{ABD}=60^\circ$, $BD=BA$ và tia BA nằm giữa hai tia BC, BD. Dựng đoạn thẳng BE sao cho $\widehat{CBE}=60^\circ$, $BE=BC$ và tia BC nằm giữa hai tia BA, BE. Gọi M là trung điểm của DE, P là giao điểm hai đường trung trực của các đoạn thẳng BA và BD. Tính các góc của tam giác CMP.

PHẠM HÙNG
(Hà Nội)

Bài T3/311. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-4x+1=0$. Chứng minh rằng $x_1^{2n}+x_2^{2n}$ có thể biểu diễn thành tổng các bình phương của 3 số nguyên liên tiếp với bất kì số nguyên dương n.

PHẠM VĂN VƯỢNG
(SV Dược 7, Học viện Quân y, Hà Tây)

Bài T4/311. Tìm tất cả bộ ba số a, b, c thỏa mãn đẳng thức

$$(a^2+1)(b^2+2)(c^2+8)=32abc$$

NGUYỄN VĂN TUẤN
(GV THCS Văn Khê, Vĩnh Phúc)

Bài T5/311. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{a^8}{(a^2+b^2)^2}+\dfrac{b^8}{(b^2+c^2)^2}+\dfrac{c^8}{(c^2+a^2)^2}$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện : $ab+bc+ca=1$

CAO XUÂN NAM
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T6/311. Cho tam giác ABC vuông tại A. Dựng hình chữ nhật $EFGD$ sao cho E, F là các điểm trên cạnh BC, còn G, D lần lượt là các điểm trên cạnh AC, AB. Gọi R_1, R_2 và R_3 là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác BDE, CGF và ADG theo thứ tự. Chứng minh rằng diện tích $EFGD$ lớn nhất khi và chỉ khi $R_1^2+R_2^2=R_3^2$.

TRẦN DIỆU MINH
(GV THPT Lý Tự Trọng, Cần Thơ)

Bài T7/311. Dây cung DE của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường tròn nội tiếp tam giác này các điểm M và N. Chứng minh rằng $DE \geq 2MN$.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài T8/311. Mỗi quân cờ đôminô gồm hai hình vuông có 1 cạnh chung, trong hình vuông thứ nhất và thứ hai ghi x và y dấu chấm, được kí hiệu là (x, y) hoặc (y, x). Với mỗi cặp số (x, y) (cũng viết là (y, x)) chỉ có 1 quân cờ. Chia tập hợp các quân cờ mà $1 \leq x \leq 5$ và $1 \leq y \leq 5$ ra thành 3 nhóm, mỗi nhóm xếp thành chuỗi khép kín dạng

a	b	b	c		c
a	e	e	d		d

trong đó các số a, b, c, d, e không nhất thiết khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia nhóm như thế ?

BÙI THỊ KIM HOÀNG
(GV THPT Lê Khiết, Quảng Ngãi)

Bài T9/311. Chứng minh rằng với mọi x thuộc $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ ta luôn có $\sin x \leq \dfrac{4}{\pi}x-\dfrac{4}{\pi^2}x^2$.

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T10/311. Chứng minh rằng với mỗi tam giác ABC luôn có :

$$\sqrt{3}\leq\frac{\cos(A/2)}{1+\sin(A/2)}+\frac{\cos(B/2)}{1+\sin(B/2)}+\frac{\cos(C/2)}{1+\sin(C/2)}<2$$

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(Trung tâm CNTT PSV Hà Nội)

Bài T11/311. Tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Hai đường thẳng BC và AD cắt nhau tại I. Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại J. Chứng minh rằng tứ giác $BDIJ$ nội tiếp một đường tròn khi và chỉ khi $AB.CD=AD.BC$.

ĐÀM VĂN NHỈ
(GV CĐSP Thái Bình)

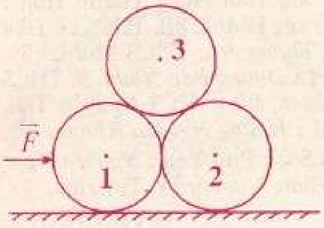
Bài T12/311. Tứ diện $ABCD$ có các đường cao đồng quy tại điểm H nằm bên trong tứ diện. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB. Gọi R và R_1 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và $HMNP$. Chứng minh rằng : $R = 2R_1$.

NGUYỄN ĐỨC DÂN
(SV K38MG ĐHKT Công nghiệp, Thái Nguyên)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

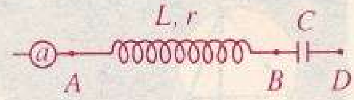
Bài L1/311. Ba hình trụ giống hệt nhau được bố trí như hình vẽ. Khối lượng mỗi hình trụ là $M = 10$kg. Bỏ qua ma sát ở mọi mặt tiếp xúc. Hình trụ 1 và 2 đặt trên sàn nằm ngang.

Ban đầu giữ cho các hình trụ đứng yên và tiếp xúc nhau. Người ta buông tay và đồng thời tác dụng một lực $\vec{F}$ theo phương ngang vào hình trụ 1. Hãy xác định độ lớn của F để các hình trụ luôn tiếp xúc nhau. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.



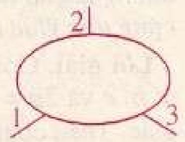
NGUYỄN XUÂN QUANG
(Hà Nội)

Bài L2/311. Một mạch điện AD gồm một cuộn cảm L có điện trở thuần r và một tụ điện C (hình vẽ). Đặt vào A và D một hiệu điện thế xoay chiều ổn định : $u = U\sqrt{2}\sin 100\pi t$, thì thấy $u_{AB} = u_{BD} = U$ và số trỏ của ampe kế là I.



a) Hãy xác định L và r, cho biết $C = (100/\pi)\mu F$.

b) Cho đoạn mạch ABD vào một hộp kín với các đầu A, B, D chìa ra ngoài nhưng quên không đánh dấu đầu nào là A, là B, là D nên phải đánh dấu lại một cách bất kì là 1, 2 và 3. Đấu nguồn xoay chiều nói trên với hai đầu 2 và 3 qua một tụ điện C_1 ($C_1 > C$), thì thấy ampe kế a trỏ giá trị. I_1 ($I_1 > I$). Cặp đầu (2, 3) ứng với cặp đầu nào trong số các cặp (A, B) (A, C) (B, C) ?



c) Đấu nguồn xoay chiều nói trên với hai đầu 1, 2 qua một tụ điện C_1 nói trên thì ampe kế a trỏ giá trị I_2, sau đó đấu nguồn xoay chiều với hai đầu 1,3 qua tụ điện C_1 thì ampe kế a trỏ giá trị I_3 và thấy $I_3 > I_2$. Hỏi mỗi đầu 1, 2, 3 ứng với đầu nào trong số các đầu A, B, C.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/311. (for 6th grade)

Compare the fractions

$$A = \frac{2003^{2003}+1}{2003^{2004}+1}, \quad B = \frac{2003^{2002}+1}{2003^{2003}+1}$$

Can you do it by distinct methods ?

T2/311. (for 7th grade)

Let ABC be a triangle. Construct the segment BD so that $\widehat{ABD} = 60^\circ$, $BD = BA$ and the ray BA lies between the rays BC, BD. Construct the segment BE so that $\widehat{CBE} = 60^\circ$, $BE = BC$ and the ray BC lies between the rays BA, BE. Let M be the midpoint of DE, P be the point of intersection of the perpendicular bisectors of the segments BA and BD. Calculate the angles of triangle CMP.

T3/311. Let x_1, x_2 be the solutions of the equation $x^2 - 4x + 1 = 0$. Prove that for every positive integer n, $x_1^n + x_2^n$ can be written as the sum of the squares of three consecutive integers.

T4/311. Find all triples of numbers a, b, c satisfying $(a^2+1)(b^2+2)(c^2+8) = 32abc$

T5/311. Find the least value of the expression

$$\frac{a^8}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^8}{(b^2+c^2)^2} + \frac{c^8}{(c^2+a^2)^2},$$

where a, b, c are positive numbers satisfying the condition $ab + bc + ca = 1$.

T6/311. Let ABC be a triangle, right at A. Construct a square $EFGD$ so that E, F lie on the side BC and G, D lie respectively on the sides AC, AB. Let R_1, R_2, R_3 be respectively the inradii of the triangles BDE, CGF, ADG. Prove that the area of $EFGD$ assumes its greatest value when and only when $R_1^2 + R_2^2 = R_3^2$.

T7/311. A chord DE of the circumcircle of triangle ABC cuts the incircle of ABC at M and N. Prove that $DE \geq 2MN$.

