BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

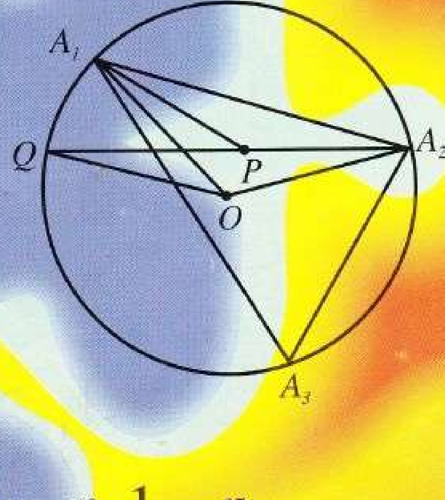
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

5 2005 Số 335

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 42
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com

GIẢI THƯỞNG ABEL NĂM 2005

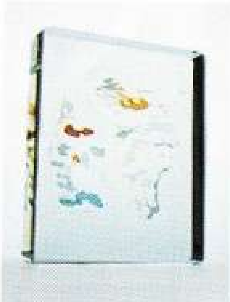
CÂU CHUYỆN VỀ Niềm vui KHÁM PHÁ



$$\prod_{i=1}^{n} PA_i < \left(\frac{2}{n}\right)^n (n-1)^{n-1} R^n$$

THÔNG TIN TOÁN HỌC

Giải thưởng ABEL năm 2005



Giải thưởng Abel

Vừa qua, ngày 18 tháng 3 năm 2005, Viện Hàn lâm Khoa học và Văn chương Na Uy đã quyết định trao giải thưởng Abel của năm 2005 cho Peter D. Lax, Viện các Khoa học Toán học Courant, Đại học New York, vì "những cống hiến đột phá của ông trong lý thuyết và ứng dụng của phương trình vi phân đạo hàm riêng và việc tính toán các lời giải của chúng". Giải thưởng Abel là giải có giá trị dành cho các nhà toán học có cống hiến lớn, được trao bắt đầu từ năm 2003 (Xem THTT số tháng 4 năm 2002 và tháng 5/2003, tháng 5/2004). Trị giá của Giải thưởng Abel là 6.000.000 NOK (vào khoảng 980.000 USD).

Peter D. Lax sinh năm 1926 tại Budapest, Hungary. Ông tới New York cùng gia đình vào năm 1941 khi chiến tranh xảy ra ở Hungary. Dưới sự hướng dẫn của Richard Courant, người sáng lập Viện khoa học Toán học Courant, Lax nhận bằng tiến sỹ năm 1949 tại ĐH New York (NYU). Năm 1950, Lax tới Los Alamos trong một năm và làm việc ở đó với cương vị cố vấn, tới năm 1951 ông trở lại NYU làm việc tại Viện Courant và được phong hàm giáo sư năm 1958. Tại NYU ông làm giám đốc Trung tâm Tính toán và ứng dụng Toán học AEC (Atomic Energy Commission). Peter D. Lax đã từng là chủ tịch (1977-80) và phó chủ tịch (1969-71) Hội Toán học Mỹ, ông cũng làm việc trong Uỷ ban Khoa học Quốc gia từ 1980 tới 1986.

Những định luật của tự nhiên thường được mô tả bởi các phương trình vi phân (PTVP). Chẳng hạn định luật Vạn vật hấp dẫn của Newton, các phương trình Maxwell về Điện từ học, và các phương trình Navier-Stokes mô tả chuyển động của khí gas và dòng chất lỏng. Các PTVP thường rất phức tạp và không có công thức giải chung. Lax đã chỉ ra cách xấp xỉ gần đúng một vài lớp PTVP quan trọng, có thể được tính toán bởi các máy tính tốc độ cao để ứng dụng giải các bài toán thực tế như dòng chảy của dầu và chuyển động của khí gas. (Nền của bìa 1 THTT số này biểu thị hình ảnh khí gas khi nổ trong hộp kín).

Vào thập kỉ 50 và 60 của thế kỉ trước, Lax đã đặt nền móng cho lý thuyết hiện đại của các phương trình phi tuyến phát sinh trong các lĩnh vực khí động lực học, khí tượng học và lý thuyết đàn hồi (các hệ hyperbolic). Ông xây dựng lời giải tường minh, nhận dạng các lớp hệ đặc biệt, đưa ra một khái niệm quan trọng của *entropy* và cùng với Glimm, thực hiện một nghiên cứu chuyên sâu các lời giải trong thời gian dài. Thêm vào đó, ông đưa ra việc sử dụng các *giản đồ số Lax-Friedrichs và Lax-Wendroff* trong việc tìm lời giải. Một phần quan trọng của giải tích số hiện đại là *"Định lý tương đương Lax"*, Lax đã thiết lập từ định lý này các điều kiện để thu được xấp xỉ hiệu quả nghiệm của PTVP. Các kết quả quan trọng khác là *bổ đề Lax-Milgram* và *nguyên lý Phragmén-Lindöf* cho các phương trình eliptic, *lí thuyết Lax-Levermore*. Các công trình của ông có ứng dụng lớn trong thực tế, từ dự báo thời tiết cho tới việc thiết kế chế tạo máy bay.

Peter D.Lax

Peter D. Lax là một trong những nhà Toán học thuần túy và Toán ứng dụng lớn của thời đại chúng ta và đã có những đóng góp quan trọng về phương trình đạo hàm riêng áp dụng trong kỹ thuật. Tên của ông gắn liền với nhiều kết quả toán học chính và các phương pháp số. Ông cũng là một trong những người sáng lập Toán học Tính toán hiện đại. Ông đã được đích thân tổng thống Hoa Kỳ Ronald Reagan trao huân chương Khoa học Quốc gia vào năm 1986 tại Nhà Trắng; nhận giải thưởng Wolf vào năm 1987 và giải thưởng Chauvenet vào năm 1974; giải thưởng Hội Toán học Mỹ năm 1992. Ông cũng được nhận giải thưởng Norbert Wiener vào 1975 từ Hội Toán học Mỹ và Hội Công nghiệp và Ứng dụng Toán học. Năm 1996 ông được chọn làm thành viên của Hội Triết học Mỹ. Giáo sư Peter D. Lax còn là một nhà sư phạm, nhà cải cách giáo dục toán học lớn. Ông đã được nhận danh hiệu Tiến sỹ Danh dự của nhiều trường ĐH danh tiếng trên thế giới.

HÀN NGỌC ĐỨC

(Theo http://www.ddtoanhoc.net)

TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐA THỨC

NGUYỄN SƠN HÀ
(*GV PTCTT ĐHSP Hà Nội*)

Chúng ta đã quen với việc tìm nghiệm của đa thức và chứng minh tính chất các nghiệm của đa thức. Bài viết này muốn giới thiệu ứng dụng việc lập đa thức nhận các số cho trước là nghiệm. Như vậy việc xét tính chất của các số cho trước đưa về việc xét tính chất nghiệm của đa thức.

Một số kiến thức cơ bản về đa thức :

1. Cho đa thức $f(x)$ thì a là nghiệm của $f(x) \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow f(x) \vdots (x-a)$.

2. Ba số a, b, c cho trước luôn là nghiệm của đa thức bậc ba

$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$

$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$

3. Cho đa thức với hệ số nguyên

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$$

– Nếu đa thức có nghiệm hữu tỉ $\dfrac{p}{q}$ thì p là ước của hệ số tự do a_o ; q là ước của hệ số bậc cao nhất a_n.

– Khi hệ số bậc cao nhất a_n bằng ± 1 ; nếu đa thức có nghiệm hữu tỉ thì mọi nghiệm hữu tỉ là nghiệm nguyên và là ước của hệ số tự do a_o. Nếu đa thức không có nghiệm nguyên thì không có nghiệm hữu tỉ.

Vận dụng tính chất đa thức vào giải toán

Bài toán 1: *Cho số* $a = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$

1) Lập đa thức hệ số nguyên nhận $a = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ *là nghiệm*

2) Chứng minh $a = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ *là số vô tỉ*

3) Tính giá trị của biểu thức f(a) trong đó

$f(x) = x^{2010} - 6x^{2008} - 6x^{2007} + 12x^{2006} - 36x^{2005} + x^{2004} + 2004.$

1) ***Phân tích.*** *Ta biến đổi để làm mất các căn thức sẽ tìm được đa thức nhận a là nghiệm.*

Lời giải:

$a = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \Rightarrow a - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3}$

$\Rightarrow a^3 - 3a^2\sqrt{2} + 6a - 2\sqrt{2} = 3.$

$\Rightarrow a^3 + 6a - 3 = \left(3a^2 + 2\right)\sqrt{2}$

$\Rightarrow a^6 + 36a^2 + 9 + 2.a^3.6a - 2.a^3.3 - 2.6a.3$

$= 2(9a^4 + 12a^2 + 4)$

$\Rightarrow a^6 - 6a^4 - 6a^3 + 12a^2 - 36a + 1 = 0$

$\Rightarrow a$ là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên $g(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1.$

2) ***Phân tích.*** *Để chứng tỏ số a là số vô-tỉ ta có thể lập đa thức với hệ số nguyên nhận a là nghiệm rồi chứng minh đa thức không có nghiệm hữu tỉ.*

Lời giải. Giả sử a là số hữu tỉ thì đa thức $g(x)$ trên có nghiệm hữu tỉ a. Do $g(x)$ là đa thức hệ số nguyên với hệ số bậc cao nhất là $1 \Rightarrow a$ là nghiệm nguyên của $g(x)$ và là ước của hệ số tự do $\Rightarrow a \in \{1; -1\}$. Tuy nhiên $g(1) = -34 \neq 0$; $g(-1) = 50 \neq 0$ mâu thuẫn. Vậy a là số vô tỉ.

3) ***Phân tích.*** *Để tính f(a) với f(x) là đa thức bậc cao ta lập đa thức g(x) (bậc nhỏ nhất) nhận a là nghiệm rồi thực hiện phép chia f(x) cho g(x) được f(x) = q(x).g(x) + r(x).*

Vì g(a) = 0 nên f(a) = q(a).g(a) + r(a) = r(a).

Do bậc của r(x) nhỏ hơn bậc của g(x) nên việc tính toán trở nên đơn giản.

Lời giải. $f(x) = x^{2010} - 6x^{2008} - 6x^{2007} + 12x^{2006} - 36x^{2005} + x^{2004} + 2004 = x^{2004}.g(x) + 2004$

Do $g(a) = 0$ nên $f(a) = a^{2004}.g(a) + 2004 = 2004.$

Bài toán 2. *Cho các số a, b thỏa mãn* $b > \dfrac{a^2}{4}$.

Rút gọn biểu thức :

$$A = \sqrt[3]{\frac{ab+\sqrt{a^2b^2 - \frac{4}{27}(a^2-b)^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{ab-\sqrt{a^2b^2 - \frac{4}{27}(a^2-b)^3}}{2}}$$

Phân tích. Để rút gọn hay tính giá trị của biểu thức ta lập đa thức nhận biểu thức đó là nghiệm rồi tìm nghiệm của đa thức dưới dạng đơn giản. Sau đó chứng minh đa thức có nghiệm duy nhất hoặc chỉ có một nghiệm phù hợp với tính chất của biểu thức ban đầu.

Lời giải.

Đặt $u = \sqrt[3]{\frac{ab+\sqrt{a^2b^2 - \frac{4}{27}(a^2-b)^3}}{2}}$

$v = \sqrt[3]{\frac{ab-\sqrt{a^2b^2 - \frac{4}{27}(a^2-b)^3}}{2}}$

$\Rightarrow A = u + v$; $u^3 + v^3 = ab$ và $u.v = \frac{a^2-b}{3}$

$\Rightarrow A^3 = (u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = ab + (a^2-b)A$

$\Rightarrow A^3 - (a^2-b)A - ab = 0$

$\Rightarrow (A-a)(A^2 + a.A + b) = 0.$

Do $a^2 - 4b < 0$ nên $A^2 + a.A + b \neq 0$.

$\Rightarrow A - a = 0$. Vậy $A = a$.

Bài toán 3. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=36 \end{cases}$$

Phân tích. Để giải một hệ phương trình ba ẩn mà các phương trình biểu thị các giá trị của đa thức đối xứng của ba ẩn đó ta có thể chỉ ra các ẩn đều là nghiệm của một đa thức bậc ba rồi tìm tất cả các nghiệm của đa thức đó.

Lời giải. Ta có

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2 + 2(xy+yz+zx)$

$$\Rightarrow xy+yz+zx = \frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2} = 11$$

$3xyz = x^3+y^3+z^3 - (x+y+z).(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$= 36 - 6(14-11) = 18 \Rightarrow xyz = 6.$

Như vậy x, y, z là nghiệm của đa thức

$$f(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(X-2)(X-3)$$

$\Rightarrow f(X)$ có ba nghiệm là $X_1 = 1$; $X_2 = 2$; $X_3 = 3$.

Hệ đã cho có 6 nghiệm (1 ; 2; 3), (1; 3; 2) ; (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1)

Bài toán 4. *Cho các số dương x, y, z thỏa mãn các điều kiện* $x+y+z=\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx=-2$, $xyz=\frac{-1}{2}$. *Tính* $x^5+y^5+z^5$.

Phân tích. Để tính giá trị của một biểu thức nhiều ẩn mà biết giá trị của các biểu thức đối xứng của các ẩn đó, ta có thể chỉ ra các ẩn là nghiệm của một đa thức rồi đưa về việc tính biểu thức nghiệm của đa thức đó.

Lời giải. Theo ĐL Vi–et đảo thì x, y, z là nghiệm của đa thức

$$f(X) = X^3 - \frac{1}{2}X^2 - 2X + \frac{1}{2}$$

Đặt $S_n = x^n+y^n+z^n$. Do x là nghiệm của $f(X)$ nên

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^{n+3} = \frac{1}{2}x^{n+2} + 2x^{n+1} - \frac{1}{2}x^n \text{ với } \forall n \in N.$$

Chứng minh tương tự với y, z ta có

$$y^{n+3} = \frac{1}{2}y^{n+2} + 2y^{n+1} - \frac{1}{2}y^n \text{ với } \forall n \in N$$

$$z^{n+3} = \frac{1}{2}z^{n+2} + 2z^{n+1} - \frac{1}{2}z^n \text{ với } \forall n \in N$$

Vậy $S_{n+3} = \frac{1}{2}S_{n+2} + 2S_{n+1} - \frac{1}{2}S_n$ với $\forall n \in N$

Ta có $S_o = 3$; $S_1 = \frac{1}{2}$;

$$S_2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = \frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{1}{2}S_2 + 2S_1 - \frac{1}{2}S_o = \frac{1}{2}.\frac{17}{4} + 2.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.3 = \frac{13}{8}$$

$$\Rightarrow S_4 = \frac{1}{2}S_3 + 2S_2 - \frac{1}{2}S_1 = \frac{1}{2}.\frac{13}{8} + 2.\frac{17}{4} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{145}{16}$$

$$S_5 = \frac{1}{2}S_4 + 2S_3 - \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{2}.\frac{145}{16} + 2.\frac{13}{8} - \frac{1}{2}.\frac{17}{4} = \frac{181}{32}$$

Vậy $x^5 + y^5 + z^5 = \frac{181}{32}$.

Với phương pháp trên bạn đọc có thể tìm ra rất nhiều ứng dụng khác nữa của đa thức. Dưới đây là một số bài tập tự luyện ứng dụng tính chất của đa thức.

BÀI TẬP

Bài 1. Rút gọn biểu thức

$$A = \sqrt[3]{a^3 + a + \frac{1}{3}\sqrt{27a^4 + 6a^2 + \frac{1}{3}}} + \sqrt[3]{a^3 + a - \frac{1}{3}\sqrt{27a^4 + 6a^2 + \frac{1}{3}}}$$

Bài 2. Cho số $a = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$

1) Lập đa thức hệ số nguyên nhận $a = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ là nghiệm.

2) Chứng minh $a = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ là một số vô tỉ.

3) Tính giá trị của biểu thức $f(a)$ trong đó

$$f(x) = x^5 + 2x^2 - 36x + 1992.$$

Bài 3. Cho $x+y+z = 0$. Chứng minh các đẳng thức sau :

1) $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}.\frac{x^2+y^2+z^2}{2} = \frac{x^5+y^5+z^5}{5}$.

2) $\frac{x^7+y^7+z^7}{7} = \frac{x^5+y^5+z^5}{5}.\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$

$= 2.\frac{x^3+y^3+z^3}{3}.\frac{x^4+y^4+z^4}{4}$.

(Gợi ý: Đặt $xy+yz+zx = a$; $xyz = b$ đã có $x+y+z = 0$ ta có thể biểu diễn hai vế cùng bằng một biểu thức của a và b).

Bài 4. Tìm các số x, y, z thỏa mãn các điều kiện :

$$x+y+z = \frac{7}{4},\quad xy+yz+zx = \frac{7}{8},\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x} = 7.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2004

(Thời gian làm bài : 120 phút)

Bài 1. (1, 5 điểm). Cho biểu thức :

$$A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a}$$

1) Tìm điều kiện đối với a, b để biểu thức A được xác định.

2) Rút gọn biểu thức A.

Bài 2. (2 điểm).

1) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + 3y = 1 \\ 3x^2 - y = 1 \end{cases}$$

2) Giải bất phương trình :

$$x + |x - 1| > 5$$

Bài 3. (1,5 điểm). Chứng minh rằng, nếu phương trình :

$$x^2 + 2mx + n = 0 \qquad (1)$$

có nghiệm, thì phương trình :

$$x^2 + 2\left(k + \frac{1}{k}\right)mx + n\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = 0 \qquad (2)$$

cũng có nghiệm.

(m, n, k là các tham số : $k \neq 0$)

Bài 4. (1,5 điểm). Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị (D) và hàm số $y = kx^2$ có đồ thị (P).

a) Tìm a, b biết rằng (D) đi qua A (-1; 3) và B (2; 0)

b) Tìm $k \neq 0$ sao cho (P) tiếp xúc với đường thẳng (D) vừa tìm được. Viết phương trình của (P).