(Xem tiếp trang 9)

Bài T1/307. *Tìm số đo các cạnh của tất cả các tam giác sao cho chúng đều là số nguyên dương mà số đo chu vi bằng số đo diện tích của cùng tam giác đó.*

Lời giải. Gọi số đo các cạnh của tam giác là a, b, c và $2p = a + b + c$. Gọi S là diện tích tam giác. Theo công thức Hê–rông

$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ và từ điều kiện của đề bài $S = 2p$ ta có $4p^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

$\Leftrightarrow 4p = (p-a)(p-b)(p-c)$

$\Leftrightarrow 16(a+b+c) = (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ (1)

Đặt $b+c-a = x$, $c+a-b = y$, $a+b-c = z$ thì x, y, z nguyên dương và $x+y = 2c$, $y+z = 2a$, $z+x = 2b$ (2). Từ đó x, y, z cùng tính chẵn lẻ, và do (1) thì x, y, z đều là số chẵn. $x = 2u$, $y = 2v$, $z = 2t$ (3).

Thay vào (1) được $4(u+v+t) = uvt$ (4).

Giả sử $u \le v \le t$ thì $uvt = 4(u+v+t) \le 12t$ $\Rightarrow u^2 \le uv \le 12 \Rightarrow u$ chỉ có thể nhận các giá trị 1, 2, 3. Chú ý u, v, t nguyên dương và $u \le v \le t$.

• Nếu $u = 1$, từ (4) có $vt = 4(v+t) + 4$ $\Rightarrow (v-4)(t-4) = 20$.

Vì $20 = 1.20 = 2.10 = 4.5$ thì (u, v, t) nhận các giá trị (1, 5, 24) ; (1, 6, 14) ; (1, 8, 9). Theo (2) và (3) thì (a, b, c) nhận các giá trị (29, 25, 6) ; (20, 15, 7) ; (17, 10, 9).

• Nếu $u = 2$, từ (4) có $vt = 2(v+t) + 2 \Rightarrow (v-2)(t-2) = 8$. Vì $8 = 1.8 = 2.4$ thì (u, v, t) nhận các giá trị (2, 3, 10) ; (2, 4, 6). Theo (2) và (3) thì (a, b, c) nhận các giá trị (13, 12, 5) ; (10, 8, 6)

• Nếu $u = 3$ từ (4) có $3vt = 4(v+t) + 12$ (5). Vì $uv = 3v \le 12$ nên $v \le 4$. Thay $v = 3$ hoặc $v = 4$ vào (5) thì tìm được t không nguyên.

Vậy tất cả có 5 tam giác mà số đo 3 cạnh thỏa mãn đề bài xếp theo thứ tự $a \ge b \ge c$ là (29, 25, 6) ; (20, 15, 7) ; (17, 10, 9) ; (13, 12, 5); (10, 8, 6).

Nhận xét. 1) Đa số các bạn gửi bài giải đều tìm được 5 nghiệm, nhưng một số bạn không chú ý lập luận để u, v, t là số nguyên dương.

2) Các bạn có lời giải tốt là :

Phú Thọ : *Nguyễn Trung Kiên A, Nguyễn Xuân Trường, Đỗ Duy Hưng*, 9A, *Nguyễn Thị Thanh Thảo*, 8A, *Ngô Vĩnh Thái*, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; *Ngô Thanh Nam, Lê Quang Nghĩa, Nguyễn Hoàng Long*, 8E, *Nguyễn Quang Huy*, 9G, THCS Văn Lang, Việt Trì ; **Vĩnh Phúc :** *Đỗ Đình Khang, Nguyễn Hữu Kiên, Nguyễn Kim Thuật*, 8A, THCS Yên Lạc, *Trần Tấn Phong*, 7A, THCS Lập Thạch, *Vũ Văn Quang*, 9C, THCS Vĩnh Tường ; **Hà Nội :** *Nguyễn Trung Kiên, Ngô Bảo Trâm*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Minh Tháp*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ ; **Hải Dương :** *Bùi Tiến Dũng*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, *Trần Anh Minh*, 6A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà ; **Hải Phòng :** *Nguyễn Vũ Lân, Lương Phú Khánh, Đinh Khang, Bùi Ngọc Khôi*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Thanh Hóa :** *Lưu Xuân Thế*, 9A, *Lê Trung Thành*, 8B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, *Lê Minh Thông*, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa ; **Quảng Trị :** *Dương Bảo Nhân*, 9, THCS Đại Hòa, *Nguyễn Tư Hành*, 9/6, THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà ; **Quảng Ngãi :** *Hoàng Nguyên Khang*, 8/1, THCS TT. Châu Ổ, Bình Sơn ; **Phú Yên :** *Nguyễn Ngọc Tâm Quyên*, 8E, THCS Hùng Vương, Tx. Tuy Hòa.

VIỆT HẢI

Bài T2/307. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\right)\left(\sqrt{1+c}+\sqrt{1+d}\right)$ *trong đó a, b, c, d là các số dương thỏa mãn điều kiện $abcd = 1$.*

Lời giải. (Của đa số các bạn)

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có $1 + a \ge 2\sqrt{a}$, $1 + b \ge 2\sqrt{b}$, với đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = 1$, và do đó

$$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b} \ge 2\sqrt[4]{(1+a)(1+b)}$$

$$\ge 2\sqrt[4]{2\sqrt{a}\,.\,2\sqrt{b}} = 2\sqrt{2}\sqrt[8]{ab} \quad (1)$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b = 1$. Tương tự, ta có $\sqrt{1+c}+\sqrt{1+d} \ge 2\sqrt{2}\sqrt[8]{cd}$ (2)

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $c = d = 1$. Nhân theo từng vế của (1) và (2) ta thu được

$$\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\right)\left(\sqrt{1+c}+\sqrt{1+d}\right) \ge 8\sqrt[8]{abcd} = 8$$

với đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là 8.

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn giải đúng bài toán này và lời giải khá gọn tương tự như lời giải trên.

2) Nhiều bạn ở các lớp 7, 8 đã tham gia giải đúng, gọn và nêu biểu thức tổng quát cho nhiều số.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/307. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3 \\ (1+x)(1+y)(1+z)=\left(1+\sqrt[3]{xyz}\right)^3 \end{cases}$$

Lời giải. (của *Thọ Thị Li Na*, lớp 8/3, THPT An Phước, Ninh Phước, **Ninh Thuận**).

Điều kiện : $x, y, z \geq 0$. Theo BĐT Cô-si, ta có $(1+x)(1+y)(1+z)$

$= 1 + (x+y+z) + (xy+yz+zx) + xyz$

$\geq 1 + 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{(xyz)^2} + \sqrt[3]{(xyz)^3}$

$= \left(1+\sqrt[3]{xyz}\right)^3$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, do đó hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3\\ x=y=z\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$$

Vậy hệ có một nghiệm duy nhất $(x ; y ; z)$ là $(1; 1; 1)$

Nhận xét. Một số bạn nêu bài toán tổng quát cho nhiều số. Các bạn sau đây có lời giải đúng và gọn hơn cả :

Lạng Sơn : *Nguyễn Ngọc Thịnh*, 9A, THCS Chu Văn An, Văn Quan ; **Thái Nguyên :** *Nguyễn Khoa Đức Anh*, 9A2, THCS Chu Văn An, Tp. Thái Nguyên ; **Hòa Bình :** *Nguyễn Thùy Dương*, 9A1, THCS Hữu Nghị ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Hùng Cường*, 9B, THCS Lập Thạch, *Nguyễn Thai Mai*, 8C, THCS Vĩnh Tường ; **Hà Tây :** *Nguyễn Minh Tùng*, 7C, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Tuấn Dương*, 9A1, THCS Trần Mai Ninh ; **Nghệ An :** *Nguyễn Cảnh An*, 6E, THCS Thượng Sơn, Đô Lương ; *Trần Hưng Quân*, 7D, THCS Trường Thi, Vinh ; **Quảng Bình :** *Hoàng Đoàn Quang Tiến*, 7, THCS Nam Lý, Tx. Đồng Hới ; **Quảng Trị :** *Dương Bảo Nhân*, lớp 9, THCS Đại Hòa, Tx. Quảng Trị ; **Phú Yên :** *Nguyễn Hưng Hùng*, 9C, THCS Hòa Xuân Tây, Tuy Hòa ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Thị Thái Vi*, 8/3, THCS Lê Quý Đôn, Vĩnh Cửu; **Bến Tre :** *Trần Thanh Nhiên*, 7, THCS Tam Phước, Châu Thành ; **Tây Ninh :** *Phạm Thị Cẩm Huyền*, 8A1, THCS Trần Bình Trọng, Hòa Thành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T4/307. *Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh CD. Gọi P là giao điểm của AN và DM. Gọi Q là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M và N theo thứ tự di chuyển trên AB và CD.*

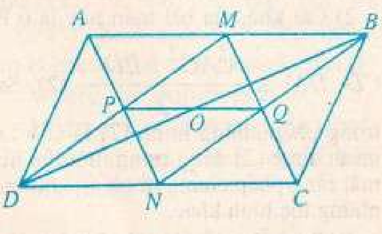
Lời giải. 1. Nếu $PQ//AB$. Ta có

$\frac{MP}{PD}=\frac{MQ}{QC}$.

Mà

$\frac{MP}{PD}=\frac{AM}{DN}$;

$\frac{MQ}{QC}=\frac{MB}{NC}$.



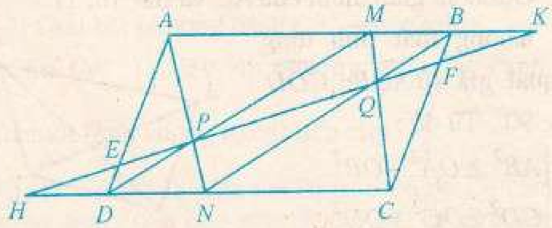
Từ đó $\frac{MP}{PD}=\frac{MQ}{QC}=\frac{AM}{DN}=\frac{BM}{CN}=\frac{AM+BM}{DN+CN}$

$=\frac{AB}{CD}=1=\frac{BO}{DO}$ (O là trung điểm của BD)

Như vậy $\frac{BO}{DO}=\frac{MP}{PD}$ nên $PO//AB$.

Mà $PQ//AB$. Do đó P, O, Q thẳng hàng. Vậy PQ đi qua điểm O cố định.

2. Nếu PQ cắt AB ở K, cắt CD ở H. Áp dụng định lí Mênêlaúyt ta có



$$\frac{DH}{HN}\times\frac{NP}{PA}\times\frac{AE}{ED}=1 ; \quad \frac{MP}{PD}\times\frac{DE}{EA}\times\frac{AK}{KM}=1$$

Nhân theo vế 2 đẳng thức trên và cùng với $\frac{NP}{PA}=\frac{DP}{PM}$ suy ra $DH \times AK = HN \times KM$. Mặt khác $BK \times CH = HN \times KM$.

Do đó $DH \times AK = BK \times CH$. Suy ra $\frac{DH}{CH}=\frac{BK}{AK}$. Từ đó $\frac{DH}{CH-DH}=\frac{BK}{AK-BK}$ hay $DH = BK$. Nên $\Delta EDH = \Delta FBK$. Suy ra $DE = BF$.

Do đó $DEBF$ là hình bình hành, tức EF đi qua trung điểm DB. Vậy PQ đi qua 1 điểm cố định là O, trung điểm DB.

Nhận xét. 1. Đa số các bạn quên xét trường hợp 1

2. Giải tốt bài này có các bạn : **Phú Thọ :** *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Kim Thuật*, 8A, THCS Yên Lạc ; **Hải Phòng :** *Bùi Ngọc Khôi*, *Nguyễn Vũ Lân*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Hưng Yên :** *Doãn Thị Kim Huế*, 9C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi ; **Hà Nội :** *Đỗ Xuân Quang*, *Nguyễn Hoàng Việt*, 9H, THCS Lê Quý Đôn ; **Hà Nam :** *Nguyễn Văn Linh*, 9B, THCS Trần Phú, Phủ Lý ; **Nam Định :** *Trần Ngọc Tân*, 8A6, THCS Trần Đăng Ninh, *Nguyễn Huy Quang*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Nghệ An :** *Đàm Thị Thanh Thủy*, 8C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; **Thừa Thiên – Huế :** *Lê Bảy*, 9/2, THCS An Bàng, Vinh An, Phú Vang ; **Tp. HCM :** *Huỳnh Trung Anh*, 9^7 trường Colette, quận 3 ; **Đồng Tháp :** *Nguyễn Trung Hiếu*, 9A1, THPT Tx. Cao Lãnh.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/307. *Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng:*

$$\min\{AB, BC, CD, DA\} \le \frac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2} \le$$

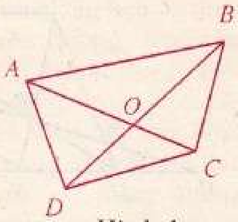
$$\le \max\{AB, BC, CD, DA\}$$

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Trung Kiên*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, **Hà Nội**)

1) Ta chứng minh $\frac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2} \le \max\{AB, BC, CD, DA\}$ (1)

Gọi O là giao điểm của AC và BD (h. 1)

Không mất tính tổng quát giả sử $\widehat{AOB} = \widehat{COD} \ge 90^o$. Từ đó :



Hình 1

$$\begin{cases} AB^2 \ge OA^2 + OB^2 \\ CD^2 \ge OC^2 + OD^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 \ge OA^2 + OC^2 + OB^2 + OD^2$

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 \ge \frac{(OA+OC)^2}{2} + \frac{(OB+OD)^2}{2}$

$\Rightarrow 2\max\{AB^2, CD^2\} \ge AC^2 + BD^2$

$\Rightarrow \max\{AB^2, BC^2, CD^2, DA^2\} \ge \frac{AC^2+BD^2}{4}$

$\Rightarrow \max\{AB, BC, CD, DA\} \ge \frac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2}$ (1)

Đẳng thức xảy ra ở (1) khi và chỉ khi $ABCD$ là hình thoi.

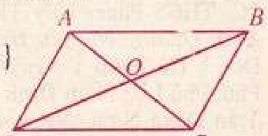
2) Ta chứng minh $\frac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2} \ge \min\{AB, BC, CD, DA\}$ (2)

Trường hợp 1 : $ABCD$ là hình bình hành (h. 2)

Từ đẳng thức quen biết $2(AB^2+AD^2)=AC^2+BD^2$

$\Rightarrow 4\min\{AB^2, BC^2, CD^2, DA^2\} \le AC^2 + BD^2$

$\Rightarrow \min\{AB, BC, CD, DA\} \le \frac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{4}$ (đpcm)



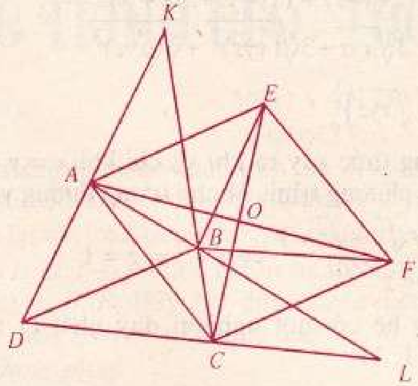
Hình 2

Trường hợp 2 :

$ABCD$ không là hình bình hành.

Ta chứng minh (2) trong trường hợp $ABCD$ không là hình thang (h. 3), còn chứng minh tương tự khi $ABCD$ là hình thang dành cho bạn đọc.

Không mất tổng quát, gọi K và L lần lượt là giao điểm của AD và BC, BA và CD, như ở hình 3.



Hình 3

Dựng các hình bình hành $AEBD$, $CFBD$, suy ra $AEFC$ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AF và CE.

Dễ thấy tia BK nằm giữa hai tia BA, BE và tia CK nằm giữa hai tia CA, CE. Suy ra B nằm trong góc $\widehat{ACE}$ (3). Tương tự B nằm trong góc $\widehat{CAF}$ (4). Từ (3), (4) suy ra : B nằm trong tam giác ACO.

$\Rightarrow BA + BC < OA + OC$ (kết quả quen thuộc)

$\Rightarrow 2\min\{BA, BC\} < \frac{AF+CE}{2}$

$\Rightarrow 2\min\{AB, BC, CD, DA\} < \frac{\sqrt{2(AF^2+CE^2)}}{2}$

(Theo BĐT Bu-nhia-cốp-xki)

$\Rightarrow 2\min\{AB, BC, CD, DA\} < \frac{\sqrt{4(AC^2+AE^2)}}{2}$

$\Rightarrow \min\{AB, BC, CD, DA\} < \frac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2}$ (đpcm)

(vì $AE = BD$). Vậy (2) đã được chứng minh trong cả hai trường hợp.

Đẳng thức xảy ra ở (2) khi và chỉ khi $ABCD$ là hình thoi.

Nhận xét. 1) Bài toán này chỉ có 29 bạn tham gia giải. 15 bạn giải sai hoặc có lời giải thiếu chính xác.

2) Cái khó của bài toán này là ở BĐT $\min\{AB, BC, CD, DA\} \le \frac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2}$ (2). Sai lầm thường gặp trong phép chứng minh (2) là chỗ : các bạn chỉ chứng minh được (2) đúng trong một thế hình cụ thể mà quên mất rằng phép chứng minh ấy không còn hiệu lực trong những thế hình khác.

3) Bạn *Nguyễn Mạnh Chiến*, 9A, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng** đã chứng minh bài này dựa vào Định

lí Stioa : *Cho ΔABC với D là điểm thuộc cạnh BC thì* $AB^2.CD + AC^2.DB = AD^2.BC + CD.DB.BC$

4) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt.

Hải Phòng : *Nguyễn Vũ Lân, Bùi Ngọc Khôi, Lương Phú Khánh, Đinh Khang*, 9A, THPT NK, Trần Phú ; **Hà Nội :** *Nguyễn Hoàng Việt, Vũ Minh Long, Vũ Nhật Minh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Hà Nam :** *Nguyễn Văn Linh*, 9B, THPT Trần Phú, Phủ Lý ; **Hải Dương :** *Nguyễn Duy Mạnh*, 9B, THCS Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T6/307. *Tìm tất cả các số tự nhiên $n \geq 3$ sao cho trong mặt phẳng tọa độ tồn tại đa giác đều mà n đỉnh của nó đều có tọa độ nguyên.*

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Chí Hiệp*, 12A1, PTCT, ĐHSP **Hà Nội**)

Nhận xét 1. Nếu một tam giác có ba đỉnh tọa độ nguyên thì diện tích của nó là một số hữu tỉ.