Bài 5. (3, 5 điểm).

Cho tam giác ABC không cân có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O. Hai đường cao AI và BE cắt nhau tại H.

1) Chứng minh : $\widehat{CHI} = \widehat{CBA}$

2) Chứng minh : $EI \perp CO$.

3) Cho $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Chứng minh : $CH = CO$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN TOÁN TIN TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI NĂM 2004

(Đề thi đã đăng trên THTT số 334, tháng 4 năm 2005)

NGÀY THỨ NHẤT

Câu 1. Đặt $\begin{cases} x+y=u \\ xy=v \end{cases}$ hệ trở thành

$$\begin{cases} u^2-3v=19 \\ (u^2-2v)^2-v^2=931 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2=3v+19 \\ (3v+19-2v)^2-v^2=931 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=15 \\ u^2=64 \end{cases}$$

Suy ra các nghiệm (x, y) là $(3; 5)$, $(5; 3)$, $(-3; -5)$, $(-5, -3)$.

Câu 2. Giả sử PT có nghiệm $x = x_0$ khi đó

$$(x_o+2)\sqrt{x_o+1} = 2x_o+1 \qquad (1)$$

vì $x_0+1 \geq 0$ nên $(x_o+2)\sqrt{x_o+1} \geq 0$

$$\Rightarrow 2x_0+1 \geq 0 \Rightarrow x_0 \geq -\frac{1}{2}.$$

Từ đó bình phương hai vế của PT được :

$$\left(x_o^2+4x_o+4)(x_o+1\right) = 4x_o^2+4x_o+1$$

$\Rightarrow x_o^3+x_o^2+4x_o+3=0$ vô lí vì

$x_o^3+x_o^2+4x_o+3 = x_o^2(x_o+1)+2(2x_o+1)+1 \geq 1$

với mọi $x_0 \geq \frac{1}{2}$. Vậy PT đã cho vô nghiệm.

Câu 3. Đặt $a = x+y$ với $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}$, $y = \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ thì cần chứng minh là $a^8 > 3^6$.

Ta có $x^3+y^3=6$ và $xy=1$ nên

$a^3 = (x^3+y^3) + 3xy(x+y) = 6+3a$

$= 3(1+1+a) > 3\left(3\sqrt[3]{1.1.a}\right)$ (vì $x>1$, $y>0$ nên $a>1$). Do đó :

$$a^9 > \left(3^2\right)^3.a \Rightarrow a^8 > 3^6.$$

Câu 4. Ta có

$$S = p+(p+1)+(p+2)+\ldots+q = \frac{(p+q)(q-p+1)}{2}$$

Ta tìm p, q nguyên dương sao cho :

$$\begin{cases} 0<p<q<n & (1) \\ S \,\vdots\, n & (2) \end{cases}$$

Với $n = 18^{6^{2004}}$ từ (2) có

$$(q+1-p)(p+q) \,\vdots\, 2.2^{6^{2004}}.9^{6^{2004}}.$$

Chú ý $q+1-p < p+q$ và $(q+1-p)$, $(p+q)$ khác tính chẵn lẻ, đồng thời $2.2^{6^{2004}} < 9^{6^{2004}}$ nên chọn được p, q sao cho $\begin{cases} q+1-p = 2.2^{6^{2004}} \\ p+q = 9^{6^{2004}} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = \dfrac{9^{6^{2004}}-2.2^{6^{2004}}+1}{2} \\ q = \dfrac{9^{6^{2004}}+2.2^{6^{2004}}-1}{2} \end{cases}$$

nghĩa là p, q thỏa mãn (1) và (2).

2) Giả sử có p, q nguyên dương thỏa mãn (1), (2) với $n = 16^{6^{2004}}$ thì từ (2) suy ra

$$(q-p+1)(p+q) \,\vdots\, 2n = 2.16^{6^{2004}}$$

Chú ý rằng hai số $(q-p+1)$ và $(q+p)$ khác tính chẵn lẻ nên chỉ có thể xảy ra một trong hai khả năng sau :

a) Nếu $(q-p+1)$ lẻ và $(q+p)$ chẵn

Từ (2) có $(q+p) \,\vdots\, 2n \Rightarrow p+q \geq 2n \Rightarrow p \geq n$ hoặc $q \geq n$ trái với (1).

b) Nếu $(q-p+1)$ chẵn và $(q+p)$ lẻ

Từ (2) có $(q-p+1) \,\vdots\, 2n \Rightarrow q-p+1 \geq 2n \Rightarrow p+q \geq 2n \Rightarrow p \geq n$ hoặc $q \geq n$ trái với (1).

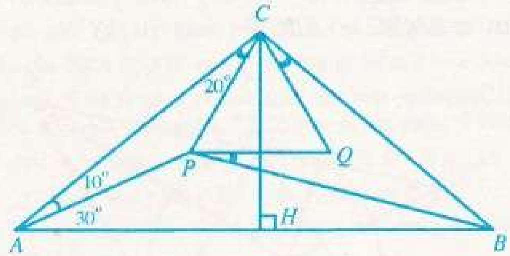
Vậy số $n = 16^{6^{2004}}$ không có tính chất đã nêu.

Câu 5. 1) Từ giả thiết có $\widehat{CAB} = \widehat{PAC} + \widehat{PAB} = 40^o = \widehat{ABC}$ nên ΔCAB cân ở đỉnh C với góc $\widehat{ACB} = 100^o$.

Dựng $CH \perp AB$ thì CH là trục đối xứng của tam giác CAB và tam giác CPQ, do đó tam giác CPQ cân ở đỉnh C.

Mặt khác tam giác PCA đối xứng với tam giác QCB qua trục CH nên $\widehat{QCB} = \widehat{PCA} = 20^o$ $\Rightarrow \widehat{PCQ} = 60^o$ suy ra ΔCPQ là tam giác đều.

2) Ta có $\widehat{CQB} = \widehat{CPA} = 150^o$ mà $\widehat{CQP} = 60^o$ nên $\widehat{PQB} = 150^o$. Do đó $\Delta QCB = \Delta QPB$ (c.g.c) suy ra $\widehat{QPB} = \widehat{QCB} = \widehat{PCA} = 20^o$, vậy $\widehat{CPB} = 80^o$.



NGÀY THỨ HAI

Câu 6. Đặt $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$, $c = \sqrt{z}$ (a, b, c đều dương) và áp dụng các BĐT

$(a+b+c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$ và

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$; $\forall a, b, c > 0$ ta được

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c} \ge \frac{9}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} = \frac{9}{3} = 3$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{x+y+z}{3} = 1$.

Vậy $\min P = 3$.

Câu 7. Giả sử (x, y, z) là một bộ ba số dương thỏa mãn hệ PT đã cho. Không mất tổng quát, giả sử $0 < x \le y \le z$. Như vậy :

$$\begin{cases} 2x^{2004} = y^6 + z^6 \ge x^6 + x^6 \\ 2z^{2004} = x^6 + y^6 \le z^6 + z^6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{2004} \ge x^6 \\ z^{2004} \le z^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ z \le 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = y = z = 1$. Đảo lại, dễ thấy $x = y = z = 1$ là một bộ ba số dương thỏa mãn hệ PT đã cho.

Câu 8. Vế trái PT là một tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$. Cho x lần lượt nhận các giá trị $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ta được hệ PT

$$\begin{cases} a+b+c = 2 \\ 2a+\sqrt{2}b+c = 3 \\ 3a+\sqrt{3}b+c = 4 \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được $a = c = 1$, $b = 0$. Phương trình đã cho viết lại thành :

$$x^2 + 1 = 3x - 1.$$

Giải PT này ta được $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

Câu 9. 1) Kí hiệu PT đã cho là (1). Dễ thấy (1; 1; 1) là một nghiệm nguyên dương của (1). Để tìm các nghiệm nguyên dương dạng $(x ; 1; 1)$, ta cho $y = z = 1$ thì (1) trở thành : $x^2 + 2 = 3x$. Giải ra hai nghiệm $x = 1$, $x = 2$. Ta nhận được hai nghiệm (1; 1; 1) và (2; 1; 1).

Vì PT (1) đối xứng đối với x, y, z nên (1; 2; 1) và (1; 1; 2) cũng là nghiệm của (1).

Vậy (1; 1; 1), (2; 1; 1), (1; 2; 1), (1; 1; 2) là bốn nghiệm nguyên dương khác nhau của PT đã cho.

2) Bộ ba số $(x = x_o; y = y_o; z = z_o)$ là một nghiệm nguyên dương của (1) thì $x = x_o$ là một nghiệm nguyên dương của.

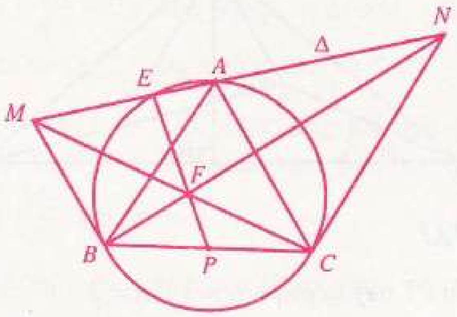
$$x^2 - 3y_o z_o x + y_o^2 + z_o^2 = 0 \qquad (2)$$

Khi đó, theo định lí Vi–ét, nghiệm còn lại của (2) là $x = 3y_o z_o - x_o$ cũng là số nguyên. Hơn nữa, nếu $1 \le x_o \le y_o \le z_o$ thì $x = 3y_o z_o - x_o > (y_o z_o - x_o) + y_o z_o + y_o z_o > z_o$.

Do tính đối xứng của PT (1) thì $x_1 = y_o$; $y_1 = z_o$; $z_1 = 3y_o z_o - x_o$ cũng là nghiệm nguyên dương của PT (1) với $x_1 \le y_1 < z_1$. Do đó từ một nghiệm $(x_o; y_o; z_o)$ thỏa mãn ĐK $1 \le x_o \le y_o \le z_o$ ta tìm được một nghiệm nguyên dương (x_1, y_1, z_1) cũng thỏa mãn ĐK $1 \le x_1 \le y_1 \le z_1$ mà $z_1 > z_o$. Tiếp tục như thế thì PT (1) có vô số nghiệm nguyên dương.

Câu 10. 1) Từ giả thiết có : $\widehat{ABM} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{ACN} = \widehat{BAC} = 60^o$ suy ra $AC \, // \, MB$ và $CN \, // \, BA$. Ta có $\widehat{NMB} = \widehat{NAC}$, do đó

$\Delta ACN \backsim \Delta MBA$ suy ra $\dfrac{AC}{MB}=\dfrac{CN}{BA}$ mà $AC=BA=BC$ nên $\dfrac{BC}{MB}=\dfrac{CN}{BC}$, hơn nữa $\widehat{MBC} = \widehat{BCN} = 120^o$, suy ra $\Delta MBC \backsim \Delta BCN$ (1)



2) Từ (1) có : $\widehat{BMC} = \widehat{CBN}$, do đó $\widehat{BFM} = \widehat{BCM} + \widehat{FBC} = \widehat{BCM} + \widehat{CMB} = 180^o - \widehat{MBC} = 60^o$.

Mặt khác $\widehat{BEM} = \widehat{BCA} = 60^o$, do đó $\widehat{BEM} = \widehat{BFM} \Rightarrow BMEF$ là tứ giác nội tiếp.

3) Gọi I là giao điểm của BC và EF, ta có $\widehat{IBF} = \widehat{CBN} = \widehat{BMC} = \widehat{BEF} \Rightarrow \Delta IBF \backsim \Delta IEB$

$\Rightarrow \dfrac{IB}{IE} = \dfrac{IF}{IB} \Rightarrow IB^2 = IE.IF$.

Tương tự $CNEF$ là tứ giác nội tiếp và $\Delta ICE \backsim \Delta IFC$ nên $IC^2 = IE.IF$. Từ đó $IB = IC$. Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm I cố định là trung điểm của BC.

DOÃN MINH CƯỜNG
(GV khối PTCTT ĐHSP Hà Nội)

THÔNG BÁO VỀ CUỘC THI GIẢI TOÁN BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI

Cuộc thi dự định sẽ tổng kết vào tháng 5.2005. Do thời gian này nhiều bạn còn bận ôn thi cuối năm nên chưa tham gia được. Cuộc thi được gia hạn nhận bài giải thêm 1 tháng so với trước đây. Các bạn hãy đón đọc đáp án của đợt 3.2005 và kết quả các bạn đoạt giải năm học 2004-2005 trên số 336 ra tháng 6.2005.

Cảm ơn các bạn.

THTT

GIÚP BẠN TỰ ÔN THI
ĐỀ ÔN LUYỆN SỐ 4
(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I. (2,25 điểm)

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số :

$$y = x^3 - 3x + 2 \qquad (C)$$

2) Giả sử A, B, C là ba điểm thẳng hàng phân biệt thuộc (C), tiếp tuyến với (C) tại A, B, C tương ứng cắt lại (C) tại A', B', C'. Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.

Câu II. (2,25 điểm)

1) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+\sqrt{1-y^2} = 1 \\ y+\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

2) Giải bất phương trình :

$$20\log_{4x}\sqrt{x} + 7\log_{16x}x^3 \ge 3\log_{x/2}x^2$$

Câu III. (2 điểm)

1) Tam giác ABC có $BC = a$; $\cos A = \dfrac{7}{8}$ và diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C của tam giác. Chứng minh rằng $h_a = h_b + h_c$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \sin\frac{x}{2}(1+6\cos\frac{x}{2}).$$

Câu IV. (2,5 điểm)

1) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng (d_1): $2x - y + 1 = 0$ và (d_2): $x+2y-7 = 0$

Lập phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ và tạo với (d_1), (d_2) tam giác cân có đáy thuộc đường thẳng đó. Tính diện tích tam giác cân nhận được.

2) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có các mặt bên là hình vuông cạnh a. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các đoạn BC, A_1C_1, C_1B_1. Tính khoảng cách giữa DE và A_1F.

Câu V. (1 điểm)

Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin x}{(1+\cos x)e^x}dx$

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐỀ ÔN LUYỆN SỐ 3
(Đề đã đăng trên THTT số 334, tháng 4 năm 2005)

Câu I.

a) Bạn đọc tự giải.

b) Hai điểm cố định (1, 0), (2, 0)

c) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là nghiệm của PT

$x^3 - (m+3)x^2 + (2 + 3m)x - 2m = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = m$. Ba hoành độ này lập thành một cấp số cộng theo một thứ tự nào đó

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=2x_3 \\ x_1+x_3=2x_2 \\ x_2+x_3=2x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3/2 \\ m=3 \\ m=0 \end{array}\right.$$

Câu II.

a) Đặt $\text{tg}\frac{A}{2}=x$, $\text{tg}\frac{B}{2}=y$ $(x, y>0)$. Ta có hệ

$$\begin{cases} x+y=\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 9(xy)^2-6xy+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 3xy-1=0 \end{cases} (x, y>0) \Leftrightarrow x=y=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Leftrightarrow A = B = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

b) $$\frac{1}{\log_4(x^2+3x)} < \frac{1}{\log_2(3x-1)} \quad (1)$$

TXĐ : $D = \left(\frac{1}{3};+\infty\right) \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$

Vì $x > \frac{1}{3}$ nên $x^2 + 3x > 3x > 1$. Từ đó thấy vế trái của (1) dương, suy ra vế phải của (1) dương. Vậy ta có

$\log_2(3x-1) > 0 \Leftrightarrow 3x - 1 > 1 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \log_4(x^2 + 3x) > \log_2(3x - 1)$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x > (3x - 1)^2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < 1$.

Câu III.

a) $I = \int_{-1}^{1} \ln(\sqrt{x^2+a^2}+x)dx$

Đặt $x = -t \Rightarrow I = \int_{-1}^{1} \ln(\sqrt{t^2+a^2}-t)dt$

$$= \int_{-1}^{1} \ln\frac{a^2}{\sqrt{t^2+a^2}+t}dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \ln a^2 dt - \int_{-1}^{1} \ln(\sqrt{t^2+a^2}+t)dt = 2\ln a^2 - I$$

$\Rightarrow I = \ln a^2$.

b) Hàm số liên tục tại $x = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{2\sin x \sin 3x}{x} = b$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} 6x\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = b \Leftrightarrow b = 0$$

Khi đó : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{ax}{x} = a$

$\Rightarrow f'(0^+) = a$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2\sin x \sin 3x}{x^2}$$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} 6\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right) = 6$

Vậy hàm số có đạo hàm tại $x = 0 \Leftrightarrow a = 6$ và $b = 0$.

Câu IV. a) I (1; 1; 1).

Các đường thẳng d_1, d_2 có véctơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (1; 2; 2)$ và $\vec{u}_2 = (-1; -2; 2)$. Vì mp (Q) đi qua d_1, d_2 suy ra vectơ pháp tuyến của mp (Q) là $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (8; -4; 0)$. Vậy PT của mp (Q) là : $2x - y - 1 = 0$.

b) Dễ thấy $P \in$ mp(Q), giả sử có đường thẳng d_3 qua P cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A, B khác I thỏa mãn $AI = AB$.

Lấy A_1 (2; 3; 3) $\in d_1$, B_1 $(-t; -1-2t; 3+2t) \in d_2$. Chọn t sao cho $A_1I = A_1B_1$ với B_1 khác I : t là nghiệm PT : $9t^2 + 20t + 11 = 0 \Rightarrow t = -1$ hoặc $t = -11/9$. Với $t = -1$ có B_1 (1; 1; 1) trùng I, vậy $t = -11/9$. Cần có $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{A_1B_1}$ hay $\overrightarrow{A_1B_1}$ là vectơ chỉ phương của d_3. Suy ra PT của d_3 là : $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y+1}{14} = \dfrac{z-2}{-22}$ (2). Dễ thấy tọa độ I không thỏa mãn (2) nên PT(2) là PT đường thẳng cần tìm.

c) Điểm M $(0; a; b) \in (Q) \Leftrightarrow -a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$. Gọi M_1 là hình chiếu của M trên d_1

$\Rightarrow \begin{cases} M(1+t; 1+2t; 1+2t) \\ \overrightarrow{MM_1} \cdot \vec{u}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{2b-7}{9}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM_1} = \left(\dfrac{2b+2}{9}; \dfrac{4b+4}{9}; \dfrac{-5b-5}{9}\right)$

Tương tự gọi M_2 là hình chiếu của M trên d_2

$\Rightarrow \overrightarrow{MM_2} = \left(\dfrac{6-2b}{9}; \dfrac{12-4b}{9}; \dfrac{15-5b}{9}\right)$.