Nhận xét 2. Với mỗi $n \in N^*$ tồn tại đa thức $P_n(x)$ bậc n có hệ số nguyên và hệ số cao nhất bằng 1 sao cho $P_n(2\cos x)=2\cos nx$ (1)

Thật vậy xét $P_1(x) = x, P_2(x) = x^2 - 2$ và $P_{n+1}(x)=xP_n(x)-P_{n-1}(x)$ với $n \geq 2$

Bằng quy nạp dễ chứng minh (1)

Nhận xét 3. Với $n \geq 3$ và $n \neq 4$ thì $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ là số vô tỉ. Thật vậy giả sử $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \in Q$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{2\left(1-tg^2\frac{\pi}{n}\right)}{1+tg^2\frac{\pi}{n}} \in Q.$$ Theo *nhận xét 3*

$$P_n\left(2\cos\frac{2\pi}{n}\right)=2\cos n\frac{2\pi}{n}=2$$

Vậy $2\cos\frac{2\pi}{n}$ là nghiệm hữu tỉ của đa thức $P_n(x)-2 = 0$. Do đó $2\cos\frac{2\pi}{n} \in Z \Rightarrow 2\cos\frac{2\pi}{n} \in \{0, \pm 1\} \Rightarrow n \in \{3, 4, 6\}$ mà $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \notin Q$ và $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \notin Q$. Mâu thuẫn.

Trở lại bài toán : Gọi O là tâm của đa giác đều $A_1 \dots A_n$ với các đỉnh có tọa độ nguyên. Khi đó theo *nhận xét 1* $S_{A_1\dots A_n} = \frac{n}{4}A_1A_2^2\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} \in Q$ suy ra $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \in Q \Rightarrow n = 4$. Với $n = 4$ ta dễ thấy tồn tại hình vuông có đỉnh là tọa độ nguyên.

Nhận xét. Bài này được nhiều bạn tham gia giải. Bạn *Vũ Hữu Phương*, 12T, **Hòa Bình** và một số bạn khác đã sử dụng phép vị tự tâm I (I là tâm đa giác $A_1A_2\dots A_n$) với tỉ số $k = 2\cos\frac{2\pi}{n} - 1$ mà $|k| < 1$ để giải bài này.

Cách giải khác có trong bài Phương pháp lùi vô hạn THTT số 310 (4/2003).

Các bạn có lời giải tốt là : *Ngô Nhất Sơn*, 10T, **Hòa Bình**, *Phạm Thùy Dung*, 10, THPT Lê Quý Đôn, **Bà Rịa Vũng Tàu**, *Nguyễn Hoàng Thanh*, 12T, ĐHSP Hà Nội, *Đinh Đức Thanh*, THPT Hùng Vương, Phú Thọ, *Bùi Xuân Luân*, 9B, THCS Bình Giang, **Hải Dương**, *Trần Minh Hoàng*, 10T, PTNK ĐHQG Tp. HCM.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/307. *Dãy số (u_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) được xác định bởi : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ với $n = 1, 2, 3\dots$*

Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. *Cách 1.* (của *Nguyễn Văn Việt*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, **Quảng Trị** và nhiều bạn khác).

Ta viết

$$u_{2m}=\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}$$

Sử dụng PP đạo hàm để chứng minh rằng $\ln(x+1) < x < -\ln(1-x)$ với $x \in (0, 1)$. Từ đó, với $x = \frac{1}{m+k}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) ta được :

$$\ln(2m+1) - \ln(m+1) < \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k} < \ln(2m) - \ln m$$

hay $\ln\left(2-\frac{1}{m+1}\right) < u_{2m} < \ln 2$.

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2m} = \ln 2$.

Mặt khác $u_{2m+1} = u_{2m} + \frac{1}{2m+1}$ nên $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} u_{2m}$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ln 2$.

Cách 2.

Vì $f(x) = \frac{1}{x+1}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i x^{i-1} = \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$ nên $f(x) > 0\ \forall x > 0$ với n chẵn. Do vậy nguyên hàm của nó là $F(x) = \ln(1+x) + \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i x^i}{i}$ đồng biến trong $(0, +\infty)$ với n chẵn và vì vậy $F(x) \geq F(0) = 0\ \forall x \geq 0$.

Tương tự, $f(x) < 0\ \ \forall x > 0$ với n lẻ nên $F(x)$ nghịch biến trong $[0, +\infty)$ với n lẻ và $F(x) \leq F(0) = 0\ \forall x \geq 0$.

Với $x = 1$, ta được $F(1) = \ln 2 - u_n \geq 0$ với n chẵn và $F(1) = \ln(2) - u_n \leq 0$ với n lẻ.

Mặt khác $u_{2k+2} = u_{2k} + \dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+2} > u_{2k}$ nên dãy $\{u_{2k}\}$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi ln2, do đó $\lim\limits_{k\to\infty} u_{2k} = a \leq \ln 2$.

$u_{2k+3} = u_{2k+1} - \dfrac{1}{2k+2} + \dfrac{1}{2k+3} < u_{2k+1}$ nên dãy $\{u_{2k+2}\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới bởi ln2, do đó $\lim\limits_{k\to\infty} u_{2k+1} = b \geq \ln 2$.

Do $u_{2k+1} = u_k + \dfrac{1}{2k+1}$ nên $\lim\limits_{k\to\infty} u_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} u_{2k} \Rightarrow a = b$ và vì vậy tồn tại giới hạn của dãy $\{u_n\}$ và $\lim\limits_{k\to\infty} u_n = \ln 2$.

Nhận xét. 1) Đây là một bài toán về giới hạn rất cơ bản của chương trình giải tích. Nhiều bạn đã sử dụng cả tiêu chuẩn tích phân, tích phân từng từ của chuỗi hội tụ, như vậy là đã vượt ra ngoài kiến thức hiện hành của bậc THPT.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Nguyễn Tuyết Mai, 11A, THPT Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang** ; *Bạch Hồng Yến*, 11 Anh, THPT NK Hàn Thuyên, **Bắc Ninh** ; *Lê Tôn Chánh, Phạm Trung Vương*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, **Bình Định** ; *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, **Cần Thơ** ; *Nguyễn Đình Minh*, 12/21, THPT Phan Châu Trinh, **Đà Nẵng** ; *Lê Phương*, 12T1, THPT Lương Thế Vinh, **Đồng Nai** ; *Nguyễn Đức Thạo*, 12A1, THPT chuyên **Hà Nam** ; *Phạm Minh Hằng, Phạm Khoa Thu Hương*, 11T, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng** ; *Trần Võ Huy*, 12T, PTNK Tp. HCM ; *Nguyễn Trường Kha*, 12T, THPT Thăng Long, Đà Lạt, **Lâm Đồng**, *Phan Thành Nam*, 12T2, THPT Lương Văn Chánh ; *Phạm Lê Thịnh*, 12T, THPT Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Hoàng Ngọc Minh*, 12A1, *Nguyễn Anh Quang*, 10A, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ** ; *Trương Song Hào*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Trần Minh*, 11A, *Lê Hải Đăng*, 11B, THPT Hải Lăng, **Quảng Trị** ; *Nguyễn Phan Định*, 10/2 Phan Châu Trinh, **Đà Nẵng** ; *Trần VănThiện*, 11C6, THPT Như Thanh, **Thanh Hóa** ; *Đỗ Hoàng Huy*, 11T1, THPT Lương Văn Tụy, **Ninh Bình** ; *Lê Đình Huy*, 10T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** ; *Nguyễn Trường Thọ*, 10A1, chuyên Toán, ĐHKHTN **Hà Nội**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/307. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 - x_1^4 - x_2^4 - \ldots - x_n^4$ *trong đó các số x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ thỏa mãn các điều kiện : $0 \leq x_i \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$*

Lời giải. $n = 1$ giá trị của biểu thức bằng 0.

Xét với $n \geq 2$ ta có

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 - x_1^4 - x_2^4 - \ldots - x_n^4$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^3(1 - x_i) = \sum_{i\neq j} x_i^3 x_j = \sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i<j} x_i x_j\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2\sum\limits_{i<j} x_i x_j + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4 = \frac{1}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong $x_1, x_2, \ldots, x_n$ có nhiều nhất hai số dương và $2\sum\limits_{i<j} x_i x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, tức là $(n-2)$ số bằng 0 và hai số bằng $\dfrac{1}{2}$.

Nhận xét. Đây là nội dung bài số 2 của Đề thi Toán quốc tế năm 1999. Tòa soạn nhận được lời giải của 60 bạn, đa số các bạn giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt : **Thái Nguyên:** *Bùi Thành Công*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương ; **Vĩnh Phúc :** *Hà Đình Thiệu*, 10A1, THPT chuyên ; **Hải Dương :** *Bùi Xuân Lân*, 9B, THCS Thái Học, *Phạm Văn Toàn*, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Quảng Trị :** *Trần Thị Đông*, 9B, THCS Hải Lâm, *Dương Bảo Nhân*, 9, THCS Đại Hòa, *Lê Thị Phương Thảo*, 10T, THPT Lê Quý Đôn ; **Đà Nẵng :** *Thái Thanh Hải*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn, ...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/307. *Trong tam giác ABC gọi m_a, m_b, m_c theo thứ tự là độ dài trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C và r_a, r_b, r_c theo thứ tự là bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với các góc có đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng*

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \qquad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (*Nguyễn Ngọc Tú*, 10T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Đình Hiển*, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Tp. Hồ Chí Minh**).

Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; $2p = a+b+c$, S là diện tích ΔABC. Ta có các hệ thức sau :

$S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

Sử dụng các hệ thức này, BĐT (*) cần chứng minh bây giờ có dạng

$$p\left[\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}+\frac{(p-c)(p-a)}{p-b}+\frac{(p-a)(p-b)}{p-c}\right]$$
$$\geq \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) \quad (1)$$

Để viết cho gọn hơn, ta đặt : $p-a=x, p-b=y, p-c=z$ $(x, y, z>0)$; thế thì : $x+y+z=p$ và $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$. Khi đó (1) có dạng sau mà ta cần phải chứng minh :

$$(x+y+z)\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)\geq$$
$$\geq \frac{3}{4}\left[(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\right] \quad (2)$$

Thật vậy, áp dụng BĐT Cô-si đối với ba số dương x, y, z ta có BĐT sau :

$$x^2\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+y^2\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+z^2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq 2(x^2+y^2+z^2) \quad (3)$$

Cộng vào hai vế của (3) tổng $yz+zx+xy$, ta được : $(x+y+z)\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)\geq$

$$\geq 2(x^2+y^2+z^2)+yz+zx+xy \quad (4)$$

Lại dùng BĐT Cô-si có :

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)\geq\frac{1}{2}(yz+zx+xy) \quad (5)$$

nên từ (4) và (5) ta được

$$(x+y+z)\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)\geq$$
$$\geq\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$$
$$=\frac{3}{4}\left[(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\right] \ (2) \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Dấu đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi dấu đẳng thức xảy ra ở (3), (4), (5) và do đó xảy ra ở (2) : $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$ hay tam giác ABC là đều.

Nhận xét 1. 1) Bài toán trên đây có nhiều lời giải khác nhau. Một số lời giải không gọn hoặc phức tạp vì sử dụng quá nhiều bất đẳng thức hình học.

- Bạn *Nguyễn Đăng Bình* sử dụng hệ thức $r_a=p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}$; $r_b=p\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}$; $r_c=p\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}$ và hệ thức lượng giác $\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}=1$ đã đưa (*) về dạng : $\frac{1}{4}(a+b+c)^2\left(\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\right)\geq\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$

Và cuối cùng : (*) $\Leftrightarrow \sum\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2}-\mathrm{tg}\frac{B}{2}\right)^2\geq 0$.

- Bạn *Vũ Hồng Nhật*, 9B, THCS Tán Thuật, Kiến Xương, **Thái Bình** đã chứng minh đúng :

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2\geq$$
$$\geq m_a^2+m_b^2+m_c^2+\frac{1}{4}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

- Bạn *Nguyễn Đức Minh*, 10A1, THPT Phan Bội Châu, **Nghệ An** đã chứng minh BĐT sau :

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2\geq m_a^2+m_b^2+m_c^2+2(R^2-4r^2)$$

- Bạn *Bùi Hữu Đức*, 10A1, THPT chuyên tỉnh **Vĩnh Phúc**, xuất phát từ công thức đường phân giác $l_a^2=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$ và $l_a\leq m_a$ đã chứng minh được BĐT (**) sau đây, mạnh hơn BĐT (*) ở đề bài :

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2+l_a^2+l_b^2+l_c^2\geq 2(m_a^2+m_b^2+m_c^2) \quad (**)$$

3) Ngoài các bạn nêu trên, các bạn sau đây cũng có lời giải tương đối gọn gàng sáng sủa :

Hà Nội : *Vũ Nhật Minh, Nguyễn Hoàng Việt*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; *Phạm Nhật Minh*, 10B Tin, PTCT, ĐHKHTN – ĐHQG ; *Nguyễn Chí Hiệp*, 12A1, PTCTT, ĐHSP ; **Bắc Ninh :** *Vũ Đăng Chu, Chu Đức Đạo*, 10 Toán, THPT NK Hàn Thuyên ; **Vĩnh Phúc :** *Phạm Huy, Hoàng Thị Minh Huệ*, 8C, THCS Tam Dương, *Nguyễn Công Huân*, 10A1, *Phùng Văn Bình, Lê Minh Thắng, Nguyễn Đăng Tuyến*, 11A1, *Lê Sinh Huy*, 12A2, *Trần Thị Lan Anh*, 12B3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; *Trần Hải Hậu*, 10A1, THPT Tam Dương I, *Trần Văn Dũng*, 12A4, THPT Xuân Hòa, Mê Linh ; **Phú Thọ :** *Trần Thế Hùng, Ngô Thành Việt*, 9A1, THCS Hạ Hòa, *Nguyễn Trung Kiên, 9A, THCS Giấy, Phong Châu* ; **Hải Dương :** *Trần Tiến Hưng, Nguyễn Thị Mai*, 10T, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương ; **Hải Phòng :** *Phạm Huy Hoàng*, 9B, *Bùi Tuấn Anh, Nguyễn Bá Thắng, Trần Tiến Thức*, 10 Toán, *Phạm Khoa Thu Hương, Bùi Quỳnh Mai, Lê Hải Yến*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú ; *Phạm Trung Đoàn*, 10C1, THPT Vĩnh Bảo; *Nguyễn Đặng Phương Đình*, 11I, THPT Giao Thủy A ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Trọng Hòa*, 10T, *Nguyễn Phương Tuấn*, 11T1, THPT Lam Sơn, *Đỗ Như Quang*, 10A11, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa, *Đỗ Như Quang*, 10A1, *Hoàng Trọng Bắc*, 11B1, THPT Lê Văn Hưu ; **Nghệ An :** *Phan Đăng Học, Trần Phi Sơn Tùng*, 11A1, PTCTT ĐH Vinh; *Nguyễn Sĩ Bình*, 10A2, *Phạm Xuân Khoa, Phan Đình Phúc, Lê Văn Vinh*, 10A1, *Bùi Đăng Lương*, 11A1, *Nguyễn Thị Quỳnh Trang*, 11A2, THPT Phan Bội Châu ; **Quảng Bình :** *Hoàng Đoàn Phương Thảo*, 10T, THPT chuyên Quảng Bình ; **Quảng Trị :** *Lê Hải Dương*, 11B, THPT Hải Lăng ; **Đà Nẵng:** *Trần Tấn Liêm, Lê Đăng Việt Phương, Nguyễn Văn Vinh*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Tp. Đà Nẵng, *Nguyễn Đình Minh*, 12/21, THPT Phan Châu Trinh ; **Quảng Nam :** *Nguyễn Dương Tuấn*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tam

Kỳ ; **Phú Yên :** *Nguyễn Quang Khả, Nguyễn Hữu Phước,* 11T2, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hòa ; **Khánh Hòa :** *Hồ Sĩ Đông,* 10T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Lâm Đồng :** *Nguyễn Trường Kha,* 12 Toán, THPT Thăng Long, Đà Lạt ; **Đồng Nai :** *Tạ Quang Hiển,* 10T, *Lê Phương,* 12T11, THPT chuyên Lương Thế Vinh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Trần Minh Hoàng,* 10T, *Trần Võ Huy,* 12T, *Nguyễn Lâm Hưng,* 12T, PTNK – ĐHQG Tp. HCM ; *Lê Đỗ Tuấn Khanh,* 11CT, THPT Lê Hồng Phong, *Nguyễn Phương Linh,* THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Tp. HCM ; **Bà Rịa – Vũng Tàu :** *Nguyễn Hà Tiên,* 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Tp. Vũng Tàu ; **Cần Thơ :** *Mạch Nguyệt Minh,* 12A1, THPT Lý Tự Trọng ; **Đồng Tháp :** *Nguyễn Gia Bảo, Lý Duy Khiêm,* 9A1, *Trần Thế Vinh,* 10T, THPT Tx. Cao Lãnh ; **Vĩnh Long :** *Võ Minh Tâm,* 11T1, THPT ch. Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Bạc Liêu :** *Nguyễn Trường Đan Vũ,* 10T, THPT chuyên Bạc Liêu.

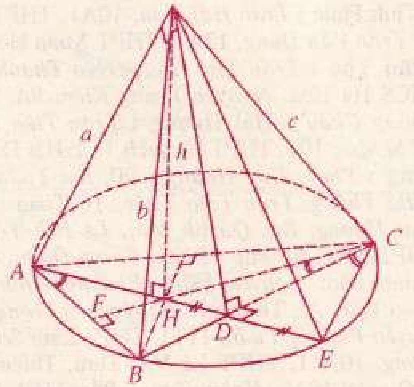
NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/307. *Gọi H và O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC của tứ diện SABC mà SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một. Chứng minh rằng*

$$\frac{OH^2}{SH^2}+2=\frac{1}{4\cos A.\cos B.\cos C}$$

trong đó cosA, cosB, cosC là côsin các góc của ΔABC.

Lời giải. (của bạn *Hoàng Ngọc Minh,* 12 A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**)



Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ; D, E lần lượt là giao điểm của AH với BC và với đường tròn (O). Chú ý rằng ΔABC là tam giác nhọn suy ra H nằm trong ΔABC và do đó H nằm trong đường tròn (O). Vì ΔSAD vuông tại S và $HD = DE$ (*các bạn tự chứng minh*) nên $\mathscr{P}_{H/(O)} = R^2 - OH^2 = AH.HE = 2AH.HD = 2SH^2$

Từ đó suy ra :

$$\frac{OH^2}{SH^2}+2=\frac{R^2}{SH^2} \qquad (1)$$

Mặt khác gọi F là giao điểm của CH với AB thì có : $SH^2 = AH.HD =$

$$=\left(\frac{AF}{\sin B}\right)\left(\frac{BD}{\mathrm{tg}C}\right)=\left(\frac{AC.\cos A}{\sin B}\right)\left(\frac{AB.\cos B.\cos C}{\sin C}\right)$$

$$= 2R\cos A.2R.\cos B.\cos C$$

$$= 4R^2.\cos A.\cos B.\cos C \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$\frac{OH^2}{SH^2}+2=\frac{1}{4\cos A.\cos B.\cos C} \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét . 1) Hầu hết các bạn đều giải bằng cách sử dụng *tính chất đường thẳng Ơ–le* và *công thức Lép–nit* (*hoặc dùng PP vectơ*) để biểu diễn OH qua $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Bạn *Nguyễn Đức Công,* 11A1, THPT Yên Phong I, **Bắc Ninh** và *Trần Văn Dũng,* 12A4, THPT Xuân Hòa, Mê Linh, **Vĩnh Phúc** giải bài này bằng phương pháp tọa độ. Bạn *Khổng Minh Thảo,* 11T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** đã áp dụng định lí *"Con nhím" (xem* THTT số 170, 6/1989) cho tứ diện *SABC* với các véctơ đơn vị hướng ra phía ngoài tứ diện đó : $\vec{e_1}=\frac{\overrightarrow{SH}}{|SH|}$, $\vec{e_2}=\frac{\overrightarrow{AS}}{|AS|}$, $\vec{e_3}=\frac{\overrightarrow{BS}}{|BS|}$, $\vec{e_4}=\frac{\overrightarrow{CS}}{|CS|}$ chứng minh được hệ thức : $\frac{\overrightarrow{HA}}{a^2}+\frac{\overrightarrow{HB}}{b^2}+\frac{\overrightarrow{HC}}{c^2}=\vec{O}$, suy ra $\overrightarrow{HO}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{\overrightarrow{AO}}{a^2}+\frac{\overrightarrow{BO}}{b^2}+\frac{\overrightarrow{CO}}{c^2}$ từ đó cũng cho lời giải đúng.

2) Các bạn có lời giải gọn hơn cả : **Hà Nội :** *Nguyễn Đức Bình,* 10A, *Lê Hùng Việt Bảo, Vũ Quang Thanh,* 11A, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; *Nguyễn Hoàng Thanh,* 12A1, *Nguyễn Chí Hoàng,* 12A2, ĐHSP Hà Nội; **Hải Phòng :** *Nguyễn Vũ Lân,* 9A, THPT NK Trần Phú ; **Bắc Ninh :** *Trương Đình Trường,* 11T, THPT NK Hàn Thuyên ; **Vĩnh Phúc :** *Lê Sinh Huy,* 12A2, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Hòa Bình :** *Nguyễn Thùy Dương,* 9A1, THCS Hữu Nghị ; **Hải Dương :** *Lê Đình Huy,* 10T, THPT Nguyễn Trãi, *Phạm Việt Hải,* 11A4, THPT Hồng Quang ; **Ninh Bình :** *Trịnh Thùy Nhung,* 12T, THPT Lương Văn Tụy ; **Thanh Hóa :** *Vũ Nguyên Thắng,* 10T, *Nguyễn Ngọc Hưng,* 11T2, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Phan Đăng Học, Trần Phi Sơn Tùng,* 11A1, *Từ Việt Tiệp,* 11B2, PTCTT ĐH Vinh ; *Bùi Đăng Lương,* 11A1, *Nguyễn Mạnh Hùng,* 11A2, THPT Phan Bội Châu ; **Quảng Trị :** *Hồ Sĩ Sáng, Nguyễn Văn Việt, Trương Song Hào,* 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Đà Nẵng :** *Bùi Thiên Kim,* 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Phú Yên :** *Phan Thành Nam,* 12T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Trần Võ Huy,* 12T, PTNK ĐHQG Tp. HCM ; **Vĩnh Long :** *Võ Minh Tâm,* 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm....

HỒ QUANG VINH

Bài L1/307. *Một con lắc lò xo nằm ngang có khối lượng không đáng kể và độ cứng $k = 100N/m$, chiều dài tự nhiên $l_o = 80$ (cm),*

quả nặng Q có khối lượng $m = 400g$. Bỏ qua mọi ma sát, $\pi^2 = 10$. Chọn trục Ox cùng chiều với trục lò xo, quả nặng ở vị trí cân bằng O như hình vẽ. Kéo Q lệch khỏi vị trí cân bằng theo chiều dương của trục một đoạn 4cm rồi thả nhẹ, Q chuyển động ngược chiều dương của trục 2cm thì người ta giữ chặt điểm G_1 của lò xo với $GG_1 = 61,5$cm. Viết phương trình dao động của Q sau khi giữ chặt điểm G_1 ?

Lời giải. Tại thời điểm bắt đầu giữ chặt G_1 với $GG_1 = 61,5$cm thì lò xo có chiều dài $l = l_o + x = 82$cm, do đó chiều dài của đoạn lò xo từ G_1 đến vật là $l' = 82 - 61,5 = 20,5$cm. Ta thấy $\frac{l'}{l} = \frac{1}{4}$ suy ra đoạn lò xo từ G_1 đến vật có chiều dài tự nhiên bằng $l'_o = \frac{l_o}{4} = 20$cm và có độ cứng k' mà $\frac{k'}{k} = \frac{l_o}{l'_o} \Rightarrow k' = 4k = 400N/m$. Như vậy sau khi giữ chặt G_1 ta có con lắc lò xo mới (k', m), vị trí cân bằng mới O' của quả nặng có tọa độ $x_{o'} = \overline{OO'} = G_1O' - G_1O = 1,5$cm.

Nếu chọn O' làm gốc tọa độ thì phương trình dao động của Q có dạng $x = A\sin(\omega t + \varphi)$, với $\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = 10\pi$ rad/s. Tại thời điểm $t = 0$, $x_o = 2 - 1,5 = 0,5$(cm) $= A\sin\varphi$ (1) ; $v_o = \omega A\cos\varphi = -\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{4^2 - 2^2} = -5\pi.2\sqrt{3}$ (cm/s) (2)

Từ (1) và (2) tìm được : $A \approx 1,80$(cm) ; $\varphi \approx 2,86$rad. Suy ra $x \approx 1,80\sin(10\pi t + 2,86)$ (cm).

Trở lại gốc tọa độ O, phương trình dao động của Q là :

$$X = 1,80\sin(10\pi t + 2,86) + 1,5(\text{cm})$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải và đáp số đúng :

Yên Bái : *Phan Thị Kim Hoa*, 12A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành ; **Hải Phòng :** *Bùi Ngọc Thơ*, 12A, THPT Phạm Ngũ Lão, Thủy Nguyên ; **Bình Định :** *Đinh Thành Vinh*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Phú Thọ :** *Vũ Đình Quang*, 10B, *Nguyễn Kim Ngọc*, 12B1, THPT ch. Hùng Vương, Việt Trì ; **Bạc Liêu :** *Lê Thanh Hoàn*, 12T1, THPT chuyên Bạc Liêu ; **Nam Định :** *Nguyễn Hải Long*, 12A, THPT A Nghĩa Hưng, *Nguyễn Văn Phi*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Hải Dương :** *Trần Quang Hưng*, 54K2, Thị trấn Thanh Miện ; **Hà Tây :** *Hoàng Đông Điện*, 12 Lí 2, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông ; **Vĩnh Phúc :** *Lê Sinh Huy*, 12A2, THPT ch. Vĩnh Phúc ; *Trần Văn Dũng*, 12A4, THPT Xuân Hòa, Mê Linh.