M nằm trong miền góc nhọn giữa d_1, d_2

$\Leftrightarrow \widehat{M_1MM_2} > 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{MM_2} < 0$

$\Leftrightarrow b^2 - 2b - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < b < 3$.

Câu V. $F = 5\text{cotg}^2A + 16\text{cotg}^2B + 27\text{cotg}^2C$

$= (3+2)\text{cotg}^2A + (12+4)\text{cotg}^2B + (9+18)\text{cotg}^2C$

$(3\text{cotg}^2A + 12\text{cotg}^2B) + (4\text{cotg}^2B + 9\text{cotg}^2C)$

$+ (18\text{cotg}^2C + 2\text{cotg}^2A) \geq$

$12(\text{cotg}A\text{cotg}B + \text{cotg}B\text{cotg}C + \text{cotg}C\text{cotg}A)$

$= 12$. Đẳng thức xảy ra khi $\text{cotg}A = 1$, $\text{cotg}B = 1/2$, $\text{cotg}C = 1/3$.

ĐỖ VĂN ĐỨC

(GV THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Trong chương trình toán THCS để giải phương trình (PT) bậc ba, bậc bốn người ta thường tìm cách giảm bậc PT dựa trên các phương pháp : tìm nghiệm nguyên, phân tích thành nhân tử, đặt ẩn phụ, ... (xem Toán học và Tuổi trẻ các số 304 tháng 10.2002, số 305 tháng 11.2002, số 315 tháng 9.2003). Mỗi phương pháp giải được một số dạng PT bậc ba, bậc bốn. Trong bài báo này xin giới thiệu một phương pháp nữa, dựa vào mối liên hệ đặc biệt giữa các nghiệm, từ đó xác định được hệ thức liên hệ giữa các hệ số của PT bậc ba, bậc bốn, rồi suy ra cách giải một số dạng nữa của PT bậc ba, bậc bốn. Để làm điều đó ta cần sử dụng định lí Vi–et về mối liên hệ giữa các nghiệm với các hệ số của PT. Ta chỉ hạn chế xét PT có hệ số bậc cao nhất bằng 1 vì nếu khác đi thì chỉ việc chia mọi hệ số cho hệ số bậc cao nhất đó.

Định lí Vi–et đối với phương trình bậc ba

Giả sử phương trình bậc ba

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thì có các hệ thức :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a & (2) \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b & (3) \\ x_1.x_2.x_3 = -c & (4) \end{cases}$$

Chứng minh: Vì x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của PT bậc ba (1) nên

$x^3 + ax^2 + bx + c = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Khai triển vế phải của đẳng thức này với chú ý rằng đẳng thức đúng với mọi giá trị của biến ta suy ra các hệ thức (2), (3), (4).

Bài toán 1. *Tìm hệ thức giữa các hệ số của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, biết rằng PT này có ba nghiệm mà một nghiệm bằng tổng hai nghiệm còn lại.*

ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ VI-ET ĐỂ XÉT NGHIỆM CỦA MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA, BẬC BỐN

LÊ NGỌC THÚY
(GV trường CĐSP Nghệ An)

Lời giải. Giả sử $x_1 + x_2 = x_3$. Thay thế vào (2) được $x_1 + x_2 = x_3 = -a/2$ (5). Từ (5) và (3) có $x_1x_2 = b - (a^2/4)$ (6). Từ (5), (6) và (4) suy ra hệ thức $\mathbf{a^3 - 4ab + 8c = 0}$ (7)

Vấn đề đảo lại là : nếu một PT bậc ba (1) thỏa mãn hệ thức (7) mà có ba nghiệm thì có xảy ra hệ thức (5) không ?

Bài toán 2. *Nếu phương trình*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

có các hệ số thỏa mãn hệ thức

$$a^3 - 4ab + 8c = 0 \qquad (7)$$

thì nó có ít nhất một nghiệm là $x = -a/2$.

Chứng minh : Từ (7) có $c = \frac{a}{2}\left(b - \frac{a^2}{4}\right)$

Biến đổi $x^3 + ax^2 + bx + c =$

$$= x^2\left(x+\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{2}x\left(x+\frac{a}{2}\right)+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)x+\frac{a}{2}\left(b-\frac{a^2}{4}\right)$$

$$= \left(x+\frac{a}{2}\right)\left(x^2+\frac{a}{2}x+b-\frac{a^2}{4}\right)$$

Như vậy nếu PT (1) thỏa mãn (7) thì có một nghiệm là $x_1 = -a/2$ và

- nếu $\Delta_1 = 5a^2 - 16b < 0$ thì PT (1) chỉ có 1 nghiệm thực kể trên,
- $\Delta_1 = 5a^2 - 16b > 0$ thì có thêm 2 nghiệm nữa
- $\Delta_1 = 5a^2 - 16b = 0$ thì có thêm 1 nghiệm kép.

Trong cả hai trường hợp sau kể trên thì $x_2 + x_3 = x_1 = -a/2$ thỏa mãn (5).

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$$

Lời giải. Chuyển PT trên về dạng

$$x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{36}x + \frac{1}{36} = 0$$

Hệ thức (7) $a^2 - 4ab + 8c = 0$ thỏa mãn nên hệ có ít nhất một nghiệm là $x_1 = -a/2 = 1/6$. Biến đổi vế trái PT trên như khi chứng minh bài toán 2 được

$$x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{36}x + \frac{1}{36} = \left(x - \frac{1}{6}\right)\left(x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}\right)$$

Giải tiếp PT bậc hai, ta tìm được 2 nghiệm nữa là $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{-1}{3}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = 0$$

Lời giải. Hệ thức (7) thỏa mãn nên hệ có ít nhất một nghiệm là $x_1 = -a/2 = -1$. Biến đổi vế trái PT trên thành

$$x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x^2 + x + 3)$$

Vì $x^2 + x + 3 > 0$ với mọi x nên PT ban đầu chỉ có 1 nghiệm thực.

Định lí Vi–et đối với phương trình bậc bốn

Giả sử phương trình bậc bốn

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (8)$$

có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thì có các hệ thức

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 & = -a \quad (9) \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 & = b \quad (10) \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4 & = -c \quad (11) \\ x_1x_2x_3x_4 & = d \quad (12) \end{cases}$$

Chứng minh. Vì x_1, x_2, x_3, x_4 là nghiệm của PT bậc bốn (8) nên

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

Khai triển vế phải của đẳng thức này với chú ý rằng đẳng thức đúng với mọi giá trị của biến x ta suy ra các hệ thức (9), (10), (11), (12).

Bài toán 3. *Tìm hệ thức giữa các hệ số của phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (8), biết rằng phương trình này có bốn nghiệm và tổng hai nghiệm bằng tổng hai nghiệm còn lại.*

Lời giải. Giả sử $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Từ đó và (9) suy ra $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -a/2$ (13)

Từ (10) có $x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1+x_2)(x_3+x_4) = b$.

Thay (13) vào đẳng thức này được

$$x_1x_2 + x_3x_4 = b - (a^2/4) \qquad (14)$$

Từ (13) và (11) có $x_1x_2 + x_3x_4 = 2c/a$ (15)

Từ (14) và (15) suy ra hệ thức

$$\mathbf{a^3 - 4ab + 8c = 0} \qquad (16)$$

Các bạn hãy so sánh hệ thức (7) của PT bậc ba và hệ thức (16) của PT bậc bốn !

Vấn đề đảo lại là : nếu một PT bậc bốn (8) thỏa mãn hệ thức (16) mà có bốn nghiệm thì có xảy ra hệ thức (13) không ?

Bài toán 4. *Nếu phương trình*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (8)$$

có các hệ số thỏa mãn hệ thức $a^3 - 4ab + 8c = 0$ *(16) thì khi đặt ẩn số phụ* $t = x + (a/4)$ *ta sẽ chuyển được việc giải PT (8) về giải PT trùng phương đối với ẩn t.*

Chứng minh. Thay $x = t - (a/4)$ vào vế trái của PT (8) rồi khai triển và rút gọn ta được PT

$$t^4 + \left(b - \frac{3a^2}{8}\right)t^2 + \left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right)t$$

$$+ \frac{a}{4}\left(\frac{ab}{4} - c - \frac{3a^3}{64}\right) + d = 0$$

Thay (16) vào PT này được PT trùng phương :

$$t^4 + \left(b - \frac{3a^2}{8}\right)t^2 + \frac{a^2}{8}\left(\frac{5a^2}{16} - b\right) + d = 0 \quad (17)$$

Tính biệt số $\Delta_2 = b^2 - \dfrac{a^2 b}{4} - \dfrac{a^4}{64} - 4d$

• Nếu $\Delta_2 < 0$ thì PT (17) vô nghiệm suy ra PT (8) vô nghiệm.

• Nếu $\Delta = 0$ thì PT (17) có nghiệm kép $t^2 = \dfrac{3a^2}{16} - \dfrac{b}{2}$

• Nếu $\Delta > 0$ thì PT (17) có hai nghiệm.

Từ đó suy ra nghiệm của PT (8).

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$$

Lời giải: Hệ thức (16) thỏa mãn nên ta đặt $t = x + (a/4) = x - 1$.

Thay $x = t + 1$ vào PT trên được PT trùng phương $t^4 - t^2 - 6 = 0$.

Giải PT này được $t^2 = 3$, còn $t^2 = -2$ bị loại.

Từ đó tìm được hai nghiệm của PT ban đầu là $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ và $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

Bài toán 5. *Tìm hệ thức giữa các hệ số của phương trình* $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ *(8), biết rằng PT (8) có bốn nghiệm mà tích hai nghiệm bằng tích hai nghiệm còn lại.*

Lời giải. Giả sử đặt $y = x_1x_2 = x_3x_4$. Từ (12) có $y^2 = d$ hay $(x_1x_2)^2 = (x_3x_4)^2 = d \qquad (18)$

Theo (11) và (9) có

$c^2 = [y(x_1 + x_2) + y(x_3 + x_4)]^2$

$= y^2(x_1 + x_2 + c_3 + x_4)^2 = y^2a^2 = da^2$

ta có hệ thức $\qquad c^2 = a^2.d \qquad (19)$

Vấn đề đảo lại là: nếu một PT bậc bốn thỏa mãn hệ thức (19) thì có xảy ra hệ thức (18) không?

Bài toán 6. *Nếu phương trình* $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ *(8) có các hệ số thỏa mãn hệ thức* $c^2 = a^2.d$ *(19) và*

a) nếu $d = 0$ *thì PT (8) có nghiệm* $x_1 = 0$, *ta chuyển được việc giải PT (8) về giải PT bậc hai* $x^2 + ax + b = 0$

b) nếu $d \neq 0$ *thì đặt ẩn phụ* $t = x + \dfrac{c}{ax}$, *ta chuyển được việc giải PT (8) về PT bậc hai đối với t.*

Lời giải. a) Giải dễ dàng.

b) Từ $d \neq 0$ thì nghiệm (nếu có) $x \neq 0$. Chia hai vế của PT (8) cho x^2 và sử dụng (19) được

$$x^2 + ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}$$

$$= x + \frac{c^2}{a^2x^2} + \frac{2cx}{ax} + a\left(x + \frac{c}{ax}\right) + b - \frac{2c}{a}$$

$$= \left(x + \frac{c}{ax}\right)^2 + a\left(x + \frac{c}{ax}\right) + b - \frac{2c}{a}.$$

Từ đó đặt ẩn phụ $t = x + \dfrac{c}{ax}$ ta chuyển về giải PT $\qquad t^2 + at + b - \dfrac{2c}{a} = 0$

Giải PT bậc hai này rồi suy ra nghiệm x của PT (8).

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$x^4 - x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0$$

Lời giải. Hệ thức (19) thỏa mãn.

Đặt $t = x + \dfrac{c}{ax}$ hay $t = x - \dfrac{2}{x}$. Biến đổi như lời giải bài toán 6 dẫn đến PT bậc hai $t^2 + t - 6 = 0$. PT này có nghiệm $t_1 = 2$, $t_2 = -3$.

Từ đó suy ra nghiệm của PT ban đầu là

$$x_1 = 1 + \sqrt{3}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{3},$$

$$x_3 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, \qquad x_4 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

Tương tự như thế các bạn bắt buộc các nghiệm của PT bậc ba hay PT bậc bốn có mối liên hệ nào đó khác thì sẽ tìm ra các hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của PT bậc ba hay PT bậc bốn, từ đó suy ra cách giải các PT dạng đặc biệt này.

(Xem tiếp trang 26)

Ba đặc điểm của SÁCH GIÁO KHOA TOÁN 9

TÔN THÂN
(*Chủ biên SGK Toán 9*)

Căn cứ vào Chương trình môn Toán THCS đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành năm 2002, sách giáo khoa Toán 9 đã được biên soạn với những đặc điểm sau:

1. Cấu trúc gọn gàng, hợp lý.

SGK Toán 9 gồm hai tập :

Tập 1. **Phần Đại số :** *Chương I.* Căn bậc hai. Căn bậc ba ; *Chương II.* Hàm số bậc nhất. **Phần Hình học:** *Chương I.* Hệ thức lượng trong tam giác vuông ; *Chương II.* Đường tròn.

TẬP 2. **Phần Đại số :** *Chương III.* Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn ; *Chương IV.* Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. Phương trình bậc hai một ẩn số. **Phần Hình học :** *Chương III.* Góc với đường tròn ; *Chương IV.* Hình trụ. Hình nón. Hình cầu.

Mỗi chương được chia thành nhiều mục (§). Mỗi mục được dạy từ một đến hai tiết. Trong mỗi mục có một số tiểu mục. Các kiến thức cơ bản cần ghi nhớ được đóng khung. Sau mỗi tiết lí thuyết có từ 3 đến 5 bài tập để học sinh luyện tập vận dụng kiến thức và rèn luyện kĩ năng. Cuối mỗi chương có phần ôn tập chương bao gồm một số câu hỏi ôn tập lí thuyết, một số bảng tóm tắt các kiến thức cần nhớ và các bài tập ôn.

2. Giúp học sinh tự học, tự tìm tòi phát hiện kiến thức.

Sách Toán 9 được viết bám sát vào chương trình THCS môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo, đảm bảo đầy đủ nội dung kiến thức cũng như mức độ, yêu cầu quy định trong chương trình.

Các tác giả Toán 9 tiếp tục bảo đảm sự nhất quán trong cách trình bày và hình thức thể hiện của bộ sách Toán THCS từ lớp 6. Tuy nhiên, yêu cầu về tính chặt chẽ, chính xác, yêu cầu về suy luận tăng lên rõ rệt so với các lớp 6, 7. Sách Toán 9 tạo điều kiện để giáo viên đổi mới phương pháp dạy học theo hướng tích cực hoá hoạt động học tập của HS, tạo điều kiện để HS tự học, tự tìm tòi phát hiện kiến thức mới.

Chẳng hạn khi học bài ***"§4. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông"***, học sinh được thực hiện hoạt động sau :

$\boxed{?1}$ *Viết các tỉ số lượng giác của góc B và góc C. (Xem hình 25 SGK). Từ đó hãy tính mỗi cạnh góc vuông qua :*

a) Cạnh huyền và các tỉ số lượng giác của góc B và góc C ;

b) Cạnh góc vuông còn lại và các tỉ số lượng giác của góc B và góc C.

Thực hiện xong hoạt động này, học sinh tự phát hiện được các hệ thức tính mỗi cạnh góc vuông trong một tam giác vuông.

Vì khả năng tự học của học sinh lớp 9 đã được nâng lên nhiều so với các lớp dưới nên trong Toán 9 có nhiều **"Bài đọc thêm"** và mục **"Có thể em chưa biết"** giúp học sinh mở rộng và hiểu sâu thêm nội dung bài học. Ví dụ ở Chương I (Đại số) có giới thiệu về sự phát triển của các công cụ tính toán ; có bài đọc thêm *"Tìm căn bậc ba nhờ bảng số và máy tính bỏ túi"* ; Chương II (Hình học) có bài giới thiệu *"Vẽ chắp nối trơn"* cho thấy ứng dụng của vẽ chắp nối trơn trong kĩ thuật ; Chương III (Đại số) có bài đọc thêm *"Vài cách vẽ parabol"*, *"Giải phương trình bậc hai bằng máy tính bỏ túi"* v.v... Qua mục **"Có thể em chưa biết"**, học sinh được hiểu biết thêm về tiểu sử của một số nhà bác học có các công trình được giới thiệu trong sách như : G. Ga-li-lê, F. Vi-ét, ...

3. Hệ thống bài tập đa dạng có nội dung gắn với thực tế.

Hệ thống câu hỏi và bài tập phong phú, đa dạng, vừa giúp HS củng cố, khắc sâu kiến thức, phát hiện vấn đề, rèn luyện kĩ năng tính toán, suy luận, vừa giúp tập dượt vận dụng kiến thức toán học vào đời sống và vào các môn học khác.

(Xem tiếp trang 25)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

Câu chuyện về niềm vui khám phá

LƯU XUÂN TÌNH
(GV trường THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

Tìm được lời giải một bài toán (đặc biệt là một bài toán khó) thật là tuyệt vời, tuy nhiên đôi khi chỉ dừng lại ở đó thì niềm vui chưa trọn vẹn. Còn biết bao điều ẩn dấu trong bài toán nếu ta biết khai thác, tìm tòi, khái quát hóa, tương tự hóa... Khi đó sẽ tìm ra nhiều điều mới lạ và niềm vui khám phá càng trọn vẹn hơn.

Tình cờ tôi đọc trong một tạp chí có giới thiệu bài toán của tác giả Paul Erdos (nhưng không đưa ra lời giải) :

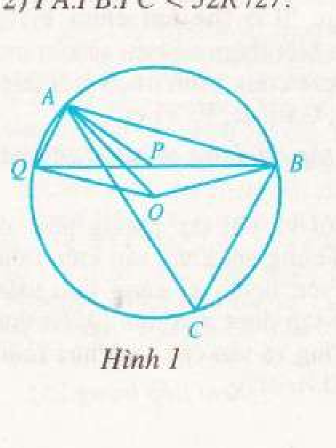
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R, lấy điểm P trong tam giác đó, chứng minh rằng $PA.PB.PC < 32R^3/27$.

Tất nhiên, như mọi bạn trẻ yêu toán tôi đi tìm cách chứng minh..., Và xin được bắt đầu câu chuyện bằng cách đưa thêm một mệnh đề phụ.

Bài toán 1: *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và điểm P bất kì nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng*

1) $PA.PB < R^2 - OP^2$ *với P nằm trong* ΔABO

2) $PA.PB.PC < 32R^3/27$.



Hình 1

Chứng minh (h. 1) Kéo dài BP đến cắt đường tròn tại điểm thứ hai Q (với P khác O, A và có thể P thuộc OA), ta có $\widehat{PAQ} \geq \widehat{OAQ} = \widehat{OQA} > \widehat{PQA}$, nên trong ΔAPQ có $PQ > PA$, suy ra $PQ.PB > PA.PB$, mặt khác $PQ.PB = R^2 - OP^2$.

Vậy $PA.PB < R^2 - OP^2$. Câu (1) được chứng minh xong.

Chú ý rằng nếu P trùng với O thì $PA.PB = R^2$ và $PA.PB.PC = R^3 < 32R^3/27$.

Nhưng bài toán cần giải quyết lại có biểu thức $PA.PB.PC$. Bây giờ xét thêm điểm C, nhưng yêu cầu điểm P (khác O) thuộc một trong các tam giác OAB, OBC, OCA. Giả sử điểm P thuộc ΔOAB thì từ kết quả câu (1), ta có

$$PA.PB.PC < (R^2 - OP^2).PC \leq$$
$$(R^2 - OP^2)(OP+OC) = (R^2 - OP^2)(OP+R) \quad (1)$$

Mặt khác sử dụng BĐT Cô-si có :

$$(2R-2OP)(R+OP)^2 =$$
$$(2R-2OP)(R+OP)(R+OP) \leq$$
$$\left(\frac{2R-2OP+2R+2OP}{3}\right)^3 = \frac{64R^3}{27}$$

Do đó $(R^2-OP)^2(R+OP) \leq \dfrac{32R^3}{27}$ (2)

Từ (1) và (2) có $PA.PB.PC < \dfrac{32R^3}{27}$.

Bài toán được chứng minh.

Nếu dừng ở đây ta đã có một niềm vui nho nhỏ là giải được bài toán trên (điều đó cũng đáng tự hào lắm chứ !). Nhưng chắc các bạn cũng như tôi sẽ không dừng lại ở đó và suy nghĩ: Nếu khái quát bài toán trên từ tam giác thành đa giác thì sẽ như thế nào? Dưới đây là câu trả lời.

Bài toán 2. *Cho đa giác lồi* $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$ *nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R và điểm P bất kì nằm trong đa giác đó. Chứng minh rằng*

$$\prod_{i=1}^{n} PA_i < \left(\frac{2}{n}\right)^n (n-1)^{n-1} R^n \quad (*)$$

Chứng minh : Dễ thấy nếu P trùng với tâm O thì bất đẳng thức (*) trở thành $\left(\dfrac{2}{n}\right)^n (n-1)^{n-1} > 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2n-2}{n}\right)^n > n-1 \quad (3)$$

Với $n = 3$ thì (3) đúng

Với $n \geq 4$ thì dễ chứng minh được $\left(\dfrac{2n-2}{n}\right)^n \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^n > n-1$ nên (3) đúng.

Giả sử P khác điểm O. Do điểm P nằm trong đa giác nên tồn tại chỉ số k sao cho điểm P thuộc miền tam giác A_kOA_{k+1}, không mất tính tổng quát giả sử $k = 1$. Áp dụng bài toán 1, ta có $PA_1.PA_2 < R^2 - x^2$, với $x = OP$. Mặt khác $PA_i < PO + OA_i = x+R$ $(i = 3, 4, ..., n)$ nên :

$$\prod_{i=1}^{n} PA_i < (R^2-x^2)(R+x)^{n-2} = (R-x)(R+x)^{n-1}$$

Sử dụng BĐT Cô-si ta có :

$$(R-x)(R+x)^{n-1} = (n-1)^{n-1}(R-x)\left(\frac{R+x}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\le (n-1)^{n-1}\left(\frac{R-x+R+x}{n}\right)^{n} = (n-1)^{n-1}\left(\frac{2}{n}\right)^{n} R^{n}.$$

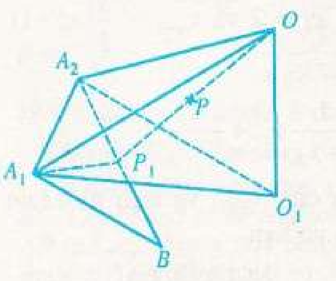
Vậy $\prod_{i=1}^{\pi} PA_i < \left(\frac{2}{n}\right)^{n}(n-1)^{n-1}R^{n}$.

Bài toán 2 đã được chứng minh xong.

Một ý nghĩ táo bạo là liệu mở rộng ra không gian thì sao ? Hoàn toàn tương tự ta cũng có bài toán trong không gian như sau :

Bài toán 3. *Cho khối đa diện lồi $A_1A_2...A_n$ $(n \ge 4)$ nội tiếp trong mặt cầu tâm O bán kính R và một điểm P nằm trong khối đa diện đó. Chứng minh rằng :*

$$\prod_{i=1}^{n} PA_i < 4\left(\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}(n-2)^{n-2}R^{n} \qquad (**)$$



Hình 2

Chứng minh (h.2) : Nếu P trùng với tâm O, chứng minh tương tự bài toán 2 thì BĐT (**) đúng. Giả sử P khác điểm O, chia khối đa diện thành các hình chóp đỉnh O, đáy là các mặt của khối đa diện đã cho. Vì điểm P nằm trong khối đa diện, nên P phải thuộc một trong các hình chóp đã được chia.

Giả sử P nằm trong hình chóp $OA_1A_2...A_k$. Do khối đa diện nội tiếp mặt cầu, nên đa giác $A_1A_2...A_k$ nội tiếp trong đường tròn $(O_1 ; R_1)$. Ta có $OO_1 \perp$ mp$(A_1A_2...A_k)$. Gọi P_1 là giao điểm của đường thẳng OP với mp$(A_1A_2...A_k)$. Vì điểm P nằm trong hình chóp $OA_1A_2...A_k$ nên điểm P_1 thuộc đa giác $A_1A_2...A_k$. Suy ra tồn tại chỉ số i sao cho điểm P_1 thuộc $\Delta O_1A_iA_{i+1}$, không mất tính tổng quát giả sử P_1 nằm trong $\Delta O_1A_1A_2$.

Đặt $OP = x$, $O_1P_1 = x_1$, ta có :

$$R^2 - R_1^2 = A_1O^2 - A_1O_1^2 = OO_1^2 = OP_1^2 - O_1P_1^2$$
$$\ge OP^2 - O_1P_1^2.$$

Vậy $R^2 - x^2 \ge R_1^2 - x_1^2$ (4)

Lại có

$A_1P \le A_1P_1 + P_1P = A_1P_1 + OP_1 - OP <$
$< A_1P_1 + R - x$, tương tự $A_2P < A_2P_1 + R - x$.

Từ đó suy ra

$A_1P.A_2P < (A_1P_1+R-x)(A_2P_1+R-x)$
$= A_1P_1.A_2P_1 + (R-x)(A_1P_1+A_2P_1) + (R-x)^2$ (5)

Do điểm P_1 nằm trong $\Delta O_1A_1A_2$ nên $\widehat{A_1P_1A_2} \ge \widehat{A_1O_1A_2}$. Lấy điểm B trên tia đối của tia P_1A_2 sao cho $A_1P_1 = P_1B$, khi đó ΔP_1A_1B cân tại P_1, suy ra $\widehat{A_1BA_2} = \frac{1}{2}.\ \widehat{A_1P_1A_2} \ge \frac{1}{2}\widehat{A_1O_1A_2}$. Điều này chứng tỏ rằng điểm B nằm trong đường tròn (O_1), nên $A_2B \le 2R_1$. Hơn nữa, ta có

$$A_1P_1 + P_1A_2 = A_2B \le 2R_1 < 2R \qquad (6)$$

và sử dụng bài toán 1 thì

$$A_1P_1.P_1A_2 < R_1^2 - x_1^2 \le R^2 - x^2 \qquad (7)$$

Thay (4), (6), (7) vào (5) ta được : $PA_1.PA_2 < (R^2-x^2) + (R-x)2R + (R-x)^2 = 4R(R-x)$.

Ta có $PA_i < OA_i + OP = R + x$ với mọi $i \ge 3$.

Suy ra $\prod_{i=1}^{n} PA_i < (R+x)^{n-2}4R(R-x)$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho $(n-1)$ số trong đó $(n-2)$ số $\frac{R+x}{n-2}$ và số $R-x$, ta được :

$$(R-x)\left(\frac{R+x}{n-2}\right)^{n-2} \le \left(\frac{2R}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Vậy $\prod_{i=1}^{n} PA_i < 4\left(\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}(n-2)^{n-2}R^{n}$.

Bài toán 3 được chứng minh.

Cuối cùng để kết thúc bài viết, còn một điều băn khoăn là các BĐT trên đánh giá còn chưa thật chặt, mong các bạn đã đọc bài viết này tiếp tục đánh giá cho tốt hơn.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/335. (Lớp 6). Tìm tỉ số của A và B, biết rằng

$$A = \frac{1}{1.1981} + \frac{1}{2.1982} + \dots + \frac{1}{n(1980+n)} + \dots + \frac{1}{25.2005}$$

$$B = \frac{1}{1.26} + \frac{1}{2.27} + \dots + \frac{1}{m(25+m)} + \dots + \frac{1}{1980.2005}$$

trong đó A có 25 số hạng và B có 1980 số hạng.

NGUYỄN ANH THUẤN
(GV THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T2/335. (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông cân với đáy BC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Kẻ $NH \perp CM$ tại H. Kẻ $HE \perp AB$ tại E. Chứng minh rằng tam giác ABH cân và HM là phân giác của góc BHE.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T3/335. Giải phương trình nghiệm nguyên : $2(x^2 - y^2)^2 = x^2 + y^2 + 2z^2$.

PHẠM HOÀNG HÀ
(GV THPT chuyên ngữ ĐHNN Hà Nội)

Bài T4/335. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=\dfrac{x+y}{y+z}+\dfrac{y+z}{x+y}+1 \end{cases}$$

trong đó x, y, z là các số dương.

TRỊNH XUÂN TÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B – Hà Tây)

Bài T5/335. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(3+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(3+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

trong đó các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện : $a+b+c \le \dfrac{3}{2}$.

TRẦN HỒNG SƠN
(GV THPT BC Thái Thụy, Thái Bình)

Bài T6/335. Cho hình bình hành $ABCD$ có góc BAD tù. Trong miền góc BAD, dựng tam giác ADE vuông cân với đáy AE, tam giác ABF vuông cân với đáy AF. Gọi M là trung điểm của EF. Đoạn MB cắt CF tại K, đoạn MD cắt CE tại H. Chứng minh rằng HK song song với BD.

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lương Thế Vinh, TP Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T7/335. Cho tam giác cân ABC với $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Gọi D là giao điểm của đường thẳng BC với tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng qua D và qua tâm O của đường tròn lần lượt cắt AB và AC tại E và F. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và AC. Chứng minh rằng các đường thẳng AO, MF, NE đồng quy.

TRẦN VĂN XUÂN
(GV CĐSP Bạc Liêu)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/335. Xét đa thức

$$T(x) = x^3 + 17x^2 - 1239x + 2001.$$

Đặt $T_1(x) = T(x)$ và $T_{n+1}(x) = T(T_n(x))$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$ Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên $n > 1$ sao cho $T_n(x) - x$ chia hết cho 2003 với mọi số nguyên x.

LÊ QUANG NẪM
(Khoa Toán – Tin, ĐHKHTN TP Hồ Chí Minh)

Bài T9/335. Xét dãy số (x_n) $(n = 1, 2, 3, \dots)$ được xác định bởi : $x_1 = 2$ và $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n^2 + 1)$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

Đặt $S_n = \dfrac{1}{1+x_1} + \dfrac{1}{1+x_2} + \dots + \dfrac{1}{1+x_n}$

Tính phần nguyên của S_{2005} và tính giới hạn của S_n khi n tăng lên vô hạn.

NGUYỄN LÁI
(GV THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Bài T10/335. Xét dãy số (a_n) $(n = 1, 2, 3, \dots)$ được xác định bởi: $a_1 = \dfrac{1}{2}$ và $a_{n+1} = \left(\dfrac{1-\left(1-a_n^2\right)^{1/2}}{2}\right)^{1/2}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng $a_1 + a_2 + \dots + a_{2005} < 1{,}03$

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Phan Thúc Trực, Yên Thành, Nghệ An)

Bài T11/335. Chứng minh rằng đối với tam giác ABC bất kì ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C \le$$
$$\le 1 + \frac{1}{6}\left(\cos^2\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{C-A}{2}\right)$$

VŨ TIẾN VIỆT

(GV Toán Tin, ĐH An Ninh Hà Nội)

Bài T12/335. Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và diện tích bằng S. Giả sử các điểm M, N, P theo thứ tự nằm trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng

$$ab.MN^2 + bc.NP^2 + ca.PM^2 \ge 4S^2$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

PHAN ĐỨC TUẤN

(Cao học 10, ĐH Vinh, Nghệ An)

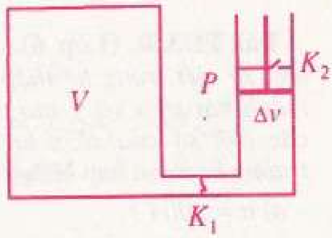
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/235. Một cái bục bắt đầu chuyển động trên mặt phẳng ngang bởi một lực kéo $\vec{F}$ có phương nằm ngang và có độ lớn không đổi. Nhờ một cái phễu cố định, cát chảy vào bục theo phương thẳng đứng với tốc độ không đổi μ(kg/s). Xác định vận tốc và gia tốc của bục theo thời gian t. Biết rằng ở thời điểm đầu $t = 0$ khối lượng của bục là m_0 và vận tốc của bục là $v_0 = 0$. Bỏ qua mọi ma sát.

NGUYỄN XUÂN QUANG

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/335. Một bơm không khí có pittông P được dùng để hút không khí trong một bình thể tích V với hai van K_1 và K_2 (hình vẽ). Cứ sau một nhát bơm (một lần kéo P lên và đẩy P xuống) sẽ hút được một thể tích là Δv (thể tích của ống bơm). Hỏi sau bao nhiêu nhát bơm thì áp suất khí trong bình giảm đi n lần. Coi quá trình là đẳng nhiệt, khí là khí lí tưởng.



NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/335. (for 6th grade)

Find the ratio of A and B, where

$$A = \frac{1}{1.1981} + \frac{1}{2.1982} + \dots + \frac{1}{n(1980+n)} + \dots + \frac{1}{25.2005}$$

$$B = \frac{1}{1.26} + \frac{1}{2.27} + \dots + \frac{1}{m(25+m)} + \dots + \frac{1}{1980.2005}$$

(A consists of 25 terms, B consists of 1980 terms)

T2/335. (for 7th grade)

Let ABC be an isosceles, right triangle with base BC. Let M and N be respectively the midpoints of AB and AC. Draw NH perpendicular to CM at H, draw HE perpendicular to AB at E. Prove that the triangle ABH is isosceles and the line HM is the bisector of angle BHE.

T3/335. Find integral solutions of the equation $2(x^2 - y^2)^2 = x^2 + y^2 + 2z^2$.

T4/335. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = \dfrac{x+y}{y+z} + \dfrac{y+z}{x+y} + 1 \end{cases}$$

where x, y, z are positive numbers.

T5/335. Find the least value of the expression

$$P = \left(3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(3 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(3 + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$$

where the positive numbers a, b, c satisfy the condition $a + b + c \le \dfrac{3}{2}$.

T6/335. Let $ABCD$ be a parallelogram with obtuse angle BAD. In the interior of angle BAD, construct the isosceles right triangle ADE with base AE and the isosceles right triangle ABF with base AF. Let M be the midpoint of EF. The segment MB cuts CF at K, the segment MD cuts CE at H. Prove that HK is parallel to BD.

T7/335. Let ABC be an isosceles triangle with $\widehat{ABC} = 120^\circ$ and let D be the point of intersection of the line BC with the tangent at A of the circumcircle of triangle ABC. The line passing through D and the circumcenter O cuts the lines AB and AC respectively at E and F. Let M and N be respectively the midpoints of AB and AC. Prove that the lines AO, MF, NE are concurrent.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/335. Consider the polynomial

$$T(x) = x^3 + 17x^2 - 1239x + 2001.$$

(Xem tiếp trang 25)

Bài T1/330. (Lớp 6). *Hỏi có thể phân tích một số viết trong hệ thập phân bởi n chữ số 9 thành hai số x và y sao cho khi thay đổi vị trí các chữ số của số x ta được số y trong mỗi trường hợp sau hay không :*

a) n = 2004 ?

b) n = 2005 ?

Lời giải. Theo giả thiết ta có $x + y = \overline{99...9}$, trong đó ở vế phải của đẳng thức có n chữ số 9 (1)

a) Với $n = 2004$ có thể phân tích được bằng nhiều cách chẳng hạn :

$\overline{9...99...9} = \overline{3...36...6} + \overline{6...63...3}$

trong đó $x = \overline{3...36...6}$ và $y = \overline{6...63...3}$ đều có 1002 chữ số 3 và 1002 chữ số 6.

Tổng quát với n chẵn thì phân tích được.

b) Với $n = 2005$ là số lẻ. Đặt $x = \overline{a_n a_{n-1} a_1}$ và $y = \overline{b_n b_{n-1} ... b_1}$ trong đó $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ là các chữ số nào đó trong tập hợp $\{0, 1, ..., 9\}$.

Vì $a_1 + b_1 \le 9 + 9 = 18$ nên từ (1) có $a_1 + b_1 = 9$. Lập luận tương tự đối với n lần lượt bằng 2, 3, ..., n ta có $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = ... = a_n + b_n = 9$. Tổng các chữ số của x và y là $S = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n) = 9n$ là một số lẻ (2). Mặt khác theo giả thiết các chữ số của x khi thay đổi thì được các chữ số của y nên $a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$, do đó $S = 2(a_1 + a_2 + ... + a_n)$ là một số chẵn, mâu thuẫn với (2). Vậy không phân tích được số $\overline{9...9}$ gồm một số lẻ chữ số 9 theo yêu cầu của đề bài.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn gửi lời giải đã lập luận không chặt chẽ. Một số bạn không chỉ ra sự phân tích cụ thể khi $n = 2004$.

2) Các bạn sau có lời giải đúng :

Vĩnh Phúc : *Nguyễn Thị Ngọc, Phùng Ngọc Quý, Lê Thị Tuyết Mai, Nguyễn Thị Giang A*, 6A1, THCS Yên Lạc, *Phan Thế Tuấn*, 6A, THCS Vĩnh Tường ; **Hà Nội :** *Vũ Minh Đức*, 6H1, THCS Trưng Vương, Q. Hoàn Kiếm; **Hải Dương :** *Mạc Đức Huy*, 6A, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn ; **Nghệ An :** *Phạm Thế Hoàng, Vũ Đình Long*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Đậu Thế Vũ*, 6B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

VIỆT HẢI

Bài T2/331. (Lớp 7). *Chứng minh rằng*

$$\sqrt{(ab-cd)(bc-da)(ca-bd)}$$

là số hữu tỉ, trong đó a, b, c, d là các số hữu tỉ thỏa mãn điều kiện a+b+c+d = 0.

Lời giải. Vì $a+b+c+d = 0$ nên $a+b+c = -d$, do đó $bc - ad = bc + a(a+b+c) = bc + a(a+b) + ac = (a+b)(a+c)$.

Tương tự, $ca - bd = (b+c)(b+a)$

$ab-cd = (c+a)(c+b)$.

Từ đó $(ab-cd)(bc-ad)(ca-bd)$

$= [(a+b)(b+c)(c+a)]^2$

Vì a, b, c là các số hữu tỉ nên $(a+b)(b+c)(c+a)$ là số hữu tỉ và $[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$ là số không âm nên $\sqrt{(ab-cd)(bc-ad)(ca-bd)}$

$= |(a+b)(b+c)(c+a)|$

Vậy $\sqrt{(ab-cd)(bc-ad)(ca-bd)}$ là số hữu tỉ.

Nhận xét. 1. Bài này tương đối dễ có khá đông bạn tham gia giải với nhiều cách biến đổi khác nhau nhưng đều dẫn đến cùng một kết quả.

Một số bạn thiếu dấu giá trị tuyệt đối ở kết quả sau cùng.

2. Các bạn sau đây có lời giải chính xác, ngắn gọn :

Vĩnh Phúc : *Trần Thị Thủy*, 7A, THCS Đồng Ích, Lập Thạch ; **Hải Dương :** *Nguyễn Văn Tuân*, 7/1, THCS Hợp Tiến, Nam Sách ; **Thái Bình :** *Hà Thành Trung*, 7D, THCS thị trấn Đông Hưng, H. Đông Hưng ; **Thanh Hóa:** *Lê Trọng Cường*, 7B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn ; **Nghệ An :** *Lê Đình Quân, Nguyễn Cảnh Thông, Hoàng Thị Lệ Quyên, Nguyễn Mạnh Tuấn, Đào Trần Mỹ Hạnh*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Hà Tĩnh :** *Nguyễn Trung Thành*, 7D, THCS thị trấn Kỳ Anh, h. Kỳ Anh ; **Quảng Bình :** *Nguyễn Phương Thảo*, 7D, THCS Hoàn Lão, Bố Trạch ; **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Trần Mỹ Hoa*, 7G, THCS Nghĩa Hà, Tư Nghĩa ; **Quảng Trị:** *Trần Văn Thành*, 7A, THCS Cam Hiếu, Cam Lộ.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/331. *Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình*

$$x^2 + 2003x + 2004y^2 + y = xy + 2004xy^2 + 2005$$

Lời giải. Phương trình có thể biến đổi như sau:

$(x^2 + 2003x - 2004) + (2004y^2 - 2004xy^2) + (y - xy) = 1 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x+2004) - 2004y^2(x-1) - y(x-1) = 1$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2004-2004y^2-y)=1$

Vì x, y nguyên nên hai thừa số trong vế trái của PT đều là ước của 1.

Xảy ra hai trường hợp sau:

TH1. $\begin{cases} x-1=1 & (1) \\ x+2004-2004y^2-y-1=1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) có $x=2$. Thay vào (2) được

$2004y^2+y-2005=0$

Giải PT này được $y_1=1$, $y_2=-\dfrac{2005}{2004}$.

Loại giá trị không nguyên y_2 ta được nghiệm nguyên $x=2$, $y=1$.

TH2. $\begin{cases} x-1=-1 & (3) \\ x+2004-2004y^2-y-1=1 & (4) \end{cases}$

Từ (3) có $x=0$. Thay vào (4), ta được

$$2004y^2+y-2005=0$$

Giải PT này được nghiệm nguyên $x=0$, $y=1$.

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên (x, y) là $(2, 1)$ và $(0, 1)$.

Nhận xét. 1. Có gần 400 bạn tham gia giải bài toán này và hầu hết có lời giải đúng. Số đông các bạn giải theo cách trên.

2. Sau đây là các bạn có lời giải tốt :

Nghệ An: *Vũ Thanh Thủy*, 8A, *Trần Thị Vân*, *Vũ Thanh Thủy*, 8A, *Nguyễn Mạnh Tuấn*, *Nguyễn Thị Tố Uyên*, *Lê Thị Thanh Huyền*, *Nguyễn Anh Tú*, *Tăng Văn Bình*, *Hoàng Thị Lệ Quyên*, *Nguyễn Thị Phương Thúy*, *Lê Thị Thu Trang*, 7B, *Thái Thị Mai Anh*, *Nguyễn Thị Thanh Xuân*, *Lê Thị Bé*, 7C, *Nguyễn Văn Tuấn*, 7A,... THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Hà Nam:** *Nguyễn Minh Phúc*, 7C, THCS Lương Khánh, Phủ Lý ; **Thái Bình:** *Hà Thành Trung*, 7D, THCS TT Đông Hưng, Đông Hưng ; **Yên Bái:** *Nguyễn Duy Cương*, 8A, THCS Tô Hiệu, TX Nghĩa Lộ ; **Hà Tây:** *Trần Ngọc Thúy*, 8B, THCS *Nguyễn Thượng Hiền*, Ứng Hòa ; **Hải Dương:** *Đỗ Tùng Anh*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Bắc Ninh:** *Lê Thế Tài*, 9B, THCS huyện Từ Sơn ; **Hải Phòng:** *Đỗ Đức Toàn*, 8B1, THCS Trần Phú, Lê Chân ; **Phú Thọ:** *Phạm Mai Phương*, 6B, THCS Phong Châu, TX Phú Thọ ; **Hà Nội:** *Nguyễn Thị Lương*, 6E, THCS Mai Lâm, Đông Anh ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Hồng Nhung*, *Đinh Thế Tiến*, *Lê Thị Thảo Lê Mai Phương*, 8B, ...THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa ; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Trinh*, 7C, THCS Tự Lập, Mê Linh ; **Đăk Lắc:** *Võ Văn Tuấn*, 8A, THCS Nguyễn Du, KRông Buk ; **Bắc Giang:** *Nguyễn Thị Hà*, 8B, THCS TT Neo, Yên Dũng.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/331. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a} \le \frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c} \quad (1)$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện abc = 1.

Lời giải. *Cách 1.* Đặt $x=a+b+c$, $y=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ $=ab+bc+ca$. Áp dụng BĐT Cô–si cho 3 số dương, ta dễ dàng suy ra $x \ge 3$, $y \ge 3$.

Khi đó (1) trở thành :

$$\frac{3+4x+y+x^2}{2x+y+x^2+xy} \le \frac{12+4x+y}{9+4x+2y}$$

$\Leftrightarrow 3x^2y+xy^2+6xy-5x^2-y^2-24x-3y-27 \ge 0.$

$$\Leftrightarrow 5x^2\left(\frac{y}{3}-1\right)+y^2\left(\frac{x}{3}-1\right)+3y\left(\frac{xy}{9}-1\right)$$

$$+\,12x\left(\frac{xy}{9}-1\right)+3x\left(\frac{y^2}{9}-1\right)+3x(y-3)+3(xy-9)\ge 0$$

Do $x \ge 3$, $y \ge 3$ nên bất đẳng thức cuối luôn đúng. Vậy (1) đúng

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=3 \Leftrightarrow a=b=c=1$.

Cách 2. Do vai trò của a, b, c trong (1) là bình đẳng nên ta có thể giả thiết $0<a\le b\le c$.

Khi đó : $0<1+a+b\le 1+a+c\le$ $\le 1+b+c$ và $0<2+a\le 2+b\le 2+c$.

Kí hiệu vế trái của (1) là A, vế phải của (1) là B. Ta có :

$$B-A=\frac{b-1}{(2+a)(1+a+b)}+\frac{c-1}{(2+b)(1+b+c)}+\frac{a-1}{(2+c)(1+c+a)}\ge$$

$$\frac{b-1}{(2+c)(1+b+c)}+\frac{c-1}{(2+c)(1+b+c)}+\frac{a-1}{(2+c)(1+b+c)}$$

$$=\frac{a+b+c-3}{(2+c)(1+b+c)}\ge\frac{3\sqrt[3]{abc}-3}{(2+c)(1+b+c)}=0.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Nhận xét. 1) Không ít bạn đã mắc sai lầm khi khẳng định : do a, b, c dương và $abc=1$ nên $0<a, b, c\le 1$. Từ đó đã dẫn đến những đánh giá không đúng.

2) Phần đông các bạn đều giải theo cách 1, tuy nhiên một số bạn làm theo cách 2(và một số cách khác) lại đưa ra được những bài toán mở rộng của bài toán đã cho. Hoan nghênh bạn *Phạm Mai Phương*, 6B, THCS Phong Châu, **Phú Thọ** đã đưa ra và chứng minh chính xác bài toán tổng quát của bài toán đã cho là :

"Chứng minh rằng với mọi $n \in N$, $n \geq 2$ thì

$$\frac{1}{S-a_1+k}+\ldots+\frac{1}{S-a_{n-1}+k}+\frac{1}{S-a_n+k} \leq$$

$$\frac{1}{a_1+n-2+k}+\frac{1}{a_2+n-2+k}+\ldots+\frac{1}{a_n+n-2+k}$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1a_2 \ldots a_n = 1$; k là số thực dương và $S = a_1+a_2+\ldots+a_n$"

3) Các bạn có lời giải tốt là : **Phú Thọ :** *Phạm Mai Phương*, 6B, THCS Phong Châu, TX Phú Thọ ; **Hải Dương :** *Nguyễn Hồng Quảng Bốn*, 9D, THCS Minh Tân, Kinh Môn ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Thái*, 9A, THCS huyện Thuận Thành ; **Hà Nam :** *Nguyễn Minh Phúc*, 7C, THCS Lương Khánh Thiện, Phủ Lý, *Trương Thị Bình*, 12A8, THPT Phủ Lý A, Phủ Lý ; **Hà Tĩnh :** *Dương Khánh Lâm*, 11A1, THPT Nguyễn Trung Thiên, Thạch Hà ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Lưu Bách*, 9C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/331. *Xét các số dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn các điều kiện a+b+c = 4 và ax +by + cz = xyz. Chứng minh rằng x+y+z > 4.*

Lời giải. Từ giả thiết ta suy ra

$$\frac{a}{yz}+\frac{b}{zx}+\frac{c}{xy}=1$$

Vì x, y, z dương nên $(x+y+z)^2 > (y+z)^2 \geq 4yz$.

Suy ra $\dfrac{a}{yz} > \dfrac{4a}{(x+y+z)^2}$

Tương tự $\dfrac{b}{zx} > \dfrac{4b}{(x+y+z)^2}$, $\dfrac{c}{xy} > \dfrac{4c}{(x+y+z)^2}$

Cộng theo từng vế của ba bất đẳng thức cùng chiều ta được :

$$1=\frac{a}{yz}+\frac{b}{zx}+\frac{c}{xy}>\frac{4(a+b+c)}{(x+y+z)^2}=\frac{16}{(x+y+z)^2}$$

Suy ra $(x+y+z)^2 > 16$ hay $x+y+z > 4$.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đã áp dụng bất đẳng thức Cô-si, Trê-bư-sép, Bu-nhia-cốp-xki để giải bài toán này. Một số đã sử dụng giả thiết thứ hai để dẫn tới bất đẳng thức đẹp $x+y+z > \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$, từ đó suy ra kết quả. Đặc biệt, có thể chọn $x = \min\{x, y, z\}$ để đưa ra một phép chứng minh đơn giản và ngắn gọn, tuy nhiên cần chú ý rằng vai trò x, y, z không hoàn toàn như nhau, đó đó cần xét các trường hợp để lập luận cho chặt chẽ. Hoan nghênh các bạn ở lớp 6E, THCS Mai Lâm, Đông Anh, **Hà Nội** nhiệt tình tham gia giải toán.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Thanh Hóa : *Nguyễn Lưu Bách*, 9C, *Trần Anh Ngọc*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, *Trịnh Minh Cường*, 7B, THCS Ba Đình, Bỉm Sơn ; **Khánh Hòa:** *Võ Thái Thông*, 9/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Hải Dương :** *Nguyễn Thị Thu Thúy*, 9D, THCS Minh Tân, Kinh Môn.

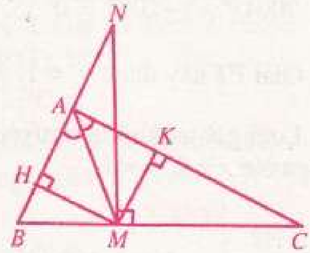
PHAN DOÃN THOẠI

Bài T6/331. *Cho tam giác ABC có các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ đều nhọn với đường phân giác AM (điểm M thuộc BC). Đường thẳng qua M vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại N. Chứng minh rằng góc BAC vuông khi và chỉ khi MN = MC.*

Lời giải : Kẻ $MH \perp AB$ tại H và $MK \perp AC$ tại K. Theo tính chất đường phân giác thì $MH = MK$ (1)

Điều kiện cần :

Giả sử $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Lúc đó các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BNM}$ đều là góc nhọn (h. 1). Ta có $\widehat{MCA} = \widehat{MNA}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc). Từ đó và (1) suy ra $\Delta MKC = \Delta MHN \Rightarrow MC = MN$.

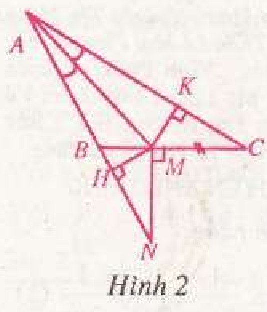


Hình 1

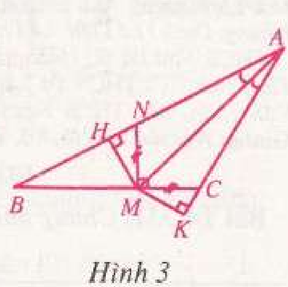
Điều kiện đủ : Giả sử $MC = MN$ (2). Chú ý rằng các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ đều nhọn (h. 1)

Từ (1) (2) có $\Delta MKC = \Delta MHN$, suy ra $\widehat{MCK} = \widehat{MNH}$, mà $\widehat{MNH} + \widehat{MBH} = 90^\circ$ nên $\widehat{MCK} + \widehat{MBH} = 90^\circ$, do đó $\widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{MCK} + \widehat{MBH}) = 90^\circ$.

Nhận xét. 1) Chú ý rằng chứng minh trên (cả ĐK cần và ĐK đủ) đúng cho cả trường hợp $AB = AC$ và $AB \neq AC$. Trường hợp góc $\widehat{ABC}$ tù hoặc góc $\widehat{ACB}$ tù thì có thể $MC = MN$ nhưng góc $\widehat{BAC}$ nhọn nên không vuông (xem hình 2, hình 3). Vì vậy đã bổ sung vào giả thiết bài toán như trên. Hoan nghênh bạn *Võ Thái Thông*, 9/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa** đã phát hiện ra bài toán không đúng nếu ở điều kiện đủ thiếu giả thiết các góc $\widehat{ABC}$, góc $\widehat{ACB}$ đều nhọn.



Hình 2



Hình 3

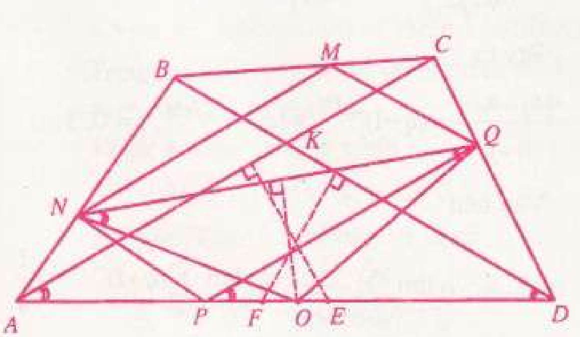
2) Đáng tiếc là nhiều bạn nhầm lẫn Điều kiện cần, Điều kiện đủ với Trường hợp 1, 2 và với Cách giải 1, 2.

VŨ KIM THỦY

Bài T7/331. *Tứ giác ABCD có AC cắt BD tại K sao cho KA = KD và $\widehat{AKD}=120^o$. Từ điểm M trên cạnh BC kẻ MN//AC và MQ//BD (N thuộc AB và Q thuộc CD). Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ khi điểm M di động trên cạnh BC.*

Lời giải. • ***Phần thuận.*** Dựng $NP//BD$ (P thuộc cạnh AD). Áp dụng định lí Ta–let trong tam giác ta có : $\frac{PA}{PD}=\frac{NA}{NB}=\frac{MC}{MB}=\frac{QC}{QD}$, suy ra $PQ//MN$. Do $\widehat{NMQ}=120^o$ nên cung đối diện với cung $\overset{\frown}{NMQ}$ của đường tròn ngoại tiếp ΔMNQ có số đo bằng 240^o. Từ đó $\widehat{NOQ}=120^o$ (O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔNMQ). Giả sử O' là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp ΔNPQ với cạnh AD (O' trùng với P khi đường tròn trên tiếp xúc với cạnh AD). Khi đó từ tính chất của góc nội tiếp và góc đồng vị suy ra $\widehat{QNO'}=\widehat{QPD}=\widehat{KAD}=30^o$. Lập luận tương tự $\widehat{NQO'}=30^o$. Từ đó $O'N=O'Q$ và $\widehat{NO'Q}=120^o$. Do đó $O'\equiv O$, nói cách khác điểm O thuộc cạnh AD.

Gọi E, F lần lượt là giao điểm các đường trung trực của các đoạn AC, BD với cạnh AD. Khi M di động trên cạnh BC thì điểm O, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMNQ chạy trên đoạn EF (thuộc đường thẳng AD).



• ***Phần đảo.*** Giả sử O là một điểm bất kì thuộc đoạn EF. Gọi C', D' là ảnh của C, D qua phép quay $R_O^{120^o}$ tâm O. Khi đó giao điểm của $C'D'$ với AB là N. Từ đó xác định được điểm Q, tạo ảnh của N qua phép quay trên ($Q\in CD$). Đường tròn ngoại tiếp ΔONQ cắt cạnh AD tại P. Khi đó $\widehat{NPA}=\widehat{NQO}=\widehat{KDA}=30^o$ nên $PN//BD$. Tương tự có $PQ//AC$. Dựng $NM//AC$, M thuộc cạnh BC. Theo định lí Ta–let thì $MQ//BD\Rightarrow\widehat{NMQ}=120^o$, M thuộc cung chứa góc 120^o dựng trên đoạn NQ. Mặt khác $ON=OQ$ và $\widehat{NOQ}=120^o$ nên đường tròn tâm O bán kính ON sẽ đi qua M.

Tóm lại ta đã chứng minh được với mỗi điểm O thuộc đoạn EF, tồn tại ΔMNQ sao cho $MN//AC$, $MQ//BD$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác đó nhận O làm tâm.

• ***Kết luận.*** Quỹ tích tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔMNQ là đoạn thẳng EF, thuộc đường thẳng AD.

Nhận xét. 1) Từ cách trình bày phần đảo trên chúng ta nhận thấy rằng : để tồn tại điểm N cần thêm điều kiện góc giữa hai đường thẳng AB và CD khác 60^o. Bạn đọc có thể kiểm tra dựa vào tính chất góc giữa đường thẳng ảnh và đường thẳng tạo ảnh qua phép quay.

2) Có ít bạn tham gia giải bài này. Các bạn sau có lời giải tương đối tốt : **Hà Nội :** *Tô Việt Anh*, 9A1, THCS Nguyễn Trường Tộ, Q. Đống Đa, *Bùi Huy Hoàng*, 9E, Hà Nội – Amsterdam ; **Thanh Hóa :** *Lê Thanh Tùng*, 9C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân ; **Nam Định :** *Phạm Tiến Duật*, 9B, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản ; **Quảng Nam :** *Phan Thị Thu Trang*, 9/4, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Điện Thắng, Điện Bàn ; **Đắk Lắk :** *Võ Văn Tuấn*, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/331. *Cho hai số nguyên tố p, q thỏa mãn p > q > 2. Tìm tất cả các số nguyên k sao cho phương trình* $(px-qy)^2=kxyz$ (1) *có nghiệm nguyên (x, y, z) thỏa mãn* $xyz\neq 0$.

Lời giải. (Của bạn *Phạm Ngọc Tuân*, 11CT THPT Lê Hồng Phong, **TP Hồ Chí Minh)**

Ta nhận thấy với mọi $k\in Z$, (1) luôn có nghiệm $x=q$, $y=p$, $z=0$. Do đó để bài toán không tầm thường cần có điều kiện $xyz\neq 0$.

Gọi $d=(x,y)$ là ƯCLN của (x,y). Nhận thấy rằng nếu (x,y,z) là một nghiệm của (1) thì (tx,ty,z) cũng là nghiệm của (1). Vậy không giảm tổng quát ta giả sử $(x,y)=1$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow p^2x^2-2pqxy+q^2y^2=kxyz$ $\Rightarrow q^2y^2 \vdots x$ và $p^2x^2 \vdots y$. Mà $(x,y)=1$ nên ta có $x\in\{\pm1,\pm q,\pm q^2\}$, $y\in\{\pm1,\pm p,\pm p^2\}$.

Không giảm tổng quát ta chỉ cần xét $x>0$.

1) Với $x=1$ thì $(p-qy)^2=kyz$

• $y = \pm 1 \Leftrightarrow (p \mp q)^2 = \pm kz \Rightarrow k \mid (p \pm q)^2$

• $y = \pm p \Leftrightarrow (p \mp pq)^2 = \pm kpz \Leftrightarrow p(1 \mp q)^2 = \pm kz$ $\Leftrightarrow k \mid p(1 \pm q)^2$

• $y = \pm p^2 \Leftrightarrow (p \mp p^2 q)^2 = \pm kp^2 z$ $\Leftrightarrow k \mid (1 \pm pq)^2$

2) Với $x = q$ thì $(pq - qy)^2 = kyzq$ $\Leftrightarrow q(p-y)^2 = kyz$

• $y = \pm 1 \Leftrightarrow q(p \mp 1)^2 = \pm kz \Leftrightarrow k \mid q(p \pm 1)^2$

• $y = \pm p \Leftrightarrow p(p \mp p)^2 = \pm kpz \Leftrightarrow k = 0$ (do $z \neq 0$), hoặc $k \mid 4pq$.

• $y = \pm p^2 \Leftrightarrow q(p \mp p^2)^2 = \pm 4p^2 z$ $\Leftrightarrow q(1 \mp p)^2 = \pm kz \Leftrightarrow k \mid q(1 \pm p)^2$

3) Với $x = q^2$ thì (1) $\Leftrightarrow (pq - y)^2 = kyz$

• $y = \mp 1 \Leftrightarrow (pq \mp 1)^2 = \pm kz \Leftrightarrow k \mid (pq \pm 1)^2$

• $y = \pm p \Leftrightarrow (pq \mp p)^2 = \pm kpz \Leftrightarrow p(q \mp 1)^2 = \pm kz$ $\Leftrightarrow k \mid p(q \pm 1)^2$

• $y = \pm p^2 \Leftrightarrow (pq \mp p^2)^2 = \pm kp^2 z \Leftrightarrow k \mid (p \pm q)^2$

Kết luận : Để phương trình (1) có nghiệm nguyên (x, y, z) với $xyz \neq 0$ điều kiện cần và đủ là $k = 0$ hoặc k là ước của một trong các số $(p \pm q)^2, p(q \pm 1)^2, q(p \pm 1)^2, (pq \pm 1)^2$ và $4pq$.

Nhận xét. Ngoài bạn Tuân, các bạn sau có lời giải tốt : *Nguyễn Trọng Nhật Quang*, 11 Toán, ĐHKHTN **Hà Nội**; *Trương Xuân Nhã*, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà, **Quảng Trị** ; *Nguyễn Hoài Nam*, 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Vũ Thanh Xuân*, 11T, THPT chuyên **Hưng Yên**, *Nguyễn Tường Huân*, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Bùi Khắc Liên*, 11T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Trịnh Ngọc Tú*, 10T, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Tây**; *Phan Thị Thu Trang*, 9, THCS Điện Bàn, **Quảng Nam**; *Lương Bá Linh*, 11 THPT Lê Khiết, **Quảng Ngãi**; *Thân Ngọc Thức*, 10 THPT chuyên **Bắc Giang**

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/331. *Xét dãy số (u_n) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ được xác định bởi $u_n = n^{2^n}$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$*

Đặt $x_n = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn khi n tăng lên vô hạn và giới hạn đó là một số vô tỉ.

Lời giải. (Của đa số các bạn)

a) Ta chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn. Ta có

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{u_k} = x_{n+1}$$

nên dãy (u_n) là tăng và $x_n > x_1 = 1$ với $n > 1$. Mặt khác ta lại có

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2^n} < 2$$

Suy ra dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn nên có giới hạn hữu hạn a với $1 < a \leq 2$.

b) Ta chứng minh a là một số vô tỉ. Giả sử ngược lại, a hữu tỉ : $a = \dfrac{p}{q}$ với $p, q \in Z^+$ và $(p, q) = 1, q > 1$.

Cách 1. Theo giả thiết thì với mỗi $m > 1$, ta đều có

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{u_k}$$

Suy ra $qu_1 u_2 \ldots u_{m-1} \left(\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=m}^{n} \dfrac{1}{u_k} \right)$ là một số nguyên dương và do vậy

$$u_1 u_2 \ldots u_{m-1} \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{u_k} \right) \geq \frac{1}{q}, \forall m \geq 2. \ (1)$$

Mặt khác, nếu gọi r là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $r+j > q+1$, $\forall j = 0, 1\ldots$ thì ta có $i^{2^i} < r^{2^i}$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$ và vì vậy

$$\frac{u_1 u_2 \ldots u_{r-1}}{u_{r+j}} < \frac{r^{2+2^2+\ldots+2^{r-1}}}{u_{r+j}} = (r+j)^{-2^{j+1}}$$

Suy ra

$$\frac{u_1 u_2 \ldots u_{r-1}}{u_{r+j}} < (q+1)^{-2^{j+1}} < (q+1)^{-(j+1)}, j = 0, 1, \ldots$$

Vậy nên

$$u_1 u_2 \ldots u_{r-1} \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{u_{r+j}} \right) < \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} (q+1)^{-(j+1)} = \frac{1}{q}$$

Suy ra tồn tại $m = r$ để

$$u_1 u_2 \ldots u_{m-1} \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{u_k} \right) < \frac{1}{q},$$

mâu thuẫn với (1). Vậy a là một số vô tỉ.

Cách 2. Đặt M = BCNN $[u_1, u_2, ..., u_q]$ thì aM là một số nguyên dương và

$$aM = \sum_{k=1}^{q} \frac{M}{u_k} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=q+1}^{n} \frac{M}{u_k}$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=q+1}^{n} \frac{M}{u_k}$ là số nguyên dương (2).

Mặt khác

$$u_{k+1} = (k+1)^{2^{k+1}} < \left(k^{2^k} + C_{2^k}^1 k^{2^k-1}\right)^2 > 4u_k^2 > 4u_k$$

Suy ra

$$u_{q+1} > 4u_q^2 > 4u_q u_{q-1}^2 > ... > 4^q u_q u_{q-1} ... u_1 \geq 4^q M$$

Từ đó ta thu được

$$\text{nên } 0 < \sum_{k=q+1}^{n} \frac{M}{u_k} < \frac{1}{4^q} + \frac{1}{4^{q+1}} + ... + \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{4^{n-q}}}{3.4^{q-1}} \text{ nên}$$

$0 < \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=q+1}^{n} \frac{M}{u_k} < 1$, trái với (2).

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng:

Nguyễn Tường Huân, 11/1, *Nguyễn Tiến Lâm*, 12A1, THPT Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; *Vũ Thanh Xuân*, 10T, *Bùi Quang Huy*, 11T, THPT chuyên **Hưng Yên**, *Vũ Văn Tân*, 10T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa** , *Vũ Văn Hậu*, 11A1, *Thân Ngọc Thức*, 10A, THPT chuyên **Bắc Giang**, *Trần Văn Linh*, 11T THPT Lê Quý Đôn, TP Vũng Tàu, **Bà Rịa – Vũng Tàu** ; *Hoàng Mạnh Hùng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**, *Nguyễn Thị Liên*, 11A1, THPT Thanh Hà, *Trương Ngọc Sơn*, 10T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** ; *Hoàng Khắc Hiếu*, 12A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, **Nghệ An**; *Nguyễn Quốc Việt*, 11T, THPT Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Nguyễn Ngọc Quang Minh*, 12T, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt, **Lâm Đồng**; *Đoàn Trung Hiếu*, 11A18, THPT Hoàn Kiếm, **Hà Nội**, *Hà Minh Tuấn*, 10A, ĐHKHTN, *Nguyễn Duy Dương*, 10A1, ĐHSP **Hà Nội** ; *Trần Quốc Toản*, 11T, ĐHKH Huế, *Nguyễn Trọng Đại*, 12A, THPT Chu Văn An, **Lạng Sơn.**

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/331. *Tìm tất cả số nguyên dương $n \geq 3$ sao cho bất đẳng thức sau xảy ra với n số thực bất kì $a_1, a_2, ..., a_n$ (coi $a_{n+1} = a_1$) :*

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i - a_j)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i+1}|\right)^2$$

Lời giải. (Của nhiều bạn)

Giả sử n là số nguyên dương thỏa mãn các điều kiện trên. Xét trường hợp $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = ... = a_n = 0$, ta có

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i - a_j)^2 = 2(n-2) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i+1}|\right)^2 = 4$$

Từ đó suy ra $n \leq 4$. Ta sẽ chứng minh cả hai trường hợp $n = 3$ và $n = 4$ đều thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Trường hợp $n = 3$.

Vì $\sum\limits_{1\leq i<j\leq 3} (a_i - a_j)^2$

$= (a_1-a_2)^2 + (a_1-a_3)^2 + (a_2-a_3)^2$,

$$\left(\sum_{i=1}^{3} |a_i - a_{i+1}|\right)^2$$

$$= (|a_1-a_2| + |a_1-a_3| + |a_2-a_3|)^2$$

$$= (a_1-a_2)^2 + (a_1-a_3)^2 + (a_2-a_3)^2 +$$

$$+ 2(|(a_1-a_2)(a_1-a_3)| + |(a_1-a_3)(a_2-a_3)| +$$

$$+ |(a_1-a_2)(a_2-a_3)|)$$

Do đó $\sum\limits_{1\leq i<j\leq 3} (a_i - a_j)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{3} |a_i - a_{i+1}|\right)^2$

Trường hợp $n = 4$.

Chú ý bất đẳng thức

$$\sum_{1\leq i<j\leq 4} (a_i - a_j)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{4} |a_i - a_{i+1}|\right)^2$$

tương đương với bất đẳng thức

$$(a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 \leq 2|a_1 - a_2||a_2 - a_3| +$$
$$2|a_1 - a_2|a_3 - a_4| + 2|a_1 - a_2||a_4 - a_1| +$$
$$2|a_2 - a_3||a_3 - a_4| + 2|a_2 - a_3||a_4 - a_1| +$$
$$2|a_3 - a_4||a_4 - a_1| \quad (1)$$

Dùng bất đẳng thức $|a| + |b| \geq |a+b|$ (với mọi $a, b \in R$), đặt vế phải của (1) là P, thì

$P \geq (|a_1-a_2| (|a_2-a_3| + |a_3-a_4|) + |a_4-a_1| (|a_2-a_3| + |a_3 - a_4|)) + (|a_4 - a_1| (|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3|) +$
$+ |a_3 - a_4|(|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3|))$
$\geq (|a_1 - a_2| + |a_4 - a_1|) |a_2 - a_4| +$
$(|a_4 - a_1| + |a_3 - a_4|)|a_1 - a_3|$
$\geq (a_2 - a_4)^2 + (a_1 - a_3)^2$

Bất đẳng thức (1) đã được chứng minh.

Vậy các số n cần tìm là $n = 3$, $n = 4$.

Nhận xét. Đây là bài toán cơ bản, hay, không quá khó. Các bạn sau có lời giải tốt : **Bắc Giang :** *Thân Ngọc Thức*, 10A, THPT chuyên ; **Hà Nội :** *Hà Minh Tuấn*, 10A, PTCTT–ĐHKHTN, ĐHQG ; **Hà Tây :** *Trịnh Ngọc Tú*, 10T, THPT Nguyễn Huệ ; **Hà Nam :** *Nguyễn Đức Vinh*, 10A1, THPT chuyên ; **Vĩnh Phúc :** *Trần Trung Dũng*, 10A1, THPT chuyên ; **Hải Dương :** *Nguyễn Hồng Quảng Bôn*, 9D, THCS Minh Tân, Kinh Môn, *Trương Ngọc Sơn*, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Thanh Hóa :** *Phạm Khắc Thanh*, 10B1, THPT Triệu Sơn, *Vũ Văn Tân*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Tô Hồng Sơn*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu ; **Hà Tĩnh :** *Phạm Quốc Duẩn*, 10T, THPT chuyên ; **Quảng Trị :** *Trương Xuân Nhã*, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Hoài Ân*, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/331. *Hãy xác định dạng của tam giác ABC nếu các góc của tam giác ABC thỏa mãn đẳng thức sau:*

$$\frac{\mathrm{tg}(A/2)}{1+\mathrm{tg}(B/2)\mathrm{tg}(C/2)}+\frac{\mathrm{tg}(B/2)}{1+\mathrm{tg}(C/2)\mathrm{tg}(A/2)}+\frac{\mathrm{tg}(C/2)}{1+\mathrm{tg}(A/2)\mathrm{tg}(B/2)}=\frac{1}{4\mathrm{tg}(A/2)\mathrm{tg}(B/2)\mathrm{tg}(C/2)} \quad (1)$$

Lời giải. (Của bạn *Mai Xuân Phong*, 10A1 Toán – PTCT–Tin, ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội**)

Đặt $x = \mathrm{tg}\frac{A}{2}$; $y = \mathrm{tg}\frac{B}{2}$; $z = \mathrm{tg}\frac{C}{2}$. Ta có $x, y, z > 0$ còn $yz+zx+xy = 1$ (kết quả quen thuộc).

Mặt khác, $\forall a, b > 0$, ta có :

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Đặt vế trái của (1) là T thì

$$T=\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}$$

$$=\frac{x}{(xy+yz)+(yz+zx)}+\frac{y}{(yz+zx)+(zx+xy)}+\frac{z}{(zx+xy)+(xy+yz)}$$

$$\leq\frac{1}{4}\left(\frac{x}{xy+yz}+\frac{x}{yz+zx}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{y}{yz+zx}+\frac{y}{zx+xy}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{z}{zx+xy}+\frac{z}{xy+yz}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{y+z}{zx+xy}+\frac{z+x}{xy+yz}+\frac{x+y}{yz+zx}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{yz+zx+xy}{4xyz}=\frac{1}{4xyz}$$

$$=\frac{1}{4\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}} \quad (2)$$

Từ giả thiết suy ra đẳng thức xảy ra ở (2) $\Rightarrow$ $x = y = z \Rightarrow \mathrm{tg}\frac{A}{2}=\mathrm{tg}\frac{B}{2}=\mathrm{tg}\frac{C}{2} \Rightarrow A = B = C$ $\Rightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. Đây là bài toán dễ, rất nhiều bạn tham gia giải và tất cả đều giải đúng. Tuy nhiên, rất nhiều bạn trình bày lời giải không sáng sủa. Các bạn nên chú ý rằng bài toán này, về bản chất là bài toán bất đẳng thức nhưng về hình thức lại là bài toán nhận dạng tam giác. Chính vì vậy, cần phải chú ý tìm cho lời giải của nó một cách thể hiện thích hợp.

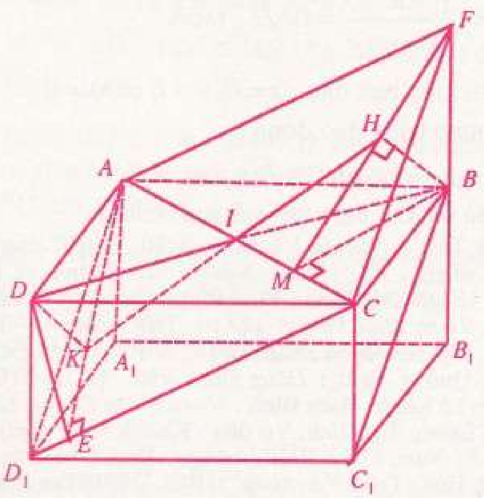
2. Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt : **Vĩnh Phúc :** *Đoàn Anh Quân*, 11A3, *Nguyễn Hoài Nam*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Thanh Hóa :** *Phạm Minh Tuấn*, *Dương Anh Tuấn*, *La Tiến Thanh*, 10A4, THPT Hậu Lộc II, *Trịnh Hà Linh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Đào Xuân Uyên*, 10A1, THPT Trần Phú ; **Hà Nam :** *Trần Lệnh Ánh*, 10A1, THPT chuyên Hà Nam ; **Nghệ An :** *Lê Ngọc Kỷ*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh ; **Quảng Trị :** *Nguyễn Hữu Ninh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Đăk Lăk :** *Lê Đức Quang*, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/331. *Xét các hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có độ dài các cạnh $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$ và khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và BC_1 đều là các số tự nhiên. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích các hình hộp đó.*

Lời giải. Dựng điểm F sao cho B là trung điểm của B_1F. Kẻ $BM \perp AC$ tại M với M thuộc AC. Kẻ $BH \perp MF$ tại H với H thuộc MF. Ta thấy AD_1CF là hình bình hành nên MF thuộc mặt phẳng (ACD_1). Vì $AM \perp BM$ và $AM \perp B_1F$ nên $AM \perp \mathrm{mp}(BMF)$, suy ra $AM \perp BH$. Hơn nữa $BH \perp MF$ nên $BH \perp \mathrm{mp}(AMF)$, hay là $BH \perp \mathrm{mp}(ACD_1)$. Vì $AD_1 \parallel BC_1$ nên khoảng cách d giữa AC và BC_1 cũng bằng khoảng cách từ điểm bất kì của đường thẳng BC_1 đến mặt phẳng ACD_1. Vậy $d = BH$.

Xét tứ diện vuông $BACF$, ta có



$\dfrac{1}{BH^2}=\dfrac{1}{BF^2}+\dfrac{1}{BM^2}=\dfrac{1}{BF^2}+\dfrac{1}{BA^2}+\dfrac{1}{BC^2}$ hay

$\dfrac{1}{d^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ (với a, b, c, d nguyên dương) (1)

Vì $d = BH$ là đường cao của hình chóp tam giác $BACF$ nên d nhỏ hơn các độ dài a, b và c của các cạnh BA, BC và $BF = BB_1$ của góc tam diện $B(ACF)$. Không giảm tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$, hay $\dfrac{1}{a^2} \leq \dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$. Từ a, b và c đều lớn hơn d, ta suy ra $d \geq 2$. Thật vậy nếu $d = 1$ thì a, b và c phải không nhỏ hơn 2 và do đó, đẳng thức (1) không xảy ra.

Nếu $d = 2$ thì a, b và c đều lớn hơn hoặc bằng 3.

Giả sử a, b, c đều lớn hơn 3, tức là $a \geq b \geq c = 4$. Thay vào (1) dễ thấy rằng đẳng thức (1) không xảy ra. Suy ra $c \leq 3$. Mặt khác, $\dfrac{1}{c^2} < \dfrac{1}{4}$; suy ra $c > 2$. Vậy $c = 3$.

Khi đó ta có : $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{5}{36}$. Lập luận tương tự, ta có $\dfrac{1}{b^2}<\dfrac{1}{4}$ và $\dfrac{2}{b^2} \geq \dfrac{5}{36}$. Suy ra : $2 < b \leq 3$. Vậy $b = 3$. Từ đó suy ra $a = 6$. Khi đó, tức là với $d = 2$, $c = b = 3$ và $a = 6$ thì hình hộp được xét có thể tích $V = 3.3.6 = 54$ (đơn vị thể tích).

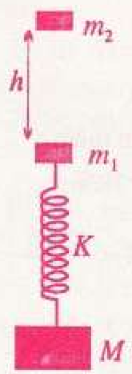
Sau cùng, giả sử $d \geq 3$ và do đó a, b và c đều không nhỏ hơn 4. Suy ra $V \geq 4.4.4 = 64$ (đơn vị thể tích). Ta đi đến kết luận : Giá trị nhỏ nhất của thể tích hình hộp chữ nhật thỏa mãn điều kiện đặt ra của bài toán là $V_{\min} = 54$ (đơn vị thể tích) ứng với các kích thước của hình hộp là 3, 3, 6 và khoảng cách giữa AC và BC_1 là $d = 2$.

Nhận xét. 1) Cách khác xác định d : mặt phẳng chéo ACD_1 của hình hộp đi qua F và trung điểm I của đoạn thẳng BD, B và D nằm về hai phía của mặt phẳng ACD_1 và cách đều mặt phẳng đó. Từ đó suy ra hai điểm B và D cách đều mặt phẳng ACD_1 ; nói khác đi là : $d = DK = d(D, (ACD_1))$, trong đó $DK \perp mp(ACD_1)$ tại K.

3) Các bạn sau đây có lời giải đúng và tương đối gọn gàng hơn cả.

Vĩnh Phúc : *Hà Đình Thiệu*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Quang Huy*, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Hạnh*, 8A5, THCS Quang Trung, TP Thanh Hóa ; *Bùi Khắc Kiên*, 11T, *Trịnh Hà Linh*, 10T, *Vũ Văn Tân*, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa ; **Nghệ An :** *Nguyễn Thanh Long*, 11A, THPT Hà Huy Tập, TP Vinh ; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thiện Nhân*, 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn ; **Bình Định:** *Lê Trần Tiểu My*, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Đăk Lăk :** *Nguyễn Thành Nội*, 11I, THPT Nguyễn Du, TP Buôn Ma Thuột ;**Cần Thơ :** *Nguyễn Thành Công*, *Lê Nguyễn*, 11A1, THPT Lý Tự Trọng, TP Cần Thơ ; **Bà Rịa – Vũng Tàu** : *Trần Văn Linh*, 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn, TP Vũng Tàu.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT



Bài L1/331. *Cho một hệ gồm hai vật có các khối lượng $M = 200g$, $m_1 = 100g$ được nối với nhau bởi một lò xo có độ cứng là $K = 40N/m$, lấy $g = 10m/s^2$ (hình vẽ).*

1) Ấn m_1 xuống dưới vị trí cân bằng một đoạn x_o rồi buông nhẹ, m_1 dao động điều hòa, áp lực cực tiểu mà hệ tác dụng lên sàn là 0,6N. Tìm x_o và áp lực cực đại của hệ lên sàn.

2) Khi m_1 đứng cân bằng, thả một vật khác có khối lượng $m_2 = m_1$ và cách m_1 một khoảng bằng h rơi tự do thẳng xuống vật m_1. Vật m_2 va chạm mềm với m_1. Sau va chạm hai vật dính vào nhau và cùng dao động.

a) Tìm điều kiện của h để sau va chạm vật M không rời mặt sàn.

b) Với $h = 20cm$, viết phương trình dao động của hệ ($m_1 + m_2$) sau va chạm, với điều kiện $t = 0$, $x = 0$, $v > 0$.

Lời giải. 1) Áp lực lên sàn : $\vec{Q} = \overrightarrow{Mg} + \vec{F_d}$. Vì $Mg = 2N > Q_{\min}$ nên $Q_{\min} = Mg - F_d \Rightarrow F_d = Mg - Q_{\min} = K\Delta l \Rightarrow \Delta l = \dfrac{2-0,6}{40} = 0,035$m (độ giãn cực đại). Khi m_1 cân bằng, lò xo nén $\Delta l_o = \dfrac{m_1 g}{K} = 0,025$m. Vậy $x_o = \Delta l + \Delta l_o = 0,06$m = 6cm và $Q_{\max} = Mg + K(x_o + \Delta l_o) = 5,4$N.

2) a) Điều kiện để M không rời mặt sàn : $F_{đ\max} \le Mg \Rightarrow$ độ giãn cực đại của lò xo $\Delta l_2 \le \dfrac{Mg}{K} = 0,05$cm.

Khi $(m_1 + m_2)$ cân bằng, lò xo nén

$$\Delta l_3 = \frac{(m_1+m_2)g}{K} = 0,05\text{cm}$$

Vậy $A \le \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,1$m.

Bảo toàn cơ năng sau va chạm

$$\frac{(m_1+m_2)v'^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$$ (điểm va chạm cách vị trí cân bằng của hệ (m_1+m_2) một đoạn là $x_1 = \dfrac{m_2 g}{K} = 0,025$cm). Vì phải có $A \le 0,1$m nên $v' \le \sqrt{\dfrac{(A^2-x_1^2)K}{m_1+m_2}} = 1,3693$m/s.

Bảo toàn động lượng trong va chạm mềm :

$m_2 v_2 = (m_1+m_2)v' \Rightarrow v_2 = 2v' \le 2,7386$m/s.

Bảo toàn cơ năng khi m_2 rơi : $m_2 gh = \dfrac{m_2 v_2^2}{2}$.

Từ đó $h = \dfrac{v_2^2}{2g} \le 0,375\text{m} = 37,5\text{cm}$.

b) Vận tốc của m_2 ngay trước va chạm :

$v_2 = \sqrt{2gh} = 2$m/s. Gọi v' là vận tốc của hệ (m_1+m_2) ngay sau va chạm : $m_2 v_2 = (m_1+m_2)v'$ $\Rightarrow v' = \dfrac{v_2}{2} = 1$m/s.

Bảo toàn cơ năng sau va chạm :

$$\frac{(m_1+m_2)v'^2}{2} + \frac{Kx_1^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow A = 0,075\text{m} = 7,5\text{cm}.$$

Tần số góc của dao động :

$$\omega' = \sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}} = 10\sqrt{2} \text{ rad/s.}$$

Điều kiện ban đầu : $x = 0, v > 0 \Rightarrow \varphi = 0$

Phương trình dao động :

$$x = 7,5\sin(10\sqrt{2}t) \text{ cm.}$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :

Phú Thọ : *Nguyễn Vũ Long*, 11B1, THPT chuyên Hùng vương ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Văn Thành*, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Cao Việt Trường*, 12A3, *Trịnh Hữu Phước*, 12A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên ; **Quảng Ngãi :** *Đặng Đình Nhất*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết ; **Nam Định :** *Nguyễn Văn Chung*, 12B, THPT Lương Thế Vinh, Vụ Bản ; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Ngọc Kì Nam*, 11 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Thanh Hóa :** *Trịnh Văn Mười*, 11B10, THPT Hàm Rồng; **Bắc Giang :** *Dương Trung Hiếu*, 12B, THPT chuyên Bắc Giang ; **Đăk Lăk :** *Nguyễn Thành Nội*, 11AT, THPT Nguyễn Du, TP Buôn Ma thuột ; **Tiền Giang :** *Nguyễn Vĩnh Phúc*, 12A18, THPT Chợ Gạo ; **Hải Dương:** *Trịnh Quốc Bảo*, 12A1,. THPT Hồng Quang, *Lê Quang Vinh*, 12A1, THPT Nam Sách, *Nguyễn Thị Liên*, 11A1, THPT Thanh Hà.

MAI ANH

Bài L2/331. *Một kính hiển vi mà vật kính có tiêu cự $f_1 = 1(cm)$, thị kính có tiêu cự $f_2 = 5(cm)$. Độ dài quang học của kính là 18(cm). Người quan sát đặt mắt sát kính để quan sát một vật nhỏ. Để nhìn rõ thì đặt vật trước vật kính trong khoảng từ $\dfrac{119}{113}$(cm) đến $\dfrac{19}{18}$ (cm). Xác định khoảng nhìn rõ của mắt người đó. Vẽ hình cho trường hợp ngắm chừng ở vô cực. Tính độ bội giác khi người đó ngắm chừng ở điểm cực cận và ở điểm cực viễn.*

Lời giải. - Khoảng cách giữa vật kính và thấu kính : $l = \delta + f_1 + f_2 = 24$cm.

Sơ đồ tạo ảnh :

$$AB \xrightarrow[d_1 \quad d'_1]{O_1} A_1B_1 \xrightarrow[d_2 \quad d'_2]{O_2} A_2B_2 \longrightarrow \text{mắt}$$

Với $d_1 = \dfrac{119}{113}$(cm), $d'_1 = \dfrac{d_1 f_1}{d_1 - f_1} = \dfrac{119}{6}$ (cm),

$d_2 = l - d'_1 = \dfrac{25}{6}$cm $\Rightarrow d'_2 = \dfrac{d_2 f_2}{d_2 - f_2} = -25$cm.

Với $d_1 = \dfrac{19}{18}$cm, $d'_1 = 19$cm, $d_2 = 5$cm $\Rightarrow d'_2 = -\infty$.

Suy ra khoảng nhìn rõ của mắt là từ 25cm đến vô cực.

- Độ bội giác :

$$G = \frac{\alpha}{\alpha_o} = \frac{A_2B_2}{AB} \cdot \frac{Đ}{|d'_2|} = \left| -\frac{d'_1 d'_2}{d_1 d_2} \right| \cdot \frac{Đ}{|d'_2|}$$

$$d_2 = \frac{25}{6}\text{cm}, d'_1 = \frac{119}{6}\text{cm và } d_1 = \frac{119}{113}\text{cm.}$$

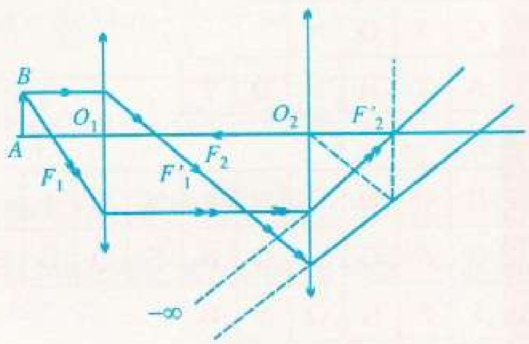
+ Khi ngắm chừng ở điểm cực cận :

$d'_2 = -25$cm. Từ đó : $G_C = 113$.

+ Khi ngắm chừng ở vô cực $d'_2 = -\infty \Rightarrow$

$d_2 = 5$cm, $d_1 = 19$cm và $d_1 = \frac{19}{18}$ cm.

Từ đó $G_\infty = \dfrac{\delta Đ}{f_1 \cdot f_2} = 90.$



Nhận xét. Các bạn có lời giải và vẽ hình đúng :

Bắc Ninh : *Nguyễn Văn Thành*, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Thị Mỹ Hạnh*, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Bắc Giang :** *Dương Trung Hiếu*, 12B, THPT chuyên Bắc Giang ; **Tiền Giang :** *Trần Thị Mỹ Phương*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang ; **Nghệ An :** *Lê Thanh Tùng*, 12A, THPT Nam Đàn I.

MAI ANH

PROBLEMS ... *(Tiếp trang 15)*

Put $T_1(x) = T(x)$, $T_{n+1}(x) = T(T_n(x))$ for every $n = 1, 2, 3, ...$

Prove that there exists an integer $n > 1$ such that $T_n(x) - x$ is divisible by 2003 for every integer x.

T9/335. Consider the sequence of numbers (x_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ defined by : $x_1 = 2$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1) \text{ for every } n = 1, 2, 3, ...$$

$$\text{Put } S_n = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_n}$$

Find the integral part of S_{2005} and find the limit of S_n when n tends to infinity.

T10/335. Consider the sequence of numbers (a_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ defined by $a_1 = \dfrac{1}{2}$,

$$a_{n+1} = \left(\frac{1 - \left(1 - a_n^2\right)^{1/2}}{2} \right)^{1/2} \text{ for every } n = 1, 2, 3, ...$$

Prove that $a_1 + a_2 + ... + a_{2005} < 1{,}03$.

T11/335. Prove that for every triangle ABC, we have :

$$\cos A + \cos B + \cos C \le$$

$$\le 1 + \frac{1}{6}\left(\cos^2 \frac{A-B}{2} + \cos^2 \frac{B-C}{2} + \cos^2 \frac{C-A}{2} \right)$$

T12/335. In a triangle ABC, let $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ and let S be its area. Let the points M, N, P lie respectively on the sides BC, CA, AB. Prove that

$$ab.MN^2 + bc.NP^2 + ca.PM^2 \ge 4S^2$$

when does equality occur ?

BA ĐẶC ĐIỂM... *(Tiếp trang 11)*

Ví dụ, học sinh áp dụng hệ thức trong tam giác vuông để tính chiều cao của một tháp căn cứ vào các tia nắng mặt trời và bóng của tháp trên mặt đất (bài tập 26 chương I, Hình học) ; dùng compa để vẽ hình hoa bốn cánh và vẽ lọ hoa (bài tập 9, chương II, Hình học) ; vẽ chắp nối hình "quả trứng", hình trái xoan (chương II, Hình học) ; tính giá tiền một mặt hàng căn cứ vào mức thuế VAT đối với mặt hàng đó (bài tập 39, chương III, Đại số) ; tính lãi suất cho vay của ngân hàng (bài tập 42, chương IV, Đại số) ; giúp chàng Đông-ki-sốt tính bán kính đáy hình nón của phần trên một cối xay gió (bài tập 29, chương IV, Hình học) v.v...

Việc sử dụng bảng số, máy tính bỏ túi được chú trọng trong việc thực hiện những phép tính, giải những bài toán phức tạp hơn ở lớp dưới.

Các bài ôn tập chương, ôn tập cuối năm mang tính tổng hợp, giúp HS ôn tập, hệ thống hoá kiến thức, chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THCS. Ngoài các bài tập theo kiểu "tự luận" còn có nhiều bài tập trắc nghiệm khách quan, giúp HS làm quen với hình thức kiểm tra, đánh giá ngày càng trở nên phổ biến này.

Giải đáp : Ô CHỮ KỈ NIỆM NGÀY ĐẤT NƯỚC THỐNG NHẤT

1. Nơi bắt đầu con đường nối liền Việt Nam DCCH với các nước XHCN trước đây : LẠNG SƠN

2. Một con đường độc đáo vận chuyển vũ khí chi viện miền Nam : BIỂN ĐÔNG

3. Chiến thắng quyết định dẫn đến giải phóng miền Bắc : ĐIỆN BIÊN

				L	A	N	G	S	O	N				
			B	I	E	N	Đ	O	N	G				
		Đ	I	E	N	B	I	E	N					
T	R	U	O	N	G	S	O	N						
B	U	O	N	M	A	T	H	U	O	T				
S	A	I	G	O	N									
				T	H	U	Đ	O	H	A	N	O	I	
				D	O	N	G	S	O	N	G	Q	U	E
			H	A	I	P	H	O	N	G				
N	A	M	Đ	I	N	H								

4. Nơi gắn bó, che chở bộ đội ta : TRƯỜNG SƠN

5. Trận đánh đầu tiên điểm huyệt mở đầu chiến dịch Xuân 1975 giải phóng miền Nam: BUÔN MA THUỘT

6. Giải phóng thành phố này có ý nghĩa quyết định : SÀI GÒN

7. Nơi cả nước gửi gấm niềm tin : THỦ ĐÔ HÀ NỘI

8. Người lính ra trận nhớ về: DÒNG SÔNG QUÊ

9. Một trong những nơi bị Hải quân Mỹ phong tỏa ác liệt : HẢI PHÒNG

10. Nơi liên tục có phong trào "Một triệu mét vải vì miền Nam ruột thịt" : NAM ĐỊNH

Dựa vào gợi ý của các dòng hàng ngang ta có thể biết dòng chữ hàng dọc (gạch chéo) đó là: LIỀN MỘT DẢI.

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Phi Hà*, 10A12, THPT Diễn Châu II., Nghệ An viết "Khi giải xong ô chữ này em cảm thấy rất vui: Đây quả là một ô chữ có ý nghĩa". Ngoài bạn *Nguyễn Phi Hà*, các bạn *Nguyễn Quang Huy*, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, **Phú Thọ**, *Nguyễn Nha Trang*, SV K28A Toán Tin, *Phạm Quỳnh Trang*, K29, Hóa và bạn *Nguyễn Thị Thanh Hoa*, K28A, K Sinh - KTNN, ĐHSP Hà Nội 2, **Vĩnh Phúc** ; *Nguyễn Mạnh Nhất*, 11A1, THPT Thuận Thành1, **Bắc Ninh**, *Hoàng Trung Hiếu*, 115, tổ 1, KP Đồng Tâm, Đinh Van, Lâm Hà, **Lâm Đồng** được nhận quà tặng của tòa soạn.

VŨ THANH THÀNH

Thông tin tiếp :

THI THƠ TẾT TOÁN TUỔI TRẺ TOÀN T :

Bài *Thầy trò Toán Tuổi trẻ* của *Hoàng Nguyễn Hoài An*, 12 chuyên Toán, Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế. Bạn An vừa gửi địa chỉ đến tòa soạn.

THTT

ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ...

(Tiếp trang 10)

Để luyện tập áp dụng các phương pháp giải toán nêu trên, mời các bạn giải các bài tập sau :

Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình :

a) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$

b) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$

Bài 2. Tìm hệ thức giữa các hệ số của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ biết rằng phương trình này có ba nghiệm mà bình phương một nghiệm bằng tổng các bình phương của hai nghiệm còn lại

Đáp số : $a^4(a^2 - 2b) = 2(a^3 - 2ab + c)^2$

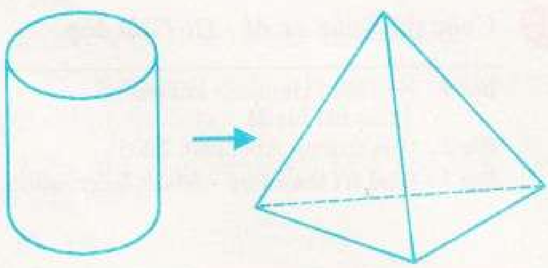
Cuộc thi mới
XUÂN RA ĐỀ, HÈ GIẢI ĐÁP

Cuộc thi của chúng ta đã bắt đầu từ 4.2005 Đề bài sẽ in trên 2 số báo tháng 4 và 5.2005, nhận bài giải trong 2 tháng 5 và 6.2005, kết quả in trong 2 tháng 7 và 8.2005. Ai sẽ là người đoạt giải trong cuộc thi vui và mới này. Chúng ta cùng chờ xem kết quả trên hai số 337 và 338. Bạn đã gửi bài giải ba bài 1, 2, 3 về tòa soạn chưa ? Bài được đóng dấu Bưu điện trước ngày 1.6.2005 với đợt 1 và trước ngày 1.7.2005 với đợt 2 là bài giải hợp lệ về thời gian. Bài có dán phiếu dự thi ghi đủ thông tin là hợp lệ về thể thức.

Tiếp đây là 3 bài của đợt 2.

ĐỢT 2

***Bài 4.* Cắt gấp hình không gian**



Một hình trụ được làm bằng bìa mỏng có chiều cao h. Bạn hãy thử cắt hình trụ này, bỏ hai đáy, lấy phần diện tích xung quanh rồi gấp lại tạo thành bề mặt khối tứ diện đều có cạnh bằng $2h$ (Mô tả cách cắt gấp bằng các hình vẽ).

***Bài 5.* Tìm các số nguyên tố**

Bạn hãy điền tiếp các chữ số khác 0, 1, 5, 9 vào mỗi ô vuông của bảng bên để khi đọc theo hàng ngang, theo cột dọc đều được các số nguyên tố, biết rằng các số nguyên tố đó có từ hai chữ số trở lên xuất hiện không quá một lần.

1		1		■	1	1		1
5	■		1	■		9	■	5
		■		1		■	5	
			■		■		9	1
■	■			■			■	■
5		9	■		■	9		1
1	1	■			1	■		9
	■			■	9		■	
1		1		■		1		1

***Bài 6.* Tô màu khối lập phương**

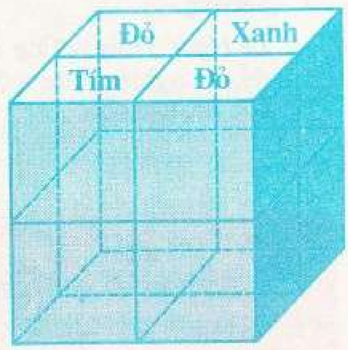
Chia mỗi mặt hình vuông của khối lập phương thành bốn ô vuông bằng nhau như hình bên. Ta dùng ba màu : Đỏ, Xanh, Tím để tô màu khối lập phương đó sao cho:

a) mỗi ô vuông được tô bằng một màu,

b) mỗi mặt có đủ ba màu,

c) hai ô vuông có cạnh chung (trên một mặt hoặc trên hai mặt) thì được tô bằng hai màu,

d) hai mặt không có cạnh chung có 4 ô cùng màu.



Bạn hãy tô tiếp vào hình bên theo các yêu cầu trên.

PHIẾU DỰ THI XUÂN RA ĐỀ, HÈ GIẢI ĐÁP

• Họ và tên : ....

• Ngày sinh : ....

• Địa chỉ : (Trường, lớp, huyện, tỉnh hoặc nơi ở)

....

....

• Điện thoại (nếu có) : ....

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 335 (5-2005)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THỤY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI. *Thư kí Tòa soạn :* VŨ KIM THỦY.
Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ – NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 336 (6.2005)

- Tiếp tuyến của đồ thị hàm bậc ba
- Hướng dẫn giải Đề ôn luyện số 4
- Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường Quốc học Huế
- Định lượng sự bất thường của thị trường
- Giải những bài toán có biểu thức bậc hai của hai biến số.

Mời các bạn đặt mua tạp chí THTT tại Bưu điện.

THTT

Giải đáp bài : THÁNG 3 SỐ 333

Bài giải của bài này không nhiều. Có lẽ do các bạn chưa thật thành thạo các biến đổi có log và $\sqrt{\ }$. Song bạn *Nguyễn Viết Tuyên* ở Thôn 3, Xuân Yên, Thọ Xuân, **Thanh Hóa** lại khẳng định viết được 979 cách.

Chẳng hạn chỉ cần biến đổi một chút sẽ có

$$VT = \log_{\frac{3\times 3}{3^3}}\left[\frac{3^3:(3-3-3)}{-(3+3+3)}\right]^3 =$$

$$= \log_{\frac{3\times 3}{3^3}}\left[\frac{(3\times3\times3):(3-3-3)}{-3\times3}\right]^3$$

$$= \log_{\frac{3\times 3}{3^3}}\left[\frac{3^3:(3+3-3\times3)}{-3\times 3}\right]^3$$

Rồi bạn lại biến đổi vế phải.

Bạn tiếp tục bớt 1 con 3 ở vế trái để ghép với các biểu thức thêm 1 con 3 ở vế phải. Cứ thế...

Lập luận của bạn đúng nhưng không phải 979 cách là con số cuối cùng. Thật ra đầu bài không yêu cầu phải có đủ các phép tính mà chỉ là các phép tính đó có thể được sử dụng. Vậy nên số đẳng thức có được rất nhiều.

• Bạn *Hoàng Thị Yến*, 11E, THPT DTNT Tân Kỳ, **Nghệ An** viết được 7 cách, xin nêu một ví dụ :

$$\log_{(3:3\times3)}[(3\times3\times3\times3)\times(3:3:3)]$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\frac{3\times3\times3}{3:3:3}+(3+3+3)-(3+3+3)}{3-3+3}}$$

Đây là cách viết ghép được nhiều bộ 3 con số 3.

• Bạn *Châu Minh Toàn*, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long** có kết quả là 23 cách, trong đó có cách nhìn "rất sợ" như sau

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{[(3^3-(3\times3)+3):3-(3+3)]}}}}} =$$

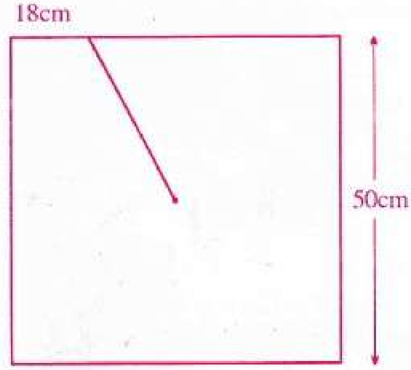
$$3^{-(3:3)+\log_3\left(3^{\log_3\left(3^{\log_3\left(3^{\log_3\left(3^{\log_3 3}\right)}\right)}\right)}\right)}$$

Ba bạn trên được nhận quà tặng của Tòa soạn.

VŨ ĐÔ QUAN

CHIA BÁNH

Một chiếc bánh hình vuông cạnh 50(cm) muốn chia đều cho 5 người ăn. Một người trong số họ đã vội cắt một đường xuất phát từ tâm chiếc bánh (hình dưới). Bạn có thể giúp người đó cách cắt tiếp theo để mỗi người đều được một phần bánh có diện tích như nhau (các nhát cắt đều xuất phát từ tâm chiếc bánh).



ĐÀO VĂN NHẪN (*st*)
(*57 Nguyễn Chí Diểu, TP Huế*)

HỘI THI CÁN BỘ, GIÁO VIÊN THƯ VIỆN GIỎI TOÀN QUỐC LẦN THỨ HAI NĂM 2005 KHU VỰC PHÍA BẮC

Tiếp theo Hội thi cán bộ, giáo viênthư viện giỏi khu vực miền Trung và miền Nam, Hội thi khu vực miền Bắc diễn ra trong 3 ngày 7, 8 và 9/4/2005 tại Hà Nội. Tham dự cuộc thi có 83 thí sinh đến từ 28 tỉnh, thành phố. Đây là 83 hạt nhân ưu tú của thư viện nhà trường, đã qua nhiều vòng thi ở cấp cơ sở và cấp tỉnh thành.

Ông Ngô Trần Ái - Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng giám đốc NXB Giáo dục và ông Lã Quý Đôn, Phó Vụ trưởng Vụ công tác học sinh - sinh viên trao giải thưởng xuất sắc cho các cán bộ thư viện giỏi.

Mỗi thí sinh tham dự 3 nội dung: thi trắc nghiệm về các hiểu biết nghiệp vụ thư viện, các sáng kiến kinh nghiệm và thi điểm sách, giới thiệu sách. Trong đó, nội dung thứ ba là phần thi sôi nổi nhất, khó khăn nhất, đòi hỏi nhiều công phu nhất, và cũng là phần thi bộc lộ rõ nhất năng lực các mặt của công tác thư viện trường học của mỗi thí sinh.

Tại hội thi, số sách văn học được giới thiệu chiếm một tỷ trọng lớn : 51 thí sinh lựa chọn trong tổng số 83 thí sinh. Các tác giả được nhiều thí sinh chú trọng nhất là : Hồ Chí Minh, Nguyễn Du, Nam Cao, Nguyên Hồng, Tô Hoài, Tố Hữu. Các vấn đề môi trường và sinh thái cũng được các thí sinh đặc biệt quan tâm. Sự kiện văn học nổi bật mà các thí sinh nhắc đến là hai cuộc thi văn học : Cuộc vận động viết truyện ngắn giáo dục đạo đức cho HS tiểu học và Cuộc thi viết truyện ngắn cho thanh niên học sinh - sinh viên do Nhà xuất bản Giáo dục tổ chức năm 2001 và 2004.

Nhà thơ Phạm Tiến Duật, Trưởng ban giám khảo nhận xét : "Hội thi cho thấy các cán bộ thư viện chuyên trách đã nắm vững mục tiêu giáo dục, chương trình giảng dạy để cho các sách giáo dục phát huy hiệu quả. Nhiều thí sinh đã rất xuất sắc khi giới thiệu sách, biết tập trung vào những điểm chính yếu, có bình, có phê, có liên hệ thực tiễn, biết lấy nghệ thuật để tôn vinh nội dung, biết gắn tác giả vào tác phẩm, biết gắn tác phẩm với cuộc sống".

Ban tổ chức đã trao 4 giải xuất sắc cho các thí sinh : Lương Thu Hằng (Hà Nội), Vũ Thị Yến (Thái Nguyên), Nguyễn Thị Hải Yến (Hà Tĩnh), Lê Thị Thoa (Thái Bình). Giải xuất sắc trị giá 1,2 triệu đồng kèm theo một chuyến tham quan du lịch tại Malaysia và Singapore. Ban tổ chức cũng trao 8 giải nhất, 18 giải nhì, 29 giải ba, 24 giải tư và các giải tập thể.

PHÁT HÀNH SÁCH LỚP 4, LỚP 9 MỚI

Từ ngày 1.5.2005 Nhà xuất bản Giáo dục bắt đầu phát hành SGK lớp 4 và từ 15.5.2005 phát hành SGK lớp 9 mới, cùng sách giáo viên, sách bài tập. Bộ SGK lớp 4 có 9 cuốn, giá tổng cộng **62.300đ.** Bộ SGK lớp 9 có 11 cuốn chung, 1 cuốn Công nghệ (chọn trong 5 môn) và 1 cuốn Ngoại ngữ (chọn 1 trong 4 thứ tiếng), tổng cộng có 13 cuốn.

NXBGD

THÔNG BÁO

Từ tháng 7.2005 Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ sẽ tăng thêm 4 trang ruột và in giấy trắng.

Giá bán lẻ là **4000 đồng** mỗi số. Xin mời bạn đọc đặt mua tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học, các đại lí và Bưu điện quận, huyện, tỉnh, thành trong cả nước.

THTT

ISSN : 0866-8035 Chế bản tại Tòa soạn
Chỉ số : 12884 In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ **Giá : 3500 đồng**
Mã số : 8BT37M5 In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2005 **Ba nghìn năm trăm đồng**