MAI ANH

Bài L2/307. *Có hai bình 1 và 2 chứa 6 lít và 2 lít nước tương ứng ở nhiệt độ lần lượt là 80^oC và 20^oC. Ban đầu người ta đổ một số lít nước ở bình 1 sang bình 2. Sau khi đã có cân bằng nhiệt ở bình 2, người ta lại đổ nước từ bình 2 sang bình 1 sao cho thể tích nước ở hai bình bằng nhau, thì thấy nhiệt độ bình 1 còn lại là 70^oC. Hỏi ban đầu đã đổ bao nhiêu lít nước từ bình 1 sang bình 2 ? Tính nhiệt độ của nước bình 2 sau khi đã đổ nước từ bình 2 sang bình 1. Bỏ qua sự mất nhiệt với môi trường ngoài và bình đựng chất lỏng.*

Lời giải. Thể tích nước ở mỗi bình sau lần trao đổi nhiệt cuối cùng là $(6 + 2) : 2 = 4$ lít. Kí hiệu m (kg), V (lít) tương ứng là khối lượng và thể tích lượng nước đổ lúc đầu từ bình 1 sang bình 2 và t^oC là nhiệt độ của nước ở bình 2 sau khi đã có cân bằng nhiệt. Phương trình cân bằng nhiệt là : $DV(80 - t) = D.2(t - 20)$

$\Rightarrow V(80 - t) = 2(t - 20)$ (1)

(D là khối lượng riêng của nước). Khi đó thể tích nước ở bình 2 và bình 1 tương ứng là $(V+2)$ và $(6-V)$. Do đó thể tích nước sau đó đã đổ từ bình 2 sang bình 1 là $(V+2-4) = (V-2)$. Phương trình cân bằng nhiệt lúc này là :

$D(V-2)(70-t) = D(6-V)(80-70)$

$\Rightarrow (V-2)(70-t) = 10(6 - V)$ (2)

Từ (1) và (2) tìm được : $t = 60^oC$ và $V = 4$lít.

Nhận xét. Phần lớn bài các bạn gửi đến đều có đáp số đúng và có rất nhiều bạn đang học lớp 8, lớp 9 đã gửi bài giải. Sau đây là các bạn học THCS có lời giải gọn và ghi đáp số đúng :

Đồng Nai : *Trần Quốc Chương*, 9A, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tp. Biên Hòa ; **Hải Phòng :** *Vũ Ngọc Linh*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Thanh Hóa :** *Lê Bá Ngọc*, 8B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thị Huyền Trang*, 8D, THCS Vĩnh Tường, *Quách Phương Nam*, 9A, THCS Yên Lạc ; **Hà Tĩnh :** *Võ Quang Sáng*, 9B, THCS Nam Hồng, Hồng Lĩnh ; **Hà Tây :** *Nguyễn Quang Huy*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Nghệ An :** *Đậu Thị Huyền*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Thị Huyền*, 9C, THCS Quỳ Hợp, Quỳ Hợp.

MAI ANH

Giải đáp : THÁP NHIỀU TẦNG

Rất vui vì các bạn xây được rất nhiều tháp cao tầng về các khái niệm toán học. Đa số các bạn xây được 30 tầng. Năm bạn xây được cao hơn và cao nhất là : *Phạm Quang Huy*, 8B2, THCS Đà Nẵng, Ngô Quyền, **Hải Phòng ;** *Ngô Hải Long*, 9C, THCS Quỳnh Thọ, Quỳnh Phụ, **Thái Bình** ; *Lê Bá Lâm*, 10A1, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa, **Thanh Hóa ;** *Trần Kim Thịnh*, 7A5, THCS Chu Văn An, Tp. **Thái Nguyên** ; *Trần Tiến Dũng*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Hồng, Nam Trực, **Nam Định** được nhận quà của tòa soạn. Hoan nghênh các bạn nhỏ *Hoàng Thị Hương Giang*, 6 Pháp, THCS Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột, **Đắc Lắc** ; *Bùi Thị Kim Huế, Đoàn Thị Bích Ngọc, Hoàng Nhật Chính*, 7A, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** ; *Nguyễn Thị Hải Linh, Đỗ Thị Minh Châu*, 7I, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, **Hà Nội** đã tham gia xây tháp.

Sau đây là tháp của bạn *Phạm Quang Huy*, nhưng vì cao quá nên đành in từ tầng cao đến tầng thấp liên tiếp nhau :
O, Tử, Mẫu, Hệ số, Tổ hợp, Hoán vị, Lũy thừa, Chỉnh hợp, Hình thang, Đối xứng tâm, Đối xứng trục, Hình bình hành, Giá trị lớn nhất, Diện tích đa giác, Tam giác vuông cân, Toán bậc nhất một ẩn, Phương trình bậc cao, Hai tam giác đồng dạng, Tỉ số của hai đoạn thẳng, Phương trình có hệ số chữ, Chùm đường thẳng đồng quy, Các hằng đẳng thức đáng nhớ, Số thập phân vô hạn tuần hoàn, Tính chất cơ bản của phân thức, Tổng các góc trong một tam giác, Các tỉ số lượng giác của góc nhọn, Hai bất phương trình tương đương, Hệ thức lượng trong tam giác vuông, Ảnh của hình trong phép đối xứng tâm, Quy đồng mẫu thức của nhiều phân thức, Tính chất đường phân giác của tam giác, Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối, Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác, Các hằng bất đẳng thức để giải toán cực trị, Phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử, Tỉ số các đường cao của hai tam giác đồng dạng, Tổng các bình phương của hai cạnh của tam giác, Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông, Phương trình và bất phương trình bậc nhất một ẩn, Hệ thức giữa các cạnh và các góc của tam giác vuông, Các phép tính và biến đổi đồng nhất phân thức đại số, Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, Toán cực đại toán cực tiểu và chứng minh bất đẳng thức, Tính các đại lượng hình học bằng cách lập phương trình, Bất phương trình một ẩn và bất phương trình tương đương, Quỹ tích các điểm cách một đường thẳng một đoạn cho trước, Biểu diễn tập hợp nghiệm của bất phương trình trên trục số, Phương trình có giá trị tuyệt đối và biện luận phương trình, Vẽ đường thẳng song song để tạo thành các cặp đoạn thẳng tỉ lệ, Mặt cầu tiếp xúc với các đường thẳng chứa cạnh của khối tứ diện, Phương trình bậc nhất một ẩn và các phương trình quy về bậc nhất, Sử dụng công thức diện tích để lập quan hệ về độ dài các đoạn thẳng.

VŨ ĐÔ QUAN

Giải đáp : VÀI PHÚT THƯ GIÃN

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} FOUR \\ FIVE \end{array} \\ \hline NINE \end{array}$$

Hàng đơn vị : $R + E = E$ nên $R = 0 \Rightarrow O$ khác 0.

Hàng trăm : $O + I + 1 = *I$ nên $O = 9$

Khi đó : Hàng chục : $U + V = 10 + N$

Hàng nghìn : $F + F + 1 = N$

a) Nếu $F = 1$ ta có $N = 3$ suy ra $U + V = 13$.

Có 4 cách chọn (U, V) là (6, 7), (7, 6), (5, 8), (8, 5). Như vậy có $A_4^2 = 12$ cách chọn (I, E) từ 4 chữ số còn lại sau khi chọn (U, V).

Trường hợp này có $4 \times 12 = 48$ đáp án

b) Nếu $F = 2$ ta có $N = 5$ suy ra $U + V = 15$. Có 2 cách chọn (I, E) từ 4 chữ số còn lại sau khi chọn (U, V). Trường hợp này có $2 \times 12 = 24$ đáp án.

c) Nếu $F \geq 3$ ta có $N \geq 7$ và suy ra $U + V \geq 17$. Vô nghiệm. Tóm lại có $48 + 24 = 72$ đáp án.

Hai bạn *Bùi Phương Thảo*, 10A1, THPT Nguyễn Tất thành, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội** ; *Võ Quang Đảm*, 12A2, THPT Nguyễn Huệ, Tx. Tuy Hòa, **Phú Yên** được nhận phần thưởng của THTT.

VKT

PASCAL

Bạn biết những gì quanh cái tên nổi tiếng này? Hãy gửi ngay bài viết của bạn về tòa soạn, trong phạm vi một trang A4 thôi nhé.

BÍNH NAM HÀ

Kết quả :

MỘT LỜI GIẢI LẠ LÙNG

Lời giải bài toán cho thấy không có số nào thỏa mãn điều kiện đề bài. *Chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục 4 đơn vị, nên khi đảo ngược thứ tự các chữ số của số đó thì hiệu giữa số mới và số cũ phải là 36, nhưng bài ra lại cho hiệu giữa hai số này là 27.* Từ đó dẫn tới PT : $0y = 9$, PT này vô nghiệm y ; dẫn đến đẳng thức sai $4 = 3$(!) vì đã thay đổi yêu cầu của bài toán.

Nhận xét. Có nhiều bạn cho rằng đề ra sai và đề nghị sửa lại đề toán. Xin thưa : đề bài không có vấn đề gì đâu ! Bài ra yêu cầu tìm số, vậy số đó có thể tồn tại, có thể không. Một số bạn nhận xét vui rằng đề toán có thể đưa vào phần *"Khởi động"* trong chương trình *"Đường lên đỉnh Olimpia"* của VTV3. Các bạn sau có lời bình tốt hơn cả : **Thái Nguyên :** *Thái Đoàn Minh Tuấn*, 9D2, THCS Trung tâm, Sông Công ; **Hà Nội :** *Trần Anh Tuấn*, 8C, THCS Hoàng Liệt, Thanh Trì ; **Nam Định :** *Nguyễn Văn Đỉnh*, 11I, THPT Giao Thủy A, Giao Thủy ; **Thái Bình :** *Ngô Hải Long*, 9C, THCS Quỳnh Thọ, Quỳnh Phụ ; **Phú Yên :** *Nguyễn Ngọc Sơn*, 12T1, THPT Lương Văn Chánh, Tx. Tuy Hòa.

NGỌC HIỂN

LO LẮNG !

Trong kì thi học sinh giỏi toán tỉnh Lâm Đồng năm học 2001 - 2002 có bài toán :

Cho $(a^2 + b^2)^3 = (a^3 + b^3)^2$ và $ab \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Lời giải : Từ giả thiết ta có

$$a^6 + 3a^2b^2(a^2 + b^2) + b^6 = a^6 + 2a^3b^3 + b^6$$

$$\Leftrightarrow 3a^2b^2(a^2 + b^2) = 2a^3b^3 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \text{ (vì } ab \neq 0)$$

Giải xong tôi cảm thấy thực sự lo lắng ! Các bạn có ý kiến gì cho bài toán này.

LÊ TIẾN HÙNG

(GV THCS TT Madagoul - Da huoai Lâm Đồng)

Kết quả :

DÊ CON ĐI CHƠI XUÂN

Trước hết xét các đoạn đường AB bất kì không có ngã rẽ mà dê con đã đi qua. Nếu dê con đi qua đoạn đường đó một số chẵn $2n$ lần từ A (hoặc từ B) thì sau khi đi và về $2n$ lần dê sẽ quay lại vị trí ban đầu A (hoặc B), do đó có thể bỏ đoạn đường ấy mà không làm ảnh hưởng đến đường đi từ nhà tới điểm bắt đầu quay về. Cũng vì lí do trên, đoạn đường nào đi qua một số lẻ lần thì coi là đi qua chỉ 1 lần. Sau khi làm như thế chỉ còn lại những đoạn đường đi qua 1 lần. Lúc đó trừ hai điểm đầu và cuối đường đi, mọi ngã rẽ đều có một số chẵn lối ra - vào vì khi có lối vào thì phải có lối ra. Bây giờ dê con chỉ việc đi theo những đoạn đường còn để lại không quá 1 lần thì sẽ về đến nhà do số đoạn đường đi này là hữu hạn.

Hai bạn được nhận tặng phẩm là : *Chu Văn Tiến*, 11A2, THPT Nguyễn Viết Xuân, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**, *Nguyễn Văn Ngọc*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**.

HOÀNG NGUYỄN

ĐIỀN SỐ VÀO BẢNG

Có một bảng $n \times n$ ô vuông. Ở mỗi ô của bảng chúng ta điền số 1 hoặc -1 và gọi x_i là tích các số trên cột thứ i, y_i là tích các số trên dòng thứ i ($i = 1, 2, ..., n$) sao cho :

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + y_1 + y_2 + ... + y_n = 0$$

a) Bạn hãy chỉ ra một cách điền như trên đối với bảng 4×4.

b) Đối với bảng vuông 9×9 thì bạn điền như thế nào ?

THĂNG LONG

(Quận Tân Bình, Tp. Hồ Chí Minh)

m -
n +
p -
q +

m+n+p+q = 0

m+n = 9
p+q = 9

m+n+p+q = 25

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

NĂM THỨ 40
Số 311 (5-2003)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

GIẢI THƯỞNG ABEL ĐẦU TIÊN

NGÔ VIỆT TRUNG

Vừa qua Viện hàn lâm Khoa học và Văn học Na Uy đã trao tặng giải thưởng Abel đầu tiên cho nhà toán học Jean-Pierre Serre vì những đóng góp sâu sắc của ông cho sự phát triển toán học hơn nửa thế kỷ qua. Giải thưởng Abel được nhà nước Na Uy lập ra nhân dịp 200 năm ngày sinh của nhà toán học Niels Henrik Abel (1802-1829) được xem như giải thưởng Nobel cho toán học (xem Toán học Tuổi trẻ số 4, năm 2002). Giải thưởng Abel năm nay có giá trị hơn 800 000 US$.

Jean-Pierre Serre sinh năm 1926 tại Bages, Pháp. Ông tốt nghiệp đại học tại Trường Sư phạm cao cấp Paris và bảo vệ tiến sĩ năm 1951 tại trường đại học Sorbonne. Sau đó ông là Phó giáo sư tại Trường đại học Nancy. Từ năm 1956 cho đến khi nghỉ hưu, ông là Giáo sư tại College de France.

Những công trình của Serre đã xây dựng và phát triển những công cụ đại số mang tính chất cách mạng trong các chuyên ngành Tô pô, Hình học đại số và Lý thuyết số. Những ý tưởng của ông đóng một vai trò quan trọng trong nhiều kết quả đột phá của toán học, từ việc phát hiện ra mã công khai cho đến việc giải quyết giả thuyết Fermat.

Serre là tiến sĩ danh dự của nhiều trường đại học và là thành viên nhiều viện hàn lâm của Pháp, Mỹ, Thụy Điển và Hà Lan. Ông được trao tặng giải thưởng Fields năm 1954 khi mới 28 tuổi và là người trẻ nhất khi nhận giải thưởng này từ trước đến nay. Năm 2000 ông được trao tặng giải thưởng Wolf, một giải thưởng cao quý không kém gì giải thưởng Fields. Với việc nhận giải thưởng Abel, ông trở thành người duy nhất cho đến nay nhận được tất cả các giải thưởng cao nhất của toán học.

TRƯỜNG THCS ĐỐNG ĐA, HÀ NỘI

Trường THCS Đống Đa, quận Đống Đa, Hà Nội được thành lập năm 1972. Trong quá trình 31 năm xây dựng và phát triển nhà trường đã đạt được nhiều thành tích đáng tự hào :

- 23 năm liên tục đạt danh hiệu *trường tiên tiến xuất sắc cấp thành phố*.
- 28 năm đạt danh hiệu trường tiên tiến xuất sắc về thể dục thể thao cấp thành phố
- Năm 1981 trường được Hội đồng Bộ trưởng tặng Bằng khen
- 2 năm liền : 1982, 1983 trường được UBND thành phố tặng cờ thi đua là đơn vị dẫn đầu ngành giáo dục thủ đô.
- Năm 1983 trường được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động hạng Ba.
- Năm 1984, trường được Hội đồng Bộ trưởng tặng cờ luân lưu : Đơn vị dẫn đầu thi đua ngành giáo dục toàn quốc
- Năm 1996 trường được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động hạng Nhì.
- Năm 2001 trường được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động hạng Nhất.

Nhà giáo ưu tú
Hiệu trưởng
HOÀNG THỊ MINH AN

Các đoàn thể trong trường đều hoạt động tốt : Chi bộ trong sạch vững mạnh ; Công đoàn xuất sắc cấp Quận và được Liên đoàn thành phố Hà Nội tặng Bằng khen ; Liên đội thiếu niên tiền phong Hồ Chí Minh đạt xuất sắc cấp thành phố 17 năm.

Với lòng yêu nghề mến trẻ, say mê nghề nghiệp, và tài năng sư phạm các thế hệ giáo viên nhà trường ngày càng vững vàng về chuyên môn nghiệp vụ. Nhiều thầy cô giáo đã đạt danh hiệu giáo viên dạy giỏi cấp quận, thành phố, chiến sĩ thi đua mà tiêu biểu là các thầy giáo, cô giáo : Đỗ Hồng Hà, Phạm Tú Anh, Nguyễn Ngọc Đại, Nguyễn Minh Chi, Ngô Hồng Loan, Đinh Văn Hồng, Nguyễn Hồng Hạnh A, Đào Ngọc Bích, ... Năm 2002 cô giáo Hoàng Thị Minh An được Nhà nước phong tặng danh hiệu Nhà giáo ưu tú.

Chất lượng giáo dục của nhà trường luôn đạt kết quả xuất sắc, là một trong số ít trường có chất lượng đào tạo cao của quận Đống Đa :

- Hàng năm học sinh khá giỏi đạt trên 80%.
- Học sinh giỏi cấp quận, thành phố đạt từ 75 đến 85 giải hàng năm.
- Học sinh lớp 9 tốt nghiệp đạt tỉ lệ từ 99,6% đến 100%, trong đó xếp loại khá giỏi đạt từ 70% đến 75%.

Được sự quan tâm của các cấp ủy Đảng, chính quyền, Sở GD-ĐT Hà Nội, Phòng GD-ĐT quận Đống Đa, của Hội cha mẹ học sinh, nhà trường ngày càng đổi mới và hoàn thiện về cơ sở vật chất, giữ vững và nâng cao chất lượng giáo dục để xứng đáng với lòng tin cậy của các cấp lãnh đạo, các thế hệ học sinh và cha mẹ học sinh.

Các giáo viên Tổ Tự nhiên

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT13M3

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2003

Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng