

NGUYỄN DOĀN PHƯỚC

LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TUYẾN TÍNH

EBOOKBKMT.COM
Tài liệu kỹ thuật miễn phí



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

Nguyễn Doãn Phước

EBOOKBKMT.COM
Tài liệu kỹ thuật miễn phí

**LÝ THUYẾT
ĐIỀU KHIỂN TUYẾN TÍNH**



**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
– Hà Nội 2002 –**

Chủ trách nhiệm xuất bản: **PGS. TS. Tô Đặng Hải**
Biên tập: **Nguyễn Đăng**
Tranh bày và chế bản: **Tác giả**
Vẽ bìa: **Hương Lan**

*In 1000 cuốn khuôn khổ 16 x 24 cm. Tại Xưởng in NXB Văn hóa Dân tộc.
Giấy phép xuất bản số: 111 - 62 - 4/2002.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2002.*

Lời nói đầu

Điều khiển một hệ thống là tìm cách can thiệp vào hệ thống để hiệu chỉnh, để biến đổi sao cho nó có được những đặc điểm, tính chất mà ta mong muốn. Như vậy rõ ràng khi thực hiện công việc điều khiển, ta cần phải tiến hành các bước sau đây:

- Xác định phương tiện can thiệp từ bên ngoài vào hệ thống. Vì hệ thống giao tiếp với môi trường bên ngoài bằng những tín hiệu vào, ra của nó nên chỉ có thể thông qua tín hiệu vào - ra này ta mới có thể can thiệp được vào hệ thống. Muốn can thiệp có hiệu quả ta phải hiểu rõ bản chất tín hiệu của hệ thống là tiền định, ngẫu nhiên, liên tục hay không liên tục.
- Sau khi đã hiểu rõ bản chất, phương tiện can thiệp hệ thống thì bước tiếp theo phải mô tả hệ thống. Hình thức mô tả được dùng nhiều trong điều khiển là mô hình toán học biểu diễn mối quan hệ giữa tín hiệu vào - ra của hệ thống.
- Với mô hình mô tả đã có, tiếp theo ta phải xác định xem hệ thống hiện đã có những tính chất gì, các đặc tính nào cần phải sửa đổi và sửa đổi như thế nào để hệ có được chất lượng như ta mong muốn. Nói cách khác phải chỉ rõ từng nhiệm vụ của sự can thiệp.
- Cuối cùng, khi đã xác định được từng nhiệm vụ cụ thể cho việc can thiệp ta sẽ tiến hành thực hiện việc can thiệp đó.

Nội dung cuốn sách "**Lý thuyết điều khiển tuyến tính**" này được trình bày theo đúng thứ tự các bước nêu trên khi thực hiện bài toán điều khiển. Nó được chia thành bốn chương:

Chương 1 trình bày các phương pháp mô tả tín hiệu, những hình thức biểu diễn tín hiệu khác nhau cả trong miền thời gian lẫn trong miền tần số.

Chương 2 là nội dung các phương pháp mô tả hệ thống.

Chương 3 phục vụ việc phân tích hệ thống. Nó mô tả những phương pháp khảo sát, xác định các tính chất vốn có của hệ thống cũng như sự ảnh hưởng của sự can thiệp từ bên ngoài đối với những tính chất này.

Chương 4 là phần mô tả các phương pháp tổng hợp, thiết kế bộ điều khiển, tạo ra được sự can thiệp cần có vào hệ thống.

Do được phân chia theo các bước thực hiện bài toán điều khiển như vậy, chứ không theo chủng loại hệ thống, nên mỗi chương của quyển sách này sẽ chứa đựng luôn cả các phần về hệ SISO (một vào - một ra), hệ MIMO (nhiều vào - ra), hệ liên tục, hệ không liên tục. Những bạn đọc chỉ quan tâm đến một chủng loại hệ thống nhất định sẽ đều tìm thấy

hệ đồ trong cá bốn chương của quyển sách. Ngoài ra, quyển sách còn có rất nhiều các ví dụ minh họa phục vụ cho việc tìm hiểu của bạn đọc được nhanh và thuận tiện.

Quyển sách có mục đích là giới thiệu với bạn đọc những phương pháp phân tích và thiết kế bộ điều khiển cơ bản để can thiệp vào hệ tuyến tính. Động cơ chính thúc đẩy tác giả viết quyển sách này chỉ đơn giản là muốn đưa đến cho các bạn sinh viên đại học, cao học ngành Điều khiển tự động, ngành Tự động hóa thêm một công cụ hỗ trợ việc tự học, thêm một tài liệu tóm tắt tương đối tổng quan về mặt lý thuyết điều khiển tuyến tính, giúp cho các bạn có được một cái nhìn xuyên suốt về môn học Lý thuyết hệ thống điều khiển có trong ngành mình theo đuổi. Xa hơn nữa, tác giả cũng mong muốn có thể đưa đến được cho bạn đọc ở những lĩnh vực khác một quyển sách tra cứu các khái niệm, các phương pháp lý thuyết về phân tích tổng hợp khi phải giải quyết một bài toán điều khiển.

Quyển sách có lẽ đã không thể hoàn thành được nếu không có sự giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi của các bạn đồng nghiệp trong Bộ môn Điều khiển tự động, của Trung tâm trao đổi Khoa học và Kỹ thuật Việt-Đức, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, nơi tác giả đang công tác. Tác giả muốn gửi những lời cảm ơn chân thành đến họ.

Sẽ không thể có được quyển sách nếu không có sự cảm thông, chịu đựng, giúp đỡ của hai thành viên khác trong gia đình tác giả là vợ và con gái. Bởi vậy tác giả thấy rằng mình còn có một nghĩa vụ phải hoàn thành quyển sách đúng vào dịp sinh nhật họ để bày tỏ lòng biết ơn.

Mặc dù đã cố gắng cẩn thận, song chắc chắn không thể không có thiếu sót. Do đó tác giả rất mong nhận được những góp ý sửa đổi hay bổ sung thêm từ phía bạn đọc. Thư góp ý xin gửi về:

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
Khoa Điện, Bộ môn Điều khiển Tự động.
Số 1 Đại Cồ Việt. C9/305-306

Hà Nội, ngày 4. và 5.11.2001

Tác giả

Mục lục

1 Mô tả tín hiệu	1
1.1 Khái niệm chung	1
1.1.1 Định nghĩa tín hiệu	1
1.1.2 Phân loại tín hiệu	1
1.1.3 Một số tín hiệu điển hình	3
1.2 Toán tử Fourier cho tín hiệu liên tục	5
1.2.1 Ảnh Fourier của tín hiệu tuần hoàn	5
1.2.2 Ảnh Fourier của tín hiệu không tuần hoàn	6
1.3 Toán tử Laplace cho tín hiệu liên tục	8
1.3.1 Phép biến đổi Laplace thuận	9
1.3.2 Phép biến đổi Laplace ngược	14
1.3.3 Giải phương trình vi phân nhờ toán tử Laplace	21
1.3.4 Mối quan hệ giữa toán tử Fourier và toán tử Laplace	23
1.4 Mô tả tín hiệu không liên tục	25
1.4.1 Tín hiệu xung	25
1.4.2 Toán tử Z	26
1.4.3 Toán tử Z ngược	29
1.4.4 Mối quan hệ giữa toán tử Z và toán tử Laplace	34
1.5 Chuẩn của tín hiệu	38
1.5.1 Khái niệm chuẩn	38
1.5.2 Quan hệ của chuẩn với ảnh Fourier và ảnh Laplace	42
1.6 Mô tả tín hiệu ngẫu nhiên	44
Câu hỏi ôn tập và bài tập	48
2 Mô tả hệ thống	55
2.1 Mô hình liên tục cho hệ SISO	58
2.1.1 Phương trình vi phân mô tả quan hệ vào-ra	58
2.1.2 Hàm truyền đạt, hàm trọng lượng và hàm quá độ	62
2.1.3 Đại số sơ đồ khối	69
2.1.4 Sơ đồ tín hiệu và công thức Mason	73
2.1.5 Đường đặc tính tần biến-pha	81
2.1.6 Đường đặc tính tần logarithm-Đồ thị Bode	88
2.1.7 Quan hệ giữa phần thực và ảo của hàm đặc tính tần-Toán tử Hilbert	95
2.2 Những khâu SISO liên tục cơ bản	101
2.2.1 Khâu quát tính bậc nhất PT_1	102
2.2.2 Khâu quát tính-tích phân bậc nhất IT_1	103
2.2.3 Khâu quát tính-tích phân bậc n (IT_n)	104
2.2.4 Khâu quát tính bậc hai PT_2	105
2.2.5 Khâu quát tính bậc n PT_n	106

2.2.6	Khâu Lead/Lag	107
2.2.7	Khâu dao động bậc 2	110
2.2.8	Hệ pha cực tiêu	111
2.2.9	Khâu giữ trễ	113
2.3	Mô hình trạng thái cho hệ MIMO liên tục	115
2.3.1	Khái niệm phương trình trạng thái	115
2.3.2	Ôn nhanh về đại số ma trận	119
2.3.3	Ma trận hàm mũ e^{At} và cách xác định	131
2.3.4	Nghiệm của phương trình trạng thái dừng	141
2.3.5	Nghiệm của phương trình trạng thái phụ thuộc t	143
2.3.6	Quan hệ giữa mô hình trạng thái và hàm truyền đạt	146
2.4	Hệ không liên tục và hệ rời rạc	151
2.4.1	Phân biệt hai khái niệm	151
2.4.2	Dãy trọng lượng, hàm truyền đạt và phương trình sai phân	153
2.4.3	Đại số sơ đồ khối hệ không liên tục	158
2.4.4	Mô hình trạng thái hệ rời rạc có tín hiệu ra không liên tục	161
2.4.5	Vài điều lưu ý	164
	Câu hỏi ôn tập và bài tập	165
3	Phân tích hệ thống	173
3.1	Những khái niệm chung của phân tích	173
3.1.1	Nhiệm vụ của công việc phân tích hệ thống	173
3.1.2	Quá trình cưỡng bức và quá trình tự do	175
3.1.3	Quá trình quá độ và chế độ xác lập	181
3.2	Tính ổn định hệ liên tục	184
3.2.1	Ôn định BIBO và ổn định Lyapunov	184
3.2.2	Một số kết luận chung	185
3.2.3	Tiêu chuẩn Routh–Hurwitz	192
3.2.4	Tiêu chuẩn Lienard–Chipart	199
3.2.5	Tiêu chuẩn Michailov	200
3.2.6	Tiêu chuẩn Nyquist và các phát biểu tương đương	203
3.2.7	Kiểm tra tính ổn định hệ kín nhờ biểu đồ Bode	207
3.2.8	Tiêu chuẩn Kharitonov	209
3.2.9	Điều kiện đủ của Geschgorin	216
3.2.10	Tiêu chuẩn Lyapunov	218
3.3	Tính điều khiển được của hệ liên tục	223
3.3.1	Ý nghĩa của công việc	223
3.3.2	Tiêu chuẩn Hautus	227
3.3.3	Tiêu chuẩn Kalman	228
3.3.4	Những tiêu chuẩn tổng quát	230
3.4	Tính quan sát được của hệ liên tục	235
3.4.1	Ý nghĩa của công việc	235
3.4.2	Tiêu chuẩn chung	236
3.4.3	Định lý đối ngẫu cho hệ tham số hằng và các hệ quả	239
3.5	Phân tích hệ SISO liên tục tuyến tính	241
3.5.1	Sự đồng nhất của điều khiển được và quan sát được	242
3.5.2	Ý nghĩa của vị trí các điểm cực và điểm không	244
3.5.3	Phân tích hệ hồi tiếp	250

3.5.4 Phương pháp quỹ đạo nghiệm số.....	261
3.5.5 Mối liên hệ giữa chuẩn của tín hiệu và của hệ thống.....	266
3.6 Phân tích hệ không liên tục.....	271
3.6.1 Quá trình tự do và tính ổn định.....	273
3.6.2 Tiêu chuẩn xét tính ổn định của Schur–Cohn–Jury.....	275
3.6.3 Sử dụng các tiêu chuẩn xét tính ổn định hệ liên tục.....	279
3.6.4 Tính điều khiển được và quan sát được.....	281
Câu hỏi ôn tập và bài tập.....	287
4 Tổng hợp bộ điều khiển	293
4.1 Bộ điều khiển PID.....	293
4.1.1 Sử dụng mô hình xấp xỉ bậc nhất của đối tượng.....	294
4.1.2 Xác định tham số bằng thực nghiệm.....	297
4.1.3 Phương pháp Chien–Hrones–Reswick.....	298
4.1.4 Phương pháp tổng T của Kuhn.....	300
4.2 Bộ điều khiển tối ưu độ lớn	304
4.2.1 Nguyên lý tối ưu độ lớn	304
4.2.2 Thiết kế bộ điều khiển	306
4.2.3 Tổng kết	309
4.3 Bộ điều khiển tối ưu đối xứng.....	309
4.3.1 Nguyên lý tối ưu đối xứng.....	309
4.3.2 Điều khiển đối tượng tích phân-quán tính bậc hai	314
4.3.3 Điều khiển đối tượng tích phân-quán tính bậc cao	316
4.3.4 Điều khiển đối tượng bất kỳ	317
4.3.5 Nâng cao chất lượng hệ kín bằng bộ điều khiển tiền xử lý	319
4.4 Phương pháp cân bằng mô hình	322
4.4.1 Nội dung phương pháp.....	322
4.4.2 Tính chất bộ điều khiển	322
4.4.3 Sự ảnh hưởng của nhiễu	324
4.4.4 Bộ điều khiển dự báo Smith	326
4.5 Điều khiển tách kênh	327
4.5.1 Tại sao phải tách kênh và phát biểu bài toán	327
4.5.2 Thuật toán tách kênh	328
4.5.3 Ma trận truyền đạt của hệ đã tách kênh	332
4.5.4 Dạng Smith–McMillan của ma trận truyền đạt và cách biến đổi	334
4.6 Phương pháp cho trước điểm cực.....	337
4.6.1 Đặt vấn đề	337
4.6.2 Phương pháp Ackermann.....	339
4.6.3 Phương pháp Roppeneker	346
4.6.4 Phương pháp modal phản hồi trạng thái	350
4.6.5 Phương pháp modal phản hồi tín hiệu ra	361
4.6.6 Nâng cao chất lượng bằng bộ tiền xử lý	364
4.7 Bộ điều khiển tối ưu	367
4.7.1 Xác định tham số tối ưu cho bộ điều khiển	367
4.7.2 Thiết kế bộ điều khiển (tính) tối ưu phản hồi trạng thái	370
4.7.3 Phương pháp tìm nghiệm trực tiếp.....	377
4.7.4 Thuật toán truy hồi tìm nghiệm phương trình Riccati	380

4.8	Bộ quan sát trạng thái.....	382
4.8.1	Bộ quan sát trạng thái của Luenberger.....	382
4.8.2	Giảm bậc bộ quan sát trạng thái.....	385
4.8.3	Bộ quan sát trạng thái của Kalman và bài toán LQG	387
4.9	Thiết kế bộ điều khiển không liên tục	391
4.9.1	Bộ điều khiển PID số.....	391
4.9.2	Xác định tham số cho PID số bằng thực nghiệm	393
4.9.3	Sử dụng ánh xạ luồng tuyến tính để thiết kế bộ điều khiển	394
4.9.4	Thiết kế bộ điều khiển dead-beat.....	397
	Câu hỏi ôn tập và bài tập	403
	Danh mục các khái niệm	407
	Tài liệu tham khảo	408

1 MÔ TẢ TÍN HIỆU

EBOOKBKMT.COM
Tài liệu kỹ thuật miễn phí

1.1 Khái niệm chung

1.1.1 Định nghĩa tín hiệu

Tín hiệu $x(t)$ được định nghĩa như là một *hàm số phụ thuộc thời gian* mang thông tin về các *thông số kỹ thuật* được quan tâm trong hệ thống và được *truyền tải bởi những đại lượng vật lý*, nói cách khác tín hiệu là *một hình thức biểu diễn thông tin*. Ta sẽ lấy một số ví dụ minh họa cho định nghĩa vừa trình bày.

Ví dụ 1: Chẳng hạn để điều khiển một bình nước sao cho mực nước trong bình luôn là hằng số không đổi thì độ cao cột nước trong bình sẽ là một trong những thông số kỹ thuật được quan tâm của hệ thống. Giá trị về độ cao cột nước tại thời điểm t được đo bởi cảm biến và được biểu diễn thành một đại lượng điện áp dưới dạng hàm số phụ thuộc thời gian $u(t)$ có đơn vị là *Volt*. Đại lượng vật lý ở đây là điện áp đã được sử dụng để truyền tải hàm thời gian $u(t)$ mang thông tin về độ cao cột nước. □

Ví dụ 2: Để điều khiển nhiệt độ thì tất nhiên nhiệt độ hiện thời là một thông số kỹ thuật của hệ thống được quan tâm. Giá trị nhiệt độ tại thời điểm t dưới dạng giá trị của hàm số phụ thuộc thời gian $i(t)$ được đo bởi cảm biến và được biểu diễn thành một đại lượng dòng điện có đơn vị là *Ampe*. Như vậy tín hiệu $i(t)$ là một hàm thời gian mang thông tin về nhiệt độ trong phòng tại thời điểm t và được truyền tải bởi đại lượng vật lý là dòng điện. □

Trong một hệ thống có thể có nhiều tín hiệu $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ được quan tâm cùng một lúc. Tất cả các tín hiệu được quan tâm đó sẽ thường được ta ghép chung lại thành một *vector tín hiệu* ký hiệu bởi:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \text{ tức là vector sẽ được ký hiệu thêm bằng dấu gạch chân.}$$

1.1.2 Phân loại tín hiệu

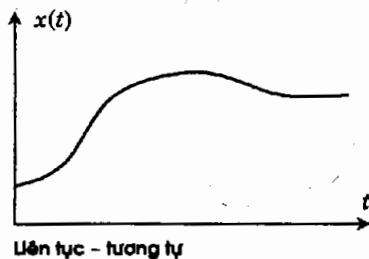
Đo tín hiệu $x(t)$ có mô hình là một hàm thời gian như định nghĩa vừa nêu thì phụ thuộc vào dạng miền xác định cũng như miền giá trị của hàm số $x(t)$ là *liên tục* hay *rời rạc* mà tín hiệu $x(t)$ có thể được phân thành bốn kiểu như sau:

- Tín hiệu liên tục, nếu $x(t)$ có miền xác định liên thông. Nói cách khác miền xác định của tín hiệu liên tục $x(t)$ là *một* khoảng thời gian.
- Tín hiệu không liên tục, nếu $x(t)$ có miền xác định là các điểm rời nhau, tức là đường nối hai điểm bất kỳ của miền xác định sẽ không nằm hoàn toàn trong miền xác định (các điểm không liên thông với nhau).
- Tín hiệu tương tự, nếu $x(t)$ có miền giá trị liên thông, tức là miền giá trị của $x(t)$ phải là *một* khoảng thuộc \mathbb{R} .
- Tín hiệu rời rạc, nếu miền giá trị của $x(t)$ là các điểm rời nhau trong \mathbb{R} .

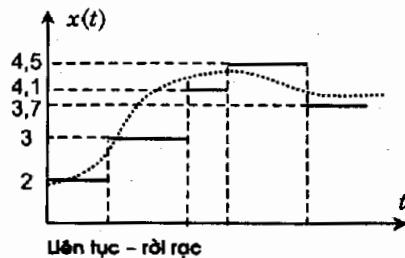
Bốn kiểu tín hiệu trên chỉ là sự phân loại cơ bản theo miền xác định *hoặc* theo miền giá trị của $x(t)$. Trên cơ sở bốn kiểu phân loại cơ bản đó mà một tín hiệu $x(t)$ khi được để ý chung đồng thời tới cả miền xác định và miền giá trị có thể là:

- a) dạng tín hiệu liên tục – tương tự,
- b) dạng tín hiệu không liên tục – tương tự,
- c) dạng tín hiệu liên tục – rời rạc,
- d) dạng tín hiệu không liên tục – rời rạc,

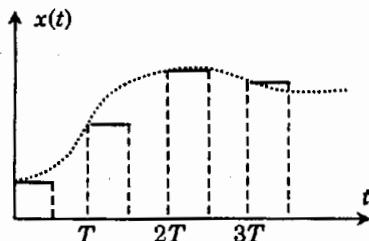
trong đó dạng tín hiệu không liên tục – rời rạc còn có tên gọi là *tín hiệu số*. Hình 1.1 minh họa trực quan cho bốn dạng tín hiệu vừa trình bày.



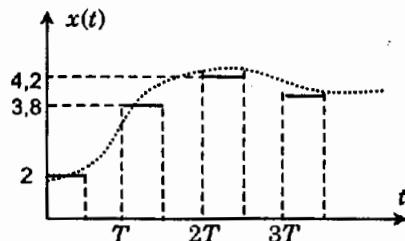
Lиn tuc - tuong tu



Lиn tuc - roi rac



Không liên tục - tuong tu



Không liên tục - roi rac

Hình 1.1: Các dạng tín hiệu khác nhau.

Ví dụ 3: Giả sử ta có tín hiệu liên tục – tương tự $x(t)$. Để xử lý tín hiệu $x(t)$ bằng những thuật toán chạy trên máy tính người ta cần phải trích mẫu tín hiệu tại những điểm thời gian cách đều nhau T_a được gọi là *thời gian trích mẫu*. Nếu dãy các giá trị tín hiệu $\{x_k\}$ thu được với $x_k = x(kT_a)$ được xem như một tín hiệu thì do miền xác định của $\{x_k\}$ là tập điểm đếm được

$$\{t = kT_a \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Z} \text{ là ký hiệu chỉ tập các số nguyên}$$

(không liên thông) nên dãy $\{x_k\}$ là tín hiệu có dạng không liên tục – tương tự.

Tín hiệu không liên tục – tương tự $\{x_k\}$ vẫn chưa thể xử lý được bằng máy tính bởi vì máy tính chỉ làm việc được với số hữu tỷ trong một khoảng cho phép, trong khi x_k có thể là một số thực bất kỳ (ví dụ như số vô tỷ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π , ...). Khoảng các giá trị hữu tỷ cho phép phụ thuộc vào loại máy tính, ngôn ngữ lập trình cũng như kiểu khai báo biến của ngôn ngữ lập trình đó. Chẳng hạn biến thực kiểu **double** của ngôn ngữ lập trình C chỉ làm việc được với những số hữu tỷ trong khoảng từ $-1,7 \cdot 10^{-308}$ đến $1,7 \cdot 10^{308}$ hoặc với biến kiểu **long double** thì khoảng cho phép là từ $-1,1 \cdot 10^{-4932}$ đến $1,1 \cdot 10^{4932}$.

Bởi vậy bước tiếp theo cần phải làm là xấp xỉ các giá trị x_k thành số hữu tỷ gần nhất, ký hiệu là \tilde{x}_k , nhưng không nằm ngoài khoảng cho phép. Việc xấp xỉ $\{x_k\}$ thành $\{\tilde{x}_k\}$ vô hình chung đã rời rạc hóa miền giá trị của $x(t)$. Miền giá trị của $\{\tilde{x}_k\}$ bây giờ là tập các số hữu tỷ (các điểm không liên thông). Ví dụ

$$\{\tilde{x}_k \in \mathbb{Q} \mid -1,7 \cdot 10^{-308} \leq \tilde{x}_k \leq 1,7 \cdot 10^{308}\}, \quad \mathbb{Q} \text{ là ký hiệu chỉ tập các số hữu tỷ}$$

và do đó dãy $\{\tilde{x}_k\}$ là tín hiệu không liên tục – rời rạc (tín hiệu số).

□

1.1.3 Một số tín hiệu điển hình

Trong vô số các tín hiệu với nhiều dạng khác nhau, điều khiển tuyến tính có một sự quan tâm đặc biệt đến một số tín hiệu điển hình thường gặp trong ứng dụng. Đó là các tín hiệu bậc thang (Heaviside), tín hiệu tăng đều, tín hiệu xung vuông và tín hiệu dirac. Tất cả các loại tín hiệu này đều có một điểm chung là có tính causal (tính nhân quả), tức là:

$$x(t) = 0 \quad \text{khi} \quad t < 0.$$

- 1) Tín hiệu bậc thang (còn gọi là hàm Heaviside) là tín hiệu định nghĩa bởi

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } t \geq 0 \\ 0 & \text{khi } t < 0 \end{cases}$$

Cho một tín hiệu $x(t)$ bất kỳ. Nếu $x(t)$ liên tục, khả vi từng khúc và có giới hạn

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) < \infty \quad (\text{tức là bị chặn})$$

thì nó biểu diễn được thông qua hàm Heaviside như sau:

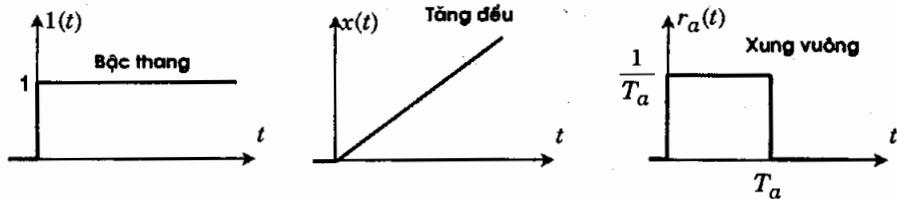
$$x(t) = x(-\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau} 1(t - \tau) d\tau.$$

- 2) Tín hiệu tăng đều được xác định qua công thức

$$x(t) = t 1(t) = \begin{cases} t & \text{khi } t \geq 0 \\ 0 & \text{khi } t < 0 \end{cases}$$

- 3) Tín hiệu xung vuông, định nghĩa bởi

$$r_a(t) = \frac{1}{T_a} [1(t) - 1(t - T_a)].$$



Hình 1.2: Các tín hiệu bậc thang, tăng đều và xung vuông.

- 4) Tín hiệu dirac (còn gọi là *hàm mở rộng delta*)

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) = \lim_{T_a \rightarrow 0} r_a(t) = \lim_{T_a \rightarrow 0} \frac{1}{T_a} [1(t) - 1(t - T_a)]. \quad (1.1)$$

Một tín hiệu $x(t)$ tùy ý, nếu liên tục với $-\infty < t < \infty$ thì có thể xấp xỉ thành (hình 1.3)

$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_a) r_a(t - kT_a) T_a$$

Bởi vậy với $T_a \rightarrow 0$ ta sẽ có

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad \Leftrightarrow \quad x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt. \quad (1.2a)$$

vì $\delta(t)$ là hàm chẵn. Công thức đó là công thức mô tả quá trình trích mẫu $x(t)$ tại t_0 .

Tín hiệu dirac là một hàm đặc biệt. Tính đặc biệt nằm ở chỗ tín hiệu này vượt ra ngoài ý nghĩa hàm số thông thường. Bản thân nó không có ý nghĩa hàm số như ánh xạ từ \mathbb{R} vào \mathbb{R} mà nhiều hơn nó là một phép tính theo nghĩa phiếm hàm tuyến tính có tác dụng chuyển một hàm thường thành một số thực:

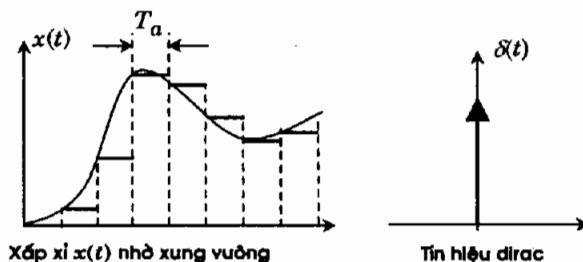
$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)dt \quad \text{tức là } \delta(t): x(t) \mapsto x(0). \quad (1.2b)$$

Bởi vậy phép nhân giữa *phiếm hàm dirac* $\delta(t)$ với một hàm thường về mặt toán học là không có nghĩa và luôn phải được hiểu là phép tích phân (1.2b), tức là:

$$\text{Định nghĩa} \quad \delta(t)x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)dt = x(0). \quad (1.2c)$$

Bên cạnh (1.1) người ta còn sử dụng tín hiệu dirac dưới những dạng công thức định nghĩa khác nhau như:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) d\omega = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \cos(\omega t) d\omega = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin(at)}{\pi t}. \quad (1.2d)$$



Hình 1.3: Tín hiệu dirac và xấp xỉ tín hiệu bất kỳ nhờ hàm xung vuông.

1.2 Toán tử Fourier cho tín hiệu liên tục

Trong quá trình nghiên cứu tín hiệu $x(t)$ người ta thường quan tâm đến đặc tính tần số của nó. Công cụ hữu hiệu giúp việc khảo sát đặc tính tần số của $x(t)$ là toán tử Fourier. Nó giúp ta có thể biểu diễn tín hiệu $x(t)$ thông qua tập các dao động của nó, trong đó mỗi dao động lại là một tín hiệu điều hòa đặc trưng cho tính chất của $x(t)$ tại điểm tần số nhất định.

1.2.1 Ảnh Fourier của tín hiệu tuần hoàn

Trước hết ta xét tín hiệu:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \varphi).$$

Đây là tín hiệu dạng dao động điều hòa với tần số dao động là ω_0 . Áp dụng công thức Cauchy

$$e^{ja} = \cos a + j \cdot \sin a$$

tín hiệu $x(t)$ sẽ biểu diễn được bởi:

$$x(t) = ce^{j\omega_0 t} + \bar{c}e^{-j\omega_0 t},$$

trong đó $c = \frac{A}{2}e^{-j\varphi}$ và \bar{c} là ký hiệu chỉ số phức liên hợp của c .

Mở rộng cách biểu diễn trên cho một tín hiệu tuần hoàn $x(t)$ bất kỳ ta được: Nếu tín hiệu $x(t)$ thỏa mãn:

a) $x(t) = x(t+T)$ với mọi t , (tần số tuần hoàn với chu kỳ T)

b) $x(t)$ liên tục từng khúc trong khoảng $0 \leq t < T$,

c) tại điểm không liên tục $t_0 \in [0, T)$ thỏa mãn

$$x(t_0) = \frac{1}{2} [x(t_0-0) + x(t_0+0)],$$

d) $x(t)$ trong khoảng $[0, T)$ chỉ có hữu hạn các điểm cực trị,

thì tín hiệu $x(t)$ biểu diễn được dưới dạng một chuỗi Fourier như sau:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1.3a)$$

với

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (1.3b)$$

trong đó $\bar{c}_n = c_n$ nếu $x(t)$ là tín hiệu thực và \bar{c}_n là giá trị phức liên hợp của c_n .

Phép biến đổi $x(t) \mapsto \{c_n\}$ theo (1.3) là một đơn ánh.

1.2.2 Ảnh Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

Nếu một tín hiệu $x(t)$ thỏa mãn:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$, tức là tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ hội tụ,

b) $x(t)$ trong khoảng hữu hạn bất kỳ liên tục từng khúc,

c) tại điểm không liên tục t_0 thỏa mãn $x(t_0) = \frac{1}{2} [x(t_0-0) + x(t_0+0)]$,

d) $x(t)$ trong khoảng hữu hạn bất kỳ chỉ có hữu hạn các điểm cực trị,

thì $x(t)$ biểu diễn được dưới dạng tích phân Fourier như sau:

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.4a)$$

$$\text{và } x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{x(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.4b)$$

Hàm phức $X(j\omega)$ được gọi là *ánh Fourier* (hay *phô*) của $x(t)$. Khi $x(t)$ là tín hiệu thực (có miền giá trị thuộc \mathbb{R}) hoặc phức nhưng $x(t) = \bar{x}(t)$ thì $X(j\omega)$ sẽ còn thỏa mãn:

$$X(-j\omega) = \bar{X}(j\omega).$$

Toán tử Fourier $\mathcal{F}: x(t) \mapsto X(j\omega)$ có những tính chất quan trọng sau:

- 1) Toán tử Fourier là ánh xạ một-một, tức là nếu $x(t) \neq y(t)$ thì cũng có $X(j\omega) \neq Y(j\omega)$, trong đó $X(j\omega)$ là ánh Fourier của $x(t)$ và $Y(j\omega)$ là ánh Fourier của $y(t)$.
- 2) Phép biến đổi Fourier là toán tử tuyến tính. Nếu $x(t)$ có ánh Fourier $X(j\omega)$ và $y(t)$ có ánh $Y(j\omega)$ thì tổng tuyến tính $z(t) = ax(t)+by(t)$ của chúng sẽ có ánh $Z(j\omega)$ là
$$Z(j\omega) = \mathcal{F}\{ax(t)+by(t)\} = aX(j\omega) + bY(j\omega).$$
- 3) Nếu $x(t)$ là hàm chẵn, tức là $x(t) = x(-t)$ thì ánh Fourier $X(j\omega)$ là hàm thực (phần ảo của nó bằng 0).
- 4) Nếu $x(t)$ là hàm lẻ, tức là $x(t) = -x(-t)$ thì ánh Fourier $X(j\omega)$ của nó là hàm thuần ảo (phần thực của nó bằng 0).
- 5) Nếu $X(j\omega)$ là ánh Fourier của $x(t)$ thì ánh của $y(t) = x(t-T)$ sẽ là

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t-T)\} = X(j\omega)e^{-j\omega T}.$$

- 6) Nếu $X(j\omega)$, $Y(j\omega)$ là ánh Fourier của $x(t)$, $y(t)$ và tích chập

$$x(t)^*y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau.$$

có ánh Fourier thì ánh đó sẽ là

$$\mathcal{F}\{x(t)^*y(t)\} = X(j\omega)Y(j\omega).$$

- 7) Tích $z(t)=x(t)y(t)$ của $x(t)$ có ánh Fourier $X(j\omega)$ với $y(t)$ có ánh $Y(j\omega)$ sẽ có ánh $Z(j\omega)$ là

$$Z(j\omega) = X(j\omega)^*Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\zeta)Y[j(\omega-\zeta)]d\zeta.$$

- 8) Gọi $X(j\omega)$ là ánh Fourier của $x(t)$ và $Y(j\omega)$ là ánh của $y(t)=(-jt)^n x(t)$. Vậy thì

$$Y(j\omega) = \frac{d^n X(j\omega)}{d\omega^n}.$$

Ví dụ 4: Xét tín hiệu

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } |t| \leq T \\ 0 & \text{khi } t \notin [-T, T] \end{cases}$$

Tín hiệu này có ánh Fourier là

$$X(j\omega) = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \left(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T} \right) = \frac{2 \sin \omega T}{\omega}$$

và ảnh đó thỏa mãn:

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} X(j\omega) = \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \omega T}{\omega} = 0. \quad (1.5)$$

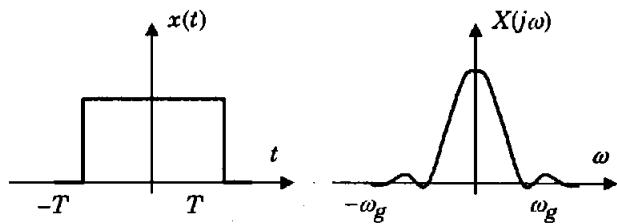
Tính chất (1.5) chỉ rằng những thành phần dao động với tần số cao trong $x(t)$ là rất nhỏ và có thể bỏ qua khi $|\omega| > \omega_g$, trong đó ω_g là tần số giới hạn đủ lớn (hình 1.4). Bởi vậy nếu như trong $x(t)$ có lằn nhiễu $n(t)$ tần số cao:

$$\tilde{x}(t) = x(t) + n(t)$$

thì ta có thể lọc $x(t)$ ra khỏi $\tilde{x}(t)$ bằng cách tính ảnh Fourier $\tilde{X}(j\omega)$ của $\tilde{x}(t)$, bỏ đi tất cả những thành phần có tần số cao hơn ω_g trong $\tilde{X}(j\omega)$ theo công thức:

$$X(j\omega) \approx \tilde{X}(j\omega) W(\omega), \text{ với } W(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{khi } |\omega| \leq \omega_g \\ 0 & \text{khi } |\omega| > \omega_g \end{cases}$$

rồi chuyển ngược lại miền thời gian với phép biến đổi ngược (1.4a) để có $x(t)$. □



Hình 1.4: Tín hiệu $x(t)$ và ảnh Fourier $X(j\omega)$ của nó.

Ví dụ 5: Dựa theo công thức (1.2b) thì ảnh Fourier của tín hiệu dirac $x(t) = \delta(t)$ sẽ là

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{\omega=0} = 1.$$
□

1.3 Toán tử Laplace cho tín hiệu liên tục

Toán tử Fourier, như đã nói, là một công cụ hữu hiệu giúp cho việc khảo sát đặc tính tần số của một tín hiệu $x(t)$. Nhưng nó cũng có nhược điểm là bị giới hạn trong một lớp các tín hiệu khá nhỏ do chúng phải thỏa mãn các điều kiện để có thể tồn tại ảnh Fourier $X(j\omega)$. Ngay cả những tín hiệu phổ thông thường gặp trong điều khiển như tín hiệu bậc thang $1(t)$, tín hiệu tăng đều $x(t) = t1(t)$, ... cũng không có ảnh Fourier (theo nghĩa hẹp như định nghĩa nêu trong 1.2.2). Lý do chính cho giới hạn trên của toán tử Fourier là điều kiện

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1.6)$$

phải có của tín hiệu $x(t)$.

Để có thể mở rộng lớp các tín hiệu có ảnh trong miền tần số giống như ảnh Fourier, người ta đã xây dựng nhiều lý thuyết với các toán tử khác nhau như toán tử Fourier mở rộng, toán tử Laplace ..., trong đó toán tử Laplace đặc biệt có ích cho việc phân tích một hệ thống điều khiển kỹ thuật mà ở đó các tín hiệu $x(t)$ thường gấp là tín hiệu causal ($x(t)=0$ khi $t<0$).

Ý tưởng chính cho việc xây dựng toán tử Laplace với một tín hiệu causal là tìm một hằng số dương α đủ lớn sao cho tích

$$\tilde{x}(t) = e^{-\alpha t} x(t)$$

thỏa mãn điều kiện khắt khe (1.6). Điều này là có thể vì bao giờ ta cũng tìm được α dương đủ lớn để hàm $e^{-\alpha t}$ tiến về 0 nhanh hơn $x(t)$ một cách tùy ý. Do đó sẽ làm cho

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) \text{ về } 0 \text{ với vận tốc mà ta mong muốn và dẫn đến } \int_0^{\infty} |\tilde{x}(t)| dt < \infty.$$

1.3.1 Phép biến đổi Laplace thuận

Nếu tín hiệu $x(t)$ thỏa mãn

- a) $x(t) = 0$ với $t < 0$,
- b) $\int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\alpha t} dt < \infty$ với một α dương đủ lớn,
- c) $x(t)$ trong khoảng hữu hạn bất kỳ liên tục từng khúc,
- d) tại điểm không liên tục t_0 thỏa mãn $x(t_0) = \frac{1}{2} [x(t_0-0) + x(t_0+0)]$,
- e) $x(t)$ trong khoảng hữu hạn bất kỳ chỉ có hữu hạn các điểm cực trị,

thì tồn tại

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

và

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (1.7b)$$

trong đó $s = c+j\omega$ và $c > \alpha$. Giá trị α được gọi là bán kính hội tụ của tích phân. Hàm phức $X(s)$ tính theo (1.7a) được gọi là ảnh Laplace của tín hiệu causal $x(t)$.

Giống như toán tử Fourier, phép biến đổi Laplace $\mathcal{L}: x(t) \mapsto X(s)$ cũng có các tính chất quan trọng thường được sử dụng như sau:

- 1) **Tính đơn ánh:** Phép biến đổi Laplace ánh xạ một-một, tức là nếu $x(t) \neq y(t)$ thì cũng có $X(s) \neq Y(s)$, trong đó $X(s)$ là ảnh Laplace của $x(t)$ và $Y(s)$ là ảnh của $y(t)$.
- 2) **Tính tuyến tính:** Phép biến đổi Laplace là toán tử tuyến tính. Nếu $x(t)$ có ảnh $X(s)$ và $y(t)$ có ảnh $Y(s)$ thì tổng tuyến tính $z(t) = ax(t)+by(t)$ của chúng sẽ có ảnh $Z(s)$ là $Z(s) = aX(s) + bY(s)$. (1.8)

- 3) **Phép dịch trực:** Nếu $X(s)$ là ảnh Laplace của $x(t)$ thì ảnh của $y(t)=x(t-T)$ sẽ là

$$Y(s) = X(s)e^{-sT}. \quad (1.9)$$

- 4) **Phép nén:** Nếu $X(s)$ là ảnh Laplace của $x(t)$ thì ảnh của $y(t)=x(t)e^{-\alpha t}$ sẽ là $Y(s) = X(s+\alpha)$. (1.10)

- 5) **Ảnh của tích chập:** Nếu $X(s)$, $Y(s)$ là ảnh của $x(t)$, $y(t)$ thì tích chập

$$z(t) = x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau.$$

có ảnh

$$Z(s) = X(s)Y(s). \quad (1.11)$$

- 6) **Ảnh của tích phân:** Nếu $X(s)$ là ảnh của $x(t)$ thì tích phân $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$ có ảnh là $Y(s) = \frac{X(s)}{s}$ (1.12)

- 7) **Ảnh của đạo hàm:** Nếu $X(s)$ là ảnh của $x(t)$ và $y(t)$ là đạo hàm $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ thì $y(t)$ có ảnh

$$Y(s) = sX(s) - x(+0) \quad (1.13)$$

- 8) **Đạo hàm của ảnh:** Nếu $X(s)$ là ảnh của tín hiệu causal $x(t)$ và $Y(s)$ là ảnh cũng của tín hiệu causal $y(t)=t^n x(t)$ thì

$$Y(s) = (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}. \quad (1.14)$$

- 9) **Định lý về giới hạn thứ nhất:** Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ thì

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad \text{trong đó } X(s) \text{ là ảnh Laplace của } x(t). \quad (1.15a)$$

- 10) **Định lý về giới hạn thứ hai:** Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$ thì

$$x(+0) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad \text{trong đó } X(s) \text{ là ảnh Laplace của } x(t). \quad (1.15b)$$

Trong số các tính chất vừa nêu, hai tính chất cuối được phát biểu dưới dạng định lý về giới hạn, cùng với phép dịch trực (1.9), có ý nghĩa đặc biệt quan trọng trong việc xác định giá trị của tín hiệu $x(t)$ trực tiếp từ ảnh Laplace $X(s)$ của nó mà không cần chuyển ngược $X(s)$ về miền thời gian theo công thức (1.7b). Điều kiện để áp dụng được chúng là phải có giới hạn $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ hay $\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$.

Ví dụ 6: Tín hiệu hằng $x(t) = k$ với $t \geq 0$ có ảnh Laplace là

$$X(s) = k \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{k}{s}.$$

Ví dụ 7: Áp dụng công thức (1.10) và ví dụ 6 cho tín hiệu $x(t) = e^{-\alpha t} 1(t)$ ta có ảnh $X(s)$ của nó

$$X(s) = \frac{k}{s + \alpha}. \quad \square$$

Ví dụ 8: Tín hiệu tăng đều $x(t) = t 1(t)$ có ảnh Laplace là

$$X(s) = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \frac{te^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} dt = \frac{1}{s^2}. \quad \square$$

Ví dụ 9: Theo tính chất tuyến tính và kết quả của các ví dụ 6, 7 ta có ảnh Laplace $X(s)$

của tín hiệu causal $x(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) 1(t) = k 1(t) - k e^{-\frac{t}{T}} 1(t)$ là

$$X(s) = \frac{k}{s} - \frac{k}{s + \frac{1}{T}} = \frac{k}{s(1 + Ts)}.$$

Với công thức $X(s)$ vừa có ta sẽ kiểm tra lại các định lý về giới hạn như sau:

$$x(+0) = 0$$

và

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k}{1 + Ts} = 0$$

tức là

$$x(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = 0.$$

Tương tự ta cũng có

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = k$$

và

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{1 + Ts} = k$$

hay $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = k. \quad \square$

Ví dụ 10: Từ kết quả của ví dụ 9 thì tín hiệu $x(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t)$ có ảnh Laplace:

$$X(s) = \frac{k}{s(1+Ts)}.$$

Với ví dụ này ta sẽ minh họa ý nghĩa sử dụng của công thức (1.13) về ảnh của đạo hàm bằng cách xác định hệ số góc α của đường tiếp tuyến với $x(t)$ tại điểm 0.

Trục tiếp từ $x(t)$ có

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{k}{T} e^{\frac{-t}{T}} 1(t) + k(1 - e^{\frac{-t}{T}}) \delta(t)$$

Do đó, theo công thức định nghĩa (1.2c) về phép nhân với hàm dirac $\delta(t)$ được

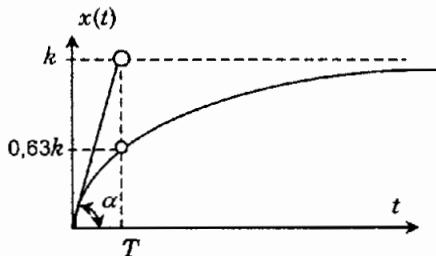
$$\left. \frac{dx(t)}{dt} = \frac{k}{T} e^{\frac{-t}{T}} 1(t) + k(1 - e^{\frac{-t}{T}}) \right|_{t=0} = \frac{k}{T} e^{\frac{-t}{T}} 1(t)$$

Suy ra

$$\tan \alpha = \frac{dx(0)}{dt} = \frac{k}{T}.$$

Ngược lại nếu đi từ ảnh $Y(s)$ của $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ cũng có

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= y(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[sX(s) - x(+0) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[sX(s) - \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sX(s)] = \frac{k}{T}. \end{aligned}$$
□



Hình 1.5: Minh họa cho ví dụ 10.

Ví dụ 11: Từ kết quả của ví dụ 6 và công thức (1.12) về ảnh của một tích phân ta dễ dàng kiểm chứng được tính đúng đắn của công thức (1.14) về đạo hàm của một ảnh thông qua ảnh Laplace $X(s)$ cho tín hiệu $x(t) = t^k 1(t)$ như sau:

Khi $k=1$: $X(s) = \mathcal{L}\{t1(t)\} = \frac{1}{s^2}$, vì $t1(t) = \int_0^t 1(\tau) d\tau$.

Khi $k=2$: $X(s) = \mathcal{L}\{t^2 1(t)\} = \frac{2}{s^3}$, vì $t^2 1(t) = 2 \int_0^t t1(\tau) d\tau$.

⋮

Khi $k=n$: $X(s) = \mathcal{L}\{t^n 1(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, vì $t^n 1(t) = n \int_0^t t^{n-1} 1(\tau) d\tau$. \square

Ví dụ 12: Từ kết quả của ví dụ 11 và công thức (1.10) về ảnh của một tín hiệu uén ta cũng có được ảnh Laplace $X(s)$ cho tín hiệu

$$x(t) = t^k e^{-\alpha t} 1(t)$$

nếu sau:

$$X(s) = \mathcal{L}\{t^k e^{-\alpha t} 1(t)\} = \frac{k!}{(s + \alpha)^{k+1}}.$$

Ví dụ 13: Xét hai tín hiệu causal

$$x(t) = e^{-jat} = \cos(at) - j \cdot \sin(at)$$

và

$$y(t) = \bar{x}(t) = e^{jat} = \cos(at) + j \cdot \sin(at)$$

Theo kết quả của ví dụ 7 thì ảnh $X(s)$, $Y(s)$ của chúng sẽ là

$$X(s) = \frac{1}{s + ja}$$

và

$$Y(s) = \frac{1}{s - ja}.$$

Suy ra

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{x(t) + \bar{x}(t)\} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s + ja} + \frac{1}{s - ja} \right] = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

và

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{1}{2j} \mathcal{L}\{\bar{x}(t) - x(t)\} = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - ja} - \frac{1}{s + ja} \right] = \frac{a}{s^2 + a^2}. \quad \square$$

Ví dụ 14: Từ công thức định nghĩa (1.2c) ta có ảnh Laplace của hàm diract $\delta(t)$ là

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1. \quad \square$$

1.3.2 Phép biến đổi Laplace ngược

Việc biến đổi Laplace ngược được hiểu là xác định tín hiệu $x(t)$ ngược từ ảnh Laplace $X(s)$ của nó. Tất nhiên công việc này có thể được thực hiện trực tiếp với công thức định nghĩa (1.7b). Song để tiện lợi hơn khi sử dụng, sau đây ta sẽ làm quen với hai phương pháp đơn giản thường được dùng cho lớp tín hiệu $x(t)$ có dạng ảnh Laplace đặc biệt. Đó là

- Phương pháp biến đổi ngược $X(s)$ có dạng hàm hữu tỷ và
- Phương pháp *residue* (thặng dư) cho $X(s)$ giải tích ngoài hữu hạn các điểm cực.

Biến đổi ngược hàm hữu tỷ

Giả sử tín hiệu $x(t)$ có ảnh Laplace $X(s)$ dạng

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n} \quad \text{với } m \leq n. \quad (1.16)$$

Để tìm $x(t)$ ta dựa vào tính đơn ánh, tính tuyến tính cũng như kết quả của các ví dụ cho trong mục 1.3.1 và đi đến các bước thực hiện như sau:

- 1) Phân tích $X(s)$ thành tổng các hàm phân thức tối giản

$$X(s) = A + \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^{r_k} \frac{A_{ki}}{(s - a_k)^i} + \sum_{k=1}^q \frac{B_k(s - \alpha_k) + C_k \beta_k}{(s - \alpha_k)^2 + \beta_k^2},$$

trong đó A, A_{ki}, B_k, C_k là các hằng số, a_k là điểm cực thực bội r_k , $\alpha_k + j\beta_k$ là điểm cực phức của $X(s)$, nói cách khác chúng là nghiệm của $A(s)=0$.

- 2) Xác định hàm gốc cho từng phần tử trong tổng trên theo

a) $\mathcal{L}^{-1}\{A\} = A\delta(t)$, suy ra từ kết quả ví dụ 6 và công thức (1.12).

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_{ki}}{(s - a_k)^i}\right\} = A_{ki} \frac{t^{i-1} e^{\alpha_k t}}{(i-1)!} 1(t)$, theo kết quả ví dụ 12.

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B_k(s - \alpha_k)}{(s - \alpha_k)^2 + \beta_k^2}\right\} = B_k e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t) 1(t)$, theo kết quả ví dụ 13 và (1.10)

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_k \beta_k}{(s - \alpha_k)^2 + \beta_k^2}\right\} = C_k e^{\alpha_k t} \sin(\beta_k t) 1(t)$, theo kết quả ví dụ 13 và (1.10)

Ví dụ 15: Cho $X(s) = \frac{1}{s^2(1+s)}$. Phân tích $X(s)$ thành tổng các phân thức tối giản được

$$X(s) = \frac{1}{1+s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

Từ đó có được tín hiệu causal $x(t) = (e^{-t} - 1 + t) 1(t)$. □

Ví dụ 16: Cho ảnh Laplace $X(s) = \frac{k(1+T_1s)}{s(1+T_2s)}$ của tín hiệu $x(t)$. Phân tích $X(s)$ thành những phân thức tối giản $\frac{1}{s}$ và $\frac{1}{1+T_2s}$ ta có

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{T_2}} \quad \text{với } A=k \quad \text{và} \quad B=\frac{k(T_1 - T_2)}{T_2}.$$

Suy ra:

$$x(t) = \left(A + Be^{\frac{-t}{T_2}} \right) 1(t) = k\left(1 - \frac{T_2 - T_1}{T_2} e^{\frac{-t}{T_2}}\right) 1(t). \quad \square$$

Ví dụ 17: Giả sử $x(t)$ có ảnh Laplace là

$$X(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)}, \quad T_1 \neq T_2.$$

Vậy thì với

$$X(s) = \frac{A}{s + \frac{1}{T_1}} + \frac{B}{s + \frac{1}{T_2}}, \quad \text{trong đó} \quad A = \frac{k}{T_1 - T_2} \quad \text{và} \quad B = \frac{k}{T_2 - T_1}$$

ta được

$$x(t) = (Ae^{\frac{-t}{T_1}} + Be^{\frac{-t}{T_2}}) 1(t) = \frac{k}{T_1 - T_2} (e^{\frac{-t}{T_1}} - e^{\frac{-t}{T_2}}) 1(t). \quad \square$$

Ví dụ 18: Cho ảnh Laplace $X(s) = \frac{k}{s^2(1+Ts)^n}$ của tín hiệu $x(t)$. Phân tích $X(s)$ thành tổng

các phân thức tối giản ta được

$$X(s) = k \left(-\frac{nT}{s} + \frac{1}{s^2} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(s + \frac{1}{T})^i} \right) \text{ với } A_i = \frac{(n+1-i)}{T^{i-2}}.$$

Suy ra (hình 1.6)

$$x(t) = k \cdot \left(-nT + t + e^{\frac{-t}{T}} \sum_{i=1}^n \frac{A_i t^{i-1}}{(i-1)!} \right) 1(t). \quad \square$$

Ví dụ 19: Một tín hiệu $x(t)$ có ảnh Laplace

$$X(s) = \frac{k}{s(1+Ts)^n}.$$

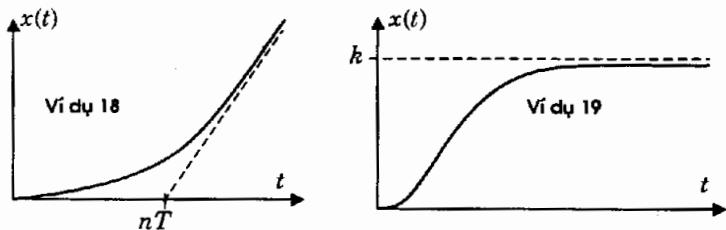
Phân tích $X(s)$ thành tổng các phân thức tối giản ta được

$$X(s) = \frac{k}{s} - \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(s + \frac{1}{T})^i} \quad \text{với} \quad A_i = \frac{k}{T^{i-1}}.$$

Do đó (hình 1.6)

$$x(t) = \left(k - e^{-\frac{-t}{T}} \sum_{i=1}^n \frac{A_i t^{i-1}}{(i-1)!} \right) l(t).$$

□



Hình 1.6: Minh họa ví dụ 18
và ví dụ 19.

Ví dụ 20: Xét hàm hữu tỷ phức

$$X(s) = \frac{k}{s^2 + 2qDs + q^2}, \quad 0 < D < 1.$$

Vì có điều kiện $0 < D < 1$ nên đa thức mẫu số của $X(s)$ có hai nghiệm phức

$$s_{1,2} = -Dq \pm jq\sqrt{1-D^2}.$$

Gọi $a = -Dq$ và $b = jq\sqrt{1-D^2}$ thì $X(s)$ phân tích được thành

$$X(s) = \frac{k}{(s-a)^2 + b^2}.$$

Suy ra

$$x(t) = \frac{k}{b} e^{at} \sin(bt) l(t).$$

□

Ví dụ 21: Giả sử một tín hiệu causal $x(t)$ có ảnh Laplace là

$$X(s) = \frac{k}{s(1+2DTs+T^2s^2)} \quad \text{với } 0 < D < 1.$$

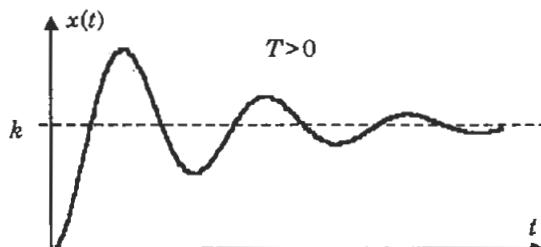
Tương tự như ở ví dụ 20 ta gọi $a = -\frac{D}{T}$, $b = \frac{\sqrt{1-D^2}}{T}$. Khi đó hàm $X(s)$ sẽ phân tích được thành

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs}{(s-a)^2 + b^2}, \text{ trong đó } A = -B = k.$$

Suy ra (hình 1.7)

$$x(t) = \left[A + e^{at} \left(B \cos(bt) - \frac{Ba}{b} \sin(bt) \right) \right] 1(t).$$

□



Hình 1.7: Minh họa cho ví dụ 21.

Xét riêng trường hợp, khi mà ảnh Laplace $X(s)$ của tín hiệu $x(t)$ có dạng thực hữu tỷ như công thức (1.16) mô tả và tất cả các điểm cực s_1, s_2, \dots, s_n đều là nghiệm đơn của phương trình $A(s)=0$. Do $X(s)$ phân tích được thành tổng các phân thức tối giản

$$X(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_n}{s-s_n},$$

nên sau khi nhân cả hai vế với $(s-s_k)$ và cho s tiến tới s_k ta sẽ có công thức xác định nhanh những hệ số A_1, A_2, \dots, A_n như sau:

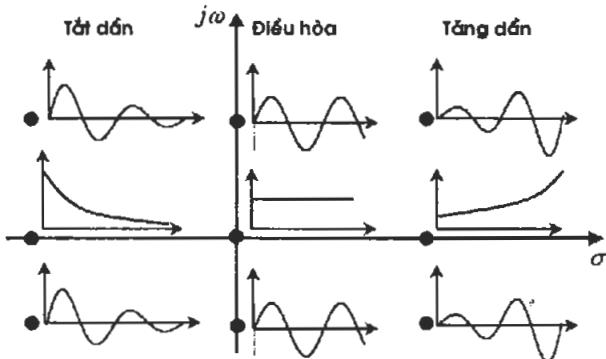
$$A_k = \lim_{s \rightarrow s_k} (s-s_k) X(s).$$

Phương pháp residue

Trong phần biến đổi ngược $X(s)$ có dạng hàm hữu tỷ (1.16) vừa trình bày, ta nhận thấy ngoài một số hữu hạn các điểm cực là nghiệm của $A(s)=0$, còn lại ở những điểm khác $X(s)$ đều xác định và có đạo hàm vô hạn lần. Nói cách khác $X(s)$ là một hàm giải tích ngoài hữu hạn các điểm cực đó. Dạng tín hiệu $x(t)$ nhận được lại hoàn toàn được quyết định bởi vị trí của các điểm cực này trong mặt phẳng phức. Hình 1.8 biểu diễn minh họa trực quan cho dạng tín hiệu $x(t)$ có ảnh Laplace

$$X(s) = \frac{1}{s-s_k}$$

ứng với những vị trí khác nhau của điểm cực $s_k = \sigma + j\omega$.



Hình 1.8: Dạng tín hiệu $x(t)$ phụ thuộc vào vị trí điểm cực của $X(s)$ trong mặt phẳng phức.

Mở rộng điều nhận xét trên ta có phương pháp *residue* để xác định ngược tín hiệu $x(t)$ từ ảnh Laplace $X(s)$ của nó, nếu như $X(s)$ là hàm giải tích trừ một vài các điểm cực rời nhau và hữu hạn, tức là không có điểm cực tại $s = \pm\infty$ hay $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} X(s) < \infty$. Những hàm có tính chất như vậy được gọi chung là *hàm meromorphic*.

Trước tiên ta đi từ công thức biến đổi Laplace ngược (1.7b)

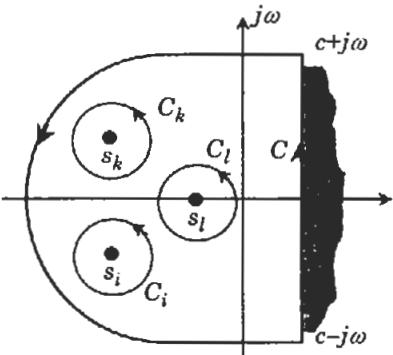
$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(s)e^{st} ds \quad (1.17)$$

trong đó C là một đường cong khép kín chứa đường thẳng $c+j\omega$ với ω chạy từ $-\infty$ đến ∞ , $c > \alpha$ và α là bán kính hội tụ của tích phân (hình 1.9). Chiều của C là chiều được chọn để phù hợp với chiều của ω từ $-\infty$ đến ∞ .

Ký hiệu miền được bao bởi C theo chiều dương là D , tức là miền s luôn nằm phía trái khi ta di dọc theo C và gọi s_1, s_2, \dots, s_m là các điểm cực của $X(s)$. Do $c > \alpha$ nên tất cả m điểm cực này phải nằm trong D . Một khác vì tích phân theo đường cong khép kín của một hàm có tính giải tích trong miền được bao bởi đường cong lấy tích phân đó, luôn có giá trị bằng 0, nên công thức (1.17) được thay bằng:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=1}^m \oint_{C_k} X(s)e^{st} ds, \quad (1.18a)$$

trong đó $C_k, k=1, 2, \dots, m$ là những đường cong khép kín bao quanh riêng một mình điểm cực s_k theo chiều dương (s_k luôn nằm bên trái khi ta di dọc theo C_k theo chiều đó). Như vậy, đường cong C trong (1.17) nay đã được thay bởi nhiều đường cong $C_k, k = 1, 2, \dots, m$ trong (1.18a).



Hình 1.9: Mô tả phương pháp residuence.

Ký hiệu tiếp

$$\text{Res}_{s_k} X(s)e^{st} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_k} X(s)e^{st} ds$$

là giá trị residuence của $X(s)e^{st}$ tại s_k , $k=1,2, \dots, m$ thì (1.18a) trở thành

$$x(t) = \sum_{k=1}^m \text{Res}_{s_k} X(s)e^{st} \quad (1.18b)$$

và đó chính là công thức thực hiện biến đổi ngược $X(s)$ theo phương pháp residuence.

Ví dụ 22: Tính giá trị residuence của $\frac{A_k}{s - s_k}$. Do hàm

này chỉ có một điểm cực là s_k nên

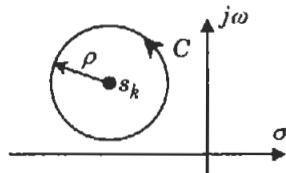
$$\sum_{(k)} \text{Res}_{s_k} \frac{A_k}{s - s_k} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{A_k}{s - s_k} ds,$$

trong đó C là đường tròn bán kính $\rho > 0$ bao quanh s_k theo chiều dương (hình 1.10). Như vậy dọc theo C biến s sẽ có phương trình

$$|s - s_k| = \rho e^{j\varphi} \quad \text{với} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Thay phương trình của biến s vào công thức trên được

$$\sum_{(k)} \text{Res}_{s_k} \frac{A_k}{s - s_k} = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{A_k}{\rho e^{j\varphi}} d(\rho e^{j\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_k d\varphi = A_k.$$



Hình 1.10: Đường tròn lấy ví dụ cho ví dụ 22.

Chú ý: Một trong những đặc điểm của hàm giải tích là nó phân tích được thành chuỗi vô hạn (chuỗi Taylor, chuỗi Lorenz, ...). Gọi a_i là các hệ số khi phân tích hàm $X(s)e^{st}$ thành chuỗi Lorenz trong lân cận điểm s_k , tức là:

□

$$X(s)e^{st} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i (s - s_k)^i$$

thì $\frac{\text{Res } X(s)e^{st}}{s_k} = a_{-1}$.

Theo công thức này, một hàm $X(s)e^{st}$, nếu có điểm cực s_k bội l_k thì giá trị residue của nó tại điểm cực đó sẽ là:

$$\frac{\text{Res } X(s)e^{st}}{s_k} = \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{l_k - 1}[X(s)e^{st}(s - s_k)^{l_k}]}{ds^{l_k - 1}}. \quad (1.19)$$

và như vậy việc tìm ngược tín hiệu gốc $x(t)$ từ ảnh Laplace $X(s)$ của nó theo phương pháp residue gồm hai bước:

- Xác định tất cả các điểm cực s_k của $X(s)e^{st}$ cũng như bậc l_k của chúng.
- Tìm các giá trị residue của hàm $X(s)e^{st}$ tại những điểm cực đó theo (1.19).
- Tính $x(t)$ theo (1.18b) từ các giá trị residue tìm được.

Ví dụ 23: Hàm $X(s) = \frac{1}{(s + a)^n}$ có một điểm cực $s = -a$ bội n nên tín hiệu gốc $x(t)$ của nó sẽ là:

$$x(t) = \frac{\text{Res } X(s)e^{st}}{a} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow -a} \frac{d^{n-1}e^{st}}{ds^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \text{ với } t \geq 0. \quad \square$$

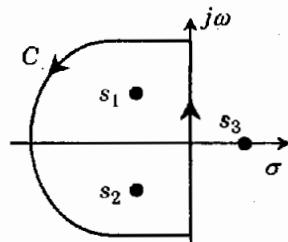
Việc áp dụng phương pháp residue để tìm gốc $x(t)$ của $X(s)$ chỉ là một ứng dụng nhỏ của nó. Phương pháp này ngoài ra còn có ý nghĩa sử dụng lớn trong các bài toán xác định giá trị tích phân thường gặp của các công việc tổng hợp bộ điều khiển như tìm tham số tối ưu cho bộ điều khiển. Ta sẽ xét một ví dụ minh họa:

Ví dụ 24: Để tính tích phân

$$Q = \int_{-\infty}^{j\infty} \frac{5s^2 + 6s + 8}{(s^2 + 2s + 2)(s - 1)} ds$$

ta thấy hàm

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{5s^2 + 6s + 8}{(s^2 + 2s + 2)(s - 1)} \\ &= \frac{1}{s - (-1 + j)} + \frac{1}{s - (-1 - j)} + \frac{3}{s - 1} \end{aligned}$$



Hình 1.11: Minh họa cho ví dụ 24

có 3 điểm cực là $s_1 = -1 + j$, $s_2 = -1 - j$ và $s_3 = 1$, trong đó chỉ có hai điểm cực nằm bên trái đường lấy tích phân là trục ảo. Bởi vậy nếu thay đường lấy tích phân đó bằng một đường

cong C khép kín chứa trục ảo thì cũng chỉ có s_1, s_2 thuộc miền D được bao bởi C theo chiều dương (hình 1.11). Suy ra

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi j \left(\frac{\text{Res}G(s) + \text{Res}G(\bar{s})}{s_1 - s_2} \right) \\ &= 2\pi j (1+1) = 4\pi j \quad (\text{theo kết quả ví dụ 22}). \end{aligned}$$

□

1.3.3 Giải phương trình vi phân nhờ toán tử Laplace

Cho phương trình vi phân tuyến tính

$$a_0y + a_1 \frac{dy}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y}{dt^n} = b_0u + b_1 \frac{du}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}, \quad (1.20)$$

với các hệ số a_0, a_1, \dots, a_n và b_0, b_1, \dots, b_m là những hằng số. Bài toán đặt ra là tìm nghiệm $y(t)$ khi biết trước $u(t)$ cũng như các sơ kiện $y(+0), \frac{dy(+0)}{dt}, \dots, \frac{d^n y(+0)}{dt^n}$.

Trước hết ta giả sử $u(t)$ và $y(t)$ là hai tín hiệu causal. Vậy thì khi lấy ảnh Laplace cả hai vế của phương trình đã cho:

$$\mathcal{L}\{a_0y + a_1 \frac{dy}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y}{dt^n}\} = \mathcal{L}\{b_0u + b_1 \frac{du}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}\}$$

rồi áp dụng tính chất tuyến tính của toán tử Laplace sẽ được:

$$a_0\mathcal{L}\{y\} + a_1\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + \dots + a_n\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} = b_0\mathcal{L}\{u\} + b_1\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt}\right\} + \dots + b_m\mathcal{L}\left\{\frac{d^m u}{dt^m}\right\}. \quad (1.21)$$

Tiếp tục, nếu gọi $Y(s)$ là ảnh của $y(t)$ thì từ công thức ảnh của đạo hàm:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(+0)$$

ta có

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} = s\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - \frac{dy(+0)}{dt} = s^2 Y(s) - sy(+0) - \frac{dy(+0)}{dt}$$

⋮

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} = s^n Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \frac{d^k y(+0)}{dt^k}.$$

Cũng tương tự, nếu gọi $U(s)$ là ảnh Laplace của tín hiệu causal $u(t)$ thì

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^k u}{dt^k}\right\} = s^n U(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \frac{d^k u(+0)}{dt^k}, \quad k=1, 2, \dots, m.$$

Thay tất cả các công thức tính đạo hàm đó vào (1.21) ta sẽ được:

$$Y(s)[a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n] - A = U(s)[b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m] - B,$$

trong đó A là hàm xác định từ a_k và $\frac{d^{k-1}y(+0)}{dt^{k-1}}$, $k=1,2, \dots, n$ theo

$$A = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-1-i} \frac{d^i y(+0)}{dt^i}, \quad (1.22a)$$

và B cũng là hàm được xác định từ b_k và $\frac{d^{k-1}u(+0)}{dt^{k-1}}$, $k=1,2, \dots, m$ theo

$$B = \sum_{k=1}^m b_k \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-1-i} \frac{d^i u(+0)}{dt^i} \quad (1.22b)$$

Như vậy ảnh Laplace của nghiệm $y(t)$ sẽ là

$$Y(s) = \frac{(b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m) \cdot U(s) + (A - B)}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n}. \quad (1.23)$$

Chuyển ngược $Y(s)$ cho trong (1.23) sang miền thời gian ta sẽ được nghiệm $y(t)$ của phương trình (1.20), vì toán tử Laplace là đơn ánh.

Ví dụ 25: Hãy tìm nghiệm của phương trình vi phân:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0, \text{ với sơ kiện } y(+0)=a \text{ và } \frac{dy(+0)}{dt}=b.$$

Chuyển cả hai vế phương trình sang miền phức nhờ toán tử Laplace được:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} + 3 \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2 \mathcal{L}\{y\} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[s^2 Y(s) - sy(+0) - \frac{dy(+0)}{dt}\right] + 3[sY(s) - y(+0)] + 2Y(s) = 0 \\ \Leftrightarrow & (s^2 + 3s + 2)Y(s) = as + (3a + b) \\ \Leftrightarrow & Y(s) = \frac{as + (3a + b)}{s^2 + 3s + 2} = \frac{as + (3a + b)}{(s+1)(s+2)} = \frac{2a+b}{s+1} - \frac{a+b}{s+2}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$y(t) = (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t} \text{ với } t \geq 0.$$

□

Ví dụ 26: Giải phương trình vi phân:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 5y = 3,$$

với sơ kiện $y(+0) = \frac{dy(+0)}{dt} = 0$. Chuyển cả hai vế phương trình sang miền phức nhờ toán tử Laplace được:

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = \frac{3}{s}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{3}{5s} - \frac{3.2}{10[(s+1)^2 + 2^2]} - \frac{3(s+1)}{5[(s+1)^2 + 2^2]}.$$

Suy ra

$$y(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{10}e^{-t} \sin(2t) - \frac{3}{5}e^{-t} \cos(2t) \quad \text{với } t \geq 0.$$

□

1.3.4 Mối quan hệ giữa ảnh Fourier và ảnh Laplace

Cho tín hiệu causal $x(t)$ và gọi $X(j\omega)$ là ảnh Fourier và $X(s)$ là ảnh Laplace của nó. Một câu hỏi được đặt ra ở đây là với điều kiện như thế nào ta sẽ có được quan hệ

$$X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}. \quad (1.24)$$

Câu hỏi trên được đặt ra là hoàn toàn cần thiết vì không phải lúc nào cũng có được (1.24), ngay cả khi tín hiệu $x(t)$ có ảnh Fourier $X(j\omega)$ theo nghĩa rộng, tức là $X(j\omega)$ được xây dựng theo nghĩa hàm mở rộng [11].

Ví dụ 27: Tín hiệu bậc thang (Heaviside) có ảnh Laplace

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s} \quad (\text{kết quả của ví dụ 6 với } k=1).$$

Giả sử rằng tín hiệu bậc thang $1(t)$ có ảnh Fourier. Vậy thì ảnh đó phải là

$$\mathcal{F}\{1(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} (1 - \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-j\omega T}).$$

Nhưng vì

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-j\omega T} = \lim_{T \rightarrow \infty} [\cos(\omega T) - j \sin(\omega T)] \neq 0$$

nên

$$\mathcal{F}\{1(t)\} \neq \frac{1}{j\omega},$$

tức là với hàm $1(t)$ người ta không thể xác định ảnh Fourier của nó bằng cách thay s trong ảnh Laplace bởi $j\omega$. Thực chất, với sự giúp đỡ của lý thuyết hàm mở rộng, người ta đã chỉ ra rằng:

$$\mathcal{F}\{1(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega).$$

□

Gọi α là bán kính hội tụ của tích phân

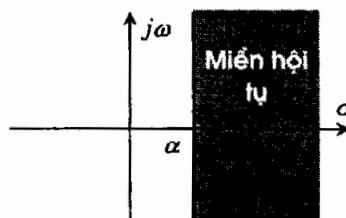
$$\int_0^{\infty} |x(t)e^{-\alpha t}| dt < \infty. \quad (1.25a)$$

Điều kiện (1.25a) cũng chính là điều kiện phải có để tồn tại ảnh Laplace $X(s)$ cho tín hiệu $x(t)$.

Chia mặt phẳng phức thành 2 phần bởi đường thẳng $\sigma = \alpha$ (hình 1.12). Phần mặt phẳng nằm bên phải đường phân chia là miền hội tụ của (1.25a). Tương tự nếu ta chia mặt phẳng phức bởi trực ảo và xem nửa mặt phẳng bên phải trực ảo là miền hội tụ của tích phân

$$\int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1.25b)$$

cho tín hiệu $x(t)$ thì tín hiệu đó sẽ có ảnh Fourier $X(j\omega)$.



Hình 1.12: Miền hội tụ của tích phân Laplace và Fourier.

So sánh hai miền hội tụ ta đi đến:

- Nếu $\alpha > 0$ ta sẽ không có ảnh Fourier cho tín hiệu causal $x(t)$ và do đó không thể thay $s=j\omega$ trong $X(s)$ để được $X(j\omega)$.
- Nếu $\alpha < 0$ thì do miền hội tụ của (1.25b) nằm trong miền hội tụ của (1.25a) nên khi thay $s=j\omega$ trong $X(s)$ ta sẽ có ảnh Fourier $X(j\omega)$ của $x(t)$.
- Nếu $\alpha = 0$, hai miền hội tụ của (1.25a) và (1.25b) là một (trừ đường biên là trực ảo). Bởi vậy khi $X(s)$ liên tục trên trực ảo (không có điểm cực trên đó) thì ảnh Fourier $X(j\omega)$ sẽ chính là $X(s)$ với $s=j\omega$.

Từ những kết luận vừa nêu thì cho riêng cho trường hợp $X(s)$ có dạng (1.16) với bậc tử số không lớn hơn bậc mẫu số, ta có điều kiện cần và đủ để được quan hệ

$$X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$$

là tất cả các điểm cực của $X(s)$ phải nằm bên trái trực ảo (có phần thực âm và khác 0).

Một hàm phức $X(s)$ dạng (1.16) còn gọi là thực-hữu tỷ vì nó là tỷ số của hai đa thức (giống số hữu tỷ) và có các hệ số là số thực. Hàm thực-hữu tỷ $X(s)$ với các điểm cực nằm bên trái trực ảo được gọi là *hàm bền (stable)*.

1.4 Mô tả tín hiệu không liên tục

1.4.1 Tín hiệu xung

Như đã giới thiệu ở mục 1.1.2, tín hiệu không liên tục là loại tín hiệu có miền xác định là tập các điểm không liên thông. Đây là loại tín hiệu thường gặp khi ứng dụng kỹ thuật vi xử lý vào trong điều khiển mà ở đó các tín hiệu thích hợp là những tín hiệu số.

Cho một tín hiệu $x(t)$ liên tục (hàm thời gian $x(t)$ liên tục từng đoạn). Nếu $x(t)$ liên tục tại T_a thì giá trị $x(T_a)$ của tín hiệu $x(t)$ tại thời điểm T_a được xác định theo công thức trích mẫu (1.2a) như sau:

$$x(T_a) = x(t)\delta(t-T_a) = x(T_a)\delta(t).$$

trong đó tích vế trái được hiểu theo công thức định nghĩa (1.2c), tức là

$$x(t)\delta(t-T_a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-T_a)x(t)dt.$$

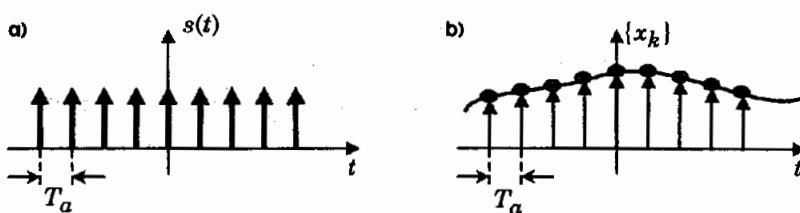
Tín hiệu không liên tục mà ta quan tâm ở đây là dãy các giá trị $\{x_k\}$ cách đều nhau với $x_k = x(kT_a)$, trong đó T_a được gọi là *chu kỳ lượng tử hóa*, hay *chu kỳ trích mẫu tín hiệu*. Đây là loại tín hiệu chỉ có giá trị tại những điểm

$$\{t = kT_a \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Z} \text{ là ký hiệu chỉ tập các số nguyên}$$

và ngoài những điểm này thì không được định nghĩa. Nếu mỗi giá trị x_k được xem như tích $x(t)\delta(t-kT_a)$ thì toàn bộ dãy $\{x_k\}$ sẽ là

$$\{x_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-kT_a) = x(t) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_a)}_{s(t)} = x(t)s(t) \quad (1.26)$$

và hàm $s(t)$ có tên là *hàm trích mẫu (sample)*, hay *hàm răng lược* bởi nó có dạng giống như những chiếc răng của một cái lược (hình 1.13).



Hình 1.13: a) Đồ thị hàm trích mẫu $s(t)$.

b) Mô hình hóa quá trình trích mẫu tín hiệu liên tục $x(t)$ thành tín hiệu xung $\{x_k\}$.

Hình dạng răng lược của $s(t)$ làm cho $\{x_k\}$ có dạng cũng gần giống như một chiếc lược với những chiếc răng không đều nhau. Độ cao của từng chiếc răng biểu diễn giá trị của $x(t)$ tại thời điểm có chiếc răng đó. Do $\{x_k\}$ có dạng là dãy các răng lược hình xung dirac như vậy mà người ta còn gọi $\{x_k\}$ là *tín hiệu xung*.

Công thức (1.26) biểu diễn tín hiệu xung $\{x_k\}$ thông qua hàm diract là một cầu nối giữa tín hiệu liên tục và tín hiệu xung. Nó có ý nghĩa đặc biệt quan trọng, giúp cho việc nghiên cứu tín hiệu xung có thể được tiến hành hoàn toàn giống như một tín hiệu liên tục mà ta đã quen. Ngược lại các kết quả thu từ việc khảo sát tín hiệu liên tục cũng thông qua (1.26) mà chuyển được cho tín hiệu xung.

1.4.2 Toán tử Z thuận

Xét tín hiệu causal, dạng xung $\{x_k\}$, tức là $x_k=0$ khi $k<0$. Gọi $X^*(s)$ là ảnh Laplace của $\{x_k\}$ thì với (1.26) ta có

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \int_0^\infty x(t)s(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty x_k \delta(t - kT_a) e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \left(x_k \int_0^\infty \delta(t - kT_a) e^{-st} dt \right) = \sum_{k=0}^\infty x_k e^{-skT_a} \quad (\text{theo công thức (1.2a)}). \end{aligned}$$

Nếu ký hiệu $z = e^{sT_a}$, công thức trên sẽ trở thành

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^\infty x_k z^{-k} := X(z) \quad (1.27)$$

và $X(z)$ được gọi là ảnh toán tử Z của $\{x_k\}$. Công thức trên cũng nói rằng tín hiệu $\{x_k\}$ là các hệ số của ảnh $X(z)$ khi được phân tích thành chuỗi Taylor tại z^{-1} . Do đó theo tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi Taylor thì chuỗi (1.27) sẽ hội tụ khi z nằm ngoài đường tròn bán kính z_0 thỏa mãn

$$|z| > z_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x_k|}, \quad \text{nếu như tồn tại giới hạn này.}$$

Toán tử Z : $\{x_k\} \mapsto X(z)$ có những tính chất sau:

- 1) *Tính đơn ánh*: Nếu $\{x_k\} \neq \{y_k\}$ thì cũng có $X(z) \neq Y(z)$, trong đó $X(z)$ là ảnh Z của $\{x_k\}$ và $Y(z)$ là ảnh của $\{y_k\}$.
- 2) *Tính tuyến tính*: Nếu $\{x_k\}$ có ảnh $X(z)$ và $\{y_k\}$ có ảnh $Y(z)$ thì tín hiệu xung $\{z_k\}$ với $z_k = ax_k + by_k$ sẽ có ảnh $Z(z) = aX(z) + bY(z)$.

- 3) *Phép dịch trái*: Nếu $X(z)$ là ảnh của $\{x_k\}$ thì ảnh $Y(z)$ của $\{y_k\}$ với $y_k = x_{k-m}$ sẽ là $Y(z) = z^{-m}X(z)$.
- 4) *Phép dịch phải*: Nếu $X(z)$ là ảnh của $\{x_k\}$ thì ảnh $Y(z)$ của $\{y_k\}$ với $y_k = x_{k+m}$ sẽ là $Y(z) = z^m \left[X(z) - \sum_{i=0}^m x_i z^{-i} \right]$.
- 5) *Ảnh của tích chập*: Nếu $X(z), Y(z)$ là ảnh của $\{x_k\}$ và $\{y_k\}$ thì dãy các giá trị tích chập $\{z_k\}$ với $z_k = \sum_{i=0}^k x_{k-i} y_i$ sẽ có ảnh $Z(z) = X(z)Y(z)$.
- 6) *Định lý đồng dạng*: Nếu $X(z)$ là ảnh của $\{x_k\}$ thì tín hiệu xung $\{y_k\}$ với $y_k = a^k x_k$ sẽ có ảnh $Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$.
- 7) *Định lý tỷ lệ*: Nếu $X(z)$ là ảnh của $\{x_k\}$ thì tín hiệu xung $\{y_k\}$ với $y_k = \frac{x_k}{kT_a}$, trong đó T_a là chu kỳ trích mẫu, sẽ có ảnh $Y(z) = \frac{1}{T_a} \int_z^\infty \frac{X(\tau)}{\tau} d\tau$.
- 8) *Ảnh của hiệu lùi*: Nếu $X(z)$ là ảnh của $\{x_k\}$ thì tín hiệu $\{y_k\}$ với $y_k = x_k - x_{k-1}$ sẽ có ảnh $Y(z) = \frac{z-1}{z} X(z)$.
- 9) *Ảnh của hiệu tiến*: Nếu $X(z)$ là ảnh của $\{x_k\}$ thì tín hiệu $\{y_k\}$ với $y_k = x_{k+1} - x_k$ sẽ có ảnh $Y(z) = (z-1)X(z) - zx_0$.
- 10) *Ảnh của dãy tổng*: Nếu $X(z)$ là ảnh của $\{x_k\}$ thì tín hiệu $\{y_k\}$ với $y_k = \sum_{i=0}^k x_i$ sẽ có ảnh $Y(z) = \frac{z}{z-1} X(z)$.
- 11) *Ảnh của tích*: Nếu $X(z)$ là ảnh của $\{x_k\}$ thì tín hiệu $\{y_k\}$ với $y_k = kT_a \cdot x_k$ sẽ có ảnh $Y(z) = -zT_a \frac{dX(z)}{dz}$.
- 12) *Định lý về giới hạn thứ nhất*: Nếu $X(z)$ là ảnh của $\{x_k\}$ thì $x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
- 13) *Định lý về giới hạn thứ hai*: Nếu $X(z)$ là ảnh của $\{x_k\}$ thì $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$.

Ví dụ 28: Tín hiệu xung thu từ việc trích mẫu tín hiệu bậc thang $1(t)$ là $\{x_k=1\}$ sẽ có ảnh

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-n} + \dots$$

nếu như $|z| > \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x_k|} = 1$. Nhân hai vế với z

$$zX(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = z + 1 + z^{-1} + \dots + z^{-n} + \dots$$

rồi trừ đi cho phương trình thứ nhất được:

$$(z - 1)X(z) = z .$$

Suy ra

$$X(z) = \frac{z}{z - 1} . \quad \square$$

Ví dụ 29: Cho tín hiệu xung $\{x_k\}$ với $x_k = e^{-kT_a}$. Ảnh Z của nó là $X(z)$ được xác định dựa vào kết quả ví dụ 28 và định lý đồng dạng 6) như sau:

$$\begin{cases} x_k = 1 \cdot \left(e^{-T_a}\right)^k \\ Z[1] = \frac{z}{z - 1} \end{cases} \Rightarrow X(z) = \frac{\frac{z}{e^{-T_a}}}{\frac{z}{e^{-T_a}} - 1} = \frac{z}{z - e^{-T_a}} . \quad \square$$

Ví dụ 30: Để xác định ảnh Z của $\{x_k\}$ với $x_k = \cos(\omega k T_a)$ ta đi từ kết quả của ví dụ 29:

$$Z\{e^{j\omega k T_a}\} = \frac{z}{z - e^{j\omega T_a}} \quad (\text{thay } e^{-T_a} \text{ bởi } e^{j\omega T_a})$$

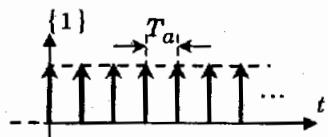
$$Z\{e^{-j\omega k T_a}\} = \frac{z}{z - e^{-j\omega T_a}} \quad (\text{thay } e^{-T_a} \text{ bởi } e^{-j\omega T_a})$$

và có được nhờ tính chất tuyến tính của toán tử Z:

$$\begin{aligned} Z\{\cos(\omega k T_a)\} &= Z\left\{\frac{e^{j\omega k T_a} + e^{-j\omega k T_a}}{2}\right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega T_a}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega T_a}} \right) \\ &= \frac{z}{2} \left(\frac{2z - 2\cos(\omega T_a)}{(z - e^{j\omega T_a})(z - e^{-j\omega T_a})} \right) = \frac{z^2 - z\cos(\omega T_a)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_a) + 1} . \end{aligned} \quad \square$$

Ví dụ 31: Tương tự như ví dụ 30 nhưng cho $\{\sin(\omega k T_a)\}$ ta có:

$$Z\{\sin(\omega k T_a)\} = Z\left\{\frac{e^{j\omega k T_a} - e^{-j\omega k T_a}}{2j}\right\} = \frac{z\sin(\omega T_a)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_a) + 1} . \quad \square$$



Hình 1.14: Minh họa ví dụ 28.

Ví dụ 32: Ánh Z của tín hiệu xung $\{kT_a\}$ thu được từ việc trích mẫu $x(t)=t1(t)$ được xác định nhờ định lý về ảnh của một tích như sau:

$$\begin{cases} kT_a = kT_a \cdot 1 \\ Z\{1\} = \frac{z}{z-1} \end{cases} \Rightarrow Z\{kT_a\} = -zT_a \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z^2 T_a}{(z-1)^2}. \quad \square$$

Ví dụ 33: Nếu xem tín hiệu xung $\{(k+1)T_a\}$ như tổng hữu hạn $k+1 = \sum_{i=0}^k 1$ thì từ kết quả ví

dụ 28 là $Z\{1\} = \frac{z}{z-1}$ và định lý về ảnh của dãy tổng ta cũng có

$$Z\{(k+1)T_a\} = T_a \cdot Z\{k+1\} = T_a \cdot \frac{z}{z-1} Z\{1\} = T_a \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^2 T_a}{(z-1)^2}. \quad \square$$

Ví dụ 34: Giả sử tín hiệu xung $\{x_k\}$ có ảnh $X(z)$. Dãy $\{y_k\}$ với $y_k = x_k - x_{k-m}$ được gọi là hiệu lùi bậc m . Theo tính chất tuyến tính của toán tử Z thì

$$Z\{x_k - x_{k-m}\} = Y(z) = Z\{x_k\} - Z\{x_{k-m}\} = X(z) - Z\{x_{k-m}\}.$$

Áp dụng định lý về phép dịch trái ta có tiếp:

$$Z\{x_k - x_{k-m}\} = X(z) - z^{-m} X(z).$$

Suy ra

$$Z\{x_k - x_{k-m}\} = \frac{z^m - 1}{z^m} X(z). \quad \square$$

1.4.3 Toán tử Z ngược

Cho tín hiệu xung $\{x_k\}$ và gọi $X(z)$ là ảnh Z của nó được tính từ x_k nhờ công thức (1.27), trong đó điều kiện phải có

$$|z| > \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|x_k|}$$

là để chuỗi (1.27) hội tụ. Theo tính chất đơn ánh của toán tử Z thì từ $X(z)$ ta cũng sẽ xác định được duy nhất một tín hiệu $\{x_k\}$ nhận $X(z)$ làm ảnh Z . Phép tính $\{x_k\}$ từ $X(z)$ được ký hiệu là

$$\{x_k\} = Z^{-1}\{X(z)\}.$$

Có ba phương pháp chính để tìm ngược $\{x_k\}$ từ $X(z)$:

- Phương pháp residuence.
- Phương pháp biến đổi ngược hàm hữu tỷ.
- Phương pháp phân tích $X(z)$ thành chuỗi.

Phương pháp residuence

Tương tự như toán tử Laplace, từ $X(z)$ ta cũng tính ngược ra được $\{x_k\}$ theo

$$x_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) \cdot z^{k-1} dz, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.28)$$

trong đó C là đường cong kín trong mặt phẳng phức bao tất cả các điểm cực của $X(z)$ theo chiều dương.

Cũng giống như đã trình bày về ứng dụng phương pháp residuence để biến đổi ngược toán tử Laplace, nếu hàm phức $X(z)z^{k-1}$ chỉ có hữu hạn q các điểm cực z_1, z_2, \dots, z_q rời nhau và ngoài những điểm cực đó, hàm $X(z)z^{k-1}$ có tính giải tích, thì đường cong lấy tích phân C trong (1.28) sẽ được thay bởi q đường cong kín C_i , $i=1, 2, \dots, q$ mà mỗi đường cong này chỉ bao một điểm cực z_i theo chiều dương. Suy ra

$$x_k = \sum_{i=1}^q \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_i} X(z) \cdot z^{k-1} dz. \quad (1.29)$$

Gọi

$$\operatorname{Res}_{z_i} X(z)z^{k-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_i} X(z) \cdot z^{k-1} dz \quad (1.30)$$

là giá trị residuence của tại điểm cực z_i , $i=1, 2, \dots, q$ thì theo (1.19), nó được tính bởi

$$\operatorname{Res}_{z_i} X(z)z^{k-1} = \frac{1}{(l_i - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{l_i-1} [X(z)z^{k-1}(z - z_i)^{l_i}]}{dz^{l_i-1}} \quad (1.31)$$

với l_i là bậc của điểm cực z_i . Thay (1.30), (1.31) vào (1.29) ta đi đến

$$x_k = \sum_{i=1}^q \operatorname{Res}_{z_i} X(z)z^{k-1} = \sum_{i=1}^q \frac{1}{(l_i - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{l_i-1} [X(z)z^{k-1}(z - z_i)^{l_i}]}{dz^{l_i-1}}. \quad (1.32)$$

Như vậy, phương pháp residuence sẽ gồm các bước:

- Xác định tất cả các điểm cực z_i của $X(z)z^{k-1}$ cũng như bậc l_i của chúng.
- Tìm giá trị residuence của $X(z)z^{k-1}$ tại các điểm cực đó theo (1.31).
- Tính x_k theo (1.32a).

Ví dụ 35: Hãy tìm $\{x_k\}$ có ảnh

$$X(z) = \frac{z(1-a)}{z^2 - z(1+a) + a}.$$

Do $X(z)$ có hai điểm cực là $z_1=1$, $z_2=a$ có bậc bằng 1 (chúng là nghiệm đơn của phương trình $z^2-z(1+a)+a=0$) nên

$$\begin{aligned}\text{Res}_{z_1} X(z) z^{k-1} &= \lim_{z \rightarrow 1} X(z) z^{k-1}(z-1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^k(1-a)(z-1)}{z^2 - z(1+a) + a} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^k(1-a)(z-1)}{(z-1)(z-a)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^k(1-a)}{(z-a)} = 1.\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\text{Res}_{z_2} X(z) z^{k-1} &= \lim_{z \rightarrow a} X(z) z^{k-1}(z-a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^k(1-a)(z-a)}{z^2 - z(1+a) + a} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^k(1-a)(z-a)}{(z-1)(z-a)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^k(1-a)}{(z-1)} = -a^k.\end{aligned}$$

Bởi vậy

$$x_k = 1 - a^k, \quad \text{với } k \geq 0.$$

□

Ví dụ 36: Tìm $\{x_k\}$ có ảnh

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - 7z + 10} = \frac{z(z-1)}{(z-2)(z-5)}.$$

Do $X(z)$ có hai điểm cực là $z_1=2$ và $z_2=5$ có bậc bằng 1 nên

$$\text{Res}_{z_1} X(z) z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^k(z-1)}{z-5} = -\frac{2^k}{3},$$

và

$$\text{Res}_{z_2} X(z) z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow 5} \frac{z^k(z-1)}{z-2} = \frac{4}{3}5^k.$$

Suy ra

$$x_k = -\frac{2^k}{3} + \frac{4}{3}5^k, \quad \text{với } k \geq 0.$$

□

Phương pháp biến đổi hàm hữu tỷ

Dựa vào tính tuyến tính của toán tử Z ta có thể xác định $\{x_k\}$ từ ảnh Z của nó là $X(z)$ bằng cách phân tích $X(z)$ thành tổng tuyến tính của những phần cơ bản, được quen biết đến như là ảnh Z của các tín hiệu xung quen thuộc (m bảng 1.1). Khi đó thì $\{x_k\}$ chính là tổng tuyến tính của các tín hiệu xung quen thuộc đó.

Để minh họa cho phương pháp này, ta xét $X(z)$ có đại ý hàm hữu tỷ:

$$X(z) = z \cdot \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}{\underbrace{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}_{\tilde{X}(z)}}, \quad (1.33a)$$

trong đó $\tilde{X}(z)$ được giải thiết là có các điểm cực z_1, z_2, \dots, z_q rời nhau, tức là phương trình

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0$$

có q nghiệm z_1, z_2, \dots, z_q , ($q \leq n$). Gọi l_i là bậc của điểm cực z_i (z_i là nghiệm bội l_i của phương trình trên). Vậy thi $n = \sum_{i=1}^q l_i$ và $X(z)$ sẽ phân tích được thành tổng tuyến tính:

$$X(z) = z \cdot \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{l_i} \frac{A_{ij}}{(z - z_i)^j} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{l_i} \frac{A_{ij} z}{(z - z_i)^j}. \quad (1.33b)$$

Ký hiệu $\{x_k^{ij}\}$ là tín hiệu xung có ảnh

$$X_{ij}(z) = \frac{z}{(z - z_i)^j} \quad (1.34)$$

thì theo tính chất tuyến tính của toán tử Z , ta có tín hiệu gốc $\{x_k\}$ của $X(z)$ là

$$x_k = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{l_i} A_{ij} x_k^{ij} \quad \text{với } k \geq 0. \quad (1.35)$$

Vấn đề còn lại là xác định $\{x_k^{ij}\}$ có ảnh $X_{ij}(z)$ cho trong (1.34).

- 1) Khi $j = 1$: Theo kết quả của ví dụ 29, trong đó e^{-T_a} nay được thay bởi z_i , ta có

$$x_k^{i1} = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z - z_i} \right\} = z_i^k. \quad (1.36a)$$

- 2) Khi $j > 1$: Vì $X_{ij}(z) = \frac{z}{(z - z_i)^j}$ có một điểm cực z_i bội j nên theo công thức (1.31) được

$$\begin{aligned} x_k^{ij} &= Z^{-1} \left\{ \frac{z}{(z - z_i)^j} \right\} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{j-1} z^k}{dz^{j-1}} = \\ &= \frac{k(k-1)\cdots(k-j+2)}{(j-1)!} z_i^{k-j+1} = C_k^{j-1} z_i^{k-j+1}. \end{aligned} \quad (1.36b)$$

Công thức (1.36b) chứa cả (1.36a) cho trường hợp $j=1$, vì $C_k^0 = 1$. Cuối cùng thay (1.36b) vào (1.35) thì

$$x_k = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{l_i} A_{ij} C_k^{j-1} z_i^{k-j+1} \quad \text{với } k \geq 0, \quad (1.37)$$

và đó là giá trị tín hiệu xung $\{x_k\}$ có ảnh $X(z) = z \tilde{X}(z)$ theo (1.33a) đã cho.

Tóm lại, phương pháp biến đổi ngược hàm hữu tỷ dạng (1.33a) gồm các bước sau:

- Phân tích $X(z)$ dạng (1.33a) thành (1.33b) là tổng tuyến tính các phân thức tối giản của $\tilde{X}(z)$, tức là tìm A_{ij} , $i=1, 2, \dots, q$ và $j=1, 2, \dots, l_i$.
- Xác định x_k^{ij} theo (1.36b).
- Tính x_k từ A_{ij} và x_k^{ij} theo (1.37).

Ví dụ 37: Hãy tìm $\{x_k\}$ có ảnh

$$X(z) = z \cdot \frac{z^2 + z + 37}{(z-1)(z-2)^3} \cdot \tilde{X}(z)$$

Do $\tilde{X}(z)$ có hai điểm cực là $z_1=1$ bậc 1, $z_2=2$ bậc 3 nên ở đây $q=2$, $l_1=1$ và $l_2=3$. Phân tích $\tilde{X}(z)$ thành tổng tuyến tính các phân thức tối giản được

$$X(z) = z \cdot \left(\frac{3}{z-1} + \frac{-3}{z-2} + \frac{4}{(z-2)^2} + \frac{7}{(z-2)^3} \right),$$

tức là

$$A_{11} = 3, \quad A_{21} = -3, \quad A_{22} = 4, \quad \text{và} \quad A_{23} = 7.$$

Vậy

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{l_i} A_{ij} C_k^{j-1} z_i^{k-j+1} = \\ &= 3 - 3 \cdot 2^k + 4 \cdot \underbrace{\frac{k}{C_k^1}}_{\cdot 2^{k-1}} + 7 \cdot \underbrace{\frac{k(k-1)}{C_k^2} \cdot 2^{k-2}}_{(k \geq 0)}. \end{aligned}$$

Phương pháp phân tích chuỗi

Cơ sở của phương pháp này là công thức định nghĩa (1.27) và tính đơn ánh của toán tử Z . Nếu $X(z)$ đã cho phân tích được thành chuỗi theo z^{-1} tức là

$$X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_n z^{-n} + \cdots$$

thì do tính đơn ánh ta được $x_k = c_k$.

Ví dụ 38: Từ

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 1,6z + 0,8}$$

và sau khi thực hiện nhiều lần phép chia đa thức ta thấy

$$X(z) = z^{-1} + 1,6z^{-2} + \dots$$

Do đó

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1,6 \dots$$

□

1.4.4 Quan hệ giữa toán tử Z và toán tử Laplace

Ký hiệu $X(s)$ là ảnh Laplace của một tín hiệu causal $x(t)$ và $X(z)$ là ảnh Z của tín hiệu xung $\{x_k\}$ thu được từ $x(t)$ thông qua việc trích mẫu tín hiệu theo (1.26). Nếu như rằng có một bài toán đặt ra là tìm $X(z)$ từ $X(s)$ thì ta thấy ngay có thể thực hiện tuân tự các bước sau:

- Xác định $x(t)$ từ $X(s)$.
- Trích mẫu $x(t)$ với chu kỳ lượng tử T_a thành $\{x_k\}$.
- Tính $X(z)$.

Nhưng do giữa tín hiệu xung $\{x_k\}$ và tín hiệu liên tục $x(t)$ có quan hệ (1.26) nên giữa hai ảnh $X(z)$ và $X(s)$ cũng tồn tại một mối quan hệ tương đương và đó là:

$$X(z) = \frac{1}{2}x(+0) + \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + jk\Omega) \Big|_{z=e^{sT_a}} \quad \text{với } \Omega = \frac{2\pi}{T_a}. \quad (1.38a)$$

hoặc

$$X(z) = \frac{1}{2}x(+0) + \frac{z}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{X(s)}{z - e^{sT_a}} ds. \quad (1.38b)$$

Từ (1.38a) ta thấy $X(z)$ là một hàm tuần hoàn với chu kỳ phức $\Omega = \frac{2\pi}{T_a}$ và điều đó cũng suy ra ngay được từ

$$z = e^{sT_a} = e^{sT_a} e^{2\pi} = e^{sT_a + 2\pi} = e^{(s+\Omega)T_a}.$$

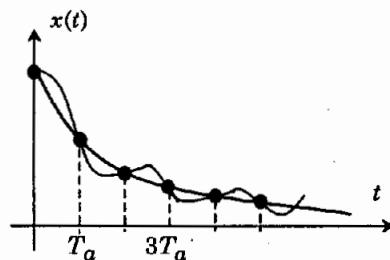
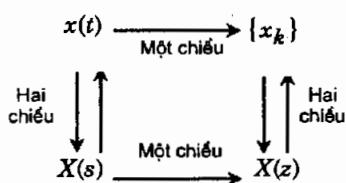
Cả hai công thức (1.38a) và (1.38b) đều cho phép xác định $X(z)$ từ $X(s)$ mà không phải tiến hành ba bước vừa nêu trên, trong đó (1.38b) có nhiều ý nghĩa ứng dụng hơn. Chúng chính là toán tử \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z}: X(s) \mapsto X(z).$$

Toán tử \mathcal{Z} theo (1.38) không phải là đơn ánh, tức là có thể có rất nhiều hàm phức $X_1(s), X_2(s), \dots$ có chung một ảnh $X(z)$. Điều đó là cũng dễ hiểu vì có thể có nhiều tín hiệu

liên tục $x_1(t), x_2(t), \dots$ sau khi được trích mẫu (1.26) lại có cùng $\{x_k\}$. Những tín hiệu này là những tín hiệu thỏa mãn:

$$x_1(kT_a) = x_2(kT_a) = \dots \quad \text{với mọi } k \geq 0 \text{ (hình 1.15).}$$



Hình 1.15: Toán tử \mathcal{J} không phải là đơn ánh.

Mặc dù không phải là đơn ánh, song toán tử \mathcal{J} là toán tử tuyến tính. Bởi vậy để thực hiện công thức (1.38) thì bên cạnh việc sử dụng phương pháp residuence

$$X(z) = \frac{1}{2}x(+0) + z \cdot \operatorname{Res}_{s_k} \frac{X(s)}{s - e^{sT_a}}, \quad \text{với } |z| > e^{\alpha T_a}, \quad (1.39)$$

trong đó α là bán kính hội tụ tích phân Laplace, ta có thể áp dụng tính chất tuyến tính đó mà phân tích $X(s)$ thành tổng tuyến tính của những thành phần $X_1(s), X_2(s), \dots$ đơn giản, quen biết

$$X(s) = d_1 X_1(s) + d_2 X_2(s) + \dots$$

rồi chuyển riêng từng thành phần đó thành $X_1(z), X_2(z), \dots$ (bảng 1.1). Ảnh $X(z)$ cần tìm sẽ là tổng tuyến tính của những thành phần này.

$$X(z) = d_1 X_1(z) + d_2 X_2(z) + \dots$$

Bảng 1.1: Ảnh Laplace và Z của một số tín hiệu đơn giản:

$x(t), t \geq 0$	$x_k = x(kT_a) \quad k \geq 0$	$X(s)$	$X(z)$
$\delta(t)$	{1, 0, 0, 0, ...}	1	1
$1(t)$	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	kT_a	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{zT_a}{(z-1)^2}$
t^2	$(kT_a)^2$	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{z(z+1)T_a^2}{(z-1)^3}$

$x(t), t \geq 0$	$x_k = x(kT_a) k \geq 0$	$X(s)$	$X(z)$
t^3	$(kT_a)^3$	$\frac{6}{s^4}$	$\frac{z(z^2 + 4z + 1)T_a^3}{(z - 1)^4}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{(kT_a)^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$-\frac{zT_a}{n!} \cdot \frac{d}{dz} (Z\{(kT_a)^{n-1}\})$
e^{at}	e^{akT_a}	$\frac{1}{s - a}$	$\frac{z}{z - e^{aT_a}}$
$t \cdot e^{at}$	$kT_a e^{akT_a}$	$\frac{1}{(s - a)^2}$	$\frac{ze^{aT_a} T_a}{(z - e^{aT_a})^2}$
$t^n e^{at}$	$(kT_a)^n e^{akT_a}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	$\frac{d^n}{da^n} \left(\frac{z}{z - e^{aT_a}} \right)$
$\frac{t(t - T_a)}{2}$	$C_k^2 T_a^2$	$\frac{2 - T_a s}{2s^3}$	$\frac{T_a^2 z}{(z - 1)^3}$
$\frac{t(t + T_a)}{2}$	$C_{k+1}^2 T_a^2$	$\frac{2 + T_a s}{2s^3}$	$\frac{T_a^2 z^2}{(z - 1)^3}$
	$C_k^n a^{k-n}$		$\frac{z}{(z - 1)^{n+1}}$
	$C_{k+n}^n a^k$		$\frac{z^{n+1}}{(z - a)^{n+1}}$
	$\frac{1}{k!}$		$\frac{1}{e^z}$
$\frac{t}{a^{T_a}}$	a^k	$\frac{T_a}{T_a s - \ln a}$	$\frac{z}{z - a}$
a^{bt}	a^{bkT_a}	$\frac{1}{s - b \ln a}$	$\frac{z}{z - a^{bT_a}}$
$t \cdot a^{bt}$	$(kT_a) a^{bkT_a}$	$\frac{1}{(s - b \ln a)^2}$	$\frac{z T_a a^{bT_a}}{(z - a^{bT_a})^2}$
$t^2 a^{bt}$	$(kT_a)^2 a^{bkT_a}$	$\frac{2}{(s - b \ln a)^2}$	$\frac{z(z + a^{bT_a}) T_a^2 a^{bT_a}}{(z - a^{bT_a})^3}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$		$\frac{1}{\sqrt{s}}$	
$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$		$\frac{1}{s\sqrt{s}}$	
$\cos(\beta t)$	$\cos(\beta kT_a)$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{z[z - \cos(\beta T_a)]}{z^2 - 2z \cos(\beta T_a) + 1}$

$x(t), t \geq 0$	$x_k = x(kT_a) k \geq 0$	$X(s)$	$X(z)$
$\sin(\beta t)$	$\sin(\beta kT_a)$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{z \sin(\beta T_a)}{z^2 - 2z \cos(\beta T_a) + 1}$
$\cos^2(\beta t)$		$\frac{s^2 + 2\beta^2}{s(s^2 + 4\beta^2)}$	
$\sin^2(\beta t)$		$\frac{2\beta^2}{s(s^2 + 4\beta^2)}$	
$t \cdot \cos(\beta t)$		$\frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$	
$t \cdot \sin(\beta t)$		$\frac{2s\beta}{(s^2 + \beta^2)^2}$	
$\frac{\sin \beta t}{t}$		$\arctan \frac{\beta}{s}$	
	$a^k \cos(bk)$		$\frac{z(z - a \cos b)}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$
	$a^k \sin(bk)$		$\frac{za \sin b}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$
$e^{at} \cos(\beta t)$	$e^{akT_a} \cos(\beta kT_a)$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \beta^2}$	$\frac{z[z - e^{aT_a} \cos(\beta T_a)]}{z^2 - 2ze^{aT_a} \cos(\beta T_a) + e^{2aT_a}}$
$e^{at} \sin(\beta t)$	$e^{akT_a} \sin(\beta kT_a)$	$\frac{\beta}{(s - a)^2 + \beta^2}$	$\frac{ze^{aT_a} \sin(\beta T_a)}{z^2 - 2ze^{aT_a} \cos(\beta T_a) + e^{2aT_a}}$
$\cosh(\beta t)$	$\cosh(\beta kT_a)$	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$	$\frac{z[z - \cosh(\beta T_a)]}{z^2 - 2z \cosh(\beta T_a) + 1}$
$\sinh(\beta t)$	$\sinh(\beta kT_a)$	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$	$\frac{z \sinh(\beta T_a)}{z^2 - 2z \cosh(\beta T_a) + 1}$

Ví dụ 39: Hãy xác định ảnh $X(z)$ của một tín hiệu xung $\{x_k\}$ được trích mẫu từ $x(t)$ có ảnh Laplace

$$X(s) = \frac{3s - 1}{(s - 2)^2}$$

với chu kỳ trích mẫu $T_a = 0,1$ cho trước.

Viết lại $X(s)$ đã cho thành tổng tuyến tính của những hàm quen thuộc:

$$X(s) = \frac{3}{s - 2} + \frac{2}{(s - 2)^2}$$

rồi tra bảng 1.1 ta được:

$$\mathcal{J}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = \frac{z}{z-e^{2T_a}} \approx \frac{z}{z-1,22}$$

$$\mathcal{J}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = \frac{ze^{2T_a}T_a}{(z-e^{2T_a})^2} \approx \frac{0,12z}{(z-1,22)^2}.$$

Suy ra

$$X(z) \approx 3 \frac{z}{z-1,22} + 2 \frac{0,12z}{(z-1,22)^2} = \frac{3z^2 - 3,42z}{(z-1,22)^2}.$$
□

Ví dụ 40: Tín hiệu causal liên tục $x(t)$ có ảnh Laplace

$$X(s) = \frac{s+1}{s^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{s^4}.$$

Từ bảng 1.1 được

$$\mathcal{J}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = \frac{z(z+1)T_a^2}{(z-1)^3} \quad \text{và} \quad \mathcal{J}\left\{\frac{6}{s^4}\right\} = \frac{z(z^2+4z+1)T_a^3}{(z-1)^4}.$$

Bởi vậy tín hiệu xung tương ứng $\{x_k\}$ với chu kỳ trích mẫu T_a có ảnh Z là:

$$X(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{z(z+1)T_a^2}{(z-1)^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{z(z^2+4z+1)T_a^3}{(z-1)^4} = \frac{zT_a^2[T_a(z^2+4z+1)+3(z^2-1)]}{6(z-1)^4}.$$
□

1.5 Chuẩn của tín hiệu

1.5.1 Khái niệm chuẩn

Trong điều khiển nói riêng cũng như trong các công việc có liên quan đến tín hiệu nói chung, thông thường ta không làm việc chỉ riêng với một tín hiệu hoặc một vài tín hiệu điển hình mà ngược lại phải làm việc với một tập gồm rất nhiều các tín hiệu khác nhau. Khi phải làm việc với nhiều tín hiệu khác nhau như vậy chắc chắn ta sẽ gặp bài toán so sánh các tín hiệu để chọn lọc ra được những tín hiệu phù hợp cho công việc.

Các khái niệm như tín hiệu $x_1(t)$ tốt hơn tín hiệu $x_2(t)$ chỉ thực sự có nghĩa nếu như chúng cùng được chiếu theo một tiêu chuẩn so sánh nào đó. Cũng như vậy nếu ta khẳng định rằng $x_1(t)$ lớn hơn $x_2(t)$ thì phải chỉ rõ phép so sánh lớn hơn đó được hiểu theo nghĩa nào, $x_1(t)$ có giá trị cực đại lớn hơn, có năng lượng lớn hơn hay $x_1(t)$ chứa nhiều thông tin hơn $x_2(t)$ Nói một cách khác, trước khi so sánh $x_1(t)$ với $x_2(t)$ chúng ta phải gắn cho mỗi một tín hiệu một giá trị đánh giá tín hiệu theo tiêu chuẩn so sánh được lựa chọn.

Ta có thể bắt gặp trong vô vàn sự việc của cuộc sống hàng ngày hiện tượng gán thêm cho một tín hiệu, một đối tượng, một phần tử nào đó một giá trị chuẩn để so sánh. Ví dụ, để đánh giá Trung tâm đào tạo A có hiệu quả hơn Trung tâm đào tạo B hay không

thì ta phải thống nhất với nhau trước về chỉ tiêu so sánh là kinh tế, chất lượng đào tạo hay số lượng học viên. Sau khi đã thống nhất với nhau về chỉ tiêu so sánh rồi ta mới có cơ sở để gán cho mỗi Trung tâm đào tạo một con số nói lên nội dung của nó theo chỉ tiêu đánh giá được lựa chọn đó. Chẳng hạn theo chỉ tiêu chất lượng Trung tâm A hàng năm đào tạo được 50 học viên thuần túy chuyên môn làm việc được ngay còn của Trung tâm B là 40 (A tốt hơn B) nhưng theo tiêu chuẩn kinh tế thì Trung tâm A hàng tháng thu được 30 triệu đồng và Trung tâm B là 40 triệu đồng (B tốt hơn A).

Những con số mà ta gán cho từng phần tử theo một tiêu chuẩn chọn trước như vậy có tên chung là *chuẩn của phần tử*.

Định nghĩa 1.1: Cho một tín hiệu $x(t)$ và một ánh xạ $x(t) \mapsto \|x(t)\| \in \mathbb{R}^+$ chuyển $x(t)$ thành một số thực dương $\|x(t)\|$. Số thực dương này sẽ được gọi là chuẩn của $x(t)$ nếu nó thỏa mãn:

- $\|x(t)\| \geq 0$ và $\|x(t)\| = 0$ khi và chỉ khi $x(t) = 0$,
- $\|x(t)+y(t)\| \leq \|x(t)\| + \|y(t)\|$; $\forall x(t), y(t)$,
- $\|ax(t)\| = |a| \cdot \|x(t)\|$, $\forall x(t)$ và $\forall a \in \mathbb{R}$.

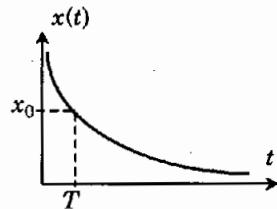
Ví dụ 41: Cho tín hiệu mô tả bởi $x(t) = t^{-\alpha}$ với $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ xác định trong khoảng $[0, 1]$. Giá

trị thực dương $\|x(t)\|$ ứng với $x(t)$ tính theo công thức

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_0^1 x^2(t) dt} = \sqrt{\int_0^1 t^{-2\alpha} dt} = \sqrt{\frac{1}{1-2\alpha}}$$

là một chuẩn của $x(t)$, vì:

- Khi $x(t) \neq 0$ thì $\sqrt{\frac{1}{1-2\alpha}}$ là một số dương. Nếu $x(t)=0$ thì $\|x(t)\|=0$ và ngược lại.
- Gọi $y(t) = t^{-b}$ với $0 < b < \frac{1}{2}$ và cũng xác định trong



Hình 1.16: Minh họa ví dụ 41.

khoảng $[0, 1]$, thì $\|y(t)\| = \sqrt{\frac{1}{1-2b}}$. Ta có

$$\|x(t)+y(t)\| = \sqrt{\int_0^1 (t^{-\alpha} + t^{-b})^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^1 t^{-2\alpha} dt} + \sqrt{\int_0^1 t^{-2b} dt} = \|x(t)\| + \|y(t)\|.$$

$$-\quad \|\lambda x(t)\| = \sqrt{\int_0^1 \lambda^2 x^2(t) dt} = \lambda \sqrt{\int_0^1 t^{-2\alpha} dt} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\alpha}} = \lambda \|x(t)\|.$$

□

Ví dụ 42: Cho vector $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ có n phần tử a_i , $i=1, 2, \dots, n$ là những số thực (người ta

thường sử dụng ký hiệu $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$). Những số thực sau đều được xem là chuẩn của \underline{a} :

$$- \quad \|\underline{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

$$- \quad \|\underline{a}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|. \quad \square$$

Thường dùng trong điều khiển cho một tín hiệu $x(t)$ là các chuẩn sau:

$$1) \quad \text{Chuẩn bậc 1:} \quad \|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt. \quad (1.40)$$

$$2) \quad \text{Chuẩn bậc 2:} \quad \|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}. \quad (1.41)$$

$$3) \quad \text{Chuẩn bậc } p: \quad \|x(t)\|_p = \sqrt[p]{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt} \quad \text{với } p \in \mathbb{N}. \quad (1.42)$$

$$4) \quad \text{Chuẩn vô cùng:} \quad \|x(t)\|_{\infty} = \sup_t |x(t)|. \quad (1.43)$$

Ký hiệu \sup_t trong chuẩn vô cùng (1.43) là để chỉ giá trị chặn trên nhỏ nhất (theo biến t). Nếu $|x(t)|$ có giá trị lớn nhất là x_{\max} thì

$$\sup_t |x(t)| = x_{\max}.$$

Khái niệm \sup_t có nghĩa rộng hơn \max_t . Ví dụ như tín hiệu

$$x(t) = (1 - e^{-t})1(t)$$

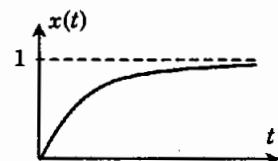
không có giá trị lớn nhất nhưng lại có giá trị chặn trên nhỏ nhất và đó là (hình 1.17)

$$\sup_t |x(t)| = 1.$$

Các chuẩn (1.40)-(1.43) có tính chất sau:

$$1) \quad \text{So sánh chuẩn:} \quad \|x(t)y(t)\|_p \leq \|x(t)\|_{\infty} \cdot \|y(t)\|_p \quad \text{với } 1 \leq p < \infty.$$

$$2) \quad \text{Bất đẳng thức Hölder:} \quad \|x(t)y(t)\|_1 \leq \|x(t)\|_p \cdot \|y(t)\|_q \quad \text{với } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$



Hình 1.17: Tín hiệu không có giá trị cực đại.

Vượt ra ngoài khố so sánh, khái niệm chuẩn còn có ý nghĩa quan trọng trong việc khảo sát tính giải tích của tín hiệu. Chẳng hạn như dãy các tín hiệu $x_1(t), x_2(t) \dots$ được nói là tiến tới $x(t)$ nếu như có được $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n(t) - x(t)\| = 0$ hoặc tất cả các tín hiệu $y(t)$ thỏa mãn $\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$ được xem là thuộc lân cận ε của $x(t)$.

Khái niệm chuẩn trong định nghĩa 1.1 không bị giới hạn là chỉ cho một tín hiệu $x(t)$ mà còn được áp dụng được cho cả vector tín hiệu gồm nhiều phần tử và mỗi phần tử lại là một tín hiệu.

Xét một vector tín hiệu

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Khi $t=t_0$ là điểm thời gian cố định thì $\underline{x}(t_0)$ không còn phụ thuộc vào t và các phần tử $x_1(t_0), x_2(t_0) \dots, x_n(t_0)$ của nó là những hằng số thực. Giá trị thực dương được tính từ n phần tử $x_i(t_0)$ của vector

$$\underline{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix}$$

là

$$\|\underline{x}(t_0)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i(t_0)| \quad (1.44)$$

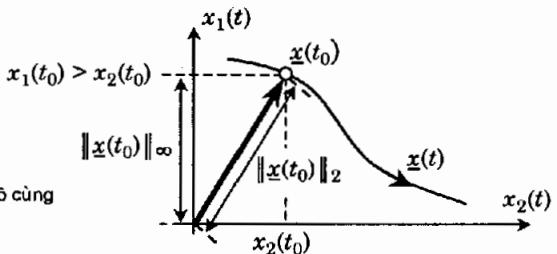
thỏa mãn ba tiêu chuẩn của định lý 1.1 nên nó được xem như là chuẩn (bậc 1) của vector $\underline{x}(t_0)$. Cũng như vậy các giá trị

$$\|\underline{x}(t_0)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i(t_0)|^2} \quad \text{hoặc} \quad (1.45)$$

$$\|\underline{x}(t_0)\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i(t_0)|^p} \quad \text{hoặc} \quad (1.46)$$

$$\|\underline{x}(t_0)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i(t_0)\| \quad (1.47)$$

cũng là những chuẩn của $\underline{x}(t_0)$ và được gọi là chuẩn bậc 2, chuẩn bậc p ($p > 0$), chuẩn vô cùng. Hình 1.18 biểu diễn chuẩn bậc 2 và chuẩn vô cùng của một vector $\underline{x}(t_0)$ gồm có hai phần tử thực $x_1(t_0), x_2(t_0)$.



Hình 1.18: Minh họa chuẩn bậc 2 và chuẩn vô cùng của một vector có 2 phần tử.

Nếu cho t_0 chạy từ $-\infty$ đến ∞ thì các chuẩn $\|\underline{x}(t_0)\|_1$, $\|\underline{x}(t_0)\|_2$, $\|\underline{x}(t_0)\|_p$, $\|\underline{x}(t_0)\|_\infty$ mà dưới đây sẽ được viết chung thành $\|\underline{x}(t_0)\|$, lại trở thành những hàm số theo biến t_0 giống như một tín hiệu. Do đó bản thân chúng cũng có chuẩn theo các công thức (1.40)÷(1.43) như:

$$a) \quad \|\underline{x}(t)\|_p = \sqrt[p]{\int_0^\infty \|\underline{x}(t_0)\|^p dt_0} \quad (\text{chuẩn } p). \quad (1.48)$$

$$b) \quad \|\underline{x}(t)\|_\infty = \sup_{-\infty < t_0 < \infty} \|\underline{x}(t_0)\| \quad (\text{chuẩn vô cùng}). \quad (1.49)$$

và chuẩn đó được gọi là chuẩn của vector tín hiệu $\underline{x}(t)$. Ghép chung một trong 4 công thức (1.44)÷(1.47) với 2 công thức (1.48) và (1.49) ta có những chuẩn khác nhau của vector tín hiệu $\underline{x}(t)$. Tuy nhiên, thường dùng nhất trong điều khiển cho $\underline{x}(t)$ là chuẩn vô cùng được xây dựng từ (1.45) và (1.49):

$$\|\underline{x}(t)\| = \sup_t \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)}. \quad (1.50)$$

1.5.2 Quan hệ của chuẩn với ảnh Fourier và ảnh Laplace

Để phục vụ mục đích sử dụng khái niệm chuẩn vào điều khiển, ta cần quan tâm tới mối liên quan giữa chuẩn tín hiệu $x(t)$ là $\|\underline{x}(t)\|$ với ảnh Fourier $X(j\omega)$ cũng như ảnh Laplace $X(s)$ của nó.

Trước hết ta thấy bình phương của chuẩn bậc hai $\|\underline{x}(t)\|_2$ theo (1.41) chính là giá trị đo năng lượng của tín hiệu $x(t)$. Gọi $X(j\omega)$ là ảnh Fourier của $x(t)$. Vậy thì:

Định lý 1.1: (Parseval) Chuẩn bậc hai của một tín hiệu $x(t)$ và ảnh Fourier $X(j\omega)$ của nó có quan hệ:

$$\|\underline{x}(t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

Chứng minh: Xét hai tín hiệu $x_1(t)$, $x_2(t)$ và gọi $X_1(j\omega)$, $X_2(j\omega)$ là ảnh Fourier của chúng. Theo tính chất 7) về ảnh Fourier của một tích ta có:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\zeta)X_2[j(\omega - \zeta)] d\zeta.$$

Khi $\omega = 0$ thì:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\zeta)X_2(-j\zeta) d\zeta.$$

Do đó với $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$ ta được:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\zeta)X(-j\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\zeta)|^2 d\zeta,$$

vì $X(-j\zeta) = \overline{X(j\zeta)}$ và đây là điều phải chứng minh. \square

Ví dụ 43: Tín hiệu causal liên tục $x(t) = e^{-at}$, $a > 0$ có ảnh Fourier

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega}.$$

Tín hiệu có năng lượng là bình phương chuẩn bậc hai:

$$E = \|x(t)\|_2^2 = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a}$$

và giá trị năng lượng này cũng được tính từ ảnh Fourier của nó theo:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{a + j\omega} \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{2\pi a} \arctan \frac{\omega}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2a}. \quad \square$$

Cho tín hiệu causal $x(t)$. Gọi $X(s)$ là ảnh Laplace của nó. Giả sử rằng $X(s)$ có dạng thực-hữu tỷ với bậc của đa thức tử số không lớn hơn bậc của đa thức mẫu số, tức là:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad \text{với} \quad m \leq n. \quad (1.51)$$

Định lý 1.2: Xét tín hiệu causal $x(t)$ có $X(s)$ dạng (1.51). Để chuẩn bậc 1 của $x(t)$ là một số hữu hạn,

$$\|x(t)\|_1 = K < \infty.$$

thì cần và đủ là tất cả các điểm cực của $X(s)$ phải nằm bên trái trục ảo (có phần thực âm).

Chứng minh: Do $x(t)$ có ảnh Laplace nên theo mục 1.3.1 phải tồn tại một số a dương đủ lớn để

$$\int_0^{\infty} |x(t)| e^{-at} dt < \infty.$$

Hàng số a chính là bán kính hội tụ của tích phân Laplace:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad \text{với} \quad s = c + j\omega \quad \text{và} \quad c > a.$$

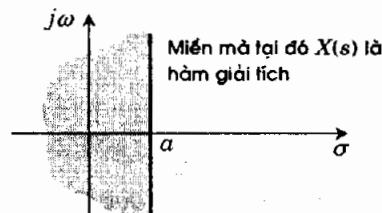
Điều này chỉ rằng trong nửa mặt phẳng phức bên phải đường thẳng $\sigma = a$ hàm $X(s)$ có tính giải tích (không có điểm cực). Nếu

$$\|x(t)\|_1 = \int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

thì ta có thể chọn $a=0$ và khi đó $X(s)$ sẽ giải tích trong toàn bộ nửa kín mặt phẳng phức bên phải trục ảo (kể cả trục ảo). Suy ra các điểm cực của $X(s)$ phải nằm bên trái trục ảo.

Ngược lại, nếu tất cả các điểm cực của $X(s)$ nằm bên trái trục ảo thì ảnh Fourier $X(j\omega)$ sẽ là $X(s)|_{s=j\omega}$ (mục 1.3.4). Nói cách khác tín hiệu $x(t)$ có ảnh Fourier và do đó nó phải thỏa mãn điều kiện a) mục 1.2.2 về toán tử Fourier:

$$\int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (\text{là một số hữu hạn}).$$



Hình 1.19: Minh họa cho phần chứng minh định lý 1.2.

Ví dụ 44: Cho tín hiệu causal $x(t) = e^{at}$ với ảnh Laplace

$$X(s) = \frac{1}{s-a}.$$

Giá trị chuẩn

$$\|x(t)\|_1 = \int_0^{\infty} |x(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{at} dt \quad (1.52)$$

sẽ là một số hữu hạn bằng $-\frac{1}{a}$ nếu $a < 0$ (diểm cực của $X(s)$ là a nằm bên trái trục ảo).

Ngược lại khi $a \geq 0$ thì điểm cực a của $X(s)$ không nằm bên trái trục ảo và tích phân (1.52) để xác định $\|x(t)\|_1$ cũng không hội tụ. \square

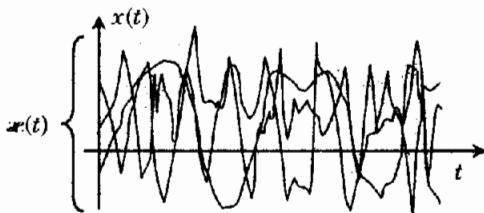
1.6 Mô tả tín hiệu ngẫu nhiên

Các tín hiệu mà ta đã làm quen từ trước đến nay có chung một đặc điểm là chúng đều được mô tả bằng một hàm thời gian $x(t)$ cụ thể. Những tín hiệu đó được gọi là *tín hiệu tiền định*. Việc chúng mô tả được chỉ bằng một hàm thời gian đã nói lên tính tường minh ràng trong các hoàn cảnh cũng như thời điểm giống nhau ta luôn xác định được cùng một giá trị cho tín hiệu.

Những tín hiệu không mô tả được tường minh bằng một hàm thời gian cụ thể có tên là *tín hiệu ngẫu nhiên*. Tùy vào từng hoàn cảnh, từng trường hợp, mà tín hiệu ngẫu nhiên sẽ nhận một trong các hàm $x_i(t)$ thuộc một tập hợp $\mathcal{x}(t)$ nào đó làm mô hình và ngay cả hoàn cảnh nào, trường hợp nào nó sẽ có mô hình $x_i(t)$ ta cũng không biết được trước. Nhiều nhất ta chỉ có thể biết được về xác suất nó được mô tả bởi $x_i(t)$. Số các phần tử $x_i(t)$ của $\mathcal{x}(t)$ không nhất thiết phải là một số xác định. Thậm chí, nó có thể là một số đếm được ($i \in \mathbb{N}$), song cũng có thể là một số không đếm được ($i \in \mathbb{R}$).

Tập hợp $\mathcal{x}(t)$ của tất cả các mô hình có thể có của tín hiệu ngẫu nhiên được gọi là *quá trình ngẫu nhiên* và để mô tả tín hiệu ngẫu nhiên một cách đầy đủ ta phải mô tả tập hợp $\mathcal{x}(t)$.

Hình 1.20: Tín hiệu ngẫu nhiên được mô tả như là phần tử của một tập hợp các hàm thời gian có cùng tinh chất.



Do việc mô tả tín hiệu ngẫu nhiên không thể thực hiện được với một hàm thời gian $x(t)$ cụ thể mà phải bằng một tập hợp $\mathcal{x}(t)$ gồm vô số các hàm thời gian $x_i(t)$ như vậy nên để mô hình hóa tín hiệu ngẫu nhiên, cần thiết người ta phải xác định được các thông số đặc trưng về tập hợp $\mathcal{x}(t)$ gồm những mô hình có thể đó của nó. Các thông số đó sẽ được gọi là tham số mô tả quá trình ngẫu nhiên $\mathcal{x}(t)$. Nói cách khác để mô tả một tín hiệu ngẫu nhiên người ta phải mô tả tập hợp $\mathcal{x}(t)$ các mô hình $x_i(t)$ có thể có của nó.

Có hai tham số thường được sử dụng nhiều trong điều khiển để mô tả một quá trình ngẫu nhiên $x(t)$. Đó là:

- *Giá trị trung bình* $m_x(t)$: Tại một điểm thời gian t_0 cụ thể thì các hàm $x_i(t_0)$ đều là những số thực. Giá trị trung bình của tất cả các phân tử $x_i(t_0)$ là $m_x(t_0)$. Cho t_0 chạy từ $-\infty$ đến ∞ thì $m_x(t_0)$ sẽ trở thành hàm số phụ thuộc biến thời gian t_0 . Một cách tổng quát, $m_x(t)$ là một hàm phụ thuộc thời gian t . Sử dụng ký hiệu $M\{\cdot\}$ để chỉ phép tính lấy giá trị trung bình thì $m_x(t) = M\{x(t)\}$.
- *Hàm tương quan* $r_x(t, \tau)$: Tại một điểm thời gian t_0 cụ thể thì hàm tương quan $r_x(t_0, \tau)$ là giá trị trung bình của tất cả các tích $x_i(t_0)x_j(t_0 + \tau)$. Cho t_0 biến thiên như t thì hàm tương quan $r_x(t, \tau)$ sẽ là một hàm của hai biến t và τ . Sử dụng ký hiệu $M\{\cdot\}$ của phép tính lấy giá trị trung bình được $r_x(t, \tau) = M\{x(t)x(t+\tau)\}$.

Những quá trình ngẫu nhiên $x(t)$ thường gặp là các *quá trình ngẫu nhiên dừng*. Đó là loại quá trình ngẫu nhiên mà cả hai hàm $m_x(t)$ và $r_x(t, \tau)$ mô tả nó đều không phụ thuộc vào biến thời gian t . Nói cách khác, quá trình ngẫu nhiên dừng là quá trình mà:

- Giá trị trung bình $m_x(t)$ của nó là một hằng số $m_x \in \mathbb{R}$.
- Hàm tương quan $r_x(t, \tau)$ là hàm số có một biến τ . Với quá trình ngẫu nhiên dừng $x(t)$ ta sẽ viết một cách đơn giản là $r_x(t)$ thay cho $r_x(t, \tau)$.

Trong các loại quá trình ngẫu nhiên dừng đó ta lại chỉ quan tâm riêng tới những *quá trình ngẫu nhiên egodic*. Đây là loại quá trình ngẫu nhiên dừng mà hai tham số m_x và $r_x(t)$ của nó không cần phải được tính từ tất cả các hàm phân tử $x_i(t)$ của tập $x(t)$ mà chỉ cần từ một phân tử $x(t)$ làm đại diện. Như vậy thì:

- Giá trị trung bình m_x của quá trình ngẫu nhiên egodic $x(t)$ sẽ là giá trị trung bình của một phân tử $x(t)$

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (1.53)$$

- Hàm tương quan $r_x(t)$ của quá trình ngẫu nhiên egodic $x(t)$ là giá trị trung bình của tích $x(t)x(t+\tau)$ với $x(t)$ là một phân tử tùy ý của tập hợp $x(t)$

$$r_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt. \quad (1.54)$$

Trong điều khiển ít khi ta chỉ làm việc với một tín hiệu ngẫu nhiên. Khi phải làm việc với nhiều tín hiệu ngẫu nhiên thì cần phải để ý tới mối liên quan giữa chúng. Cho

hai quá trình ngẫu nhiên egodic $x(t)$ và $y(t)$. Đặc trưng cho sự liên quan giữa $x(t)$ và $y(t)$ là hàm tương quan (chéo)

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt. \quad (1.55)$$

Hai quá trình ngẫu nhiên $x(t)$ và $y(t)$ sẽ được gọi là *không tương quan* nếu $r_{xy}(\tau) = 0$. Chẳng hạn như hai thiết bị phát tín hiệu ngẫu nhiên khác nhau, có cấu trúc khác nhau sẽ phát ra hai quá trình ngẫu nhiên $x(t)$, $y(t)$ độc lập với nhau. Giữa chúng không có một sự liên quan nào và do đó phải có $r_{xy}(\tau) = 0$.

Định lý 1.3: Hàm tương quan $r_x(\tau)$ và $r_{xy}(\tau)$ của quá trình ngẫu nhiên egodic $x(t)$, $y(t)$ luôn thỏa mãn

- a) $r_x(\tau)$ là hàm chẵn và $r_x(0) \geq |r_x(\tau)|$.
- b) $r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$.

Chứng minh: Tính chẵn của $r_x(\tau)$ được suy ra ngay từ công thức (1.54). Thật vậy, do

$$r_x(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t-\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-\tau}^{T-\tau} x(t+\tau)x(t')dt',$$

trong đó $t' = t - \tau$ và vì khi $T \rightarrow \infty$ cũng có $(-T-\tau) \rightarrow -\infty$ và $(T-\tau) \rightarrow \infty$ giống như T nên

$$r_x(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t')dt' = r_x(\tau).$$

Tương tự với (1.55) ta cũng chỉ ra được rằng

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau).$$

Để chứng minh

$$r_x(0) \geq |r_x(\tau)|$$

ta sử dụng điều hiển nhiên

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) \pm x(t+\tau)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x^2(t) \pm 2x(t)x(t+\tau) + x^2(t+\tau)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \pm \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T 2x(t)x(t+\tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t+\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \pm \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T 2x(t)x(t+\tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-\tau}^{T-\tau} x^2(t') dt' \end{aligned}$$

và suy ra

$$0 \leq 2[r_x(0) \pm r_x(\tau)].$$

□

Chú ý rằng trong khi $r_x(\tau)$ có giá trị lớn nhất tại điểm $\tau=0$ thì $r_{xy}(\tau)$ không nhất thiết phải có giá trị lớn nhất khi $\tau=0$. Để xác định giá trị lớn nhất của $r_{xy}(\tau)$ người ta thường sử dụng công thức:

$$|r_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{r_x(0)r_y(0)} \leq \frac{1}{2} [r_x(0) + r_y(0)], \quad (1.56)$$

và tính đúng đắn của nó được suy ra từ:

$$M\{[x(t)+k \cdot y(t+\tau)]^2\} = r_x(0) + 2k \cdot r_{xy}(\tau) + k^2 r_y(0), \quad (1.57)$$

trong đó ta chọn

$$k = -\frac{r_{xy}(\tau)}{r_y(0)} \text{ và } k = \pm 1.$$

Do $r_x(\tau)$ và $r_{xy}(\tau)$ là những hàm thời gian nên chúng cũng có thể có ảnh Fourier. Ảnh Fourier của $r_x(\tau)$ ký hiệu bởi

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.58)$$

có tên gọi là *mật độ phô* (*hop*) quá trình ngẫu nhiên $x(t)$. Chú ý rằng $r_x(\tau)$ là hàm chẵn (định lý 1.3) nên theo tính chất 3) của toán tử Fourier (mục 1.2.2) ảnh Fourier của nó $S_x(j\omega)$ phải là một hàm thực (có phần ảo bằng 0). Bởi vậy trong (1.58) ta đã viết $S_x(\omega)$ thay vì $S_x(j\omega)$ để nhấn mạnh điều này.

Tương tự ảnh Fourier

$$S_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.59)$$

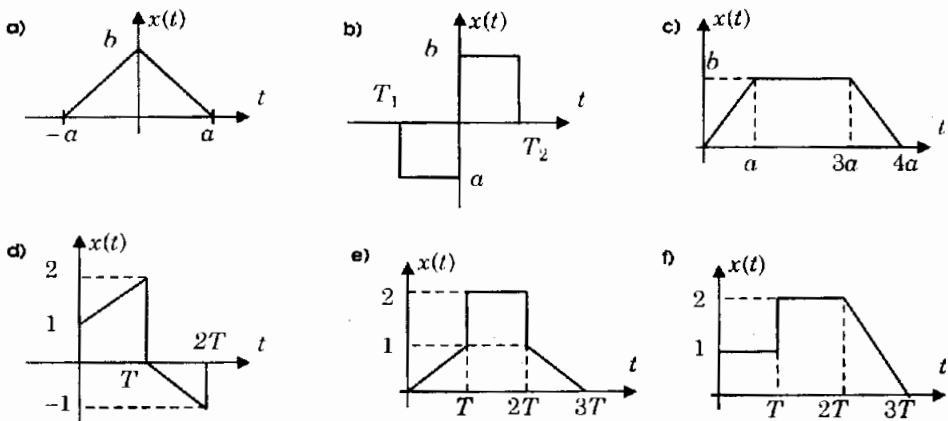
được gọi là *mật độ phô* (*chéo*) giữa hai quá trình ngẫu nhiên $x(t)$ và $y(t)$.

Câu hỏi ôn tập và bài tập

1) Vẽ đồ thị biểu diễn các tín hiệu $x(t)$ sau

- a) $x(t) = 1(t) - 2 \cdot 1(t-T) + 1(t-2T)$
- b) $x(t) = t \cdot 1(t) - (t-T) \cdot 1(t-T)$
- c) $x(t) = t \cdot 1[1(t) - 1(t-T)]$
- d) $x(t) = \sin \omega t \cdot 1(t) \cdot 1\left(\frac{\pi}{\omega} - t\right)$

- 2) Biểu diễn các tín hiệu $x(t)$ sau qua hàm Heaviside.



Hình 1.21: Đồ thị biểu diễn các tín hiệu $x(t)$ cho bài tập số 2.

- 3) Biểu diễn tín hiệu $x(t) = \begin{cases} at & \text{khi } 0 \leq t \leq T \\ a(2T-t) & \text{khi } T \leq t \leq 2T \end{cases}$ dưới dạng tổng, biết rằng $x(t)$ là tín hiệu causal, tức là $x(t) = 0$ khi $t < 0$, và $x(t) = x(t+2T)$.
- 4) Vẽ đồ thị biểu diễn tín hiệu
- $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k [1(t-kT) - 1(t-(k+1)T)]$, trong đó $x_k = \sin \frac{k\pi}{4}$.
 - $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t-kT)$ với $f(t) = \begin{cases} \sin^2 \omega t & \text{khi } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{khi } t < 0, t > T \end{cases}$ và $\omega T = \pi$.
 - $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t-kT)$ với $f(t) = \begin{cases} t & \text{khi } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2}(3-t) & \text{khi } 1 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{khi } t < 0, t > 3 \end{cases}$.
 - $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t-kT)$ với $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{khi } 0 \leq t \leq T \\ (t-2T)^2 & \text{khi } T \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{khi } t < 0, t > 2T \end{cases}$.
- 5) Cho tín hiệu $x(t) = 1(t) - 1(t-T)$. Hãy xác định các tích chập sau:
- $x_1(t) = x(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau$.

$$b) \quad x_2(t) = x(t)^* x(t)^* x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_2) x(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 \right] x(t - \tau_1) d\tau_1.$$

Vẽ đồ thị thời gian biểu diễn kết quả. Có nhận xét gì về kết quả?

- 6) Xác định ảnh Fourier của tín hiệu

a) $x(t) = at$ khi $0 < t < T$.

b) $x(t) = at^2$ khi $0 < t < T$.

c) $x(t) = \begin{cases} a & \text{khi } 0 < |t| < \frac{T}{4} \\ 0 & \text{khi } \frac{T}{4} < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$ và $x(t+T) = x(t)$.

d) $x(t) = \begin{cases} a & \text{khi } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{khi } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$ và $x(t+T) = x(t)$.

e) $x(t) = \left(1 - 2 \frac{|t|}{T}\right)x_0$ khi $0 < t < \frac{T}{2}$ và $x(t+T) = x(t)$.

f) $x(t) = \begin{cases} u & \text{khi } u \geq 0 \\ 0 & \text{khi } u < 0 \end{cases}$ với $u = U_0 \cos \omega t$.

g) $x(t) = |u|$ với $u = U_0 \sin \omega t$.

h) $x(t) = \frac{\sin[\Omega(t - t_0)]}{\pi(t - t_0)}$.

- 7) Cho một tín hiệu tuần hoàn $x(t)$ chu kỳ T . Tín hiệu này được xấp xỉ bởi hàm điều hòa biểu diễn dưới dạng tổng hữu hạn

$$x(t) \approx \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{jn\omega t} \quad \text{với } \bar{a}_n = a_n \text{ và } \omega T = 2\pi$$

bằng cách xác định những hệ số a_n sao cho bình phương sai lệch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{jn\omega t} \right|^2 dt$$

có giá trị nhỏ nhất. Hãy chỉ rằng khi đó a_n chính là hệ số chuỗi Fourier của $x(t)$:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

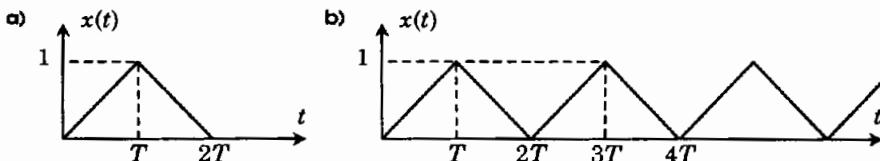
- 8) Hãy chỉ rằng $-j \operatorname{sgn} \omega$ là ảnh Fourier của $\frac{1}{\pi t}$.

- 9) Chứng minh rằng ảnh Fourier của một hàm $x(t)$ có miền xác định giới nội $[a, b]$, tức là $x(t)=0$ khi $t \notin [a, b]$, xác định trên toàn bộ trục số $-\infty < \omega < \infty$.
- 10) Để truyền tín hiệu $x(t)$ người ta đã điều chế $x(t)$ thành

$$\tilde{x}(t) = x(t) \cos(\alpha t - \varphi)$$

Giữa ảnh Fourier $X(j\omega)$ của $x(t)$ và $\tilde{X}(j\omega)$ của $\tilde{x}(t)$ có quan hệ gì?

- 11) Tìm ảnh Laplace của các tín hiệu ở hình 1.22:



Hình 1.22: Đồ thị biểu diễn các tín hiệu $x(t)$ cho bài tập số 11.

- 12) Hãy giải thích tại sao các tín hiệu sau không thỏa mãn $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$.

$$a) x(t) = \begin{cases} \cos t & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases} \quad b) x(t) = \begin{cases} \sin t & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$

- 13) Tìm tín hiệu $x(t)$ có ảnh Laplace.

$$a) X(s) = \frac{2s^2 + 13s + 17}{s^2 + 4s + 3}$$

$$b) X(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$$

$$c) X(s) = \frac{5s^2 + 19s + 20}{s^4 + 7s^3 + 17s^2 + 17s + 6}$$

$$d) X(s) = \frac{5s^3 + 11s^2 - s + 1}{s^4 + 4s^3 + 2s^2 - 4s - 3}$$

$$e) X(s) = \frac{7s^2 - 20s - 75}{s^3 + 6s^2 + 25s}$$

$$f) X(s) = \frac{1}{(1+sT_1)^2(1+sT_2)^2}$$

$$g) X(s) = \frac{1}{s(1+sT)^3}$$

$$h) X(s) = \frac{(1-sT)^n}{(1+sT)^{n+1}}, n=0,1,2, \dots$$

- 14) Xác định tích xép $x(t)*y(t)$ của các tín hiệu causal sau

$$a) x(t) = t \text{ và } y(t) = e^{-at}$$

$$b) x(t) = \cos \omega t \text{ và } y(t) = 1(t) - 1(t-T)$$

$$c) x(t) = \sin^2 \omega t \text{ và } y(t) = e^{-at}$$

15) Xác định các giá trị đầu $x(+0)$, $\frac{dx(+0)}{dt}$, $\frac{d^2x(+0)}{dt^2}$ của tín hiệu causal $x(t)$ có ảnh Laplace

a) $X(s) = \frac{1}{sT_1(1+sT_1)(1+sT_2)}$

b) $X(s) = \frac{1+sT}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$

c) $X(s) = \frac{s+1}{2s^2 + 3s + 4}$

d) $X(s) = \frac{1}{(1+sT)^n}, n=0,1,2, \dots$

16) Xác định điều kiện để tín hiệu $x(t)$ với ảnh Laplace

$$X(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$$

thỏa mãn

a) $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) \neq 0$

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq 0$

17) Giải các phương trình vi phân sau:

a) $\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} = 0$ với $y(+0) = 5$, $\frac{dy(+0)}{dt} = -8$ và $\frac{d^2y(+0)}{dt^2} = 28$.

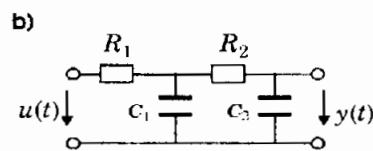
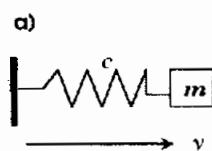
b) $T^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2T \frac{dy}{dt} + y = 1$ với $y(+0) = 0$ và $\frac{dy(+0)}{dt} = 0$.

c) $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 20 \cos 2t$ với $y(+0) = 1$ và $\frac{dy(+0)}{dt} = 5$.

d) $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ với $y(+0) = a$ và $\frac{dy(+0)}{dt} = b$.

e) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 3$ với $y(+0) = \frac{dy(+0)}{dt} = 0$.

18) Cho một hệ gồm 1 lò xo có hệ số đàn hồi c và một vật khối lượng m như hình 1.23a mô tả. Tại thời điểm $t=0$ vật bị một lực tác động tức thời làm bật ra khỏi vị trí cân bằng $y(+0)=0$ và có vận tốc ban đầu là $\frac{dy(+0)}{dt}=v_0$. Bỏ qua lực ma sát, hãy xác định phương trình dao động sau đó của vật xung quanh điểm cân bằng. Biên độ dao động lớn nhất của vật là bao nhiêu?



Hình 1.23: Hình minh họa cho bài tập 18 và 19.

- 19) Hình 1.23b mô tả một mạch điện gồm hai điện trở R_1, R_2 và hai tụ điện C_1, C_2 . Hãy xác định điện áp đầu ra $y(t)$ của mạch điện nếu tại đầu vào có $u(t) = u_0 \delta(t)$, biết rằng tại thời điểm $t=0$ cả hai tụ cùng chưa được nạp điện.
- 20) Với các giá trị đầu $x_1(+0) = 1, x_2(+0) = 5$, hãy tìm nghiệm của $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 3 \end{cases}$.
- 21) Hãy xác định xem những tín hiệu $x(t)$ nào trong số các tín hiệu có ảnh Laplace cho trong bài 13 và bài 15 có chuẩn bậc 1 $\|x(t)\|_1$ là một số hữu hạn.
- 22) Người ta định nghĩa khoảng cách giữa hai tín hiệu $x(t), y(t)$ nhờ khái niệm chuẩn như là giá trị (metric) $d(x, y) = \|x(t)-y(t)\|$. Chứng minh rằng:
- $d(x+z, y+z) = d(x, y)$.
 - $d(ax, ay) = |a|d(x, y)$ với a là một số thực.
- 23) Chứng minh các bất đẳng thức sau về chuẩn tín hiệu:
- $\|x(t) + y(t)\|^2 \leq [\|x(t)\| + \|y(t)\|]^2$.
 - $\|x(t) + y(t)\|^2 \leq \|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2 + 2\|x(t)\|\|y(t)\|$.
- Công thức b) có tên gọi là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.
- 24) Cho một quá trình ngẫu nhiên $x(t)$ có hàm tự tương quan $r_x(\tau) = 9 + 25e^{-5|\tau|}$.
- Xác định giá trị trung bình m_x của $x(t)$.
 - Xác định mật độ phổ $S_x(\omega)$ của $x(t)$.
- Gợi ý cho câu a) là công thức $\lim_{\tau \rightarrow \infty} r_x(\tau) = m_x^2$.
- 25) Gọi $x(t)$ là một phần tử của quá trình ngẫu nhiên ergodic $x(t)$. Chứng minh rằng
- Nếu $\|x(t)\|_2$ là một số hữu hạn thì $r_x(0) = 0$.
 - Nếu $\|x(t)\|_\infty$ là hữu hạn thì $r_x(\tau)$ cũng hữu hạn và $r_x(\tau) \leq \|x(t)\|_\infty$ với mọi τ .
- 26) Chứng minh các công thức (1.56) và (1.57) dùng để tính xấp xỉ giá trị lớn nhất của hàm tương quan $r_{xy}(\tau)$ giữa hai quá trình ngẫu nhiên $x(t)$ và $y(t)$.
- 27) Hãy xác định ảnh $X(z)$ của $\{x_k\}$ với
- $x_k = 2^{-k}$
 - $x_k = 2^{-k} \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$
- 28) Cho tín hiệu xung $\{x_k\}$ có ảnh Z là $X(z)$. Chứng minh rằng nếu có $\lim_{z \rightarrow \infty} z^n X(z) = M$ thì cũng có $x_n = M$.

29) Gọi $X(z)$ là ảnh Z của $\{x_k\}$ và $Y(z)$ là ảnh Z của $\{y_k\}$. Chứng minh rằng nếu tín hiệu $\{z_k\}$ được tạo bởi $z_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_{k-m}$ thì nó sẽ có ảnh $Z(z)=X(z)Y(z)$ – định lý về ảnh của tích chập.

30) Hãy tìm tín hiệu $\{x_k\}$ có ảnh

$$a) \quad X(z) = \frac{z}{z-2}$$

$$b) \quad X(z) = \frac{8z^2 + 4z}{4z^2 - 5z + 1}$$

$$c) \quad X(z) = \frac{4}{z^2(3z-1)}$$

$$d) \quad X(z) = \frac{z}{(z-2)^2(z-1)}$$

$$e) \quad X(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$$

$$f) \quad X(z) = \frac{-2z^3 - 3z^2 + 11z}{(z-1)^2(z+2)}$$

$$g) \quad X(z) = \ln(1-2z)$$

$$h) \quad X(z) = \ln\left(1 - \frac{1}{2z}\right)$$

31) Cho tín hiệu tuần hoàn $\{x_k\}$ với chu kỳ N , tức là $x_k = x_{k+N}$. Chứng minh rằng

$$X(z) = \frac{z^N}{z^N - 1} \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^{-k}.$$

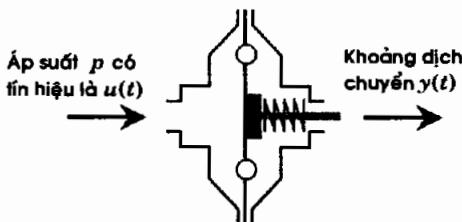
32) Cho hai tín hiệu $\{x_k\}$ và $\{y_k\}$. Gọi $X(z)$, $Y(z)$ là ảnh của chúng. Giữa $\{x_k\}$ và $\{y_k\}$ phải có mối liên hệ gì để có $X(z) = Y\left(\frac{1}{z}\right)$.

2 MÔ TẢ HỆ THỐNG

Trong chương 1 ta đã làm quen với những phương thức mô tả tín hiệu. Trên cơ sở các hình thức mô tả tín hiệu đó ta sẽ tiến hành việc xây dựng mô hình mô tả một hệ thống điều khiển tuyến tính.

Mô hình là một hình thức biểu diễn lại những hiểu biết của ta về hệ thống một cách khoa học nhằm phục vụ mục đích mô phỏng, phân tích và tổng hợp bộ điều khiển cho hệ thống. Không thể điều khiển một hệ thống mà không hiểu biết gì về hệ thống. Ta hãy xét một bài toán điều khiển có sử dụng bộ chuyển đổi áp suất p mô tả bởi tín hiệu đầu vào là $u(t)$ thành quang đường dịch chuyển biểu diễn dưới dạng tín hiệu ra $y(t)$ như hình 2.1 mô tả. Ta không thể tạo ra được một quang đường dịch chuyển chẳng hạn như 1mm trong khoảng thời gian, ví dụ 0,5s, như mong muốn thông qua việc đặt một giá trị áp suất thích hợp $u(t)$ tại đầu vào nếu như không biết rõ sự phụ thuộc của tín hiệu ra $y(t)$ với tín hiệu vào $u(t)$ của bộ chuyển đổi. Cũng như vậy ta không thể điều khiển một động cơ chuyển đổi từ vận tốc quay này sang một vận tốc quay khác nếu như không biết được tốc độ động cơ phụ thuộc như thế nào vào tín hiệu đầu vào là điện áp hay dòng, hoặc không thể đầu tư vào một thị trường (tín hiệu vào) để đạt được chỉ tiêu có lãi (tín hiệu ra) như mong muốn nếu không hiểu rõ về thị trường đó (hệ thống điều khiển)

Hình 2.1: Đổi tượng điều khiển là bộ cảm biến chuyển đổi áp suất thành quang đường dịch chuyển.



Thông qua vô vàn các ví dụ nêu lên sự cần thiết phải có mô hình hệ thống điều khiển để thực hiện bài toán điều khiển như vậy ta thấy rõ được chất lượng điều khiển phụ thuộc rất nhiều vào mô hình toán học mô tả hệ thống. Mô hình càng chính xác, hiệu suất công việc điều khiển càng cao.

Việc xây dựng mô hình cho hệ thống được gọi là mô hình hóa. Người ta thường phân chia các phương pháp mô hình hóa ra làm hai loại:

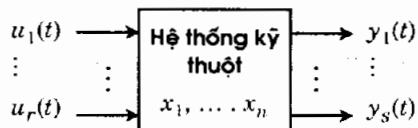
- phương pháp lý thuyết và
- phương pháp thực nghiệm (hay nhận dạng).

Phương pháp lý thuyết là phương pháp thiết lập mô hình dựa trên các định luật có sẵn về quan hệ vật lý bên trong và quan hệ giao tiếp với môi trường bên ngoài của hệ thống. Các quan hệ này được mô tả theo quy luật lý-hóa, quy luật cân bằng, ... dưới dạng những phương trình toán học. Trong các trường hợp mà ở đó sự hiểu biết về những quy luật giao tiếp bên trong hệ thống cũng về mối quan hệ giữa hệ thống với môi trường bên ngoài không được đầy đủ để có thể xây dựng được một mô hình hoàn chỉnh, nhưng ít nhất từ đó có thể cho biết các thông tin ban đầu về dạng mô hình để khoanh vùng lớp (hay tập hợp) các mô hình thích hợp cho hệ thống thì tiếp theo người ta phải áp dụng phương pháp thực nghiệm để hoàn thiện nốt việc xây dựng một mô hình hệ thống bằng cách tìm một mô hình thuộc lớp các mô hình thích hợp đó trên cơ sở *quan sát tín hiệu vào ra* sao cho sai lệch giữa nó với hệ thống so với những mô hình khác là nhỏ nhất. Phương pháp thực nghiệm đó được gọi là *nhận dạng* hệ thống điều khiển.

Mặc dù đã có mô hình hệ thống, song cũng phải thừa nhận là không thể nói rằng trong mọi trường hợp mô hình đó mô tả hệ thống đúng 100%. Tất cả các bài toán điều khiển đều phải làm việc với những mô hình hệ thống có chứa một sai lệch nhất định hoặc ít ra là có những tham số thay đổi nhiều. Bởi vậy ở các bài toán điều khiển hiện nay người ta thường phải thực hiện thêm những nhiệm vụ theo dõi và chỉnh định lại mô hình cho phù hợp với hệ thống thực hoặc phải thiết kế bộ điều khiển đảm bảo được chất lượng đề ra cho dù mô hình có sai lệch.

Bài toán điều khiển mà ở đó có thêm khả năng nhận biết được sự thay đổi của hệ thống để tự chỉnh định lại mô hình cũng như luật điều khiển được gọi là *điều khiển thích nghi*. Ngược lại những bài toán điều khiển luôn đảm bảo chất lượng đề ra cho dù có sai lệch mô hình hay có sự thay đổi nào đó không biết trước trong hệ thống mà không cần phải giám sát, phải theo dõi hệ thống, được gọi là *điều khiển bền vững*.

Hình 2.2. Mô tả một hệ thống kỹ thuật



Định nghĩa 2.1: Xem một hệ thống kỹ thuật cần xây dựng mô hình như một khối kín với các tín hiệu đầu vào là $u_1(t), \dots, u_r(t)$ và ra là $y_1(t), \dots, y_s(t)$, tức là hệ thống có r tín hiệu đầu vào và s tín hiệu đầu ra (hình 2.2). Mô hình mô tả hệ thống mà ta quan tâm là *mô hình toán học* biến diễn sự phụ thuộc của s tín hiệu ra $y_1(t), \dots, y_s(t)$ theo r tín hiệu vào $u_1(t), \dots, u_r(t)$ sao cho nếu biết trước các tín hiệu đầu vào

$u_1(t), \dots, u_r(t)$ cũng như những "sự kiện" ban đầu của hệ thống x_1, \dots, x_n thì với mô hình đó ta có thể tính ra được các tín hiệu đầu ra $y_1(t), \dots, y_s(t)$.

Nếu ghép chung tất cả r tín hiệu đầu vào $u_1(t), \dots, u_r(t)$ thành một vector tín hiệu vào $\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{pmatrix}$ và các tín hiệu ra $y_1(t), \dots, y_s(t)$ thành $\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_s(t) \end{pmatrix}$ thì bản chất của mô hình toán học sẽ chính là ánh xạ

$$T: \underline{u}(t) \mapsto \underline{y}(t) \quad (2.1a)$$

hay người ta còn viết thành:

$$\underline{y}(t) = T\{\underline{u}(t)\}. \quad (2.1b)$$

Nhiều khi thay vì tên gọi tín hiệu vào, tín hiệu ra của một hệ thống người ta còn sử dụng khái niệm *kích thích* và *đáp ứng* với nghĩa như sau: Nếu kích thích hệ thống bằng (vector) tín hiệu $\underline{u}(t)$ thì hệ thống sẽ có đáp ứng là $\underline{y}(t)$.

Hệ thống sẽ được gọi là *tuyến tính* khi mô hình toán học mô tả hệ thống là ánh xạ tuyến tính, tức là khi phân tích vector tín hiệu đầu vào $\underline{u}(t)$ thành tổng tuyến tính của các vector tín hiệu thành phần:

$$\underline{u}(t) = a_1 \underline{u}_1(t) + a_2 \underline{u}_2(t) + \dots + a_m \underline{u}_m(t) \quad (2.2a)$$

và giả thiết là đã biết đáp ứng (tín hiệu ra) của hệ thống cho từng thành phần đó:

$$\underline{y}_1(t) = T\{\underline{u}_1(t)\}, \underline{y}_2(t) = T\{\underline{u}_2(t)\}, \dots, \underline{y}_m(t) = T\{\underline{u}_m(t)\}, \quad (2.2b)$$

thì đáp ứng $\underline{y}(t)$ của hệ cho kích thích $\underline{u}(t)$ sẽ cũng chính là tổ hợp tuyến tính từ các đáp ứng thành phần trên:

$$\underline{y}(t) = a_1 \underline{y}_1(t) + a_2 \underline{y}_2(t) + \dots + a_m \underline{y}_m(t). \quad (2.2c)$$

Một cách ngắn gọn, bản chất tuyến tính nêu trên của mô hình T được viết thành:

$$T\left\{ \sum_{i=1}^m a_i u_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^m a_i T\{u_i(t)\} \quad (2.2d)$$

và còn có tên gọi khác là *nguyên lý xếp chồng*. Nhờ có bản chất tuyến tính này (thỏa mãn nguyên lý xếp chồng) mà việc khảo sát, phân tích hệ tuyến tính được trở nên đơn giản hơn nhiều. Để có được những tính chất về một hệ thống tuyến tính trên cơ sở phân tích mô hình toán học của nó thì người ta chỉ cần phân tích, khảo sát đáp ứng của hệ thống với một vài kích thích điển hình là đủ, chẳng hạn như đáp ứng của hệ với kích thích đầu vào là tín hiệu xung dirac $\delta(t)$ hoặc đáp ứng với đầu vào là tín hiệu Heaviside $1(t)$.

Tùy vào dạng tín hiệu của hệ thống là liên tục hay xung mà mô hình T của nó được gọi là *mô hình liên tục* hay *mô hình rời rạc*. Cũng như vậy nếu các tín hiệu được biểu diễn trong miền thời gian hoặc miền ảnh Fourier, Laplace thì mô hình sẽ có dạng là *phương trình vi phân*, *hàm truyền đạt* hay *hàm đặc tính*

Khi hệ thống chỉ có một tín hiệu vào và một tín hiệu ra, ta sẽ gọi mô hình T là SISO (chữ viết tắt của *Single Input–Single Output*). Ngược lại nếu hệ thống có nhiều tín hiệu vào và nhiều tín hiệu ra thì mô hình T được gọi là MIMO (*Multi Input–Multi Output*). Cái biên đì chút ít ta sẽ có thêm các mô hình MISO cho hệ có nhiều tín hiệu vào, một tín hiệu ra hoặc SIMO cho hệ có một tín hiệu vào nhưng nhiều tín hiệu ra.

Các loại mô hình hệ thống được trình bày trong chương này sẽ được chia ra làm ba nhóm:

- 1) Nhóm các mô hình liên tục phổ thông thường gặp. Đó là những mô hình thường được sử dụng cho các bài toán điều khiển hệ SISO. Chúng bao gồm:
 - a) Mô hình dạng phương trình vi phân mô tả quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra.
 - b) Hàm truyền đạt hay là tỷ số giữa ảnh Laplace của tín hiệu ra và ảnh Laplace của tín hiệu vào. Nó cũng chính là ảnh Laplace của đáp ứng khi hệ được kích thích bởi tín hiệu dirac $\delta(t)$ ở đầu vào.
 - c) Hàm đặc tính tần hay là tỷ số giữa $Y(s)|_{s=j\omega}$ của tín hiệu ra và $U(s)|_{s=j\omega}$ của tín hiệu vào.
- 2) Mô hình trạng thái. Loại mô hình này đặc biệt rất thích hợp cho các bài toán điều khiển nhiều chiều với hệ thống MIMO.
- 3) Mô hình không liên tục, rời rạc khi các tín hiệu vào ra của hệ thống có dạng xung.

2.1 Mô hình liên tục cho hệ SISO

2.1.1 Phương trình vi phân mô tả quan hệ vào-ra

Thể loại mô hình này rất thích hợp với hệ thống SISO. Ánh xạ T mô tả hệ thống là phương trình vi phân biểu diễn mối quan hệ giữa tín hiệu vào $u(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$. Mô hình này được xây dựng theo phương pháp lý thuyết, tức là mô hình sẽ được thiết lập dựa trên các định luật có sẵn về quan hệ vật lý bên trong và quan hệ giao tiếp với môi trường bên ngoài của hệ thống. Các quan hệ này được mô tả theo quy luật lý-hóa, quy luật cân bằng, ... dưới dạng những phương trình toán học. Kết quả của công việc mô hình hóa để có mô hình T dạng phương trình vi phân mô tả quan hệ vào-ra là:

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y}{dt^n} = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}, \quad (2.3)$$

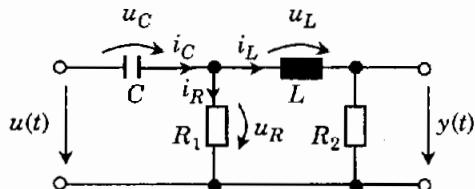
trong đó các hệ số a_i cũng như b_i được xác định từ các phần tử (linh kiện, thiết bị) cấu thành trong hệ thống. Chúng có thể là hằng số, song cũng có thể là những tham số phụ thuộc thời gian t hoặc những đối số khác. Ví dụ như điện trở của một đường dây dẫn điện sẽ là tham số phụ thuộc vào độ dài đoạn dây hoặc nhiệt độ của vật được nung sẽ là tham số phân bố không đều từ bề ngoài vào tâm của vật

Nếu các hệ số a_i cũng như b_i phụ thuộc t thì người ta nói mô hình (2.3) là *tuyến tính không dừng*. Ngược lại nếu chúng phụ thuộc những đối số khác thì mô hình (2.3) là *tuyến tính với tham số rải*.

Mô hình (2.3) có tên là *phương trình*, vì khi biết trước kích thích $u(t)$ thì với nó ta sẽ tìm được nghiệm $y(t)$ là đáp ứng của hệ thống. Sau đây ta sẽ xét một số ví dụ minh họa cho việc xây dựng mô hình hệ thống có dạng phương trình vi phân giữa tín hiệu vào $u(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$.

Ví dụ 1: Cho một mạch điện trên hình 2.3. Biết trước giá trị C của tụ điện L của cuộn dây và R_1, R_2 của điện trở là những phần tử trong mạch điện. Hãy xác định mô hình mạch điện dưới dạng phương trình vi phân mô tả quan hệ giữa tín hiệu vào là điện áp $u(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$ là điện áp trên R_2 .

Hình 2.3: Minh họa cho ví dụ 1.



Các định luật Kirchoff sẽ được sử dụng phục vụ việc xây dựng mô hình mô tả T dưới dạng phương trình vi phân. Ta định nghĩa thêm các biến:

- Điện áp u_C trên tụ điện C .
- Điện áp u_L trên cuộn dây L .
- Điện áp u_R trên điện trở R_1 .
- Dòng i_C đi qua tụ điện C .
- Dòng i_L đi qua cuộn dây L .
- Dòng i_R đi qua điện trở R_1 .

Như vậy thì:

- 1) Theo các định luật của Kirchoff có:

$$a) \quad u_C(t) + u_R(t) = u(t) \quad (2.4a)$$

$$b) \quad u_L(t) + y(t) = u_R(t) \quad (2.4b)$$

$$c) \quad i_L(t) + i_R(t) = i_C(t) \quad (2.4c)$$

2) Theo các định luật về các linh kiện có:

$$a) \quad i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad (2.4d)$$

$$b) \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (2.4e)$$

$$c) \quad R_1 i_R(t) = u_R(t) \quad (2.4f)$$

$$d) \quad R_2 i_L(t) = y(t) \quad (2.4g)$$

Từ những công thức trên, bước tiếp theo ta sẽ tìm cách loại các biến đã được định nghĩa thêm để cuối cùng phải đến được phương trình chỉ còn chứa hai biến là $u(t)$ và $y(t)$. Đạo hàm hai vế của (2.4a) rồi cùng với (2.4d), (2.4c), (2.4f) và (2.4g) được

$$\begin{aligned} & \frac{i_C(t)}{C} + \frac{du_R(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} \Leftrightarrow \frac{i_L(t) + i_R(t)}{C} + \frac{du_R(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{C} \left(\frac{y(t)}{R_2} + \frac{u_R(t)}{R_1} \right) + \frac{du_R(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (2.4h)$$

Thay tiếp (2.4b), (2.4e) và (2.4g) vào (2.4h) có:

$$\begin{aligned} & \frac{y(t)}{CR_2} + \frac{u_L(t) + y(t)}{CR_1} + \frac{d}{dt}(u_L(t) + y(t)) = \frac{du(t)}{dt} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{CR_1} + \frac{1}{CR_2} \right) y(t) + \frac{L}{CR_1} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} + L \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{CR_1} + \frac{1}{CR_2} \right) y(t) + \left(\frac{L}{CR_1 R_2} + 1 \right) \frac{dy(t)}{dt} + \frac{L}{R_2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt} \end{aligned}$$

Suy ra

$$CLR_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (CR_1 R_2 + L) \frac{dy(t)}{dt} + (R_1 + R_2)y(t) = CR_1 R_2 \frac{du(t)}{dt}$$

và ta có được mô hình mạch điện dưới dạng phương trình vi phân

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = b_1 \frac{du(t)}{dt}$$

$$\text{với } a_0 = R_1 + R_2, \quad a_1 = CR_1 R_2 + L, \quad a_2 = CLR_1 \quad \text{và} \quad b_1 = CR_1 R_2.$$

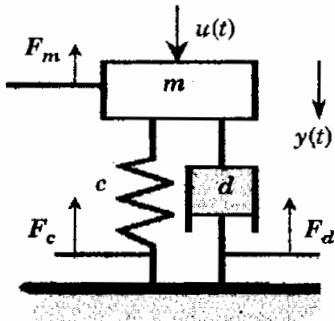
□

Ví dụ 2: Để nghiên cứu các bộ giảm chấn ở ô tô, thiết bị máy móc, người ta cần phải mô hình hóa chúng. Số đồ nguyên lý bộ giảm chấn được cho trong hình 2.4, trong đó c là hằng số lực của lò xo, d là hằng số đặc trưng phần giảm tốc và m là khối lượng tĩnh của thiết bị đè lên bộ giảm chấn. Hãy xây dựng phương trình vi phân mô tả quan hệ giữa tín hiệu đầu vào là lực $u(t)$ ép lên bộ giảm chấn và tín hiệu ra $y(t)$ là độ lún của nó.

$$F_m = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$F_c = c y(t)$$

$$F_d = d \frac{dy}{dt}$$



Hình 2.4: Mô hình hóa bộ giảm chấn, minh họa cho ví dụ 2.

Trên cơ sở sơ đồ nguyên lý ta có các lực cản trở độ lún $y(t)$ của bộ giảm chấn:

a) $F_m = m \frac{d^2 y}{dt^2}$ (tiên đề về lực của Newton)

b) $F_c = c y(t)$ (lực cản của lò xo)

c) $F_d = d \frac{dy}{dt}$ (lực cản của bộ giảm tốc)

d) $F_m + F_c + F_d = u(t)$ (tiên đề cân bằng lực của Newton).

Suy ra phương trình vi phân mô tả bộ giảm chấn là:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + d \frac{dy}{dt} + c y(t) = u(t).$$

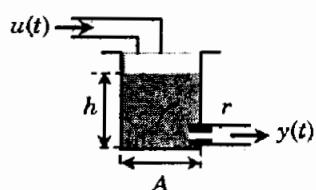
Ví dụ 3: Cho một bình đựng chất lỏng mô tả ở hình 2.5.

Biết trước các thông số về bình như diện tích đáy A của bình, hệ số chuyển đổi áp suất $p(t)$ trong bình với lưu lượng ra $y(t)$ là r , tức là

$$y(t) = \frac{p(t)}{r}$$

và hệ số chuyển đổi áp suất $p(t)$ với độ cao cột chất lỏng trong bình là γ , tức là

$$p(t) = \gamma \cdot h(t).$$



Hình 2.5: Minh họa cho ví dụ 3.

Gọi $u(t)$ là lưu lượng chất lỏng chảy vào bình. Vậy thi:

$$y(t) = \frac{P(t)}{r} = \frac{\gamma}{r} h(t) \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{dh(t)}{dt} = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{u(t) - y(t)}{A}$$

và ta có được phương trình vi phân mô tả quan hệ lưu lượng vào $u(t)$ với lưu lượng ra $y(t)$ như sau:

$$rA \frac{dy(t)}{dt} + \gamma \cdot y(t) = \gamma \cdot u(t).$$

□

2.1.2 Hàm truyền đạt, hàm trọng lượng và hàm quá độ

Mô hình cho một hệ thống tuyến tính SISO có tín hiệu vào $u(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$. Hàm truyền đạt $G(s)$ được định nghĩa như là tỷ số giữa ảnh Laplace $Y(s)$ của đáp ứng $y(t)$ cho ảnh Laplace $U(s)$ của kích thích $u(t)$ khi hệ được kích thích từ trạng thái 0, tức là khi có các điều kiện đầu $y(0), \frac{dy(0)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}$ đồng nhất bằng 0. Nói cách khác

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

Việc cho các giá trị đầu bằng 0 không ảnh hưởng tới bản chất của mô hình là đại diện cho tính động học của hệ thống mà hoàn toàn ngược lại, với việc để ý thêm tới những giá trị đầu, mô hình sẽ chỉ có thể mô tả riêng về tính động học của hệ thống ứng với những giá trị đầu đó.

Tương tự như đã làm ở mục 1.3.3 khi áp dụng toán tử Laplace để giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng, nhưng ở đây ta đi từ phương trình vi phân (2.3) mô tả quan hệ vào ra của hệ thống với các điều kiện đầu

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \dots = \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} = 0$$

thì khi chuyển sang miền phức bằng toán tử Laplace ta có:

$$(a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n) Y(s) = (b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m) U(s) \quad (2.5a)$$

và do đó được hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}. \quad (2.5b)$$

So với (2.3) thì việc sử dụng hàm truyền đạt làm mô hình có tính ưu việt hơn hẳn là quan hệ giữa tín hiệu vào với tín hiệu ra nay được mô tả bằng một phương trình đại số tuyến tính (2.5a). Điều đó giúp cho công việc xác định đáp ứng $y(t)$ của hệ thống ứng với một kích thích $u(t)$ cho trước được đơn giản hơn nhiều. Với hàm truyền đạt (2.5b), việc khảo sát đặc tính động học của hệ thống cũng đơn giản và nhanh chóng như ta sẽ thấy sau này.

Tuy rằng hàm truyền đạt (2.5b) được dẫn từ phương trình vi phân mô tả quan hệ vào-ra (2.3) của hệ thống, song điều đó không nhất thiết là để có hàm truyền đạt phải có mô hình dạng phương trình vi phân. Ta sẽ xét một vài ví dụ minh họa cho điều đó.

Ví dụ 4: Quay lại ví dụ 1 với mô hình mạch điện cho trong hình 2.3. Sau khi đã định nghĩa thêm các biến mới là điện áp u_C trên tụ điện C , điện áp u_L trên cuộn dây L , điện áp u_R trên điện trở R_1 , dòng i_C đi qua tụ điện C , dòng i_L đi qua cuộn dây L và dòng i_R đi qua điện trở R_1 ta có các phương trình (2.4d) – (2.4g) mô tả quan hệ giữa chúng. Sẽ đơn giản hơn nhiều nếu các quan hệ đó được biểu diễn thông qua ảnh Laplace của chúng. Gọi $U_C(s)$ là ảnh của u_C , $U_L(s)$ là ảnh của u_L , $U_R(s)$ là ảnh của u_R , $I_C(s)$ là ảnh của i_C , $I_L(s)$ là ảnh của i_L và $I_R(s)$ là ảnh của i_R , thì các quan hệ (2.4d) – (2.4g) trở thành

$$a) \quad I_C(s) = CsU_C(s)$$

$$b) \quad U_L(s) = LsI_L(s)$$

$$c) \quad R_1I_R(s) = U_R(s)$$

$$d) \quad R_2I_L(s) = Y(s).$$

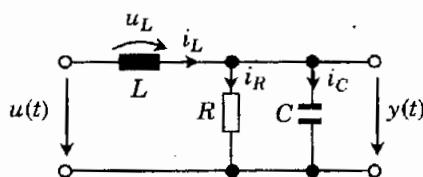
Khi đó thì từ những phương trình Kirchoff (2.4a) – (2.4c) ta có ngay được:

$$\begin{aligned} CR_1R_2sU(s) &= CR_1R_2sU_C(s) + CR_1R_2sU_R(s) \\ &= [CLR_1s^2 + (CR_1R_2 + L)s + (R_1 + R_2)]Y(s). \end{aligned}$$

Suy ra hàm truyền của mạch điện hình 2.3 là:

$$G(s) = \frac{CR_1R_2s}{CLR_1s^2 + (CR_1R_2 + L)s + (R_1 + R_2)}.$$
□

Ví dụ 5: Hãy xác định hàm truyền đạt cho mạch điện có sơ đồ mô tả ở hình 2.6, trong đó trị số linh kiện L của cuộn dây, R của điện trở và C của tụ điện là cho trước.



Hình 2.6: Minh họa cho ví dụ 5 về việc xác định hàm truyền đạt.

Ký hiệu ảnh Laplace cho những biến được định nghĩa thêm bằng các chữ in hoa (hình 2.6) ta sẽ có:

- 1) Theo Kirchoff:

a) $U_L(s) + Y(s) = U(s)$

b) $I_C(s) + I_R(s) = I_L(s)$

2) Theo lính kiện:

a) $I_L(s) = \frac{1}{Ls} U_L(s)$

b) $I_R(s) = \frac{1}{R} Y(s)$

c) $Y(s) = \frac{1}{Cs} I_C(s)$

Suy ra:

$$U(s) = U_L(s) + Y(s) = LsI_L(s) + Y(s) = Ls[I_C(s) + I_R(s)] + Y(s)$$

$$= Ls(Cs + \frac{1}{R})Y(s) + Y(s) = (CLs^2 + \frac{Ls}{R} + 1)Y(s)$$

và ta được hàm truyền của mạch điện

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{CLs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Ví dụ 6: Cho hệ cơ gồm một lò xo có hệ số c , một vật với khối lượng m và bộ suy giảm tốc có hệ số d được nối với nhau như hình 2.7 mô tả. Hãy xác định hàm truyền đạt cho hệ cơ đó nếu tín hiệu đầu vào $u(t)$ được định nghĩa là lực bên ngoài tác động lên vật và tín hiệu ra $y(t)$ là quãng đường mà vật đi được.

Gọi F_c , F_m , F_d , là những lực của lò xo, vật và bộ suy giảm tốc sinh ra khi vật dịch chuyển nhằm cản sự dịch chuyển đó thì:

$$F_c = c \cdot y(t)$$

$$F_m = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

$$F_d = d \frac{dy(t)}{dt}$$

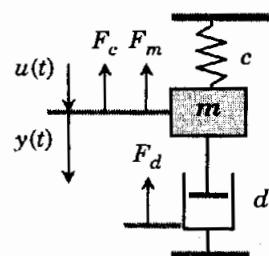
và do đó theo tiên đề cân bằng lực ta được:

$$u(t) = F_c + F_m + F_d = cy(t) + m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + d \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow U(s) = (c + ds + ms^2)Y(s)$$

Suy ra hàm truyền đạt của hệ là:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + ds + c}$$



Hình 2.7: Cho ví dụ 6.

Gọi $g(t)$ là hàm gốc (causal) của hàm truyền đạt $G(s)$, tức là

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\},$$

vậy thì theo tính chất thứ 5 của toán tử Laplace (mục 1.3.1) ta có

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = g(t)^*u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (2.6a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau. \quad (2.6b)$$

Hàm $g(t)$ được gọi là *hàm trọng lượng* của hệ thống. Với $u(t) = \delta(t)$ thì do

$$U(s) = 1$$

nên có

$$y(t) = g(t)$$

và ta đi đến:

Định lý 2.1: Hàm trọng lượng $g(t)$ là đáp ứng của hệ thống khi hệ đang ở trạng thái 0 (có các giá trị ban đầu $y(0), \frac{dy(0)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}$ bằng 0) và được kích thích bởi tín hiệu dirac $\delta(t)$ ở đầu vào. Với hàm trọng lượng $g(t)$ ta luôn xác định được tín hiệu ra $y(t)$ theo công thức (2.6), nếu biết trước tín hiệu vào $u(t)$.

Nhờ công thức (2.6), khi cho trước kích thích $u(t)$ ta luôn xác định được đáp ứng $y(t)$ của hệ thống với giả thiết rằng tại thời điểm bắt đầu được kích thích hệ đang ở trạng thái 0. Điều này nói rằng bản thân hàm trọng lượng cũng là một mô hình mô tả hệ thống và mô hình đó được xếp vào loại *mô hình không tham số*. Đó là những mô hình biểu diễn trực quan đặc tính động học của hệ thống dưới dạng bảng tra hoặc đồ thị.

Bên cạnh hàm trọng lượng $g(t)$, một thể loại mô hình không tham số khác cũng thường được sử dụng để khảo sát trực quan đặc tính động học hệ thống là *hàm quá độ* $h(t)$ được định nghĩa như là đáp ứng của hệ thống khi hệ đang ở trạng thái 0 và được kích thích bởi tín hiệu Heaviside $1(t)$ ở đầu vào.

Với đầu vào $u(t)$ là tín hiệu $1(t)$ thì

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

do đó hàm quá độ $h(t)$ có ảnh Laplace $H(s)$ được tính theo:

$$H(s) = Y(s) = \frac{G(s)}{s}.$$

Bởi vậy, theo tính chất 6 của toán tử Laplace (mục 1.3.1) ta suy ra được

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau . \quad (2.7a)$$

Giả sử rằng một hệ thống có hàm truyền đạt $G(s)$ được kích thích bằng tín hiệu $u(t)$ có ảnh Laplace $U(s)$. Tín hiệu ra $y(t)$ của nó khi đó sẽ là:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{sH(s)U(s)\}.$$

Nếu gọi $\tilde{y}(t)$ là tín hiệu có ảnh Laplace $\tilde{H}(s) = H(s)U(s)$ thì

$$\tilde{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{H}(s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau .$$

Nhưng do $u(t) = 0$ khi $t < 0$ cũng như $h(t-\tau) = 0$ khi $\tau > t$ vì chúng đều là các tín hiệu causal nên

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau .$$

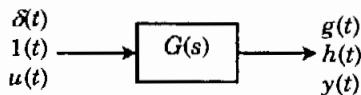
Áp dụng tính chất 7 của toán tử Laplace (mục 1.3.1) cho $H(s) = s\tilde{H}(s)$ ta sẽ có

$$y(t) = \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.7b)$$

nếu như $\tilde{y}(+0) = 0$ và đó chính là nội dung tích phân Duhamel.

Định lý 2.2: Hàm quá độ $h(t)$ là đáp ứng của hệ thống khi hệ đang ở trạng thái 0 (có các giá trị ban đầu $y(0), \frac{dy(0)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}$ bằng 0) và được kích thích bởi tín hiệu Heaviside $1(t)$ ở đầu vào. Với hàm quá độ $h(t)$ ta có thể xác định được tín hiệu ra $y(t)$ theo công thức (2.7b), nếu biết trước tín hiệu vào $u(t)$.

Một hệ thống tuyến tính, sau khi đã được mô hình hóa và có hàm truyền đạt $G(s)$, sẽ thường được biểu diễn đơn giản thành *một khối* có dạng như hình 2.8. Cách biểu diễn này rất tiện cho việc xây dựng mô hình cho một hệ phức tạp gồm nhiều khối mắc nối tiếp, song song hoặc phản hồi.



Hình 2.8: Mô tả hệ thống bằng hàm truyền đạt.

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$$

Ví dụ 7: Cho hệ mô tả bởi hàm truyền đạt

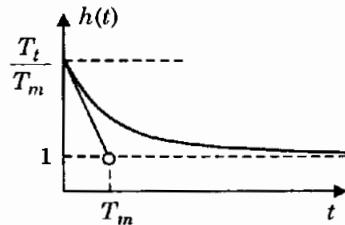
$$G(s) = \frac{1 + T_t s}{1 + T_m s} \quad \text{với} \quad T_t \neq T_m.$$

Ảnh Laplace $H(s)$ của hàm quá độ $h(t)$ của hệ sẽ là

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T_m - T_t}{T_m} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_m}}.$$

Suy ra

$$h(t) = \left(1 - \frac{T_m - T_t}{T_m} e^{\frac{-t}{T_m}}\right) 1(t).$$



Hình 2.9: Minh họa cho ví dụ 7.

Do hàm quá độ $h(t)$ có ảnh Laplace là $\frac{G(s)}{s}$ nên từ dạng đường đồ thị của $h(t)$ người ta có thể suy ra được nhiều tính chất cho $G(s)$. Định lý sau minh họa cho điều đó.

Định lý 2.3: Cho một hệ thống tuyến tính có hàm truyền đạt $G(s)$ dạng thực-hữu tỷ

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n} \quad (2.8)$$

- a) Nếu đường $h(t)$ xuất phát từ 0, tức là $h(+0)=0$, thì $n > m$. Trong trường hợp ngược lại khi $h(t)$ không đi từ điểm 0 ($h(+0) \neq 0$) thì $n \leq m$.
- b) Nếu đường $h(t)$ đi từ 0 và có đạo hàm tại 0 cũng bằng 0, tức là $\frac{d}{dt} h(+0) = 0$, thì $n - m > 1$. Ngược lại nếu $h(+0) = 0$ và $\frac{d}{dt} h(+0) \neq 0$ thì $n = m+1$.
- c) Nếu đường $h(t)$ tiến tới vô hạn ($\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$) thì $a_0 = 0$.
- d) Nếu đường $h(t)$ tiến tới 0, tức là $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ thì $a_0 \neq 0$ và $b_0 = 0$.
- e) Nếu đường $h(t)$ tiến tới một hằng số k , tức là $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = k$, thì $a_0 \neq 0$ và $k = \frac{b_0}{a_0}$.

Chứng minh: a) Do ảnh Laplace $H(s)$ của $h(t)$ là $H(s) = \frac{G(s)}{s}$ nên theo tính chất thứ 10 của toán tử Laplace (mục 1.3.1, chương 1) ta có

$$h(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_m}{a_n} s^{m-n}.$$

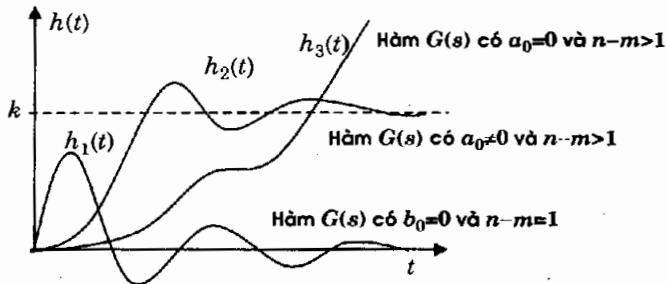
Bởi vậy nếu $h(+0)=0$ thì cũng phải có $n > m$. Ngược lại khi $h(+0) \neq 0$ thì hoặc $n=m$, nếu $h(t)$ xuất phát từ hằng số $\frac{b_m}{a_n}$, hoặc $n < m$ nếu $h(t)$ xuất phát từ vô cùng.

Tương tự ta cũng chứng minh được cho câu b) với sự trợ giúp thêm của tính chất thứ 7) của toán tử Laplace, tức là với

$$\frac{d}{dt} h(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[G(s) - h(+0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_m}{a_n} s^{m+1-n}.$$

Để chứng minh các câu c), d) và e) ta sử dụng tính chất thứ 7) và thứ 9) của toán tử Laplace để có quan hệ:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad \text{và} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s[G(s) - h(+0)]. \quad \square$$



Hình 2.10: Minh họa cho định lý 2.3.

Cuối cùng, trước khi kết thúc mục này, ta xét một trường hợp riêng song cũng cần phải bàn đến. Đó là những hệ thống tuyến tính có hàm truyền đạt

$$G(s) = ks.$$

Kích thích hệ này bởi $u(t)$ với $u(+0) = 0$, hệ sẽ có đáp ứng

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ksU(s)\} = k \frac{du(t)}{dt}.$$

Điều này nói rằng tại một thời điểm t_0 , muốn có được $y(t_0)$ thì ta phải có được các giá trị của $u(t)$ trong một lân cận thuộc t_0 vì

$$\begin{aligned} \frac{du(t_0)}{dt} &= \lim_{T_a \rightarrow 0} \frac{u(t_0 + T_a) - u(t_0)}{T_a} \\ &= \lim_{T_a \rightarrow 0} \frac{u(t_0 + T_a) - u(t_0 - T_a)}{2T_a} \end{aligned}$$

Nói cách khác phải có được các giá trị của $u(t)$ trước và sau thời điểm t_0 . Việc phải có những giá trị $u(t)$ sau thời điểm t_0 thì mới có được $y(t_0)$ đã vi phạm tính nhân quả của hệ thống kỹ thuật rằng đáp ứng không bao giờ có trước kích thích, hay kết quả bao giờ cũng phải có sau nguyên nhân (tính causal của hệ thống kỹ thuật). Bởi vậy, không thể có một hệ thống kỹ thuật có hàm truyền đạt $G(s) = ks$.

Tổng quát, các hàm truyền đạt dạng (2.8) của một hệ tuyến tính, nếu có $m > n$ thì do $G(s)$ viết được thành:

$$G(s) = c_0 + c_1s + \dots + c_{m-n}s^{m-n} + \frac{d_0 + d_1s + \dots + d_ns^n}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n}$$

Nên trong đáp ứng $y(t)$ của hệ đó phải có thành phần không causal $y_c(t)$ với ảnh Laplace

$$Y_c(s) = c_0 + c_1s + \dots + c_{m-n}s^{m-n}.$$

Ta đi đến kết luận chung:

Định lý 2.4: Độ tuổi số của một hàm truyền đạt $G(s)$ của hệ thống tuyến tính có tính causal không được lớn hơn bậc đa thức mẫu số của nó ($m \leq n$). Các hàm truyền đạt như vậy có tên là *hợp thức* (proper).

2.1.3 Đại số sơ đồ khối

Việc biểu diễn một hệ thống qua hàm truyền đạt, đặc biệt là mô tả trực quan dạng khối như ở hình 2.8, giúp cho ta dễ dàng xác định được hàm truyền đạt cho một hệ thống lớn, phức tạp. Khi gặp một hệ thống lớn gồm nhiều khâu, nhiều công đoạn, người ta thường chia nhỏ hệ thống thành các hệ thống con là những khâu và công đoạn đó. Tiếp theo người ta xác định hàm truyền đạt cho từng hệ con rồi từ các hàm truyền đạt của những hệ con mới tính ra hàm truyền đạt cho toàn bộ hệ thống lớn.

Mục này sẽ giới thiệu các phương pháp của đại số sơ đồ khối phục vụ việc xác định hàm truyền đạt cho hệ lớn từ những hàm truyền đạt của các hệ thành phần (hệ con) trong nó. Tên gọi của phương pháp là "*đại số sơ đồ khối*" cũng có nguyên nhân của nó:

- Thứ nhất là vì các phương pháp này làm việc với những phần tử là *khối* biểu diễn các hệ con như hình 2.8 mô tả.
- Thứ hai là vì nội dung của từng khối (phần tử) là hàm truyền đạt hợp thức dạng (2.9), trong khi tập các hàm hợp thức ($m \leq n$) kết hợp với phép cộng, nhân trong chúng và phép nhân với số thực (hoặc phức) lại tạo thành một *đại số* trên trường số thực \mathbb{R} (hoặc \mathbb{C}).

1) Hai khối song song

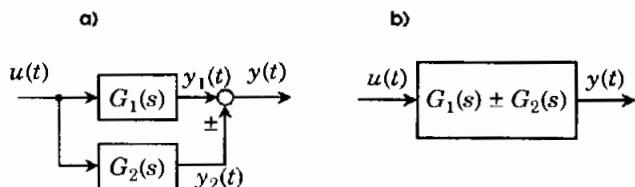
Hình 2.11a) mô tả một hệ gồm hai khối (hệ con) với hàm truyền của từng khối là $G_1(s)$, $G_2(s)$. Hai khối này được nối song song có cùng tín hiệu vào $u(t)$. Tín hiệu ra của từng khối là $y_1(t)$ và $y_2(t)$. Tín hiệu ra $y(t)$ của cả hệ là tổng/hiệu của chúng:

$$y(t) = y_1(t) \pm y_2(t).$$

Gọi $G(s)$ là hàm truyền đạt của toàn bộ hệ thống, vậy thì:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y_1(s) \pm Y_2(s)}{U(s)} = \frac{Y_1(s)}{U(s)} \pm \frac{Y_2(s)}{U(s)} = G_1(s) \pm G_2(s).$$

Nói cách khác, hàm truyền $G(s)$ của cả hệ là tổng/hiệu của các hàm truyền thành phần – hình 2.11b).



Hình 2.11: Một hệ có hai hệ con nối song song.

2) Hai khối nối tiếp

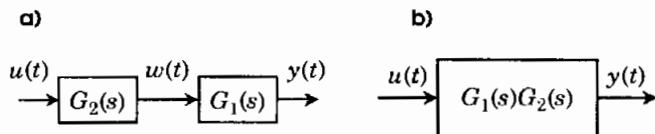
Xét hệ gồm hai khối con $G_1(s)$, $G_2(s)$ mắc nối tiếp như hình 2.12a) mô tả. Tín hiệu vào $u(t)$ của cả hệ cũng là tín hiệu vào của khối thứ nhất $G_2(s)$. Tín hiệu ra $w(t)$ của $G_2(s)$ là tín hiệu vào của khối thứ hai $G_1(s)$. Tín hiệu ra $y(t)$ của $G_1(s)$ là tín hiệu ra của hệ thống. Từ đó ta có được:

$$\begin{cases} Y(s) = G_1(s)W(s) \\ W(s) = G_2(s)U(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = G_1(s)G_2(s)U(s)$$

hay

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s).$$

Vậy hàm truyền đạt của hệ thống gồm hai khối nối tiếp là tích của hai hàm truyền đạt của hai khối đó – hình 2.12b).



Hình 2.12: Một hệ có hai hệ con nối tiếp.

3) Hệ có hai khối nối hồi tiếp

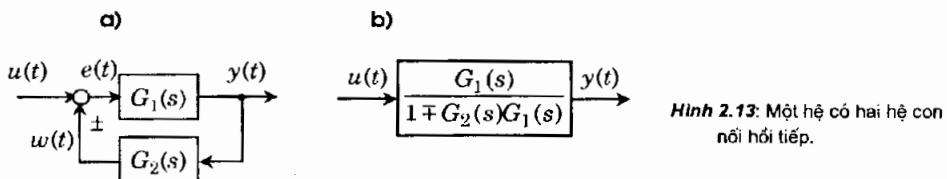
Khái niệm hai khối nối hồi tiếp được mô tả ở hình 2.13a). Tín hiệu đầu ra $y(t)$ của hệ thống cũng là tín hiệu ra của khối thứ nhất $G_1(s)$. Nó được đưa tới đầu vào khối thứ hai $G_2(s)$ để phản hồi ngược trở lại đầu vào cho $G_1(s)$. Đầu vào $e(t)$ của $G_1(s)$ là tín hiệu tạo bởi tín hiệu vào của hệ thống $u(t)$ và tín hiệu ra $w(t)$ của $G_2(s)$:

$$e(t) = u(t) \pm w(t).$$

Suy ra

$$Y(s) = G_1(s)E(s) = G_1(s)[U(s) \pm G_2(s)Y(s)] = G_1(s)U(s) \pm G_1(s)G_2(s)Y(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)}, \quad \text{xem hình 2.13b}.$$



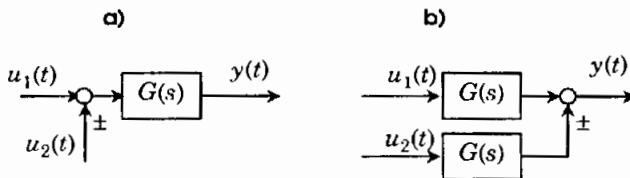
Hình 2.13: Một hệ có hai hệ con nối hối tiếp.

4) Chuyển nút nối tín hiệu từ trước ra sau một khối.

Hình 2.14a) mô tả một khối $G(s)$ có tín hiệu đầu vào là tổng/hiệu của hai tín hiệu thành phần $u_1(t)$ và $u_2(t)$. Như vậy thì tín hiệu ra $y(t)$ sẽ có ảnh Laplace là:

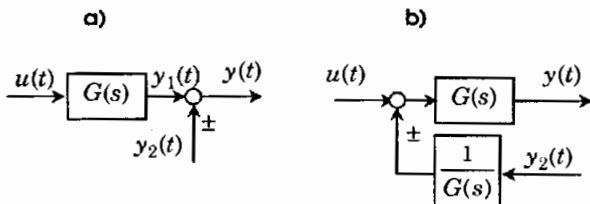
$$Y(s) = G(s)[U_1(s) \pm U_2(s)] = G(s)U_1(s) \pm G(s)U_2(s)$$

và do đó ta có được một sơ đồ tương đương như ở hình 2.14b), trong đó nút nối hai tín hiệu $u_1(t)$, $u_2(t)$ đã được chuyển ra sau khối $G(s)$.



Hình 2.14: Chuyển nút nối từ trước ra sau một khối.

5) Chuyển nút nối tín hiệu từ sau tới trước một khối.



Hình 2.15: Chuyển nút nối từ sau ra trước một khối.

Cho hệ với hàm truyền đạt $G(s)$ có tín hiệu ra $y(t)$ là tổng/hiệu của tín hiệu ra $y_1(t)$ của $G(s)$ và một tín hiệu $y_2(t)$ khác – hình 2.15a). Như vậy thì

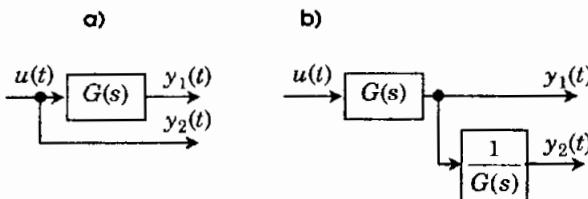
$$Y(s) = Y_1(s) \pm Y_2(s) = G(s)[U(s) \pm \frac{1}{G(s)} Y_2(s)],$$

tức là tín hiệu đầu vào của khối $G(s)$ nay sẽ là tổng/hiệu của hai tín hiệu $u(t)$ và tín hiệu đầu ra của khối $\frac{1}{G(s)}$ có đầu vào là $y_2(t)$. Từ đó ta có được sơ đồ tương đương như ở hình 2.15b) mô tả.

Chú ý là khối mới được tạo thành $\frac{1}{G(s)}$ có thể không có được hàm truyền đạt hợp thức (bậc đa thức tử số lớn hơn bậc đa thức mẫu số).

6) Chuyển nút rẽ nhánh tín hiệu từ trước ra sau một khối.

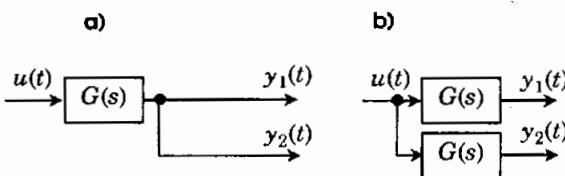
Nguyên tắc chuyển một nút rẽ nhánh tín hiệu từ trước khối $G(s)$ ra sau khối đó được mô tả trong hình 2.16.



Hình 2.16: Chuyển nút rẽ nhánh từ trước ra sau một khối.

7) Chuyển nút rẽ nhánh tín hiệu từ sau tới trước một khối.

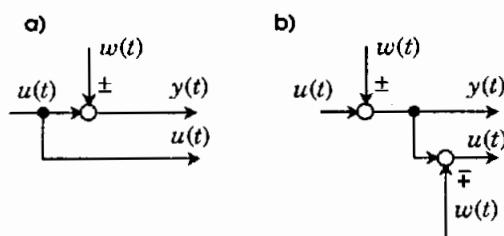
Hình 2.17 trình bày nguyên tắc chuyển một nút rẽ nhánh tín hiệu từ phía sau tới phía trước một khối có hàm truyền đạt $G(s)$.



Hình 2.17: Chuyển nút rẽ nhánh từ trước ra sau một khối.

8) Chuyển nút rẽ nhánh từ trước ra sau một nút nối.

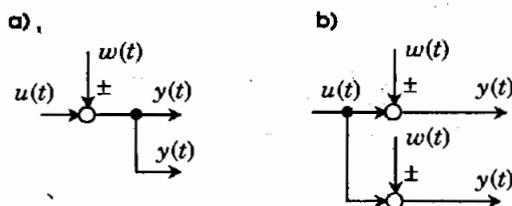
Hình 2.18 trình bày nguyên lý chuyển một nút rẽ nhánh tín hiệu từ trước một nút nối ra sau nút nối đó.



Hình 2.18: Chuyển nút rẽ nhánh từ trước ra sau một nút nối.

9) Chuyển nút rẽ nhánh từ sau tới trước một nút nối.

Nguyên tắc chuyển nút rẽ nhánh từ sau tới trước nút nối được mô tả ở hình 2.19.



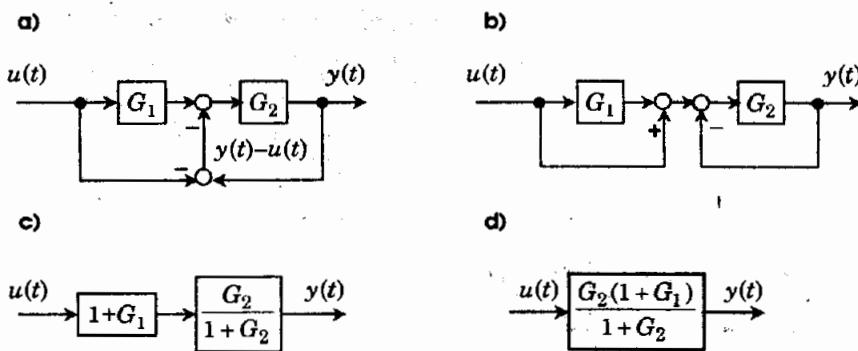
Hình 2.19: Chuyển nút rẽ nhánh từ sau tới trước một nút nối.

Tiếp theo ta sẽ xét một vài ví dụ về việc sử dụng đại số sơ đồ khối để xác định hàm truyền đạt cho một hệ thống tuyến tính gồm nhiều khối con.

Ví dụ 8: Giả sử có một hệ thống gồm hai khối con là G_1 và G_2 với cấu trúc được mô tả như hình 2.20a). Ta sẽ áp dụng đại số sơ đồ khối để xác định hàm truyền đạt của hệ thống. Trước hết tách hiệu $y(t) - u(t)$ thành hai phần riêng biệt được hình 2.19b). Sau đó áp dụng nguyên lý ghép hai khối song song cũng như nguyên lý ghép hai khối hồi tiếp thì có sơ đồ tương đương 2.19c). Cuối cùng sử dụng nguyên lý ghép hai khối nối tiếp để đi đến sơ đồ 2.19d). Từ đó ta đọc ra được hàm truyền đạt:

$$G(s) = \frac{G_2 + G_2 G_1}{1 + G_2}$$

□



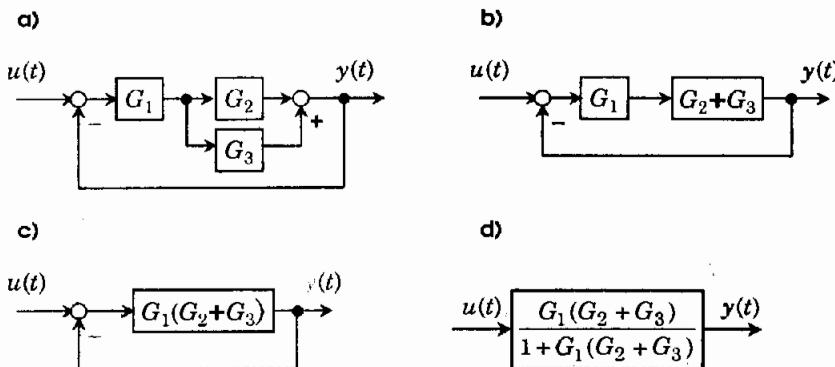
Hình 2.20: Sử dụng đại số sơ đồ khối để xác định hàm truyền cho ví dụ 8.

Ví dụ 9: Cho hệ có sơ đồ khối mô tả ở hình 2.21a).

Áp dụng nguyên lý ghép hai khối song song ta có sơ đồ tương đương như ở hình 2.21b). Tiếp tục, sử dụng nguyên lý ghép hai khối nối tiếp ta được sơ đồ như hình 2.20c) và cuối cùng với nguyên lý hai khối hồi tiếp ta có sơ đồ tương đương cho cả hệ là hình 2.21d). Như vậy hệ có hàm truyền đạt:

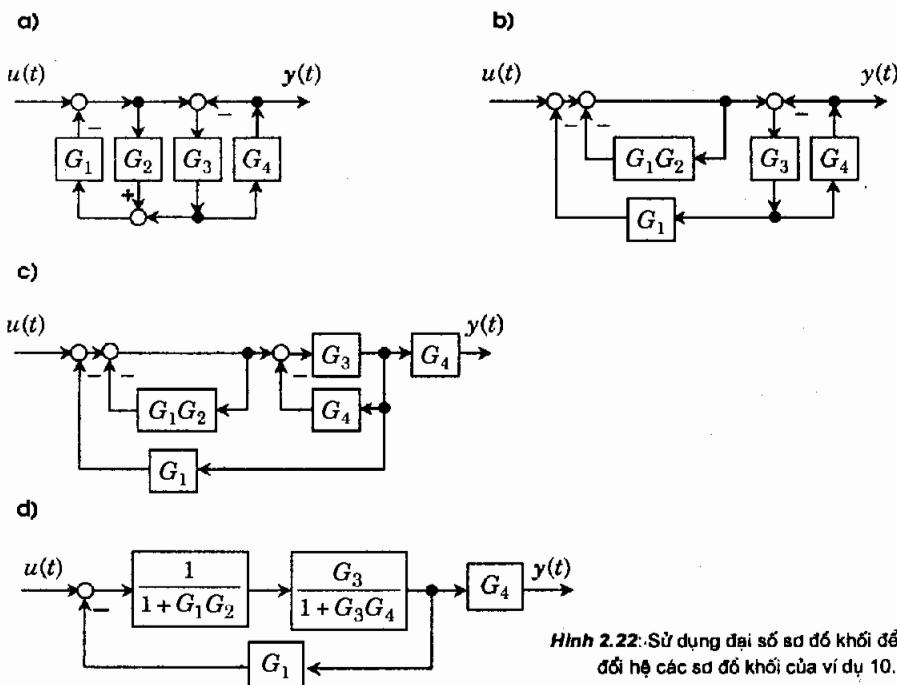
$$G(s) = \frac{G_1 G_2 + G_1 G_3}{1 + G_1 G_2 + G_1 G_3}.$$

□



Hình 2.21: Minh họa cho hệ ở ví dụ 9.

Ví dụ 10: Cho một hệ có sơ đồ khối trong hình 2.22a).



Hình 2.22: Sử dụng đại số sơ đồ khối để biến đổi hệ các sơ đồ khối của ví dụ 10.

Chuyển nút nối tín hiệu từ trước khôi G_1 ra sau khôi đó ta được hình 2.22b). Sơ đồ đó được vẽ lại ở hình 2.22c) bằng cách đảo vị trí hai điểm rẽ nhánh trước và sau khôi G_4 . Tiếp theo áp dụng nguyên lý ghép hai khôi hồi tiếp cho hai vòng hồi tiếp bên trong ta sẽ đến sơ đồ hình 2.22d) và với nó dễ dàng đọc ra được hàm truyền đạt:

$$G(s) = G_4 \frac{\frac{1}{1+G_1G_2} \cdot \frac{G_3}{1+G_3G_4}}{1+G_1 \left[\frac{1}{1+G_1G_2} \cdot \frac{G_3}{1+G_3G_4} \right]} = \frac{G_3G_4}{1+G_1G_2 + G_1G_3 + G_3G_4 + G_1G_2G_3G_4} \quad \square$$

2.1.4 Sơ đồ tín hiệu và công thức Mason

Việc biểu diễn một hệ thống lớn thông qua các hệ con của nó nhờ sơ đồ khôi cho ta một cái nhìn trực quan một cách tổng quát về cấu trúc bên trong của hệ thống, song để sử dụng nó nhằm xác định hàm truyền đạt lại có nhược điểm, như những ví dụ ở mục 2.1.3 chỉ rõ, là phải biến đổi sơ đồ khôi ban đầu về những dạng quen thuộc. Điều này gây không ít khó khăn trong ứng dụng cho người sử dụng và đòi hỏi người sử dụng phải có được ít nhiều kinh nghiệm trong việc biến đổi sơ đồ khôi.

Nhằm khắc phục nhược điểm trên, người ta đã thay sơ đồ khôi bằng sơ đồ tín hiệu với mục đích phụ giúp cho công việc xác định hàm truyền đạt cũng như phân tích một vài tích chất đặc biệt của hệ thống được thuận lợi hơn. Về nguồn gốc lịch sử, sơ đồ tín hiệu có xuất xứ từ lý thuyết đồ thị (graph theory) trước đây thường được dùng để minh họa các phương trình đại số tuyến tính.

Một sơ đồ tín hiệu được cấu tạo bởi:

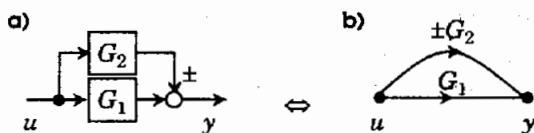
- Các **điểm nút** (node). Nếu so sánh với sơ đồ khôi thì các điểm nút chính là những đường tín hiệu, điểm rẽ nhánh và điểm nối tín hiệu (xem các ví dụ 11-14).
- Những **đường nối** các điểm nút (branch). Trong sơ đồ khôi thì những đường nối này có vai trò giống như các khôi. Mỗi đường nối có một giá trị đúng bằng hàm truyền đạt của khôi tương ứng. Đường nối không có khôi được thể hiện trong sơ đồ tín hiệu bằng giá trị 1 (xem ví dụ 14). Các đường nối phải có hướng chỉ chiều tín hiệu. Theo quy ước, chiều các đường nối luôn được chỉ từ trái sang phải trong sơ đồ, trừ đường phản hồi (hồi tiếp).

Với cấu trúc như vậy, một sơ đồ tín hiệu sẽ có:

- a) Tín hiệu đầu vào $u(t)$ là điểm nút chỉ có đường nối từ đó đi và không có đường nối dẫn đến nó nếu đó không phải là đường phản hồi. Điểm nút chỉ tín hiệu vào có tên gọi là **điểm nút nguồn** (source).
- b) Tín hiệu đầu ra $y(t)$ là điểm nút chỉ có đường nối dẫn đến nó, không có đường nối từ đó đi nếu đó không phải là đường phản hồi. Điểm nút chỉ tín hiệu ra có tên gọi là **điểm nút đích** (sink).

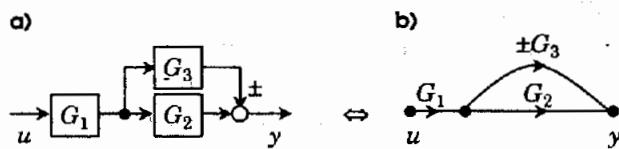
- c) Tuyến thẳng (*forward path*) là những đường nối liên nhau đi từ điểm nút nguồn (source), tức là điểm đầu vào $u(t)$, tới điểm đích (sink), tức là điểm tín hiệu ra $y(t)$ và chỉ đi qua mỗi điểm nút một lần (không chứa đường hồi tiếp).
- d) Các vòng lặp (*loops*) sẽ được thể hiện bằng tập những điểm nút có các đường nối với nhau tạo thành một vòng kín.
- e) Những vòng lặp không đính nhau (*nontouching loops*) là những vòng lặp không có chung một *điểm nút* nào.
- f) Tất cả các điểm nút của sơ đồ tín hiệu đều là điểm cộng tín hiệu. Những điểm nối tín hiệu là hiệu của hai tín hiệu trong sơ đồ khôi phải được thể hiện thành điểm nút cộng tín hiệu với giá trị đường nối tương ứng là âm (xem các hình minh họa 2.23-2.26).

Ví dụ 11: Hệ thống gồm hai khôi nối song song như hình 2.23a) sẽ có sơ đồ tín hiệu tương đương cho trong hình 2.23b). □



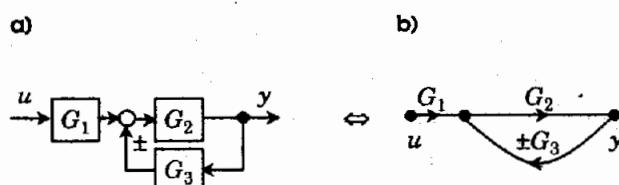
Hình 2.23: Sơ đồ tín hiệu tương đương cho hệ gồm hai khôi song song.

Ví dụ 12: Hệ gồm một khôi G_1 mắc nối tiếp với hai khôi G_2 và G_3 nối song song như hình 2.24a) sẽ có sơ đồ tín hiệu tương đương cho trong hình 2.24b). □



Hình 2.24: Sơ đồ tín hiệu tương đương của ví dụ 12.

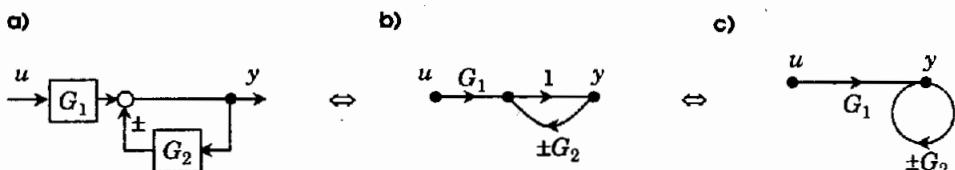
Ví dụ 13: Hệ gồm một khôi G_1 mắc nối tiếp với hai khôi G_2 và G_3 nối hồi tiếp như hình 2.25a) mô tả sẽ có sơ đồ tín hiệu tương đương cho trong hình 2.25b). □



Hình 2.25: Sơ đồ tín hiệu tương đương của ví dụ 13.

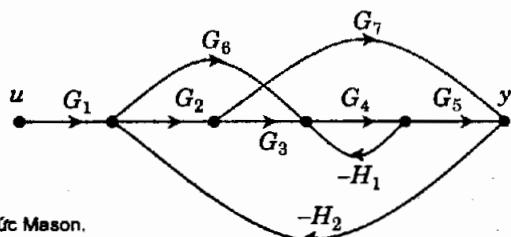
Ví dụ 14: Hệ gồm một khối G_1 mắc nối tiếp với khối G_2 dạng hồi tiếp như hình 2.26a) sẽ có sơ đồ tín hiệu tương đương cho trong hình 2.26b) và hình 2.26c).

□



Hình 2.26: Sơ đồ tín hiệu tương đương của ví dụ 14.

Bây giờ ta sẽ đi vào nội dung công thức Mason để xác định hàm truyền đạt cho một hệ thống từ sơ đồ tín hiệu của nó. Về thực chất công thức Mason có dạng giống như một thuật toán gồm nhiều bước tính. Để tiện theo dõi các bước thực hiện công thức Mason ta sẽ sử dụng hệ có sơ đồ tín hiệu cho trong hình 2.27 làm ví dụ minh họa.



Hình 2.27: Minh họa cho việc trình bày công thức Mason.

- 1) **Bước 1:** Xác định tất cả những tuyến thẳng P_k có thể có của hệ thống. Đó là những đường nối liền nhau không chứa đường phản hồi đi từ điểm nút nguồn $u(t)$ tới điểm nút đích $y(t)$ và P_k là giá trị của nó bằng tích của tất cả các giá trị các đường nối có trong P_k . Với hình minh họa 2.27 thì hệ sẽ có ba tuyến thẳng là:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 .$$

$$P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5 .$$

$$P_3 = G_1 G_2 G_7 .$$

- 2) **Bước 2:** Xác định tất cả các vòng lặp L_k có thể có của hệ thống. Đó là những đường nối liền nhau tạo thành một vòng kín. Hệ với sơ đồ trong hình 2.27 có bốn vòng lặp bao gồm:

$$L_1 = -G_4H_1.$$

$$L_2 = -G_2G_7H_2.$$

$$L_3 = -G_6G_4G_5H_2.$$

$$L_4 = -G_2G_3G_4G_5H_2.$$

3) *Bước 3:* Tính

$$\Delta = 1 - \sum_k L_k + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{l,m,n} L_l L_m L_n + \dots, \quad (2.9)$$

trong đó L_i, L_j là những cặp hai vòng lặp không dính nhau, L_l, L_m, L_n là những bộ ba vòng lặp không dính nhau, Hệ với sơ đồ ở hình 2.27 chỉ có hai vòng lặp L_1 và L_2 là không dính nhau, do đó:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2 \\ &= 1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_6G_4G_5H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_4H_1G_2G_7H_2. \end{aligned}$$

4) *Bước 4:* Xác định Δ_k từ Δ bằng cách trong công thức (2.9) ta bỏ đi tất cả những vòng lặp có dính với P_k (có điểm chung với P_k). Ví dụ như với hệ ở hình 2.27 thì:

$$\Delta_1 = 1 \quad (\text{tất cả vòng lặp đều dính tới } P_1),$$

$$\Delta_2 = 1 \quad (\text{tất cả vòng lặp đều dính tới } P_2),$$

$$\Delta_3 = 1 - L_1 = 1 + G_4H_1 \quad (\text{vòng lặp } L_1 \text{ không dính vào } P_3).$$

5) *Bước 5:* Xác định hàm truyền đạt $G(s)$ theo công thức Mason:

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_k (P_k \Delta_k). \quad (2.10)$$

Chẳng hạn hàm truyền đạt của hệ có sơ đồ tín hiệu cho trong hình 2.27 là:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3) \\ &= \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_1G_6G_4G_5 + G_1G_2G_7(1 + G_4H_1)}{1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_6G_4G_5H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_4H_1G_2G_7H_2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 15: Cho hệ với sơ đồ khôi mô tả ở hình 2.28a). Những tín hiệu mà tại các điểm nối không được chỉ thị là cộng (+) hay trừ (-) đều được hiểu là cộng (+). Hình 2.28b) là sơ đồ tín hiệu tương đương của hệ.

Hệ chỉ có một tuyến thẳng và đó là:

$$P_1 = G_1G_2G_3.$$

Hệ có 3 vòng lặp và chúng đều dính nhau từng đối một (từng đối một có đoạn chung):

$$L_1 = G_1G_2H_1$$

$$L_2 = -G_2 G_3 H_2 \quad \text{và}$$

$$L_3 = -G_1 G_2 G_3.$$

Suy ra:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3.$$

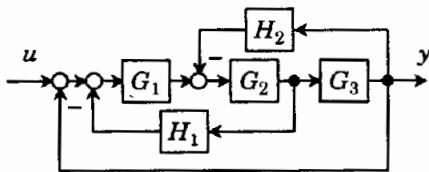
Do tất cả các vòng lặp cung đều dính vào tuyến thẳng P_1 nên

$$\Delta_1 = 1.$$

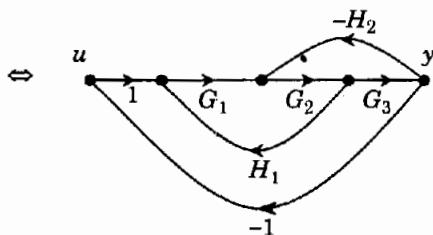
Vậy theo (2.10) thì

$$G(s) = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3}. \quad \square$$

a)

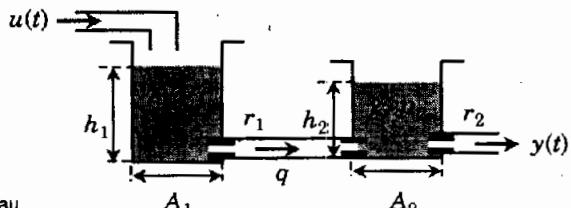


b)



Hình 2.28: Sử dụng công thức Mason để xác định hàm truyền đạt cho hệ trong ví dụ 15.

Ví dụ 16: Xét một hệ thống gồm hai bình chứa chất lỏng như hình 2.29 mô tả.



Hình 2.29: Hệ thống gồm hai bình thông nhau.

Chất lỏng được bơm vào bình thứ nhất với lưu lượng là $u(t)$. Nếu chất lỏng trong bình thứ nhất có độ cao h_1 , áp suất p_1 , hệ số chuyển đổi áp suất/lưu lượng r_1 , hệ số áp suất/độ cao γ , lưu lượng chảy sang bình thứ hai là q và h_2 , r_2 là độ cao, áp suất, hệ số chuyển đổi áp suất/lưu lượng của chất lỏng trong bình thứ hai thì theo các định luật vật lý, giữa những thông số kỹ thuật đó có quan hệ:

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = u(t) - q \quad (2.11a)$$

$$q = \frac{1}{r_1} (p_1 - p_2) \quad (2.11b)$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = q - y(t) \quad (2.11c)$$

$$y(t) = \frac{1}{r_2} p_2 \quad (\text{áp suất tại đầu ra được xem là bằng } 0) \quad (2.11d)$$

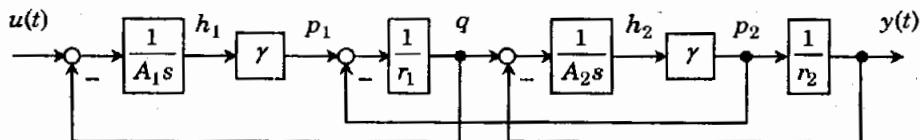
$$p_1 = \gamma h_1 \quad (2.11e)$$

$$p_2 = \gamma h_2 \quad (2.11f)$$

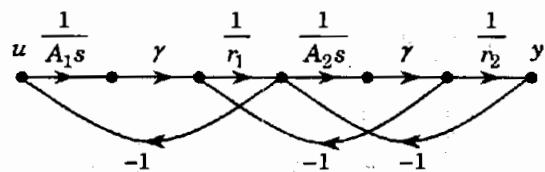
trong đó $y(t)$ là lưu lượng chất lỏng chảy ra khỏi bình thứ hai.

Từ những hiểu biết lý thuyết ban đầu đó về hệ thống ta đi đến sơ đồ khối và sơ đồ tín hiệu mô tả hệ thống cho trong hình 2.30. Sơ đồ này được xây dựng trên cơ sở sao chép nguyên bản các đẳng thức (2.11a)+(2.11f).

a) Sơ đồ khối



b) Sơ đồ tín hiệu



Hình 2.30: Sơ đồ khối và sơ đồ tín hiệu của hệ thống trong ví dụ 16.

Từ sơ đồ tín hiệu trên ta thấy hệ chỉ có một tuyến thẳng:

$$P_1 = \frac{\gamma^2}{r_1 r_2 A_1 A_2 s^2}.$$

Hệ có ba vòng lặp:

$$L_1 = -\frac{\gamma}{r_1 A_1 s}, \quad L_2 = -\frac{\gamma}{r_1 A_2 s}, \quad L_3 = -\frac{\gamma}{r_2 A_2 s}$$

trong đó có hai vòng lặp L_1 và L_3 không dính nhau (không có đoạn nối chung). Bởi vậy:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3 = \frac{r_1 r_2 A_1 A_2 s^2 + \gamma(r_1 A_1 + r_2 A_1 + r_2 A_2)s + \gamma^2}{r_1 r_2 A_1 A_2 s^2}.$$

Vì cả ba vòng lặp đều dính vào P_1 (có chung điểm với P_1) nên

$$\Delta_1 = 1.$$

Suy ra

$$G(s) = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{\gamma^2}{r_1 r_2 A_1 A_2 s^2 + \gamma(r_1 A_1 + r_2 A_1 + r_2 A_2)s + \gamma^2}. \quad \square$$

2.1.5 Đường đặc tính tần biên-pha

Xét hệ thống tuyến tính mô tả bởi phương trình vi phân

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y}{dt^n} = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}. \quad (2.12)$$

Hệ đó sẽ có hàm truyền đạt $G(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}.$$

Hàm đặc tính tần được hiểu là

$$\tilde{G}(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}. \quad (2.13)$$

Lý do cho việc trong (2.13) ta đã viết $\tilde{G}(j\omega)$ thay vì $G(j\omega)$ là để tránh nhầm lẫn rằng $\tilde{G}(j\omega)$ chính là ảnh Fourier của hàm trọng lượng $g(t)$. Ảnh Fourier $G(j\omega)$ của hàm trọng lượng $g(t)$ không thể thu được một cách đơn giản bằng việc gán $s=j\omega$ vào ảnh Laplace $G(s)$ của nó—xem lại mục 1.3.4 của chương 1. Cũng theo kết quả ở mục 1.3.4 thì cần và đủ để có

$$G(j\omega) = \tilde{G}(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} \quad (2.14)$$

là tất cả các điểm cực của $G(s)$ đều phải nằm bên trái trục ảo (có phần thực âm và khác 0), nói cách khác $G(s)$ phải là một *hàm bền (stable)*.

Như vậy là ta đã định nghĩa xong hàm đặc tính tần. Nhưng hàm đặc tính tần đại diện cho tính chất gì của hệ thống? Để trả lời câu hỏi này, ta xét một ví dụ.

Ví dụ 17: Cho một hệ thống có hàm truyền đạt

$$G(s) = -\frac{2(s+0,5)}{s+1}.$$

Kích thích hệ từ trạng thái 0 bằng tín hiệu điều hòa

$$u(t) = \sin(\omega t)$$

có ảnh Laplace

$$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

thì hệ sẽ có đáp ứng

$$Y(s) = -\frac{2(s+0,5)}{s+1} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{1}{1+\omega^2} \left[\frac{\omega}{s+1} - \frac{\omega(1+2\omega^2)}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega s}{s^2 + \omega^2} \right].$$

Suy ra

$$y(t) = \frac{1}{1+\omega^2} \left[\omega e^{-t} - (1+2\omega^2) \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) \right]$$

và khi $t \rightarrow \infty$ thì do $e^{-t} \rightarrow 0$ ta được

$$y(t) = \frac{\sqrt{1+5\omega^2+4\omega^4}}{1+\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{với} \quad \varphi = \arctan \frac{\omega}{1+2\omega^2}. \quad (2.15a)$$

Mặt khác hàm đặc tính tần của hệ là

$$\begin{aligned} \tilde{G}(j\omega) &= -\frac{2(j\omega+0,5)}{j\omega+1} = -\frac{1+2\omega^2}{1+\omega^2} - j \frac{\omega}{1+\omega^2} \\ &= \underbrace{\frac{\sqrt{1+5\omega^2+4\omega^4}}{1+\omega^2}}_{|\tilde{G}(j\omega)|} \cdot e^{j\varphi} \quad \text{với} \quad \varphi = \arctan \frac{\omega}{1+2\omega^2}. \end{aligned} \quad (2.15b)$$

Do đó nếu so sánh (2.15a) với (2.15b) ta sẽ đi đến được kết luận cho trường hợp $t \rightarrow \infty$

$$y(t) = |\tilde{G}(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{với } \varphi \text{ là góc pha của } \tilde{G}(j\omega).$$

□

Tổng quát hóa kết luận của ví dụ 17 ta có định lý 2.5:

Định lý 2.5: Nếu kích thích một hệ thống có hàm truyền đạt bền $G(s)$ từ trạng thái 0, tức là tại thời điểm kích thích hệ có

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \dots = \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} = 0$$

bằng tín hiệu điều hòa $u(t) = e^{j\omega t}$ thì khi $t \rightarrow \infty$ hệ sẽ có đáp ứng $y(t)$ được xác định từ hàm đặc tính tần $\tilde{G}(j\omega)$ như sau

$$y(t) = |\tilde{G}(j\omega)| e^{j(\omega t + \varphi)}, \quad \text{với góc pha } \varphi = \arg \tilde{G}(j\omega) \quad (2.16)$$

Trong công thức (2.16) ta đã sử dụng ký hiệu $\arg \tilde{G}(j\omega)$ để chỉ góc pha của $\tilde{G}(j\omega)$, tức là

$$\arg \tilde{G}(j\omega) = \arctan \frac{\text{Im } \tilde{G}(j\omega)}{\text{Re } \tilde{G}(j\omega)}, \quad (2.17)$$

với $\text{Re } \tilde{G}(j\omega)$ là phần thực, $\text{Im } \tilde{G}(j\omega)$ là phần ảo của $\tilde{G}(j\omega)$. Nói cách khác

$$\tilde{G}(j\omega) = \text{Re } \tilde{G}(j\omega) + j \cdot \text{Im } \tilde{G}(j\omega). \quad (2.18)$$

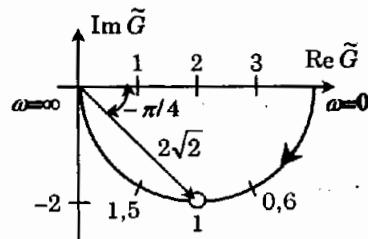
Chú ý: Do trong định lý 2.5 có giả thiết $G(s)$ là hàm bền nên $\tilde{G}(j\omega) = G(j\omega)$. Bởi vậy công thức (2.16) cũng có thể viết thành

$$y(t) = |G(j\omega)| e^{j(\omega t + \arg G(j\omega))}.$$

Đường biểu diễn hàm $\tilde{G}(j\omega)$ dưới dạng đồ thị theo tham số ω khi ω chạy từ 0 đến ∞ trong hệ trục tọa độ có trục tung $\text{Im } \tilde{G}(j\omega)$ và trục hoành $\text{Re } \tilde{G}(j\omega)$ được gọi là *đường đặc tính tần biến-phas*.

Ví dụ 18: Cho một hệ thống có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{4}{1+s}.$$



Hình 2.31: Đường đặc tính tần của ví dụ 18.

Hàm đặc tính tần của hệ là

$$\begin{aligned} \tilde{G}(j\omega) &= G(s)|_{s=j\omega} = \frac{4}{1+j\omega} = \frac{4}{\underbrace{1+\omega^2}_{\text{Re } \tilde{G}(j\omega)}} - j \frac{\underbrace{4\omega}_{\text{Im } \tilde{G}(j\omega)}}{1+\omega^2} \end{aligned}$$

Do có

$$[\text{Re } \tilde{G}(j\omega) - 2]^2 + [\text{Im } \tilde{G}(j\omega)]^2 = 4$$

nên khi ω chạy từ 0 đến ∞ đồ thị của nó sẽ là nửa đường tròn nằm dưới trục hoành (vì khi đó hàm $\tilde{G}(j\omega)$ luôn có phần ảo nhỏ hơn 0) – hình 2.31.

Hơn nữa, vì $G(s)$ còn là hàm bền, nên với đường đặc tính tần cho trong hình 2.31 đó ta sẽ xác định được đáp ứng $y(t)$ của hệ khi bị kích thích từ trạng thái 0 bởi tín hiệu điều hòa $u(t) = \sin(t)$. Theo định lý 2.5, đặc biệt từ ví dụ 17, thì đáp ứng đó là:

$$t \rightarrow \infty: y(t) = 2\sqrt{2} \sin(t - \frac{\pi}{4}). \quad \square$$

Ví dụ 19: Xét hệ với hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{3}{s(1+2s)}.$$

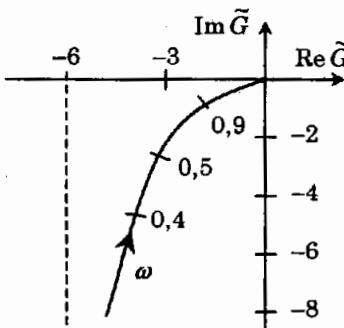
Hệ có hàm đặc tính tần

$$\tilde{G}(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{3}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{6}{1+4\omega^2} - j \frac{3}{\omega(1+4\omega^2)}$$

$$\text{Re } \tilde{G}(j\omega) \quad \text{Im } \tilde{G}(j\omega)$$

và từ đó ta được đường đặc tính tần của hệ cho trong hình 2.32. Đường đặc tính tần này có một đường tiệm cận là

$$\text{Re } \tilde{G} = -6.$$



Hình 2.32: Đường đặc tính tần của ví dụ 19.

Ví dụ 20: Cho hệ với hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{5}{1+5s+4s^2}.$$

Từ $G(s)$ ta có hàm đặc tính tần $\tilde{G}(j\omega)$ và đó cũng là ảnh Fourier $G(j\omega)$ của hàm trọng lượng $g(t)$, vì $G(s)$ là hàm bền (có hai điểm cực là $s_1 = -\frac{1}{4}$ và $s_2 = -1$):

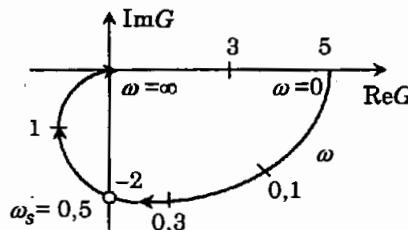
$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \tilde{G}(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{5}{1+5j\omega+4(j\omega)^2} \\ &= \frac{5-20\omega^2}{1+17\omega^2+16\omega^4} - j \frac{25\omega}{1+17\omega^2+16\omega^4}. \end{aligned}$$

Đồ thị hàm $G(j\omega)$ cho trong hình 2.33. Với đồ thị đó ta thấy khi $\omega_s = 0,5$ thì

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = 0 \quad \text{và} \quad |G(j\omega)| = 2.$$

Nói cách khác nếu kích thích hệ từ trạng thái 0 bằng tín hiệu $u(t) = \sin(0,5t)$ thì sau một khoảng thời gian đủ lớn ($t \rightarrow \infty$), đáp ứng của hệ sẽ là

$$y(t) = 2\sin(0,5t - \frac{\pi}{2}).$$



Hình 2.33: Đường đặc tính tần của ví dụ 20.

Ví dụ 21: Cho một hệ thống được mô tả bởi hàm truyền đạt $G(s) = \frac{5}{4s(1 + 0,5s)^2}$. Hãy xác định điểm tần số ω_0 mà tại đó $|\tilde{G}(j\omega_0)| = 1$.

Hệ có hàm đặc tính tần

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{5}{4j\omega(1 + 0,5j\omega)^2}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} |\tilde{G}(j\omega_0)| &= \left| \frac{5}{4j\omega_0(1 + 0,5j\omega_0)^2} \right| = 1 \\ \Leftrightarrow \left| j\omega_0 \left(1 + j\frac{\omega_0}{2}\right)^2 \right| &= 1 \quad \Leftrightarrow \omega_0^6 + 8\omega_0^4 + 16\omega_0^2 - 25 = 0 \\ \Leftrightarrow \omega_0 &= 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 22: Cho hệ với hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{b}{1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4}$$

và $G(s)$ được giả thiết là hàm bền. Hãy xác định tín hiệu $u(t)$ sao cho sau một khoảng thời gian t đủ lớn ($t \rightarrow \infty$) đáp ứng $y(t)$ của hệ cho trường hợp được kích thích từ trạng thái 0 bằng tín hiệu đó sẽ có một góc lệch pha với $u(t)$ là $\varphi = \pm 90^\circ$.

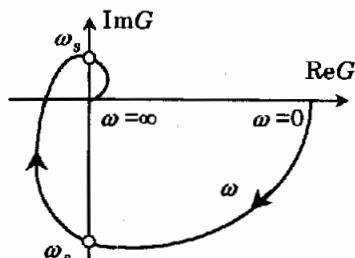
Từ $G(s)$ ta có hàm đặc tính tần $\tilde{G}(j\omega)$ và đó cũng là ảnh Fourier $G(j\omega)$ của hàm trọng lượng $g(t)$, vì $G(s)$ là hàm bền:

$$G(j\omega) = \tilde{G}(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{bA}{\underbrace{A^2 + B^2}_{\text{Re } G(j\omega)}} - j \frac{bB}{\underbrace{A^2 + B^2}_{\text{Im } G(j\omega)}},$$

trong đó

$$A = 1 - \alpha_2 \omega^2 + \alpha_4 \omega^4, \quad B = \alpha_1 \omega - \alpha_3 \omega^3.$$

Hình 2.34 biểu diễn đường đặc tính tần của hệ.



Hình 2.34: Đường đặc tính tần của ví dụ 22.

Theo định lý 2.5 và công thức (2.16b), nếu có $u(t) = e^{j\omega_s t}$ ở đầu vào thì đáp ứng của hệ khi $t \rightarrow \infty$ sẽ là

$$y(t) = |G(j\omega_s)| e^{j(\omega_s t + \arg G(j\omega_s))}.$$

Điều đó nói rằng để $y(t)$ có một góc lệch pha với $u(t)$ là $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ta phải xác định điểm tần số ω_s của $u(t) = e^{j\omega_s t}$ sao cho:

$$\arg G(j\omega_s) = \arctan \frac{\text{Im } G(j\omega_s)}{\text{Re } G(j\omega_s)} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re } G(j\omega_s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{bA}{A^2 + B^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \alpha_2 \omega^2 + \alpha_4 \omega^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_s = \sqrt{\frac{\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_4}}{2\alpha_4}}.$$

□

Trên đây là những ví dụ về việc xây dựng đường đặc tính tần biên-pha từ hàm truyền đạt của hệ thống. Đặt ngược lại vấn đề là ta có bài toán phải tìm hàm truyền đạt $G(s)$ từ đường đồ thị của hàm đặc tính tần biên-pha $\tilde{G}(j\omega)$. Bài toán ngược này ta thường gặp khi phải thực hiện công việc mô hình hóa hệ thống tuyến tính bằng phương pháp thực nghiệm, tức là sau khi quan sát/đo các tín hiệu vào/ra của hệ thống ta có được

đồ thị hàm $\tilde{G}(j\omega)$ thì bước tiếp theo là từ đồ thị đó của $\tilde{G}(j\omega)$ phải xác định bậc m, n cũng như các hệ số b_0, b_1, \dots, b_m và a_0, a_1, \dots, a_n cho hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}. \quad (2.19)$$

Nếu hàm truyền đạt $G(s)$ có bậc của đa thức tử số là m nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số là n ($m < n$) thì người ta gọi hàm truyền đạt đó là *hợp thức chặt (strictly proper)*.

Chìa khóa cho việc giải bài toán ngược là mối liên hệ giữa dạng của đồ thị $\tilde{G}(j\omega)$ với $G(s)$ tại những điểm tần số đặc biệt mà ở đây ta quan tâm hơn cả là hai điểm tần số $\omega=0$ và $\omega=\infty$.

Trước hết ta xét mối liên hệ giữa chúng khi $\omega=\infty$. Từ $G(s)$ cho trong công thức (2.19) ta có

$$\tilde{G}(j\omega) = (j\omega)^{m-n} \frac{b_0(j\omega)^{-m} + b_1(j\omega)^{1-m} + \dots + b_m}{a_0(j\omega)^{-n} + a_1(j\omega)^{1-n} + \dots + a_n}. \quad (2.20a)$$

Suy ra:

Định lý 2.6: Nếu một hệ thống tuyến tính có hàm truyền đạt $G(s)$ là hợp thức thì hàm $\tilde{G}(j\omega)$ tại điểm tần số $\omega=\infty$ sẽ thỏa mãn:

$$a) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \tilde{G}(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m < n \\ \frac{b_m}{a_n} & \text{nếu } m = n \end{cases}$$

$$b) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg \tilde{G}(j\omega) = -(n-m) \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{b_m}{a_n}.$$

Theo định lý 2.16, nếu đồ thị của $\tilde{G}(j\omega)$ kết thúc tại gốc tọa độ thì hàm truyền đạt $G(s)$ phải là một hàm hợp thức chặt. Bước tiếp theo là ta tìm quan hệ của $\tilde{G}(j\omega), G(s)$ khi $\omega=0$ và để làm điều này ta biến đổi $\tilde{G}(j\omega)$ từ $G(s)$ với (2.19) về dạng:

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^r} \cdot \frac{(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega) \dots}{(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega) \dots}, \quad (2.20b)$$

trong đó r là hằng số phụ thuộc vào giá trị các tham số đầu $b_0, b_1, \dots, a_0, a_1, \dots$ có bằng 0 hay không. Chẳng hạn như:

- a) $r < 0$ nếu $b_0 = b_1 = \dots = b_{r-1} = 0$ và $a_0 \neq 0$.
- b) $r > 0$ nếu $a_0 = a_1 = \dots = a_{r-1} = 0$ và $b_0 \neq 0$.
- c) $r = 0$ nếu $a_0 \neq 0$ và $b_0 \neq 0$.

Với (2.20b) ta thấy:

Định lý 2.7: Đồ thị hàm đặc tính tần biên–pha $\tilde{G}(j\omega)$ và hàm truyền đạt $G(s)$ dạng (2.20b) tại điểm tần số $\omega=0$ có quan hệ:

- Nếu $\lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{G}(j\omega)$ là một số thực hữu hạn khác 0, tức là đồ thị của $\tilde{G}(j\omega)$ bắt đầu từ một điểm trên trục thực, thì $k = \lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{G}(j\omega)$ và $r = 0$. Hệ có hàm truyền đạt với $r=0$ được gọi là *hệ có khâu khuếch đại*.
- Nếu $\lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{G}(j\omega) = 0$ thì $r < 0$ và $\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg \tilde{G}(j\omega) = |r| \cdot \frac{\pi}{2}$. Hệ có hàm truyền đạt với $r < 0$ được gọi là *hệ có khâu vi phân*.
- Nếu $\lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{G}(j\omega) = \infty$ thì $r > 0$ và $\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg \tilde{G}(j\omega) = -r \cdot \frac{\pi}{2}$. Hệ có hàm truyền đạt với $r > 0$ được gọi là *hệ có khâu tích phân*.

2.1.6 Đường đặc tính tần logarith - Đồ thị Bode

Bên cạnh việc biểu diễn hàm đặc tính tần $\tilde{G}(j\omega)$ trong mặt phẳng với hai trục tọa độ $\text{Re } \tilde{G}(j\omega)$ và $\text{Im } \tilde{G}(j\omega)$ như mục 2.1.5 vừa trình bày người ta còn có một phương pháp biểu diễn khác là đồ thị đặc tính logarith, hay còn gọi biểu đồ Bode. Đây là cách biểu diễn $\tilde{G}(j\omega)$ thành hai đồ thị riêng biệt theo ω cho:

- biên độ, hay giá trị logarith của $|\tilde{G}(j\omega)|$ là

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg |\tilde{G}(j\omega)|$$
, có đơn vị là Dezibel (dB),
- và pha, hay giá trị góc $\varphi(\omega) = \arg \tilde{G}(j\omega)$ có đơn vị là Grad.

Cả hai đồ thị này đều có trục hoành là ω song không được chia đều theo giá trị của ω mà lại theo $\lg(\omega)$. Lý do cho việc chia này là để trong một khoảng diện tích vẽ tương đối nhỏ, ta vẫn có được đồ thị minh họa đầy đủ cho hệ thống thông qua $\tilde{G}(j\omega)$ cho một dải tần số rất lớn.

Một lý do nữa làm cho biểu đồ Bode được người dùng ưa sử dụng là với những hệ có hàm truyền đạt dạng phức tạp

$$G(s) = k \frac{(1 + T_1' s)(1 + T_2' s) \cdots (1 + T_n' s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_n s)}, \quad k > 0 \quad (2.21a)$$

thì với hàm đặc tính tần

$$\tilde{G}(j\omega) = k \frac{(1 + T_1' j\omega)(1 + T_2' j\omega) \cdots (1 + T_m' j\omega)}{(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega) \cdots (1 + T_n j\omega)} \quad (2.21b)$$

ta sẽ có

$$L(\omega) = 20 \left[\sum_{k=1}^m \lg |1 + T_k j\omega| - \sum_{k=1}^n \lg |1 + T_k j\omega| \right]$$

nên đường đồ thị $L(\omega)$ của hệ sẽ được xây dựng một cách đơn giản bằng cách cộng/trừ các đường

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg k + \sum_{k=1}^m L_k'(\omega) - \sum_{k=1}^n L_k(\omega), \quad (2.21c)$$

trong đó

$$L_k'(\omega) = 20 \lg |1 + T_k j\omega| \quad \text{và} \quad L_k(\omega) = 20 \lg |1 + T_k j\omega|$$

là các đường biểu đồ Bode (phản module) của những thành phần (khâu) đơn giản

$$G_k'(s) = 1 + T_k s \quad \text{và} \quad G_k(s) = 1 + T_k s.$$

Ví dụ 23: Xây dựng biểu đồ Bode cho khâu khuếch đại với hàm truyền đạt

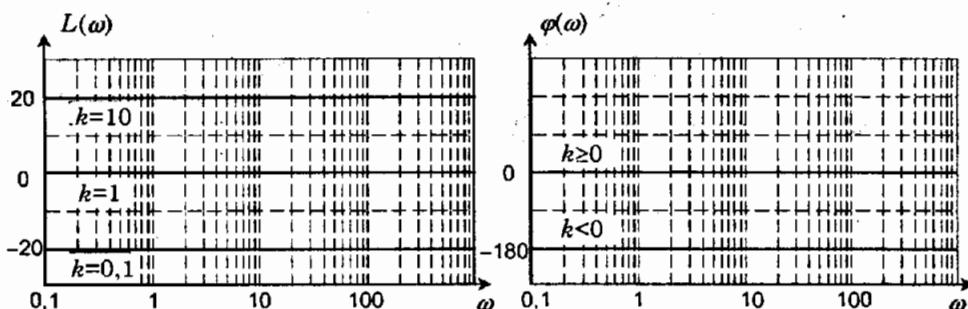
$$G(s) = k.$$

Khâu này có hàm đặc tính tần

$$\tilde{G}(j\omega) = k.$$

Do đó (hình 2.35)

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg |k| \quad \text{và} \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k \geq 0 \\ -180 & \text{nếu } k < 0 \end{cases}$$
□



Hình 2.35: Biểu đồ Bode của khâu khuếch đại.

Ví dụ 24: Xây dựng biểu đồ Bode cho khâu quán tính bậc nhất với hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts}.$$

Khâu này có hàm đặc tính tần

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{1}{1+Tj\omega} = \frac{1}{1+(T\omega)^2} - j \cdot \frac{T\omega}{1+(T\omega)^2}.$$

Nên $L(\omega) = -10 \cdot \lg(1+T^2 \omega^2)$ và $\varphi(\omega) = -\arctan T\omega$.

Đường đồ thị của $L(\omega)$ có hai tiệm cận ứng với khi $\omega \rightarrow 0$ và khi $\omega \rightarrow \infty$:

$$L(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{khi } \omega \rightarrow 0 \\ -20(\lg \omega + \lg T) & \text{khi } \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.22)$$

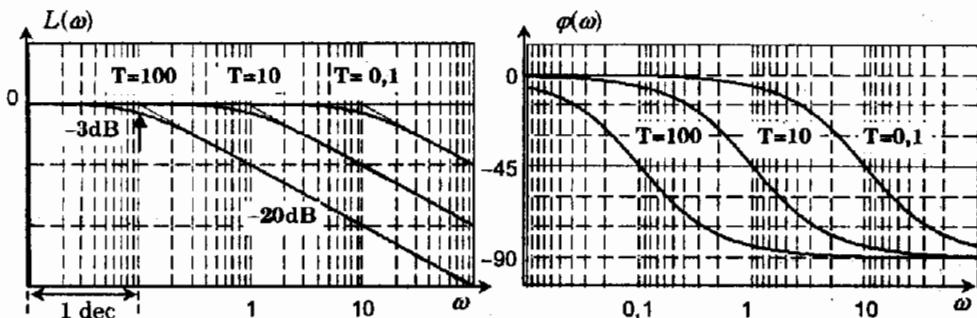
và hai đường tiệm cận này cắt nhau tại điểm tần số $\omega_G = \frac{1}{T}$ được gọi là *tần số gãy* và ở đó có

$$L(\omega_G) = -10 \cdot \lg(2) \approx -3 \text{dB}.$$

Từ (2.22) ta thấy đường tiệm cận thứ hai ứng với trường hợp $\omega \rightarrow \infty$ là đường thẳng có độ dốc:

$$-20 \text{ dB/dec},$$

trong đó 1 dec là độ dài khoảng $[\omega, 10\omega]$ trên trục tung (ω là tùy ý). Hình 2.36 biểu diễn biểu đồ Bode của khâu quán tính bậc nhất.



Hình 2.36: Biểu đồ Bode của khâu quán tính bậc nhất cho trong ví dụ 24.

Ví dụ 25: Xây dựng biểu đồ Bode cho khâu khuếch đại-vi phân có hàm truyền đạt

$$G(s) = 1+Ts.$$

Khâu này có hàm đặc tính tần:

$$\tilde{G}(j\omega) = 1 + Tj\omega.$$

Suy ra

$$L(\omega) = 10 \cdot \lg(1+T^2 \omega^2) \quad \text{và} \quad \varphi(\omega) = \arctan T\omega.$$

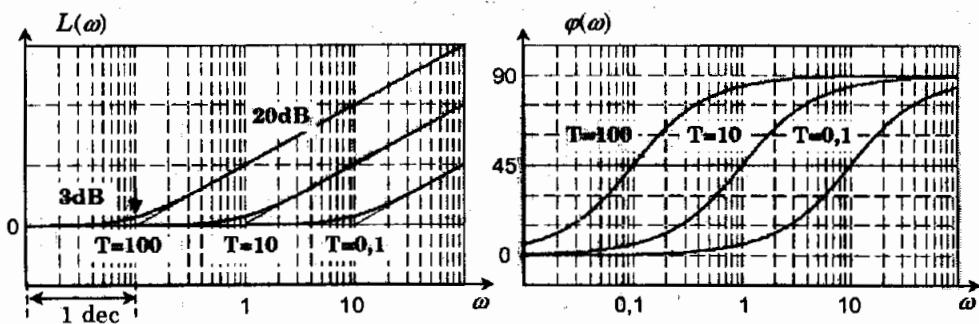
Cũng tương tự như ở khâu quan tính bậc nhất, đường đồ thị $L(\omega)$ có hai tiệm cận ứng với khi $\omega \rightarrow 0$ và khi $\omega \rightarrow \infty$ là:

$$L(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{khi } \omega \rightarrow 0 \\ 20(\lg \omega + \lg T) & \text{khi } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Chúng cắt nhau tại điểm tần số $\omega_G = \frac{1}{T}$ được gọi là *tần số gãy*. Đường tiệm cận thứ hai ứng với trường hợp $\omega \rightarrow \infty$ là đường thẳng có độ dốc:

20 dB/dec.

Hình 2.37 biểu diễn biểu đồ Bode của khâu đã cho. □

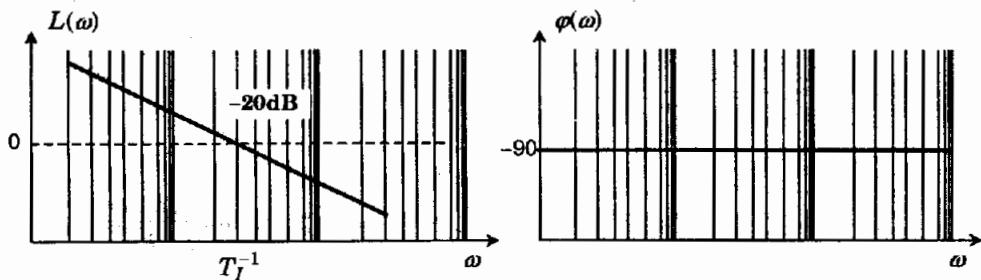


Hình 2.37: Biểu đồ Bode của khâu cho trong ví dụ 25.

Ví dụ 26: Cho khâu tích phân với hàm truyền đạt $G(s) = \frac{1}{T_I s}$. Khâu này có

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{1}{T_I j\omega} = -\frac{j}{T_I \omega}.$$

Nên $L(\omega) = -20 \cdot (\lg \omega - \lg \frac{1}{T_I})$ và $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$.



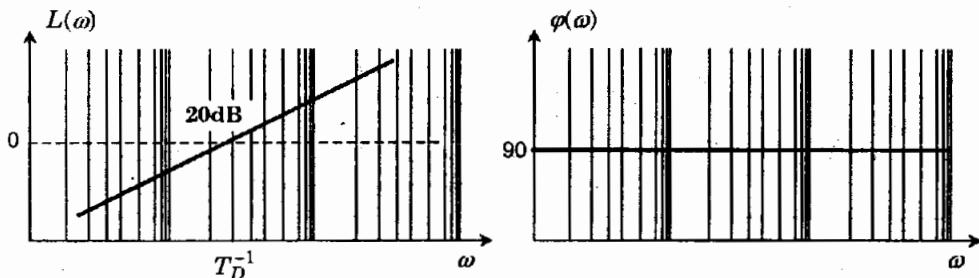
Hình 2.38: Biểu đồ Bode của khâu tích phân cho trong ví dụ 26.

Hình 2.38 là biểu đồ Bode của khâu tích phân. Đường đồ thị $L(\omega)$ là đường thẳng với độ dốc -20dB/dec . Nó sẽ cắt trục hoành (là trục mà tại đó $L(\omega)$ có giá trị 0) tại điểm tần số $\omega_C = T_I^{-1}$ và điểm tần số này được gọi là *tần số cắt*. \square

Ví dụ 27: Cho khâu vi phân có hàm truyền đạt $G(s) = T_D s$. Khâu này có $\tilde{G}(j\omega) = T_D j\omega$.

$$\Rightarrow L(\omega) = 20 \cdot (\lg \omega - \lg \frac{1}{T_D}) \quad \text{và} \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

Với phương trình của $L(\omega)$ và $\varphi(\omega)$ như vậy ta có biểu đồ Bode của khâu vi phân như hình 2.39 mô tả. Đồ thị $L(\omega)$ là một đường thẳng có độ dốc 20dB/dec và tại điểm tần số $\omega_C = T_D^{-1}$ có giá trị 0. Điểm tần số này được gọi là *tần số cắt*. \square



Hình 2.39. Biểu đồ Bode của khâu vi phân cho trong ví dụ 27.

Ví dụ 28: Cho một khâu có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2DTs + T^2 s^2} \text{ với } 0 < D < 1.$$

Nếu kích thích khâu này bằng tín hiệu $1(t)$ ở đầu vào thì theo ví dụ 21 ở chương 1, đáp ứng đầu ra sẽ là hàm $h(t)$ có dạng dao động. Dao động đó sẽ tắt dần khi $T > 0$ (hình 1.7) hoặc ngược lại không tắt nếu $T < 0$. Bởi vậy khâu này còn có tên là *khâu dao động bậc hai*. Nó có hàm đặc tính tần

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2DTj\omega - T^2 \omega^2}.$$

Suy ra

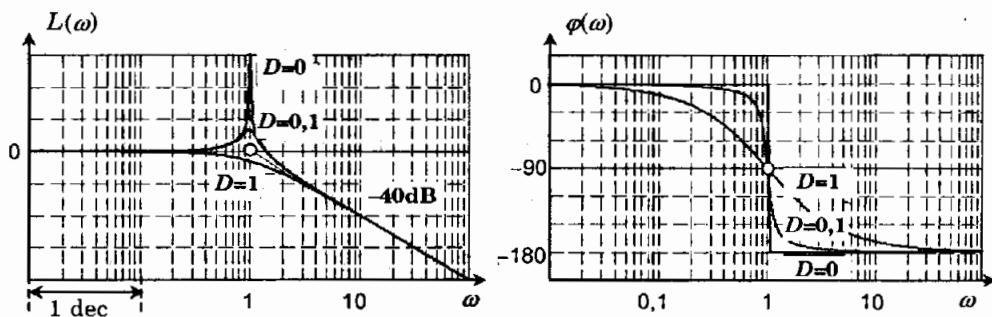
$$L(\omega) = -10 \cdot \lg [(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4D^2 T^2 \omega^2] \text{ và} \quad \varphi(\omega) = -\arctan \frac{2DT\omega}{1 - T^2 \omega^2}.$$

Đồ thị $L(\omega)$ sẽ có hai đường tiệm cận ứng với hai trường hợp khác nhau là khi $\omega \rightarrow 0$ và khi $\omega \rightarrow \infty$ như sau

$$t \rightarrow 0: L(\omega) = 0$$

$$t \rightarrow 0: L(\omega) = -40 \cdot (\lg \omega - \lg \frac{1}{T}) \quad \text{với độ dốc là } -40 \text{dB/dec.}$$

Hai đường tiệm cận này cắt nhau tại điểm tần số gãy $\omega_G = \frac{1}{T}$. Hình 2.40 là đồ thị Bode của khâu dao động bậc hai tắt dần.



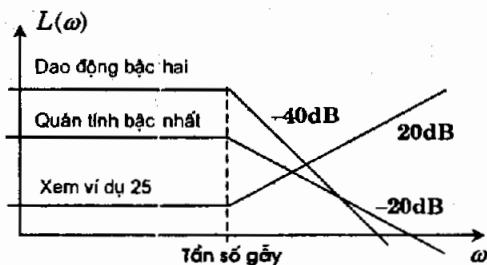
Hình 2.40: Biểu đồ Bode của khâu dao động bậc hai tắt dần cho trong ví dụ 28.

Các ví dụ trên với biểu đồ Bode $L(\omega)$, $\phi(\omega)$ của những khâu cơ bản sẽ được sử dụng để thiết kế biểu đồ Bode cho một khâu tuyến tính bất kỳ có hàm truyền đạt dạng (2.21):

$$\tilde{G}(j\omega) = k \frac{(1 + T_1' j\omega)(1 + T_2' j\omega) \cdots (1 + T_m' j\omega)}{(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega) \cdots (1 + T_n j\omega)}. \quad (2.23)$$

bằng cách cộng/trừ các đường $L(\omega)$, $\phi(\omega)$ cơ bản đó.

Thông thường, để đơn giản cho việc cộng/trừ đồ thị này người ta xấp xỉ $L(\omega)$ bằng những đường thẳng tiệm cận của nó, tức là $L(\omega)$ sẽ có dạng xấp xỉ như một đường gãy khúc (polycon). Sau này, như chúng ta sẽ thấy ở các chương tiếp theo, việc xấp xỉ đó hầu như không ảnh hưởng tới ứng dụng của biểu đồ Bode trong quá trình xét tính động học cơ bản của hệ thống. Hình 2.41 minh họa việc xấp xỉ $L(\omega)$ thành đường gãy khúc thông qua các đường tiệm cận của nó.



Hình 2.41: Xấp xỉ biểu đồ Bode bằng đường gãy khúc.

Ví dụ 29: Cho hệ có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{110}{(s+1)(s+11)} = 10 \cdot \frac{1}{1+s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{11}s}.$$

Gọi $L(\omega)$ là phần đồ thị biên độ biểu đồ Bode của hệ. Vậy thì

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega),$$

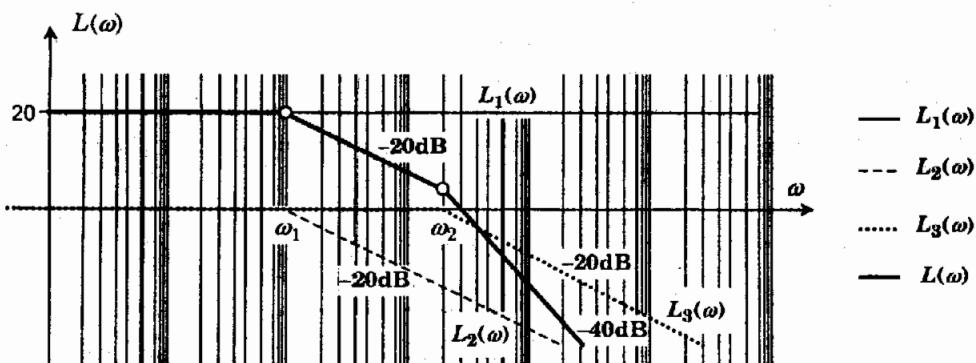
trong đó:

- a) $L_1(\omega)$ là phần đồ thị biên độ biểu đồ Bode của khâu khuếch đại (xem ví dụ 23) với hàm truyền đạt $G_1(s) = 10$.
- b) $L_2(\omega)$ là phần đồ thị biên độ biểu đồ Bode của khâu quán tính bậc nhất (xem ví dụ 24) với hàm truyền đạt $G_2(s) = \frac{1}{1+s}$. Nó có tần số gãy $\omega_1 = 1$.
- c) $L_3(\omega)$ là phần đồ thị biên độ biểu đồ Bode của khâu quán tính bậc nhất có hàm truyền đạt $G_3(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{11}s}$. Tần số gãy của $L_3(\omega)$ là $\omega_2 = 11$.

Cộng các đường xấp xỉ dạng gãy khúc của $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$, $L_3(\omega)$ lại với nhau ta có được đường gần đúng của $L(\omega)$. Đường này cũng có dạng gãy khúc gồm ba phần:

- Phần ứng với $\omega < \omega_1$ có độ nghiêng bằng 0 và giá trị là 20dB.
- Phần ứng với $\omega_1 < \omega < \omega_2$ có độ nghiêng bằng -20dB/dec.
- Phần ứng với $\omega_2 < \omega$ có độ nghiêng bằng -40dB/dec.

□



Hình 2.42: Đường đồ thị $L(\omega)$ gần đúng của hệ cho trong ví dụ 29.

2.1.7 Quan hệ giữa phần thực và ảo của hàm đặc tính tần-Toán tử Hilbert

Tại các mục 2.1.5 và 2.1.6 ta đã làm quen với hàm đặc tính tần

$$\tilde{G}(j\omega) = \operatorname{Re} \tilde{G}(j\omega) + j \cdot \operatorname{Im} \tilde{G}(j\omega)$$

của một hệ thống tuyến tính, cũng như những phương pháp biểu diễn trực quan $\tilde{G}(j\omega)$ dưới dạng đồ thị. Tiếp theo, ở mục này ta sẽ nghiên cứu mối quan hệ giữa phần thực

$$T(\omega) = \operatorname{Re} \tilde{G}(j\omega) \quad (2.24a)$$

và phần ảo

$$A(\omega) = \operatorname{Im} \tilde{G}(j\omega) \quad (2.24b)$$

của $\tilde{G}(j\omega)$ cho một hệ tuyến tính. Việc nghiên cứu đó là cần thiết, vì không phải cứ lấy hai hàm thực $T(\omega), A(\omega)$ bất kỳ nào đó theo biến ω rồi ghép chúng lại với nhau

$$T(\omega) + jA(\omega)$$

cũng sẽ có được hàm đặc tính tần của một hệ tuyến tính.

Ta xét một hệ thống tuyến tính causal, tham số hằng, có hàm truyền đạt $G(s)$ dạng thực-hữu tỷ, hợp thức và bền. Nói cách khác

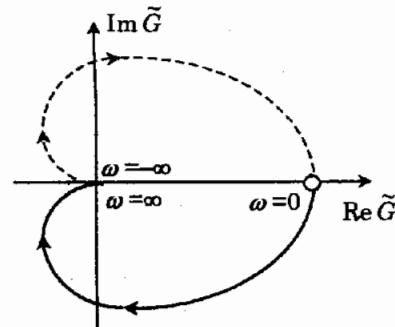
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n},$$

có $m \leq n$, các hệ số $b_0, b_1, \dots, a_0, a_1, \dots$ là những số thực và nghiệm của đa thức mẫu số (điểm cực) đều nằm bên trái trực ảo.

Do $G(s)$ có hệ số là số thực nên nó sẽ có giá trị thực nếu s là số thực. Do đó

$$\tilde{G}(j\omega) = \overline{\tilde{G}(-j\omega)}. \quad (2.25)$$

Điều này ta có thể thấy từ đồ thị đường đặc tính tần biên-pha khi ω không phải chỉ đi từ 0 đến ∞ mà từ $-\infty$ đến ∞ là nó sẽ có dạng đối xứng qua trục thực (hình 2.43).



Hình 2.43: Đường đặc tính tần biên pha của hệ tuyến tính tham số hằng với ω đi từ $-\infty$ đến ∞ nằm đối xứng qua trục thực.

Định lý 2.8: Nếu hệ thống có hàm truyền đạt $G(s)$ dạng thực-hữu tỷ thì phần thực $T(\omega)$ của hàm đặc tính tần biên-pha $\tilde{G}(j\omega)$ của nó là một hàm chẵn và phần ảo $A(\omega)$ là một hàm lẻ.

Chứng minh: Điều khẳng định trên được suy ra từ tính chất (2.25) và hai công thức hiển nhiên đúng:

$$T(\omega) = \frac{1}{2} [\tilde{G}(j\omega) + \tilde{G}(-j\omega)]$$

$$A(\omega) = \frac{1}{2j} [\tilde{G}(j\omega) - \tilde{G}(-j\omega)]. \quad \square$$

Để cụ thể hóa việc xác định mối quan hệ giữa $T(\omega)$ và $A(\omega)$ ta xét hai bài toán sau:

Bài toán thứ nhất

Giả sử rằng bây giờ ta có bài toán là đã biết $T(\omega)$ và phải tìm hàm truyền đạt $G(s)$ dạng thực-hữu tỷ, hợp thức và bền của một hệ tuyến tính sao cho hàm đặc tính tần biên-pha $\tilde{G}(j\omega)$ của nó có phần thực là $T(\omega)$.

Trước tiên từ định lý 2.8 và nếu gọi

$$C(s) = \frac{1}{2} [G(s) + G(-s)]$$

sẽ được

$$C(j\omega) = T(\omega) \quad \Rightarrow \quad C(s) = T\left(\frac{s}{j}\right). \quad (2.26)$$

Mặt khác, vì $G(s)$ là hàm bền nên tất cả các điểm cực s_1, s_2, \dots của $G(s)$ phải nằm bên trái trực ảo. Suy ra các điểm cực của $C(s)$ phân bố đối xứng qua trực ảo. Nếu có thêm giả thiết rằng tất cả các điểm cực của $G(s)$ đều là nghiệm đơn của

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n = 0$$

thì $G(s)$ phân tích được thành (mục 1.3.2 của chương 1):

$$G(s) = A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k} \quad \text{với} \quad A_k = \underset{s_k}{\text{Res}} G(s).$$

Bởi vậy $C(s)$ có dạng:

$$C(s) = \frac{1}{2} \left[A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k} + A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{-A_k}{s + s_k} \right]. \quad (2.27)$$

Để tính các hệ số A_i của (2.27) ta có thể sử dụng phương pháp residue đã giới thiệu ở chương 1. Song trong trường hợp s_i là nghiệm đơn của đa thức mẫu số, nó sẽ được xác định một cách đơn giản với hai bước tính như sau:

- Nhân cả hai vế của (2.27) với $2(s - s_i)$

$$2(s - s_i)C(s) = 2A_0(s - s_i) + (s - s_i) \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k} + (s - s_i) \sum_{k=1}^n \frac{-A_k}{s + s_k}.$$

- Cho $s \rightarrow s_i$ được

$$A_i = \lim_{s \rightarrow s_i} 2(s - s_i)C(s). \quad (2.28)$$

Tổng kết lại, việc ta có thuật toán tìm lời giải cho bài toán thứ nhất:

- Nếu $T(\omega)$ không phải là hàm chẵn thì kết luận ngay là bài toán không có lời giải.
- Xác định $C(s)$ từ $T(\omega)$ theo (2.26).
- Tìm các điểm cực của $C(s)$. Nếu các điểm cực không phân bố đối xứng qua trục ảo thì kết luận rằng không có hàm truyền đạt $G(s)$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.
- Tính các hằng số A_i theo (2.28), trong đó s_i là những điểm cực nằm bên trái trục ảo.
- Đáp số: $G(s) = A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k}$.

Ví dụ 30: Hãy tìm hàm truyền đạt $G(s)$ dạng thực-hữu tỷ, hợp thức và bền của một hệ tuyến tính để hàm đặc tính của nó có phần thực là

$$T(\omega) = \frac{2 + \omega^2 + \omega^4}{1 + \omega^4}.$$

Theo (2.26) ta có

$$C(s) = T\left(\frac{s}{j}\right) = \frac{2 - s^2 + s^4}{1 + s^4} = 1 + \frac{1 - s^2}{1 + s^4}.$$

Vậy $A_0 = 1$.

Hàm $C(s)$ có bốn điểm cực nằm đối xứng qua trục ảo nên bài toán có lời giải. Với hai điểm cực nằm bên trái trục ảo

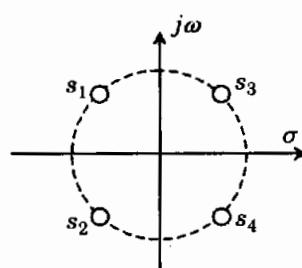
$$s_1 = e^{j\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + j),$$

$$s_2 = e^{j\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - j)$$

ta có

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} 2(s - s_1)C(s) = \frac{1 - s_1^2}{2s_1^3} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow s_2} 2(s - s_2)C(s) = \frac{1 - s_2^2}{2s_2^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Hình 2.44: Minh họa cho ví dụ 30.

Suy ra

$$G(s) = 1 + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{s - e^{\frac{j\pi}{4}}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{s - e^{\frac{j5\pi}{4}}} = \frac{s^2 + 2\sqrt{2}s + 2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}.$$

□

Bài toán thứ hai

Bài toán thứ hai phát biểu như sau: "Cho trước $A(\omega)$. Hãy tìm hàm truyền đạt $G(s)$ dạng thực-hữu tỷ, hợp thức và bền của một hệ tuyến tính sao cho hàm đặc tính tần biên-pha $\tilde{G}(j\omega)$ của nó có phần ảo là $A(\omega)$ ".

Tương tự như ở bài toán thứ nhất, nếu gọi

$$D(s) = \frac{1}{2} [G(s) - G(-s)]$$

thì theo định lý 2.8 sẽ có

$$A(\omega) = \frac{1}{j} D(j\omega) \quad \Rightarrow \quad D(s) = jA\left(\frac{s}{j}\right). \quad (2.29)$$

Giả thiết thêm rằng $G(s)$ chỉ có các điểm cực đơn. Vậy khi phân tích $G(s)$ thành:

$$G(s) = B_0 + s \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{s - s_k},$$

hàm $D(s)$ sẽ có dạng:

$$D(s) = \frac{1}{2} \left[s \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{s - s_k} + s \sum_{k=1}^n \frac{-B_k}{s + s_k} \right].$$

Tương tự như ở bài toán thứ nhất, các hệ số B_i cũng được xác định một cách đơn giản nhờ công thức

$$B_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) \frac{2D(s)}{s}. \quad (2.30)$$

và ta có các bước giải bài toán thứ hai như sau:

- 1) Nếu $A(\omega)$ không phải là hàm lẻ thì kết luận ngay là bài toán không có lời giải.
- 2) Xác định $D(s)$ từ $A(\omega)$ theo (2.29). Nếu các điểm cực của $\frac{D(s)}{s}$ không nằm đối xứng qua trục ảo thì bài toán không có lời giải.
- 3) Tính B_i theo (2.30), trong đó s_i là những điểm cực của $D(s)$ nằm bên trái trục ảo.
- 4) Đáp số: $G(s) = B_0 + s \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{s - s_k}$, với B_0 là một số thực tùy ý.

Ví dụ 31: Hãy tìm hàm truyền đạt $G(s)$ dạng thực-hữu tỷ, hợp thức và bền của một hệ tuyến tính để hàm đặc tính tần của nó có phần ảo là

$$A(\omega) = \frac{-\sqrt{2}\omega^3}{1+\omega^4}.$$

Hàm $A(\omega)$ là hàm lẻ. Với (2.29) có

$$D(s) = \frac{\sqrt{2}s^3}{1+s^4}.$$

Giống như ví dụ 30, ở đây hàm $\frac{D(s)}{s}$ cũng có bốn điểm cực nằm đối xứng qua trục ảo nên bài toán có lời giải. Từ hai điểm cực nằm bên trái trục ảo

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+j), \quad s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-j)$$

ta có

$$B_1 = \frac{1-j}{2j}, \quad B_2 = \frac{1+j}{2j}.$$

Suy ra

$$G(s) = B_0 + \frac{sB_1}{s-s_1} + \frac{sB_2}{s-s_2} = B_0 + \frac{-s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1},$$

trong đó B_0 là một số thực tùy ý. □

Toán tử Hilbert

Lời giải của hai bài toán trên đã ít nhiều sử dụng tới mối quan hệ giữa phần thực $T(\omega)$ và ảo $A(\omega)$ của hàm đặc tính tần $\tilde{G}(j\omega)$. Sau đây ta sẽ làm quen với công thức tổng quát mô tả mối quan hệ đó cho lớp hệ thống tuyến tính có hàm truyền đạt $G(s)$ dạng thực-hữu tỷ, bền và hợp thức thường vẫn được gọi là toán tử Hilbert.

Định lý 2.9 (Toán tử Hilbert): Xét hàm truyền đạt $G(s)$ dạng thực-hữu tỷ, bền và hợp thức của một hệ tuyến tính. Giữa phần thực $T(\omega)$ và phần ảo $A(\omega)$ của hàm đặc tính tần $G(s)|_{s=j\omega} = \tilde{G}(j\omega) = T(\omega) + jA(\omega)$ có mối quan hệ:

$$\text{a)} \quad T(\omega) = T(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\eta)}{\omega - \eta} d\eta. \quad (2.31a)$$

$$\text{b)} \quad A(\omega) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\eta)}{\omega - \eta} d\eta. \quad (2.31b)$$

Chứng minh: Trước hết ta thấy do giả thiết là $G(s)$ hợp thức nên theo định lý 2.6:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tilde{G}(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m < n \\ \frac{b_m}{a_n} & \text{nếu } m = n \end{cases}$$

Điều này nói rằng

$$(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} T(\omega) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m < n \\ \frac{b_m}{a_n} & \text{nếu } m = n \end{cases} \quad (2.32)$$

Bước tiếp theo ta tính tích phân

$$Q = \int_C \frac{G(s)}{s - ja} ds,$$

trong đó C là đường lấy tích phân kín theo chiều kim đồng hồ gồm ba đường con:

- Đường C_1 là nửa đường tròn nằm bên phải trục ảo có tâm là gốc tọa độ và bán kính $r_1 \rightarrow \infty$.
- Đường thứ hai C_2 cũng là nửa đường tròn nằm bên phải trục ảo có tâm là điểm $0 + ja$ và bán kính $r_2 \rightarrow 0$ (hình 2.45).
- Đường thứ ba C_3 là phần trục ảo trừ đoạn nằm trong đường tròn C_2 với $r_2 \rightarrow 0$.

Vì $G(s)$ là hàm bên nên nó là hàm giải tích trong miền kín bao bởi đường lấy tích phân (phần nửa mặt phẳng bên phải trục ảo). Bởi vậy

$$Q = 0.$$

Mặt khác

$$Q = \underbrace{\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{G(s)}{s - ja} ds}_{Q_1} + \underbrace{\lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{G(s)}{s - ja} ds}_{Q_2} + \underbrace{\lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{C_3} \frac{G(s)}{s - ja} ds}_{Q_3}$$

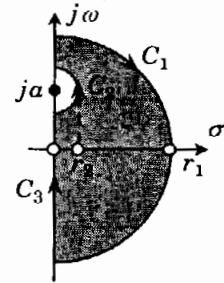
trong đó

$$Q_1 = \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{G(s)}{s - ja} ds = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{1}{s - ja} ds = T(\infty) \cdot (-j\pi).$$

$$Q_2 = \lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{G(s)}{s - ja} ds = \lim_{s \rightarrow ja} G(s) \lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{1}{s - ja} ds = G(ja) \cdot (j\pi).$$

$$Q_3 = \lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{C_3} \frac{G(s)}{s - ja} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{G}(j\omega)}{\omega - a} d\omega.$$

Suy ra



Hình 2.45: Minh họa cho phần chứng minh định lý 2.9.

$$0 = Q = T(\infty) \cdot (-j\pi) + G(j\alpha) \cdot (j\pi) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{G}(j\omega)}{\omega - \alpha} d\omega$$

$$= -j\pi T(\infty) + j\pi [T(\alpha) + jA(\alpha)] + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\omega) + jA(\omega)}{\omega - \alpha} d\omega$$

Cân bằng phần thực, ảo của hai vế rồi viết ω thay cho α cũng như η thay cho ω ta sẽ nhận được điều phải chứng minh:

$$T(\omega) = T(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\eta)}{\omega - \eta} d\eta$$

và $A(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\eta)}{\omega - \eta} d\eta$. □

Chú ý: Ta có thể sử dụng công thức (2.32) để xác định giá trị $T(\infty)$ trong (2.31a). Hơn nữa nếu để ý rằng $T(\omega)$ là hàm chẵn và $A(\omega)$ là hàm lẻ (định lý 2.8) thì hai công thức (2.31a) và (2.31b) của toán tử Hilbert còn có dạng:

$$T(\omega) = T(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta A(\eta)}{\omega^2 - \eta^2} d\eta . \quad (2.33a)$$

$$A(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{T(\eta)}{\omega^2 - \eta^2} d\eta . \quad (2.33b)$$

2.2 Những khâu SISO liên tục cơ bản

Như đã nói tại mục 2.1.6 là việc xây dựng biểu đồ Bode cho hệ tuyến tính SISO có hàm truyền đạt $G(s)$ dạng (2.21a), tức là

$$G(s) = k \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_m s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_n s)}$$

sẽ đơn giản hơn nhiều nếu như ta xây dựng biểu đồ Bode của các khâu thành phần trong nó. Các khâu đó được gọi là *khâu cơ bản*. Chúng bao gồm:

- 1) Khâu quán tính bậc nhất hay còn gọi khâu PT₁: $G(s) = \frac{k}{1 + Ts}$.
- 2) Khâu quán tính-tích phân bậc nhất, hay IT₁: $G(s) = \frac{k}{s(1 + Ts)}$.
- 3) Khâu quán tính-tích phân bậc n , hay IT_n: $G(s) = \frac{k}{s(1 + Ts)^n}$.
- 4) Khâu quán tính bậc hai, hay còn gọi khâu PT₂: $G(s) = \frac{k}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$, $T_1 \neq T_2$.

5) Khâu quán tính bậc n , hay còn gọi là khâu PT _{n} : $G(s) = \frac{k}{(1+Ts)^n}$.

6) Khâu Lead/Lag: $G(s) = \frac{1+T_ls}{1+T_ms}$.

7) Khâu dao động bậc hai: $G(s) = \frac{k}{1+2DTs+T^2s^2}$, $0 < D < 1$.

Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu chi tiết về các khâu cơ bản trên cũng như một số các khâu đặc biệt khác như *khâu trễ*, *khâu pha cực tiểu*, ... trên cơ sở hàm quá độ $h(t)$ và sẽ nghiên cứu mối liên hệ giữa $h(t)$ và hàm truyền đạt $G(s)$ của nó.

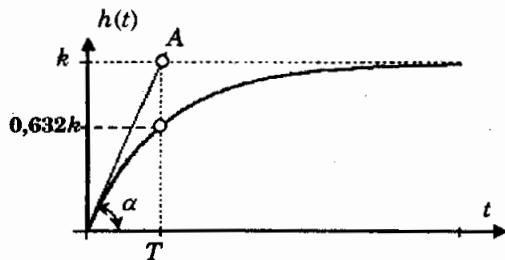
2.2.1 Khâu quán tính bậc nhất PT₁

Từ hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{k}{1+Ts}$$

của khâu quán tính bậc nhất ta sẽ thu được hàm quá độ $h(t)$ bằng cách chuyển ngược ảnh Laplace của nó $H(s) = \frac{G(s)}{s}$ sang miền thời gian:

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t).$$



Hình 2.46: Hàm quá độ của khâu quán tính bậc nhất.

Hình 2.46 là đồ thị biểu diễn $h(t)$. Nếu kẻ tiếp tuyến với $h(t)$ tại điểm 0 và gọi góc của đường tiếp tuyến đó là α thì

$$\tan \alpha = \frac{dh(+0)}{dt} = \frac{k}{T}. \quad (2.34a)$$

Ngoài ra, khi $t \rightarrow \infty$ thì (hình 2.46)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = k, \quad (2.34b)$$

Bởi vậy ta có thể xác định tham số T cho hàm truyền đạt $G(s)$ của khâu quán tính bậc nhất từ đồ thị hàm quá độ $h(t)$ của nó như sau:

a) Kẻ đường tiếp tuyến với $h(t)$ tại $t=0$.

b) Hoành độ của điểm A trên đường tiếp tuyến mà tại đó nó có tung độ bằng k sẽ chính là tham số T cần tìm.

Biểu đồ Bode của khâu quán tính bậc nhất đã cho trong ví dụ 24. Đồ thị $L(\omega)$ của nó có tần số gãy $\omega_G = \frac{1}{T}$. Đường tần biên-pha của khâu PT₁ có dạng như ở hình 2.31.

Chú ý rằng kết quả hai công thức (2.34a) và (2.34b) cũng có thể được tính trực tiếp từ hàm truyền đạt $G(s)$ với sự trợ giúp của tính chất 7), 9) và 10) của toán tử Laplace đã được trình bày ở mục 1.3.1, chương 1, như sau:

$$\tan \alpha = \frac{dh(+0)}{dt} = \lim_{s \rightarrow \infty} s[H(s) - h(+0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{ks}{1+Ts} = \frac{k}{T}$$

và $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{1+Ts} = k.$

Ngoài ra, tại thời điểm T còn có:

$$h(T) = k(1-e^{-1}) \approx 0,632k$$

nêu trong nhiều trường hợp, để tìm T người ta đã tìm điểm trên $h(t)$ mà tại đó nó có giá trị khoảng bằng 0,632 giá trị cực đại của nó (hình 2.46).

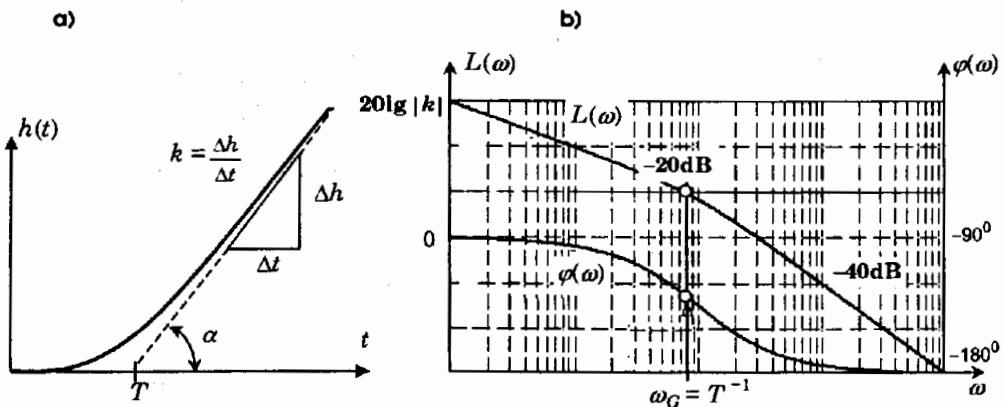
2.2.2 Khâu quát tính - tích phân bậc nhất IT_1

Từ hàm truyền đạt của khâu IT_1 ta có

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{k}{s^2(1+Ts)} = k \left[\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+\frac{1}{T}} \right].$$

Vậy hàm quá độ $h(t)$ là (hình 2.47a)

$$h(t) = k \left[t - T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right].$$



Hình 2.47: Hàm quá độ và biểu đồ Bode của khâu IT_1 .

- a) Hàm quá độ.
- b) Biểu đồ Bode

Khi $t \rightarrow \infty$ thì do $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{-t}{T}} = 0$ nên đồ thị đường $h(t)$ sẽ tiến tới đường tiệm cận

$$h_{tc}(t) = k(t - T).$$

Đường tiệm cận này cắt trục hoành tại điểm $t = T$ cũng như có góc nghiêng α thỏa mãn $\tan \alpha = k$.

Bởi vậy nếu có bài toán đặt ra là phải xác định tham số k, T cho hàm truyền đạt $G(s)$ từ đồ thị đường $h(t)$ ta có thể làm như sau:

- a) Kẻ đường tiệm cận $h_{tc}(t)$ với $h(t)$ tại $t = \infty$.
- b) Xác định T là giao điểm của $h_{tc}(t)$ với trục hoành.
- c) Xác định góc nghiêng α của $h_{tc}(t)$ với trục hoành rồi tính $k = \tan \alpha$.

Đường đặc tính tần biên-pha của khâu IT_1 có dạng như ở hình 2.32 của ví dụ 19. Hình 2.47b) là đồ thị Bode của khâu IT_1 .

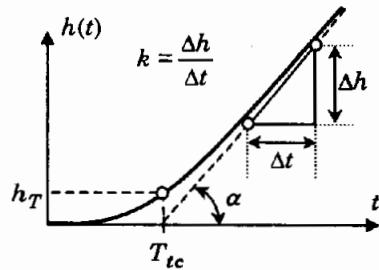
2.2.3 Khâu quan tính - tích phân bậc n (IT_n)

Từ hàm truyền đạt của khâu IT_n

$$G(s) = \frac{k}{s(1+Ts)^n}$$

ta có ảnh Laplace hàm quá độ $h(t)$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{G(s)}{s} = \frac{k}{s^2(1+Ts)^n} \\ &= k \left[\frac{1}{s^2} - \frac{nT}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{(n+1-i)T^2}{(1+Ts)^i} \right]. \end{aligned}$$



Suy ra (hình 2.48):

$$h(t) = k \cdot \left[t - nT + \sum_{i=1}^n \frac{(n+1-i)t^{i-1} e^{\frac{-t}{T}}}{T^{i-2}(i-1)!} \right].$$

Khi $t \rightarrow \infty$ có $\lim_{t \rightarrow \infty} t^i e^{\frac{-t}{T}} = 0$ với $i = 0, 1, \dots, n$. Bởi vậy $h(t)$ có đường tiệm cận:

$$h_{tc}(t) = k(t - nT).$$

Giống như ở khâu IT_1 , đường tiệm cận này cũng có góc nghiêng α thỏa mãn

$$\tan \alpha = k.$$

Nhưng khác với khâu IT_1 , đường tiệm cận $h_{tc}(t)$ của khâu IT_n cắt trục hoành tại điểm $t=nT$. Do đó nếu n là biết trước thì hai tham số k và T còn lại của hàm truyền đạt $G(s)$ sẽ được xác định từ đường đồ thị $h(t)$ qua các bước sau:

- Dựng đường tiệm cận $h_{tc}(t)$ với $h(t)$.
- Xác định góc nghiêng α của $h_{tc}(t)$ và tính $k = \tan \alpha$.
- Xác định giao điểm T_{tc} của $h_{tc}(t)$ với trục hoành và tính $T = \frac{T_{tc}}{n}$.

Cho trường hợp n không biết trước thì ta có thể xác định bậc n từ đồ thị hàm quá độ $h(t)$ mà cụ thể là từ giao điểm T_{tc} và giá trị $h_T = h(T_{tc})$ của nó tại điểm đó (hình 2.48). Chi tiết thêm về thuật toán tìm n đọc giả sẽ tìm thấy trong tài liệu [11] cũng của tác giả.

2.2.4 Khâu quan tính bậc 2 PT₂

Khâu quan tính bậc 2 được định nghĩa là khâu cơ bản có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)}, T_1 \neq T_2.$$

Từ hàm truyền đạt đó ta có ảnh Laplace của hàm quá độ:

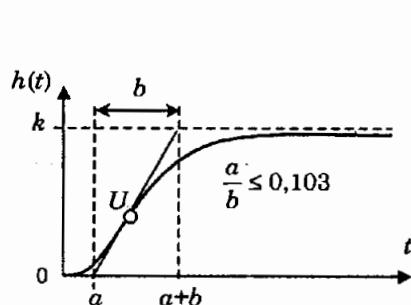
$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{k}{s(1+T_1s)(1+T_2s)} = k \cdot \left[\frac{1}{s} - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_2}} \right].$$

Suy ra

$$h(t) = k \left[1 - \frac{T_1 e^{\frac{-t}{T_1}} - T_2 e^{\frac{-t}{T_2}}}{T_1 - T_2} \right] 1(t)$$

Đồ thị của $h(t)$ cho trong hình 2.49. So sánh với $h(t)$ của khâu quan tính bậc nhất PT_1 , thì đồ thị $h(t)$ của khâu PT_2 có điểm khác là tại $t=0$ nó có đạo hàm cũng bằng 0. Điều này là phù hợp với nội dung định lý 2.3 vì bậc n của đa thức mẫu số của khâu PT_2 bằng 2 còn bậc m của đa thức tử số bằng 0, tức là $n-m=2 > 1$.

Khi $t \rightarrow \infty$ thì $h(t)$ tiến tới k , tức là $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = k$. Điều này ta có thể suy ra ngay từ hàm truyền đạt, vì



Hình 2.49: Đồ thị hàm quá độ khâu PT_2 .

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)} = k.\end{aligned}$$

Như vậy khi $t \rightarrow \infty$ thì $h(t)$ cũng có đạo hàm bằng 0. Do tại $t=0$ và $t \rightarrow \infty$ đồ thị $h(t)$ cùng có đạo hàm 0 nên nó phải có một điểm uốn. Ký hiệu U là điểm uốn, ta kẻ đường tiếp tuyến $h_{tt}(t)$ của $h(t)$ tại U . Gọi a là hoành độ giao điểm của $h_{tt}(t)$ với trục thời gian (hình 2.49) và b là khoảng thời gian để đường tiếp tuyến đó đi được từ 0 tới k thì [11]:

$$\frac{a}{b} = x^{\frac{1}{1-x}} \frac{x \ln x + x^2 - 1}{x-1} - 1 \quad \text{với} \quad x = \frac{T_2}{T_1}.$$

Từ đây ta suy ra được

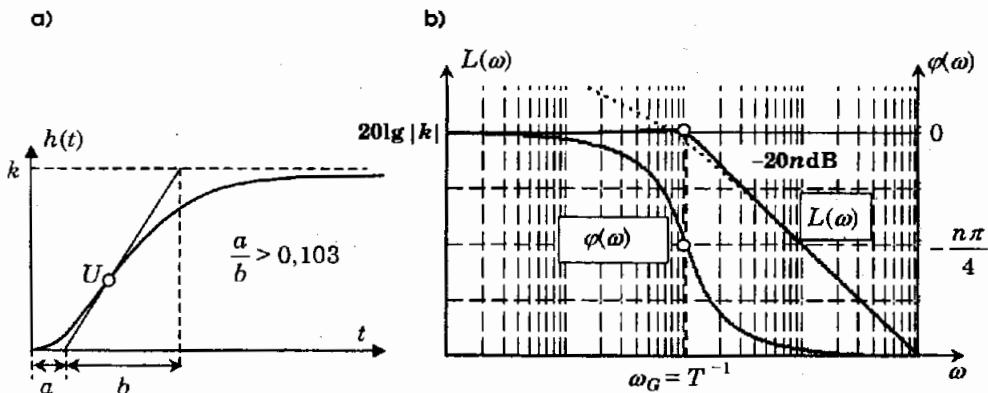
$$\frac{a}{b} \leq \sup_x \left[x^{\frac{1}{1-x}} \frac{x \ln x + x^2 - 1}{x-1} - 1 \right] \approx 0,103.$$

Bất đẳng thức trên là điều kiện để từ đường đồ thị $h(t)$ xác định được đó có phải là đồ thị hàm quá độ của khâu quán tính bậc 2 hay không?. Thuật toán xác định tham số hàm truyền đạt khâu PT₂ từ đường quá độ $h(t)$ của nó có thể tìm thấy trong tài liệu [11].

2.2.5 Khâu quán tính bậc n PT_n

Khâu quán tính bậc n PT_n có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{k}{(1+Ts)^n}.$$



Hình 2.50: Hàm quá độ và biểu đồ Bode của khâu PT_n.

a) Hàm quá độ b) Biểu đồ Bode

Như vậy thì hàm quá độ $h(t)$ của khâu PT_n có ánh Laplace

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{k}{s(1+Ts)^n}$$

và theo kết quả của ví dụ 19, chương 1, $h(t)$ sẽ có phương trình

$$h(t) = \left[k - e^{-\frac{t}{T}} \sum_{i=1}^n \frac{A_i t^{i-1}}{(i-1)!} \right] 1(t) \quad \text{với} \quad A_i = \frac{k}{T^{i-1}}.$$

Hình 2.50a) là đồ thị biểu diễn hàm quá độ của khâu PT_n. Thoạt mới nhìn, dạng đồ thị $h(t)$ của khâu PT_n cũng giống như của khâu PT₂, song ở đây có một sự khác biệt là tỷ số $\frac{a}{b}$ của PT_n phải là một số lớn hơn 0,103 trong khi ở PT₂ là điều ngược lại $\frac{a}{b} \leq 0,103$, với a là hoành độ giao điểm của tiếp tuyến của $h(t)$ tại điểm uốn và trục thời gian t , b là khoảng thời gian để đường tiếp tuyến đó đi được từ 0 tới k (xem thêm tài liệu [11]). Đó cũng là điều kiện để nhận biết được từ dạng đường đồ thị của $h(t)$ xem nó là hàm quá độ của khâu PT_n hay của PT₂.

Đồ thị Bode của khâu PT_n được mô tả ở hình 2.50b). Nó có điểm tần số gãy $\omega_G = \frac{1}{T}$.

Trước tần số gãy ω_G , $L(\omega)$ có dạng song song với trục hoành ứng với thành phần khuếch đại k . Sau tần số ω_G thì $L(\omega)$ giảm về 0 với vận tốc khá nhanh là -20dB/dec. Điều đó chỉ rằng khâu PT_n sẽ hầu như không có phản ứng gì với những tín hiệu đầu vào $u(t)$ có tần số rất cao (cao hơn nhiều so với ω_G). Nói cách khác nó chính là bộ lọc tần số cao.

Những đọc giả quan tâm tới thuật toán xác định tham số hàm truyền đạt khâu PT_n từ đồ thị hàm quá độ $h(t)$ sẽ tìm thấy nó trong [11].

2.2.6 Khâu Lead / Lag

Khâu Lead và khâu Lag đều là những hệ có chung hàm truyền đạt dạng

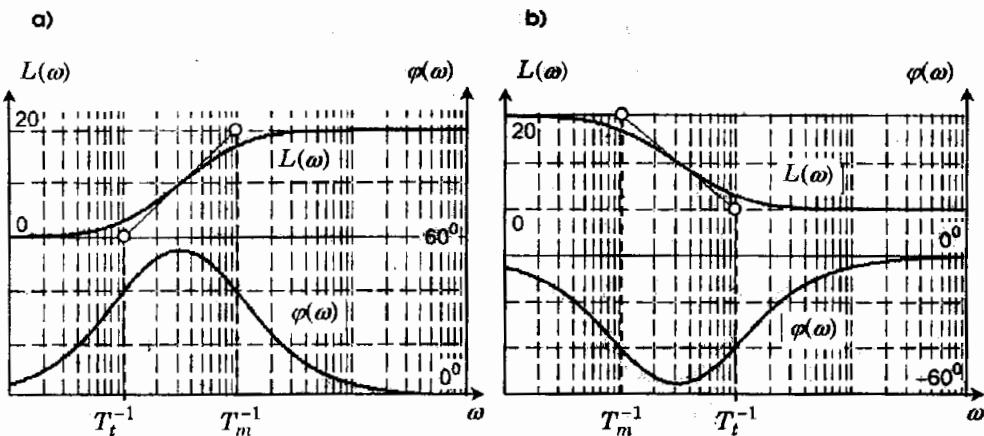
$$G(s) = \frac{1 + T_t s}{1 + T_m s},$$

trong đó:

- a) nếu $T_t > T_m$ thì ta nói đó là khâu Lead (dẫn qua),
- b) nếu $T_t < T_m$ thì ta nói đó là khâu Lag (cắt bớt).

Tại sao có cùng một dạng hàm truyền đạt nhưng hai khâu đó lại có hai tên gọi khác nhau?. Câu trả lời nằm ở hình 2.51 về biểu đồ Bode của chúng. Cả hai khâu đều có tần số gãy là $\omega_{G1} = T_t^{-1}$ và $\omega_{G2} = T_m^{-1}$. Song nếu $T_t > T_m$ thì những thành phần có tần số cao.

trong tín hiệu đầu vào sẽ được ưu tiên cho đi qua (dẫn tần số cao), ngược lại khi $T_t < T_m$ thì khâu sẽ ưu tiên những thành phần có tần số thấp (cắt bớt tần số cao).



Hình 2.51: Biểu đồ Bode của các khâu Lead và Lag.

a) Biểu đồ Bode của khâu Lead

b) Biểu đồ Bode của khâu Lag

Giả thiết rằng $T_m > 0$. Vậy thì hàm truyền đạt $G(s)$ của cả hai khâu Lead và Lag là những hàm bền. Do đó, theo nội dung của định lý 2.5 (mục 2.1.5), khi chúng được kích thích từ trạng thái 0 bằng tín hiệu điều hòa $u(t)$ có tần số ω ở đầu vào $u(t)=e^{j\omega t}$ thì sau một khoảng thời gian t đủ lớn ($t \rightarrow \infty$) đáp ứng $y(t)$ của nó có dạng:

$$y(t) = |\tilde{G}(j\omega)| e^{j(\omega t + \varphi)},$$

chẳng hạn như:

a) Với $u(t) = \cos(\omega t)$ có $y(t) = |\tilde{G}(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi)$ khi $t \rightarrow \infty$.

b) Với $u(t) = \sin(\omega t)$ có $y(t) = |\tilde{G}(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)$ khi $t \rightarrow \infty$.

Ở khâu Lead thì góc lệch pha φ giữa tín hiệu vào $u(t)$ và ra $y(t)$ là một số dương còn với khâu Lag thì φ là số âm (hình 2.51).

Cũng từ hàm truyền đạt $G(s)$ ta có ảnh Laplace của hàm quá độ

$$H(s) = \frac{1 + T_t s}{s(1 + T_m s)} = \frac{1}{s} - \frac{T_m - T_t}{s(1 + T_m s)}.$$

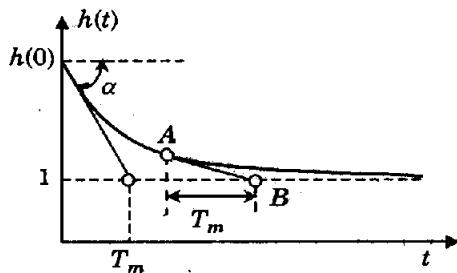
Suy ra

$$h(t) = \left(1 - \frac{T_m - T_t}{T_m} e^{-\frac{t}{T_m}}\right) 1(t).$$

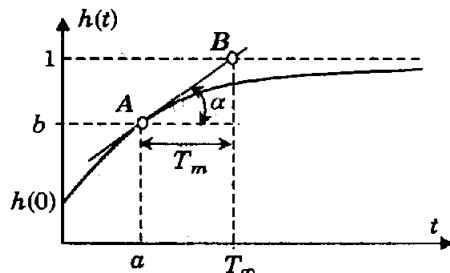
Như vậy, không giống như hàm quá độ của những khâu cơ bản khác mà ta đã xét, hàm $h(t)$ của khâu Lead/Lag không bắt đầu từ 0 mà từ điểm khác 0 (hình 2.52)

$$h(0) = \frac{T_t}{T_m} \neq 0.$$

a)



b)



Hình 2.52: Hàm quá độ của các khâu Lead và Lag.

a) Hàm quá độ của khâu Lead

b) Hàm quá độ của khâu Lag

Lấy một điểm A có tọa độ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ bất kỳ trên đồ thị $h(t)$ rồi dựng đường tiếp tuyến $h_{tt}(t)$ với $h(t)$ tại đó. Đường tiếp tuyến này sẽ có phương trình

$$h_{tt}(t) = \tan \alpha (t-a) + b,$$

trong đó

$$\tan \alpha = \frac{dh(a)}{dt} = \frac{T_m - T_t}{T_m^2} e^{\frac{-a}{T_m}}.$$

Gọi B là giao điểm của tiếp tuyến $h_{tt}(t)$ với đường tiệm cận

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + T_t s}{1 + T_m s} = 1$$

và T_∞ là hoành độ của B thì

$$h_{tt}(T_\infty) = \tan \alpha (T_\infty - a) + b = 1$$

Do đó ta được

$$T_\infty - a = \frac{1 - b}{\tan \alpha} = \frac{T_m^2}{T_m - T_t} e^{\frac{a}{T_m}} \underbrace{\frac{T_m - T_t}{T_m}}_{1-b} e^{\frac{-a}{T_m}} = T_m$$

hay T_m chính là khoảng thời gian cần thiết để $h_{tt}(t)$ di chuyển từ điểm A tới điểm B.

Dựa vào kết quả nhận được trên ta có thể xác định các tham số T_m , T , của mô hình Lead/Lag từ đồ thị hàm quá độ $h(t)$ của nó như sau:

- Lấy một điểm A bất kỳ trên $h(t)$ và kẻ đường tiếp tuyến $h_{tt}(t)$ với $h(t)$ tại A , sau đó xác định B là điểm trên $h_{tt}(t)$ có tung độ bằng 1. Chiều đoạn \overline{AB} lên trục thời gian (trục hoành) để có T_m .
- Tính $T_t = h(0)T_m$.

2.2.7 Khâu dao động bậc 2

Khâu dao động bậc 2 là hệ SISO liên tục cơ bản có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{k}{1 + 2DTs + T^2 s^2}, \quad 0 < D < 1.$$

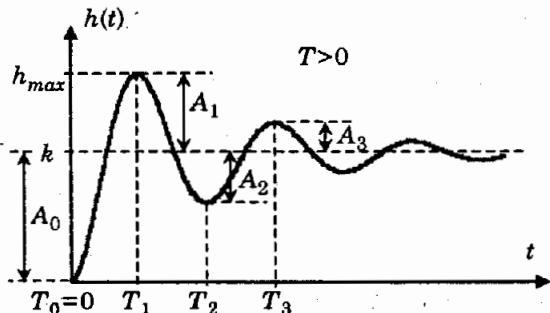
Điều kiện $0 < D < 1$ là cần thiết, vì nếu $D > 1$, $G(s)$ sẽ có hai điểm cực thực và khi đó lại chính là hàm truyền đạt của khâu PT₂ mà ta đã xét ở mục 2.2.4.

Khâu dao động bậc 2 có biểu đồ Bode dạng như hình 2.40 mô tả. Từ ảnh Laplace

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{k}{s(1 + 2DTs + T^2 s^2)} = k \left[\frac{1}{s} - \frac{(s + \frac{D}{T}) + \frac{\sqrt{1-D^2}}{T} \cdot \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}}{(s + \frac{D}{T})^2 + \frac{1-D^2}{T^2}} \right]$$

của hàm quá độ ta có phương trình cho $h(t)$ – hình 2.53:

$$\begin{aligned} h(t) &= k \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-D^2}} e^{\frac{-D}{T}t} \left(\sqrt{1-D^2} \cos \omega t + D \sin \omega t \right) \right] \\ &= k \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-D^2}} e^{\frac{-D}{T}t} \sin(\omega t + \varphi) \right] \quad \text{với} \quad D = \cos \varphi \quad \text{và} \quad \omega = \frac{\sqrt{1-D^2}}{T}. \end{aligned}$$



Hình 2.53: Hàm quá độ khâu dao động bậc 2.

Như vậy, hàm $h(t)$ có dạng dao động. Dao động đó sẽ tắt dần nếu $T > 0$. Ngoài ra đồ thị của $h(t)$ còn có vô số điểm cực trị phân bố xen kẽ, cách đều nhau, các điểm cực đại nằm bên trên và các giá trị cực tiểu nằm bên dưới đường thẳng

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = k.$$

Để xác định những điểm cực trị của $h(t)$, ta tìm những điểm thời gian mà tại đó đạo hàm của $h(t)$ bị triệt tiêu và có được:

$$T_i = \frac{i\pi T}{\sqrt{1-D^2}}, \quad i = 0, 1, \dots . \quad (2.35)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} h(T_i) &= k - \frac{k}{\sqrt{1-D^2}} e^{\frac{-Di\pi}{\sqrt{1-D^2}}} \sin(i\pi + \varphi) \\ \Rightarrow A_i &= |h(T_i) - k| = \left| \frac{k}{\sqrt{1-D^2}} e^{\frac{-Di\pi}{\sqrt{1-D^2}}} \sin \varphi \right| \\ \Rightarrow \left| \frac{A_{i+1}}{A_i} \right| &= \exp \left(\frac{-\pi D}{\sqrt{1-D^2}} \right) \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{\ln^2 \left| \frac{A_{i+1}}{A_i} \right|}}} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Hai công thức (2.35) và (2.36) là công cụ giúp cho ta xác định ba tham số k , D và T của hàm truyền đạt $G(s)$ khâu dao động bậc 2 từ đường đồ thị hàm quá độ $h(t)$ của nó với những bước như sau:

- Xác định $k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$.
- Đo A_i và T_i rồi tính D theo (2.36). Chỉ cần đo A_1 và T_1 là đủ, vì $A_0 = k$.
- Tính T từ D và T_i theo (2.35).

2.2.8 Hệ pha cực tiểu

Cho hệ tuyến tính có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}, \quad (2.37)$$

thực-hữu tỷ, hợp thức chẵn và bền. Nói cách khác, các hệ số b_0, b_1, \dots, b_m và a_0, a_1, \dots, a_n của $G(s)$ là những số thực, bậc đa thức tử số nhỏ hơn bậc đa thức mẫu số ($m < n$) và các điểm cực đều nằm bên trái trực ảo.

Do có giả thiết rằng $G(s)$ là hàm bền nên hàm đặc tính tần $\tilde{G}(j\omega)$ của nó cũng chính là ảnh Fourier $G(j\omega)$ của hàm trọng lượng $g(t)$ – mục 1.3.4, chương 1, tức là

$$G(j\omega) = \tilde{G}(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}.$$

Theo định lý 2.5, nếu kích thích hệ bằng tín hiệu điều hòa $u(t) = e^{j\omega t}$ thì khi $t \rightarrow \infty$ đáp ứng của hệ sẽ có dạng

$$y(t) = |G(j\omega)| e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Định nghĩa 2.2: Trong số tất cả các hệ có cùng biên độ $|G(j\omega)|$ của hàm đặc tính tần thì hệ có góc sai lệch pha $\varphi(\omega)$ nhỏ nhất được gọi là *hệ pha cực tiểu*.

Xét một hệ pha cực tiểu có hàm truyền đạt (2.37). Chuyển (2.37) về dạng

$$G(s) = k \frac{(1+T_1's)(1+T_2's) \cdots (1+T_m's)}{(1+T_1s)(1+T_2s) \cdots (1+T_ns)}.$$

Như vậy hệ có các điểm cực $-\frac{1}{T_1}, -\frac{1}{T_2}, \dots, -\frac{1}{T_n}$ và theo giả thiết về tính bền của $G(s)$, tất cả các điểm cực này phải nằm bên trái trục ảo. Do đó các hằng số thời gian ở đa thức mẫu số T_1, T_2, \dots, T_n , phải có phần thực dương.

Gọi nghiệm của đa thức tử số là *điểm không*. Khi đó các điểm không của hệ đã cho sẽ là:

$$-\frac{1}{T_1}, -\frac{1}{T_2}, \dots, -\frac{1}{T_m}.$$

Giả thiết rằng trong số m hằng số thời gian tử số có T_1' là số âm, còn lại các hằng số khác T_2', \dots, T_m' là số dương. Viết lại $G(s)$

$$G(s) = \frac{k(1+T_1's)^2(1+T_2's) \cdots (1+T_m's)}{(1-T_1's)(1+T_1s)(1+T_2s) \cdots (1+T_ns)} \cdot \frac{1-T_1's}{1+T_1's}.$$

sẽ thấy $G_0(s)$ cũng là hàm hợp thức chẵn và bền.

Từ đây ta có góc pha của hệ

$$\varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \varphi_a(\omega)$$

với

$$\varphi_0(\omega) = \arg G_0(j\omega) \quad \text{và} \quad \varphi_a(\omega) = \arg G_a(j\omega) = -2 \arctan(\omega T_1').$$

Nhưng vì

$$|G_a(j\omega)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |G(j\omega)| = |G_0(j\omega)|$$

nên với tính pha cực tiểu của $G(s)$ ta phải có

$$\varphi(\omega) < \varphi_0(\omega)$$

hay

$$\varphi_a(\omega) < 0.$$

Song điều này không thể xảy ra khi $T_1' < 0$. Vậy điều giả sử là sai. Ta đi đến kết luận:

Định lý 2.10: Hệ có hàm truyền đạt $G(s)$ thực-hữu tỷ, hợp thức chẵn và bền sẽ là hệ pha cực tiểu khi và chỉ khi tất cả các điểm không của nó nằm bên trái trực ảo.

2.2.9 Khâu giữ trễ

Khâu giữ trễ là một hệ cơ bản có quan hệ giữa tín hiệu vào $u(t)$ và ra $y(t)$ như sau:

$$y(t) = u(t - \tau) \quad (2.38)$$

trong đó τ được gọi là *thời gian trễ*. Trên cơ sở mỗi quan hệ đó ta có thể kiểm tra ngay được rằng khâu giữ trễ là một khâu tuyến tính. Cũng từ quan hệ (2.38), khâu giữ trễ có đáp ứng giống như kích thích nhưng được giữ chậm lại sau một khoảng thời gian trễ τ .

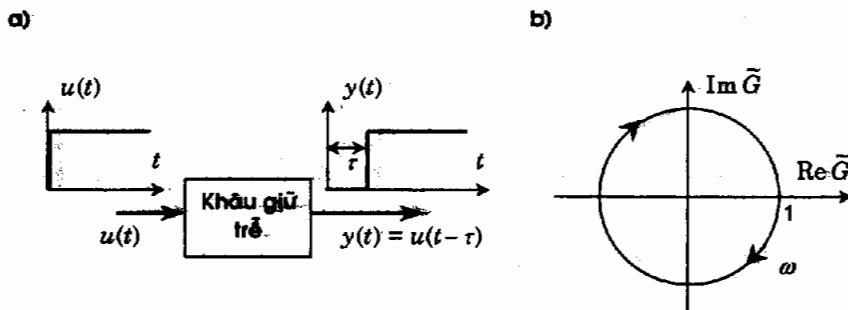
Nếu gọi $U(s)$ là ảnh Laplace của tín hiệu vào và $Y(s)$ là ảnh của tín hiệu ra thì theo tính chất thứ 3 của toán tử Laplace về phép dịch trực (mục 1.3.1, chương 1) hàm truyền đạt của khâu giữ trễ sẽ là:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-s\tau}. \quad (2.39)$$

Khâu giữ trễ có hàm đặc tính tần:

$$\tilde{G}(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)$$

do đó đường đặc tính tần biên pha của nó chính là đường tròn đơn vị có chiều cùng với chiều kim đồng hồ (hình 2.54).



Hình 2.54: Khâu giữ trễ hay còn gọi là khâu chậm trễ và đường đặc tính tần biên-pha của nó.

Hàm truyền đạt dạng (2.39) mặc dù là chuẩn xác, song không được thông dụng chỉ vì những công cụ phân tích, khảo sát hệ SISO tuyến tính lại thường tập trung cho hàm truyền đạt thực-hữu tỷ. Bởi vậy người ta hay thay (2.39) bằng một hàm thực-hữu tỷ xấp xỉ khác. Ý tưởng cho sự thay thế này là công thức quen biết trong giải tích cổ điển:

$$e^{-s\tau} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s\tau}{k}\right)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s\tau)^k}{k!}. \quad (2.40)$$

- 1) Xuất phát từ sự xấp xỉ thứ nhất ta thay khâu giữ trễ bằng n khâu quán tính bậc nhất nối tiếp (khâu PT_n):

$$G(s) = e^{-s\tau} \approx \frac{1}{(1+Ts)^n} \quad \text{trong đó } T = \frac{\tau}{n}. \quad (2.41)$$

- 2) Từ sự xấp xỉ thứ hai ta có công thức thay thế khâu giữ trễ là hàm truyền đạt thực-hữu có bậc tử số là m và mẫu số là n :

$$G(s) = e^{-s\tau} \approx \frac{1 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \dots + a_n s^n}, \quad (2.42)$$

sao cho nếu phân tích (2.42) thành chuỗi Taylor tại điểm $s=0$ thì $m+n$ phần tử đầu tiên của nó trùng với $m+n$ phần tử đầu tiên của chuỗi trong (2.40). Hình thức xấp xỉ này có tên gọi là *công thức xấp xỉ Padé*.

Ví dụ 32: Công thức xấp xỉ hàm truyền đạt của khâu giữ trễ $G(s)=e^{-s\tau}$ qua khâu PT_n bậc 5 là:

$$G(s) = e^{-s\tau} \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{s\tau}{5}\right)^5}$$

và khâu PT_n bậc 9 là

$$G(s) = e^{-s\tau} \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{s\tau}{9}\right)^9}$$

Ví dụ 33: Công thức xấp xỉ hàm truyền đạt của khâu giữ trễ $G(s)=e^{-s\tau}$ theo Padé với $m=n=2$ là:

$$G(s) = e^{-s\tau} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}s\tau + \frac{1}{12}(s\tau)^2}{1 + \frac{1}{2}s\tau + \frac{1}{12}(s\tau)^2}$$

2.3 Mô hình trạng thái cho hệ MIMO liên tục

2.3.1 Khái niệm phương trình trạng thái

Sau khi đã làm quen với những phương pháp mô tả một hệ thống SISO tuyến tính, liên tục thông qua hàm truyền đạt, hàm quá độ, hàm đặc tính tần, biểu đồ Bode... trong các mục 2.1 và 2.2 mà ở đó ta phải sử dụng nhiều đến kiến thức về hàm phức, sau đây ta sẽ tiếp cận tới một phương pháp mô tả khác là phương pháp *không gian trạng thái*.

Mặc dù tiêu đề của mục 2.3 ghi rằng "... cho hệ MIMO", song do về thực chất, hệ SISO chỉ là một trường hợp riêng của hệ MIMO nên tất nhiên phương pháp không gian trạng thái này cũng áp dụng được cho cả hệ SISO.

Điều khác biệt của phương pháp không gian trạng thái là ở đây ta sẽ sử dụng nhiều kiến thức về đại số tuyến tính (thay cho hàm phức) và khảo sát được không chỉ riêng quan hệ giữa các tín hiệu vào $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$, ra $y_1(t), y_2(t), \dots, y_s(t)$ mà cả quan hệ giữa tín hiệu vào với những trạng thái bên trong của hệ thống. Các biến trạng thái của hệ thống sẽ được ta ký hiệu thống nhất là $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ hay dưới dạng vector:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad - \text{xem lại hình 2.2.} \quad (2.43)$$

Nhưng trạng thái của hệ thống là gì và tại sao ta phải quan tâm. Hãy ví dụ về điều khiển động cơ. Bên cạnh tín hiệu ra của động cơ là tốc độ quay còn có nhiều những thông số thay đổi khác của động cơ cần phải được quan tâm trong khi thiết kế bộ điều khiển như gia tốc động cơ, sự tổn hao năng lượng ..., hoặc như điều khiển cần cầu thì bên cạnh quãng đường mà hàng được cầu đã di được ta còn phải quan tâm tới tốc độ vận chuyển, độ lắc của hàng trong quá trình vận chuyển

Nếu khái niệm trạng thái hệ thống được miêu tả như vậy thì có sự khác biệt gì giữa trạng thái với tín hiệu đầu ra và tại sao không xem luôn trạng thái như những tín hiệu ra được bổ sung thêm. Câu trả lời là khái niệm biến trạng thái phải được hiểu rộng hơn khái niệm tín hiệu ra. Nếu đã là tín hiệu ra thì người ta phải trực tiếp đo được nó (nhờ các bộ cảm biến) còn ở biến trạng thái thì không như vậy. Có thể người ta chỉ xác định được một số biến trạng thái thông qua các tín hiệu do được khác.

Quay lại ký hiệu (2.43) về vector trạng thái. Tại một thời điểm t_0 cố định, vector trạng thái $\underline{x}(t_0)$ sẽ có các phần tử $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ là những số thực, bởi vậy $\underline{x}(t_0)$ cũng là một phần tử thuộc không gian Euclid \mathbb{R}^n quen thuộc. Khi cho t_0 chạy từ 0 đến ∞ , điểm $\underline{x}(t_0)$ sẽ vẽ lên một đường cong phụ thuộc tham số trong \mathbb{R}^n . Đường cong này phải có chiều chỉ chiều tăng theo t và có tên gọi là *quỹ đạo trạng thái*. Tập hợp của tất cả các quỹ đạo trạng thái của hệ thống được gọi là *không gian trạng thái*. Vì quỹ đạo trạng thái

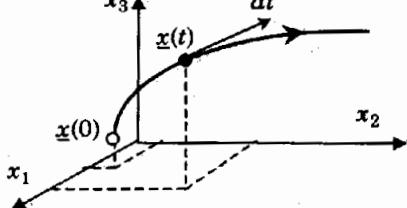
là tập điểm trong \mathbb{R}^n nên tên gọi "không gian" là có nghĩa (không chỉ là một tập hợp bình thường).

Hình 2.55 mô tả một quỹ đạo trạng thái cho một hệ thống có ba biến trạng thái.

Ví dụ 34: Xét một hệ thống tuyến tính SISO có một tín hiệu vào là $u(t)$ và một tín hiệu ra $y(t)$. Giả sử hệ được mô tả bởi phương trình vi phân giữa tín hiệu vào và ra như sau:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t).$$

$$\frac{dx(t)}{dt}$$



Hình 2.55: Quỹ đạo trạng thái.

(2.44)

Nếu như rằng bên cạnh tín hiệu ra $y(t)$, bài toán thiết kế điều khiển của ta còn cần phải để ý đến những sự thay đổi của $y(t)$ như $\frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$ và nhất là sự ảnh hưởng của các giá trị ban đầu của chúng tới đáp ứng $y(t)$ của hệ thì các mô hình đã biết như hàm truyền đạt, hàm quá độ ... không còn được phù hợp. Ta cần tới một mô hình mô tả được không riêng quan hệ vào/ra mà cả những sự thay đổi đó của trạng thái.

Ký hiệu các biến trạng thái là

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad \dots, \quad x_n(t) = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$$

thì

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \quad (2.45a)$$

và cùng với (2.44) ta có thêm

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{d^n y}{dt^n} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u. \quad (2.45b)$$

Viết chung (2.45a) và (2.45b) lại với nhau dưới dạng ma trận được

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

và

$$y(t) = x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Hệ phương trình trên sẽ được viết gọn lại thành *phương trình trạng thái* như sau

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\underline{x} = A\underline{x} + Bu \\ y = C\underline{x} + Du \end{cases} \quad (2.46)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, & \frac{d}{dt}\underline{x} &= \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, & A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & C &= (1 \ 0 \ \cdots \ 0), & D &= 0. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 35: Cho hệ tuyến tính SISO có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} + b_n = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

với $U(s)$ là ảnh Laplace của tín hiệu vào $u(t)$ và $Y(s)$ là ảnh của tín hiệu ra $y(t)$. Ký hiệu

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$$

là đa thức mẫu số thì hàm truyền trên viết lại được thành

$$Y(s) = b_{n-1} \frac{s^{n-1}}{A(s)} U(s) + \cdots + b_1 \frac{s}{A(s)} U(s) + b_0 \frac{1}{A(s)} U(s) + b_n U(s).$$

Đặt các biến trạng thái

$$X_1(s) = \frac{1}{A(s)} U(s), \quad X_2(s) = \frac{s}{A(s)} U(s), \quad \cdots, \quad X_n(s) = \frac{s^{n-1}}{A(s)} U(s)$$

sẽ có

$$sX_1(s) = X_2(s) \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = x_2.$$

$$sX_2(s) = X_3(s) \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = x_3.$$

⋮

$$sX_{n-1}(s) = X_n(s) \Rightarrow \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n.$$

và

$$\frac{dx_n}{dt} + a_{n-1}x_n + \cdots + a_1x_2 + a_0x_1 = u$$

$$\Rightarrow \frac{dx_n}{dt} = a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + u.$$

Viết chung lại dưới dạng ma trận ta được phương trình trạng thái của hệ:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}}_{\frac{d}{dt}\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{(b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{n-1})}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{b_n}_{D} u$$

hay gọn hơn là

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\underline{x} = A\underline{x} + Bu \\ y = C\underline{x} + Du \end{cases}$$

□

Một cách tổng quát, sau khi đưa thêm n biến trạng thái $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ vào một hệ tuyến tính MIMO có r tín hiệu vào $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$, và s tín hiệu ra $y_1(t), y_2(t), \dots, y_s(t)$, thì bao giờ hệ cũng mô tả được bởi phương trình trạng thái dạng:

1) tham số hằng

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\underline{x} = A\underline{x} + Bu \\ y = C\underline{x} + Du \end{cases} \quad (A, B, C, D \text{ là ma trận có phần tử là hằng số}),$$

2) hoặc tham số phụ thuộc t

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\underline{x} = A(t)\underline{x} + B(t)u \\ y = C(t)\underline{x} + D(t)u \end{cases} \quad (A, B, C, D \text{ là ma trận có phần tử là hàm theo } t),$$

3) hoặc tham số rải (phụ thuộc vector tham số \underline{v})

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\underline{x} = A(\underline{v})\underline{x} + B(\underline{v})u \\ y = C(\underline{v})\underline{x} + D(\underline{v})u \end{cases} \quad (A, B, C, D \text{ là ma trận có phần tử là hàm theo } \underline{v}),$$

trong đó:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{vector tham số } \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix}.$$

2.3.2 Ôn nhanh về đại số ma trận

Do khi làm việc với mô hình trạng thái của hệ thống ta sẽ phải sử dụng nhiều những phép tính ma trận nên thiết nghĩ cũng hữu ích nếu ta ôn nhanh lại ở đây một số tính chất cơ bản của đại số ma trận.

Những ký hiệu

Tên gọi "ma trận" được đặt bởi nhà toán học Sylvester người Anh để chỉ một tập hợp A gồm hữu hạn $m \times n$ các số thực (\mathbb{R}), hoặc phức (\mathbb{C}) là a_{ij} , $i=1,2, \dots, m$; $j=1,2, \dots, n$ và được sắp xếp theo hàng/cột như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

↑ cột thứ n

← hàng thứ 2

Theo cách sắp xếp như vậy thì phần tử a_{ij} của A sẽ nằm ở hàng thứ i và cột thứ j .

Do A có $m \times n$ phần tử thuộc \mathbb{R} (hoặc \mathbb{C}) như vậy mà nhiều khi người ta còn dùng ký hiệu

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ (hoặc } A \in \mathbb{C}^{m \times n})$$

để chỉ một ma trận A có m hàng, n cột.

Nếu như cách biểu diễn hàng/cột ở trên đã được thống nhất và không sợ bị nhầm ta có thể viết một ma trận A ngắn gọn hơn:

$$A = (a_{ij}), \quad i=1,2, \dots, m \text{ và } j=1,2, \dots, n.$$

Một ma trận $A=(a_{ij})$ có số hàng bằng số cột được gọi là *ma trận vuông*. Đường chéo nối các phần tử a_{ii} (chỉ số hàng bằng chỉ số cột) trong ma trận vuông được gọi là *đường chéo chính*. Đường chéo còn lại được gọi là *đường chéo phụ*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

← đường chéo phụ

← đường chéo chính

Một ma trận vuông $A=(a_{ij})$ có $a_{ij}=0$ khi $i \neq j$, tức là các phần tử không nằm trên đường chéo chính đều bằng 0, được gọi là *ma trận đường chéo*. Ma trận đường chéo được ký hiệu bởi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \text{diag}(a_{ii}).$$

Ma trận đường chéo $I = \text{diag}(1) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ được gọi là *ma trận đơn vị*.

Một vector $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ có n phần tử được xem là ma trận có n hàng và 1 cột. Nếu ghép

chung các phần tử trên cột thứ j của ma trận $A=(a_{ij})$, $i=1,2, \dots, m$; $j=1,2, \dots, n$ lại với nhau để thành vector $\underline{c}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, gọi là *vector cột*, thì A sẽ có dạng:

$$A = (\underline{c}_1 \quad \underline{c}_2 \quad \cdots \quad \underline{c}_n).$$

Các phép tính

- 1) *Phép cộng / trừ:* Cho hai ma trận $A=(a_{ij})$ và $B=(b_{ij})$ cùng có m hàng n cột. Tổng hay hiệu $A \pm B = C = (c_{ij})$ của chúng được định nghĩa là một ma trận cũng có m hàng, n cột với các phần tử

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \quad i=1,2, \dots, m \text{ và } j=1,2, \dots, n.$$

Rõ ràng là phép cộng/trừ chỉ thực hiện được với những ma trận có cùng số hàng và cùng số cột. Những ma trận như vậy được gọi là ma trận cùng kiểu. Tập hợp tất cả các ma trận cùng kiểu cùng với phép cộng định nghĩa như trên sẽ tạo thành một nhóm Abel (nhóm giao hoán).

- 2) *Phép nhân với số thực (phức):* Cho ma trận $A=(a_{ij})$ có m hàng, n cột và một số vô hướng thực (phức) x tùy ý. Tích $B = xA = Ax = (b_{ij})$ được hiểu là ma trận cũng có m hàng, n cột với các phần tử

$$b_{ij} = x \cdot a_{ij}, \quad i=1,2, \dots, m \text{ và } j=1,2, \dots, n.$$

- 3) *Phép chuyển vị:* Ma trận chuyển vị của ma trận $A=(a_{ij})$ với m hàng, n cột là ma trận $A^T = (a_{ji})$ có n hàng, m cột, được tạo từ A qua việc hoán chuyển hàng thành cột và ngược lại cột thành hàng. Như vậy ta luôn có $(A^T)^T = A$.

Một ma trận A thỏa mãn $A=A^T$ được gọi là *ma trận đối xứng*. Một ma trận đối xứng phải là ma trận vuông.

Nếu ghép chung các phần tử trên hàng thứ i của ma trận $A=(a_{ij})$, $i=1,2, \dots, m$; $j=1,2, \dots, n$ lại với nhau thành vector $\underline{h}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$, gọi là *vector hàng*, thì ma trận A

sẽ viết được thành $A = \begin{pmatrix} \underline{h}_1^T \\ \vdots \\ \underline{h}_m^T \end{pmatrix}$ và $A^T = (\underline{h}_1 \quad \underline{h}_2 \quad \cdots \quad \underline{h}_n)$.

- 4) **Phép nhân:** Cho ma trận $A=(a_{ik})$ có m hàng p cột và ma trận $B=(b_{kj})$ có p hàng n cột, tức là

$$A = (a_{ik}), \quad i=1,2, \dots, m \text{ và } k=1,2, \dots, p.$$

$$B = (b_{kj}), \quad k=1,2, \dots, p \text{ và } j=1,2, \dots, n.$$

Tích $AB=C=(c_{ij})$ của chúng là một ma trận có m hàng, n cột với các phần tử

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = \underline{a}_i^T \underline{b}_j$$

trong đó \underline{a}_i là vector hàng thứ i của A và \underline{b}_j là vector cột thứ j của B (hàng thứ i của A nhân với cột thứ j của B).

Hai ma trận A, B chỉ có thể được nhân với nhau thành AB nếu số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B . Tập hợp tất cả các ma trận có cùng số hàng, số cột kết hợp với phép nhân định nghĩa như trên tạo thành nửa nhóm.

Tập hợp của tất cả các ma trận vuông chung kích thước (cùng số hàng/cột) kết hợp với phép cộng và nhân ma trận tạo thành *một vầnh*. Kể thêm phép nhân với số thực (phức) thì nó trở thành *một đại số* trên trường số thực \mathbb{R} (phức C).

Một ma trận vuông $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ được gọi là *ma trận trực giao* nếu $A^T A = A A^T = I$. Hai vector \underline{a} và \underline{b} được gọi là *trực giao với nhau* nếu $\underline{a}^T \underline{b} = 0$. Vector \underline{e}_i chỉ có phần tử thứ i bằng 1, các phần tử khác bằng 0, được gọi là *vector đơn vị*.

Phép nhân ma trận thường không giao hoán. Nó có tính chất:

- a) $(AB)^T = B^T A^T$.
- b) $A(B+C) = AB+AC \quad \text{và} \quad (A+B)C = AC+BC$.
- c) $A=AI=IA$, với I là ma trận đơn vị.
- d) $\underline{e}_i^T A \underline{e}_j = a_{ij}$, tức là bằng là phần tử thứ ij của A .
- e) $A \underline{e}_j = \underline{a}_j$, tức là bằng vector cột thứ j của A .

Hạng của ma trận

Cho n vector \underline{v}_i , $i=1,2, \dots, n$. Chúng sẽ được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu đẳng thức

$$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \dots + a_n\underline{v}_n = \underline{0} \quad (\underline{0} \text{ là vector có các phần tử bằng } 0)$$

trong đó a_i , $i=1,2, \dots, n$ là những số thực (hoặc phức), sẽ đúng khi và chỉ khi

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Xét một ma trận $A=(a_{ij})$, $i=1,2, \dots, m$; $j=1,2, \dots, n$ bất kỳ (có kiểu $m \times n$) và gọi \underline{h}_i , $i=1,2, \dots, m$ là các vector hàng cũng như \underline{c}_j , $j=1,2, \dots, n$ là các vector cột của A . Nếu trong số m vector hàng \underline{h}_i có nhiều nhất $p \leq m$ vector độc lập tuyến tính và trong số n vector cột \underline{c}_j có nhiều nhất $q \leq n$ vector độc lập tuyến tính thì *hạng của ma trận* được hiểu là:

$$\text{Rank}(A) = \min\{p, q\}.$$

Một ma trận vuông A kiểu $(n \times n)$ sẽ được gọi là không suy biến nếu $\text{Rank}(A)=n$. Ngược lại nếu $\text{Rank}(A) < n$ thì A được nói là *ma trận suy biến*.

Hạng của ma trận có các tính chất sau:

- $\text{Rank}(A) = \min\{p, q\} = p = q$.
- $\text{Rank}(AB) \leq \text{Rank}(A)$ và $\text{Rank}(AB) \leq \text{Rank}(B)$.
- $\text{Rank}(A+B) \leq \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B)$.
- Nếu B không suy biến thì $\text{Rank}(AB) = \text{Rank}(B)$.
- Nếu A thuộc kiểu $(m \times n)$ với $m \leq n$ và $\text{Rank}(A)=m$ thì tích AA^T là ma trận vuông kiểu $(m \times m)$ không suy biến với $\text{Rank}(AA^T)=m$.
- Nếu A thuộc kiểu $(m \times n)$ với $m \geq n$ và $\text{Rank}(A)=n$ thì tích A^TA là ma trận vuông kiểu $(n \times n)$ không suy biến với $\text{Rank}(A^TA)=n$.

Định thức của ma trận

Cho một ma trận vuông $A=(a_{ij})$, $i,j=1,2, \dots, n$ có kiểu $(n \times n)$. Giá trị thực (phức)

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n})$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

được gọi là *định thức* của ma trận A , trong đó A_{ij} là ma trận kiểu $(n-1 \times n-1)$ thu được từ A bằng cách bỏ đi hàng thứ i và cột thứ j , tức là bỏ đi hàng và cột chứa phần tử a_{ij} . Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Chỉ có ma trận vuông mới có định thức. Theo công thức tính định thức vừa trình bày thì định thức của ma trận vuông có n hàng và cột được xác định truy hồi từ định thức các ma trận có số hàng cột ít hơn là $n-1$. Bắt đầu từ ma trận kiểu (2×2) ta có

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Định thức của một ma trận vuông $A = (a_{ij})$ thuộc kiểu $(n \times n)$ có những tính chất sau:

- a) A là ma trận suy biến khi và chỉ khi $\det(A) = 0$. Như vậy, nếu A có hai hàng hoặc hai cột phụ thuộc tuyến tính (ví dụ giống nhau) thì $\det(A) = 0$.
- b) Một ma trận vuông $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ có $a_{ij} = 0$ khi $i > j$ (hoặc $i < j$) được gọi là ma trận tam giác, vì có các phần tử nằm dưới (hoặc trên) đường chéo chính đều bằng 0. Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính. Ví dụ:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

- c) Nếu A_1, A_2, A_3, A_4 là các ma trận là những ma trận có kiểu phù hợp và Θ là ma trận có các phần tử 0 thì (công thức của Schur)

$$1) \quad \det \begin{pmatrix} A_1 & \Theta \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} = \det(A_1)\det(A_3)$$

$$2) \quad \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & \Theta \\ A_3 A_1^{-1} & I \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \Theta & A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix} = \det(A_1) \det(A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2),$$

- d) $\det(A) = \det(A^T)$.
- e) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- f) Gọi A' là ma trận thu được từ A bằng cách đổi chỗ hai vector hàng hoặc hai vector cột thì $\det(A) = -\det(A')$.
- g) Gọi A'' là ma trận thu được từ A bằng cách nhân các phần tử của một cột hoặc một hàng với số thực (hoặc phức) λ thì $\det(A'') = \lambda \det(A)$.

- h) Cho ma trận vuông A có kiều ($n \times n$) và một số thực (phức) λ . Vậy thì
 $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- i) Cho ma trận A kiều ($m \times n$) và B kiều ($n \times m$). Như vậy thì tích AB là ma trận vuông kiều ($m \times m$) và BA cũng là ma trận vuông nhưng có kiều ($n \times n$). Gọi I_m là ma trận đơn vị kiều ($m \times m$) và I_n là ma trận đơn vị kiều ($n \times n$) ta sẽ có
 $\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$.

Ma trận nghịch đảo

Cho ma trận $A = (a_{ij})$, $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$, trong đó a_{ij} là những số thực (hoặc phức), nói cách khác $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (hoặc $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$). Nếu tồn tại một ma trận B thỏa mãn:

$$AB = BA = I \text{ (ma trận đơn vị)},$$

thì ma trận B được gọi là *ma trận nghịch đảo* của A và ký hiệu là $B = A^{-1}$.

Do phải tồn tại cả hai phép nhân AA^{-1} và $A^{-1}A$ cho ra kết quả có cùng kiều nên ma trận A phải là một ma trận vuông, tức là phải có $m=n$. Hơn nữa do $\det(I) = 1 \neq 0$ nên:

$$\det(A)\det(A^{-1}) \neq 0 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \text{ và } \det(A^{-1}) \neq 0.$$

Vậy A phải là ma trận không suy biến.

Ma trận nghịch đảo A^{-1} của A có các tính chất sau:

- 1) Ma trận nghịch đảo A^{-1} của A là duy nhất.
- 2) Tập hợp tất cả các ma trận vuông cùng kiều và không suy biến cùng với phép nhân ma trận tạo thành một nhóm (không giao hoán).
- 3) Nghịch đảo ma trận kiều (2×2): $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- 4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- 5) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
- 6) Nếu $A = \text{diag}(a_i)$ và không suy biến thì $A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_i}\right)$.
- 7) $A^{-1} = \frac{A_{adj}}{\det(A)}$, trong đó A_{adj} là ma trận có các phần tử $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$ với A_{ji} là ma trận thu được từ A bằng cách bỏ đi hàng thứ j và như cột thứ i .
- 8) Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ không suy biến. Nếu $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$ và $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ là hai ma trận làm cho $(I + V^T A^{-1} U)$ cũng không suy biến thì

$$(A + UV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I + V^T A^{-1}U)^{-1}V^TA^{-1}.$$

9) Cho ma trận vuông $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ không suy biến, trong đó A_1, A_2, A_3, A_4 cũng là các ma trận.

a) Nếu A_1 không suy biến và $B = A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2$ cũng không suy biến thì

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1} A_2 B^{-1} A_3 A_1^{-1} & -A_1^{-1} A_2 B^{-1} \\ -B^{-1} A_3 A_1^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

b) Nếu A_4 không suy biến và $C = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$ cũng không suy biến thì

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C^{-1} & -C^{-1} A_2 A_4^{-1} \\ -A_4^{-1} A_3 C^{-1} & A_4^{-1} + A_4^{-1} A_3 C^{-1} A_2 A_4^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Hai công thức trên có tên là công thức Frobenius.

Vết của ma trận

Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ kiểu ($n \times n$). Vết của A được hiểu là tổng giá trị các phần tử trên đường chéo chính của A và được ký hiệu bằng $\text{trace}(A)$:

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Vết của ma trận có các tính chất:

1) $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$.

2) $\text{trace}(S^{-1}AS) = \text{trace}(A)$, với S là ma trận vuông không suy biến bất kỳ.

Với khái niệm vết ma trận như vậy ta có thể thấy rằng không bao giờ tồn tại hai ma trận A và B thỏa mãn:

$$AB - BA = I.$$

Ma trận và ấn xạ tuyến tính

Hãy bắt đầu với hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình và n ẩn

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2$$

\vdots

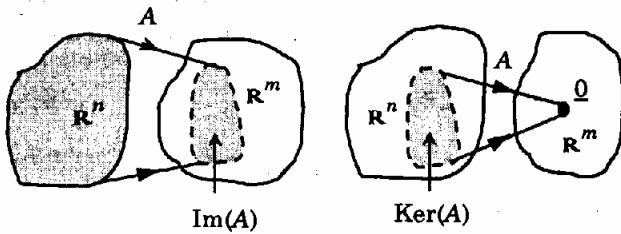
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m.$$

Sử dụng ký hiệu nhân ma trận với các vector $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, hệ phương

trình trên viết được thành

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\underline{x} = \underline{y}.$$

Như vậy, ở đây ma trận A đã đóng vai trò ánh xạ tuyến tính chuyển một điểm gốc \underline{x} thuộc không gian n chiều \mathbb{R}^n sang điểm ảnh \underline{y} thuộc không gian m chiều \mathbb{R}^m . Cho \underline{x} chạy khắp trong \mathbb{R}^n thì ảnh của nó sẽ là một tập hợp nằm trong \mathbb{R}^m . Tập hợp đó được gọi là miền ảnh $\text{Im}(A)$. Cũng tương tự, ta ký hiệu $\text{Ker}(A)$ là tập hợp các điểm \underline{x} trong \mathbb{R}^n có ảnh là điểm gốc tọa độ $\underline{0}$ trong \mathbb{R}^m (hình 2.56). Rõ ràng rằng hệ phương trình ở trên chỉ có thể có nghiệm \underline{x} nếu $\underline{y} \in \text{Im}(A)$.



Hình 2.56: Mô tả các không gian vector $\text{Im}(A)$ và $\text{Ker}(A)$.

Hai tập hợp $\text{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ và $\text{Ker}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ có các tính chất sau:

- 1) $\text{Im}(A)$ là một không gian vector con trong \mathbb{R}^m . Nói cách khác nếu có $\underline{y}_1 \in \text{Im}(A)$ và $\underline{y}_2 \in \text{Im}(A)$ thì cũng phải có $a\underline{y}_1 + b\underline{y}_2 \in \text{Im}(A)$, trong đó a, b là hai số thực bất kỳ.
 - 2) $\text{Ker}(A)$ là một không gian vector con trong \mathbb{R}^n .
 - 3) Vì là một không gian vector nên $\text{Im}(A)$ cũng có số chiều, được định nghĩa là số các phân tử độc lập tuyến tính nhiều nhất trong nó. Ký hiệu số chiều của không gian $\text{Im}(A)$ là $\dim \text{Im}(A)$ thì
- $$\text{Rank}(A) = \dim \text{Im}(A).$$
- 4) Ký hiệu $\dim \text{Ker}(A)$ là số chiều của $\text{Ker}(A)$ thì
- $$\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = n.$$
- 5) Ma trận vuông A kiểu $(n \times n)$ không suy biến ($\det(A) \neq 0$) khi và chỉ khi $\text{Ker}(A) = \{\underline{0}\}$, tức là $\text{Ker}(A)$ chỉ có một phân tử là gốc tọa độ.

- 6) Với ma trận vuông A kiểu $(n \times n)$, $\text{Im}(A)$ và $\text{Ker}(A)$ đều là hai không gian con của \mathbb{R}^n . Mọi phân tử $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ đều phân tích được thành tổng $\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$, trong đó $\underline{x}_1 \in \text{Im}(A)$ và $\underline{x}_2 \in \text{Ker}(A)$. Hơn nữa việc phân tích đó là duy nhất và

$$\text{Im}(A) \cup \text{Ker}(A) = \mathbb{R}^n, \quad \text{Im}(A) \cap \text{Ker}(A) = \{\underline{0}\}.$$

- 7) Nếu ma trận vuông A có kiểu $(n \times n)$ là đối xứng thì $\text{Im}(A)$ và $\text{Ker}(A)$ trực giao với nhau, tức là với mọi phân tử $\underline{y} \in \text{Im}(A)$, $\underline{x} \in \text{Ker}(A)$ ta luôn có $\underline{y}^T \underline{x} = \underline{x}^T \underline{y} = 0$.

Nếu sử dụng cách biểu diễn $A = (\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \cdots \ \underline{a}_n)$ theo các vector cột của nó thì mỗi phân tử của $\text{Im}(A)$ sẽ có dạng

$$\underline{y} = (\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \cdots \ \underline{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \cdots + x_n \underline{a}_n$$

trong đó x_1, x_2, \dots, x_n là những số thực bất kỳ. Như vậy, $\text{Im}(A)$ chính là không gian của tất cả các vector phụ thuộc tuyến tính theo $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$. Người ta viết

$$\text{Im}(A) = \text{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n). \quad (2.49)$$

Ký hiệu $\text{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$ là chỉ tập hợp tất cả các vector phụ thuộc tuyến tính theo $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$. Tập hợp đó cũng là một không gian vector. Như đã nói, để phương trình $A\underline{x} = \underline{y}$ có nghiệm \underline{x} khi biết trước \underline{y} thì $\underline{y} \in \text{Im}(A)$, tức là \underline{y} phải phụ thuộc tuyến tính theo $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$. Suy ra

$$\begin{aligned} \underline{y} \in \text{Im}(A) &\Leftrightarrow \underline{y} \in \text{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) \\ &\Leftrightarrow \text{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = \text{span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n, \underline{y}). \\ &\Leftrightarrow \text{Rank}(A) = \text{Rank}(A, \underline{y}). \end{aligned}$$

Phép biến đổi tương đương

Ma trận vuông $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, như vừa trình bày, là một ánh xạ tuyến tính từ không gian \mathbb{R}^n vào chính nó. Đặt ngược lại vấn đề là ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ đã cho trước và ta phải tìm ma trận mô tả nó.

Trước hết trong \mathbb{R}^n có n vector đơn vị $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$. Mọi vector \underline{x} trong nó đều biểu diễn được dưới dạng phụ thuộc tuyến tính theo các vector đơn vị này:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \cdots + x_n \underline{e}_n.$$

Đo đó ảnh của nó sẽ là

$$\underline{y} = f(\underline{x}) = f(x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \cdots + x_n \underline{e}_n)$$

$$= x_1 f(\underline{e}_1) + x_2 f(\underline{e}_2) + \cdots + x_n f(\underline{e}_n) = (f(\underline{e}_1) \quad f(\underline{e}_2) \quad \cdots \quad f(\underline{e}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$A = (f(\underline{e}_1) \quad f(\underline{e}_2) \quad \cdots \quad f(\underline{e}_n)) \quad (2.50a)$$

là ma trận mô tả ánh xạ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ đã cho.

Song bất cứ n vector nào trong \mathbb{R}^n , nếu độc lập tuyến tính với nhau thì đều có thể sử dụng thay cho $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$. Những bộ n vector độc lập tuyến tính như vậy được gọi là cơ sở của \mathbb{R}^n . Giả sử $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ là một cơ sở khác của \mathbb{R}^n . Mỗi vector \underline{s}_i lại có dạng biểu biến theo cơ sở cũ $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ như sau:

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \quad \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \underline{s}_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Vì $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ là n vector độc lập tuyến tính trong \mathbb{R}^n nên mọi vector \underline{x} trong \mathbb{R}^n đều có dạng phụ thuộc tuyến tính theo chúng, tức là

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = r_1 \underline{s}_1 + r_2 \underline{s}_2 + \cdots + r_n \underline{s}_n = (\underline{s}_1 \quad \underline{s}_2 \quad \cdots \quad \underline{s}_n) \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}}_S \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bộ số thực r_1, r_2, \dots, r_n được gọi là tọa độ của \underline{x} theo cơ sở mới $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$. Vậy muốn biểu diễn \underline{x} theo tọa độ mới ta có phép biến đổi

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (2.50b)$$

Với cách biểu diễn \underline{x} theo cơ sở mới này, ánh xạ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ cũng có dạng mới

$$\underline{y} = \underbrace{(f(\underline{e}_1) \quad f(\underline{e}_2) \quad \cdots \quad f(\underline{e}_n))}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AS \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad (2.50c)$$

nói cách khác AS cũng là ma trận mô tả $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nhưng theo cơ sở $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ trong \mathbb{R}^n cho \underline{x} .

Tuy \underline{x} đã được biểu diễn theo cơ sở mới $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ nhưng ảnh \underline{y} trong (2.50b) lại vẫn theo cơ sở cũ $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$. Để chuyển \underline{y} theo cơ sở mới giống như \underline{x} ta sử dụng (2.50b) cho \underline{y} và đi đến dạng hoàn toàn theo cơ sở mới cho $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$S^{-1}AS. \quad (2.50d)$$

Nhìn lại (2.50a) cũng như (2.50d) ta thấy, tùy theo việc chọn cơ sở S trong \mathbb{R}^n mà một ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sẽ có vô vàn cách mô tả. Những cách mô tả như vậy được gọi là *tương đương* vì chúng đều mô tả chung cho một ánh xạ. Các phép biến đổi ma trận A thành $S^{-1}AS$, trong đó S là một ma trận vuông không suy biến bất kỳ, được gọi là *phép biến đổi tương đương*.

Giá trị riêng và vector riêng

Do có nhiều ma trận cùng mô tả một ánh xạ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ như đã trình bày nên cũng dễ hiểu nếu có câu hỏi đặt ra là làm thế nào để có thể xác định được tính tương đương giữa chúng. Nhằm làm được điều này, người ta đi tìm một hình thức biểu diễn chung cho chúng mà không phụ thuộc vào cơ sở được chọn. Một trong hình thức đó là xác định những số thực λ sao cho:

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x} \quad \text{đúng với mọi } \underline{x}. \quad (2.51a)$$

Số thực λ được gọi là *giá trị riêng* và vector \underline{x} có tên là *vector riêng* *bên phải* ứng với giá trị riêng λ của A . Từ (2.51a) có

$$(A - \lambda I)\underline{x} = 0 \quad (2.51b)$$

và để cho phương trình (2.51b) có nghiệm $\underline{x} \neq 0$ thì $\text{Ker}(A - \lambda I)$ không thể chỉ có mỗi phần tử 0 , hay $(A - \lambda I)$ phải là ma trận suy biến:

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (2.51c)$$

Các vector riêng \underline{x} thỏa mãn (2.51b) là phần tử của $\text{Ker}(A - \lambda I)$. Phương trình (2.51c) với nghiệm λ được gọi là *phương trình đặc tính* của ma trận A .

Giá trị riêng và vector riêng của ma trận A có những tính chất sau:

- 1) Hai ma trận tương đương A và $S^{-1}AS$ luôn có cùng các giá trị riêng, nói cách khác giá trị riêng của ma trận bất biến với phép biến đổi tương đương:

$$\det(A - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda I).$$

- 2) Các giá trị riêng của ma trận bất biến với phép chuyển vị, tức là

$$\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I).$$

- 3) Nếu khai triển (2.51c) thành đa thức bậc n của λ :

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.51d)$$

thì

$$a_0 = \det(A) \quad \text{và} \quad a_{n-1} = \text{trace}(A).$$

Điều này cũng nói rằng $\det(A)$ và $\text{trace}(A)$ là hai đại lượng bất biến với việc chọn cơ sở nên chúng là những đại lượng đặc trưng cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- 4) Những vector riêng ứng với các giá trị riêng khác nhau thì độc lập tuyến tính với nhau, tức là

Nếu có $\lambda_1 \neq \lambda_2$ thì cũng phải có $\text{Ker}(A - \lambda_1 I) \cap \text{Ker}(A - \lambda_2 I) = \{\underline{0}\}$.

- 5) Nếu λ_1 là nghiệm đơn của (2.51d) thì $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) = 1$. Nói cách khác tất cả các vector riêng ứng với λ_1 là phụ thuộc tuyến tính. Ngược lại, nếu λ_1 là nghiệm bội q của (2.51d) thì $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) \leq q$.

- 6) Nếu A không suy biến thì AB và BA có cùng các giá trị riêng, tức là

$$\det(AB - \lambda I) = \det(BA - \lambda I).$$

- 7) Nếu A là ma trận đối xứng ($A^T = A$) thì các vector riêng ứng với những giá trị riêng khác nhau sẽ trực giao với nhau.

- 8) Nếu A là ma trận đối xứng ($A^T = A$) và có giá trị riêng λ là nghiệm bội q của *phương trình đặc tính* (2.51c) thì

$$\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = q.$$

Nói cách khác, ứng với giá trị riêng λ bội q sẽ có đúng q vector riêng độc lập tuyến tính với nhau.

Chuẩn của ma trận

Người ta cần đến chuẩn của ma trận là nhằm phục vụ việc khảo sát tính giải tích của nó. Có nhiều chuẩn khác nhau cho một ma trận $A = (a_{ij})$, $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$. Những chuẩn thường được sử dụng là:

- 1) Chuẩn Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{trace}(A^T A)}.$$

- 2) Chuẩn bậc 1, được hiểu là tổng lớn nhất trong số những tổng các modul của phần tử trong cùng một cột:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$

- 3) Chuẩn bậc 2, được hiểu là giá trị riêng lớn nhất của tích $A^T A$, hay còn gọi là giá trị suy biến lớn nhất của A :

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\lambda_i(A^T A)} = \bar{\sigma}(A).$$

- 4) Chuẩn vô cùng, được hiểu là tổng lớn nhất trong số những tổng các modul của phần tử trong cùng một hàng:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Điều đặc biệt của các chuẩn trên là chúng còn thỏa mãn

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

mà người ta thường gọi là *bất đẳng thức Hölder mở rộng*.

2.3.3 Ma trận hàm mũ e^{At} và cách xác định

Ta cần đến ma trận hàm mũ e^{At} là để sau này phục vụ việc xác định nghiệm của phương trình trạng thái. Ở trường phổ thông ta đã được biết rằng chuỗi vô hạn

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

hội tụ với mọi giá trị x và giá trị giới hạn của nó là e^x . Tương tự như vậy, ở đây ta xét chuỗi

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}, \quad (2.52)$$

trong đó $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ là một ma trận vuông kiếu ($n \times n$) và ký hiệu A^k chỉ một tích gồm k ma trận A nhân với nhau ($A^0 = I$). Theo định nghĩa về phép cộng, nhân ma trận vừa được nhắc lại ở mục 2.3.2 thì rõ ràng S , nếu tồn tại, cũng phải là một ma trận vuông kiếu ($n \times n$).

Xét chuẩn của chuỗi (2.52)

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|At\|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k t^k}{k!} = e^{\|A\|t}$$

ta thấy với $e^{\|A\|t}$ vế phải luôn là một số thực hữu hạn, vì $\|A\|$ là số thực không âm. Bởi vậy chuỗi (2.52) hội tụ, tức là tồn tại S . Nói cách khác, định nghĩa sau là có lý:

Định nghĩa 2.3: Ma trận hàm e^{At} là giá trị giới hạn của chuỗi $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$, trong đó

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ là một ma trận vuông ($n \times n$) và $A^0 = I$.

Những tính chất cơ bản của ma trận e^{At} được phát biểu trong định lý sau:

Định lý 2.11: Ma trận hàm e^{At} , trong đó $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ là một ma trận vuông ($n \times n$), thỏa mãn:

a) $e^{At_1} e^{At_2} = e^{A(t_1 + t_2)}$

b) $e^{At} e^{-At} = e^{-At} e^{At} = I$

c) $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$

d) Nếu A là ma trận đường chéo $A = \text{diag}(a_i)$ thì $e^{At} = \text{diag}(e^{a_i t})$.

e) Ma trận hàm e^{At} có ảnh Laplace là $(sI - A)^{-1}$, hay $(sI - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{s^{k+1}}$.

Chứng minh: a) Để chứng minh ta sử dụng công thức định nghĩa với một vài bước biến đổi như sau

$$\begin{aligned} e^{At_1} e^{At_2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} A^k \frac{t_1^i}{i!} \cdot \frac{t_2^{k-i}}{(k-i)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k!}{i!(k-i)!} \cdot t_1^i t_2^{k-i} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} C_k^i t_1^i t_2^{k-i} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A^k}{k!} (t_1 + t_2)^k \right) = e^{A(t_1 + t_2)}. \end{aligned}$$

b) Từ khẳng định a) ta thay $t = t_1 = -t_2$ sẽ được điều phải chứng minh vì $A^k 0^k = \Theta$ khi $k \neq 0$, trong đó Θ là ma trận có các phần tử bằng 0.

$$\begin{aligned} c) \quad \frac{d}{dt} e^{At} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{A^k t^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = A e^{At}. \end{aligned}$$

Ngoài ra, cũng với các bước biến đổi trên ta thấy được ngay

$$A e^{At} = e^{At} A.$$

d) Nếu $A = \text{diag}(a_i)$ thì $A^k = \text{diag}(a_i^k)$ nên ta có điều phải chứng minh.

e) Vì $t^k 1(t)$ có ảnh $\frac{k!}{s^{k+1}}$ (ví dụ 11, chương 1) nên ảnh của e^{At} là $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{s^{k+1}}$. Hơn nữa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{s^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1}}{s^{k+1}} = I \quad \Leftrightarrow \quad (sI - A) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{s^{k+1}} = I.$$

Vậy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{s^{k+1}} = (sI - A)^{-1}$ (đ.p.c.m). □

Như vậy là ma trận hàm e^{At} đã được định nghĩa xong và ta cũng đã được biết một số tính chất cơ bản của nó. Sau đây ta sẽ làm quen với ba phương pháp thường được sử dụng để xác định e^{At} khi biết trước $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Đó là:

- Sử dụng toán tử Laplace.
- Xác định theo phương pháp modal.
- Xác định nhờ định lý Cayley-Hamilton.

Sử dụng toán tử Laplace

Nếu ta chỉ quan tâm đến e^{At} khi $t \geq 0$ thì để tính e^{At} ta có thể sử dụng ngay tính chất e) của e^{At} đã được nêu trong định lý 2.3 như sau:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}.$$

Ví dụ 36: Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\begin{matrix} s-2 & -1 \\ 0 & s-3 \end{matrix}\right)^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\begin{matrix} s-2 & -1 \\ 0 & s-3 \end{matrix}\right)^{-1}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s-3)}\left(\begin{matrix} s-3 & 1 \\ 0 & s-2 \end{matrix}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\begin{matrix} \frac{1}{s-2} & \frac{1}{(s-2)(s-3)} \\ 0 & \frac{1}{s-3} \end{matrix}\right)\right\} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Phương pháp modal

Phương pháp modal đặc biệt thích hợp với ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ thỏa mãn:

- A có n giá trị riêng khác nhau từng đôi một,
- hoặc A có giá trị riêng λ_k bội q , song ứng với giá trị riêng đó lại có q vector riêng độc lập tuyến tính $\underline{a}_{k1}, \underline{a}_{k2}, \dots, \underline{a}_{kq}$, tức là $\dim \text{Ker}(A - \lambda_k I) = q$. Ví dụ như ma trận đối xứng.

1) *Trường hợp A có n giá trị riêng khác nhau:*

Trong mục trước, khi nói về khái niệm giá trị riêng, vector riêng của ma trận ta đã biết đến tính chất của chúng là những vector riêng ứng với các giá trị riêng khác nhau sẽ độc lập tuyến tính với nhau. Bởi vậy ở đây, khi có giả thiết rằng ma trận A có n giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ khác nhau từng đôi một thì tương ứng n vector riêng là $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ sẽ tạo thành một hệ độc lập tuyến tính và do đó chúng là một cơ sở của \mathbb{R}^n .

Gọi

$$S = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) \quad (2.53)$$

là ma trận vuông ($n \times n$) được tạo bởi n vector riêng của A . Vì các vector cột của S độc lập tuyến tính nên S phải là ma trận không suy biến. Nói cách khác là tồn tại ma trận nghịch đảo S^{-1} . Khi đó thi:

$$\begin{aligned} AS &= A(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) \\ &= (A\underline{a}_1, A\underline{a}_2, \dots, A\underline{a}_n) = (\underline{a}_1\lambda_1, \underline{a}_2\lambda_2, \dots, \underline{a}_n\lambda_n) \\ &= (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = S\Lambda \end{aligned}$$

trong đó Λ là ma trận đường chéo:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \Lambda \\ \Leftrightarrow A &= S\Lambda S^{-1}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Như vậy cả hai ma trận A và Λ cùng mô tả một ánh xạ và do đó chúng là tương đương. Với phép biến đổi tương đương (2.54), ma trận hàm e^{At} có dạng:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(S\Lambda S^{-1})^k t^k}{k!} = S \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!} S^{-1} \\ &= Se^{\Lambda t} S^{-1}. \end{aligned}$$

Nhưng vì Λ là ma trận đường chéo nên

$$e^{\Lambda t} = \text{diag}(e^{\lambda_i t}) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

và cuối cùng ta được:

$$e^{At} = S \operatorname{diag}(e^{\lambda_i t}) S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (2.55)$$

Tóm lại, việc xác định ma trận hàm mũ e^{At} theo phương pháp modal cho trường hợp thứ nhất gồm các bước sau:

- Tính tất cả n giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ của ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Nếu chúng không khác nhau từng đôi một thì kết thúc với kết luận rằng không sử dụng được phương pháp modal cho trường hợp này.
- Tính các vector riêng $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ ứng với từng giá trị riêng đó. Với mỗi một giá trị riêng sẽ có vô số các vector riêng, song chúng đều phụ thuộc tuyến tính với nhau nên ta chỉ cần lấy một vector riêng là đủ.
- Lập ma trận S từ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ theo (2.53).
- Tính e^{At} theo (2.55).

Ví dụ 37: Xét ma trận A kiểu (2×2) với

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ma trận A có phương trình đặc tính

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

với hai giá trị riêng $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = -2$. Tương ứng với hai giá trị riêng đó là hai vector riêng bên phải

$$(-I - A) \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{a}_1 = \underline{0} \Rightarrow \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(-2I - A) \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{a}_2 = \underline{0} \Rightarrow \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rõ ràng hai vector này độc lập tuyến tính với nhau. Với hai vector đó thì

$$S = (\underline{a}_1, \underline{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Thay vào (2.55) được

$$\begin{aligned} e^{At} &= S e^{At} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
□

2) Trường hợp A có giá trị riêng bội q:

Phương pháp xác định e^{At} trình bày sau đây được áp dụng khi ma trận A có các giá trị riêng λ_k bội q_k nhưng ứng với nó lại có $\dim \text{Ker}(A - \lambda_k I) = q_k$, chẳng hạn như khi A là ma trận đối xứng (mục 2.3.2, phần về giá trị riêng và vector riêng, trang 130).

Một giá trị riêng λ_k bội q_k được tính như là có q_k giá trị riêng λ_k giống nhau. Nếu tính cả số lần bội của một nghiệm như vậy thì một ma trận vuông A kiểu $(n \times n)$ bao giờ cũng có n giá trị riêng. Không mất tính tổng quát nếu ta giả sử ma trận A chỉ có giá trị riêng λ_1 bội q thì sẽ phải còn lại $n-q$ các giá trị riêng khác $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots, \lambda_n$ và những giá trị riêng còn lại đó khác nhau từng đôi một.

Ứng với $n-q$ giá trị riêng $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots, \lambda_n$ là các vector riêng $\underline{a}_{q+1}, \underline{a}_{q+2}, \dots, \underline{a}_n$. Tất nhiên rằng $n-q$ vector riêng đó là độc lập tuyến tính với nhau. Nếu như rằng ma trận A có $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) = q$ thì ứng với giá trị riêng λ_1 cũng có q vector riêng $\underline{a}_{11}, \underline{a}_{12}, \dots, \underline{a}_{1q}$ độc lập tuyến tính với nhau. Chúng chính là một cơ sở của không gian vector $\text{Ker}(A - \lambda_1 I)$.

Kết hợp q vector riêng $\underline{a}_{11}, \underline{a}_{12}, \dots, \underline{a}_{1q}$ của λ_1 với $n-q$ các vector riêng $\underline{a}_{q+1}, \underline{a}_{q+2}, \dots, \underline{a}_n$ của $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots, \lambda_n$ ta lại có tất cả n vector độc lập tuyến tính trong \mathbb{R}^n và

$$S = (\underline{a}_{11}, \underline{a}_{12}, \dots, \underline{a}_{1q}, \underline{a}_{q+1}, \underline{a}_{q+2}, \dots, \underline{a}_n)$$

là ma trận vuông kiểu $(n \times n)$ không suy biến. Tương tự như ở trường hợp trước, ở đây phép biến đổi tương đương $S^{-1}AS$ của A cũng sẽ cho ta ma trận đường chéo:

$$S^{-1}AS = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{q+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{q \text{ lần}}, \lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots, \lambda_n).$$

Suy ra

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = S \cdot \text{diag}(\underbrace{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_1}}_{q \text{ lần}}, e^{\lambda_{q+1}}, e^{\lambda_{q+2}}, \dots, e^{\lambda_n}) \cdot S^{-1}. \quad (2.56)$$

Tổng kết lại, việc xác định ma trận hàm mũ e^{At} theo phương pháp modal cho trường hợp thứ hai gồm các bước sau:

- a) Tính tất cả n giá trị riêng của ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Nếu có một giá trị riêng λ_k nào đó là nghiệm bội q_k của phương trình đặc tính thì kiểm tra xem ứng với nó điều kiện $\dim \text{Ker}(A - \lambda_k I) = q_k$ có được thỏa mãn hay không. Để kiểm tra điều kiện này ta có thể sử dụng công thức đã biết ở mục trước:
- $$\dim \text{Ker}(A - \lambda_k I) = n - \dim \text{Im}(A - \lambda_k I) = n - \text{Rank}(A - \lambda_k I).$$
- b) Tính các vector riêng ứng với từng giá trị riêng đó. Với những giá trị riêng λ_k bội q_k ta phải xác định được tất cả q_k vector riêng $\underline{a}_{k1}, \underline{a}_{k2}, \dots, \underline{a}_{kq_k}$ độc lập tuyến tính với nhau.
- c) Lập ma trận S có n vector là những vector riêng tìm được.
- d) Tính $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$, trong đó Λ là ma trận đường chéo của các giá trị riêng theo thứ tự đúng như thứ tự các vector riêng của nó trong S . Những giá trị riêng λ_k bội q_k sẽ xuất hiện q_k lần trong Λ .

Ví dụ 38: Cho ma trận A kiểu (3×3)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ma trận trên có các giá trị riêng là nghiệm của phương trình đặc tính:

$$\det(\lambda I - A) = -\lambda^3 - \lambda^2 - 21\lambda + 45 = (\lambda + 3)^2(\lambda - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3 \quad \text{và} \quad \lambda_3 = 5.$$

Như vậy A có một giá trị riêng $\lambda_1 = -3$ bội 2 và một giá trị riêng $\lambda_3 = 5$ là nghiệm đơn. Ứng với $\lambda_1 = -3$ bội 2 có

$$\dim \text{Im}(A - \lambda_1 I) = \text{Rank}(A - \lambda_1 I) = \text{Rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 1.$$

Bởi vậy

$$\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) = 3 - \dim \text{Im}(A - \lambda_1 I) = 2,$$

và do đó A sẽ có 2 vector riêng độc lập tuyến tính ứng với λ_1 . Chúng là nghiệm của

$$(A - \lambda_1 I)\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 - 6a_3 = 0 \\ -a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a_1 = -2a_2 + 3a_3 \tag{2.57}$$

Từ (2.57) ta có được hai vector đặc lập tuyến tính:

$$\underline{a}_{11} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_{12} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Còn lại, ứng với $\lambda_3 = 5$ là vector riêng

$$(A - \lambda_3 I) \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \underline{a}_3 = \underline{0} \Rightarrow \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$S = (\underline{a}_{11}, \underline{a}_{12}, \underline{a}_3) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cuối cùng, thay vào (2.56) với

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \text{diag}(-3, -3, 5)$$

được

$$\begin{aligned} e^{At} &= Se^{\Lambda t} S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7e^{-3t} + 5e^{5t} & -2e^{-3t} + 2e^{5t} & 3e^{-3t} - 3e^{5t} \\ 2e^{5t} & 4e^{5t} & -6e^{5t} \\ e^{-3t} - e^{5t} & 2e^{-3t} - 2e^{5t} & 5e^{-3t} + 3e^{5t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Phương pháp Cayley–Hamilton

Phương pháp modal vừa trình bày có một hạn chế là nó chỉ áp dụng được cho lớp các ma trận vuông $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tương đương với ma trận đường chéo Λ , được gọi là *ma trận giống đường chéo*. Với những ma trận A mà không tồn tại ma trận S không suy biến để phép biến đổi tương đương $S^{-1}AS$ là ma trận đường chéo thì ta không sử dụng được phương pháp modal.

Ngược lại, phương pháp sau đây áp dụng được cho mọi ma trận vuông $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Nó được xây dựng dựa theo định lý Cayley–Hamilton phát biểu như sau:

Định lý 2.12: Cho ma trận vuông $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Nếu a_0, a_1, \dots, a_{n-1} là những hệ số của *đa thức đặc tính* của ma trận, tức là:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (2.58a)$$

thì

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = \Theta, \quad (2.58b)$$

trong đó Θ là ma trận có các phần tử đều bằng 0.

Chứng minh: Từ hai đẳng thức (2.58a) và (2.58b) ta có

$$p(\lambda)I - p(A) = (\lambda^n I - A^n) + a_{n-1}(\lambda^{n-1}I - A^{n-1}) + \dots + a_1(\lambda I - A). \quad (2.59)$$

Vì

$$\lambda^k I - A^k = (\lambda I - A) \cdot (\lambda^{k-1}I + \lambda^{k-2}A + \lambda^{k-3}A^2 + \dots + A^{k-1})$$

nên về phái của (2.59) là một biểu thức chia hết cho $(\lambda I - A)$. Suy ra về trái cũng phải chia hết cho $(\lambda I - A)$. Nói cách khác $p(\lambda)I$ phải chia hết cho $(\lambda I - A)$ và $p(A)$ cũng phải chia hết cho $(\lambda I - A)$. Nhưng do $p(A)$ không phụ thuộc λ nhưng lại chia hết cho $(\lambda I - A)$ có chứa λ nên để $p(A)$ chia hết được cho $(\lambda I - A)$ thì $p(A)$ phải bằng Θ (đ.p.c.m). \square

Định lý 2.13: Với mọi ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bao giờ ta cũng có n hàm $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ để

$$e^{At} = a_0(t)I + a_1(t)A + \dots + a_{n-1}(t)A^{n-1}. \quad (2.60)$$

Chứng minh: Xuất phát từ định lý Cayley–Hamilton với công thức (2.58b) thì A^n sẽ phụ thuộc vào A^{n-1}, \dots, A^2, A , nói cách khác A^n tính được từ A^{n-1}, \dots, A^2, A như sau:

$$A^n = -(a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0).$$

Tương tự, $A^{n+1} = AA^n$ cũng tính được từ A^{n-1}, \dots, A^2, A :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = -(a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \dots + a_1A^2 + a_0A) \\ &= -[(a_{n-1}^2 + a_{n-2})A^{n-1} + \dots + (a_{n-1}a_1 + a_0)A + a_{n-1}a_0]. \end{aligned}$$

Cứ tiếp tục như vậy thì tất cả các ma trận A^k có $k \geq n$ đều tính được từ A^{n-1}, \dots, A^2, A . Điều này dẫn tới chuỗi $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$ chỉ còn phụ thuộc vào A^{n-1}, \dots, A^2, A và đó chính là điều phải chứng minh. \square

Theo định lý 2.13 và nhất là công thức (2.60) thì công việc tính e^{At} sẽ được hoàn tất khi ta xác định được n hàm $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$. Để làm được điều này, ta nhìn lại phần chứng minh định lý 2.13 sẽ thấy nó được dẫn từ (2.58b). Nhưng do (2.58b) tương đương với (2.58a) nên nếu đi từ (2.58a), ta sẽ đến được kết luận:

Định lý 2.14: Các hàm $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ của ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ thỏa mãn (2.60) thì cũng thỏa mãn đẳng thức sau cho tất cả giá trị riêng λ_k :

$$e^{\lambda_k t} = a_0(t) + a_1(t)\lambda_k + \dots + a_{n-1}(t)\lambda_k^{n-1}. \quad (2.61)$$

Với định lý 2.14 (được xem như hệ quả của định lý 2.13) thì từ n giá trị riêng λ_k khác nhau ta sẽ có n phương trình (2.61) độc lập tuyến tính với nhau. Giải hệ phương trình đó ta được n nghiệm $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ cần tìm cho e^{At} theo (2.60).

Trường hợp $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ có giá trị riêng bội q , ví dụ như λ_1 bội q thì cùng với $n-q$ các giá trị riêng còn lại $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots, \lambda_n$ ta mới chỉ có được $n-q+1$ phương trình (2.61) cho n ẩn $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$. Số các phương trình còn thiếu là $q-1$ sẽ được bổ sung thêm bằng cách từ (2.61) ứng với λ_1 ta đạo hàm $q-1$ lần theo λ_1 như sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} te^{\lambda_1 t} = a_1(t) + 2\lambda_1 \cdot a_2(t) + \dots + (n-1)\lambda_1^{n-2} a_{n-1}(t) \\ t^2 e^{\lambda_1 t} = 2a_2(t) + 6\lambda_1 \cdot a_3(t) + \dots + (n-1)(n-2)\lambda_1^{n-3} a_{n-1}(t) \\ \vdots \\ t^{q-1} e^{\lambda_1 t} = (q-1)! a_{q-1}(t) + \frac{q!}{1!} \lambda_1 \cdot a_q(t) + \dots + \frac{(n-1)!}{(n-q)!} \lambda_1^{n-q} a_{n-1}(t) \end{array} \right. \quad (2.62)$$

Rõ ràng rằng $q-1$ phương trình (2.62) là độc lập với nhau.

Tóm lại, phương pháp Cayley-Hamilton gồm hai bước:

- Tính tất cả n giá trị riêng của ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mỗi một giá trị riêng sẽ có một phương trình dạng (2.61). Ứng với giá trị riêng λ_k bội q_k ta có thêm q_k-1 phương trình bằng cách đạo hàm theo λ_k phương trình (2.61) của nó q_k-1 lần. Như vậy, tổng cộng ta sẽ có n phương trình cho n ẩn $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$.
- Giải hệ phương trình đó để có $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ rồi thay vào (2.60).

Ví dụ 39: Quay lại ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ đã cho ở ví dụ 37, nhưng bây giờ ta sẽ xác định e^{At} theo phương pháp Cayley-Hamilton. Ma trận có hai giá trị riêng $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = -2$. Để tính hai hàm $a_0(t), a_1(t)$ cho

$$e^{At} = a_0(t)I + a_1(t)A$$

ta thay hai giá trị riêng đó vào công thức (2.61) và được

$$\begin{cases} e^{-t} = a_0(t) - a_1(t) \\ e^{-2t} = a_0(t) - 2a_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ a_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

Suy ra

$$e^{At} = a_0(t)I + a_1(t) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0(t) - 2a_1(t) & a_1(t) \\ 0 & a_0(t) - a_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad \square$$

Ví dụ 40: Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ đã cho trong ví dụ 38. Ma trận này có các giá trị riêng $\lambda_1 = -3$ bội 2 và $\lambda_3 = 5$. Theo định lý 2.13 thì

$$e^{At} = a_0(t)\mathbb{I} + a_1(t)A + a_2(t)A^2.$$

Như vậy, vấn đề còn lại chỉ là tìm các hàm $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$. Để xác định các hàm $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ này trước hết với (2.61) ta có

$$e^{-3t} = a_0(t) - 3a_1(t) + 9a_2(t)$$

$$e^{5t} = a_0(t) + 5a_1(t) + 25a_2(t)$$

Một phương trình nữa ta nhận được theo (2.62)

$$te^{-3t} = a_1(t) - 6a_2(t).$$

Cuối cùng, giải ba phương trình trên được:

$$a_0(t) = \frac{9}{64}e^{5t} - e^{-3t}\left(-5t + \frac{5}{64}\right)$$

$$a_1(t) = \frac{3}{32}e^{5t} - e^{-3t}\left(-\frac{1}{4}t + \frac{3}{32}\right)$$

$$a_2(t) = \frac{1}{64}\left[e^{5t} - e^{-3t}(8t+1)\right].$$
□

2.3.4 Nghiệm của phương trình trạng thái dừng

Phương trình trạng thái dừng được hiểu là lớp mô hình trạng thái

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\underline{x} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad (2.63)$$

trong đó $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^r$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^s$, và các ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{s \times r}$ hoặc là hằng (phản tử của chúng là những hằng số) hoặc phụ thuộc vào các tham số khác được ghép chung lại thành vector tham số \underline{v} (không phụ thuộc t).

Bài toán đặt ra ở đây là phải xác định đáp ứng $\underline{y}(t)$ cho hệ thống có mô hình (2.63) khi hệ được kích thích bởi vector tín hiệu $\underline{u}(t)$ ở đầu vào và tại thời điểm bắt đầu kích thích $t=0$ hệ có các trạng thái đầu $\underline{x}(0)$ là biết trước.

Việc xác định nghiệm $\underline{y}(t)$ của (2.63) thực chất nằm ở lời giải cho hệ phương trình vi phân bậc nhất

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = A\underline{x} + B\underline{u}, \quad (2.64)$$

vì tín hiệu đầu ra $\underline{y}(t)$ khi đó sẽ được xác định một cách đơn giản là thay $\underline{x}(t)$ vừa tìm được vào phương trình thứ 2 trong (2.63).

Nhân hai vế của phương trình (2.64) với hàm e^{-At} sẽ được

$$\begin{aligned} & e^{-At} \frac{d\underline{x}}{dt} = e^{-At} A\underline{x} + e^{-At} B\underline{u} \\ \Leftrightarrow & e^{-At} \frac{d\underline{x}}{dt} - e^{-At} A\underline{x} = e^{-At} B\underline{u} \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dt} \left(e^{-At} \underline{x} \right) = e^{-At} B\underline{u} \quad (\text{theo định lý 2.11}) \\ \Leftrightarrow & \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(e^{-A\tau} \underline{x} \right) d\tau = \int_0^t e^{-A\tau} B\underline{u}(\tau) d\tau \quad (\text{tích phân hai vế}) \\ \Leftrightarrow & e^{-At} \underline{x}(t) - \underline{x}(0) = \int_0^t e^{-A\tau} B\underline{u}(\tau) d\tau \quad (\text{vì } e^{A0} = e^{\Theta} = I) \\ \Leftrightarrow & \underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.65)$$

và đó chính là nghiệm của phương trình trạng thái (2.64). Để có đáp ứng $\underline{y}(t)$ ta chỉ cần thay (2.65) vào phương trình thứ hai trong (2.63):

$$\underline{y}(t) = C \left[e^{At} \underline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau) d\tau \right] + D\underline{u}. \quad (2.66)$$

Nếu thay $\underline{u}(t) = \underline{0}$ và $\underline{x}(0) = \underline{e}_k$, trong đó \underline{e}_k là vector đơn vị, tức là vector có phần tử thứ k bằng 1, còn lại các phần tử khác bằng 0, vào (2.65) thì

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{e}_k$$

và đó chính là vector cột thứ k của ma trận hàm e^{At} . Từ đó ta có kết luận:

Định lý 2.15: Vector cột thứ k của ma trận hàm e^{At} chính là đáp ứng trạng thái của hệ

(2.64) từ trạng thái ban đầu $\underline{x}(0) = \underline{e}_k$ khi hệ không bị kích thích ($\underline{u}(t) = \underline{0}$).

Ví dụ 41: Cho hệ thống SISO có hai biến trạng thái được mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{u}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{y} = x_1(t).$$

Hãy xác định đáp ứng $y(t)$ của hệ khi hệ được kích thích bởi $u(t)=1(t)$ từ trạng thái ban đầu $\underline{x}(0) = \underline{0}$.

Hệ có ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Khi đó, theo kết quả của ví dụ 37 cũng như 39 thì

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} l(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-t+\tau} - e^{-2t+2\tau} \\ e^{-t+\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2} \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } y(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}.$$

□

2.3.5 Nghiệm của phương trình trạng thái có tham số phụ thuộc t

Bài toán đặt ra ở đây là xác định đáp ứng $\underline{y}(t)$ cho hệ thống có mô hình

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \underline{x} = A(t) \underline{x} + B(t) \underline{u} \\ \underline{y} = C(t) \underline{x} + D(t) \underline{u} \end{cases} \quad (2.67)$$

trong đó $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^r$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^s$, và các ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{s \times r}$ có phần tử phụ thuộc t .

Giống như với mô hình dừng, ở đây công việc cũng tập trung chủ yếu vào việc tìm nghiệm của

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t) \underline{x} + B(t) \underline{u}. \quad (2.68)$$

Tiến hành các bước một cách tương tự như đã làm với mô hình dừng, nghiệm của (2.68) sẽ có dạng giống như công thức (2.65)

$$\underline{x}(t) = \Phi(t) \underline{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) B(\tau) \cdot \underline{u}(\tau) \cdot d\tau. \quad (2.69)$$

Tuy nhiên có một sự khác nhau giữa (2.69), nghiệm của phương trình tham số phụ thuộc t , với nghiệm của phương trình dừng, là ma trận hàm $\Phi(t)$ trong (2.69) không phải là hàm mū e^{At} mà thay vào đó nó được định nghĩa như sau:

Định lý 2.16 (Peano–Baker): Ma trận hàm $\Phi(t)$ trong (2.69) là ma trận thỏa mãn:

$$\text{a) } \Phi(t) = I + \int_0^t A(\tau) d\tau + \int_0^t A(\tau_1) \int_0^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \quad (2.70a)$$

$$b) \quad \Phi(t-t_1) \cdot \Phi(t_1-t_0) = \Phi(t-t_0) \quad (2.70b)$$

$$c) \quad \Phi^{-1}(t-t_0) = \Phi(t_0-t), \text{ như vậy ma trận } \Phi(t) \text{ là không suy biến.} \quad (2.70c)$$

$$d) \quad \Phi(0) = I \quad (I \text{ là ma trận đơn vị}). \quad (2.70d)$$

Công thức (2.70) có thể được sử dụng trực tiếp để xác định $\Phi(t)$, tuy nhiên đơn giản hơn cả vẫn là nhờ một dạng khác của nó phát biểu như sau:

Định lý 2.17 (Picard): Nếu có dãy ma trận hàm $\{P_k(t)\}$ được định nghĩa với

$$a) \quad P_0(t) = I,$$

$$b) \quad P_k(t) = \int_0^t A(\tau)P_{k-1}(\tau)d\tau, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.71a)$$

thì

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t). \quad (2.71b)$$

Ma trận hàm $P_k(t)$ có tên là *ma trận Picard* thứ k . Từ định lý 2.17 ta có thuật toán xác định $\Phi(t)$ gồm những bước sau:

- 1) Chọn một số nguyên dương N đủ lớn, N càng lớn sai số của kết quả sẽ càng nhỏ.
- 2) Đặt $P_0(t) = I$.
- 3) Tính $P_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$ theo (2.71a).
- 4) Tính $\Phi(t)$ theo (2.71b).

Trong công thức (2.71), nếu A là ma trận hằng thì do

$$P_1(t) = At, \quad P_2(t) = A^2 \frac{t^2}{2}, \quad \dots, \quad P_k(t) = A^k \frac{t^k}{k!}, \quad \dots$$

nên ma trận $\Phi(t)$ sẽ chính là e^{At} .

Tương tự như định lý 2.15, ở đây ta cũng có:

Định lý 2.18: Nếu gọi $\varphi_k(t)$, $k=1, 2, \dots, n$ là một vector cột của $\Phi(t)$ thì $\varphi_k(t)$ sẽ là nghiệm của (2.68) với $\underline{u}(t) = \underline{0}$ và điều kiện đầu $\underline{x}(0) = \underline{e}_k$, trong đó \underline{e}_k là vector đơn vị có phần tử thứ k bằng 1, còn lại các phần tử khác bằng 0.

Ví dụ 42: Xét hệ thống SISO có hai biến trạng thái được mô tả bởi

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underline{u}.$$

Trước tiên ta ký hiệu

$$P_k(t) = \begin{pmatrix} p_{11}^k(t) & p_{12}^k(t) \\ p_{21}^k(t) & p_{22}^k(t) \end{pmatrix},$$

trong đó số mũ k của các phần tử ma trận $P_k(t)$ không có nghĩa lũy thừa mà chỉ xác định rằng nó thuộc ma trận Picard thứ k . Với ký hiệu này thì

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \int_0^t A(\tau) P_{k-1}(\tau, t_0) d\tau = \int_0^t \left[I + \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} p_{11}^{k-1} & p_{12}^{k-1} \\ p_{21}^{k-1} & p_{22}^{k-1} \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} p_{11}^{k-1} & p_{12}^{k-1} \\ p_{21}^{k-1} & p_{22}^{k-1} \end{pmatrix} d\tau + \int_0^t \begin{pmatrix} \tau p_{21}^{k-1} & \tau p_{22}^{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\tau. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Để ý rằng khi $k=0$ thì với

$$P_0(t) = I, \quad p_{12}^0(t) = p_{21}^0(t) = 0 \quad \text{và} \quad p_{11}^0(t) = p_{22}^0(t) = 1 \quad (2.73)$$

sẽ có được từ biểu thức thứ hai trong (2.72)

$$p_{21}^k = \int_0^t p_{21}^{k-1}(\tau) d\tau \Rightarrow p_{21}^k(t) \equiv 0 \quad \text{với mọi } k. \quad (2.74)$$

Suy ra

$$P_k(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} p_{11}^{k-1} & p_{12}^{k-1} \\ 0 & p_{22}^{k-1} \end{pmatrix} d\tau + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & \tau p_{22}^{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\tau, \quad (k \geq 1)$$

nói cách khác

$$p_{ii}^k(t) = \int_0^t p_{ii}^{k-1}(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2 \quad (k \geq 1) \quad (2.75a)$$

$$p_{12}^k(t) = \int_0^t (p_{12}^{k-1} + \tau p_{22}^{k-1}) d\tau. \quad (k \geq 1) \quad (2.75b)$$

Từ (2.73) và (2.75a) ta đi đến

$$p_{ii}^k = \int_0^t \int_0^\tau p_{ii}^{k-2} d\tau d\tau^2 = \cdots = \int_0^t \int_0^\tau p_{ii}^0 d\tau^k = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots k} t^k = \frac{t^k}{k!} \quad (2.76)$$

Thay (2.76) vào (2.75b) ta có tiếp

$$\begin{aligned} p_{12}^k(t) &= \frac{t^{k+2}}{k!(k+2)} + \int_0^t p_{12}^{k-1} d\tau \quad (k \geq 1). \\ &= \frac{t^{k+2}}{k!(k+2)} + \int_0^t \left(\frac{t^{k+1}}{(k-1)!(k+1)} + \int_0^\tau p_{12}^{k-2} d\tau \right) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t^{k+2}}{k!(k+2)} + \frac{t^{k+2}}{(k-1)!(k+1)(k+2)} + \int_0^t \int_0^t p_{12}^{k-2}(d\tau)^2 \\
&\vdots \\
&= \frac{t^{k+2}}{k!(k+2)} + \frac{t^{k+2}}{(k-1)!(k+1)(k+2)} + \cdots + \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \quad (\text{vì } p_{12}^0(t)=0) \\
&= \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} ((k+1)+k+\cdots+1) = \frac{t^{k+2}}{2 \cdot k!}
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Thay các kết quả (2.74), (2.76), (2.77) vào (2.71b) để tính $\Phi(t)$ sẽ thu được:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & \frac{t^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}. \quad \square$$

2.3.6 Quan hệ giữa mô hình trạng thái và hàm truyền đạt

Ngay trong mục mở đầu là 2.3.1 của phần 2.3 về khái niệm phương trình trạng thái cụ thể là các ví dụ 34 và 35, hoặc như ở các định lý 2.15, 2.18, ta đã ít nhiều nhắc đến mối quan hệ giữa mô hình trạng thái và hàm truyền đạt cho một hệ thống SISO. Sau đây ta sẽ khảo sát chi tiết hơn, tổng quát hơn mối quan hệ đó.

Định lý 2.19: Hệ SISO với tín hiệu vào $u(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$ có hàm truyền hợp thức

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

cũng được mô tả bởi phương trình trạng thái *dạng chuẩn điều khiển* như sau:

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_A \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \text{với } \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$y = (b_0 - a_0 b_n - \cdots - a_{n-1} b_n) \underline{x} + b_n u.$$

Matrice A của hệ thống có tên gọi là *ma trận dẫn Frobenius*.

Chứng minh: Gọi $A(s)$ là đa thức mẫu số cũng như $U(s)$ là ảnh Laplace của $u(t)$, $Y(s)$ là ảnh của $y(t)$ thì từ hàm truyền đạt đã cho ta có

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_n s^n}{A(s)} U(s) \\
&= b_0 \frac{U(s)}{A(s)} + b_1 \frac{sU(s)}{A(s)} + \cdots + b_n \frac{s^n U(s)}{A(s)}. \tag{2.78a}
\end{aligned}$$

Đặt n biến trạng thái $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, ghép chung lại thành vector $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ có

đánh Laplace:

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{A(s)}, \quad X_2(s) = \frac{sU(s)}{A(s)}, \quad \dots, \quad X_n(s) = \frac{s^{n-1}U(s)}{A(s)} \quad (2.78b)$$

ta sẽ được

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= X_2(s) & \Rightarrow \quad \frac{dx_1}{dt} &= x_2(t) \\ sX_2(s) &= X_3(s) & \Rightarrow \quad \frac{dx_2}{dt} &= x_3(t) \\ &\vdots && \\ sX_{n-1}(s) &= X_n(s) & \Rightarrow \quad \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n(t). \end{aligned}$$

Ngoài ra, từ $X_1(s) = \frac{U(s)}{A(s)}$, hay $X_1(s)A(s) = U(s)$ ta còn có

$$\begin{aligned} &a_0X_1(s) + a_1sX_1(s) + \dots + a_{n-1}s^{n-1}X_1(s) + s^nX_1(s) = U(s) \\ \Leftrightarrow \quad &a_0X_1(s) + a_1X_2(s) + \dots + a_{n-1}X_n(s) + sX_n(s) = U(s) \\ \Leftrightarrow \quad &a_0x_1(t) + a_1x_2(t) + \dots + a_{n-1}x_n(t) + \frac{dx_n(t)}{dt} = u(t) \\ \Leftrightarrow \quad &\frac{dx_n(t)}{dt} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u(t) \end{aligned} \quad (2.78c)$$

Tín hiệu ra $y(t)$ được xác định từ (2.78a), (2.78b) như sau:

$$\begin{aligned} Y(s) &= b_0X_1(s) + b_1X_2(s) + \dots + b_{n-1}X_{n-1}(s) + b_n sX_n(s) \\ \Leftrightarrow \quad y(t) &= b_0x_1(t) + b_1x_2(t) + \dots + b_{n-1}x_n(t) + b_n \frac{dx_n(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (2.78d)$$

Cuối cùng, thay (2.78c) vào (2.78d) được

$$y(t) = (b_0 - a_0b_n)x_1 + (b_1 - a_1b_n)x_2 + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)x_n + b_n u.$$

□

Định lý 2.20: Hệ SISO với đầu vào $u(t)$ và đầu ra $y(t)$ có hàm truyền hợp thức chặt

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

cũng được mô tả bởi phương trình trạng thái *dạng chuẩn quan sát* như sau:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u \text{ với } \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$y = (0 \ 0 \ \cdots \ 1) \underline{x}.$$

Chứng minh: Xuất phát từ hàm truyền đạt đã cho và gọi $U(s)$, $Y(s)$ là ảnh Laplace của $u(t)$, $y(t)$ ta có

$$\begin{aligned} & a_0 Y + a_1 s Y + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} Y + s^n Y = b_0 U + b_1 s U + \cdots + b_{n-1} s^{n-1} U \\ \Leftrightarrow & \frac{a_0}{s^n} Y + \frac{a_1}{s^{n-1}} Y + \cdots + \frac{a_{n-1}}{s} Y + Y = \frac{b_0}{s^n} U + \frac{b_1}{s^{n-1}} U + \cdots + \frac{b_{n-1}}{s} U \\ \Leftrightarrow & Y(s) = \frac{1}{s} [(b_{n-1} U - a_{n-1} Y) + \frac{1}{s} [\cdots + \frac{1}{s} [(b_1 U - a_1 Y) + \frac{1}{s} [(b_0 U - a_0 Y)] \cdots]] \end{aligned}$$

Đặt n biến trạng thái $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ sao cho chúng có ảnh Laplace:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{s} (b_0 U - a_0 X_n) & \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = -a_0 x_n(t) + b_0 u \\ X_2(s) &= \frac{1}{s} (b_1 U - a_1 X_n + X_1) & \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = -a_1 x_n(t) + x_1(t) + b_1 u \\ &\vdots \\ X_n(s) &= \frac{1}{s} (b_{n-1} U - a_{n-1} X_n + X_{n-1}) \Rightarrow \frac{dx_n(t)}{dt} = -a_{n-1} x_n(t) + x_{n-1}(t) + b_{n-1} u \end{aligned}$$

ta sẽ được

$$Y(s) = X_n(s) \Rightarrow y(t) = x_n(t).$$

□

Định lý 2.21: Hệ SISO với mô hình trạng thái

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{bu} \\ \underline{y} = \underline{c}^T \underline{x} + du \end{cases}$$

trong đó $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $d \in \mathbb{R}$, có hàm truyền đạt là

$$G(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} + d.$$

Chứng minh: Chuyển hai vế của phương trình thứ nhất sang miền phức nhờ toán tử Laplace và để ý rằng các giá trị đầu $x_i(0)$, $i=1, 2, \dots, n$ đều bằng 0, ta sẽ có

$$\begin{aligned} s\underline{X}(s) &= A\underline{X}(s) + \underline{b}U(s) \Leftrightarrow (sI - A)\underline{X}(s) = \underline{b}U(s) \\ \Leftrightarrow \underline{X}(s) &= (sI - A)^{-1} \underline{b}U(s). \end{aligned}$$

Tương tự, ảnh Laplace của phương trình thứ hai là

$$Y(s) = \underline{c}^T \underline{X}(s) + dU(s).$$

Với hai kết quả trên ta suy ra được điều phải chứng minh:

$$Y(s) = [\underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} + d] U(s). \quad \square$$

Định lý 2.22: Xét hệ SISO có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}.$$

Gọi hiệu $r = n-m$ là *bậc tương đối* của hệ. Vậy thì bậc tương đối đó cũng xác định được từ mô hình trạng thái tương ứng

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{b}u, & \underline{x} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \underline{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \underline{c} \in \mathbb{R}^{1 \times n}, d \in \mathbb{R}, \\ y = \underline{c}^T \underline{x} + du \end{cases}$$

như sau:

$$\underline{c}^T A^k \underline{b} = 0 \quad \text{khi } 0 \leq k < r-1 \quad \text{và} \quad \underline{c}^T A^{r-1} \underline{b} \neq 0.$$

Chứng minh: Theo định nghĩa của bậc tương đối là hiệu $r = n-m$ ta có

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^r G(s) = \frac{b_m}{a_n} \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} s^r [\underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} + d] = \frac{b_m}{a_n} \quad (\text{theo định lý 2.21})$$

$$\Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{c}^T A^k \underline{b}}{s^{k+1-r}} + s^r d \right] = \frac{b_m}{a_n}. \quad (\text{theo định lý 2.11})$$

Nhưng vì

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{k+1-r}} = 0 \quad \text{khi} \quad k > r-1$$

nên chuỗi trên trở thành tổng của hữu hạn r phần tử đầu tiên

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^{r-1} \frac{\underline{c}^T A^k \underline{b}}{s^{k+1-r}} + s^r d \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\underline{c}^T A^k \underline{b}}{s^{k+1-r}} + \lim_{s \rightarrow \infty} s^r d = \frac{b_m}{a_n}.$$

Từ đây, để về trái bằng giá trị hữu hạn $\frac{b_m}{a_n}$ thì cần và đủ là:

$$\underline{c}^T A^k \underline{b} = 0 \quad \text{khi } 0 \leq k < r-1$$

$$\underline{c}^T A^{r-1} \underline{b} \neq 0$$

và

$$d = 0 \quad \text{nếu } r > 0. \quad \square$$

Cũng từ phần chứng minh định lý 2.22 ta có thêm một kết luận nữa:

Định lý 2.23: Hệ tuyến tính với mô hình trạng thái

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{b}u \\ \underline{y} = \underline{c}^T \underline{x} + du \end{cases}$$

có $d=0$ khi và chỉ khi hàm truyền đạt của nó là hàm hợp thức chẵn ($m < n$).

Ví dụ 43: Cho hệ thống SISO có hai biến trạng thái được mô tả bởi

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{x}}{dt} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} u, \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \underline{y} &= (2 \ 1) \underline{x}, \quad \Rightarrow \quad \underline{c}^T = (2 \ 1) \text{ và } d = 0. \end{aligned}$$

Theo định lý 2.21, hệ có hàm truyền đạt

$$\begin{aligned} G(s) &= \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} + d = (2 \ 1) \begin{pmatrix} s-2 & -1 \\ 0 & s-3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-2)(s-3)} (2 \ 1) \begin{pmatrix} s-3 & 1 \\ 0 & s-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{6}{s^2 - 5s + 6}. \end{aligned}$$

Như vậy, ta thấy hệ có bậc tương đối là $r=2$. Giá trị này cũng có thể trực tiếp tính được từ mô hình trạng thái như sau:

$$\begin{aligned} \underline{c}^T \underline{b} &= (2 \ 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ \underline{c}^T A \underline{b} &= (2 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2 \ 5) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 \neq 0, \end{aligned}$$

tức là $r-1 = 1$, hay $r=2$. □

Cuối cùng, để kết thúc mục này ta sẽ tìm mối liên hệ giữa đa thức đặc tính của ma trận A là $\det(sI - A)$ với đa thức mẫu số của hàm truyền đạt $G(s)$ là $A(s)$. Xét hệ SISO dùng có mô hình trạng thái và hàm truyền đạt như sau:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{b}u \\ \underline{y} = \underline{c}^T \underline{x} + du \end{cases}, \quad G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (2.79)$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $d \in \mathbb{R}$. Theo định lý 2.21 thì

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} + d.$$

Nhưng do

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\tilde{A}_{adj}}{\det(sI - A)} \quad (\text{mục 2.3.2 về ma trận nghịch đảo})$$

với \tilde{A}_{adj} là ma trận có các phần tử $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ji}$, trong đó ma trận \tilde{A}_{ji} thu được từ $(sI - A)$ bằng cách bỏ đi hàng thứ j và cột thứ i (bỏ đi hàng và cột chứa phần tử đối xứng với \tilde{a}_{ij}), nên

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} + d = \frac{\underline{c}^T \tilde{A}_{adj} \underline{b}}{\det(sI - A)} + d.$$

Từ đó ta suy ra được:

Định lý 2.24: Giữa mô hình trạng thái và hàm truyền đạt cho trong công thức (2.79) của hệ tuyến tính SISO có quan hệ:

$$A(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n = \det(sI - A)$$

và

$$B(s) = b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m = \underline{c}^T \tilde{A}_{adj} \underline{b} + d \det(sI - A).$$

2.4 Hệ không liên tục và hệ rời rạc

2.4.1 Phân biệt hai khái niệm

Hệ không liên tục là hệ thống có các tín hiệu vào $\underline{u}(t)$, ra $\underline{y}(t)$ đều là những tín hiệu không liên tục, tức là loại tín hiệu có miền xác định là tập điểm không liên thông với nhau (mục 1.1.2, chương 1), ví dụ như tín hiệu xung. Tương tự, hệ rời rạc là hệ thống có các tín hiệu vào ra dạng rời rạc (miền giá trị là tập điểm không liên thông).

Trong ứng dụng, tín hiệu xung nói riêng và tín hiệu không liên tục nói chung thường không có ý nghĩa. Chúng hay được chuyển sang dạng liên tục-rời rạc. Ta lấy việc trích mẫu tín hiệu $x(t)$ và đưa vào bộ điều khiển là máy tính làm ví dụ.

Trước tiên $x(t)$ được "trích" mẫu thành dãy các giá trị $\{x_k\}$, với $x_k = x(kT_a)$. Dãy giá trị $\{x_k\}$ này chính là dạng không liên tục của $x(t)$, nói cách khác $\{x_k\}$ là tín hiệu không liên tục. Miền xác định của nó là tập các điểm không liên thông:

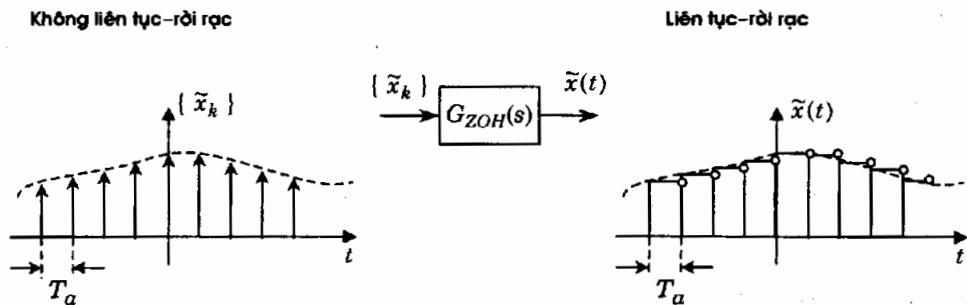
$$\{t = kT_a \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad z \text{ là tập các số nguyên.}$$

Tiếp tục, tín hiệu không liên tục $\{x_k\}$ được rời rạc thành $\{\tilde{x}_k\}$ với \tilde{x}_k là số hữu tỷ gần x_k nhất để đưa vào bộ điều khiển (máy tính) xử lý. Lý do cho việc rời rạc đó là vì máy tính không làm việc được với số vô tỷ ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π , ...). Như vậy $\{\tilde{x}_k\}$ bây giờ là tín hiệu không liên tục-rời rạc.

Mặc dù đầu vào của bộ điều khiển có vẻ như là tín hiệu không liên tục-rời rạc $\{\tilde{x}_k\}$, song trong quá trình xử lý, thuật toán điều khiển đã có thể sử dụng nhiều lần giá

trị \tilde{x}_k chứ không nhất thiết chỉ sử dụng một lần vào đúng thời điểm $t = kT_a$, tức là có thể ở cả những thời điểm khác trong khoảng $kT_a \leq t < (k+1)T_a$ nó vẫn có giá trị là \tilde{x}_k . Điều này chỉ rằng thuật toán đã không thuần túy làm việc với tín hiệu không liên tục-rồi rạc $\{\tilde{x}_k\}$ mà là với tín hiệu liên tục-rồi rạc $\tilde{x}(t)$ được tạo từ $\{\tilde{x}_k\}$ như sau:

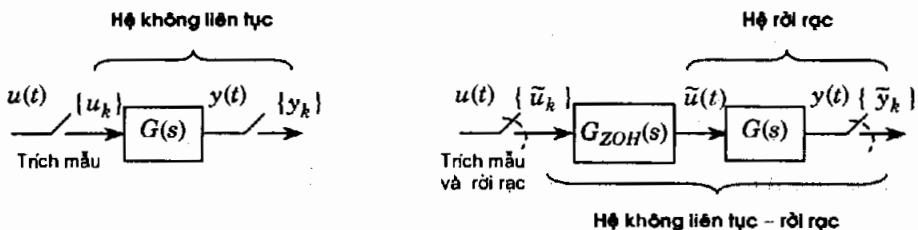
$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_k \quad \text{khi} \quad kT_a \leq t < (k+1)T_a. \quad (2.80a)$$



Hình 2.57: Tín hiệu không liên tục-rồi rạc và tín hiệu liên tục-rồi rạc

Việc liên tục hóa tín hiệu không liên tục $\{\tilde{x}_k\}$ thành tín hiệu liên tục $\tilde{x}(t)$ theo công thức (2.80a) được gọi là *giữ tín hiệu bậc 0*. Bộ điều khiển trong máy tính dưới dạng thuật toán không phải là hệ thống không liên tục mà thực chất nó là hệ thống rời rạc vì có thêm khâu giữ tín hiệu bậc 0. Khâu giữ tín hiệu bậc 0 được ký hiệu là ZOH (viết tắt của Zero Order Holding) và có hàm truyền đạt:

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1 - e^{-sT_a}}{s}. \quad (2.80b)$$



Hình 2.58: Phân biệt hệ không liên tục và hệ rời rạc

Hình 2.58 trên đây mô tả lại một cách trực quan những điều vừa được trình bày tại ví dụ trên. Ở hệ rời rạc hình bên phải, nếu ghép chung $G_{ZOH}(s)$ với $G(s)$ thành

$$G^*(s) = G(s) \cdot G_{ZOH}(s) = \left(1 - e^{-sT_a}\right) \frac{G(s)}{s} \quad (2.80c)$$

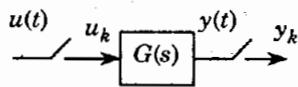
thì $G^*(s)$ có các tín hiệu vào/ra không liên tục nên nó là hệ không liên tục.

2.4.2 Dãy trọng lượng, hàm truyền đạt và phương trình sai phân

Xét một hệ không liên tục cho trong hình 2.59 với tín hiệu không liên tục đầu vào $\{u_k\}$ và tín hiệu không liên tục đầu ra $\{y_k\}$ (hệ không liên tục). Nếu sử dụng ký hiệu hàm răng lược $s(t)$ đã được định nghĩa ở mục 1.4.1, chương 1 thì những tín hiệu không liên tục đó viết được thành

$$\{u_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t)\delta(t - kT_a) = u(t)s(t)$$

$$\{y_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t)\delta(t - kT_a) = y(t)s(t)$$



Hình 2.59: Hệ không liên tục

trong đó

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a)$$

là hàm răng lược và phép nhân giữa hàm thường $x(t)$ với $\delta(t - kT_a)$ trong hàm răng lược $s(t)$ phải được hiểu theo nghĩa hàm mở rộng (1.2c) cho trong mục 1.1.3, chương 1, tức là

$$\text{Định nghĩa} \quad x(t)\delta(t - kT_a) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT_a)dt = x(kT_a).$$

Về lý thuyết hàm mở rộng, bạn đọc có thể tìm thấy phần tóm tắt một cách tổng quát trong tài liệu [11].

Dãy trọng lượng

Với cách biểu diễn tín hiệu không liên tục như một tín hiệu liên tục theo nghĩa hàm mở rộng vừa trình bày thì từ quan hệ vào-ra của hệ liên tục (2.6b) cho trong mục 2.1.2

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (2.81a)$$

ta sẽ có sau khi trích mẫu $y(t)$

$$y(t)\delta(t - kT_a) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)g(t - \tau)\delta(t - kT_a)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)g(kT_a - \tau)d\tau$$

$$\Leftrightarrow y_k = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)g(kT_a - \tau)d\tau. \quad (2.81b)$$

Tiếp tục, nếu trích mẫu $u(\tau)$ trong (2.81b) ta được

$$\begin{aligned}
 y_k &= \int_{-\infty}^{\infty} g(kT_a - \tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(\tau - mT_a) d\tau \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(kT_a - \tau) u(\tau) \delta(\tau - mT_a) d\tau = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g((k-m)T_a) u(mT_a) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{k-m} u_m .
 \end{aligned} \tag{2.81c}$$

Như vậy, ở hệ không liên tục thì bên cạnh công thức (2.81a) quen thuộc ta còn có thêm (2.81c), trong đó dây $\{g_k\}$ chính là tín hiệu không liên tục thu được từ hàm trọng lượng $g(t)$ với chu kỳ trích mẫu T_a .

Để ý thêm $u(t)$ và $g(t)$ là những hàm causal, tức là $g_k = u_k = 0$ khi $k < 0$, sẽ có:

Định lý 2.25: Xét hệ có hàm truyền đạt $G(s)$. Nếu tín hiệu vào $u(t)$ và ra $y(t)$ của hệ là những tín hiệu xung $\{u_k\}$, $\{y_k\}$ có chu kỳ trích mẫu T_a thì bên cạnh những phương pháp mô tả đã biết, ta sẽ có thêm *mô hình không liên tục* cho hệ như sau:

$$y_k = \sum_{m=0}^k g_{k-m} u_m , \tag{2.82}$$

trong đó $\{g_k\}$ là *dây trọng lượng* thu được từ hàm trọng lượng $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$, bằng cách trích mẫu $g(t)$ với chu kỳ trích mẫu T_a .

Theo nội dung định lý 2.25, để có mô hình không liên tục (2.82) cho hệ có hàm truyền đạt $G(s)$ ta cần thực hiện hai bước sau:

- 1) Xác định $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$.
- 2) Trích mẫu $g(t)$ với chu kỳ T_a thành dây trọng lượng $\{g_k\}$.

Ví dụ 44: Hãy xác định mô hình không liên tục (2.82) cho hệ có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{1}{(1+2s)(1+s)} ,$$

khi các tín hiệu vào $u(t)$, ra $y(t)$ có dạng xung với chu kỳ trích mẫu $T_a = 0,1s$.

Theo hai bước phải làm vừa trình bày ta có:

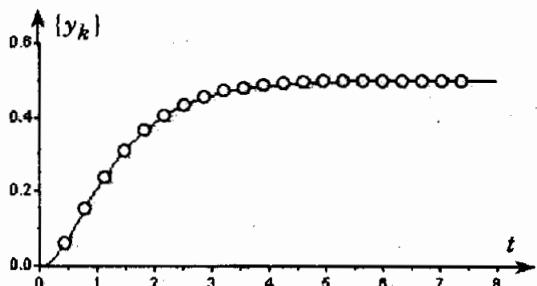
$$1) \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(1+2s)(1+s)} \right\} = e^{-t} - e^{-0.5t} .$$

$$2) \quad g_k = e^{-0.1k} - e^{-0.05k} .$$

Vậy

$$y_k = \sum_{m=0}^k g_{k-m} u_m = \sum_{m=0}^k [e^{-0.1(k-m)} - e^{-0.05(k-m)}] u_m.$$

Hình 2.60 là đồ thị biểu diễn dãy tín hiệu đầu ra $\{y_k\}$ khi hệ được kích thích bởi tín hiệu không liên tục $u_k = 1$ ở đầu vào. \square



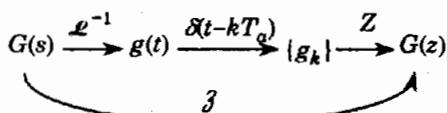
Hình 2.60: Đáp ứng của hệ không liên tục cho trong ví dụ 43 khi hệ được kích thích bằng tín hiệu $u_k = 1$.

Hàm truyền đạt

Chuyển hai vế của công thức (2.82) sang miền phức nhờ toán tử Z , đặc biệt có sử dụng tính chất 5) về ảnh của tích chập của toán tử Z (mục 1.4.2, chương 1), ta có:

$$\begin{aligned} Y(z) &= G(z)U(z) \\ \Leftrightarrow G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

trong đó $Y(z)$ là ảnh Z của $\{y_k\}$, $U(z)$ là ảnh Z của $\{u_k\}$, $G(z)$ là ảnh Z của $\{g_k\}$ và $G(z)$ được gọi là *hàm truyền đạt của hệ không liên tục*. Nói cách khác hàm truyền đạt của hệ không liên tục được định nghĩa như là tỷ số giữa ảnh Z của tín hiệu ra $\{y_k\}$ và ảnh Z của tín hiệu vào $\{u_k\}$.



Hình 2.61: Xác định hàm truyền đạt cho hệ không liên tục.

Chú ý: Mặc dù viết $G(z)$, song không có nghĩa là hàm truyền đạt $G(z)$ thu được từ $G(s)$ chỉ đơn giản bằng cách thay $s=z$ trong $G(s)$ là được. Thực chất, $G(z)$ là ảnh Z của $\{g_k\}$ nên nó được xác định từ $G(s)$ qua các bước (hình 2.61):

- 1) Xác định $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$.
- 2) Trích mẫu $g(t)$ với chu kỳ T_a thành dãy trọng lượng $\{g_k\}$.
- 3) Chuyển $\{g_k\}$ sang miền phức nhờ toán tử Z để có $G(z)$.

Cả ba bước tính trên có thể được thay thế đơn giản nhờ ánh xạ

$$\mathcal{J}: G(s) \mapsto G(z) \quad \text{hay} \quad G(z) = \mathcal{J}\{G(s)\}. \quad (2.84)$$

với công thức định nghĩa (1.38) đã cho trong mục 1.4.4 của chương 1 như sau:

$$G(z) = \frac{1}{2} g(+0) + \frac{z}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{G(s)}{z - e^{sT_a}} ds$$

$$\text{hoặc } G(z) = \frac{1}{2} g(+0) + \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(s + jk\Omega) \Big|_{z=e^{sT_a}} \quad \text{với} \quad \Omega = \frac{2\pi}{T_a}.$$

Tuy nhiên, như đã nói ở mục 1.4.4 (chương 1), việc thực hiện phép chuyển đổi (2.84) cho hệ tuyến tính đơn giản nhất vẫn là sử dụng bảng tra 1.1 (trang 35):

- 1) Phân tích $G(s)$ thành tổng tuyến tính của những thành phần $G_1(s), G_2(s), \dots$, đơn giản, có trong bảng tra 1.1:

$$G(s) = \sum_i a_i G_i(s)$$

- 2) Tra bảng 1.1 để được $G_1(z), G_2(z), \dots$, ứng với $G_1(s), G_2(s), \dots$.
- 3) Tính $G(z) = \sum_i a_i G_i(z)$

Ví dụ 45: Cho hệ tuyến tính mô tả bởi

$$G(s) = \frac{2s+11}{s^2+3s+2}.$$

Biết rằng hệ có các tín hiệu vào ra không liên tục dạng xung với chu kỳ trích mẫu $T_a=0,1s$. Hãy xác định hàm truyền đạt $G(z)$.

Phân tích $G(s)$ thành tổng tuyến tính các hàm đơn giản được:

$$G(s) = \frac{-7}{s+2} + \frac{9}{s+1}.$$

Tra bảng 1.1 có

$$\mathcal{J}\left\{ \frac{1}{s+2} \right\} = \frac{z}{z - e^{-2T_a}} = \frac{z}{z - 0,8} \quad \text{và} \quad \mathcal{J}\left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = \frac{z}{z - e^{-T_a}} = \frac{z}{z - 0,9}.$$

Vậy

$$G(z) = \frac{-7z}{z - 0,8} + \frac{9z}{z - 0,9} = \frac{2z^2 - 0,9}{z^2 - 1,7z + 0,72}.$$

□

Một số tính chất cơ bản của toán tử \mathcal{Z} thường được sử dụng là:

- 1) Nếu $G(s)$ là hàm thực-hữu tỷ thì $G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}$ cũng là hàm thực-hữu tỷ.
- 2) Nếu $G(s)$ có một điểm cực s_k thì tương ứng $G(z)$ sẽ có một điểm cực $z_k = e^{s_k T_a}$.
- 3) Ứng với hai điểm cực s_k, s_m của $G(s)$ thỏa mãn $s_k - s_m = \frac{2\pi}{T_a} nj$ chỉ có một điểm cực $z_k = e^{s_k T_a}$ trong $G(z)$.
- 4) Nếu $G(s)$ là hàm bền thì tất cả các điểm cực z_k của $G(z)$ đều nằm trong đường tròn đơn vị, tức là $|z_k| < 1$.
- 5) Nếu $G(s)$ là hàm hợp thức (bậc của tử số không lớn hơn bậc của mẫu số) thì $G(z)$ cũng là hàm hợp thức.
- 6) Nói chung bậc của đa thức mẫu số trong $G(z)$ bằng bậc của đa thức mẫu số trong $G(s)$. Nếu $G(s)$ có ít nhất hai điểm cực s_k, s_m thỏa mãn $s_k - s_m = \frac{2\pi}{T_a} nj$ thì bậc của đa thức mẫu số trong $G(z)$ sẽ nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số trong $G(s)$.

Phương trình sai phân

Xét một hệ thống không liên tục có hàm truyền đạt $G(z)$ thực-hữu tỷ được biến đổi thành hàm của z^{-1} như sau

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (2.85a)$$

Ta có thể thực hiện việc chuyển đổi $G(z)$ thực-hữu tỷ thành hàm theo đối số z^{-1} dạng (2.85a) một cách đơn giản là chia cả đa thức tử số và mẫu số cho z^{-n} .

Từ (2.85a) ta có

$$(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}) U(z).$$

Tiếp tục, chuyển ngược phương trình trên sang miền thời gian bằng toán tử Z ngược có để đến tính chất dịch trái 3) trong mục 1.4.2, chương 1 của toán tử Z , sẽ được:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_n u_{k-n}. \quad (2.85b)$$

Phương trình (2.85b) có tên gọi là *phương trình sai phân*. Nó cho phép ta xác định được giá trị y_k tại thời điểm $t=kT_a$ của tín hiệu ra theo nguyên tắc truy hồi từ dây hưu hạn $n+1$ các giá trị tín hiệu vào $u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}$ cũng như n giá trị của tín hiệu ra đã có $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n}$ ở những thời điểm trước đó:

$$y_k = \sum_{i=0}^n (b_i u_{k-i} - a_i y_{k-i}), \quad a_0=0.$$

Chú ý: Khi sử dụng công thức truy hồi trên để xác định y_k thì tất cả các giá trị y_i , u_i có chỉ số $i < 0$ sẽ được xem là bằng 0, vì $\{y_k\}$, $\{u_k\}$ là những tín hiệu causal. Chẳng hạn:

$$y_0 = b_0 u_0$$

$$y_1 = b_0 u_1 + b_1 u_0 - a_1 y_0$$

$$y_2 = b_0 u_2 + b_1 u_1 + b_2 u_0 - a_1 y_1 - a_2 y_0$$

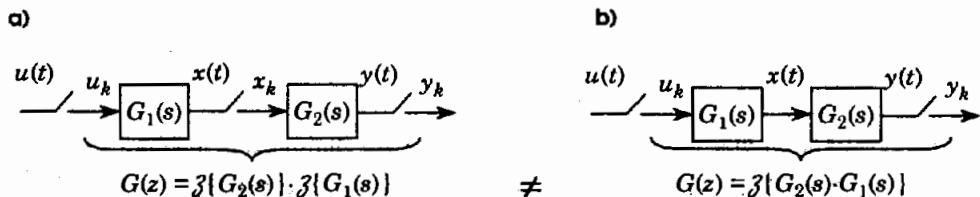
⋮

2.4.3 Đại số sơ đồ khối hệ không liên tục

Về nguyên tắc, việc biểu diễn đổi sơ đồ khối của một hệ không liên tục cũng được thực hiện giống như ở hệ liên tục đã được trình bày tại mục 2.1.3 ngoại trừ một điều luôn cần phải được chú ý là các khối không liên tục phải có các tín hiệu vào, ra dạng xung và cũng chỉ ở khối không liên tục mới có phép biến đổi \mathcal{J} : $G(s) \mapsto G(z)$.

1) Hai khối nối tiếp:

Hình 2.62a) và b) mô tả hệ thống không liên tục gồm hai khối mắc nối tiếp. Trong khi ở hình 2.62a) có khâu trích mẫu nằm giữa hai khối thì ở hình 2.62b) hai khối được nối trực tiếp với nhau.



Hình 2.62: Nối tiếp hai khối (chú ý sự khác nhau về hàm truyền đạt lượng đường).

a) Cả hai khối $G_1(s)$ và $G_2(s)$ ở hình 2.62a) đều là những khối không liên tục nên:

$$G_1(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \mathcal{J}\{G_1(s)\} = G_1(z) \quad \text{và} \quad G_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{J}\{G_2(s)\} = G_2(z).$$

Suy ra hàm truyền đạt tương đương của chúng là

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} \cdot \frac{X(z)}{U(z)} = G_2(z) \cdot G_1(z).$$

Nói cách khác

$$G(z) = \mathcal{J}\{G_2(s)\} \cdot \mathcal{J}\{G_1(s)\}.$$

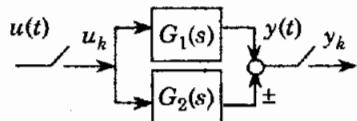
- b) Cả hai khối $G_1(s)$ và $G_2(s)$ ở hình 2.62b) không phải là không liên tục, vì $x(t)$ ở đây là tín hiệu ra của $G_1(s)$ đồng thời cũng là tín hiệu vào của $G_2(s)$ là tín hiệu liên tục. Nhưng toàn bộ hệ thống với hàm truyền $G_2(s) \cdot G_1(s)$ lại là hệ không liên tục, bởi vậy hàm truyền đạt tương đương $G(z)$ cho cả hệ sẽ là:

$$G(z) = \beta \{ G_2(s) \cdot G_1(s) \}.$$

2) Hai khối song song:

Hệ gồm hai khối nối song song được mô tả trong hình 2.63 có tín hiệu vào ra đều ở dạng xung. Các tín hiệu này cũng là tín hiệu vào ra của từng khối. Bởi vậy mô hình không liên tục $G(z)$ chung cho cả hệ sẽ là

$$G(z) = \beta \{ G_1(s) \} \pm \beta \{ G_2(s) \} = G_1(z) \pm G_2(z).$$

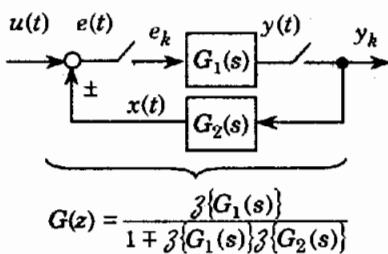


Hình 2.63: Hệ có hai khối song song.

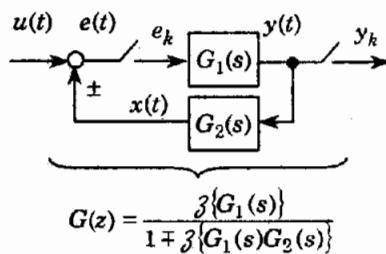
3) Hệ hồi tiếp:

Hình 2.64 mô tả hệ hồi tiếp với hai trường hợp khác nhau: Tín hiệu hồi tiếp về là xung (hình 2.64a) và là liên tục (hình 2.64b).

a)



b)



Hình 2.64: Hệ hồi tiếp.

Ở cả hai trường hợp, tín hiệu $u(t)$ có vẻ như không được trích mẫu. Song do trong $e(t)$ có chứa $u(t)$ nên khi trích mẫu $e(t)$ ta đã trích mẫu luôn cả $u(t)$. Như vậy hệ thống có tín hiệu vào không liên tục. Cộng thêm việc trích mẫu $y(t)$, hệ cũng có tín hiệu ra không liên tục. Bởi vậy hệ hồi tiếp đã cho chính là hệ không liên tục và dễ mô tả toàn bộ hệ hồi tiếp trên ta có ảnh $G(z)$ được tính như sau:

- a) Trường hợp hồi tiếp tín hiệu xung (y_k) (hình 2.64a):

$$\begin{aligned} Y(z) &= \beta \{ G_1(s) \} E(z) = G_1(z) E(z) && \text{với } E(z) \text{ là ảnh Z của } \{y_k\}, \\ &= G_1(z) [U(z) \pm X(z)] = G_1(z) [U(z) \pm G_2(z) Y(z)] \end{aligned}$$

Suy ra

$$[1 \mp G_1(z)G_2(z)Y(z)]Y(z) = G_1(z)U(z) \Leftrightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G_1(z)}{1 \mp G_1(z)G_2(z)}.$$

b) Trường hợp hồi tiếp tín hiệu liên tục $y(t)$ (hình 2.64b):

$$\begin{aligned} Y(z) &= G_1(z)E(z) = G_1(z)[U(z) \pm \mathcal{J}\{X(s)\}] = G_1(z)[U(z) \pm \mathcal{J}\{G_2(s)Y(s)\}] \\ &= G_1(z)[U(z) \pm \mathcal{J}\{G_2(s)G_1(s)E(s)\}] = G_1(z)[U(z) \pm \mathcal{J}\{G_2(s)G_1(s)\}E(z)] \\ &= G_1(z)[U(z) \pm \mathcal{J}\{G_2(s)G_1(s)\} \frac{Y(z)}{G_1(z)}]. \end{aligned}$$

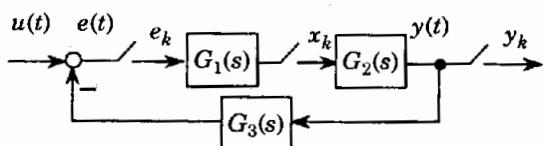
Suy ra

$$G(z) = \frac{G_1(z)}{1 \mp \mathcal{J}\{G_1(s)G_2(s)\}}.$$

Ví dụ 46: Xét hệ có mô hình sơ đồ khối cho trong hình 2.65. Từ sơ đồ khối đó ta có:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{J}\{G_1(s)G_2(s)\}E(z) = G_1(z)G_2(z)E(z) \\ &= G_1(z)G_2(z)[U(z) - \mathcal{J}\{G_3(s)Y(z)\}] = G_1(z)G_2(z)[U(z) - \mathcal{J}\{G_3(s)G_2(s)X(z)\}] \\ &= G_1(z)G_2(z)[U(z) - \mathcal{J}\{G_3(s)G_2(s)\}X(z)] \\ &= G_1(z)G_2(z)[U(z) - \mathcal{J}\{G_3(s)G_2(s)\}G_1(z)E(z)] \\ &= G_1(z)G_2(z)[U(z) - \mathcal{J}\{G_3(s)G_2(s)\}G_1(z) \frac{Y(z)}{G_1(z)G_2(z)}]. \end{aligned}$$

Vậy $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + \mathcal{J}\{G_2(s)G_3(s)\} \cdot G_1(z)}$. □



Hình 2.65: Minh họa cho ví dụ 45.

Ví dụ 47: Khi cài đặt một hệ thống với hàm truyền đạt $G(s)$ lên máy tính (hoặc các bộ vi xử lý, vi điều khiển), hệ sẽ có cấu trúc sơ đồ khối như hình 2.66 mô tả, trong đó $G_{ZOH}(s)$ là hàm truyền đạt của khâu giữ tín hiệu bậc 0 (mục 2.4.1):

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1 - e^{-sT_a}}{s}.$$

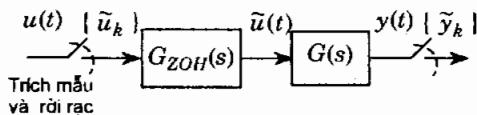
Toàn bộ hệ thống trong máy tính sẽ có hàm truyền đạt

$$G^*(s) = \left(1 - e^{-sT_a}\right) \frac{G(s)}{s}.$$

Nhưng do hệ thống $G^*(s)$ trong máy tính có tín hiệu đầu vào $\{\tilde{u}_k\}$, đầu ra $\{\tilde{y}_k\}$ đều là tín hiệu xung nên nó cũng là một hệ không liên tục và như vậy bên cạnh hàm truyền đạt $G^*(s)$ dạng liên tục nó còn có mô hình không liên tục như sau:

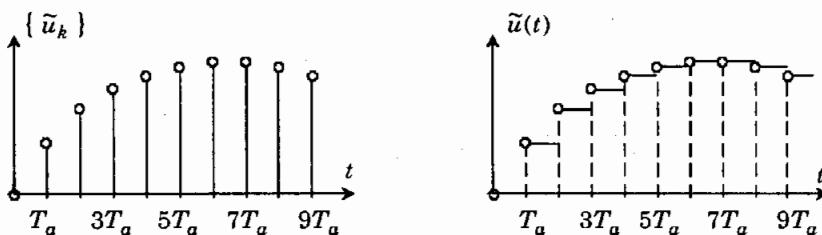
$$G^*(z) = \mathcal{Z}\{G^*(s)\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}. \quad \square$$

Hình 2.66: Cài đặt hệ thống vào máy tính.
Minh họa cho ví dụ 46



2.4.4 Mô hình trạng thái của hệ rời rạc có tín hiệu ra không liên tục

Với các hệ có tín hiệu vào rời rạc, tín hiệu ra không liên tục, thì bên cạnh mô hình trạng thái chung mà ta đã biết ở phần 2.3 sẽ còn có một mô hình trạng thái kiểu khác là mô hình trạng thái không liên tục thường được dùng khá phổ biến trong các công việc điều khiển có sử dụng kỹ thuật số.



Hình 2.67: Tín hiệu đầu vào dạng liên tục-rời rạc của hệ thống.

Xét một hệ thống MIMO có đầu vào $\underline{\tilde{u}}(t)$ dạng liên tục-rời rạc

$$\underline{\tilde{u}}(t) = \underline{\tilde{u}}_k \quad \text{khi} \quad kT_a \leq t < (k+1)T_a \quad (2.86)$$

(hình 2.67), đầu ra $\{\underline{y}_k\}$ dạng không liên tục và mô hình trạng thái liên tục

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{\tilde{u}} \quad (2.87a)$$

$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{\tilde{u}} \quad (2.87b)$$

trong đó $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ là vector n biến trạng thái, $\tilde{\underline{u}} \in \mathbb{R}^r$ là vector r tín hiệu vào, $\underline{y} \in \mathbb{R}^s$ là vector s tín hiệu ra, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{s \times r}$ là những ma trận có các phần tử là hằng.

Theo kết quả của mục 2.3.4 và 2.3.5 thì phương trình trạng thái (2.87a) có nghiệm:

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\underline{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)B \cdot \tilde{\underline{u}}(\tau) \cdot d\tau. \quad (2.88)$$

trong đó

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\},$$

Khi trích mẫu hai về của (2.88) tại điểm $t=kT_a$ ta được:

$$\underline{x}_k = \underline{x}(kT_a) = \Phi(kT_a)\underline{x}(0) + \int_0^{kT_a} \Phi(kT_a - \tau)B \cdot \tilde{\underline{u}}(\tau) \cdot d\tau. \quad (2.89)$$

Cũng như vậy nếu trích mẫu (2.88) tại $t=(k+1)T_a$ sẽ có:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}((k+1)T_a) = \Phi((k+1)T_a)\underline{x}(0) + \int_0^{(k+1)T_a} \Phi((k+1)T_a - \tau)B \cdot \tilde{\underline{u}}(\tau) \cdot d\tau$$

và nếu để ý rằng $\Phi((k+1)T_a) = \Phi(kT_a)\Phi(T_a)$ thì

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \Phi(T_a) \left[\Phi(kT_a)\underline{x}(0) + \int_0^{kT_a} \Phi(kT_a - \tau)B \cdot \tilde{\underline{u}}(\tau) \cdot d\tau \right] + \\ &\quad + \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \Phi((k+1)T_a - \tau)B \cdot \tilde{\underline{u}}(\tau) \cdot d\tau \\ &= \Phi(T_a)\underline{x}_k + \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \Phi((k+1)T_a - \tau)B \cdot \tilde{\underline{u}}(\tau) \cdot d\tau, \quad \text{vì (2.89)} \end{aligned}$$

Nhưng do có giả thiết (2.86) nên

$$\int_{kT_a}^{(k+1)T_a} \Phi((k+1)T_a - \tau)B \cdot \tilde{\underline{u}}(\tau) \cdot d\tau = \underbrace{\int_0^{T_a} \Phi(t)dt \cdot B \cdot \tilde{\underline{u}}_k}_H.$$

Bởi vậy, hệ rời rạc với tín hiệu ra không liên tục còn có mô hình không liên tục như sau:

$$\underline{x}_{k+1} = \Phi(T_a)\underline{x}_k + H \cdot \tilde{\underline{u}}_k \quad (2.90a)$$

$$\underline{y}_k = C\underline{x}_k + D \cdot \tilde{\underline{u}}_k, \quad (2.90b)$$

trong đó

$$H = \int_0^{T_a} \Phi(t) dt \cdot B . \quad (2.90c)$$

Ví dụ 48: Xét hệ SISO với tín hiệu vào $\tilde{u}(t)$ là rời rạc, tín hiệu ra $y(t)$ dạng không liên tục $\{y_k\}$, trong đó:

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}_k \quad \text{khi} \quad kT_a \leq t < (k+1)T_a, \quad \text{và} \quad y_k = y(kT_a), \quad T_a = 0,1s.$$

Hệ có mô hình trạng thái

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{u}(t), \quad y = (1 \ 1)x.$$

Từ

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

ta có

$$\Phi(T_a) = \begin{pmatrix} e^{-0.1} & 0 \\ 0 & e^{-0.2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.81 \end{pmatrix}$$

$$H = \int_0^{0.1} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^{0.1} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 - e^{-0.1} \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-0.2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.095 \end{pmatrix}.$$

Vậy mô hình không liên tục của hệ là

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.81 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.095 \end{pmatrix} \tilde{u}_k, \quad y = (1 \ 1)x_k. \quad \square$$

Thêm nữa, từ mô hình (2.90) ta còn thấy:

$$x_1 = \Phi(T_a)x_0 + H \cdot \tilde{u}_0$$

$$x_2 = \Phi(T_a)x_1 + H \cdot \tilde{u}_1 = [\Phi(T_a)]^2 x_0 + \Phi(T_a)H \tilde{u}_0 + H \cdot \tilde{u}_1$$

$$x_3 = \Phi(T_a)x_2 + H \cdot \tilde{u}_2 = [\Phi(T_a)]^3 x_0 + [\Phi(T_a)]^2 H \tilde{u}_0 + \Phi(T_a)H \tilde{u}_1 + H \cdot \tilde{u}_2$$

⋮

Suy ra:

Định lý 2.26: Hệ rời rạc MIMO với đầu vào $\tilde{u}(t)$ liên tục-rời rạc

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}_k \quad \text{khi} \quad kT_a \leq t < (k+1)T_a$$

đầu ra $\{y_k\}$ không liên tục và được mô tả bởi

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}, & \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{u} \in \mathbb{R}^r, \underline{y} \in \mathbb{R}^s, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r}, C \in \mathbb{R}^{s \times n}, D \in \mathbb{R}^{s \times r} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases}$$

sẽ có vector các giá trị trạng thái và tín hiệu ra là

$$\underline{x}_k = [\Phi(T_a)]^k \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} [\Phi(T_a)]^{k-i-1} H \underline{u}_i \quad (2.91a)$$

$$\underline{y}_k = C \underline{x}_k + D \cdot \underline{u}_k. \quad (2.91b)$$

2.4.5 Vài điều lưu ý

Giống như phép ở rời rạc với toán tử Z đã được nói tới tại mục 1.4.4 của chương 1 (trang 34), mô hình không liên tục $G(z)$ thu được từ $G(s)$ thông qua toán tử \mathcal{Z} , hay mô hình (2.90) thu được từ (2.87) nhờ việc trích mẫu nghiệm $\underline{x}(t)$ chỉ là một trong vô số các mô hình không liên tục khác có cùng nguồn gốc từ mô hình liên tục. Chẳng hạn như:

1) Mô hình không liên tục xấp xỉ loại 1:

a) thay $\frac{d\underline{x}}{dt} \approx \frac{\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k}{T_a}$ cho mô hình trạng thái liên tục để có mô hình trạng thái không liên tục,

b) thay s trong hàm truyền đạt liên tục $G(s)$ bằng $\frac{z-1}{T_a}$ để có hàm truyền đạt không liên tục $G(z)$.

2) Mô hình không liên tục xấp xỉ loại 2:

a) thay $\frac{d\underline{x}}{dt} \approx \frac{\underline{x}_k - \underline{x}_{k-1}}{T_a}$ cho mô hình trạng thái liên tục để có mô hình trạng thái không liên tục,

b) thay $s = \frac{z-1}{T_a z}$ trong hàm truyền đạt liên tục $G(s)$ để có hàm truyền không liên tục $G(z)$,

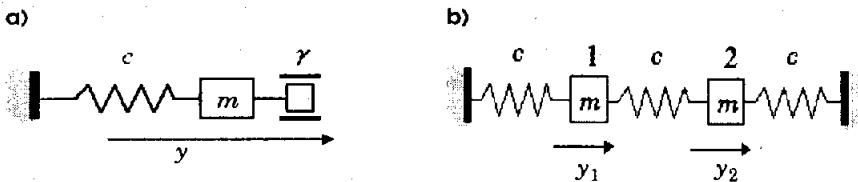
3) Công thức Tustin: Thay s trong $G(s)$ bằng $\frac{2(z-1)}{T_a(z+1)}$ để có $G(z)$.

đều là những mô hình không liên tục có cùng một nguồn gốc.

Tuy nhiên, mô hình không liên tục $G(z)$ thu được nhờ toán tử \mathcal{Z} , hay (2.90) nhờ trích mẫu nghiệm $\underline{x}(t)$ vẫn được sử dụng nhiều nhất. Lý do đơn giản chỉ là vì chúng có bản chất động học (tính ổn định, tính điều khiển được ...) hoàn toàn giống như mô hình liên tục gốc mà điều này ở các mô hình không liên tục khác không có được. Ví dụ, như sau này ta sẽ thấy, mô hình thu được với việc xấp xỉ loại 1, loại 2 hay công thức Tustin nói trên thường dẫn đến một mô hình không liên tục không ổn định trong khi mô hình liên tục gốc của chúng lại ổn định.

Câu hỏi ôn tập và bài tập

- Cho hệ gồm một lò xo có hệ số đàn hồi c , một vật có khối lượng m như hình 2.68a) mô tả. Xác định phương trình mô tả chuyển động của vật dưới tác động của lực $u(t)$ vào vật có để ý đến lực ma sát tĩnh với hệ số γ . Hệ có tuyến tính không và tại sao?
- Hình 2.68b) mô tả hệ gồm ba lò xo có cùng hệ số đàn hồi c và hai vật với cùng khối lượng m đang ở vị trí cân bằng. Tại thời điểm $t=+0$ vật thứ hai bị một lực tugging thời đánh bật ra khỏi vị trí cân bằng với vận tốc v_0 . Bỏ qua lực ma sát, hãy xác định phương trình chuyển động của vật thứ nhất. Hệ có tuyến tính không và tại sao?



Hình 2.68: Minh họa cho bài tập 1 và bài tập 2.

- Xác định xem những hệ nào trong số các hệ sau là tuyến tính, tuyến tính không dừng và tuyến tính tham số rải.

a) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = \frac{du}{dt} + 5u$

b) $t^4 \frac{dy}{dt} + \cos(t^2)y = 5\frac{du}{dt} + 2u$

c) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2y\frac{dy}{dt} + 2y = u$

d) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x_1 x_2 + u) \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 4t^2 x_2 + u_1 \sin t \\ t^3 x_2 + x_1 \\ x_2 + x_3 + u_2 \end{pmatrix} \\ y = 2x_1 + \cos(t)x_3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \cos(2t)x_2 + u \\ x_1 + t^3 x_2 \\ y = \sin(t^2)x_1 + x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + x_3 + u \\ t^2 x_1 + x_3^2 \\ x_3 + u \end{pmatrix} \\ y = x_1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} t^3 x_1 + \sin(4t)x_2 + x_3 + u \\ t^2 x_1 + 2u \\ x_2 + u \end{pmatrix} \\ y = \sin(e^t)x_1 + t^3 x_2 \end{cases}$

- Hãy xác định hàm trọng lượng $g(t)$ và hàm quá độ $h(t)$ của những hệ tuyến tính có hàm truyền đạt như sau:

a) $G(s) = \frac{1}{0,2s(1+s)(1+3s)}$

b) $G(s) = \frac{1+2s}{(1+3s)(1+5s)}$

$$c) \quad G(s) = \frac{s+1}{2s^2 + 3s + 4}$$

$$d) \quad G(s) = \frac{2s^2 - 2s + 3}{s(2s^2 - 4s + 1)}$$

$$e) \quad G(s) = \frac{3s^3 + 3s^2 - 4s + 8}{(s^2 + 4)(s^2 + 2s + 2)}$$

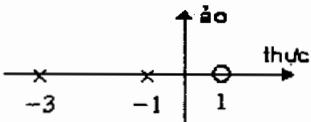
$$f) \quad G(s) = \frac{1}{s(1 + 2s)^3}$$

$$g) \quad G(s) = \frac{7s^2 - 20s - 75}{s^3 + 6s^2 + 25s}$$

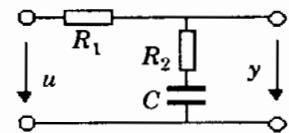
$$h) \quad G(s) = \frac{5s^3 + 11s^2 - s + 1}{s^4 + 4s^3 + 2s^2 - 4s - 3}$$

- 5) Xác định hàm truyền đạt của hệ thống có sơ đồ điểm cực (được đánh dấu bởi \times) và điểm không (được đánh dấu bởi O) cho trong hình 2.69, biết rằng $G(0)=2$. Tìm và vẽ đồ thị hàm trọng lượng, hàm quá độ. Có nhận xét gì về hệ thống qua các đồ thị đó.

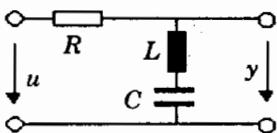
- 6) Hãy xác định hàm truyền đạt cũng như các thành phần khuếch đại, tích phân, vi phân của các hệ sau:



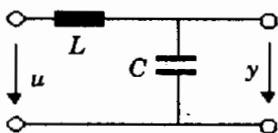
Hình 2.69: Cho bài tập 5.



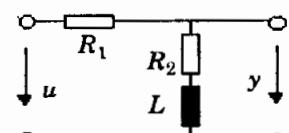
a)



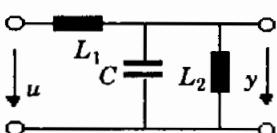
b)



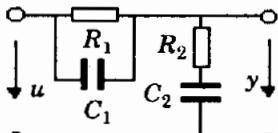
c)



d)



e)



f)

Hình 2.70: Cho bài tập 6.

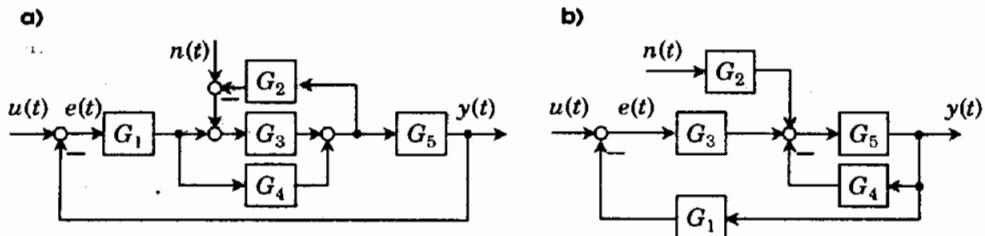
- 7) Cho hệ thống có sơ đồ khôi như hình 2.71 mô tả. Hệ có tín hiệu vào $u(t)$, còn gọi là **tín hiệu chủ đạo** và ra $y(t)$. Tín hiệu $n(t)$ là nhiễu tác động vào hệ. Tín hiệu $e(t)$ là sai lệch giữa tín hiệu chủ đạo $u(t)$ so với thực tế hệ có được $y(t)$. Ký hiệu ảnh Laplace của $u(t)$ là $U(s)$, của $y(t)$ là $Y(s)$, của $n(t)$ là $N(s)$ và của $e(t)$ là $E(s)$. Hãy

- a) Xác định hàm truyền đạt $G(s) = \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{n(t)=0}$ của hệ khi không có nhiễu.

- b) Xác định hàm nhạy của hệ (*sensitivity function*) $S(s) = \left. \frac{Y(s)}{N(s)} \right|_{u(t)=0}$ (hàm nhạy có tác dụng do thành phần nhiễu có lắn trong tín hiệu ra).

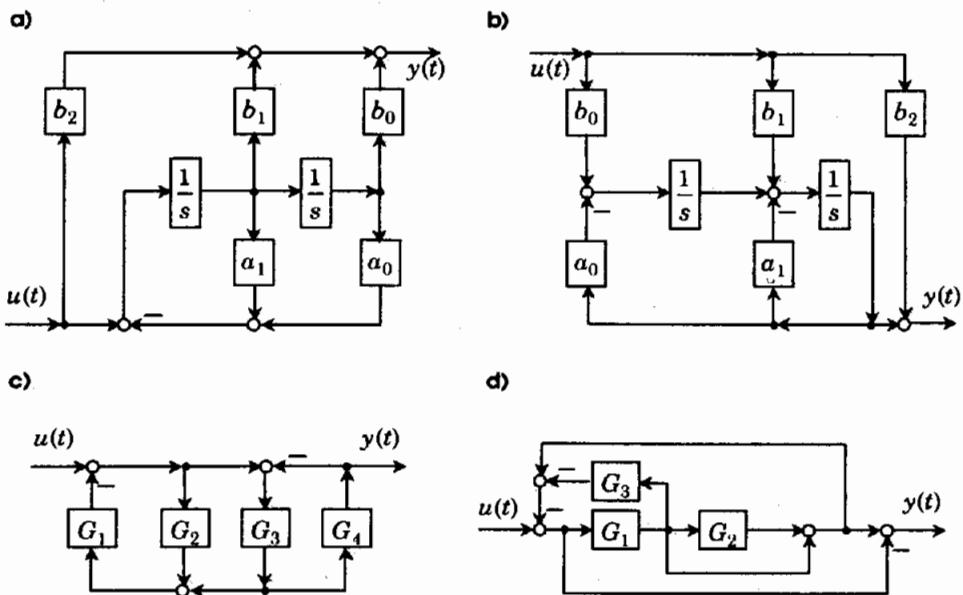
c) Xác định hàm truyền đạt biểu diễn sai lệch theo đầu vào $E_1(s) = \frac{E(s)}{U(s)} \Big|_{n(t)=0}$

d) Xác định hàm truyền đạt biểu diễn sai lệch theo nhiễu $E_2(s) = \frac{E(s)}{N(s)} \Big|_{u(t)=0}$



Hình 2.71: Cho bài tập 7.

8) Tìm hàm truyền đạt của những hệ thống có sơ đồ khối sau:



Hình 2.72: Cho bài tập 8.

9) Hãy vẽ đường đặc tính tần biên-pha, đường đặc tính tần logarith (biểu đồ Bode) của những hệ thống có hàm truyền đạt cho như sau:

a) $G(s) = \frac{1}{1+sT}$

b) $G(s) = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$

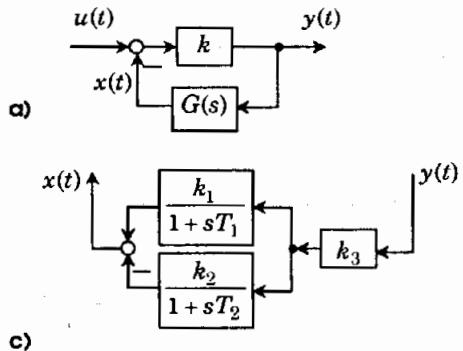
$$c) \quad G(s) = \frac{k}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

$$d) \quad G(s) = k \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right)$$

$$e) \quad G(s) = k \frac{(1+T_1's)(1+T_2's) \cdots (1+T_n's)}{(1+T_1s)(1+T_2s) \cdots (1+T_ns)} \text{ với } T_1 > T_1' > T_2 > T_2' > \cdots > T_n > T_n'$$

- 10) Cho hệ thống phản hồi tín hiệu ra có sơ đồ khối mô tả ở hình 2.73a). Hãy tìm hàm truyền đạt của hệ thống khi $G(s)$ có cấu trúc cho trong các hình 2.73b) và 2.73c). Trong trường hợp nào thì hệ sẽ là hệ pha cực tiểu?

Hình 2.73: Cho bài tập 10.



- 11) Chứng minh rằng đường đặc tính tần số biên-pha của hệ có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$$

là một đường tròn nếu $a_0 a_2 > 0$, $a_1 \neq 0$ và $\det \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{pmatrix} = 0$. Hãy xác định tâm và bán kính của đường tròn.

- 12) Xét một hệ thống tuyến tính có hàm truyền đạt $G(s)$ hợp thức và có dạng

$$G(s) = k \frac{(1+T_1's)(1+T_2's) \cdots (1+T_m's)}{(1+T_1s)(1+T_2s) \cdots (1+T_ns)}, \quad k > 0$$

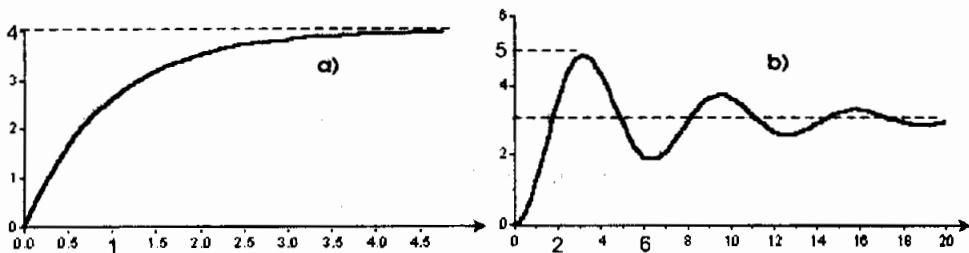
trong đó các hằng số thời gian $T_i' \in \mathbb{R}$ của đa thức tử số và $T_i \in \mathbb{R}$ của đa thức mẫu số được sắp xếp theo thứ tự

$$T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq T_n \quad \text{và} \quad T_1' \leq T_2' \leq \cdots \leq T_m'$$

Chứng minh rằng:

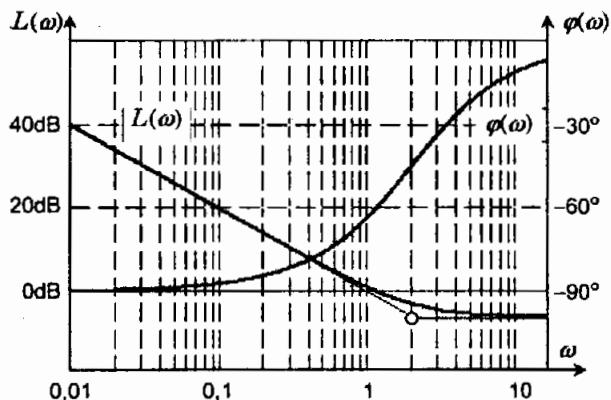
- a) Nếu có m bất đẳng thức $T_n > T_m'$, $T_{n-1} > T_{m-1}'$, ..., $T_{n-m-1} > T_1'$, thì đồ thị của $h(t)$ không lượn sóng và không giảm.

- b) Nếu có q bất đẳng thức ở câu a) không được thỏa mãn thì đồ thị của $h(t)$ sẽ có đúng q điểm cực trị.
- 13) Hãy xác định các hàm truyền đạt $G(s)$ cho những hệ thống tuyến tính có hàm quá độ $h(t)$ với đồ thị cho trong hình 2.74 dưới đây.



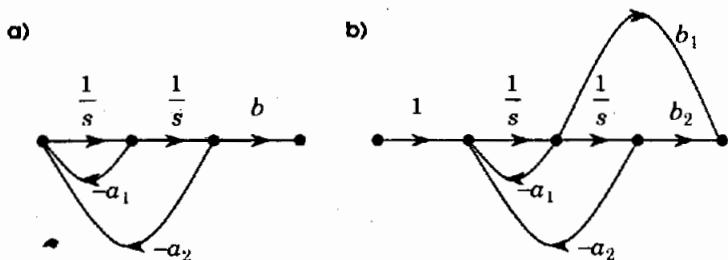
Hình 2.74: Cho bài tập 13.

- 14) Hãy xác định hàm truyền đạt $G(s)$ của một hệ tuyến tính có biểu đồ Bode cho ở hình 2.75 dưới đây. Từ đó xây dựng đường đặc tính tần biên-pha của hệ thống.



Hình 2.75: Cho bài tập 14.

- 15) Xác định hàm truyền đạt của những hệ thống có sơ đồ tín hiệu cho trong hình 2.76.

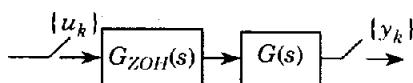


Hình 2.76: Cho bài tập 15.

- 16) Hãy tìm hàm truyền đạt $G(s)$ hợp thức và bền cho hệ tuyến tính, biết rằng phần thực $T(\omega)$ của hàm đặc tính tần $\tilde{G}(j\omega)$ của hệ là:
- $T(\omega) = \operatorname{Re} \tilde{G}(j\omega) = \frac{5 - 20\omega^2}{1 + 17\omega^2 + 16\omega^4}$.
 - $T(\omega) = \operatorname{Re} \tilde{G}(j\omega) = \frac{\omega^4 - 2\omega^2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$.
- 17) Hãy tìm hàm truyền đạt $G(s)$ hợp thức và bền cho hệ tuyến tính, nếu $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$ và phần ảo $A(\omega)$ của hàm đặc tính tần $\tilde{G}(j\omega)$ của hệ là:
- $A(\omega) = \operatorname{Im} \tilde{G}(j\omega) = \frac{25\omega}{1 + 17\omega^2 + 16\omega^4}$.
 - $A(\omega) = \operatorname{Im} \tilde{G}(j\omega) = \frac{-3\omega^3 - \omega}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$.
- 18) Kiểm tra xem hàm đặc tính tần của khâu IT₁ có thỏa mãn định lý 2.9 về toán tử Hilbert không và giải thích tại sao?
- 19) Hãy tìm hàm truyền đạt $G(s)$ cho một hệ tuyến tính pha cực tiểu, biết rằng:
- $$|\tilde{G}(j\omega)|^2 = \frac{\omega^4 - \omega^2 + 1}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 1)}$$
- 20) Cho hệ thống SISO mô tả bởi
- $$G(s) = \frac{4}{(s+3)^2(s+2)(s+1)}$$
- Hãy xác định tín hiệu $u(t)$ sao cho khi kích thích hệ từ trạng thái 0 bằng $u(t)$ ở đầu vào thì sau một khoảng thời gian đủ lớn hệ sẽ có đáp ứng $y(t)$ có góc lệch pha với $u(t)$ là $\pm 90^\circ$.
- 21) Cho hệ thống SISO có hàm truyền đạt
- $$G(s) = \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{sT_1(1+sT_1)(1+sT_2)},$$
- với $T_1 = 10^{-3}$ giây, $T_1 = 1$ giây, $T_2 = 5$ mili giây, $T_1' = 0,2$ giây và $T_1' = 20$ mili giây.
- Hãy xây dựng biểu đồ Bode của hệ thống.
 - Xác định biên độ $|\tilde{G}(j\omega)|$ và góc pha $\phi(\omega)$ tại những điểm tần số $\omega_1 = 2 \text{ giây}^{-1}$, $\omega_2 = 80 \text{ giây}^{-1}$, $\omega_3 = 750 \text{ giây}^{-1}$.
- 22) Hãy xác định chuẩn cực đại $\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)|$ của những hàm truyền đạt cho trong bài tập 9 ở các câu a), b) và e).

- 23) Cho những hệ thống có hàm truyền đạt như sau:
- 1) $G(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+4)}$
 - 2) $G(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s^2+2s+4)}$
 - 3) $G(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^3+9s^2+27s+27}$
 - 4) $G(s) = e^{-as} \quad (a>0)$
- a) Những hệ nào là pha cực tiểu?
 b) Trong số những hệ không phải là pha cực tiểu, hãy xác định hệ pha cực tiểu tương ứng với nó.
- 24) Hãy tìm mô hình trạng thái dạng chuẩn điều khiển và dạng chuẩn quan sát cho các hệ thống SISO có hàm truyền đạt $G(s)$ cho trong bài tập số 4.
- 25) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Hãy xác định $\text{Im}(A)$, $\text{Ker}(A)$ và kiểm tra tính trực giao của chúng.
- 26) Xác định ma trận hàm e^{At} với
- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$
 - b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$
 - c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
 - d) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
 - e) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
 - f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 27) Cho hệ SISO có mô hình trạng thái
- $$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}u, \quad y = 5x_2,$$
- trong đó A là ma trận hệ thống cho trong bài tập số 26 ở các câu c), d), e) và f). Hãy xác định:
- a) Bậc tương đối của hệ thống.
 - b) Đáp ứng của hệ khi được kích thích từ trạng thái ban đầu \bar{x}_0 bằng tín hiệu $1(t)$ ở đầu vào.
 - c) Hàm truyền đạt $G(s)$ của hệ thống.
 - d) Mô hình không liên tục tương ứng, khi $u(t)=u_k$ với $kT_a \leq t < (k+1)T_a$, tín hiệu ra là không liên tục $\{y_k\}$ và $T_a=0,1s$.
- 28) Chứng minh rằng hàm truyền đạt của khâu giữ tín hiệu bậc 0 không có điểm cực hữu hạn.

- 29) Người ta đã cài đặt các hệ thống SISO có hàm truyền đạt $G(s)$ cho trong bài tập 4 vào máy tính (hình 2.77). Hãy xác định hàm truyền đạt không liên tục tương ứng của hệ.



Hình 2.77: Cho bài tập 29.

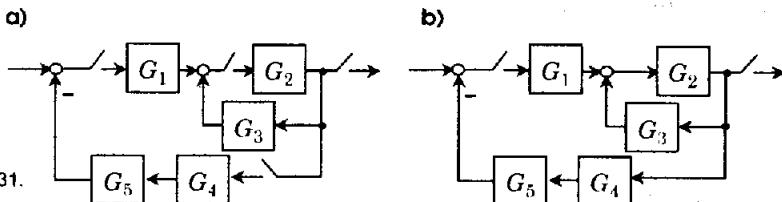
- 30) Chứng minh rằng:

$$\text{a)} \quad \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = \frac{z}{z - e^{aT_a}}. \quad \text{b)} \quad \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{(s-a)^k}\right\} = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}}\left(\frac{z}{z - e^{aT_a}}\right).$$

$$\text{c)} \quad \mathcal{Z}\left\{\frac{G_{ZOH}(s)}{s-a}\right\} = G_{ZOH}(a) \frac{e^{aT_a}}{z - e^{aT_a}}.$$

$$\text{d)} \quad \mathcal{Z}\left\{\frac{F(s)}{s-a}\right\} = F(a) \frac{e^{aT_a}}{z - e^{aT_a}}, \text{ nếu } F(s) \text{ không có điểm cực hữu hạn.}$$

- 31) Hãy xác định hàm truyền đạt không liên tục cho các hệ có sơ đồ khổi sau:



Hình 2.78: Cho bài tập 31.

3 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG

3.1 Những khái niệm chung của phân tích

3.1.1 Nhiệm vụ của công việc phân tích hệ thống

Đã có một mô hình mô tả hệ thống thì bước tiếp theo là trên cơ sở mô hình đã có phải phân tích, phải rút ra được một số kết luận cơ bản về tính chất của hệ thống cần thiết cho việc tổng hợp, thiết kế bộ điều khiển hay lập chương trình điều khiển. Đây cũng là một nguyên lý mang tính triết học của môn học điều khiển tự động, tức là trước tiên người ta phải bắt đầu với những hiểu biết sơ lược về hệ thống để có mô hình rồi từ mô hình phân tích tiếp để có được những điều còn chưa biết về hệ thống.

Mặc dù khái niệm phân tích hệ thống bây giờ mới được đề cập đến, song một số định lý nền ở chương 2 đã mang tính chất phục vụ việc phân tích đó. Chẳng hạn:

- Định lý 2.5, mục 2.1.5 cho ta biết thêm từ hàm truyền đạt bêu $G(s)$ của hệ thống về biên độ, góc lệch pha của đáp ứng $y(t)$ cho trường hợp $t \rightarrow \infty$ khi hệ được kích thích bởi tín hiệu điều hòa $u(t)$.
- Định lý 2.6, 2.7 cũng của mục 2.1.5 cho biết thêm từ hàm đặc tần số $\tilde{G}(j\omega)$ các thành phần cơ bản có trong hệ thống (khuếch đại, tích phân, vi phân) và tính chất của đáp ứng $y(t)$ tại những điểm tần số đặc biệt $\omega=0$, $\omega=\infty$.
- Định lý 2.10, mục 2.2.8 chỉ rõ việc từ hàm truyền đạt có thể nhận biết được hệ có phải là hệ pha cực tiểu hay không.
- Định lý 2.15, 2.18 của mục 2.3.4 và mục 2.3.5 giúp ta từ ma trận hàm mũ e^{At} cũng như ma trận hàm $\Phi(t)$ có được thành phần tự do trong đáp ứng của hệ thống, trong đó thành phần tự do được hiểu là thành phần ứng với kích thích $u(t)=0$ và trạng thái đầu $x(0)\neq 0$.
- ⋮

Chúng ta sẽ đồng ý với nhau rằng khó mà có thể phân tích để có được tất cả những điều chưa biết về hệ thống. Vì vậy công việc phân tích sẽ được gọi là tạm hoàn thành nếu như ta đã có thêm được một vài điều bổ ích chưa biết về hệ thống mà những điều đó là đủ để ta bắt đầu được công việc tổng hợp, thiết kế bộ điều khiển. Nhưng những điều gì sẽ được gọi là cần thiết và tạm đủ cho công việc tổng hợp. Trước hết đó là:

- 1) Hiểu biết về sự phân bố các điểm cân bằng của hệ thống. Một điểm trạng thái \underline{x}_e được gọi là điểm cân bằng nếu như khi hệ đang ở điểm trạng thái \underline{x}_e và không có một tác động nào từ bên ngoài thì hệ sẽ nằm nguyên tại đó. Theo định nghĩa như vậy thì điểm cân bằng \underline{x}_e của hệ thống phải là nghiệm của:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} = 0 \quad (A \text{ không suy biến}) \quad (3.1)$$

Điều này cũng dễ hiểu, vì theo định nghĩa, điểm cân bằng là điểm mà hệ thống sẽ nằm im tại đó, tức là trạng thái của nó không bị thay đổi ($\frac{d\underline{x}}{dt} = 0$) khi không có sự tác động từ bên ngoài ($u=0$). Ta có thể thấy ngay được từ (3.1) là hệ tuyến tính chỉ có một điểm trạng thái cân bằng \underline{x}_e và đó là điểm gốc tọa độ 0 của \mathbb{R}^n .

- 2) Hiểu biết về tính ổn định của hệ thống. Một hệ thống được gọi là:

- **ổn định BIBO** nếu khi kích thích hệ bằng tín hiệu $u(t)$ bị chặn ở đầu vào, tức là $u(t)$ có chuẩn vô cùng hữu hạn, thì hệ sẽ có đáp ứng $y(t)$ ở đầu ra cũng bị chặn (ổn định BIBO, chữ viết tắt của Bound Inputs - Bound Outputs)
- hoặc được gọi là **ổn định tiệm cận Lyapunov** tại điểm cân bằng \underline{x}_e nếu như khi có một tác động tức thời (chẳng hạn như nhiễu tức thời) đánh bật hệ ra khỏi \underline{x}_e thì sau đó hệ có khả năng tự quay về điểm cân bằng \underline{x}_e .

Chú ý rằng khái niệm ổn định Lyapunov của hệ thống chỉ có nghĩa khi đi cùng với điểm cân bằng \underline{x}_e . Có thể hệ sẽ ổn định tại điểm cân bằng này, song lại không ổn định ở điểm cân bằng khác. Nhưng do ở hệ tuyến tính chỉ có một điểm cân bằng là gốc tọa độ ($\underline{x}_e=0$) nên khi hệ ổn định tại 0 , người ta cũng nói luôn một cách ngắn gọn là hệ ổn định giống như khái niệm ổn định BIBO.

- 3) Hiểu biết về tính điều khiển được của hệ thống tại một điểm trạng thái cho trước. Tại sao lại cần phải hiểu biết về tính điều khiển được?. Nhiệm vụ chính của điều khiển là tìm được tín hiệu điều khiển mang lại cho hệ thống một chất lượng mong muốn, tức là phải tìm ra được một tín hiệu thỏa mãn chất lượng đề ra trong số các tín hiệu có khả năng đưa hệ thống từ điểm trạng thái \underline{x}_0 ban đầu tới được điểm trạng thái đích \underline{x}_T . Nếu như không tồn tại bất cứ một tín hiệu điều khiển nào đưa được hệ từ \underline{x}_0 tới \underline{x}_T thì sự cố gắng tổng hợp hay dù tìm tín hiệu điều khiển như trên sẽ trở nên vô nghĩa (bài toán không có lời giải). Bởi vậy, để công việc điều khiển có thể có kết quả ta phải biết được rằng có tồn tại hay không ít nhất một tín hiệu điều khiển đưa được hệ thống từ \underline{x}_0 về \underline{x}_T trong khoảng thời gian T hữu hạn. Nếu như tồn tại một tín hiệu điều khiển làm được việc đó thì ta nói hệ thống là điều khiển được tại điểm trạng thái \underline{x}_0 .

- 4) Hiểu biết về *tính quan sát* được của hệ thống tại một điểm trạng thái cho trước. Hãy quay lại vấn đề chính là xây dựng bộ điều khiển cho hệ thống để minh họa. Nếu sau khi đã biết là công việc xây dựng bộ điều khiển có thể có kết quả (hệ điều khiển được tại \underline{x}_0) thì công việc tiếp theo là phải xác định được \underline{x}_0 để từ đó bộ điều khiển có thể tạo ra được tín hiệu điều khiển thích hợp dựa hệ từ \underline{x}_0 về \underline{x}_T . Công việc xác định điểm trạng thái \underline{x}_0 có thể được tiến hành bằng cách do trực tiếp (nhờ các bộ cảm biến, sensor) nhưng có khi phải tính toán, phải quan sát khi không thể đo được trực tiếp \underline{x}_0 , chẳng hạn như giá tốc không thể đo được trực tiếp mà phải được suy ra từ việc đo tốc độ trong một khoảng thời gian cho phép. Trong trường hợp phải quan sát, phải tính toán ra \underline{x}_0 người ta nói điểm trạng thái \underline{x}_0 của một hệ là quan sát được nếu ta có thể xác định được nó thông qua việc đo các tín hiệu vào/ra trong *một khoảng thời gian hữu hạn*. Yêu cầu phải đo trong khoảng thời gian hữu hạn là rất quan trọng. Khoảng thời gian quan sát càng ngắn sẽ càng tốt cho công việc điều khiển sau này. Nếu thời gian quan sát quá lớn, điểm trạng thái \underline{x}_0 vừa xác định được sẽ mất ý nghĩa ứng dụng cho bài toán điều khiển, ví dụ khi có được \underline{x}_0 thì có thể hệ đã chuyển đến một điểm trạng thái mới cách rất xa điểm trạng thái \underline{x}_0 (tính thời gian thực không tốt).

3.1.2 Quá trình cưỡng bức và quá trình tự do

Trong công việc phân tích ta thường sử dụng khái niệm *quá trình cưỡng bức* và *quá trình tự do* của một hệ thống. Hai khái niệm đó được giải thích như sau:

- Quá trình cưỡng bức là đáp ứng của hệ ứng với tín hiệu đầu vào $\underline{u}(t)$ và tại thời điểm bắt đầu kích thích hệ có trạng thái bằng $\underline{0}$.
- Quá trình tự do được biểu diễn bằng tín hiệu đầu ra $\underline{y}(t)$ của hệ khi không bị kích thích nhưng lại có trạng thái ban đầu khác $\underline{0}$.

Giả sử hệ được mô tả bởi mô hình trạng thái

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\underline{x} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad (3.2)$$

Như vậy thì khi kích thích hệ bằng tín hiệu vào $\underline{u}(t)$, do tính chất tuyến tính của hệ, đáp ứng $\underline{y}(t)$ sẽ có hai thành phần:

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_c(t) + \underline{y}_t(t)$$

ứng với:

- Thành phần $\underline{y}_c(t)$ là nghiệm của phương trình trạng thái (3.2) với $\underline{u}(t)$ cho trước và trạng thái đầu $\underline{x}(0)=\underline{0}$. Đó chính là phương trình mô tả *quá trình cưỡng bức*.

- Thành phần $\underline{y}_t(t)$ là nghiệm của (3.2) ứng với $\underline{u}(t)=\underline{0}$ và trạng thái đầu $\underline{x}(0)$ cho trước. Đó chính là phương trình mô tả quá trình tự do.

Một cách hoàn toàn tương tự, nếu hệ SISO được mô tả bởi phương trình vi phân

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y}{dt^n} = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m} \quad (3.3)$$

thì khi kích thích hệ bằng tín hiệu vào $u(t)$, đáp ứng $y(t)$ cũng có hai thành phần

$$y(t) = y_c(t) + y_t(t)$$

trong đó

- 1) $y_c(t)$ mô tả quá trình cưỡng bức và đó là nghiệm của (3.3) ứng với trạng thái đầu

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \dots = \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} = 0.$$

- 2) $y_t(t)$ mô tả quá trình tự do và đó là nghiệm thuần nhất của (3.3)

Định lý 3.1: Khi hệ thống được mô tả bởi mô hình trạng thái (3.2) thì nó sẽ có:

a) quá trình tự do $\underline{y}_t(t) = C e^{At} \underline{x}(0)$,

b) và quá trình cưỡng bức $\underline{y}_c(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau + D \underline{u}$.

Chứng minh: Tính đúng đắn của định lý 3.1 được suy ra một cách trực tiếp từ công thức (2.66) cho trong mục 2.3.4 (trang 142). \square

Ví dụ 1: Cho hệ thống SISO có hai biến trạng thái được mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_A \underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_B u, \quad y = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}}_C \underline{x}.$$

Theo kết quả của ví dụ 36, mục 2.3.3 của chương 2 (trang 133) thì

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Do đó khi kích thích hệ từ trạng thái $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bởi $u(t) = 1(t)$ ở đầu vào, hệ sẽ có đáp ứng $y(t)$ ở đầu ra tính theo (2.66) như sau:

$$y(t) = \underbrace{(2 \ 1) \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{y_t(t)} + \underbrace{(2 \ 1) \int_0^t \begin{pmatrix} e^{2(t-\tau)} & e^{3(t-\tau)} - e^{2(t-\tau)} \\ 0 & e^{3(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} d\tau}_{y_c(t)}$$

Nói cách khác

$$y_t(t) = (2 - 1) \cdot \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e^{3t}.$$

và

$$y_c(t) = (2 - 1) \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} 2e^{3(t-\tau)} - 3e^{2(t-\tau)} \\ 2e^{3(t-\tau)} \end{pmatrix} d\tau = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t}. \quad \square$$

Định lý 3.2: Khi hệ thống SISO được mô tả bởi phương trình vi phân (3.3) thì:

- a) Quá trình tự do sẽ được mô tả bởi nghiệm thuần nhất của (3.3), tức là

$$y_t(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \right\},$$

trong đó

$$A = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i y(+0)}{dt^i} s^{k-i-1}.$$

- b) Quá trình cưỡng bức sẽ được mô tả bởi nghiệm riêng của (3.3), tức là:

$$y_c(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m)U(s) - B}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \right\},$$

trong đó $U(s)$ là ảnh Laplace của $u(t)$ và

$$B = \sum_{k=1}^m b_k \sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i u(+0)}{dt^i} s^{k-i-1}.$$

Chứng minh: Từ các công thức (1.22) và (1.23) đã cho ở mục 1.3.3 thuộc chương 1 (trang 22) ta có ngay được các kết luận trên. \square

Ví dụ 2: Xét hệ có phương trình vi phân mô tả quan hệ vào ra

$$2y + 3 \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = u(t).$$

Nếu kích thích hệ bằng tín hiệu $1(t)$ và tại thời điểm kích thích $t=0$ hệ có các trạng thái đầu $y(0) = 5$, $\frac{dy(0)}{dt} = 2$ thì

- Quá trình tự do:

$$y_t(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3 \cdot 5 + (5s + 2)}{2 + 3s + s^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{12}{s+1} - \frac{7}{s+2} \right\} = 12e^{-t} - 7e^{-2t}.$$

- Quá trình cưỡng bức:

$$y_c(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(2 + 3s + s^2)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)} \right\} = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}. \quad \square$$

Quá trình tự do là thành phần có trong tín hiệu ra $\underline{y}(t)$ và thành phần đó chỉ phụ thuộc vào điểm trạng thái đầu chữ không bị ảnh hưởng bởi tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ nên nó sẽ mang nhiều thông tin đặc trưng cho tính động học của hệ thống. Hai định lý 3.1 và 3.2 cho phép ta xác định được quá trình tự do của một hệ thống tuyến tính từ mô hình của nó khi biết trước điểm trạng thái ban đầu để từ đó có thể có được một số kết luận về tính động học của hệ thống.

Song trong nhiều ứng dụng thực tế khi phân tích hệ thống thì việc xác định cụ thể quá trình tự do là quá mức cần thiết nếu không muốn nói là thừa. Phân lớn người ta chỉ cần tìm ra được dạng hoặc một vài tính chất đặc biệt của hàm $\underline{y}_t(t)$ mô tả quá trình tự do là đủ để có thể kết luận về tính chất động học của hệ thống.

Xét hệ có hàm truyền đạt $G(s)$ thực-hữu tỷ

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}, \quad m \leq n$$

và bến, tức là các điểm cực của $G(s)$ có phần thực âm, hay nghiệm của

$$A(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n = 0$$

đều nằm bên trái trục ảo (xem lại khái niệm hàm bến ở mục 1.3.4, chương 1, trang 24). Như vậy thì ảnh Laplace $Y_t(s)$ của quá trình tự do $y_t(t)$

$$Y_t(s) = \frac{A}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}, \quad \text{với} \quad A = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i y(+0)}{dt^i} s^{k-i-1}$$

là một hàm thực-hữu tỷ, hợp thức và bến. Do đó $y_t(t)$ có ảnh Fourier $Y_t(j\omega)$ và ảnh Fourier của nó thu được từ $Y_t(s)$ bằng cách thay $s = j\omega$:

$$Y_t(j\omega) = Y_t(s)|_{s=j\omega}.$$

Vì có ảnh Fourier nên $y_t(t)$ phải thỏa mãn (mục 1.2.2, chương 1, trang 6):

$$\int_0^\infty |y_t(t)| dt < \infty,$$

nói cách khác phải có

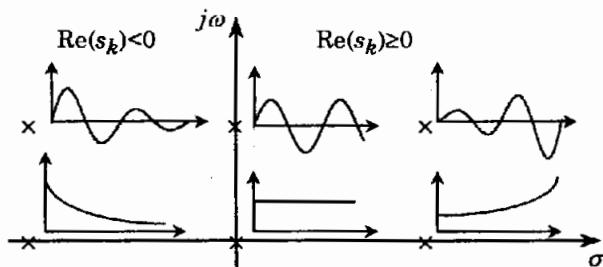
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t(t) = 0,$$

hay $y_t(t)$ là quá trình tắt dần.

Định lý sau đây chỉ rằng điều kiện bến của $G(s)$ không những là đủ mà còn là cần để quá trình tự do được tắt dần.

Định lý 3.3: Cần và đủ để quá trình tự do $y_t(t)$ của hệ thống SISO được tắt dần là hàm truyền đạt $G(s)$ thực-hữu tỷ của nó là hàm bến.

Chứng minh: Tính đúng đắn của "G(s) bền $\Rightarrow y_t(t)$ tắt dần" đã được xác nhận ở phần trên nên ở đây ta chỉ cần chứng minh cho điều ngược lại: "y_t(t) tắt dần $\Rightarrow G(s)$ bền". Giả thiết rằng G(s) không bền. Vậy thì G(s) cũng như Y_t(s) phải có ít nhất một điểm cực s_k không nằm bên trái trục ảo. Điều này dẫn đến trong y_t(t) phải có chứa một thành phần không tắt dần (hình 3.1) ứng với s_k và do đó y_t(t) cũng không tắt dần (trái với giả thiết). \square



Hình 3.1: Hệ thống có hàm truyền đạt bền sẽ có quá trình tự do tắt dần và ngược lại.

Theo định lý 3.3, nếu kích thích một hệ thống có hàm truyền đạt G(s) thực-hữu tỷ và hàm bền bởi u(t) ở đầu vào thì do quá trình tự do là tắt dần, sau một khoảng thời gian t đủ lớn ($t \rightarrow \infty$) trong đáp ứng y(t) tại đầu ra của hệ chỉ còn lại thành phần cưỡng bức y_c(t), tức là thành phần đáp ứng của hệ khi tại thời điểm bắt đầu kích thích hệ có trạng thái 0. Với điều nhận xét đó, trong định lý 2.5 (mục 2.1.5, chương 2, trang 82) ta hoàn toàn có thể bỏ điều kiện

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \dots = \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} = 0$$

mà không làm thay đổi kết luận, tức là:

Định lý 3.4: Nếu kích thích hệ SISO có hàm truyền đạt G(s) thực-hữu tỷ và bền bằng tín hiệu điều hòa u(t) = e^{jωt} tại đầu vào thì sau một khoảng thời gian đủ lớn, đáp ứng y(t) của hệ sẽ là

$$y(t) = |G(j\omega)|e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}, \text{ với } \varphi(\omega) = \arg G(j\omega).$$

Kết luận của định lý 3.3 cũng đúng nếu hệ là MIMO và được mô tả bởi phương trình trạng thái tham số hằng

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad (3.4)$$

Định lý 3.5: Cần và đủ để quá trình tự do $\underline{y}_t(t)$ của hệ thống MIMO mô tả bởi phương trình trạng thái tham số hằng (3.4) được tất dần là tất cả các giá trị riêng của A nằm bên trái trục ảo (nghiệm của $\det(sI - A) = 0$ có phần thực âm).

Chứng minh: Theo định lý 3.1, quá trình tự do của hệ MIMO được mô tả bởi

$$\underline{y}_t(t) = Ce^{At}\underline{x}(0),$$

trong đó C và $\underline{x}(0)$ đều có phần tử là hằng. Bởi vậy khái niệm $\underline{y}_t(t)$ tất dần đồng nghĩa với sự tất dần của các phần tử trong e^{At} . Cần và đủ để từng phần tử của e^{At} tất dần là ảnh Laplace của chúng là hàm bền (định lý 3.3). Nhưng vì ảnh Laplace của e^{At} là

$$(sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)_{\text{adj}}}{\det(sI - A)}$$

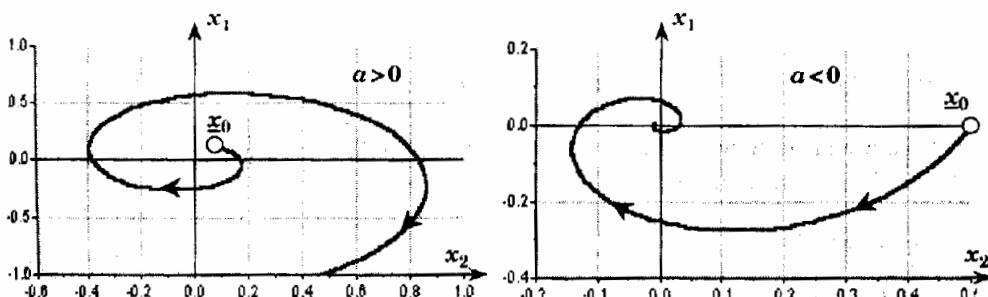
trong đó ký hiệu $(sI - A)_{\text{adj}}$ chỉ ma trận có phần tử thứ ij là tích $(-1)^{i+j}$ với định thức của ma trận thu được từ $(sI - A)$ bằng cách bỏ đi hàng và cột chứa phần tử đối xứng ji , nên các phần tử của $(sI - A)^{-1}$ đều có chung mẫu số $\det(sI - A)$. Vậy để tất cả các phần tử của $(sI - A)^{-1}$ là hàm bền thì nghiệm của $\det(sI - A) = 0$ phải nằm bên trái trục ảo. \square

Chú ý: Một ma trận có tất cả các giá trị riêng nằm bên trái trục ảo (có phần thực âm và khác 0) thường được gọi là *ma trận bền* (stable).

Ví dụ 3: Cho hệ có phương trình trạng thái

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}}_A \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \text{với} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ma trận A có các giá trị riêng $s_{1,2} = a \pm j$ nên sẽ là ma trận bền nếu $a < 0$ và khi đó quá trình tự do sẽ tất dần. Hình 3.2 biểu diễn quỹ đạo trạng thái của hệ khi không bị kích thích cho cả hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$. Cả hai quỹ đạo trạng thái đều bắt đầu từ điểm trạng thái $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$ cho trước. Ta có thể thấy sự tất dần của quá trình tự do ở trường hợp $a < 0$ thông qua dạng quỹ đạo trạng thái tiến về gốc tọa độ và kết thúc tại đó của nó. \square



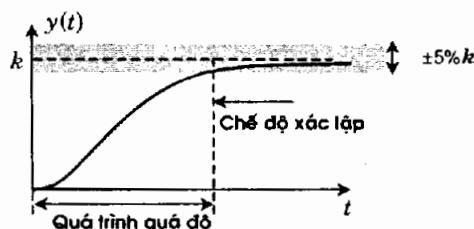
Hình 3.2: Minh họa cho ví dụ 3.

3.1.3 Quá trình quá độ và chế độ xác lập

Bên cạnh hai quá trình tự do và cường bức, trong khi phân tích hệ thống người ta còn thường sử dụng hai khái niệm khác là *quá trình quá độ* và *chế độ xác lập*. Quá trình quá độ là giai đoạn hệ thống đang chuyển đổi từ trạng thái cũ sang một trạng thái mong muốn khác. Chế độ xác lập là giai đoạn hệ thống đã đạt được đến trạng thái mới mong muốn (hoặc gần đến). Chẳng hạn khi đóng điện áp nguồn cung cấp cho một động cơ, quá trình động cơ tăng tốc độ vòng quay từ 0 đến một giá trị xác định được gọi là quá trình quá độ. Khi động cơ đã ổn định được vận tốc và chạy đều thì ta nói động cơ đang ở chế độ xác lập.

Cả hai quá trình quá độ và chế độ xác lập cùng có trong đáp ứng của hệ thống nhưng khác với quá trình tự do/cường bức, chúng không bị lẫn vào nhau. Tại một thời điểm nhất định, đáp ứng của hệ thống có thể có cả hai quá trình tự do và quá trình cường bức. Song với khái niệm quá trình quá độ/xác lập thì có hơi khác. Hệ thống chỉ có thể hoặc đang ở quá trình quá độ hoặc đã ở chế độ xác lập chứ không bao giờ có cả hai trong cùng một thời điểm.

Sẽ không có một điểm thời gian cụ thể phân chia quá trình quá độ với chế độ xác lập mà nó phụ thuộc vào quan niệm thế nào là "đã đến *"gần trạng thái mới mong muốn"* của bài toán điều khiển. Thông thường, ở bài toán tuyến tính người ta hay cho rằng thời điểm bắt đầu chế độ xác lập là khi hệ thống vào được tới vùng có sai lệch 5% (hoặc 2%) so với giá trị mong muốn và không ra khỏi vùng đó nữa (hình 3.3).



Hình 3.3: Điểm phân chia quá trình quá độ và chế độ xác lập.

Ví dụ 4: Cho hệ dao động bậc hai đơn có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2D\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \text{với} \quad 0 < D < 1.$$

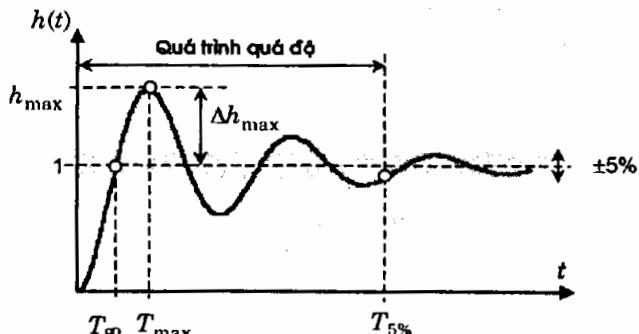
- Hãy xác định thời điểm kết thúc quá trình quá độ, tức là thời điểm $T_{5\%}$ mà kể từ đó hàm quá độ $h(t)$ luôn nằm trong dải phân cách 5% so với giá trị giới hạn $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1$.
- Hãy xác định một số tham số đặc trưng của quá trình quá độ bao gồm: Giá trị cực đại h_{\max} của $h(t)$, thời điểm T_{\max} mà tại đó $h(t)$ có giá trị cực đại h_{\max} , thời điểm T_∞ mà $h(t)$ lần đầu tiên đạt được giá trị giới hạn h_∞ .

Xuất phát từ $G(s)$ với điều kiện $0 < D < 1$ thì với ký hiệu $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - D^2}$ ta sẽ có

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2D\omega_n s + \omega_n^2)} = \\ = \frac{1}{s} - \frac{s + D\omega_n}{(s + D\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{D\omega_n}{(s + D\omega_n)^2 + \omega_d^2}.$$

Suy ra

$$h(t) = 1 - e^{-D\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} \sin \omega_d t \right), \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$



Hình 3.4: Minh họa cho ví dụ 4.

Với công thức (3.5) của $h(t)$ ta sẽ:

- 1) Tính T_∞ từ điều kiện $h(T_\infty) = 1$, tức là

$$1 = 1 - e^{-D\omega_n T_\infty} \left(\cos \omega_d T_\infty + \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} \sin \omega_d T_\infty \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \omega_d T_\infty + \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} \sin \omega_d T_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \tan(\omega_d T_\infty) = -\frac{\sqrt{1 - D^2}}{D}$$

$$\Rightarrow T_\infty = \frac{\varphi}{\omega_d} \quad \text{với} \quad \varphi = \text{atan} \frac{-\sqrt{1 - D^2}}{D}.$$

- 2) Xác định T_{\max} từ điều kiện $\frac{dh(T_{\max})}{dt} = 0$, tức là

$$\frac{dh(T_{\max})}{dt} = \sin(\omega_d T_{\max}) \frac{\omega_n e^{-D\omega_n T_{\max}}}{\sqrt{1 - D^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_d}.$$

3) Tính độ quá điệu chỉnh Δh_{\max} thông qua $\Delta h_{\max} = h(T_{\max}) - 1$, tức là

$$\Delta h_{\max} = -e^{-D\omega_n \pi / \omega_d} \left(\cos \pi + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin \pi \right)$$

$$= e^{-\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}}.$$

4) Tính $T_{5\%}$ nhờ ước lượng biên độ của $h(t)$, tức là

$$e^{-D\omega_n T_{5\%}} \approx 0,05 \Leftrightarrow T_{5\%} \approx \frac{\ln 20}{D\omega_n} \approx \frac{3}{D\omega_n}.$$
□

Tuy không nói ra một cách chi tiết, nhưng khi bàn về khái niệm chế độ xác lập ta đã vô hình chung giả thiết rằng hàm truyền $G(s)$ của hệ là hàm bessel. Tại sao lại như vậy? Bởi vì muốn tới được một điểm trạng thái mới như mong muốn thì quá trình tự do $y_f(t)$ của hệ phải tắt dần. Một khác khi quá trình tự do đã tắt, trong đáp ứng $y(t)$ ở đầu ra chỉ còn lại quá trình cưỡng bức $y_c(t)$. Từ đây ta suy ra:

Định lý 3.6: Để hệ thống có chế độ xác lập thì quá trình tự do của hệ phải tắt dần. Đáp ứng của hệ trong chế độ xác lập chính là quá trình cưỡng bức của hệ.

Giống như quá trình tự do, quá trình quá độ cũng mang rất nhiều thông tin về tính động học của hệ thống. Điều đó ta có thể thấy ở ví dụ 4 như:

- Nếu T_∞ càng nhỏ, hệ phản ứng càng nhanh với kích thích.
- Hệ có T_∞ lớn thì sẽ có độ quá điệu chỉnh Δh_{\max} nhỏ.
- Hệ có độ quá điệu chỉnh càng nhỏ sẽ có thời gian quá độ càng lâu

Bởi vậy, trong khá nhiều trường hợp, nhất là với những khâu cơ bản quen biết như khâu khuếch đại, tích phân, vi phân, quán tính ... (phần 2.2, chương 2) người ta thường hay sử dụng dạng hàm $h(t)$ trong giai đoạn quá trình quá độ để mô tả trực quan đặc tính động học của khâu đó dưới dạng khối. Chẳng hạn như:

a) *Khâu khuếch đại:*

$$G(s) = k.$$



b) *Khâu vi phân:*

$$G(s) = s.$$



c) *Khâu tích phân:*

$$G(s) = \frac{1}{s}.$$



d) *Khâu quán tính bậc nhất:*

$$G(s) = \frac{1}{1+Ts}.$$



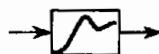
e) Khâu khuếch đại - tích phân - vi phân (PID):

$$G(s) = k \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right).$$



f) Khâu dao động bậc 2:

$$G(s) = \frac{k}{1 + 2DTs + (Ts)^2}.$$



g) Khâu giữ trễ:

$$G(s) = e^{-s\tau}.$$



3.2 Tính ổn định hệ liên tục

3.2.1 Ổn định BIBO và ổn định Lyapunov

Một trong những công việc phải làm đầu tiên khi phân tích hệ thống là xét tính ổn định (*stabil*) của hệ thống. Nếu hệ thống không ổn định thì phải tìm bộ điều khiển làm cho nó ổn định. Khi hệ đã được ổn định rồi, ta mới có thể tính tới việc mở rộng bộ điều khiển đã có hoặc tìm thêm các bộ điều khiển tiếp theo để tạo ra cho hệ thống những chất lượng mong muốn khác.

Ta xét vài ví dụ minh họa cho sự cần thiết của tính ổn định:

- Sẽ không điều khiển được động cơ nếu như khi đóng điện áp nguồn (tín hiệu vào hữu hạn) thì tốc độ động cơ lại tăng liên tục không ngừng (cho tới khi động cơ bị cháy).
- Sẽ không điều khiển được một lò phản ứng hạt nhân nếu như khi kích thích phản ứng hạt nhân trong vật chất, nhưng lại không giữ được số phản ứng dây chuyền sinh ra sau đó ở mức hữu hạn (tín hiệu ra không bị chặn).
- Sẽ không điều khiển được cần cẩu đưa hàng vào đúng vị trí trên cao nếu khi gấp nhiều (một cơn gió) hàng bị ảnh hưởng và dao động không tắt.

Tính ổn định của hệ thống là một phản ứng động học của hệ với tác động từ bên ngoài. Nhưng do có hai nguồn tác động bên ngoài mà ta thường quan tâm là tín hiệu đầu vào và tín hiệu nhiễu, nên tương ứng cũng có hai định nghĩa về tính ổn định.

Định nghĩa 3.1 (BIBO): Một hệ thống có (vector) tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ và ra $\underline{y}(t)$ được gọi là ổn định BIBO nếu như $\|\underline{u}(t)\|_\infty < \infty$ (hữu hạn) thì $\|\underline{y}(t)\|_\infty$ cũng là số hữu hạn.

Định nghĩa 3.2 (Lyapunov): Một hệ thống được gọi là *ổn định tiệm cận* Lyapunov tại điểm cân bằng \underline{x}_e nếu như khi hệ đang ở điểm cân bằng \underline{x}_e mà có một tác động nhiễu tức thời (hoặc trong một khoảng thời gian đủ ngắn) đánh bật hệ ra khỏi \underline{x}_e thì sau đó hệ có khả năng tự quay về điểm cân bằng \underline{x}_e ban đầu.

Cũng sẽ là tự nhiên nếu ở đây ta đặt ra câu hỏi về mối liên quan giữa hai định nghĩa nêu trên cho tính ổn định của hệ thống và phân vân rằng có khả năng xảy ra hay không trường hợp hệ ổn định theo nghĩa BIBO nhưng lại không ổn định theo nghĩa Lyapunov hoặc ngược lại. Một câu trả lời chung dạng tổng quát cho một hệ thống bất kỳ là chưa có, song riêng với hệ tuyến tính, như mục 3.2.2 ngay sau đây chỉ rõ, hai khái niệm ổn định đó là đồng nhất.

3.2.2 Một số kết luận chung

Trước hết ta xét hệ SISO với hàm truyền đạt dạng thực-hữu tỷ (các hệ số là những số thực) và hợp thức

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}, \quad m \leq n. \quad (3.6)$$

Định lý 3.7: Xét hệ SISO có hàm truyền đạt (3.6). Các phát biểu sau là tương đương:

- a) Hệ ổn định BIBO.
- b) Hàm trọng lượng $g(t)$ có chuẩn bậc 1 hữu hạn: $\|g(t)\|_1 < \infty$.
- c) $G(s)$ là hàm bền.
- d) Hệ có quá trình tự do tắt dần.
- e) Hệ ổn định tiệm cận Lyapunov (tại điểm gốc tọa độ).

Chứng minh:

a) \Rightarrow b): Xuất phát từ công thức (2.6b) thuộc mục 2.1.2, chương 2 (trang 65) có dễ ý đến tính giao hoán của phép tích chập, tức là

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau,$$

trong đó $g(t)$ là hàm trọng lượng, ta được

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| \cdot |u(t-\tau)| d\tau \leq \|u(t)\|_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| d\tau,$$

vì có

$$|u(t)| \leq \sup_t |u(t)| = \|u(t)\|_{\infty} \quad \text{với mọi } t.$$

Như vậy, để $|y(t)|$ là một số hữu hạn với mọi t (diều kiện để tồn tại chuẩn $\|y(t)\|_{\infty}$), rõ ràng $\int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| d\tau$ cũng phải là số hữu hạn. Nói cách khác $g(t)$ phải có chuẩn bậc 1 hữu hạn.

b) \Rightarrow a): Để chứng minh ta sẽ chỉ ra một trường hợp rằng nếu không có b) thì cũng không có a). Chọn $u(t)$ sao cho

$$u(\tau) = U \cdot \text{sgn}[g(t+\tau)]$$

trong đó U là một số dương hữu hạn, $\text{sgn}()$ là ký hiệu chỉ phép lấy dấu

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a \geq 0 \\ -1 & \text{nếu } a < 0 \end{cases}.$$

Với tín hiệu $u(t)$ như vậy thì $u(t)$ có chuẩn vô cùng $\|\underline{u}(t)\|_\infty = U$ hữu hạn. Xét

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau = U \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\text{sgn}[g(\tau)]d\tau = U \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|d\tau,$$

ta thấy nếu $\int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|d\tau$ không bị chặn thì tín hiệu ra $y(t)$ cũng không bị chặn và điều đó trái với giải thiết là hệ ổn định BIBO.

b) \Leftrightarrow c): Tính đúng đắn của khẳng định này chính là nội dung định lý 1.2 đã được chứng minh trong mục 1.5.2, chương 1 (trang 43).

c) \Leftrightarrow d): Xem lại nội dung định lý 3.3 của mục 3.1.2.

c) \Leftrightarrow e): Hệ với hàm truyền đạt (3.6) chỉ có một điểm cân bằng và đó là điểm trạng thái \underline{x}_c mà ở đó có

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \dots = \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} = 0.$$

Sử dụng phương trình trạng thái dạng chuẩn điều khiển cho hệ (định lý 2.19, mục 2.3.6, chương 2, trang 146):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + Bu$$

với A là ma trận hệ thống thỏa mãn

$$\det(sI - A) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n$$

ta sẽ thấy điểm cân bằng \underline{x}_c này chính là gốc tọa độ $\underline{x}_c = 0$. Nếu hệ đang ở gốc tọa độ mà bị nhiễu tức thời đánh bật tới một điểm trạng thái $\underline{x}_0 \neq 0$ nào đó thì việc sau đó hệ có tự quay về gốc tọa độ hay không ($u(t)=0$) đồng nghĩa với quá trình tự do của hệ đi từ $\underline{x}_0 \neq 0$ có tắt dần hay không. Dựa theo định lý 3.5 (trang 180) thì cần và đủ để quá trình tự do đi từ $\underline{x}_0 \neq 0$ (tùy ý) được tắt dần là A phải là ma trận bền, tức là nghiệm của

$$\det(sI - A) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n = 0$$

phải nằm bêu trái trực ảo, hay $G(s)$ là hàm bền (đ.p.c.m.). □

Ví dụ 5: Xét hệ SISO với hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{8}{s^2 + 3s + 4}.$$

Đo hàm truyền của hệ có hai điểm cực $s_{1,2} = -1,5 \pm 1,6j$ đều nằm bên trái trục ảo (có phần thực âm) nên $G(s)$ là hàm bền. Do đó hệ ổn định BIBO và cũng ổn định Lyapunov.

Để có hàm trọng lượng ta biến đổi $G(s)$ về dạng:

$$G(s) = \frac{8}{(s + 1,5)^2 + 1,6^2}$$

và có được:

$$g(t) = \frac{8}{1,6} e^{-1,5t} \sin(1,6t) = 5e^{-1,5t} \sin(1,6t), \quad t \geq 0.$$

Từ đây ta thấy

$$\|g(t)\|_1 = \int_0^\infty |g(t)| dt \leq 5 \int_0^\infty e^{-1,5t} dt = \frac{10}{3},$$

hay $g(t)$ có chuẩn bậc 1 hữu hạn. \square

Tương tự, ta xét hệ MIMO mô tả bởi phương trình trạng thái

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad (3.7)$$

với $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{s \times r}$ là những ma trận có các phần tử là hằng. Giải thiết thêm là A không suy biến.

Định lý 3.8: Những phát biểu sau cho hệ MIMO với mô hình trạng thái (3.7) là tương đương:

- Hệ ổn định tiệm cận Lyapunov (tại gốc tọa độ).
- Hệ có quá trình tự do tắt dần.
- A là ma trận bền.
- Ma trận $G(t)$ có tích phân $\int_0^\infty |G(t)| dt$ hữu hạn, trong đó $G(t)$ là ma trận có ảnh Laplace $C(sI - A)^{-1}B + D$.
- Hệ ổn định BIBO.

Chứng minh:

a) \Rightarrow b): Ta có thể thấy ngay rằng hệ chỉ có một điểm cân bằng là gốc tọa độ. Nếu hệ ổn định Lyapunov (tại gốc tọa độ) thì có nghĩa rằng nó có khả năng từ bất cứ một điểm trạng thái $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$ nào đó và không cần phải kích thích ($\underline{u}(t) = \underline{0}$) cũng tự quay được về gốc tọa độ. Điều đó đồng nghĩa với quá trình tự do của hệ là tắt dần.

b) \Rightarrow a): Sự khẳng định này là hiển nhiên. Nếu quá trình tự do với trạng thái đầu $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$ tùy ý là tắt dần thì cũng có nghĩa là hệ đã tự quay được về gốc tọa độ từ $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$.

b) \Leftrightarrow c): Đây chính là nội dung định lý 3.5 của mục 3.1.2, trang 180.

c) \Leftrightarrow d): Nếu ký hiệu \tilde{g}_{ij} là phần tử ở hàng thứ i , cột thứ j của

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

thì theo công thức tính nghịch đảo ma trận (mục 2.3.2, chương 2, trang 124), ta có thể xác định \tilde{g}_{ij} thông qua $G(s)$ như sau:

$$G(s) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \cdots & \tilde{g}_{1r} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \cdots & \tilde{g}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}_{s1} & \tilde{g}_{s2} & \cdots & \tilde{g}_{sr} \end{pmatrix} = C \frac{(sI - A)_{\text{adj}}}{\det(sI - A)} B + D$$

với $(sI - A)_{\text{adj}}$ là ma trận có phần tử thứ ij bằng tích $(-1)^{i+j}$ với định thức ma trận thu được từ $(sI - A)$ bằng cách bỏ đi hàng và cột chứa phần tử đối xứng ji .

Như vậy \tilde{g}_{ij} chính là hàm truyền đạt giữa đầu vào thứ j là $u_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, r$ và đầu ra thứ i là $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, s$, vì

$$\underline{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_s(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \cdots & \tilde{g}_{1r} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \cdots & \tilde{g}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}_{s1} & \tilde{g}_{s2} & \cdots & \tilde{g}_{sr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{pmatrix}, \quad (3.8a)$$

trong đó $Y_i(t)$ là ảnh Laplace của $y_i(t)$, $i = 1, \dots, s$, và $U_j(t)$ là ảnh của $u_j(t)$, $j = 1, \dots, r$.

Tất cả các phần tử \tilde{g}_{ij} đều có dạng thực-hữu tỷ, hợp thức, có chung đa thức mẫu số là $\det(sI - A)$. Bởi vậy điều kiện A là ma trận bền là tương đương với \tilde{g}_{ij} là các hàm bền. Theo định lý 3.7 thì điều đó cũng đồng nghĩa với việc chuẩn bậc 1 của $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}_{ij}\}$ là số hữu hạn.

Thêm nữa, nếu chuẩn bậc 1 của tất cả các phần tử của ma trận

$$G(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}_{11}\} & \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}_{12}\} & \cdots & \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}_{1r}\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}_{21}\} & \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}_{22}\} & \cdots & \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}_{2r}\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}_{s1}\} & \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}_{s2}\} & \cdots & \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}_{sr}\} \end{pmatrix} \quad (3.8b)$$

là hữu hạn thì đương nhiên chuẩn của bản thân ma trận tính theo:

$$\|G(t)\| = \max_{1 \leq j \leq r} \sum_{i=1}^s \left\| \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}_{ij}\} \right\|_1 \quad (3.9a)$$

cũng hữu hạn. Ngược lại, khi đã có $\|G(t)\|$ hữu hạn thì $\|\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}_{ij}\}\|_1$ cũng phải hữu hạn với mọi i, j . Suy ra \tilde{g}_{ij} là các hàm bền, tức là A là ma trận bền.

Chú ý rằng chuẩn (3.9a) không phải là duy nhất được dùng để minh họa cho khảng định e). Ta có thể sử dụng cả những chuẩn khác. Ví dụ như:

$$\|G(t)\| = \max_{1 \leq i \leq s} \sum_{j=1}^r \left\| \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}_{ij}\} \right\|_1 \quad (3.9b)$$

d) \Rightarrow e): Ta phải chỉ rằng nếu có $\|u_j(t)\|_\infty < \infty$ với mọi $j = 1, 2, \dots, r$ thì cũng có $\|y_i(t)\|_\infty < \infty$ với mọi $i = 1, 2, \dots, s$ khi \tilde{g}_{ij} là các hàm bền.

Xét riêng hệ SISO có hàm truyền \tilde{g}_{ij} . Theo định lý 3.7, đáp ứng $y_{ij}(t)$ của hệ cho kích thích $u_j(t)$ với $\|u_j(t)\|_\infty < \infty$ có chuẩn vô cùng $\|y_{ij}(t)\|_\infty$ hữu hạn khi và chỉ khi \tilde{g}_{ij} là hàm bền. Nếu $y_{ij}(t)$ có chuẩn vô cùng hữu hạn thì tổng của chúng theo $j = 1, 2, \dots, r$

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^r y_{ij}(t)$$

cũng phải có chuẩn

$$\|y_i(t)\|_\infty = \left\| \sum_{j=1}^r y_{ij}(t) \right\|_\infty \leq \sum_{j=1}^r \|y_{ij}(t)\|_\infty$$

hữu hạn.

e) \Rightarrow d): Kích thích hệ bằng tín hiệu

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

hệ sẽ có đáp ứng $\underline{y}(t)$ với ảnh Laplace

$$\underline{Y}(s) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11}U_1(s) \\ \tilde{g}_{21}U_1(s) \\ \vdots \\ \tilde{g}_{s1}U_1(s) \end{pmatrix}.$$

Do $u_1(t)$ và $y_i(t)$, $i=1, \dots, s$ có chuẩn vô cùng hữu hạn nên các hàm $\tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{21}, \dots, \tilde{g}_{s1}$ phải là những hàm bền. Tương tự ta cũng chỉ ra được tất cả các phần tử \tilde{g}_{ij} là những hàm bền. Từ đó suy ra tất cả các hàm gốc của chúng có chuẩn bậc 1 hữu hạn. \square

Ví dụ 6: Xét hệ có phương trình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_A \underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_B \underline{u} \quad \text{và} \quad \underline{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_C \underline{x}$$

trong đó

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

tức là hệ có hai tín hiệu vào, hai biến trạng thái và hai tín hiệu ra.

Ma trận A có hai giá trị riêng là nghiệm của

$$\det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} = (s+1)(s+2) = 0$$

$$\Rightarrow s_1 = -1, \quad s_2 = -2$$

và cả hai nghiệm này đều nằm bên trái trực ảo. Bởi vậy A là ma trận bền.

Áp dụng phương pháp biến đổi ngược toán tử Laplace ta có:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Như vậy quá trình tự do của hệ sẽ được xác định theo định lý 3.1 như sau

$$\underline{y}_t(t) = C e^{At} \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & 2(e^{-t} - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \underline{x}_0.$$

Rõ ràng là với mọi $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$ tùy ý ta luôn có

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{y}_t(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

tức là khi bị đánh bật khỏi gốc tọa độ, hệ sẽ tự quay về được gốc $\underline{0}$. Nói cách khác hệ ổn định Lyapunov (tại $\underline{0}$).

Bây giờ ta sẽ tính $G(t)$ thông qua ảnh Laplace của nó

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{-2}{s+2} \\ \frac{-1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{-2}{s+2} \\ \frac{-1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} & -2e^{-2t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Từ đây ta có:

$$\int_0^\infty |G(t)|dt = \int_0^\infty \begin{pmatrix} 2e^{-2t} & -2e^{-2t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int_0^\infty 2e^{-2t} dt & -2 \int_0^\infty e^{-2t} dt \\ 0 & 0 \\ - \int_0^\infty e^{-2t} dt & \int_0^\infty e^{-2t} dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

và rõ ràng $\int_0^\infty |G(t)|dt$ là số hữu hạn. □

Từ hai định lý phát biểu chung cho sự nhận biết tính ổn định của hệ tuyến tính ta thấy nổi lên một điều mẫu chốt rằng để kiểm tra tính ổn định ta chỉ cần xét xem các điểm cực (hay giá trị riêng) của hệ có nằm bên trái trực ảo hay không. Vậy làm cách nào để có thể xác định được vị trí nghiệm của một đa thức

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n \quad (3.10)$$

mà không phải tính cụ thể nghiệm đó. Câu trả lời là toàn bộ nội dung của những mục sau với từng phương pháp chi tiết. Nhưng trước khi đi vào cụ thể các phương pháp đó, ta làm quen với một khái niệm mới là *đa thức Hurwitz*:

Định nghĩa 3.3: Đa thức (3.10) nếu có tất cả các nghiệm đều nằm bên trái trực ảo (có phần thực âm, khác 0) được gọi là đa thức Hurwitz.

Theo định nghĩa 3.3 thì rõ ràng cần và đủ để một hệ tuyến tính được ổn định (theo cả hai nghĩa BIBO và Lyapunov) là đa thức mẫu số của hàm truyền đạt của nó (cũng là đa thức đặc tính của ma trận hệ thống A) là đa thức Hurwitz.

Để trong quá trình ứng dụng các phương pháp xét tính ổn định sẽ được trình bày sau đây được thoải mái và không bị chi phối bởi thứ tự các hệ số của đa thức ta cũng nên biết *tính chất đổi ngẫu* của đa thức Hurwitz:

Định lý 3.9: Đa thức (3.10) là đa thức Hurwitz khi và chỉ khi đa thức đổi ngẫu với nó (có các hệ số được xếp theo thứ tự ngược lại):

$$A^*(s) = a_n + a_{n-1}s + a_{n-2}s^2 + \dots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n \quad (3.11)$$

cũng là đa thức Hurwitz.

Chứng minh: Trước hết ta thấy $s^n A(s^{-1}) = A^*(s)$. Do đó nếu s_k là nghiệm của đa thức Hurwitz (3.11) thì do $s_k \neq 0$, s_k^{-1} cũng là nghiệm của $A(s)$. Nhưng vì s_k và s_k^{-1} có phần thực cùng dấu nên $A(s)$ cũng là Hurwitz. Tương tự ta có điều ngược lại. □

Tiếp tục, ta xét đa thức Hurwitz $A(s)$ cho trong (3.10) với các hệ số a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ là những số thực. Do $A(s)$ là Hurwitz nên tất cả nghiệm của chúng phải có phần thực âm và cũng vì a_i là số thực nên nếu $A(s)$ có một nghiệm phức $-\sigma_k + j\omega_k$ với $\sigma_k > 0$ thì nó cũng phải có nghiệm liên hợp với nó $-\sigma_k - j\omega_k$. Nói cách khác đa thức Hurwitz $A(s)$ phải có dạng

$$\frac{1}{a_n} A(s) = \prod (s + \delta_j)[(s + \sigma_k)^2 + \omega_k^2], \quad (3.12)$$

trong đó δ_j , σ_k là những số thực dương. Viết lại (3.12) dưới dạng đa thức rồi so sánh với (3.10) ta sẽ có điều kiện cần được phát biểu như sau:

Định lý 3.10: Nếu đa thức $A(s)$ cho trong (3.10) là đa thức Hurwitz thì tất cả các hệ số thực a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ của nó phải cùng dấu và khác 0. Nếu $A(s)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn 3 thì phát biểu trên không những là cần mà còn là đủ.

Chú ý rằng khi $A(s)$ có bậc từ 3 trở lên thì phát biểu trên chỉ là điều kiện cần. Điều này sẽ được minh chứng bằng ví dụ sau.

Ví dụ 7: Đa thức

$$A(s) = s^3 + s^2 + 11s + 51 = (s + 3)(s - 1 + 4j)(s - 1 - 4j)$$

tuy có tất cả các hệ số cùng dấu và khác 0 (đều là các số dương) nhưng lại có hai nghiệm nằm bên phải trục ảo là $s_{1,2} = 1 \pm 4j$.

3.2.3 Tiêu chuẩn Routh – Hurwitz

Bài toán xác định sự phân bố nghiệm của $A(s)$ trong mặt phẳng phức mà không phải giải phương trình $A(s)=0$ được nêu lên lần đầu tiên bởi Maxwell. Từ đó dấy lên một trào lưu đi tìm lời giải cho bài toán với hàng loạt các kết quả có tính kế thừa lẫn nhau xuất hiện vào nửa cuối thế kỷ 19 và kết thúc ở điểm đỉnh bằng hai định lý của Routh và Hurwitz cho trường hợp nghiệm được phân bố về nửa trái mặt phẳng phức của bài toán Maxwell. Đây là hai định lý được xây dựng trên nền của hàng loạt những kết luận đi trước, trong đó chủ yếu là các định lý của Hermite–Biehler và của Schur phát biểu như sau:

Định lý 3.11 (Hermite–Biehler): Nếu một hàm phức $f(s)$ viết được dưới dạng

$$f(s) = A(s) + jB(s) \quad (3.13)$$

trong đó $A(s)$, $B(s)$ là đa thức có hệ số thực, thì hai phát biểu sau là tương đương:

- Tất cả các nghiệm của $f(s) = 0$ nằm cùng phía với trục thực (có các phần ảo cùng dấu và khác 0)
- Cả hai đa thức $A(s)$, $B(s)$ đều có nghiệm đơn. Toàn bộ các nghiệm của cả hai đa thức $A(s)$, $B(s)$ là những số thực và khác nhau từng đôi một.

Định lý 3.12 (Schur): Cần và đủ để đa thức bậc n

$$A_n(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n \quad (3.14)$$

trong đó $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$, là đa thức Hurwitz là

- a) a_0 và a_1 có cùng dấu và khác 0.
- b) đa thức bậc $n-1$

$$A_{n-1}(s) = a_1 + (a_2 a_1 - a_0 a_3)s + a_3 s^2 + (a_4 a_1 - a_0 a_5)s^3 + a_5 s^4 + \cdots$$

cũng là đa thức Hurwitz.

Ta có thể thấy định lý 3.12 của Schur có mối liên quan chặt chẽ với định lý 3.11 của Hermite–Biehler. Chẳng hạn như khi định nghĩa hai đa thức có cùng hệ số như của (3.14) nhưng với chỉ số chẵn và lẻ riêng biệt:

$$C_1(s) = a_0 + a_2 s + a_4 s^2 + \cdots$$

$$L_1(s) = a_1 + a_3 s + a_5 s^2 + \cdots$$

thì đa thức $A(s)$ cho trong (3.14) sẽ trở thành

$$A_n(s) = C_1(s^2) + s L_1(s^2).$$

Xét hàm phức

$$f(s) = A_n(j s) = C_1(-s^2) + j s L_1(-s^2)$$

ta thấy cần và đủ để $A(s)$ là đa thức Hurwitz là toàn bộ nghiệm của $f(s)$ phải nằm dưới trục thực. Theo định lý 3.11, khi đó các nghiệm của $C_1(-s^2)$, $s L_1(-s^2)$ phải là những số thực khác nhau từng đôi một. Điều này tương đương với việc tất cả các nghiệm của $C_1(s)$, $L_1(s)$ phải là những số thực âm khác 0. Gọi $-\gamma_k$ là nghiệm của $C_1(s)$ và $-\eta_k$ là nghiệm của $L_1(s)$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết

$$0 < \gamma_1 < \eta_1 < \gamma_2 < \eta_2 < \cdots. \quad (3.15)$$

Vậy thì do

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \cdots$$

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} + \cdots$$

ta cũng có từ (3.15)

$$\frac{a_2}{a_0} > \frac{a_3}{a_1} \Leftrightarrow a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0.$$

Tiếp tục lại xét những đa thức bậc thấp hơn thì ta sẽ chỉ ra được rằng các hệ số $a_1, (a_2 a_1 - a_0 a_3), a_3, (a_4 a_1 - a_0 a_5), a_5, \dots$

dấu dương và khác 0.

Cải tiến hai định lý 3.11 và 3.12, Routh đã thực hiện phép chia $C_1(-s^2)$ cho $L_1(-s^2)$ để có $C_2(-s^2)$ rồi lại chia tiếp $L_1(-s^2)$ cho $C_2(-s^2)$ để có $L_2(-s^2)$, Cứ như vậy cuối cùng thu được dãy đa thức (còn gọi là dãy Sturm)

$$C_1(-s^2), L_1(-s^2), C_2(-s^2), L_2(-s^2), C_3(-s^2), L_3(-s^2), \dots$$

có bậc giảm dần cho tới 1, trong đó dãy đa thức bậc 1 là Hurwitz thì các hệ số của nó cùng dấu và khác 0 là đủ (định lý 3.10).

Công thức tính hệ số các đa thức $C_k(-s^2), L_k(-s^2)$ đã được Routh biểu diễn dưới dạng bảng (còn gọi là bảng Routh) và nguyên tắc xét tính Hurwitz của một đa thức

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n \quad \text{với} \quad a_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$$

đựa vào định lý 3.13 nhờ bảng đó cũng đã được Routh trình bày lại thành các bước tính rất tiện cho việc sử dụng. Ta sẽ gọi "thuật toán" gồm các bước tính đó của Routh là *tiêu chuẩn Routh*. Tiêu chuẩn Routh được phát biểu như sau:

Tiêu chuẩn Routh

- 1) Lập bảng Routh từ các hệ số $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$, của $A(s)$:

a_0	a_2	a_4	...
a_1	a_3	a_5	...
$\gamma_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$\beta_1 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$\lambda_1 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$...
$\gamma_2 = \frac{\gamma_1 a_3 - a_1 \beta_1}{\gamma_1}$	$\beta_2 = \frac{\gamma_1 a_5 - a_1 \lambda_1}{\gamma_1}$	\vdots	...
\vdots			

- 2) Đa thức $A(s)$ là một đa thức Hurwitz khi và chỉ khi các hệ số $a_0, a_1, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ trong cột đầu của bảng Routh là những số dương khác 0.
 3) Số lần đổi dấu trong cột đầu bảng số các nghiệm của $A(s)$ nằm bên nửa hở bên phải mặt phẳng phức (có phần thực dương).

Thoạt mới nhìn, bảng Routh có vẻ như phức tạp và khó nhớ. Song nếu để ý ta sẽ thấy ở đây việc lập bảng Routh có quy luật đơn giản:

- Bảng được lập theo từng hàng, sau khi kết thúc hàng trên thì mới lập hàng dưới. Hai hàng đầu tiên được lập từ các hệ số của đa thức, trong đó hàng đầu là các hệ số có chỉ số chẵn và hàng thứ hai là các hệ số có chỉ số lẻ.

- Các phần tử trong mỗi hàng tiếp theo được tính từ hai hàng nằm ngay trước nó. Muốn tính phần tử ở một cột nào đó trong hàng, ta lấy bốn phần tử ở hai hàng nằm trước bao gồm hai phần tử thuộc cột đầu tiên và hai phần tử thuộc cột chứa phần tử đang phải tính. Sắp xếp bốn phần tử theo thứ tự từ dưới lên trên và từ trái sang phải để được một ma trận rồi tính định thức ma trận đó.
- Quá trình lập bảng sẽ dừng khi gặp phần tử đầu tiên trong hàng bằng 0. Khi đó ta kết luận hệ không ổn định.

Ví dụ 8: Cho đa thức

$$A(s) = 5 + 16s + 18s^2 + 8s^3 + s^4.$$

Lập bảng Routh (các ô không có phần tử được xem là bằng 0)

5	18	1
16	8	
15,5	1	
6,97		
1		

Do tất cả giá trị trong cột đầu đều dương nên tất cả các nghiệm của đa thức đã cho đều có phần thực âm. \square

Ví dụ 9: Cho hệ có hàm truyền đạt thực-hữu tỷ, hợp thức với đa thức mẫu số

$$A(s) = 5 + 16s + 2s^2 + 8s^3 + s^4.$$

Lập bảng Routh (các ô không có phần tử được xem là bằng 0)

5	2	1
16	8	
-0,5	1	
40		
1		

Vì giá trị trong cột đầu không cùng dấu nên hệ không ổn định (tất cả các điểm cực không cùng nằm bên trái trực ảo). Hơn nữa chúng đổi dấu hai lần (từ 16 sang -0,5 và lần thứ hai từ -0,5 sang 40) nên sẽ có hai điểm cực có phần thực dương. \square

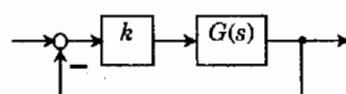
Ví dụ 10: Xét hệ có cấu trúc như ở hình 3.5, trong đó

$$G(s) = \frac{s+4}{s(s+2)(s^2+0,5+1)}.$$

Hãy tìm hệ số khuếch đại k để hệ được ổn định.

Trước hết ta xác định hàm truyền của hệ:

$$G(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)} = \frac{2k(s+4)}{2s^4 + 5s^3 + 4s^2 + (2k+4)s + 8k}.$$



Hình 3.5: Cho ví dụ 10.

Sau đó lập bảng Routh

2	4	$8k$
5	$2k+4$	
$0.8 \cdot (3-k)$	$8k$	
$\frac{2(k^2 + 24k - 6)}{k-3}$		
$8k$		

Để hệ ổn định thì phải có các giá trị cột đầu đều dương, tức là

$$3-k > 0 \Leftrightarrow k < 3$$

$$\frac{2(k^2 + 24k - 6)}{k-3} > 0 \Leftrightarrow -24,3 < k < 0,247$$

$$8k > 0 \Leftrightarrow 0 < k.$$

Kết hợp chung các điều kiện trên lại ta được

$$0 < k < 0,247.$$

□

Chú ý: Bảng Routh trong ví dụ 10 được lập bằng cách đảo ngược vị trí thứ tự các hệ số của đa thức. Đó không phải là sự nhầm lẫn mà ở đây ta đã áp dụng định lý đổi ngẫu 3.9 nhằm làm giảm số các phần tử có chứa tham số k ở cột đầu tiên, tức là giảm số các bất phương trình phải tính.

Như vậy, nếu để ý thêm đến định lý đổi ngẫu thì bảng Routh cũng còn có thể được lập như sau:

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
$\gamma_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$\beta_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$\lambda_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$...
$\gamma_2 = \frac{\gamma_1 a_3 - a_1 \beta_1}{\gamma_1}$	$\beta_2 = \frac{\gamma_1 a_5 - a_1 \lambda_1}{\gamma_1}$	\vdots	...
:			

Tiêu chuẩn Hurwitz

Một tiêu chuẩn khác có họ hàng gần với tiêu chuẩn Routh có tên là tiêu chuẩn Hurwitz. Hurwitz đã dựa vào định lý 3.11 của Hermite-Biehler để xét số lần thay đổi dấu trong dãy các nghiệm của đa thức

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n \quad \text{với} \quad a_i > 0, i = 0, 1, \dots, n \quad (3.16)$$

qua giá trị tích phân đường bao kín nửa mặt phẳng phức bên phải của nó và đi đến kết luận như sau:

1) Dựng ma trận H kiểu $(n \times n)$ từ các hệ số $a_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ của đa thức $A(s)$

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

2) Xác định các ma trận vuông H_i , $i = 1, 2, \dots, n$ lấy từ H sao cho H_i có đúng i phần tử trên đường chéo chính giống như H :

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \dots$$

3) Tính định thức $D_i = \det(H_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

- a) Đa thức $A(s)$ cho trong (3.16) sẽ là đa thức Hurwitz khi và chỉ khi tất cả các định thức D_i là những số dương ($D_i > 0$).
- b) Số lần đổi dấu trong dãy

$$D_1, D_2, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \dots, \frac{D_n}{D_{n-1}}$$

bằng số các nghiệm nằm bên phải trực phác của $A(s)$.

Ví dụ 11: Xét đa thức

$$A(s) = 0,5 + s + 2s^2 + 3s^3.$$

Đa thức này có

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0,5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow H_1 = 1, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0,5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$D_1 = 1, \quad D_2 = 0,5, \quad D_3 = 3D_2 = 1,5.$$

Do tất cả 3 định thức D_1, D_2, D_3 là những số dương nên tất cả các nghiệm của $A(s)$ đều nằm bên trái trực phác. \square

Ví dụ 12: Xét đa thức

$$A(s) = 51 + 11s + s^2 + s^3.$$

Ta lập các ma trận H_1, H_2, H_3 của đa thức:

$$H = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 0 \\ 51 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H_1 = 11, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 51 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 0 \\ 51 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

và từ đó có được

$$D_1 = 11, \quad D_2 = -40, \quad D_3 = D_2 = -40.$$

Điều này nói rằng không phải tất cả các nghiệm của đa thức đều nằm bên trái trục ảo. Ta xét tiếp dãy

$$D_1 = 11, \quad D_2 = -40, \quad \frac{D_2}{D_1} = -3,63, \quad \frac{D_3}{D_2} = 1.$$

Vì các số hạng của dãy đổi dấu hai lần (một lần từ 11 sang -40, lần thứ hai từ -3,63 sang 1) nên đa thức $A(s)$ có hai nghiệm nằm bên phải trục ảo. \square

Ví dụ 13: Tìm điều kiện cho tham số k để hệ có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{1}{3 + 2s + (k+2)s^2 + ks^3}$$

được ổn định.

Áp dụng tiêu chuẩn Hurwitz với $A(s) = 3 + 2s + (k+2)s^2 + ks^3$, tức là

$$H = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ 3 & k+2 & 0 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix} \Rightarrow H_1 = 2, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ 3 & k+2 & 0 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$$

ta được

$$D_1 = 2, \quad D_2 = -k+4, \quad D_3 = kD_2 = k(-k+4).$$

Vậy để hệ ổn định thì phải có

$$\begin{cases} -k+4 > 0 \\ k(-k+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 4 \\ 0 < k < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < k < 4. \quad \square$$

Chú ý: Nếu để ý đến tính chất đối ngẫu của đa thức Hurwitz (định lý 3.9) thì ma trận H cho trong (3.17) cũng có thể được lập với các tham số $a_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$ của đa thức $A(s)$ nhưng theo thứ tự ngược lại như sau:

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

3.2.4 Tiêu chuẩn Lienard–Chipart

Thực chất, tiêu chuẩn Lienard–Chipart là một hệ quả của tiêu chuẩn Hurwitz. Nó giúp cho người sử dụng giảm bớt được số lượng các định thức $D_i = \det(H_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ phải tính khi kiểm tra tính ổn định của một hệ thống. Chẳng hạn như vì

$$D_n = a_n D_{n-1},$$

nên nếu nhì đăc có $a_n > 0$, $D_{n-1} > 0$ thì đương nhiên ta cũng có $D_n > 0$. Do đó việc kiểm tra điều kiện tiếp theo $D_n > 0$ có được thỏa mãn hay không là không cần thiết.

Viết lại tiêu chuẩn Hurwitz cho các đa thức $A(s)$ với những bậc cụ thể:

- 1) $n=1$: $A(s)$ là Hurwitz $\Leftrightarrow a_0, a_1 > 0$.
- 2) $n=2$: $A(s)$ là Hurwitz $\Leftrightarrow a_0, a_1, a_2 > 0$.
- 3) $n=3$: $A(s)$ là Hurwitz $\Leftrightarrow a_0, a_1, a_2 > 0$ và $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.
- 4) $n=4$: $A(s)$ là Hurwitz $\Leftrightarrow a_0, a_1, a_2 > 0$ và $a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0$.
- ⋮

Lienard–Chipart đã xây dựng được mối quan hệ tổng quát giữa H_{2i} (ma trận có chỉ số chẵn) và H_{2i+1} (ma trận có chỉ số lẻ) rồi từ đó đi đến kết luận như sau:

Định lý 3.13 (Lienard–Chipart): **Đa thức**

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n, \quad (a_0 > 0)$$

là Hurwitz khi và chỉ khi:

- hoặc $a_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ và $\det(H_{2i}) > 0$, $i = 1, 2, \dots,$
- hoặc $a_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ và $\det(H_{2i+1}) > 0$, $i = 1, 2, \dots$

Rõ ràng là với tiêu chuẩn Lienard–Chipart, số lượng các phép tính phải thực hiện chỉ bằng một nửa so với khi sử dụng trực tiếp tiêu chuẩn Hurwitz.

Ví dụ 14: Tìm điều kiện cho tham số k để hệ có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{1}{4 + ks + (k+3)s^2 + s^3}$$

được ổn định. Áp dụng tiêu chuẩn Lienard–Chipart với $A(s) = 4 + ks + (k+3)s^2 + s^3$, ta có
 $k > 0$, $k+3 > 0$
và (chỉ cần xét $D_2 = \det(H_2)$ thay vì tất cả D_1 , D_2 và D_3)

$$H = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 4 & k+3 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H_2 = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 4 & k+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_2) = k(k+3)-4 > 0.$$

Vậy để hệ ổn định thì k phải thỏa mãn:

$$\begin{cases} k > 0 \\ (k-1)(k+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < -4 \text{ hoặc } k > 1 \end{cases} \Leftrightarrow k > 1. \quad \square$$

3.2.5 Tiêu chuẩn Michailov

Khác với tiêu chuẩn Routh-Hurwitz, tiêu chuẩn Michailov dựa vào hàm $A(j\omega)$, thu được từ $A(s)$ bằng cách thay s bởi $j\omega$, để xét tính Hurwitz của $A(s)$. Chính xác hơn nữa, nó xét tính Hurwitz của $A(s)$ trên cơ sở dạng đồ thị của $A(j\omega)$, bởi vậy tiêu chuẩn Michailov được xếp vào nhóm các tiêu chuẩn hình học.

Xét đa thức hệ số thực

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n, \quad (a_n > 0).$$

Gọi các nghiệm của $A(s)$ là s_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Khi đó $A(s)$ sẽ viết được thành:

$$\begin{aligned} A(s) &= a_n(s-s_1)(s-s_2) \cdots (s-s_n) \\ \Leftrightarrow A(j\omega) &= a_n(j\omega-s_1)(j\omega-s_2) \cdots (j\omega-s_n). \end{aligned}$$

Ký hiệu $\varphi = \arg A(j\omega)$ là góc pha của $A(j\omega)$, tức là $A(j\omega) = |A(j\omega)| e^{j\varphi}$ thì

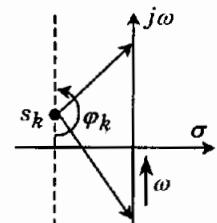
$$\varphi = \arg A(j\omega) = \arg a_n + \sum_{k=1}^n \underbrace{\arg(j\omega - s_k)}_{\varphi_k}. \quad (3.20)$$

Xét sự thay đổi của riêng thành phần $\varphi_k = \arg(j\omega - s_k)$ trong công thức (3.20) khi ω đi từ $-\infty$ đến ∞ , ký hiệu bởi $\Delta\varphi_k = \underset{-\infty \leq \omega \leq \infty}{\Delta \arg(j\omega - s_k)}$, bằng cách hình dung như ta đã đứng tại

điểm s_k và nhìn theo điểm ω chạy trên trục tung từ $-\infty$ đến ∞ , sẽ thấy (hình 3.6):

- 1) Nếu s_k nằm bên trái trục ảo (trục tung) thì góc nhìn của ta có độ rộng là π .
- 2) Ngược lại nếu s_k nằm bên phải trục ảo (trục tung) thì góc nhìn là $-\pi$.
- 3) Nếu $s_k = j\omega_k$ nằm trên trục ảo thì góc nhìn khi ω chạy từ $-\infty$ đến ω_k và từ ω_k đến ∞ ($\omega \neq \omega_k$) sẽ bằng 0.

Suy ra



Hình 3.6: Tính góc pha.

$$\Delta \arg_{-\infty \leq \omega \leq \infty} (j\omega - s_k) = \begin{cases} \pi & \text{nếu } \operatorname{Re}(s_k) < 0 \\ -\pi & \text{nếu } \operatorname{Re}(s_k) > 0 \\ 0 & \text{nếu } \operatorname{Re}(s_k) = 0 \end{cases}$$

Kết hợp với (3.20) thì

$$\Delta \arg_{-\infty \leq \omega \leq \infty} A(j\omega) = n\pi$$

khi và chỉ khi tất cả n nghiệm s_k , $k = 1, 2, \dots, n$ đều nằm bên trái trục ảo. Diễn tả điều đó bằng lời ta được "A(s) là đa thức Hurwitz khi và chỉ khi với sự thay đổi của ω từ $-\infty$ đến $+\infty$ đường đồ thị $A(j\omega)$ bao gốc tọa độ một góc đúng bằng $n\pi$ ".

Nhưng nếu để ý thêm điều kiện $A(s)$ là đa thức hệ số thực, tức là a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ là những số thực thì do khi đó đường $A(j\omega)$ với ω từ $-\infty$ đến $+\infty$ có dạng đối xứng qua trục thực, phát biểu trên sẽ có dạng tương đương sau:

Định lý 3.14 (Michailov): **Đa thức hệ số thực**

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n,$$

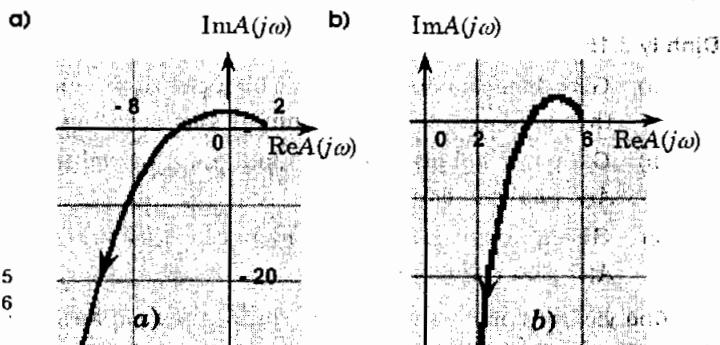
là Hurwitz khi và chỉ khi đường đồ thị $A(j\omega)$ với ω đi từ 0 đến $+\infty$ bao quanh gốc tọa độ một góc đúng bằng $\frac{n\pi}{2}$. Nói cách khác

$$A(s) \text{ là Hurwitz} \Leftrightarrow \Delta \arg_{0 \leq \omega \leq \infty} A(j\omega) = \frac{n\pi}{2}.$$

Ví dụ 15: Xét đa thức bậc 3 là $A(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 2$. Đa thức này có

$$A(j\omega) = (2 - 3\omega^2) + j(3\omega - \omega^3).$$

Hình 3.7a) biểu diễn đồ thị của $A(j\omega)$ và từ đồ thị đó ta nhận thấy $A(j\omega)$ đi qua 3 góc phân tư của mặt phẳng phức theo chiều ngược kim đồng hồ, tức là bao gốc tọa độ một góc đúng bằng $\frac{3\pi}{2}$. Vậy theo tiêu chuẩn Michailov thì $A(s)$ là đa thức Hurwitz. \square



Hình 3.7: a) Minh họa ví dụ 15
b) Minh họa ví dụ 16

Ví dụ 16: Hệ với hàm truyền đạt $G(s) = \frac{3}{s^3 + s^2 + s + 6}$ có đa thức đặc tính

$$A(s) = s^3 + s^2 + s + 6.$$

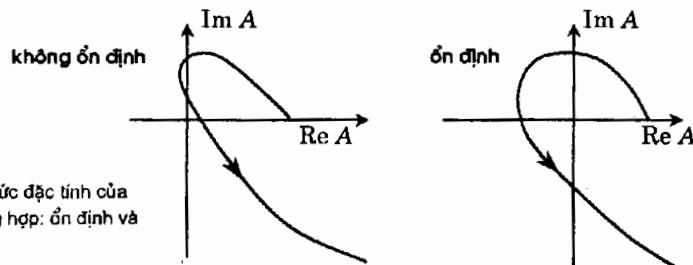
$$\Leftrightarrow A(j\omega) = (6 - \omega^2) + j(\omega - \omega^3).$$

Hình 3.7b) là đồ thị của $A(j\omega)$. Đường đồ thị đó không bao gốc tọa độ, góc nhìn $A(j\omega)$ từ gốc tọa độ khi ω di từ 0 đến $+\infty$ là $-\frac{\pi}{2}$ (nhỏ hơn $\frac{3\pi}{2}$). Bởi vậy $A(s)$ không phải là đa thức Hurwitz, hay hệ đã cho không ổn định. \square

Trong khi việc xây dựng đồ thị cho hàm $A(j\omega)$ của những đa thức $A(s)$ có bậc tương đối nhỏ khá đơn giản thì ở những đa thức bậc cao (từ 5 trở lên) là rất khó thực hiện nếu như không sử dụng những công cụ mô phỏng. Chính vì hạn chế này mà tiêu chuẩn Michailov ít có ý nghĩa thực tế. Song bù lại, như sau này ta sẽ thấy, tiêu chuẩn Michailov lại có ý nghĩa to lớn về mặt lý thuyết và là tiền đề cho một loạt các tiêu chuẩn khác như tiêu chuẩn Nyquist, tiêu chuẩn Kharitonov

Hình 3.8 là dạng đồ thị của hàm $A(j\omega)$ cho hệ có đa thức đặc tính bậc 4

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4.$$



Hình 3.8: Đồ thị đường đa thức đặc tính của hệ bậc 4 cho hai trường hợp: ổn định và không ổn định.

Tổng quát từ dạng đường đồ thị đó ta rút ra được một số hệ quả sau của tiêu chuẩn Michailov:

Định lý 3.15 (Hệ quả của định lý Michailov):

- Giao điểm của đường quỹ đạo biên pha $A(j\omega)$ của đa thức Hurwitz $A(s)$ với trục thực phải nằm xen kẽ giữa những giao điểm của nó với trục ảo.
- Giá trị tại hai giao điểm kề nhau của $A(j\omega)$ với trục thực của đa thức Hurwitz $A(s)$ phải trái dấu nhau.
- Giá trị tại hai giao điểm kề nhau của $A(j\omega)$ với trục ảo của đa thức Hurwitz $A(s)$ phải trái dấu nhau.

Chú ý: Trong một số tài liệu, ví dụ [5], tiêu chuẩn Michailov còn được gọi là tiêu chuẩn Cremer-Leonhard.

3.2.6 Tiêu chuẩn Nyquist và các phát biểu tương đương

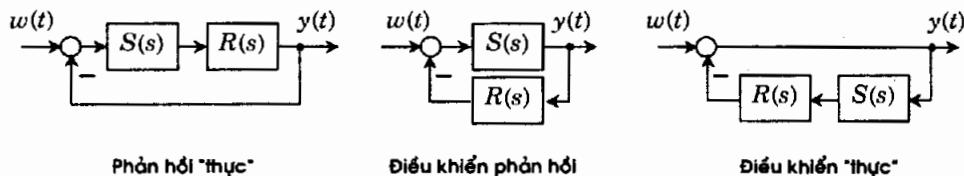
Trong khi tiêu chuẩn Michailov không tìm được sự ứng dụng trong thực tế cho những hệ thống tuyến tính có đặc tính với số bậc tương đối lớn thì ngược lại một tiêu chuẩn phát triển từ nó là tiêu chuẩn Nyquist lại được sử dụng rất nhiều. Giống như tiêu chuẩn Michailov, tiêu chuẩn Nyquist thuộc nhóm các tiêu chuẩn hình học. Khác với tiêu chuẩn Michailov, tiêu chuẩn Nyquist được sử dụng để xét tính ổn định hệ có hồi tiếp (còn gọi là *hệ kín*) và đồ thị mà nó sử dụng là đường đặc tính tần biên pha của hệ thống và đó cũng chính là một trong những đồ thị thường dùng để mô tả hệ tuyến tính.

Xét một hệ kín phản hồi âm với hai khâu tuyến tính được mắc như ở hình 3.9. Hai khâu tuyến tính đó có hàm truyền đạt hợp thức $S(s)$ và $R(s)$. Khi đó hệ kín hồi tiếp sẽ được mô tả bởi:

$$1) \text{ Phản hồi thực: } G(s) = \frac{R(s)S(s)}{1 + R(s)S(s)}.$$

$$2) \text{ Điều khiển phản hồi: } G(s) = \frac{S(s)}{1 + R(s)S(s)}.$$

$$3) \text{ Điều khiển thực: } G(s) = \frac{1}{1 + R(s)S(s)}.$$



Hình 3.9: Một số dạng hệ hồi tiếp thường gặp.

Như vậy tất cả các dạng hồi tiếp đã xét ở trên đều có hàm truyền đạt với một mẫu số chung là *hàm sai lệch phản hồi*

$$F(s) = 1 + R(s)S(s).$$

Rõ ràng rằng hệ hồi tiếp sẽ ổn định khi và chỉ khi các nghiệm của $F(s)$ đều có phần thực âm (nằm bên trái trục ảo). Gọi $A(s)$ là đa thức mẫu số có bậc n , $B(s)$ là đa thức tử số của hàm truyền *hệ kín*, tức là của tích $R(s)S(s)$:

$$R(s)S(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

thì với

$$F(s) = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)}$$

nghiệm của $F(s)$, tức là điểm cực của hệ kín, sẽ là nghiệm của

$$A(s) + B(s) = 0 \quad (3.21a)$$

và điểm cực của hệ hở $R(s)S(s)$ cũng là điểm cực của $F(s)$, tức là nghiệm của

$$A(s) = 0. \quad (3.21b)$$

Do bậc của $B(s)$ không thể lớn hơn bậc của $A(s)$ – điều kiện khả thi của hệ thống, tức là các hàm truyền $R(s)$ và $S(s)$ là hợp thức – nên $F(s)$ cũng phải là một hàm hợp thức không chặt và do đó số điểm cực của $F(s)$ cũng chính bằng số nghiệm cùn nó. Gọi p_k là nghiệm của (3.21a) và q_k là nghiệm của (3.21b) với $k = 1, 2, \dots, n$. Vậy thì $F(s)$ sẽ có dạng:

$$F(s) = c \frac{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}{(s - q_1)(s - q_2) \cdots (s - q_n)}, \quad (3.22)$$

trong đó c là hằng số. Đây chính là nội dung định lý Hsu-Chen được phát biểu như sau:

Định lý 3.16 (Hsu-Chen): Hàm sai lệch phản hồi $F(s)$ của một hệ hồi tiếp tỷ lệ thuận với tỷ số giữa đa thức đặc tính của hệ kín và đa thức đặc tính của hệ hở:

$$F(s) \sim \frac{\text{đa thức đặc tính hệ kín}}{\text{đa thức đặc tính hệ hở}}$$

Tiếp tục, từ (3.22) có:

$$\Delta \arg F(j\omega) = \sum_{k=1}^n \left[\Delta \arg (j\omega - p_k) - \Delta \arg (j\omega - q_k) \right]. \quad (3.23a)$$

Tương tự như ở tiêu chuẩn Michailov, ta được:

$$\Delta \arg (j\omega - p_k) = \begin{cases} \pi & \text{nếu } \operatorname{Re}(p_k) < 0 \\ -\pi & \text{nếu } \operatorname{Re}(p_k) > 0 \\ 0 & \text{nếu } \operatorname{Re}(p_k) = 0 \end{cases} \quad (3.23b)$$

$$\text{và } \Delta \arg (j\omega - q_k) = \begin{cases} \pi & \text{nếu } \operatorname{Re}(q_k) < 0 \\ -\pi & \text{nếu } \operatorname{Re}(q_k) > 0 \\ 0 & \text{nếu } \operatorname{Re}(q_k) = 0 \end{cases} \quad (3.23c)$$

Bởi vậy, nếu gọi:

- n_p^+ là số các điểm cực hệ kín có phần thực dương,
- n_p^0 là số điểm cực hệ kín nằm trên trục ảo,
- n_q^+ là số các điểm cực hệ hở có phần thực dương và

- n_q^0 là số điểm cực hệ hở nằm trên trục ảo,

thì từ ba công thức (3.23a), (3.23b) và (3.23c) ta có:

$$\begin{aligned}\Delta \arg F(j\omega) &= (n - n_p^+ - n_p^0)\pi - n_p^+ \pi - (n - n_q^+ - n_q^0)\pi + n_q^+ \pi \\ &= (2n_q^+ + n_q^0 - 2n_p^+ - n_p^0)\pi.\end{aligned}$$

Suy ra:

Định lý 3.17: Cân và đủ để hệ hồi tiếp ổn định là $n_p^+ = n_p^0 = 0$, tức là phải có

$$\Delta \arg F(j\omega) = (2n_q^+ + n_q^0)\pi,$$

hay đường quỹ đạo $F(j\omega)$ với $-\infty \leq \omega \leq \infty$ phải bao gốc tọa độ một góc $(2n_q^+ + n_q^0)\pi$.

Để ý tiếp quan hệ

$$F(s) = 1 + \frac{R(s)S(s)}{G_0(s)}$$

định lý 3.17 sẽ được phát biểu lại như sau:

Định lý 3.18 (Nyquist): Cân và đủ để hệ hồi tiếp ổn định là

$$\Delta \arg [1 + G_0(j\omega)] = (2n_q^+ + n_q^0)\pi,$$

trong đó n_q^+ là số các điểm cực hệ hở có phần thực dương, n_q^0 là số điểm cực hệ hở nằm trên trục ảo.

Tuy nhiên dạng thường gặp nhất trong ứng dụng của tiêu chuẩn Nyquist là hệ hở ổn định, tức là hàm truyền đạt $G_0(s) = R(s)S(s)$ của hệ hở là hàm bền. Trong trường hợp như vậy thì $n_q^+ = n_q^0 = 0$. Do đó

$$\Delta \arg [1 + G_0(j\omega)] = 0, \quad (3.24)$$

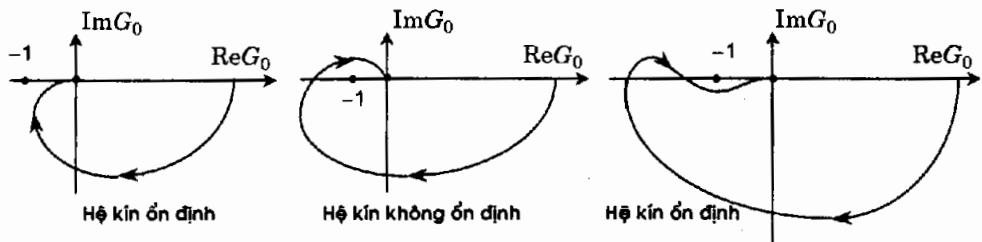
sẽ là điều kiện cân và đủ để hệ kín ổn định. Bằng lời, điều kiện (3.24) được diễn tả là đường quỹ đạo biên pha $1 + G_0(j\omega)$ không đi qua và cũng không bao gốc tọa độ. Điều này tương đương với việc đường $G_0(j\omega)$ không đi qua và không bao điểm $-1 + 0j$. Nếu để ý thêm rằng các hệ số của $G_0(j\omega)$ thuộc trường số thực thì do đường quỹ đạo có dạng đối xứng qua trục thực, ta sẽ có một hệ quả của định lý 3.18 như sau:

Định lý 3.19 (Trường hợp hệ hở ổn định): Xét một hệ hồi tiếp (kín), phản hồi âm có hàm truyền của hệ hở là hàm bền, tức là hệ hở ổn định. Khi đó hệ hồi tiếp sẽ ổn định khi và chỉ khi đường quỹ đạo biên pha $G_0(j\omega)$ của hệ hở $G_0(s) = R(s)S(s)$ với ω đi từ 0 đến $+\infty$ không đi qua và không bao điểm $-1 + 0j$.

Để tiện lợi cho việc kiểm tra xem đường đường quỹ đạo $G_0(j\omega)$ có đi qua hay bao điểm $-1+0j$ hay không khi ω chạy từ 0 đến $+\infty$ ta có thể sử dụng quy tắc bàn tay trái như sau:

Định lý 3.20 (Quy tắc bàn tay trái): Trong trường hợp hệ hở ổn định thì hệ kín sẽ ổn định khi và chỉ khi điểm $-1+0j$ luôn nằm phía bên trái đường quỹ đạo biên pha $G_0(j\omega)$ của hệ hở nếu ta di dọc trên $G_0(j\omega)$ theo chiều tăng của ω từ 0 đến $+\infty$.

Hình 3.10 dưới đây minh họa cho tiêu chuẩn Nyquist ở trường hợp hệ hở ổn định. Hệ kín sẽ ổn định nếu như góc nhìn từ điểm $-1+0j$ lên đường quỹ đạo $G_0(j\omega)$ khi ω đi từ 0 đến $+\infty$ bằng 0.



Hình 3.10: Minh họa tiêu chuẩn Nyquist.

Ví dụ 17: Bên cạnh việc kiểm tra tính ổn định của hệ kín thông qua dạng quỹ đạo đường đặc tính tần số biên pha của hệ hở, tiêu chuẩn Nyquist thường được sử dụng để xác định tham số bộ điều khiển sao cho hệ kín ổn định.

Xét một hệ phản hồi âm như hình 3.11a) mô tả, trong đó đối tượng được giả thiết là có hàm truyền đạt bền

$$S(s) = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4},$$

tức là các hệ số a_1, a_2, a_3, a_4 thỏa mãn điều kiện là nghiệm của

$$1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 = 0$$

đều nằm bên trái trực ảo.

Hàm truyền của hệ hở khi đó sẽ là

$$G_0(s) = \frac{k}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4}.$$

Bài toán đặt ra là phải tìm k để hệ kín ổn định. Tất nhiên rằng bài này có thể giải nhờ tiêu chuẩn Routh-Hurwitz, nhưng ở đây ta sẽ sử dụng tiêu chuẩn Nyquist.

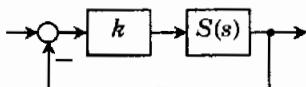
Do hàm truyền của hệ hở đã được giải thiết là hàm bền (hệ hở ổn định) nên theo định lý 3.19, ta chỉ cần tìm $k > 0$ sao cho đường quỹ đạo $G_0(j\omega)$ khi ω tăng từ 0 đến $+\infty$ không đi qua và không bao điểm $-1 + 0j$.

Từ hàm truyền của hệ hở ta có:

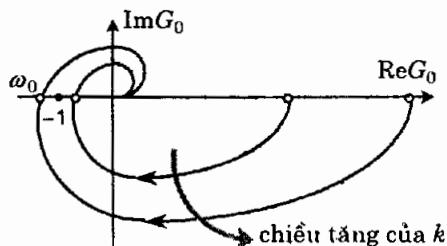
$$G_0(j\omega) = \frac{kA}{\frac{A^2 + B^2}{\text{Re } G_0(j\omega)}} - j \frac{kB}{\frac{A^2 + B^2}{\text{Im } G_0(j\omega)}},$$

trong đó $A = 1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4$, $B = a_1\omega - a_3\omega^3$.

a)



b)



Hình 3.11: Minh họa ví dụ 17.

Hình 3.11b) biểu diễn đường đồ thị của $G_0(j\omega)$ trong mặt phẳng phức. Đồ thị này cắt trực thực tại điểm tần số $\omega_0 > 0$:

$$\begin{cases} \text{Im } G_0(j\omega) = 0 \\ 0 < \omega < \infty \end{cases} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{a_1}{a_3}}$$

tức là tại tọa độ:

$$\text{Re } G_0(j\omega_0) = \frac{k}{A(\omega_0)} = \frac{ka_3^2}{(a_3^2 - a_1a_2a_3 + a_1^2a_4)}.$$

Vậy để hệ kín ổn định thì ta phải chọn k sao cho:

$$\frac{ka_3^2}{(a_3^2 - a_1a_2a_3 + a_1^2a_4)} > -1 \Leftrightarrow 0 < k < \frac{a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2}{a_3^2}.$$

3.2.7 Kiểm tra tính ổn định hệ kín nhờ biểu đồ Bode

Điều đặc biệt của tiêu chuẩn Nyquist phát biểu ở định lý 3.18 cũng như 3.19 là nó áp dụng được cho cả những trường hợp hàm truyền hệ hở $G_0(s) = R(s)S(s)$ có chứa cả thành phần giữ trễ.

Nếu như bên cạnh điều kiện hệ hở ổn định ($G_0(s)$ là hàm bền) còn có giả thiết thêm rằng

$$|G_0(j\omega)| < 1 \quad \text{với mọi } 0 \leq \omega \leq \infty$$

thì đường quỹ đạo $G_0(j\omega)$ khi đó luôn nằm trong đường tròn đơn vị nên nó không thể đi qua hay bao điểm $-1+0j$ và vì vậy hệ kín ổn định.

Định lý 3.21: Nếu hàm truyền đạt $G_0(s)$ của hệ hở là hàm bền, tức là hệ hở ổn định, có $\|G_0(j\omega)\|_{\infty} = \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |G_0(j\omega)| < 1$ thì hệ kín cũng ổn định.

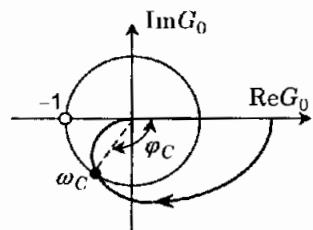
Bây giờ ta xét một hệ hồi tiếp phản hồi âm như ở hình 3.9 mô tả, có hàm truyền hệ hở $G_0(s) = R(s)S(s)$ là hàm bền và

$$\|G_0(j\omega)\|_{\infty} = \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |G_0(j\omega)| \geq 1.$$

Nếu như có giải thiết thêm rằng đường quỹ đạo tần số $G_0(j\omega)$ chỉ cắt đường tròn đơn vị một lần tại điểm tần số ω_C thì hệ kín sẽ ổn định khi và chỉ khi tại tần số ω_C đó hàm $G_0(j\omega)$ có góc pha lớn hơn $-\pi$

$$\varphi_C = \arg G_0(j\omega_C) > -\pi,$$

trong đó tần số ω_C được gọi là *tần số cắt*. Điều khẳng định trên cũng là dễ hiểu vì khi đó $G_0(j\omega)$ không thể đi qua cũng như không thể bao điểm $-1+0j$ (hình 3.12).



Hình 3.12: Giải thích tần số cắt.

Định lý 3.22: Nếu hàm truyền đạt $G_0(s)$ của hệ hở là hàm bền, có $\sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |G_0(j\omega)| \geq 1$

nhưng đường quỹ đạo tần số $G_0(j\omega)$ chỉ cắt đường tròn đơn vị một lần tại điểm tần số cắt ω_C và tại đó có $\varphi_C = \arg G_0(j\omega_C) > -\pi$ thì hệ kín sẽ ổn định.

Với nội dung định lý 3.22 ta có thể dễ dàng kiểm tra tính ổn định của hệ kín khi đã biết được rằng hàm truyền đạt $G_0(s)$ của hệ hở là hàm bền nhờ biểu đồ Bode

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg |G_0(j\omega)| \quad \text{và} \quad \varphi(\omega) = \arg G_0(j\omega)$$

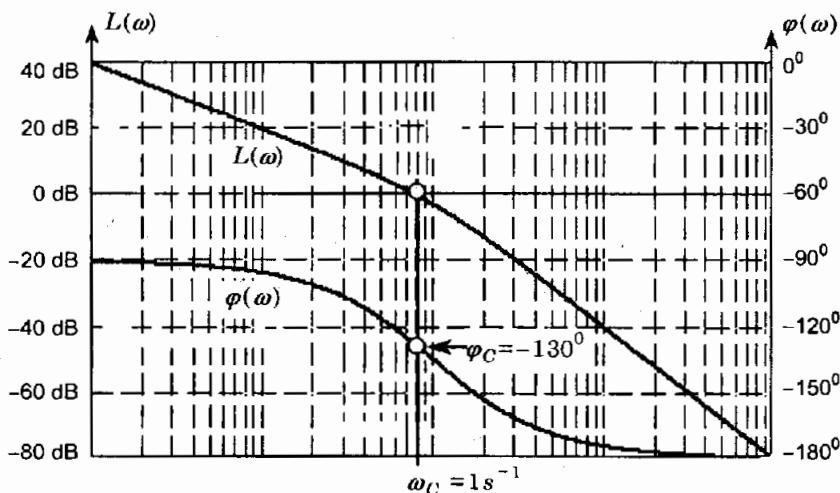
của $G_0(s)$. Nguyên tắc kiểm tra như sau:

- 1) Nếu $L(\omega)$ có đoạn nằm phía bên trên trục hoành thì $\sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |G_0(j\omega)| > 1$.
- 2) Điểm cắt của $G_0(j\omega)$ với đường tròn đơn vị là giao điểm của $L(\omega)$ với trục hoành.
- 3) Tần số cắt ω_C là hoành độ giao điểm của $L(\omega)$ với trục hoành.
- 4) Góc $\varphi_C = \arg G_0(j\omega_C)$ là tung độ của $\varphi(\omega)$ tại tần số cắt ω_C .
- 5) Hệ kín sẽ ổn định nếu φ_C nằm phía bên trên đường $\varphi(\omega) = -\pi$.

Ví dụ 18: Hình 3.13 dưới đây minh họa lại các bước thực hiện việc sử dụng định lý 3.22 để kiểm tra tính ổn định của hệ hồi tiếp (phản hồi âm) theo các nguyên tắc vừa trình bày.

Chẳng hạn bằng các phương pháp thực nghiệm (do giá trị hàm đặc tính tần) ta đã xây dựng được biểu đồ Bode của hệ hở được giả thiết là ổn định như trong hình 3.13. Từ giao điểm đường $L(\omega)$ của biểu đồ Bode đó với trục hoành (đường ngang tại 0 dB) ta xác định được tần số cắt $\omega_C = 1 s^{-1}$. Tiếp tục, với tần số cắt đó ta đọc ra được từ đường $\varphi(\omega)$ góc pha $\varphi_C = -130^\circ$.

Vì $\varphi_C = -130^\circ > -180^\circ = -\pi$ nên theo định lý 3.22 hệ kín ổn định. \square



Hình 3.13: Minh họa việc sử dụng định lý 3.22 để kiểm tra tính ổn định của hệ kín.

3.2.8 Tiêu chuẩn Kharitonov

Những tiêu chuẩn xét tính ổn định hệ thống được trình bày trên đây như tiêu chuẩn Routh-Hurwitz, tiêu chuẩn Michailov, tiêu chuẩn Nyquist, ... cần có giả thiết rằng mô hình của đối tượng là chính xác, tức là hàm truyền đạt hay hàm đặc tính tần phải mô tả chính xác hệ thống. Tại sao lại như vậy. Lý do đơn giản chỉ là vì các kết luận về tính ổn định được rút ra từ mô hình (hàm truyền đạt, hàm đặc tính tần) nhưng lại được phát biểu về hệ thống.

Yêu cầu có một mô hình tuyệt đối chính xác là một sự đòi hỏi quá cao và có thể nói không thể đáp ứng được. Những mô hình hệ thống mà ta có đều chứa đựng một sai lệch nhất định so với bản thân hệ thống. Bởi vậy các kết luận về tính ổn định rút ra từ các tiêu chuẩn đã xét cũng chỉ mang tính tương đối.

Vậy làm thế nào để xét được một cách chính xác tính ổn định của hệ thống trong khi trong tay ta chỉ có được một mô hình gần đúng của hệ thống. Câu trả lời chính là một phần nội dung nghiên cứu của chuyên ngành *Điều khiển bền vững*. Bài toán xét tính ổn định của hệ thống trên cơ sở mô hình không chính xác về hệ thống được gọi là bài toán *ổn định bền vững*.

Khoảng cuối thập kỷ 70 Kharitonov đã đưa ra một tiêu chuẩn dựa theo nguyên tắc đa thức Hurwitz quen biết, cho phép khảo sát được tính ổn định của một lớp các mô hình tuyến tính cùng cấu trúc

$$G(s, \underline{a}, \underline{b}) = \frac{1 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n} = \frac{B(s, \underline{b})}{A(s, \underline{a})} \quad (3.25)$$

trong đó \underline{a} , \underline{b} là ký hiệu chỉ vector các tham số a_i , b_j , tức là $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ và $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Ký hiệu như vậy có mục đích là để nhấn mạnh sự thay đổi các tham số đó cho phù hợp với hệ thống. Nói cách khác hệ thống đã được mô tả bằng hàm truyền đạt (3.25) với rất nhiều các tham số a_i , b_j khác nhau (mô tả bởi lớp gồm nhiều mô hình). Một hệ thống được mô tả bằng hàm truyền đạt thực-hữu tỷ có tham số thay đổi như vậy được gọi là *hệ không rõ ràng (uncertain system)*.

Theo định lý 3.7 thì hệ có hàm truyền (3.25) ổn định khi và chỉ khi $G(s, \underline{a}, \underline{b})$ là một hàm bền, tức là khi và chỉ khi

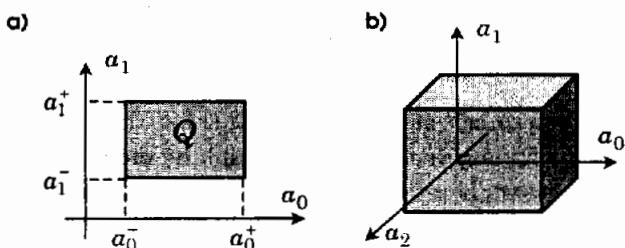
$$A(s, \underline{a}) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n \quad (3.26)$$

là đa thức Hurwitz với tất cả những giá trị tham số a_i , $i=0, 1, \dots, n$ có thể có của nó.

Định nghĩa 3.4: Đa thức (3.26) được gọi là *Hurwitz chặt (strictly Hurwitz)* nếu nó là đa thức Hurwitz với mọi giá trị tham số a_i , $i=0, 1, \dots, n$ thuộc siêu diện Q

$$Q = \{a_i \in \mathbb{R} \mid a_i^- \leq a_i \leq a_i^+, i=0, 1, \dots, n\}.$$

cho trước, trong đó a_i^- và a_i^+ là những số thực đã biết xác định giới hạn dưới và trên của khoảng thay đổi giá trị tham số a_i (hình 3.14).



Hình 3.14: Mô tả siêu diện

Để xét tính Hurwitz chặt của đa thức (3.26) trong siêu diện Q xác định khoảng thay đổi giá trị các tham số a_i , $i=0,1, \dots, n$ ta sẽ xét tính Hurwitz của bốn đa thức sau (gọi là bốn *đa thức Kharitonov*):

$$K_1(s) = a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^- s^4 + a_5^- s^5 + a_6^+ s^6 + \dots \quad (3.27a)$$

$$K_2(s) = a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + a_5^+ s^5 + a_6^+ s^6 + \dots \quad (3.27b)$$

$$K_3(s) = a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^+ s^5 + a_6^- s^6 + \dots \quad (3.27c)$$

$$K_4(s) = a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^- s^5 + a_6^- s^6 + \dots \quad (3.27d)$$

Cách xác định bốn đa thức Kharitonov (3.27) từ đa thức (3.26) và miền siêu diện Q đã cho cũng tương đối dễ nhớ theo quy luật "dịch trái 1 bit" như sau:

-	-	+	+	-	-	+	+	...
-	+	+	-	-	+	+	-	...
+	+	-	-	+	+	-	-	...
+	-	-	+	+	-	-	+	...

Trước hết ta chứng minh định lý sau:

Định lý 3.23: Với một giá trị ω cố định, hàm đặc tính tần $A(j\omega, \underline{a})$ của $A(s, \underline{a})$ sẽ có giá trị nằm trong hình chữ nhật với bốn đỉnh là các giá trị của bốn đa thức Kharitonov (hình 3.15). Ngoài ra, do hàm $A(j\omega, \underline{a})$ liên tục theo biến $\underline{a} \in Q$ nên giá trị của $A(j\omega, \underline{a})$ sẽ là toàn bộ hình chữ nhật đó khi \underline{a} chạy khắp trong Q .

Chứng minh:

Trước tiên, ta nhận thấy tại một giá trị tần số ω cố định (nhưng tùy ý), đa thức $A(j\omega, \underline{a})$ sẽ chỉ còn là hàm của biến $\underline{a} \in Q$ và

$$A(j\omega, \underline{a}) = (a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots) + j\omega(a_1 - a_3 \omega^2 + a_5 \omega^4 - \dots).$$

Bởi vậy, từ

$$a_i^- \leq a_i \leq a_i^+, \forall i=0,1, \dots, n$$

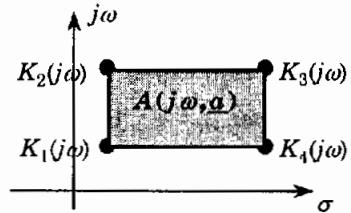
ta sẽ có:

$$a_0^- - a_2^+ \omega^2 + a_4^- \omega^4 - \dots \leq \operatorname{Re}[A(j\omega, \underline{a})] \leq a_0^+ - a_2^- \omega^2 + a_4^+ \omega^4 - \dots$$

$$a_1^- - a_3^+ \omega^2 + a_5^- \omega^4 - \dots \leq \operatorname{Im}[A(j\omega, \underline{a})] \leq a_1^+ - a_3^- \omega^2 + a_5^+ \omega^4 - \dots$$

trong đó ký hiệu $\operatorname{Re}[A(j\omega, \underline{a})]$ chỉ phần thực và $\operatorname{Im}[A(j\omega, \underline{a})]$ chỉ phần ảo của $A(j\omega, \underline{a})$.

Hơn nữa, khi thay biến s trong các công thức (3.27a) + (3.27d) bằng $j\omega$:



Hình 3.15: Minh họa định lý 3.23

$$K_1(j\omega) = a_0^- - a_2^+ \omega^2 + a_4^- \omega^4 - \dots + j\omega(a_1^- - a_3^+ \omega^2 + a_5^- \omega^4 - \dots)$$

$$K_2(j\omega) = a_0^- - a_2^+ \omega^2 + a_4^- \omega^4 - \dots + j\omega(a_1^+ - a_3^- \omega^2 + a_5^+ \omega^4 - \dots)$$

$$K_3(j\omega) = a_0^+ - a_2^- \omega^2 + a_4^+ \omega^4 - \dots + j\omega(a_1^+ - a_3^- \omega^2 + a_5^+ \omega^4 - \dots)$$

$$K_4(j\omega) = a_0^+ - a_2^- \omega^2 + a_4^+ \omega^4 - \dots + j\omega(a_1^- - a_3^+ \omega^2 + a_5^- \omega^4 - \dots)$$

ta sẽ đi đến

$$\operatorname{Re}[K_1(j\omega)] = \operatorname{Re}[K_2(j\omega)] \leq \operatorname{Re}[A(j\omega, \underline{a})] \leq \operatorname{Re}[K_3(j\omega)] = \operatorname{Re}[K_4(j\omega)]$$

$$\operatorname{Im}[K_1(j\omega)] = \operatorname{Im}[K_4(j\omega)] \leq \operatorname{Im}[A(j\omega, \underline{a})] \leq \operatorname{Im}[K_2(j\omega)] = \operatorname{Im}[K_3(j\omega)]$$

và đó chính là điều phải chứng minh. \square

Định lý 3.24 (Kharitonov): Đa thức $A(s, \underline{a})$ cho trong (3.26) với siêu diện Q cho trong định nghĩa 3.4 về miêu giá trị tham số $a_i^- \leq a_i \leq a_i^+$, $i=0, 1, \dots, n$ là Hurwitz chẵt khi và chỉ khi cả bốn đa thức Kharitonov (3.27) của nó là những đa thức Hurwitz.

Chứng minh:

Điều kiện cần là hiển nhiên vì khi $A(s, \underline{a})$ là Hurwitz với mọi $\underline{a} \in Q$ thì nó cũng là Hurwitz với $a_i = a_i^-$ hoặc $a_i = a_i^+$ và do đó cả bốn đa thức Kharitonov cũng sẽ là Hurwitz.

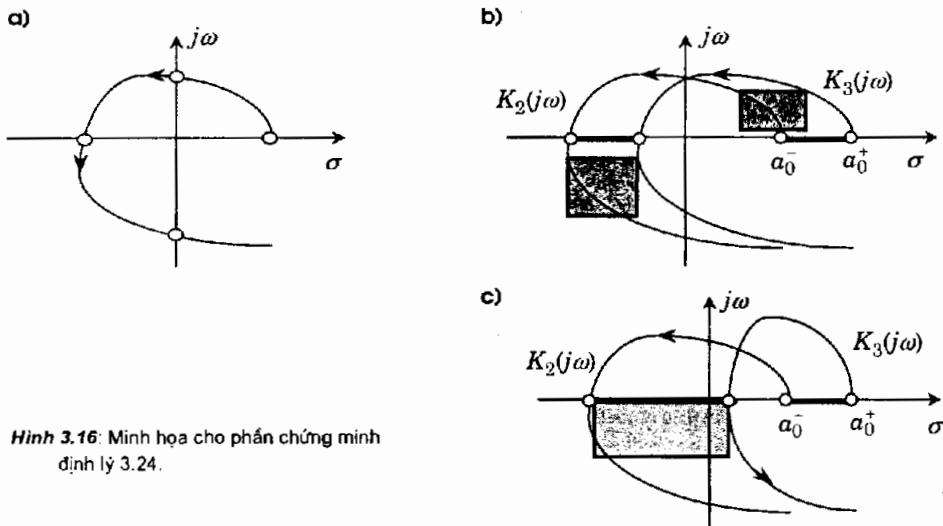
Chỉ còn lại điều kiện đủ là phải được chứng minh. Giả thiết cho rằng bốn đa thức Kharitonov (3.27a) – (3.27d) là những đa thức Hurwitz. Vậy theo tiêu chuẩn Michailov (định lý 3.14), các đường quỹ đạo tần số biên pha của chúng với $0 \leq \omega \leq \infty$ sẽ phải xuất phát từ một điểm trên trục thực và đi qua n góc một phần tư trong mặt phẳng phức theo hướng ngược chiều kim đồng hồ, nói cách khác góc quay của chúng (nhìn từ gốc tọa độ) bằng $\frac{n\pi}{2}$.

Cũng theo hệ quả của tiêu chuẩn Michailov (định lý 3.15) ta còn có:

- Giao điểm của đường quỹ đạo biên pha của đa thức Hurwitz với trục thực phải nằm xen kẽ giữa những giao điểm của nó với trục ảo (hình 3.16a).
- Giá trị tại hai giao điểm với trục thực nằm kề nhau phải trái dấu nhau.
- Giá trị tại hai giao điểm với trục ảo nằm kề nhau phải trái dấu nhau.

Quay lại việc chứng minh điều kiện đủ. Hình 3.16b) biểu diễn minh họa các đường quỹ đạo biên pha của bốn đa thức Kharitonov $K_1(j\omega), K_2(j\omega), K_3(j\omega), K_4(j\omega)$. Theo kết quả của định lý 3.23 thì tại một giá trị ω cố định, mỗi đường quỹ đạo đó sẽ chứa một đỉnh của hình chữ nhật chứa giá trị của đa thức $A(j\omega, \underline{a})$ khi \underline{a} chạy khắp trên Q . Hình chữ nhật này có các cạnh nằm song song trục tọa độ. Đặc biệt khi ω chạy từ 0 đến ∞ mỗi đỉnh của hình chữ nhật luô chỉ nằm trên một đường.

Bây giờ ta sẽ chứng minh là khi ω biến thiên từ 0 đến ∞ , nếu bốn đỉnh của hình chữ nhật bao gốc tọa độ một góc $\frac{n\pi}{2}$ thì mọi điểm thuộc hình chữ nhật đó cũng bao gốc tọa độ một góc đúng bằng $\frac{n\pi}{2}$ và như vậy chúng cũng thỏa mãn tiêu chuẩn Michailov.



Hình 3.16: Minh họa cho phần chứng minh định lý 3.24.

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử hình chữ nhật với bốn đỉnh có cùng góc quay $\frac{n\pi}{2}$ nhưng bản thân nó lại bao gốc tọa độ một góc nhỏ hơn $\frac{n\pi}{2}$.

Như vậy phải có lúc hình chữ nhật chứa điểm gốc tọa độ. Nhưng vì khi $\omega=0$, gốc tọa độ đã nằm ngoài hình chữ nhật (thực ra lúc đó chỉ là một đoạn thẳng nằm trên trục hoành với hai đầu là a_0^- và a_0^+) nên khi $\omega \rightarrow \infty$ điểm gốc đã đi từ ngoài vào trong hình chữ nhật và do đó phải tồn tại một giá trị ω^* mà tại đó gốc tọa độ sẽ nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Không mất tính tổng quát ta giả sử đó là cạnh trên như hình 3.16c minh họa, tức là có đỉnh thuộc $K_3(j\omega)$ với phần thực dương. Vậy thì đường đặc tính tần $K_3(j\omega)$ phải có hai giao điểm với trục thực nằm kề nhau cùng dấu với nhau (dương) và điều này ngược lại với hệ quả của tiêu chuẩn Mikhailov. Tức là điều giả sử là sai.

Vậy, nếu hình chữ nhật chứa các giá trị của $A(j\omega, \underline{a})$ đã quay quanh gốc tọa độ một góc $\frac{n\pi}{2}$ khi ω biến thiên từ 0 đến ∞ , thì tất cả các đường đặc tính tần biên pha của $A(j\omega, \underline{a})$, $\underline{a} \in Q$ cũng phải tạo ra góc quay $\frac{n\pi}{2}$ và do đó $A(s, \underline{a})$ cũng là một đa thức Hurwitz với mọi $\underline{a} \in Q$ (Hurwitz chẵt). \square

Định lý Kharitonov cho phép ta sử dụng được những tiêu chuẩn xét tính ổn định hệ tham số hằng để xét tính ổn định của hệ có tham số thay đổi nếu như miến thay đổi giá trị của các tham số là một siêu diện.

Ví dụ 19: Xét hệ phụ thuộc tham số có hàm truyền đặt

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3},$$

trong đó

$$1 \leq a_0 \leq 3, \quad 2 \leq a_1 \leq 4, \quad 6 \leq a_2 \leq 7, \quad 1 \leq a_3 \leq 2.$$

Muốn kiểm tra tính ổn định của hệ, ta kiểm tra tính Hurwitz chật của đa thức:

$$A(s, \underline{a}) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 \quad (3.28)$$

và để làm điều đó ta xây dựng bốn đa thức Kharitonov

- a) $1+2s+7s^2+2s^3$
- b) $1+4s+7s^2+s^3$
- c) $3+4s+6s^2+s^3$
- d) $3+2s+6s^2+2s^3$

Tiếp theo, sử dụng bảng Routh để kiểm tra thì thấy đúng là cả 4 đa thức trên là những đa thức Hurwitz (các số hạng trong cột đầu đều dương). Vậy đa thức (3.28) là đa thức Hurwitz chật, hay hệ đã cho ổn định với tất cả các giá trị tham số thuộc miền đã cho. □

Điều đặc biệt trong ví dụ trên là thực chất ta chỉ cần xét tính Hurwitz của đa thức $K_4(s)$ là đủ. Tại sao lại như vậy? Câu trả lời là nội dung định lý của Anderson, Jury và Mansor mà thực chất là một hệ quả của tiêu chuẩn Kharitonov, được phát biểu như sau:

Định lý 3.25 (Anderson, Jury, Mansor): Cho đa thức

$$A(s, \underline{a}) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n, \quad \text{với} \quad a_i > 0, \forall i.$$

và siêu diện

$$Q = \{a_i \in \mathbb{R} \mid a_i^- \leq a_i \leq a_i^+, i=0, 1, \dots, n\}.$$

- a) Nếu $n=3$ thì cần và đủ để $A(s, \underline{a})$ Hurwitz chật trong Q là đa thức

$$K_4(s) = a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3$$

là đa thức Hurwitz.

- b) Nếu $n=4$ thì cần và đủ để $A(s, \underline{a})$ Hurwitz chật trong Q là hai đa thức

$$K_3(s) = a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^+ s^5$$

$$K_4(s) = a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^- s^5$$

là các đa thức Hurwitz.

c) Nếu $n=5$ thì cần và đủ để $A(s, \underline{a})$ Hurwitz chật trong Q là ba đa thức

$$K_2(s) = a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + a_5^+ s^5$$

$$K_3(s) = a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^+ s^5$$

$$K_4(s) = a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^- s^5$$

là các đa thức Hurwitz.

Chứng minh:

Ta sẽ chứng minh cho trường hợp $n=3$. Cho các trường hợp còn lại ta thực hiện một cách tương tự. Điều kiện cần là hiển nhiên vì khi $A(s, \underline{a})$ Hurwitz chật thì bốn đa thức Kharitonov của nó là các đa thức Hurwitz, trong đó có $K_4(s)$. Để chứng minh điều kiện đủ ta lập bảng Routh của bốn đa thức Kharitonov:

$K_1(s)$	a_0^-	a_2^+
	a_1^-	a_3^+
	$a_2^+ - \frac{a_0^- a_3^+}{a_1^-}$	
	a_3^+	

$K_2(s)$	a_0^-	a_2^+
	a_1^+	a_3^-
	$a_2^+ - \frac{a_0^- a_3^-}{a_1^+}$	
	a_3^-	

$K_3(s)$	a_0^+	a_2^-
	a_1^+	a_3^-
	$a_2^- - \frac{a_0^+ a_3^-}{a_1^+}$	
	a_3^-	

$K_4(s)$	a_0^+	a_2^-
	a_1^-	a_3^+
	$a_2^- - \frac{a_0^+ a_3^+}{a_1^-}$	
	a_3^+	

Theo giả thiết về tính Hurwitz của $K_4(s)$ thì giá trị trong cột đầu bảng Routh của nó

là những số dương. Do đó $a_2^- - \frac{a_0^+ a_3^+}{a_1^-} > 0$. Từ đây ta suy ra thêm:

- 1) $a_2^- - \frac{a_0^+ a_3^-}{a_1^+} > 0$, vì $\frac{a_0^+ a_3^-}{a_1^+} < \frac{a_0^+ a_3^+}{a_1^-}$. Kết hợp với điều kiện $a_i > 0$, $\forall i$ đã cho thì theo tiêu chuẩn Routh-Hurwitz, $K_3(s)$ là Hurwitz.
- 2) $a_2^+ - \frac{a_0^- a_3^-}{a_1^+} > 0$, vì $\frac{a_0^- a_3^-}{a_1^+} < \frac{a_0^+ a_3^+}{a_1^-}$. Cộng thêm điều kiện $a_i > 0$, $\forall i$ đã có thì $K_2(s)$ là Hurwitz.
- 3) $a_2^+ - \frac{a_0^- a_3^+}{a_1^-} > 0$, vì $\frac{a_0^- a_3^+}{a_1^-} < \frac{a_0^+ a_3^+}{a_1^-}$. Thêm điều kiện $a_i > 0$, $\forall i$ đã biết thì $K_1(s)$ là Hurwitz. □

3.2.9 Điều kiện đủ của Gershgorin

Cho hệ MIMO được mô tả bởi

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ y = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad (3.29)$$

Vấn đề ta xét ở đây là kiểm tra tính ổn định của hệ đó. Theo định lý 3.8 ở mục 3.2.2 thì việc kiểm tra tính ổn định của hệ (3.29) đồng nghĩa với việc xét xem A có phải là ma trận bền hay không, tức là xét xem đa thức đặc tính của nó

$$A(s) = \det(sI - A) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n, \quad (3.30)$$

có phải là đa thức Hurwitz hay không.

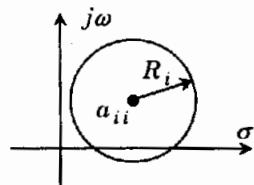
Như vậy, tất cả các tiêu chuẩn đã biết như Routh–Hurwitz, Michailov, Kharitonov, ... cũng đều sử dụng được để kiểm tra tính ổn định của hệ (3.29). Vấn đề hạn chế chính có lẽ còn làm cho ta không được thoải mái là phải xây dựng đa thức đặc tính (3.30), đặc biệt khi mà ma trận A có số chiều tương đối lớn.

Định lý Gershgorin và hệ quả của nó trình bày sau đây sẽ giúp cho ta xét được tính ổn định của hệ (3.29) mà không cần phải có đa thức đặc tính (3.30). Tuy nhiên định lý này chỉ là một điều kiện đủ. Điều đó nói rằng nếu như ma trận A không thỏa mãn định lý thì hệ (3.29) vẫn có thể ổn định.

Định lý 3.26 (Gershgorin): Với mỗi giá trị riêng s_k của ma

trận phức (các phần tử là những số phức)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



Hình 3.17: Minh họa định lý 3.26

luôn tồn tại một chỉ số $i=1, 2, \dots, n$ sao cho s_k nằm trong đường tròn tâm a_{ii} , bán kính $R_i = |a_{i1}| + \dots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|$ (hình 3.17), tức là:

$$|s_k - a_{ii}| \leq R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|. \quad (3.31)$$

Chứng minh:

Vì s_k là giá trị riêng của A nên phải tồn tại một vector $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq \underline{0}$ sao cho

$$(A - s_k I) \underline{v} = \underline{0}$$

trong đó $\underline{0}$ là ký hiệu chỉ vector có các phần tử đều bằng 0.

Suy ra

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} v_j + (a_{ii} - s_k) v_i = 0, \Rightarrow (s_k - a_{ii}) v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} v_j$$

với $i = 1, 2, \dots, n$. Chọn chỉ số i sao cho

$$|v_i| = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\}$$

ta sẽ có:

$$\begin{aligned} |(s_k - a_{ii}) v_i| &= \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} v_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \cdot |v_i| \\ \Leftrightarrow |s_k - a_{ii}| &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (\text{đ.p.c.m.}) \end{aligned}$$

Theo định lý 3.26, mỗi giá trị riêng s_i của A đều được bao bởi một đường tròn có tâm là a_{ii} và bán kính là R_i , $i = 1, \dots, n$. Do đó nếu như các đường tròn đó đều nằm bên trái trực ảo thì chắc chắn tất cả các giá trị riêng s_i , $i = 1, \dots, n$ đều phải có phần thực âm (hình 3.18).

Ta di đến điều kiện đủ cho tính ổn định của hệ như sau:

Định lý 3.27 (Hệ quả Gershgorin): Ký hiệu $R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$. Vậy thì hệ (3.29) với $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sẽ ổn định nếu $a_{ii} + R_i < 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Ví dụ 20: Cho hệ mô tả bởi

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

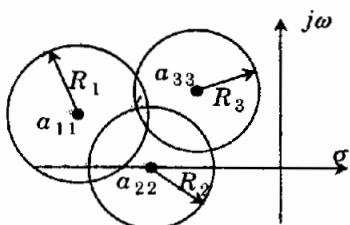
Từ ma trận hệ thống có

$$a_{11} + R_1 = -3 + 1 = -2 < 0,$$

$$a_{22} + R_2 = -3 + 2 = -1 < 0,$$

$$a_{33} + R_3 = -4 + (2 + 1) = -1 < 0.$$

Do đó theo định lý 3.27 thì hệ ổn định.



Hình 3.18: Định vị miền các giá trị riêng của ma trận.

Ta có thể kiểm tra lại kết luận trên nhờ đa thức đặc tính của hệ thống

$$A(s) = \det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s+3 & 1 & 0 \\ -2 & s+3 & 0 \\ 2 & -1 & s+4 \end{pmatrix} = (s+4)[(s+3)^2 + 2]$$

và thấy đa thức đó là Hurwitz vì ba nghiệm của nó

$$s_1 = -4, \quad s_2 = -3 + j\sqrt{2}, \quad s_3 = -3 - j\sqrt{2},$$

đều có phần thực âm. \square

Ví dụ 21: Định lý 3.27 chỉ là điều kiện đủ, bởi vậy nếu hệ không thỏa mãn định lý 3.27 thì có thể nó vẫn ổn định. Để minh họa ta xét hệ sau:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Hệ có đa thức đặc tính

$$A(s) = \det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s+2 & 1 & 0 \\ -4 & s+2 & 0 \\ 2 & -1 & s+1 \end{pmatrix} = (s+1)[(s+2)^2 + 4]$$

với ba nghiệm

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -2 + 2j, \quad s_3 = -2 - 2j,$$

đều nằm bên trái trục ảo nên nó ổn định. Nhưng hệ lại không thỏa mãn định lý 3.27

$$a_{11} + R_1 = -2 + 1 = -1 < 0,$$

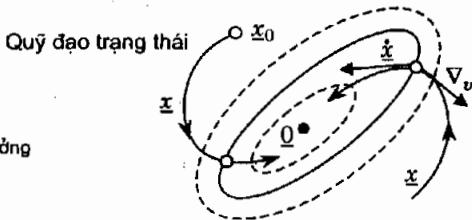
$$a_{22} + R_2 = -2 + 4 = 2 > 0,$$

$$a_{33} + R_3 = -1 + (2 + 1) = 2 > 0.$$

3.2.10 Tiêu chuẩn Lyapunov

Giống như định lý của Gershgorin, tiêu chuẩn Lyapunov trình bày sau đây là phương pháp xét tính ổn định một cách trực tiếp trong không gian trạng thái rất thích hợp cho những hệ thống mô tả bởi mô hình trạng thái. Xuất phát điểm của tiêu chuẩn Lyapunov là định lý 3.8 với khẳng định rằng hệ ổn định nếu quá trình tự do của nó tắt dần, bởi vậy phương pháp Lyapunov sẽ kiểm tra xem quỹ đạo trạng thái của hệ thống ở quá trình tự do có hướng tiến về gốc tọa độ và kết thúc tại đó không.

Từ phương diện năng lượng ta có thể xem như phương pháp Lyapunov được xây dựng trên cơ sở bảo tồn năng lượng của một hệ vật lý. Năng lượng còn tồn tại bên trong hệ vật lý do tác động tức thời bên ngoài đưa vào được đo bởi một hàm không âm. Hệ sẽ ổn định (tiệm cận) ở trạng thái cân bằng của nó nếu như trong lân cận điểm cân bằng đó hàm đo năng lượng này của hệ luôn có xu hướng giảm dần về 0.



Hình 3.19: Giải thích xuất phát điểm của tư tưởng phương pháp Lyapunov.

Bản chất phương pháp Lyapunov được giải thích như sau: Giả sử rằng bao quanh gốc tọa độ $\underline{0}$ có họ các đường cong khép kín v (hình 3.19). Các đường cong này có thể được xem như biên của các lân cận của điểm gốc $\underline{0}$. Để kiểm tra xem quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ (ứng với $\underline{u}=0$ và đi từ điểm trạng thái đầu \underline{x}_0 cho trước nhưng tùy ý) mô tả quá trình tự do của hệ

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad (3.32)$$

có tiến về gốc tọa độ $\underline{0}$ hay không, ta chỉ cần xét xem quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ có cắt tất cả các đường cong thuộc họ v từ bên ngoài vào bên trong hay không và nếu điều đó xảy ra thì chắc chắn $\underline{x}(t)$ phải có hướng tiến về gốc tọa độ và kết thúc tại đó.

Như vậy phương pháp Lyapunov sẽ gồm hai bước:

- 1) Xây dựng họ các đường cong v khép kín chứa điểm gốc tọa độ $\underline{0}$ bên trong.
- 2) Hệ sẽ ổn định nếu quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ mô tả quá trình tự do của hệ cắt mọi đường cong thuộc họ v theo chiều từ ngoài vào trong. Cần và đủ để $\underline{x}(t)$ cắt một đường cong thuộc họ v theo chiều từ ngoài vào trong là tại điểm cắt đó, tiếp tuyến của quỹ đạo tự do $\underline{x}(t)$ phải tạo với vector ∇_v vuông góc với đường cong đó theo hướng từ trong ra ngoài một góc lớn hơn 90° (hình 3.19).

Định lý 3.28 (Lyapunov): Nếu tồn tại hàm Lyapunov $V(\underline{x})$, thỏa mãn các điều kiện:

- a) Xác định dương, tức là $V(\underline{x}) > 0$ với $\underline{x} \neq \underline{0}$ và $V(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$,
- b) $\frac{dV}{dt} < 0$ (đạo hàm của nó xác định âm),

với \underline{x} là nghiệm tự do của hệ thống thì hệ sẽ ổn định (tiệm cận Lyapunov tại điểm gốc tọa độ $\underline{0}$).

Chứng minh:

Hàm xác định dương $V(\underline{x})$ có tính chất là khi ta cắt nó bằng một mặt phẳng $V=k$ song song với đáy (không gian trạng thái) và chiếu thiết diện xuống đáy thì ta sẽ được

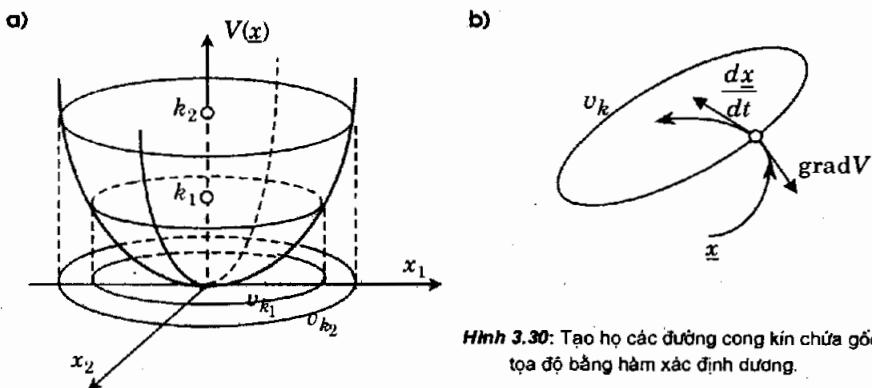
một đường cong khép kín v_k chứa điểm gốc tọa độ $\underline{0}$. Đường cong v_k ứng với k nhỏ hơn thì nằm bên trong đường cong v_k ứng với k lớn hơn (hình 3.20a). Nói cách khác:

$$k_1 < k_2 \Leftrightarrow v_{k_1} \text{ nằm bên trong } v_{k_2}.$$

Do đó vector vuông góc với đường cong v_k và chỉ chiều tăng theo k là

$$\nabla_V = \text{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \right)^T = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T$$

sẽ có hướng chỉ từ trong ra ngoài đường cong v_k (hình 3.20b).



Hình 3.20: Tạo họ các đường cong kín chứa gốc tọa độ bằng hàm xác định dương.

Tiếp theo, do có

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} = (\text{grad}V)^T \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} = |\text{grad}V| \cdot \left| \frac{d\underline{x}}{dt} \right| \cdot \cos \varphi,$$

mà $\frac{d\underline{x}}{dt}$ lại chính là tiếp tuyến của quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$, nên với điều kiện $\frac{dV}{dt} < 0$, góc φ tạo bởi hai vector $\text{grad}V$ và $\frac{d\underline{x}}{dt}$ phải là một góc tù (lớn hơn 90°), tức là quỹ đạo trạng thái $\underline{x}(t)$ sẽ cắt tất cả các đường cong v_k theo hướng từ ngoài vào trong. \square

Chú ý: Do trong phần chứng minh định lý 3.28 ta đã không sử dụng giả thiết rằng hệ đang xét là hệ tuyến tính. Bởi vậy định lý 3.28 còn áp dụng cho cả hệ phi tuyến chứ không riêng cho hệ tuyến tính. Đây là điều đặc biệt của tiêu chuẩn Lyapunov so với các tiêu chuẩn đã biết khác.

Theo tinh thần nội dung của định lý 3.28, để kiểm tra tính ổn định hệ thống nhờ tiêu chuẩn Lyapunov thì ta phải tìm hàm Lyapunov $V(\underline{x})$ xác định dương và đạo hàm của nó tính trên cơ sở mô hình trạng thái hệ thống phải xác định âm. Cũng theo định lý

3.28, nếu như rằng ta không tìm được một hàm Lyapunov nào như vậy thì vẫn không thể khẳng định được hệ không ổn định. Nói cách khác, định lý 3.28 được xem như một công cụ đủ để xét tính ổn định của hệ thống.

Ví dụ 22: Cho hệ mô tả bởi

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{\underline{u}} \\ &= \begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 \\ -x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 + 2u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Sử dụng hàm xác định dương

$$V(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

cùng với quỹ đạo $\underline{x}(t)$ của quá trình tự do của hệ ($u_1 = u_2 = 0$) ta có

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= (2x_1 \quad 2x_2 \quad 2x_3) \cdot \begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 \\ -x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \\ &= -8x_1^2 - 10x_2^2 - 4x_3^2 < 0\end{aligned}$$

với mọi vector $\underline{x} \neq \underline{0}$ (hàm $\frac{dV}{dt}$ xác định âm). Bởi vậy, hệ ổn định theo định lý 3.28. \square

Thông thường với hệ tuyến tính có mô hình trạng thái (3.32), người ta hay sử dụng hàm xác định dương $V(\underline{x})$ có dạng:

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T Q \underline{x}, \quad (3.33)$$

trong đó Q là ma trận vuông kiểu $n \times n$ với n là số biến trạng thái của hệ thống (số chiều của không gian trạng thái). Chẳng hạn như ở ví dụ 22 ta đã sử dụng ma trận Q

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad (\text{ma trận đơn vị}).$$

Một ma trận $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ làm cho

$$\underline{x}^T Q \underline{x} \geq 0, \quad \forall \underline{x} \quad \text{và} \quad \underline{x}^T Q \underline{x} = 0 \quad \text{khi và chỉ khi} \quad \underline{x} = \underline{0},$$

được gọi là *ma trận xác định dương*.

Sử dụng hàm $V(\underline{x})$ xác định dương dạng (3.33) và mô hình trạng thái (3.32) của hệ thống thì với quỹ đạo trạng thái tự do ($\underline{u} = \underline{0}$) ta có:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \underline{x}^T Q \frac{d\underline{x}}{dt} + \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)^T Q \underline{x} = \underline{x}^T Q A \underline{x} + \underline{x}^T A^T Q \underline{x} \\ &= \underline{x}^T (Q A + A^T Q) \underline{x}.\end{aligned}$$

Bởi vậy hệ tuyến tính (3.32) sẽ ổn định nếu như tồn tại một ma trận Q xác định dương sao cho

$$\underline{x}^T (Q A + A^T Q) \underline{x} < 0 \quad \text{với mọi } \underline{x} \neq 0.$$

Ma trận $(Q A + A^T Q)$ khi đó được gọi là **xác định âm**. Ta đi đến hệ quả:

Định lý 3.29 (Hệ quả Lyapunov): Cho một hệ tuyến tính mô tả bởi mô hình trạng thái (3.32). Hệ sẽ ổn định nếu một trong hai điều sau được thỏa mãn:

a) Tồn tại ma trận vuông $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ xác định dương sao cho ma trận $(Q A + A^T Q)$ xác định âm, tức là $-(Q A + A^T Q)$ xác định dương.

b) Tồn tại một ma trận xác định dương P sao cho phương trình

$$Q A + A^T Q = -P \tag{3.34}$$

có nghiệm Q cũng xác định dương. Phương trình (3.34) có tên gọi là **phương trình Lyapunov**.

Cuối cùng, và cũng để việc sử dụng định lý 3.29 được thuận tiện, ta sẽ làm quen với định lý của Sylvester cho sau đây như một công cụ xác định tính xác định dương của một ma trận vuông cho trước.

Định lý 3.30 (Sylvester): Cân và đủ để ma trận vuông

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & & & \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

xác định dương là các ma trận đường chéo của nó có định thức dương,

$$q_{11} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} > 0, \dots$$

Tất nhiên rằng định lý Sylvester nêu trên cũng được sử dụng để xác định tính xác định âm của một ma trận Q bằng cách kiểm tra xem ma trận $-Q$ có xác định dương hay không. Nếu $-Q$ xác định dương thì Q xác định âm.

Ví dụ 23: Xét hệ mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u.$$

Chọn ma trận $P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ xác định dương, tức là chọn $p > 0$ rồi thay vào (3.34) sẽ có:

$$Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} Q = -\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Rightarrow Q = -\frac{p}{2a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Theo định lý 3.29 thì hệ sẽ ổn định nếu như Q xác định dương, tức là khi:

$$-\frac{p}{2a} > 0 \Leftrightarrow a < 0.$$

□

Chú ý: Tiêu chuẩn Lyapunov, như đã đề cập, cũng đúng cho cả hệ phi tuyến. Thậm chí với hệ phi tuyến, nó không chỉ là một công cụ xét tính ổn định mà còn là một phương pháp tổng quát nhất để xác định miền ổn định cho hệ phi tuyến, tức là miền các điểm trạng thái mà xuất phát từ đó, quỹ đạo trạng thái quá trình tự do của hệ phi tuyến chắc chắn sẽ tiến về gốc tọa độ và kết thúc tại đó [13]. Từ phương pháp Lyapunov có rất nhiều các tiêu chuẩn khác để xét tính ổn định hệ phi tuyến đã được hình thành như phương pháp Krasovski, phương pháp Schultz-Gibson, phương pháp Aiserman

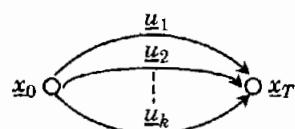
3.3 Tính điều khiển được của hệ liên tục

3.3.1 Ý nghĩa của công việc

Một nguyên tắc luôn phải tuân thủ khi đi tìm lời giải cho một bài toán, có thể là một bài toán thuộc lĩnh vực kỹ thuật, nhưng cũng có thể thuộc các lĩnh vực khác như xã hội, kinh tế hay tự nhiên, là trước khi bắt tay vào công việc tìm kiếm lời giải ta phải xác định xem có thực sự tồn tại hay không lời giải của bài toán đó.

Ở bài toán điều khiển cũng vậy. Nói chung, một bài toán điều khiển có hai phần:

- Xác định những tín hiệu điều khiển $u(t)$ để đưa hệ từ một điểm trạng thái ban đầu không mong muốn tới một điểm trạng thái mong muốn khác. Ví dụ, hệ đang làm việc ổn định ở trạng thái cân bằng \underline{x}_T thì có một tín hiệu nhiễu tác động vào hệ làm cho hệ ra khỏi điểm làm việc cân bằng đó và chuyển tới một điểm trạng thái \underline{x}_0 không mong muốn nào đó. Nhiệm vụ của điều khiển là phải tìm tín hiệu điều khiển $u(t)$ đưa được hệ từ \underline{x}_0 quay trở về điểm trạng thái cân bằng \underline{x}_T ban đầu trong một khoảng thời gian hữu hạn (hình 3.31).
- Tìm trong số những tín hiệu $u(t)$ đã xác định được một (hoặc nhiều) tín hiệu mang đến cho quá trình chuyển đổi đó một chất lượng như đã yêu cầu. Chẳng hạn trong số các tín hiệu có khả năng đưa hệ từ \underline{x}_0 về lại được \underline{x}_T thì phải xác định một tín hiệu sao cho với nó, chi phí cho quá trình chuyển đổi là thấp nhất.



Hình 3.31: Xác định tín hiệu điều khiển.

Như vậy, rõ ràng ta chỉ có thể thực sự điều khiển được hệ thống nếu như đã tìm được ít nhất một tín hiệu điều khiển $u(t)$ đưa được hệ từ điểm trạng thái đầu \underline{x}_0 tới được điểm trạng thái đích \underline{x}_T trong khoảng thời gian hữu hạn. Điều này phụ thuộc hoàn toàn vào bản chất động học của từng hệ thống. Không phải mọi hệ thống hay đối tượng tồn tại trong tự nhiên có khả năng động học là đưa được về trạng thái mong muốn. Một hệ thống có khả năng đưa được từ điểm trạng thái \underline{x}_0 về điểm trạng thái \underline{x}_T được gọi là *hệ điều khiển được (hoàn toàn)* tại \underline{x}_0 .

Định nghĩa 3.5: Một hệ thống tuyến tính, liên tục được gọi là *điều khiển được* nếu tồn tại ít nhất một tín hiệu điều khiển đưa được nó từ một điểm trạng thái ban đầu \underline{x}_0 (tùy ý) về được gốc tọa độ $\underline{0}$ trong khoảng thời gian hữu hạn.

Ta cần phải lưu ý tới ba điểm trong định nghĩa vừa nêu:

1) *Thứ nhất là về khoảng thời gian hữu hạn.*

Dây là yêu cầu mà sự cần thiết của nó gần như là hiển nhiên, vì nếu hệ có thể đưa được về gốc tọa độ nhưng phải trong khoảng thời gian vô cùng lớn thì cũng chẳng có ý nghĩa gì cho bài toán điều khiển. Thậm chí nhiều hệ có khả năng tự quay được về gốc tọa độ (hệ ổn định) nhưng không điều khiển được. Để minh họa ta xét một ví dụ.

Ví dụ 24: Xét hệ thống có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_2 + u(t) \end{pmatrix}.$$

Rõ ràng là tín hiệu điều khiển $u(t)$ không có tác dụng gì đối với biến trạng thái $x_1(t)$ và do đó mọi tín hiệu $u(t)$ không đưa được hệ từ điểm trạng thái ban đầu $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ có $x_1^0 \neq 0$ về được gốc tọa độ (trong khoảng thời gian hữu hạn), mặc dù với

$$x_1(t) = e^{at} x_1^0$$

thì $x_1(t)$ vẫn tiến tới 0 khi a có phần thực âm, tức là hệ cũng có thể tự về được gốc tọa độ, nhưng trong một khoảng thời gian vô hạn. \square

2) *Thứ hai là điểm trạng thái đầu \underline{x}_0 tùy ý.*

Một câu hỏi đặt ra cho ta là có hay không trường hợp tuy hệ thống có thể được đưa từ \underline{x}_0 về gốc tọa độ (bằng một hoặc nhiều tín hiệu điều khiển $u(t)$ thích hợp) nhưng từ một điểm trạng thái $\tilde{\underline{x}}_0$ nào đó khác thì không thể (không tồn tại một tín hiệu $u(t)$ nào làm được việc đó). Câu hỏi đó là hoàn toàn có lý và người ta đã thấy rằng điều đó có thể xảy ra ở một hệ thống bất kỳ, đặc biệt là hệ thống điều khiển phi tuyến. Chính vì vậy, xuất xứ ban đầu, khái niệm điều khiển được luôn được nêu cùng với điểm trạng thái đầu

\underline{x}_0 . Chẳng hạn như thay vì "hệ thống điều khiển được" người ta lại nói "hệ thống điều khiển được tại điểm trạng thái \underline{x}_0 ". Tuy nhiên, như sau này ta sẽ chỉ rõ, riêng đối với hệ tuyến tính thì nếu tồn tại một tín hiệu $u_1(t)$ đưa hệ từ \underline{x}_0 về được gốc tọa độ $\underline{0}$ thì cũng tồn tại (ít nhất) một tín hiệu $u_2(t)$ đưa được hệ từ \underline{x}_0 về $\underline{0}$.

Nói cách khác, khi hệ tuyến tính đã điều khiển được tại một điểm trạng thái \underline{x}_0 thì nó cũng điều khiển được tại mọi điểm trạng thái khác trong không gian trạng thái. Vì lẽ đó, trong định nghĩa 3.5 ta đã ghi thêm chữ "tùy ý" về yêu cầu điểm trạng thái đầu \underline{x}_0 và cũng chỉ nói ngắn gọn "hệ điều khiển được" thay cho "hệ điều khiển được tại \underline{x}_0 ".

3) Thủ ba là điểm trạng thái đích là gốc tọa độ.

Trong định nghĩa 3.5, điểm trạng thái đích \underline{x}_T được thay cụ thể là điểm gốc tọa độ $\underline{0}$. Nếu như không có thêm câu chỉ rõ là đổi tượng để cập trong định nghĩa chỉ là đổi tượng tuyến tính, liên tục thì việc thay thế đó sẽ là một hạn chế phạm vi ứng dụng lớn của định nghĩa vì rất có thể là hệ tuy đưa được về gốc $\underline{0}$ song lại không đưa được tới \underline{x}_T .

Do đó, với đổi tượng quan tâm là một hệ thống điều khiển nói chung (kể cả hệ phi tuyến) thì để chặt chẽ người ta đã đưa thêm các khái niệm sau vào định nghĩa:

- Hệ được gọi là *đạt tới được* điểm trạng thái \underline{x}_T nếu tồn tại một tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ đưa được hệ từ gốc tọa độ $\underline{0}$ tới \underline{x}_T trong khoảng thời gian hữu hạn.
- Hệ được gọi là *điều khiển được hoàn toàn* tại \underline{x}_0 nếu với một điểm trạng thái đích \underline{x}_T tùy ý, nhưng cho trước, luôn tồn tại một tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ đưa hệ từ \underline{x}_0 tới \underline{x}_T trong khoảng thời gian hữu hạn.

Sau đây ta sẽ chỉ ra rằng riêng với hệ tuyến tính liên tục như trong định nghĩa 3.5 đã giới hạn thì hai khái niệm vừa nêu là không cần thiết. Tức là *nếu hệ tuyến tính đã điều khiển được thì nó cũng điều khiển được hoàn toàn*.

Xét hệ tuyến tính tham số hằng, mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad \text{với} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r}. \quad (3.35)$$

Gọi \underline{x}_0 và \underline{x}_T là hai điểm trạng thái bất kỳ trong không gian trạng thái. Giả thiết rằng hệ điều khiển được tại \underline{x}_0 . Vậy thì nó cũng điều khiển được tại \underline{x}_T . Điều này nói rằng tồn tại tín hiệu $u_1(t)$ đưa hệ từ \underline{x}_0 về được gốc tọa độ $\underline{0}$ trong khoảng thời gian hữu hạn T_1 và tín hiệu $u_2(t)$ đưa được hệ từ \underline{x}_T về $\underline{0}$ trong khoảng thời gian hữu hạn T_2 .

Sử dụng công thức (2.65) đã cho tại mục 2.3.4 thuộc chương 2 để xác định nghiệm của hệ phương trình vi phân (3.35) thì điều giả thiết trên sẽ viết được thành:

$$\underline{x} = e^{AT_1} \underline{x}_0 + \int_0^{T_1} e^{A(T_1 - \tau)} B \underline{u}_1(\tau) d\tau = e^{AT_1} \left[\underline{x}_0 + \int_0^{T_1} e^{-A\tau} B \underline{u}_1(\tau) d\tau \right]$$

và

$$\underline{x} = e^{AT_2} \underline{x}_T + \int_0^{T_2} e^{A(T_2 - \tau)} B \underline{u}_2(\tau) d\tau = e^{AT_2} \left[\underline{x}_T + \int_0^{T_2} e^{-A\tau} B \underline{u}_2(\tau) d\tau \right].$$

Suy ra

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \int_0^{T_1} e^{-A\tau} B \underline{u}_1(\tau) d\tau \quad (3.36a)$$

$$\underline{x} = \underline{x}_T + \int_0^{T_2} e^{-A\tau} B \underline{u}_2(\tau) d\tau. \quad (3.36b)$$

vì e^{AT_1} , e^{AT_2} là những ma trận không suy biến.

Tiếp theo ta định nghĩa tín hiệu điều khiển mới

$$\underline{u}(t) = \begin{cases} \underline{u}_1(t) & \text{nếu } 0 < t \leq T_1 \\ -e^{-AT_2} \underline{u}_2(t - T_1) & \text{nếu } T_1 < t \end{cases} \quad (3.37)$$

Khi đang ở tại điểm trạng thái \underline{x}_0 và dưới sự tác động của tín hiệu $\underline{u}(t)$ này, sau một khoảng thời gian $t > T_1$ quá trình biến đổi trạng thái của hệ sẽ được mô tả bởi công thức (2.65) có dạng:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= e^{At} \left[\underline{x}_0 + \int_0^t e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau \right] \\ &= e^{At} \left[\underline{x}_0 + \int_0^{T_1} e^{-A\tau} B \underline{u}_1(\tau) d\tau - e^{-AT_2} \int_{T_1}^t e^{-A\tau} B \underline{u}_2(\tau - T_1) d\tau \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Thay (3.36a) vào (3.38) ta được

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= -e^{A(t-T_2)} \int_{T_1}^t e^{-A\tau} B \underline{u}_2(\tau - T_1) d\tau = -e^{A(t-T_2)} \int_0^{t-T_1} e^{-A(\tau+T_1)} B \underline{u}_2(\tau') d\tau' \\ &= -e^{A(t-T_1-T_1)} \int_0^{t-T_1} e^{-A\tau'} B \underline{u}_2(\tau') d\tau' \end{aligned}$$

Bởi vậy tại thời điểm $t = T_1 + T_2$ thì với (3.36b) ta đi đến:

$$\underline{x}(T_1 + T_2) = \underbrace{- \int_0^{T_2} e^{-A(\tau')} B \underline{u}_2(\tau') d\tau'}_{=-\underline{x}_T} = \underline{x}_T.$$

Nói cách khác, tín hiệu điều khiển $\underline{u}(t)$ định nghĩa theo (3.37) đã đưa hệ từ \underline{x}_0 về tới \underline{x}_T và đó chính là điều phải chứng minh.

3.3.2 Tiêu chuẩn Hautus

Năm 1969 Hautus đưa một tiêu chuẩn xét tính điều khiển được của một hệ tuyến tính tham số hằng từ mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{u} \in \mathbb{R}^r. \quad (3.39)$$

Điều đặc biệt của tiêu chuẩn Hautus là nó khá đơn giản và tuy sử dụng mô hình trạng thái nhưng lại được thực hiện trong miền phức.

Định lý 3.31 (Hautus): Cần và đủ để hệ tuyến tính (3.39) điều khiển được là

$$\text{Rank}(sI - A, B) = n \text{ với mọi } s.$$

Chứng minh:

Trước hết ta thấy vì e^{At} là ma trận không suy biến nên khi phương trình

$$\underline{0} = e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau$$

với \underline{x}_0 cho trước có nghiệm $\underline{u}(t)$ thì phương trình

$$\underline{x}_0 = \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau$$

cũng có nghiệm $\underline{u}(t)$ và ngược lại. Điều này cũng phù hợp với nội dung của phần giải thích thứ ba cho định nghĩa 3.5 ở mục trước (mục 3.3.1) rằng hệ điều khiển được tại \underline{x}_0 , khi và chỉ khi nó đạt tới được \underline{x}_0 . Do đó để chứng minh định lý ta sẽ chỉ rằng

$$\text{Rank}(sI - A, B) = n, \quad \forall s.$$

là điều kiện cần và đủ để mọi điểm \underline{x}_0 trong không gian trạng thái đạt tới được.

Gọi $\underline{X}(s)$ là ảnh Laplace của $\underline{x}(t)$ và $\underline{U}(s)$ là ảnh của $\underline{u}(t)$. Chuyển hai vế của (3.39) sang miền phức với toán tử Laplace, trong đó giá trị đầu của $\underline{x}(t)$ được giải thiết là $\underline{0}$ và giá trị cuối \underline{x}_0 của nó là tùy ý, ta được

$$(sI - A)\underline{X}(s) = B\underline{U}(s). \quad (3.40)$$

Vì \underline{x}_0 là tùy ý nên $\underline{X}(s)$ cũng là tùy ý. Xem các ma trận $(sI - A)$ và B như những ánh xạ tuyến tính (mục 2.3.2, chương 2) thì rõ ràng (3.40) có nghiệm \underline{U} khi và chỉ khi $\text{Im}(sI - A) \supseteq \text{Im}(B)$.

Vậy không phụ thuộc s ta phải có

$$\text{Rank}(sI - A, B) = \text{Rank}(sI - A) = n.$$

□

Ví dụ 25: Ta xét lại hệ không điều khiển được đã cho ở ví dụ 24 với mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Tính không điều khiển được của hệ được nhận biết trực quan từ chỗ $x_1(t)$ không phụ thuộc $u(t)$ và do đó $u(t)$ không điều khiển được $x_1(t)$. Ma trận A và B của hệ có dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\text{Rank}(sI - A, B) = \text{Rank} \begin{pmatrix} s-a & 0 & 0 \\ 0 & s-b & 1 \end{pmatrix}.$$

Như vậy nếu $s=a$ thì

$$\text{Rank}(sI - A, B) = 1 < 2$$

và do đó hệ không điều khiển được. \square

Ví dụ 26: Cho hệ có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Khác với hệ trong ví dụ 25, ở đây $x_1(t)$ thông qua $x_2(t)$ mà phụ thuộc gián tiếp vào $u(t)$ và do đó hệ có thể điều khiển được. Xét ma trận

$$(sI - A, B) = \begin{pmatrix} s-a & 1 & 0 \\ 0 & s-b & 1 \end{pmatrix}.$$

Như vậy

$$\text{Rank}(sI - A, B) = 2$$

với mọi giá trị s nên hệ điều khiển được. \square

3.3.3 Tiêu chuẩn Kalman

Khái niệm điều khiển được do Kalman định nghĩa năm 1960 và cùng với định nghĩa đó ông đã đưa ra tiêu chuẩn xét tính điều khiển được của hệ tuyến tính tham số hằng như sau:

Định lý 3.32 (Kalman): Cân và đủ để hệ tuyến tính (3.39) điều khiển được là

$$\text{Rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

Chứng minh:

Do có

$$-\underline{x}_0 = \int_0^t e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau \quad (3.41)$$

(xem lại công thức (3.36a)) nên hệ sẽ điều khiển được khi và chỉ khi phương trình trên với \underline{x}_0 tùy ý cho trước luôn có nghiệm $\underline{u}(t)$.

Áp dụng công thức (2.60) của định lý 2.13 (mục 2.3.3, chương 2) ta được

$$e^{-At}B = [\alpha_0(-t)I + \alpha_1(-t)A + \dots + \alpha_{n-1}(-t)A^{n-1}]B \\ = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \begin{pmatrix} \alpha_0(-t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(-t) \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Thay (3.42) vào (3.41)

$$\underline{x}_0 = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \underbrace{\begin{pmatrix} \int_0^t \alpha_0(-\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t \alpha_{n-1}(-\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \end{pmatrix}}_{\underline{z}(t)} \quad (3.43)$$

ta thấy (3.43) có nghiệm $\underline{u}(t)$, tức là có nghiệm $\underline{z}(t)$, với mọi $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi

$$\text{Im}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = \mathbb{R}^n$$

tức là

$$\text{Rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n. \quad \square$$

Ví dụ 27: Cũng lại với hệ đã xét ở ví dụ 25

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B u$$

ta có

$$\text{Rank}(B, AB) = \text{Rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} < 2.$$

Vậy hệ không điều khiển được. \square

Ví dụ 28: Cho hệ với mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} u$$

trong đó $s_1 \neq s_2$ và $b_i \neq 0$, $i=2,3$. Xét ma trận

$$(B, AB, A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & b_2 & 2s_1b_2 \\ b_2 & s_1b_2 & s_1^2b_2 \\ b_3 & s_2b_3 & s_2^2b_3 \end{pmatrix}$$

Ma trận vuông này có định thức khác 0 :

$$\det \begin{pmatrix} 0 & b_2 & 2s_1b_2 \\ b_2 & s_1b_2 & s_1^2b_2 \\ b_3 & s_2b_3 & s_2^2b_3 \end{pmatrix} = -b_2^2b_3(s_1 - s_2)^2 \neq 0$$

nên

$$\text{Rank}(B, AB, A^2B) = 3.$$

Vậy hệ điều khiển được. \square

3.3.4 Những tiêu chuẩn tổng quát

Với những hệ tuyến tính không dừng, tức là có tham số thay đổi theo t , thì việc sử dụng hai tiêu chuẩn Hautus và Kalman để kiểm tra tính điều khiển được là không thể được. Để bù đắp phần thiếu sót đó, mục này sẽ giới thiệu một số tiêu chuẩn chung ứng dụng được cho cả lớp các mô hình tuyến tính không dừng:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t) \cdot \underline{x} + B(t) \cdot \underline{u}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{u} \in \mathbb{R}^r \quad (3.44)$$

trong đó $A(t)$ và $B(t)$ là hai ma trận có các tham số phụ thuộc thời gian t .

Theo nội dung của mục 2.3.5 thuộc chương 2, cụ thể là công thức (2.69) thì hệ phương trình vi phân (3.44) có nghiệm

$$\underline{x}(t) = \Phi(t) \underline{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) B(\tau) \cdot \underline{u}(\tau) \cdot d\tau,$$

với \underline{x}_0 là giá trị đầu $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ đã biết trước của nghiệm và $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận hàm không suy biến được xác định theo công thức (2.70) của Peano–Backer (định lý 2.16) hoặc theo (2.71) của Picard (định lý 2.17).

Giả sử rằng hệ (3.44) điều khiển được (tại \underline{x}_0). Vậy thì phải tồn tại khoảng thời gian T hữu hạn và tín hiệu $\underline{u}(t)$ sao cho có $\underline{x}(T) = 0$, tức là

$$-\Phi(T) \underline{x}_0 = \int_0^T \Phi(T-\tau) B(\tau) \cdot \underline{u}(\tau) \cdot d\tau. \quad (3.45)$$

Đặt $\tilde{\underline{x}}_0 = -\Phi(T) \underline{x}_0$. Do ma trận $\Phi(T)$ là không suy biến (xem định lý 2.16) nên $\tilde{\underline{x}}_0$ cũng sẽ chạy khắp trên không gian trạng thái giống như \underline{x}_0 và (3.45) trở thành

$$\int_0^T \Phi(T-\tau) B(\tau) \cdot \underline{u}(\tau) \cdot d\tau = \tilde{\underline{x}}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Ký hiệu phép biến đổi

$$P_T(\underline{u}) = \int_0^T \Phi(T-\tau) B(\tau) \cdot \underline{u}(\tau) \cdot d\tau \quad (3.46)$$

thì P_T là ánh xạ tuyến tính từ không gian các tín hiệu điều khiển \mathbb{R}^r vào không gian trạng thái \mathbb{R}^n :

$$P_T : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Tương tự, ta ký hiệu

$$Q_T(\underline{x}) = \int_0^T \Phi(T-\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(T-\tau) \cdot \underline{x} \cdot d\tau \quad (3.47)$$

thì Q_T cũng là ánh xạ tuyến tính từ \mathbb{R}^n vào \mathbb{R}^n :

$$Q_T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Định lý 3.33: Những phát biểu sau đây cho hệ (3.44) là tương đương:

- a) Hệ điều khiển được.
- b) Tồn tại một số hữu hạn T^* sao cho

$$\text{Im}(P_{T^*}) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim \text{Im}(P_{T^*}) = n,$$

trong đó $\text{Im}(P_T)$ là ký hiệu chỉ không gian ảnh của ánh xạ Q_T .

- c) Tồn tại một số hữu hạn T^* sao cho

$$\text{Im}(Q_{T^*}) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim \text{Im}(Q_{T^*}) = n,$$

trong đó $\text{Im}(Q_T)$ là ký hiệu chỉ không gian ảnh của ánh xạ Q_T .

- d) Tồn tại một số hữu hạn T^* sao cho các vector hàng của ma trận $\Phi(T^*-\tau)B(\tau)$ độc lập tuyến tính trong khoảng thời gian $0 \leq \tau < T^*$.

Chứng minh:

a) \Leftrightarrow b): Hệ (3.44) sẽ điều khiển được nếu ứng với mọi điểm $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ bao giờ cũng tồn tại ít nhất một tín hiệu \underline{u} và khoảng thời gian t hữu hạn để có $P_t(\underline{u}) = \tilde{x}_0$. Điều này tương đương với

$$\bigcup_t \text{Im}(P_t) = \mathbb{R}^n. \quad (3.48)$$

Giả sử $\tilde{x}_0 \in \text{Im}(P_T)$. Lấy một giá trị $\tau \geq T$ tùy ý nhưng cố định. Do $\text{Ker}(P_{\tau-T})$ không rỗng nên tồn tại ít nhất một phần tử \tilde{u} thỏa mãn $P_{\tau-T}(\tilde{u}) = \underline{0}$. Gọi \underline{u} là phần tử tùy ý của $\text{Im}(P_T)$, vậy thì với

$$\underline{u} = \begin{cases} \tilde{u} & \text{khi } 0 \leq t \leq T \\ \underline{u} & \text{khi } T < t \leq \tau \end{cases}$$

sẽ được

$$\begin{aligned}
P_T(\underline{u}) &= \int_0^T \Phi(T - \tau_1) B(\tau_1) \cdot \underline{u} \cdot d\tau_1 \\
&= \int_0^T \Phi(T - \tau_1) B(\tau_1) \cdot \tilde{\underline{u}} \cdot d\tau_1 + \int_T^{\infty} \Phi(T - \tau_1) B(\tau_1) \cdot \underline{u} \cdot d\tau_1 \\
&= \tilde{\underline{x}}_0 + \int_0^{T-T} \Phi(T - (\tau_1 - T)) B(\tau_1 - T) \cdot \tilde{\underline{u}} \cdot d(\tau_1 - T) = \tilde{\underline{x}}_0.
\end{aligned}$$

Suy ra $\tilde{\underline{x}}_0 \in \text{Im}(P_T)$, hay

$$\text{Im}(P_T) \subseteq \text{Im}(P_T)$$

và do đó $\dim \text{Im}(P_T)$ là một hàm không giảm theo T . Hơn thế nữa

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Im}(P_T) = \bigcup_t \text{Im}(P_t).$$

Do đó, với (3.48), cần và đủ để hệ (3.44) điều khiển được là

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \dim \text{Im}(P_T) = n. \quad (3.49)$$

Theo tính chất về giới hạn thì từ (3.49) với $\varepsilon > 0$ phải tồn tại một số T^* hữu hạn để có $|\dim \text{Im}(P_T) - n| < \varepsilon$ với mọi $T > T^*$. Chọn $\varepsilon = \frac{1}{2}$ sẽ được

$$|\dim \text{Im}(P_{T^*}) - n| < \frac{1}{2}.$$

Nhưng vì $\dim \text{Im}(P_{T^*})$ là một số tự nhiên nên cuối cùng

$$\dim \text{Im}(P_{T^*}) = n \quad (\text{d.p.c.m.})$$

b) \Leftrightarrow c): Để chứng minh ta chỉ cần chỉ ra $\text{Im}(P_T) = \text{Im}(Q_T)$ đúng với mọi T .

Giả sử $\tilde{\underline{x}} \in \text{Im}(Q_T)$. Vậy thì với tín hiệu

$$\tilde{\underline{u}} = B^T(\tau) \Phi^T(T-\tau)$$

ta sẽ có từ (3.47)

$$\tilde{\underline{x}} = P_T(\tilde{\underline{u}}) \in \text{Im}(P_T).$$

Điều này chỉ rằng

$$\text{Im}(Q_T) \subseteq \text{Im}(P_T). \quad (3.50)$$

Ngược lại, ta gọi \underline{x} là phần tử tùy ý của $\text{Im}(P_T)$. Từ công thức định nghĩa (3.47) của Q_T ta thấy Q_T là ánh xạ tuyến tính đối xứng. Bởi vậy $\text{Ker}(Q_T)$ và $\text{Im}(Q_T)$ là hai không gian vector trực giao (xem lại mục 2.3.2, phân ma trận và ánh xạ tuyến tính). Vector \underline{x} luôn phân tích được thành

$$\underline{x} = \underline{x}_{\text{Ker}} + \underline{x}_{\text{Im}},$$

trong đó $\underline{x}_{\text{Ker}} \in \text{Ker}(Q_T)$, $\underline{x}_{\text{Im}} \in \text{Im}(Q_T)$ và phép phân tích đó là duy nhất. Giả sử rằng $\underline{x} \notin \text{Im}(Q_T)$.

Vậy thì $\underline{x}_{\text{Ker}} \neq \underline{0}$. Suy ra

$$\begin{aligned} \underline{x}^T \cdot \underline{x}_{\text{Ker}} &= \underline{x}_{\text{Im}}^T \cdot \underline{x}_{\text{Ker}} + \underline{x}_{\text{Ker}}^T \cdot \underline{x}_{\text{Ker}} = \underline{x}_{\text{Ker}}^T \cdot \underline{x}_{\text{Ker}} \neq 0 \\ \Rightarrow \int_0^T \underline{x}_{\text{Ker}}^T \Phi(T-\tau) B(\tau) \cdot \underline{u} \cdot d\tau &= \underline{x}_{\text{Ker}}^T P_T(\underline{u}) = \underline{x}_{\text{Ker}}^T \cdot \underline{x} \neq 0 \end{aligned}$$

đúng với mọi $\underline{u}(t) \neq \underline{0}$. Chọn

$$\underline{u} = \left[\underline{x}_{\text{Ker}}^T \Phi(T-\tau) B(\tau) \right]^T \neq \underline{0}$$

thì do $Q_T(\underline{x}_{\text{Ker}}) \in \text{Im}(Q_T)$ sẽ có

$$\begin{aligned} 0 &\neq \int_0^T \left[\underline{x}_{\text{Ker}}^T \Phi(T-\tau) B(\tau) \right] \cdot \left[\underline{x}_{\text{Ker}}^T \Phi(T-\tau) B(\tau) \right]^T d\tau = \\ &= \underline{x}_{\text{Ker}}^T \left(\int_0^T \Phi(T-\tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(T-\tau) d\tau \right) \underline{x}_{\text{Ker}} = \underline{x}_{\text{Ker}}^T Q_T(\underline{x}_{\text{Ker}}) = 0, \end{aligned}$$

và đó là điều phi lý. Vậy $\underline{x} \in \text{Im}(Q_T)$. Nói cách khác

$$\text{Im}(P_T) \subseteq \text{Im}(Q_T). \quad (3.51)$$

Sо sánh (3.50), (3.51) ta đến được điều phải chứng minh.

c) \Leftrightarrow d): Khẳng định $\dim \text{Im}(Q_{T^*}) = n$, tương đương với ma trận mô tả ánh xạ Q_{T^*} là ma trận không suy biến. Cần và đủ để ma trận vuông Q_{T^*} không suy biến là

$$\underline{a}^T Q_{T^*} \underline{a} \neq \underline{0}$$

với mọi $\underline{a} \neq \underline{0}$. Suy ra

$$\begin{aligned} \int_0^{T^*} \left[\underline{a}^T \Phi(T^*-\tau) B(\tau) \right] \cdot \left[\underline{a}^T \Phi(T^*-\tau) B(\tau) \right]^T d\tau &\neq \underline{0}, \quad \forall \underline{a} \neq \underline{0} \\ \Leftrightarrow \underline{a}^T \Phi(T^*-\tau) B(\tau) &\neq \underline{0}, \quad \forall \underline{a} \neq \underline{0} \text{ và } 0 \leq \tau < T^* \end{aligned}$$

hay các vector hàng của ma trận $\Phi(T^*-\tau) B(\tau)$ là độc lập tuyến tính trong khoảng thời gian $0 \leq \tau < T^*$. \square

Ví dụ 29: Xét hệ tuyến tính có tham số phụ thuộc t

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \underline{u}.$$

Với một số T^* hữu hạn tùy ý hệ sẽ có

$$\begin{aligned}\Phi(\tau) &= \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi(T^* - \tau) = \begin{pmatrix} 1 & T^* - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ \Rightarrow \Phi(T^* - \tau)B(\tau) &= \begin{pmatrix} 1 & T^* - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(T^* - \tau) \\ \tau \end{pmatrix}. \\ \Rightarrow \frac{\tau(T^* - \tau)}{\tau} &= T^* - \tau \neq \text{hằng số},\end{aligned}$$

tức là hai vector hàng của $\Phi(T^* - \tau)B(\tau)$ độc lập tuyến tính khi $\tau \neq T^*$ (và do đó cũng trong khoảng $0 \leq \tau < T^*$). Vậy hệ là điều khiển được. \square

Ví dụ 30: Cho hệ một đầu vào mô tả bởi

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u.$$

Hệ có

$$\Phi(\tau) = e^{A\tau} = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi(T - \tau) = e^{A(T - \tau)} = \begin{pmatrix} 1 & T - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}Q_T &= \int_0^T e^{A(T-\tau)}BB^Te^{-A^T(T-\tau)}d\tau = \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & T - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T - \tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} (T - \tau)^2 & T - \tau \\ T - \tau & 1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & T \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \det(Q_T) &= \frac{T^4}{12} \neq 0 \text{ với } T > 0.\end{aligned}$$

Do có định thức khác 0 nên $\dim \text{Im}(Q_T) = 2$. Vậy hệ điều khiển được. \square

Cũng từ định lý 3.33 ta có thể dẫn ngược lại các tiêu chuẩn khác đã biết như tiêu chuẩn Hautus, tiêu chuẩn Kalman khi hệ thống đang xét là hệ thống dừng. Chẳng hạn như với

$$\Phi(T - \tau) = e^{A(T - \tau)}$$

của một hệ dừng có ma trận hệ thống là A , ta đi từ điều kiện d) của định lý 3.33:

$$\begin{aligned}\Phi(T - \tau)B &= e^{A(T - \tau)}B = [\alpha_0(T - \tau)I + \alpha_1(T - \tau)A + \dots + \alpha_{n-1}(T - \tau)A^{n-1}]B \\ &= (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \begin{pmatrix} \alpha_0(T - \tau) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(T - \tau) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

sẽ thấy để các vector hàng của $\Phi(T-t)B$ độc lập tuyến tính trong khoảng $0 \leq t < T$ thì cần và đủ là

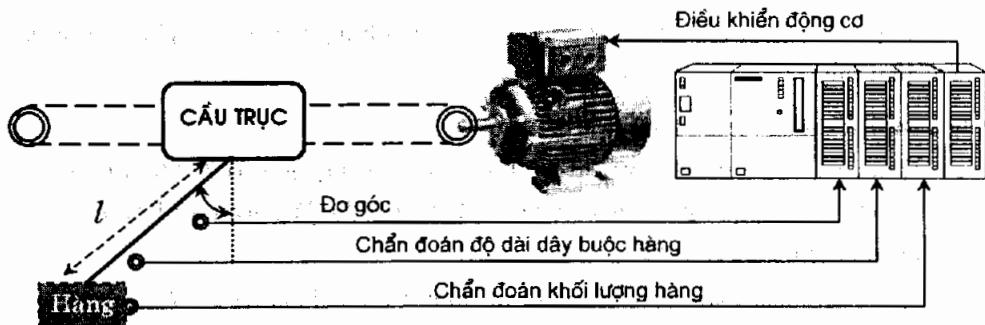
$$\text{Rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$$

và đó cũng chính là tiêu chuẩn Kalman.

3.4 Tính quan sát được của hệ liên tục

3.4.1 Ý nghĩa của công việc

Trong vô vàn các ví dụ từ trước tới nay ta thường đề cập đến việc phản hồi các tín hiệu trạng thái hoặc các tín hiệu ra. Vấn đề muốn nói ở đây không phải là sự cần thiết của việc phản hồi mà phải làm thế nào để thực hiện được việc phản hồi những tín hiệu đó. Tất nhiên rằng ta phải đo chúng, phải xác định được giá trị của các tín hiệu cần phản hồi. Hình 3.32 là một ví dụ. Để điều khiển động cơ cầu trục cẩu hàng sao cho hàng không bị lắc trong quá trình vận chuyển người ta thường phải đo góc hàng dao động cũng như độ dài dây buộc hàng, khối lượng hàng để từ đó tính toán ra được tín hiệu điều khiển động cơ cho thích hợp.



Hình 3.32: Để điều khiển cầu trục sao cho hàng không bị lắc người ta phải thường xuyên đo góc dao động của hàng cũng như chẩn đoán khối lượng hàng và độ dài dây buộc hàng.

Thông thường, việc xác định giá trị tín hiệu một cách đơn giản nhất là đo trực tiếp nhờ các thiết bị cảm biến (sensor). Song không phải mọi tín hiệu đều có thể đo được một cách trực tiếp. Rất nhiều các tín hiệu chỉ có thể có được một cách gián tiếp thông qua những tín hiệu đo được khác. Ví dụ như tốc không thể đo được trực tiếp mà phải chẩn đoán gián tiếp từ việc đo tốc độ trong một khoảng thời gian, công suất chẩn đoán được nhờ việc đo dòng điện và điện áp Để thống nhất chung cả hai hình thức đo tín hiệu trực tiếp và chẩn đoán gián tiếp như vậy người ta sử dụng khái niệm *quan sát*. Như vậy, *quan sát* một tín hiệu được hiểu là công việc xác định tín hiệu thông qua đo trực tiếp hoặc gián tiếp qua các tín hiệu đo được khác (thường là các tín hiệu vào/ra).

Định nghĩa 3.6: Một hệ thống có tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ và tín hiệu ra $\underline{y}(t)$ được gọi là:

- Quan sát được tại thời điểm t_0 , nếu tồn tại ít nhất một giá trị hữu hạn $T > t_0$ để điểm trạng thái $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ xác định được một cách chính xác thông qua vector các tín hiệu vào ra $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$ trong khoảng thời gian $[t_0, T]$.
- Quan sát được hoàn toàn tại thời điểm t_0 , nếu với mọi $T > t_0$, điểm trạng thái $\underline{x}_0 = \underline{x}(t_0)$ luôn xác định được một cách chính xác từ vector các tín hiệu vào ra $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$ trong khoảng thời gian $[t_0, T]$.

3.4.2 Tiêu chuẩn chung

Hệ thống được đề cập ở mục này là hệ tuyến tính có thể không dừng với r tín hiệu vào $\underline{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ và s tín hiệu ra $\underline{y}(t) \in \mathbb{R}^s$ mô tả bởi

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x} + B(t)\underline{u} \\ \underline{y} = C(t)\underline{x} + D(t)\underline{u} \end{cases} \quad (3.52)$$

trong đó $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{s \times r}$ là những ma trận có phần tử có thể là hàm số phụ thuộc t .

Định lý 3.34: Hệ không dừng (3.52) sẽ

- Quan sát được tại t_0 khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một giá trị $T > t_0$ hữu hạn sao cho các vector cột của ma trận $C(t)\Phi(t - t_0)$ độc lập tuyến tính trong khoảng thời gian $t_0 \leq t < T$.
- Quan sát được hoàn toàn tại t_0 khi và chỉ khi với mọi giá trị $T > t_0$, các vector cột của ma trận $C(t)\Phi(t - t_0)$ độc lập tuyến tính trong khoảng $t_0 \leq t < T$.

Chứng minh:

Phương trình vi phân của (3.52) với điều kiện đầu $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ có nghiệm

$$\underline{x}(t) = \Phi(t - t_0) \underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) B(\tau) \cdot \underline{u} \cdot d\tau.$$

Thay vào phương trình thứ hai được

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= C(t)\Phi(t - t_0) \underline{x}_0 + C(t) \int_0^t \Phi(t - \tau) B(\tau) \cdot \underline{u} \cdot d\tau + D(t) \cdot \underline{u} \\ \Leftrightarrow C(t)\Phi(t - t_0) \underline{x}_0 &= C(t) \int_0^t \Phi(t - \tau) B(\tau) \cdot \underline{u} \cdot d\tau + D(t) \cdot \underline{u} - \underline{y}(t) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Theo định nghĩa 3.6, hệ (3.52) quan sát được tại t_0 nếu tồn tại một khoảng thời gian hữu hạn $[t_0, T]$ để $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ xác định được từ $\underline{u}(t)$ và $\underline{y}(t)$ khi $t_0 \leq t < T$. Điều này đồng nghĩa với việc phương trình (3.53) có nghiệm \underline{x}_0 duy nhất.

Do chỉ có thành phần $C(t)\Phi(t-t_0)\underline{x}_0$ chứa \underline{x}_0 nên (3.53) sẽ có nghiệm \underline{x}_0 duy nhất nếu tồn tại ít nhất một giá trị hữu hạn $T > t_0$ sao cho các vector cột của $C(t)\Phi(t-t_0)$ không phụ thuộc tuyến tính trong toàn bộ khoảng $[t_0, T]$ và đó chính là điều phải chứng minh. \square

Ví dụ 31: Xét hệ tuyến tính, có tham số phụ thuộc t với mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + B\underline{u}$$

$$y = (1 - |t-1|)\underline{x} + D\underline{u}$$

trong đó B, D là hai ma trận tùy ý. Hệ có

$$\Phi(t-t_0) = \begin{pmatrix} 1 & t_0 - t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 - |t-1|).$$

Bởi vậy

$$C(t)\Phi(t-t_0) = (1 - |t-1|) \begin{pmatrix} 1 & t_0 - t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 - t_0 - (t-1) - |t-1|).$$

$$\Rightarrow t_0 - (t-1) - |t-1| = \begin{cases} t_0 & (\text{hàng số}) \text{ khi } t \leq 1 \\ t_0 - 2(t-1) & \text{ khi } t > 1 \end{cases}.$$

Khi t_0 là tùy ý, ta chọn $T > t_0$ và $T > 1$. Hai (vector) cột của $C(t)\Phi(t-t_0)$ sẽ độc lập tuyến tính trong khoảng $1 < t < T$, tức là sẽ không phụ thuộc tuyến tính trên toàn bộ khoảng $[t_0, T]$, bởi vậy hệ quan sát được tại t_0 . Khi $t_0 > 1$ hai cột của $C(t)\Phi(t-t_0)$ sẽ độc lập tuyến tính trong mọi khoảng $[t_0, T]$ có $t_0 < T$, nên tại $t_0 > 1$ hệ không những quan sát được mà còn quan sát được hoàn toàn. \square

Định lý 3.35: Nếu hệ không dừng (3.52) có C là ma trận hằng (không phụ thuộc t) quan sát được tại t_0 thì nó cũng quan sát được hoàn toàn tại t_0 và ngược lại.

Chứng minh:

Theo định lý 3.6, hệ (3.52) quan sát được tại thời điểm t_0 nếu tồn tại $T_1 > t_0$ hữu hạn sao cho các vector cột của $C\Phi(t-t_0)$ không phụ thuộc tuyến tính trên toàn khoảng $[t_0, T_1]$. Vì C là ma trận hằng nên $\Phi(t-t_0)$ là thành phần duy nhất phụ thuộc t trong tích $C\Phi(t-t_0)$. Do $\Phi(t-t_0)$ không suy biến với mọi t (công thức (2.70c), chương 2) nên điều này cũng đúng với mọi khoảng $[t_0, T]$, trong đó T là số tùy ý lớn hơn t_0 . \square

Ví dụ 32: Cho hệ không dừng mô tả bởi

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \ 1) \mathbf{x}.$$

Theo kết quả của ví dụ 42 thuộc mục 2.3.5, chương 2 thì hệ này có

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$C\Phi(t-t_0) = (1 \ 1) \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & \frac{(t-t_0)^2}{2} e^{t-t_0} \\ 0 & e^{t-t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & \frac{(t-t_0)^2}{2} e^{t-t_0} + e^{t-t_0} \\ 0 & e^{t-t_0} \end{pmatrix}.$$

Như vậy $C\Phi(t-t_0)$ là ma trận một hàng hai cột. Do tỷ số giữa hai cột của nó

$$\frac{\frac{(t-t_0)^2}{2} e^{t-t_0} + e^{t-t_0}}{e^{t-t_0}} = \frac{(t-t_0)^2}{2} + 1 \neq \text{hằng số}$$

với mọi t nên chúng độc lập tuyến tính với nhau trong mọi khoảng $[t_0, T]$. Nói cách khác hệ quan sát được hoàn toàn. \square

Định lý 3.36: Nếu hệ không dừng (3.52) quan sát được tại thời điểm t_0 thì nó cũng quan sát được tại mọi thời điểm $t \neq 0$.

Chứng minh:

Khi hệ (3.52) quan sát được tại t_0 thì sẽ tồn tại một giá trị hữu hạn $T > t_0$ để các vector cột của ma trận $C(t)\Phi(t-t_0)$ độc lập tuyến tính trong khoảng thời gian $t_0 \leq t < T$.

Xét tại một thời điểm $t_1 \neq 0$ bất kỳ, từ tính chất (2.70b) cho trong định lý 2.16, trang 144 của $\Phi(t)$, ta có

$$C(t)\Phi(t-t_1) = C(t)\Phi(t-t_0)\Phi(t_0-t_1).$$

Nhưng do $\Phi(t_0-t_1)$ là ma trận hằng không suy biến nên các vector cột của ma trận hàm $C(t)\Phi(t-t_1)$ cũng vì thế mà độc lập tuyến tính trong khoảng thời gian $t_1 \leq t < T$. Bởi vậy theo định lý 3.34, hệ quan sát được tại thời điểm t_1 (đ.p.c.m).

Trên cơ sở định lý 3.36, thì riêng đối với hệ tuyến tính, từ nay về sau ta sẽ nói ngắn gọn là **hệ quan sát được** thay vì **hệ quan sát được tại điểm thời gian t_0** .

3.4.3 Định lý đối ngẫu cho hệ tham số hằng và các hệ quả

Cho hệ tuyến tính, tham số hằng (hệ dừng) mô tả bởi

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad \text{với } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r}, C \in \mathbb{R}^{s \times n}, D \in \mathbb{R}^{s \times r} \quad (3.54)$$

Một hệ tuyến tính khác được suy ra từ hệ trên và có mô hình

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = A^T \underline{x} + C^T \underline{u} \\ \underline{y} = B^T \underline{x} + E\underline{u} \end{cases} \quad (3.55)$$

được gọi là *hệ đối ngẫu* với hệ (3.54) đã cho.

Định lý 3.37: Hệ tham số hằng (3.54) quan sát được khi và chỉ khi hệ (3.55) đối ngẫu với nó điều khiển được.

Chứng minh:

Nếu hệ (3.54) quan sát được (tại T^*) thì theo định lý 3.34, các vector cột của $C\Phi(t-T^*) = Ce^{A(t-T^*)}$

là độc lập tuyến tính với mọi t . Điều này dẫn đến các vector cột của $Ce^{A(T^*-t)}$ cũng độc lập tuyến tính vì $e^{A(t-T^*)}e^{A(T^*-t)} = I$. Suy ra các vector hàng của

$$\left(Ce^{A(T^*-t)} \right)^T = e^{A^T(T^*-t)} C^T$$

là độc lập tuyến tính. Vậy theo định lý 3.33, hệ (3.55) điều khiển được.

Chứng minh tương tự ta có điều ngược lại là khi hệ (3.55) điều khiển được thì hệ (3.54) sẽ quan sát được. \square

Dựa vào nội dung định lý 3.37 và cùng với các tiêu chuẩn xét tính điều khiển được của hệ tuyến tính tham số hằng đã biết, ta sẽ có:

Định lý 3.38: Cho hệ tham số hằng (3.54). Các phát biểu sau là tương đương:

a) Hệ quan sát được.

b) $\text{Rank} \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = n$ với mọi s , và I là ma trận đơn vị (Hautus, 1969).

c) $\text{Rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$ (Kalman, 1961).

Chứng minh:

a) \Leftrightarrow b): Theo định lý 3.37, để hệ (3.54) quan sát được thì cần và đủ là hệ (3.55) điều khiển được. Tiếp tục, với định lý 3.31 về tiêu chuẩn Hautus thì hệ (3.55) điều khiển được khi và chỉ khi

$$\text{Rank}(sI - A^T, C^T) = n \text{ với mọi } s.$$

Suy ra

$$\text{Rank}(sI - A^T, C^T)^T = \text{Rank} \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = n.$$

a) \Leftrightarrow c): Để hệ (3.54) quan sát được thì cần và đủ là hệ (3.55) điều khiển được và theo định lý 3.32 về tiêu chuẩn Kalman, điều đó tương đương với

$$\text{Rank}(C^T, A^T C^T, \dots, (A^{n-1})^T C^T) = n.$$

Suy ra

$$\text{Rank}(C^T, A^T C^T, \dots, (A^{n-1})^T C^T)^T = \text{Rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n. \quad \square$$

Ví dụ 33: Cho hệ tham số hằng mô tả bởi

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{u} \quad \text{và} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

Sử dụng tiêu chuẩn Kalman để kiểm tra tính quan sát được ta thấy

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{và} \quad CA^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 15 \end{pmatrix}$$

Do đó

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 15 \end{pmatrix} = 3.$$

Vậy hệ là quan sát được. \square

Ví dụ 34: Cho hệ có mô hình

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \text{và} \quad y = x_2 = (0 \ 1) \underline{x}.$$

Đổi ngẫu với hệ đã cho là hệ

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Theo kết quả của ví dụ 26 (mục 3.3.2) thì hệ đổi ngẫu này điều khiển được. Từ đó ta kết luận được rằng hệ đã cho là quan sát được. Kiểm tra lại bằng tiêu chuẩn Kalman thì rõ ràng có

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = 2.$$

Nếu kiểm tra lại bằng tiêu chuẩn Hautus ta cũng được

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} s-a & 0 \\ -1 & s-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{với mọi } s. \quad \square$$

3.5 Phân tích hệ SISO liên tục tuyến tính

Nói chung, yêu cầu của một bài toán phân tích một hệ thống là phải rút ra được những kết luận về tính động học vốn có của hệ từ mô hình mô tả nó, trong đó có ba kết luận cơ bản:

- Kết luận về tính ổn định.
- Kết luận về tính điều khiển được.
- Kết luận về tính quan sát được.

Ngoài các kết luận trên, tùy vào từng hệ thống cụ thể ta có thể phân tích tiếp để có được những thông tin cần thiết khác về hệ thống. Chẳng hạn như độ quá điều chỉnh, độ sai lệch tĩnh, độ nhạy với nhiễu, các thành phần cơ bản (khuếch đại, tích phân, vi phân, trễ, quán tính, dao động, ...) có trong hệ thống, hay bản chất của hệ có phải là pha cực tiểu hay không, và tất nhiên rằng những phương pháp phân tích để có được các kết luận thêm này phụ thuộc nhiều vào mô hình hệ thống mà ta có là mô hình trạng thái hay mô hình hàm truyền đạt.

Sau đây ta sẽ tập trung vào việc phân tích thêm hệ SISO (có một tín hiệu vào và một tín hiệu ra), chủ yếu là từ mô hình hàm truyền đạt $G(s)$ của hệ. Việc dành cho hệ SISO với hàm truyền đạt $G(s)$ một mục phân tích riêng để có các kết luận thêm ngoài những kết luận cơ bản trên cũng là bởi lẽ hệ SISO là loại hệ thống khá phổ thông, và mô hình hàm truyền đạt thường được gặp nhiều nhất trong ứng dụng.

3.5.1 SỰ ĐỒNG NHẤT CỦA ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VÀ QUAN SÁT ĐƯỢC

Xét hệ SISO có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}. \quad (3.56)$$

Vậy thì hệ cũng sẽ được mô tả bởi mô hình trạng thái dạng *chuẩn điều khiển* như sau (xem lại mục 2.3.6, thuộc chương 2, trang 146):

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_A \underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B u \quad \text{với } \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.57a)$$

$$y = \underbrace{(b_0 - a_0 b_n \cdots b_{n-1} - a_{n-1} b_n)}_C \underline{x} + b_n u. \quad (3.57b)$$

trong đó A là *ma trận dẫn Frobenius*.

Giữa hàm truyền đạt $G(s)$ và mô hình dạng chuẩn điều khiển có mối quan hệ:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + b_n. \quad (3.58)$$

Nhưng vì $G(s)$ là hàm, giống như ma trận chỉ có một hàng và một cột, nên

$$G^T(s) = G(s)$$

Suy ra

$$G(s) = (C(sI - A)^{-1} B + b_n)^T = B^T (sI - A^T)^{-1} C^T + b_n.$$

Do đó khi so sánh với (3.58), hệ cũng mô tả được bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A^T} \underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{pmatrix}}_C u \quad \text{với } \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.59a)$$

$$y = \underbrace{(0 \ 0 \ \cdots \ 1)}_{B^T} \underline{x} + b_n u. \quad (3.59b)$$

Mô hình (3.59) của hệ có tên gọi là *dạng chuẩn quan sát*.

Rõ ràng (3.57) và (3.59) là hai hệ đối ngẫu và như vậy hệ SISO với hàm truyền đạt (3.56) cùng được mô tả bởi hai mô hình trạng thái đối ngẫu. Bằng cách dẫn mô hình dạng chuẩn quan sát như là hệ đối ngẫu của mô hình dạng chuẩn điều khiển như trên

ta đã đi đến sự đồng nhất của tính điều khiển được và quan sát được trong hệ SISO như sau:

Định lý 3.39: Khi được mô tả bởi mô hình trạng thái dạng chuẩn điều khiển (3.57) hoặc chuẩn quan sát (3.59) thì mọi hệ SISO có hàm truyền đạt (3.56) sẽ điều khiển được và quan sát được.

Chứng minh:

Nếu (3.57), cũng là (3.56), điều khiển được thì theo định lý đối ngẫu 3.37, mô hình (3.59) sẽ quan sát được. Nhưng vì (3.59) là một dạng mô hình trạng thái của hệ (3.56) nên hệ (3.56) cũng quan sát được. Tương tự ta cũng chỉ ra được là khi (3.56) quan sát được thì nó cũng điều khiển được. Còn phải chứng minh là (3.56) luôn điều khiển được.

Trước hết từ mô hình trạng thái dạng chuẩn điều khiển (3.57) ta xây dựng ma trận

$$(sI - A, B) = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & s + a_n & 1 \end{pmatrix}$$

rồi bỏ đi cột đầu tiên, sẽ được ma trận vuông $n \times n$ với

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ s & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & s + a_n & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \neq 0.$$

Suy ra tất cả n vector cột còn lại là độc lập tuyến tính với nhau, tức là

$$\text{Rank}(sI - A, B) = n \quad \text{với mọi } s.$$

Vậy theo tiêu chuẩn Hautus, hệ là điều khiển được. □

Chú ý: Như đã nói, tính điều khiển được hay quan sát được của một hệ thống phụ thuộc vào mô hình trạng thái được sử dụng để mô tả hệ. Sự đồng nhất của tính điều khiển được và quan sát được trong hệ SISO nếu ở định lý 3.39 đã được chứng minh trên cơ sở giả thiết rằng hệ SISO đó được mô tả trong không gian trạng thái bằng mô hình dạng chuẩn điều khiển hoặc chuẩn quan sát. Khi không có giả thiết này thì điều khẳng định của định lý sẽ không đúng, tức là hệ sẽ vẫn có thể không điều khiển được hoặc không quan sát được nếu nó được mô tả bằng những mô hình trạng thái khác chưa hạ bậc (còn chứa các biến trạng thái thừa).

Ví dụ 35: Xét hệ SISO có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

Thông qua (3.58) ta có thể thấy ngay được rằng ứng với mô hình hàm truyền đạt đó thì hệ còn được mô tả bởi các mô hình trạng thái sau:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = x_2 \end{cases} \quad (3.60a)$$

và $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + u \\ y = x \end{cases} \quad (3.60b)$

Rõ ràng là với (3.60a) thì do

$$\text{Rank}(B, AB) = \text{Rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

hệ không điều khiển được, nhưng với (3.60b) thì hệ lại điều khiển được. \square

Biến trạng thái thừa được hiểu là biến phụ thuộc đại số vào những biến trạng thái khác trong mô hình. Ở ví dụ 35 ta thấy biến trạng thái x_1 của mô hình (3.60a) là thừa vì thực chất $x_1 = x_2 + e^{2t}$. Việc sử dụng mô hình trạng thái còn chứa các biến trạng thái thừa để phân tích sẽ đưa đến những kết luận sai về tính động học của hệ thống. Bởi vậy, trước khi phân tích bao giờ ta cũng phải loại bỏ các biến trạng thái thừa. Công việc loại bỏ các biến trạng thái thừa đó được gọi là *hạ bậc mô hình*. Nó giống như việc giản ước những thành phần giống nhau ở đa thức tử số và mẫu số của hàm truyền đạt $G(s)$. Mô hình trạng thái không chứa các biến trạng thái thừa được gọi là *mô hình trạng thái có bậc cực tiểu* (*minimal order*).

Một trong những phương pháp hạ bậc thường dùng cho mô hình hệ SISO là thông qua bước trung gian với hàm truyền đạt $G(s)$ của nó, bao gồm:

- 1) Xác định hàm truyền đạt $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ từ mô hình trạng thái chưa hạ bậc

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

- 2) Xác định mô hình trạng thái dạng chuẩn điều khiển hoặc dạng chuẩn quan sát từ hàm truyền đạt và đó sẽ là mô hình trạng thái có bậc cực tiểu.

3.5.2 Ý nghĩa của vị trí các điểm cực và điểm không

Nếu một hệ SISO được mô tả bởi hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (3.60)$$

trong đó $B(s)$ là ký hiệu chỉ đa thức tử số, $A(s)$ là đa thức mẫu số, thì nghiệm của

$$A(s) = 0$$

được gọi là *điểm cực* và *nghiệm* của

$$B(s) = 0$$

được gọi là *điểm không* của hệ.

Chương 1,2, cũng như các mục đầu ở chương 3 đã cung cấp cho ta một số định lý nói lên mối quan hệ giữa vị trí của những điểm cực, điểm không và bậc mô hình với đặc tính động học của hệ thống. Chẳng hạn như:

- 1) Nếu tất cả các điểm cực đều nằm bên trái trực ảo thì $G(s)$ là hàm bền (mục 1.3.4). Khi đó hệ sẽ ổn định (đa thức mẫu số là đa thức Hurwitz) và quá trình tự do là tắt dần (định lý 3.7).
- 2) Nếu tất cả điểm cực của hệ không những nằm bên trái trực ảo mà còn là các số thực (ám) thì quá trình tự do sẽ là tổ hợp tuyến tính những quá trình đơn điệu tiến về 0. Các điểm cực nằm càng xa trực ảo, tốc độ tiến về 0 của của những thành phần này càng nhanh, tức là quán tính của hệ càng nhỏ.
- 3) Nếu $G(s)$ có một điểm cực không nằm trên trực thực (có phần ảo khác 0) thì quá trình tự do có dạng dao động, hàm quá độ $h(t)$ có vô số các điểm cực trị (và tất nhiên hệ sẽ có độ quá điệu chỉnh). Các điểm cực nằm càng xa trực thực, tần số của dao động càng lớn.
- 4) Nếu $G(s)$ có ít nhất một điểm cực là gốc tọa độ thì hệ sẽ có chứa thành phần tích phân (định lý 2.7, mục 2.1.5). Những hệ thống có chứa thành phần tích phân sẽ luôn có tín hiệu ra thay đổi khi tín hiệu vào vẫn còn khác 0.
- 5) Nếu tất cả các điểm cực và điểm không của $G(s)$ đều nằm bên trái trực ảo thì hệ sẽ là pha cực tiểu (định lý 2.10, mục 2.2.8).
- 6) Nếu $G(s)$ không phải là hàm hợp thức ($m > n$) thì hệ sẽ có thành phần vi phân. Những hệ có chứa thành phần vi phân có tính động học là phản ứng rất nhanh với sự thay đổi của tín hiệu đầu vào.
- 7) Nếu $G(s)$ là hàm hợp thức không chặt ($m = n$) thì hàm quá độ $h(t)$ của hệ thống sẽ không xuất phát từ gốc tọa độ, tức là $h(+0) \neq 0$ (định lý 2.3, mục 2.1.2, trang 67).
- 8) Nếu $G(s)$ là hàm hợp thức chặt ($m < n$) thì hàm quá độ $h(t)$ của hệ thống sẽ xuất phát từ gốc tọa độ, tức là $h(+0) = 0$ (định lý 2.3, mục 2.1.2).
- 9) Nếu $G(s)$ có $m = n - 1$ thì hàm quá độ $h(t)$ của hệ thống sẽ xuất phát từ gốc tọa độ nhưng có đạo hàm $\frac{dh(+0)}{dt}$ tại đó khác 0 (định lý 2.3, mục 2.1.2).
- 10) Nếu $G(s)$ có $m < n - 1$ thì hàm quá độ $h(t)$ của hệ thống sẽ xuất phát từ gốc tọa độ, đồng thời đạo hàm của nó tại đó cũng bằng 0 (định lý 2.3, mục 2.1.2).

Sau đây, ta sẽ nghiên cứu thêm những mối quan hệ khác giữa vị trí điểm cực, điểm không của $G(s)$ và tính động học của hệ.

Gọi $-p_i$, $i=1, \dots, n$ là các điểm cực và $-q_k$, $k=1, \dots, m$ là những điểm không của hàm hợp thức $G(s)$. Khi đó hàm truyền (3.60) sẽ viết được thành

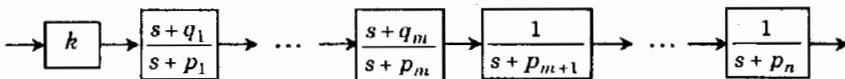
$$G(s) = k \frac{(s+q_1)(s+q_2) \cdots (s+q_m)}{(s+p_1)(s+p_2) \cdots (s+p_n)}, \quad (m \leq n) \quad (3.61)$$

Như vậy, rõ ràng hệ (3.61) là sự mắc nối tiếp của các khâu (hình 3.33)

- khuếch đại k (3.62a)

- khâu $G_v^1(s) = \frac{s+q_v}{s+p_v}$, $v=1, \dots, m$ (3.62b)

- và các khâu $G_j^0(s) = \frac{1}{s+p_j}$, $j=m+1, \dots, n$. (3.62c)



Hình 3.33: Sơ đồ khối tương đương của hệ có hàm truyền đạt (3.60).

Định lý 3.40: Xét hệ pha cực tiêu SISO có hàm truyền đạt dạng (3.61) với $k > 0$ và tất cả các điểm không $-q_k$, $k=1, \dots, m$, các điểm cực $-p_i$, $i=1, \dots, n$ đều là những số thực. Không mất tính tổng quát nếu ta giả thiết:

$$q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_m \quad \text{và} \quad p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n.$$

Vậy thi:

a) Nếu đồng thời tất cả m bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$q_1 > p_1, \quad q_2 > p_2, \quad \cdots, \quad q_m > p_m \quad (3.63)$$

thì hàm quá độ $h(t)$ của hệ sẽ đơn điệu tăng, nói cách khác hệ không có độ quá điêu chỉnh (hình 3.34a).

b) Nếu có l bất đẳng thức trong số m bất đẳng thức (3.63) không được được thỏa mãn thì hàm quá độ $h(t)$ của hệ sẽ có đúng l điểm cực trị (cực đại và cực tiểu), và do đó hệ có độ quá điêu chỉnh (hình 3.34b).

Chứng minh:

Vì có giả thiết cho rằng hệ (3.61) là pha cực tiêu với tất cả các điểm cực, không nằm trên trục thực nên $p_i > 0$, $q_k > 0$ với mọi i, k .

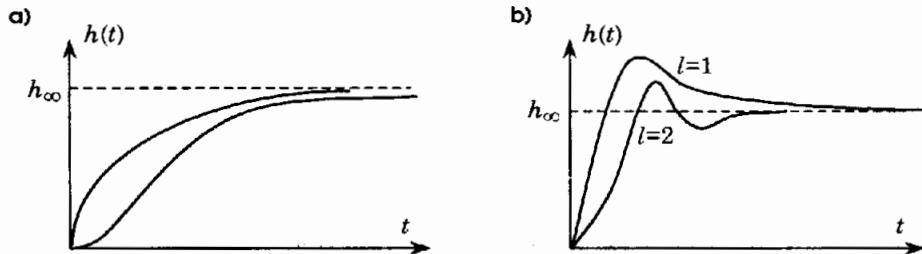
Ngoài ra, hệ (3.61) còn là sự mắc nối tiếp của các khâu (3.62) nên hàm trọng lượng $g(t)$ của nó sẽ là tích chập của tất cả các hàm trọng lượng của các khâu đó, tức là

$$g(t) = k [g_1^1(t) * \dots * g_m^1(t) * g_{m+1}^0(t) * \dots * g_n^0(t)] \quad (3.64a)$$

trong đó

$$g_v^1(t) = \delta(t) + (q_v - p_v) e^{-p_v t}, \quad v=1, \dots, m. \quad (3.64b)$$

$$g_j^0(t) = e^{-p_j t}, \quad j=m+1, \dots, n. \quad (3.64c)$$



Hình 3.34: Minh họa cho định lý 3.40.

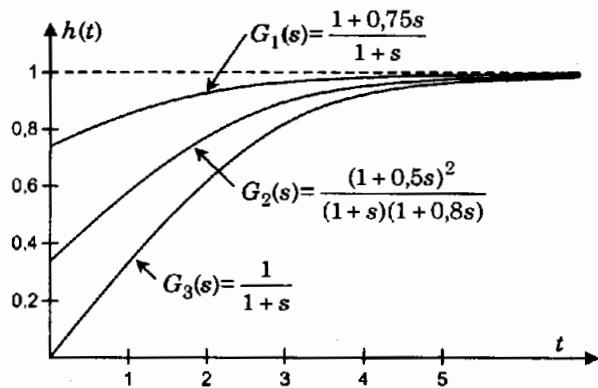
(a) Các hàm $g_j^0(t), j=m+1, \dots, n$ cho trong (3.64c) hiển nhiên là không âm. Do có điều kiện (3.63) nên các hàm $g_v^1(t), v=1, \dots, m$ cho trong (3.64b) cũng không âm. Suy ra tích chập $g(t)$ của chúng tính theo (3.64a) cũng là hàm không âm. Vì $h(t)$ có đạo hàm $g(t)$ không âm nên $h(t)$ sẽ là hàm không giảm.

(b) Trước hết ta thấy tích chập của một hàm không âm với một hàm không dương sẽ đổi dấu một lần. Nếu như có l bất đẳng thức (3.63) không được thỏa mãn thì sẽ có l hàm trong số các hàm $g_v^1(t), v=1, \dots, m$ là không dương ($t>0$). Suy ra tích chập $g(t)$ của tất cả các hàm $g_v^1(t), g_j^0(t)$ sẽ đổi dấu l lần và do đó $h(t)$ có l điểm cực trị. □

Ví dụ 36: Cho những hệ SISO với hàm truyền đạt sau

$$G_1(s) = \frac{1+0,75s}{1+s}, \quad G_2(s) = \frac{(1+0,5s)^2}{(1+s)(1+0,8s)} \quad \text{và} \quad G_3(s) = \frac{1}{1+s}$$

Tất cả các hệ này là hệ pha cực tiêu. Các điểm không và điểm cực của chúng đều thỏa mãn bất đẳng thức (3.63). Chẳng hạn như hệ $G_2(s)$ có hai điểm cực được sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là $p_1=1, p_2=\frac{5}{4}$ và hai điểm không cũng sắp xếp theo thứ tự đó là $q_1=q_2=2$. Chúng đều thỏa mãn $q_1 > p_1, q_2 > p_2$. Bởi vậy theo định lý 3.40, cả ba hàm quá độ $h_1(t), h_2(t), h_3(t)$ sẽ đơn điệu tăng (hình 3.35). □



Hình 3.35: Các hàm quá độ minh họa cho ví dụ 36

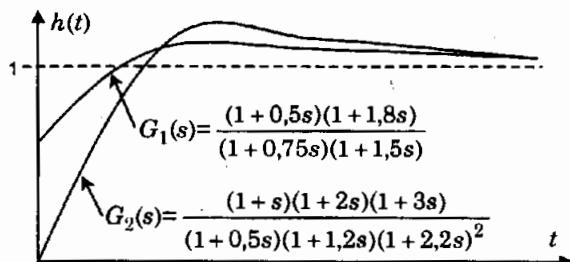
Ví dụ 37: Cho các hệ pha cực tiêu SISO với hàm truyền đạt sau

$$G_1(s) = \frac{(1 + 0.5s)(1 + 1.8s)}{(1 + 0.75s)(1 + 1.5s)} \quad \text{và} \quad G_2(s) = \frac{(1 + s)(1 + 2s)(1 + 3s)}{(1 + 0.5s)(1 + 1.2s)(1 + 2.2s)^2}.$$

Hệ $G_1(s)$ có hai điểm không $q_1 = \frac{5}{9}$, $q_2 = 2$ và hai điểm cực $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{4}{3}$. Do có

một bất đẳng thức trong số các bất đẳng thức (3.63) không được thỏa mãn là $q_1 < p_1$ nên đồ thị $h(t)$ của nó sẽ có một điểm cực trị và đó phải là điểm cực đại (hình 3.36).

Tương tự, hệ $G_2(s)$ có ba điểm không $q_1 = \frac{1}{3}$, $q_2 = \frac{1}{2}$, $q_3 = 1$ và bốn điểm cực $p_1 = \frac{5}{11}$, $p_2 = \frac{5}{11}$, $p_3 = \frac{5}{6}$, $p_4 = 2$. Vì có một bất đẳng thức $q_1 < p_1$ không thỏa mãn (3.63) nên đồ thị $h(t)$ của nó có một điểm cực đại (hình 3.36). □



Hình 3.36: Các hàm quá độ minh họa cho ví dụ 37.

Từ hai ví dụ 36 và 37 với sự minh họa của hình 3.35 cũng như hình 3.36 ta nhận thấy một điều nữa ở hệ pha cực tiêu là ngay sau khi bị kích thích bởi tín hiệu $1(t)$ ở đầu

vào, tức là khi t còn tương đối nhỏ, hệ luôn có đáp ứng $h(t)$ cùng hướng với $1(t)$. Điều này sẽ không còn đúng nếu như hệ không phải là pha cực tiểu, cụ thể hơn là khi hệ có hàm truyền đạt

$$G(s) = G_0(s)G_a(s), \quad (3.65)$$

trong đó $G_0(s)$ là thành phần pha cực tiểu (các điểm cực và điểm không đều nằm bên trái trục ảo) và $G_a(s)$ là hàm truyền đạt của *khâu thông tần* (all-pass):

$$G_a(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}. \quad (3.66)$$

Khâu thông tần có hàm đặc tính tần biên-pha

$$\tilde{G}_a(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T} \Rightarrow |\tilde{G}_a(j\omega)| = 1$$

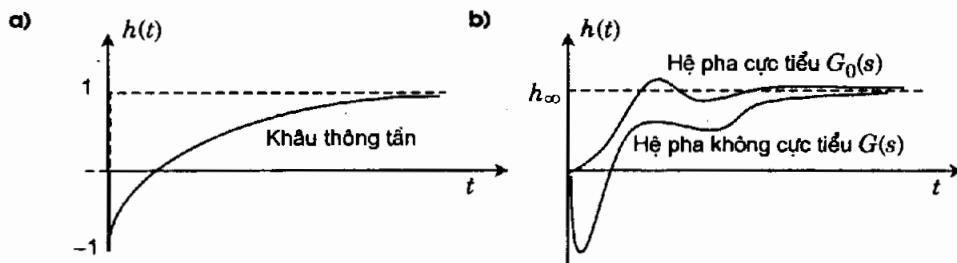
Như vậy, khâu thông tần có độ khuếch đại bằng 1 ở mọi tần số, tức là nó không lọc bất kỳ một tần số nào. Đó chính là lý do tại sao nó có tên là *thông tần*.

Dường đặc tính tần logarithm của khâu thông tần là:

$$L(\omega) = 0,$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{2\omega T}{(\omega T)^2 - 1} = \begin{cases} \arctan 2\omega T & \text{nếu } \omega T \ll 1 \\ \arctan \frac{2}{\omega T} & \text{nếu } \omega T \gg 1 \end{cases}$$

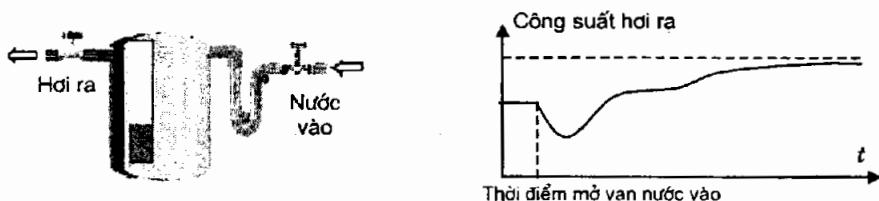
Đồ thị hàm quá độ $h(t)$ của khâu thông tần với hàm truyền đạt (3.66) được biểu diễn minh họa trong hình 3.37a). Hình 3.37b) là đồ thị hàm quá độ $h(t)$ của hệ pha không cực tiểu với hàm truyền đạt $G(s)$ cho trong (3.65). Ta có thể thấy được là trong khoảng thời gian nhỏ ngay sau khi bị kích thích, hệ có đáp ứng ngược với hướng của tín hiệu kích thích đầu vào $1(t)$.



Hình 3.37: Hàm quá độ của khâu thông tần và của hệ pha không cực tiểu gồm một khâu pha cực tiểu và một khâu thông tần mắc nối tiếp.

Định lý 3.41: Nếu hàm truyền đạt của hệ ổn định có một điểm không với phần thực dương (nằm bên phải trục ảo) thì hàm quá độ $h(t)$ của nó sẽ có giá trị âm trong một khoảng thời gian $(0, \tau]$.

Ví dụ 38: Một trong những ví dụ về hệ pha không cực tiểu với sự tham gia của một khâu thông tần là hệ thống lò hơi sản xuất hơi nước (hình 3.38).



Hình 3.38: Nồi hơi là hệ pha không cực tiểu với một khâu thông tần.

Để tăng công suất hơi cung cấp ở đầu ra người ta mở thêm van đưa nước vào nồi hơi. Nhưng ngay khi mới mở van, nước mới đưa vào có nhiệt độ thấp hơn nước có trong nồi hơi đã làm cho nhiệt độ tổng thể trong nồi hơi giảm xuống. Điều này dẫn tới việc công suất hơi ra cũng bị hạ tạm thời trong một khoảng thời gian ngay sau khi ta mở van. Chỉ đến khi nhiệt độ trong nồi hơi được nâng lên bằng với nhiệt độ có trước khi mở van, công suất hơi mới bắt đầu tăng. □

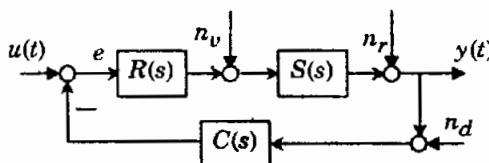
3.5.3 Phân tích hệ hồi tiếp

Hình 3.39a biểu diễn cấu trúc một hệ hồi tiếp, trong đó

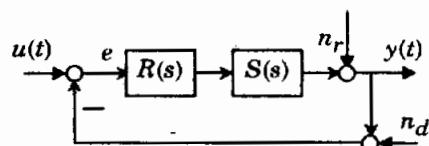
- $u(t)$ là tín hiệu đầu vào,
- $y(t)$ là tín hiệu đầu ra,
- $R(s)$ là hàm truyền đạt của bộ điều khiển,
- $S(s)$ là hàm truyền đạt của đối tượng điều khiển,
- $C(s)$ là hàm truyền đạt mô tả thiết bị đo tín hiệu (cảm biến, sensors),
- $n_v(t)$, $n_r(t)$, $n_d(t)$ là các tín hiệu nhiễu (không mong muốn) tác động vào hệ.

Ở những trường hợp đơn giản hơn, khi mà tín hiệu nhiễu đầu vào đối tượng $n_v(t)$ có thể bỏ qua, cũng như các thiết bị đo tín hiệu là lý tưởng $C(s) = 1$ thì cấu trúc hệ hồi tiếp sẽ được rút gọn như hình 3.39b mô tả.

a)



b)



Hình 3.39: Sơ đồ cấu trúc hệ hồi tiếp với một mạch vòng điều khiển

Hệ hồi tiếp vừa trình bày là hệ có cấu trúc một mạch vòng điều khiển đơn giản nhất. Vậy một mạch vòng điều khiển cần phải có những tính chất gì?

- Thứ nhất là ổn định: Tín hiệu đầu vào $u(t)$ là tín hiệu đặt trước. Người sử dụng mong muốn hệ có tín hiệu $y(t) = a$ ra như thế nào thì "ra lệnh" cho hệ bằng cách đặt trước giá trị mong muốn đó dưới dạng giá trị của tín hiệu vào $u(t) = a$. Hệ làm việc đặt yêu cầu phải là hệ mà sau một khoảng thời gian cần thiết có được tín hiệu ra $y(t)$ giống như giá trị đặt trước:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = a . \quad (3.67)$$

Rõ ràng là để có được (3.67) thì trước hết $y(t)$ phải tiến đến một hằng số (có chế độ xác lập), nói cách khác quá trình tự do của hệ phải tắt dần, hay *hệ phải ổn định*. Tuy nhiên cần phải chú ý rằng khi hệ ổn định thì có thể $y(t)$ tiến đến một hằng số nhưng không phải là a như mong muốn.

- Thứ hai là sai lệch $e(t)$ bằng 0 hoặc bám được theo tín hiệu lệnh: Yêu cầu hệ ổn định mới chỉ xác định được là $y(t)$ sẽ tiến đến một hằng số. Song việc hằng số đó có bằng giá trị mong muốn a hay không thì chưa được đảm bảo. Để chắc chắn có được giá trị mong muốn a ở đâu ra thì hệ phải thỏa mãn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 . \quad (3.68)$$

Trong khi yêu cầu (3.67) chỉ có thể có được nếu như tín hiệu đầu vào $u(t)=a$ là hằng số thì người ta thường mong muốn (3.68) luôn được thỏa mãn với mọi tín hiệu vào khác nhau. Hai dạng tín hiệu lệnh người ta quan tâm là:

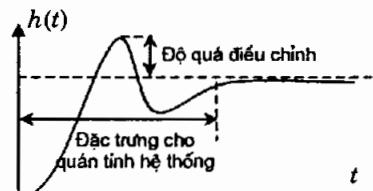
- $u(t) = 1(t)$.
- $u(t) = t$.

Nhưng cũng phải nói thêm là ngoài hai dạng tín hiệu trên, khó mà có thể đáp ứng được yêu cầu (3.68) cho một tín hiệu vào $u(t)$ bất kỳ. Ở những trường hợp rộng mở hơn, người ta cũng đã rất thỏa mãn nếu như có thể tìm được bộ điều khiển $R(s)$ sao cho với nó hệ kín có tín hiệu ra "gần giống" như tín hiệu vào theo nghĩa

$$\|y(t)-u(t)\| < \varepsilon , \quad (3.69)$$

trong đó ε là một hằng số dương đủ nhỏ. Bài toán mang đến cho hệ thống khả năng tín hiệu ra $y(t)$ bám được theo tín hiệu lệnh đầu vào $u(t)$ như (3.69) mô tả có tên gọi là *điều khiển bám (tracking control)*. Ý nghĩa chuẩn sai lệch trong (3.69) có thể là chuẩn bậc 2 hoặc chuẩn vô cùng tùy theo từng yêu cầu cụ thể của bài toán.

- Thứ ba là tính động học phải tốt: Yêu cầu (3.68) mới chỉ giải quyết về *tính chất tĩnh* của hệ thống. Những yêu cầu chi tiết hơn của hệ thể hiện qua quá trình $y(t)$ tiến tới giá trị mong



Hình 3.40: Dánh giá chất lượng động học của hệ thống.

muốn a hay sai lệch $e(t)$ tiến về 0 như thế nào được gọi là các yêu cầu về tính động học. Chúng có thể là (hình 3.40):

- yêu cầu về quan tính cần có của hệ thống, về thời gian quá trình quá độ,
 - yêu cầu có hay không độ quá điều chỉnh, về miền dao động cho phép của các giá trị trạng thái, các tín hiệu ...
- 4) *Thứ tự là bên vững:* Hệ phải làm việc không những đạt được chất lượng đã đề ra mà còn phải giữ được chất lượng đó cho dù:
- có bất cứ một sự thay đổi nào không lường được trước xảy ra bên trong hệ thống (mô hình, tham số thay đổi ...)
 - và có sự tác động của những tín hiệu nhiễu không mong muốn.
- 5) *Cuối cùng là tối ưu:* Đây là một trong những yêu cầu nâng cao, đòi hỏi rằng hệ không những đạt được các chỉ tiêu chất lượng đề ra mà còn phải đạt được một cách tốt nhất. Chẳng hạn như công suất tổn hao cho quá trình quá độ là ít nhất, thời gian xảy ra quá trình quá độ là ngắn nhất

Những tiêu chuẩn trên là các tiêu chí cần phải đạt được của một hệ thống điều khiển. Phân tích hệ hồi tiếp có nhiệm vụ kiểm tra xem những tiêu chuẩn gì hệ đã có, những gì chưa đạt được để còn bổ sung. Muốn bổ sung hay mang đến thêm cho hệ thống chất lượng mới thì phải xác định được những tham số gì, các khâu cơ bản nào ảnh hưởng trực tiếp tới những tiêu chuẩn đã nêu, để từ đó biết được phải bổ sung như thế nào thông qua bộ điều khiển $R(s)$.

Về tính ổn định

Để kiểm tra tính ổn định hệ kín ta sử dụng những tiêu chuẩn đã trình bày tại mục 3.2, trong đó tiêu chuẩn Nyquist (mục 3.2.6) và phương pháp sử dụng biểu đồ Bode (mục 3.2.7) đặc biệt thích hợp.

Phát triển tiêu chuẩn Nyquist ta đi đến một tiêu chuẩn khác có ý nghĩa nhiều hơn cho công việc thiết kế bộ điều khiển $R(s)$ sau này.

Định lý 3.42: Hệ kín có các hàm truyền đạt $S(s)$, $R(s)$ là những hàm bền, sẽ ổn định nếu

$$\|R(j\omega)\|_\infty < \frac{1}{\|S(j\omega)\|_\infty}.$$

Chứng minh:

Vì có giả thiết $S(s)$, $R(s)$ là những hàm bền nên hệ hở ổn định. Như vậy, theo định lý 3.21 của mục 3.2.7, đủ để hệ kín ổn định là

$$\|S(j\omega)R(j\omega)\|_\infty = \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |S(j\omega)R(j\omega)| < 1 \quad (3.70)$$

Mặt khác, do chuẩn vô cùng thỏa mãn công thức *bất đẳng thức Hölder mở rộng* (mục 2.3.2, chương 2, trang 131) nên cũng đủ để có (3.70) là

$$\|S(j\omega)R(j\omega)\|_{\infty} \leq \|S(j\omega)\|_{\infty} \|R(j\omega)\|_{\infty} < 1$$

và đó là điều phải chứng minh. \square

Ví dụ 39: Hãy xác định bộ điều khiển $R(s)$ sao cho hệ kín gồm nó và đối tượng với hàm truyền đạt

$$S(s) = \frac{(1+s)^3}{(1+0.1s)^3(1+10s)}$$

được ổn định.

Từ biểu đồ Bode $L_S(\omega)$ của đối tượng (hình 3.41) ta có được ngay:

$$\max_{0 \leq \omega \leq \infty} |L_S(\omega)| = 20 \text{dB} \quad (\text{khi } \omega=10)$$

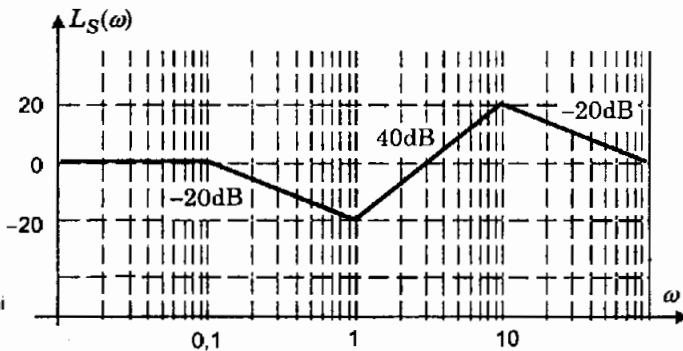
$$\Rightarrow \|S(j\omega)\|_{\infty} = \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |S(j\omega)| = |S(10j)| = 10.$$

Vậy đủ để hệ kín ổn định là hàm bền $R(s)$ thỏa mãn:

$$\|R(j\omega)\|_{\infty} < 0,1.$$

Chẳng hạn như ta có thể chọn:

$$R(s) = \frac{1}{s+20} \quad (\text{khi đó thì } \|R\|_{\infty} = 0,05 - \text{có thể tìm nhờ biểu đồ Bode}). \quad \square$$



Hình 3.41: Xác định chuẩn cực đại nhờ biểu đồ Bode. Minh họa cho ví dụ 39.

Chú ý: Định lý 3.42 chỉ là điều kiện đủ để hệ kín ổn định. Điều đó nói rằng hệ kín vẫn có thể ổn định khi một trong hai hàm $R(s)$, $S(s)$ không bền, hoặc khi $R(s)$, $S(s)$ là những hàm bền nhưng bộ điều khiển $R(s)$ lại không thỏa mãn

$$\|R(j\omega)\|_{\infty} < \frac{1}{\|S(j\omega)\|_{\infty}}.$$

Về sai lệch tĩnh

Sai lệch tĩnh của hệ kín phụ thuộc vào tín hiệu kích thích ở đầu vào. Định lý sau là tiêu chuẩn đánh giá sai lệch tĩnh khi tín hiệu đầu vào là hàm Heaviside hoặc tăng đều.

Định lý 3.43: Cho hệ kín ổn định, không có nhiễu tác động, với sơ đồ cấu trúc cho trong hình 3.39b), $n_r(t)=n_d(t)=0$. Hệ sẽ không có sai lệch tĩnh, tức là $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, nếu

a) $u(t)=1(t)$ và hàm $K(s)=\frac{1}{1+S(s)R(s)}$ có ít nhất một điểm không là gốc tọa độ, tức là $K(0)=0$.

b) $u(t)=t$ và hàm $K(s)=\frac{1}{1+S(s)R(s)}$ có ít nhất hai điểm không là gốc tọa độ, hay (ít nhất) $s=0$ là nghiệm bội hai của $K(s)=0$.

Chứng minh:

Trước hết ta thấy được ngay

$$K(s)=\frac{1}{1+S(s)R(s)}$$

chính là hàm truyền của hệ có đầu vào $u(t)$ và đầu ra $e(t)$. Vậy thì

$$E(s) = K(s)U(s),$$

trong đó $E(s)$ là ảnh Laplace của $e(t)$ và $U(s)$ là ảnh của $u(t)$.

Theo định lý về giới hạn thứ nhất của toán tử Laplace (mục 1.3.1, chương 1) ta có

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sKU .$$

Lần lượt thay $U(s)=\frac{1}{s}$ cho trường hợp $u(t)=1(t)$ và $U(s)=\frac{1}{s^2}$ khi $u(t)=t$ vào công thức trên ta thu được điều phải chứng minh. \square

Từ nội dung định lý 3.43 và với điều hiển nhiên rằng điểm không của hàm

$$K(s) = \frac{1}{1+S(s)R(s)} \tag{3.71}$$

cũng chính là điểm cực của tích $S(s)R(s)$, tức là điểm cực của hàm truyền đạt hệ hở, ta sẽ đi đến được hệ quả sau:

Định lý 3.44: Một hệ kín ổn định, không có nhiễu tác động, với sơ đồ cấu trúc cho trong hình 3.39b) khi được kích thích bởi $1(t)$ sẽ không có sai lệch tĩnh ($\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$) nếu hàm truyền đạt hệ hở $S(s)R(s)$ có chứa thành phần tích phân.

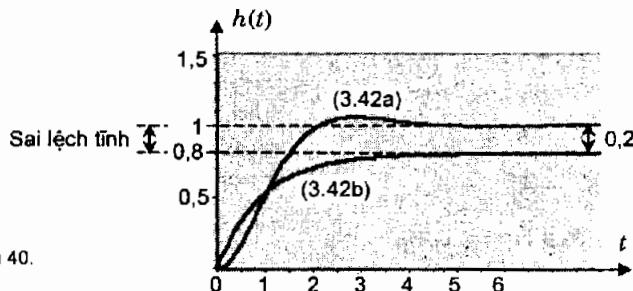
Ví dụ 40: Hình 3.42 biểu diễn hàm quá độ (đáp ứng của hệ với kích thích $u(t)=1(t)$ ở đầu vào) của hệ hồi tiếp có cấu trúc sơ đồ khối cho trong hình 3.39b) với hàm truyền hệ hở

$$S(s)R(s) = \frac{1}{s(1+0.5s)} \quad (3.72a)$$

cũng như với

$$S(s)R(s) = \frac{4}{1+5s}. \quad (3.72b)$$

Ta thấy ở trường hợp (3.72a) hệ không có sai lệch tĩnh vì $S(s)R(s)$ có chứa thành phần tích phân, nhưng với (3.72b) thì hệ có sai lệch tĩnh và sai lệch đó bằng 0,2. \square



Hình 3.42: Minh họa ví dụ 40.

Về chất lượng động học

Tiếp theo, ta đánh giá chất lượng động học của hệ kín thông qua độ sai lệch $\|y(t)-u(t)\|$. Sai lệch càng nhỏ, hệ sẽ có chất lượng động học càng tốt.

Nếu độ sai lệch được quan tâm là chuẩn bậc 2 (hình 3.43):

$$Q = \|y(t)-u(t)\| = \|e(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} e^2(t) dt}$$

thì để tính Q người ta thường sử dụng hoặc phương pháp gián tiếp thông qua định lý Parseval (sẽ trình bày sau ở mục 4.7.1, trang 367) hoặc trực tiếp với công thức của Krasowski. Phương pháp trực tiếp Krasowski có nội dung như sau:

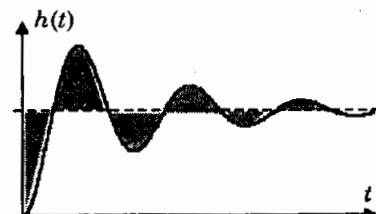
Giả sử ảnh Laplace của sai lệch $e(t)$ có dạng

$$E(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}.$$

Vậy thì

$$Q^2 = \frac{E_1 \Delta_1 + E_2 \Delta_2 + \dots + E_n \Delta_n - 2A_1 A_2 \Delta}{2a_0^2 \Delta},$$

trong đó



Hình 3.43: Đánh giá chất lượng động qua bình phương sai lệch.

$$a) \quad \Delta = \det \begin{pmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad a_n = 1 \quad (3.73)$$

b) Δ_k , $k=1, \dots, n$ được tính giống như Δ nhưng vector cột thứ k của ma trận trong (3.73) được thay bằng cột $(a_1, a_0, 0, \dots, 0)^T$.

c) $A_1 = -b_{n-1}a_0,$

$$A_2 = b_0 - b_{n-1}a_1,$$

\vdots

$$A_n = b_{n-2} - b_{n-1}a_{n-1}$$

d) $B_1 = A_1^2,$

$$B_2 = A_2^2 - 2A_1A_3,$$

$$B_3 = A_3^2 - 2A_2A_4 + 2A_1A_5,$$

\vdots

$$B_k = A_k^2 - 2A_{k-1}A_{k+1} + 2A_{k-2}A_{k+2} - 2A_{k-3}A_{k+3} + \dots$$

\vdots

$$B_n = A_n^2$$

Ví dụ 41: Tính giá trị bình phương sai lệch Q của hệ kín có hàm truyền hệ hở là

$$S(s)R(s) = \frac{1+2Ts}{s^2}$$

khi hệ được kích thích bởi $1(t)$ ở đầu vào.

Hàm sai lệch $e(t)$ có ảnh Laplace

$$E(s) = \frac{1}{1+SR} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{1+2Ts+s^2}, \quad \text{tức là } b_0=0, b_1=1, a_0=1, a_1=2T \text{ và } a_2=1,$$

Suy ra:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_0 & -a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2T \end{pmatrix} = 2T,$$

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2T & -1 \\ 1 & 2T \end{pmatrix} = 4T^2 + 1,$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$A_1 = -b_1 a_0 = -1, \quad A_2 = b_0 - b_1 a_1 = -2T, \quad B_1 = A_1^2 = 1, \quad B_2 = A_2^2 = 4T^2,$$

Vậy

$$Q^2 = \frac{B_1 \Delta_1 + B_2 \Delta_2 - 2A_1 A_2 \Delta}{2a_0^2 \Delta} = \frac{(4T^2 + 1) + 4T^2 - 8T^2}{4T} = \frac{1}{4T}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2\sqrt{T}}.$$

□

Về tính bền vững

Hàm $K(s)$ cho trong công thức (3.71) của hệ hồi tiếp mô tả ở hình 3.44 có tên gọi là *hàm nhạy* (*sensitivity function*) của hệ. Tên gọi này được bắt nguồn từ bản chất của nó là đại lượng do sự nhạy cảm của hàm truyền đạt hệ kín

$$G(s) = \frac{SR}{1+SR}$$

tương ứng với một thay đổi nhỏ ΔS trong mô hình hàm truyền đạt của đối tượng. Nếu gọi ΔG là sự thay đổi trong $G(s)$ ứng với sai lệch ΔS của đối tượng thì độ nhạy cảm η được định nghĩa là tỷ số sai lệch tương đối $\frac{\Delta G}{G}$ trong $G(s)$ của cả hệ kín với $\frac{\Delta S}{S}$ trong riêng đối tượng $S(s)$. Suy ra

$$\eta = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta G}{G}}{\frac{\Delta S}{S}} = \frac{dG}{dS} \cdot \frac{S}{G}$$

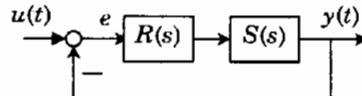
và đó cũng chính là *hàm nhạy* của hệ:

$$\eta = \frac{R(1+SR) - SR^2}{(1+SR)^2} \cdot \frac{S(1+SR)}{SR} = \frac{1}{1+SR} = K(s).$$

$$\Rightarrow \eta_{\max} = \|K(j\omega)\|_{\infty} \quad \text{nếu } K(s) \text{ là hàm bền.}$$

Việc đánh giá độ nhạy cảm η của hệ ứng với sự thay đổi ΔS của đối tượng là cần thiết vì một hệ thống điều khiển luôn chứa đựng trong nó các yếu tố không chắc chắn (*uncertain*) về đối tượng. Nguồn gốc của các yếu tố không chắc chắn đó có thể là:

- Đối tượng đã được mô tả một cách không đầy đủ, mô hình mô tả đối tượng không chính xác.
- Mô hình đối tượng mà ta sử dụng là một mô hình đơn giản, được xấp xỉ từ mô hình phức tạp mô tả chính xác đối tượng. Chẳng hạn như đối tượng có mô hình chính xác là phi tuyến, song để đơn giản hóa cho công việc phân tích và thiết kế hệ điều khiển ta đã xấp xỉ mô hình phi tuyến đó bằng một mô hình tuyến tính.



Hình 3.44: Hệ hồi tiếp không có nhiễu.

Hệ kín có bộ điều khiển $R(s)$ giữ cho chất lượng hệ thống không (hoặc ít) bị thay đổi bởi sai lệch ΔS của đối tượng được gọi là *hệ thống bền vững*. $R(s)$ khi đó cũng có tên là *bộ điều khiển bền vững*. Hệ sẽ càng bền vững nếu chất lượng hệ thống được bảo tồn với miền dao động ΔS trong đối tượng càng cao.

Một trong những chỉ tiêu chất lượng bền vững hàng đầu mà ta quan tâm là tính ổn định bền vững, tức là hệ kín vẫn ổn định với mọi sự không chắc chắn ΔS thuộc một miền cho trước. Nếu bằng cách nào đó mà những yếu tố không chắc chắn ΔS về đối tượng này có thể biểu diễn dưới dạng tham số thay đổi của hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{SR}{1+SR} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad m \leq n$$

trong đó

$$a_i^- \leq a_i \leq a_i^+ , \quad i=0, 1, \dots, n$$

$$\text{và } b_i^- \leq b_i \leq b_i^+ , \quad i=0, 1, \dots, m$$

với a_i^- , a_i^+ , b_i^- , b_i^+ là những giá trị cho trước, thì tính ổn định bền vững của hệ kín có thể được kiểm tra một cách đơn giản nhờ tiêu chuẩn Kharitonov (mục 3.2.8, trang 209).

Những bài toán có yếu tố không chắc chắn ΔS được thể hiện qua sự thay đổi của tham số trong mô hình đối tượng như vậy được gọi là bài toán có *tham số mô hình đối tượng không chắc chắn* (*parameter uncertainties*) hay bài toán với *sai lệch mô hình có cấu trúc*.

Ví dụ 42: Cho hệ kín có cấu trúc sơ đồ khối như hình 3.44 mô tả. Giả sử rằng đối tượng có hàm truyền đạt với tham số không chắc chắn

$$S(s) = \frac{s+b_0}{1+a_1 s + a_2 s^2} \quad \text{trong đó} \quad 1 \leq b_0 \leq 3, \quad 6 \leq a_1 \leq 7, \quad 1 \leq a_2 \leq 2.$$

Nếu bộ điều khiển được sử dụng là khai tích phân

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

thì hàm truyền đạt của hệ kín có dạng

$$G(s) = \frac{SR}{1+SR} = \frac{s+b_0}{b_0 + (1+b_0)s + a_1 s^2 + a_2 s^3}$$

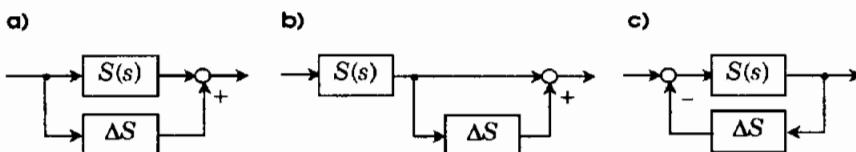
với sự không chắc chắn $1 \leq b_0 \leq 3$, $2 \leq 1+b_0 \leq 4$, $6 \leq a_1 \leq 7$, $1 \leq a_2 \leq 2$. Do đa thức

$$K_4(s) = 3 + 4s + 6s^2 + 2s^3$$

là đa thức Hurwitz (có thể kiểm tra nhờ bảng Routh) nên theo tiêu chuẩn Kharitonov cho trường hợp $n=3$ (định lý 3.25, trang 214), hệ kín ổn định với miền tham số không chắc chắn đã cho (đa thức mẫu số là Hurwitz chẵn). \square

Tuy nhiên, không phải mọi trường hợp yếu tố không chắc chắn của đối tượng có thể biểu diễn được dưới dạng tham số thay đổi như vậy, chẳng hạn như yếu tố không chắc chắn lại nằm trong bậc của mô hình đối tượng. Những dạng yếu tố không chắc chắn (sai lệch mô hình đối tượng) không biểu diễn được qua tham số mô hình được gọi là *sai lệch mô hình không có cấu trúc*.

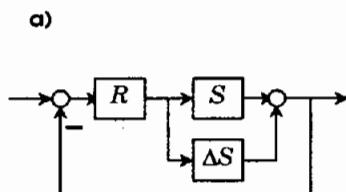
Hình 3.45 biểu diễn một số dạng diễn hình của sai lệch mô hình không có cấu trúc.



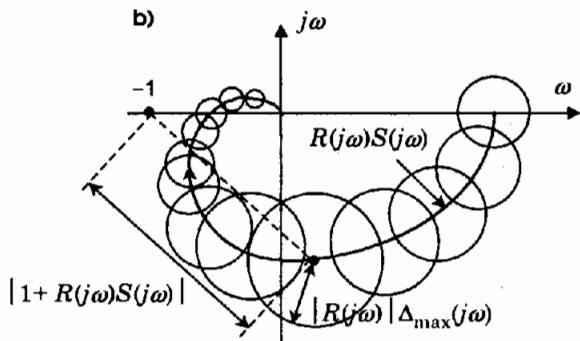
Hình 3.45: a) Sai lệch mô hình theo quan hệ bù cộng.
b) Sai lệch mô hình theo quan hệ bù nhân.
c) Sai lệch mô hình theo quan hệ bù phối hợp.

Thường gặp nhất trong thực tế là bài toán điều khiển có yếu tố không chắc chắn của đối tượng thể hiện dưới dạng quan hệ bù cộng (hình 3.45a và 3.46a), tức là đối tượng sẽ có hàm truyền đạt thuộc tập hợp

$$\tilde{S}(s) = S(s) + \Delta S \quad \text{với} \quad |\Delta S| \leq \Delta_{\max}.$$



Hình 3.46: Kiểm tra tính ổn định hệ kín có sai lệch mô hình không cấu trúc kiểu bù cộng của đối tượng.



Giả sử rằng hàm truyền hệ hở $R(s)\tilde{S}(s)$ là hàm bền với mọi $|\Delta S| \leq \Delta_{\max}$. Vậy thì theo tiêu chuẩn Nyquist (định lý 3.19, trang 205), hệ kín sẽ ổn định nếu như quỹ đạo hàm đặc tính tần biến-phas $R(j\omega)\tilde{S}(j\omega)$ không đi qua và không bao quanh điểm -1 . Nhưng do

$$|R(j\omega)\tilde{S}(j\omega) - R(j\omega)S(j\omega)| \leq |R(j\omega)|\Delta_{\max}(j\omega)$$

nên đường đặc tính tần $R(j\omega)\tilde{S}(j\omega)$ chính là tập các điểm trong mặt phẳng phức nằm trong đường tròn tâm $R(j\omega)S(j\omega)$ bán kính $|R(j\omega)|\Delta_{\max}(j\omega)$. Bởi vậy, trong trường hợp đường quỹ đạo $R(j\omega)S(j\omega)$ đã không bao điểm -1 thì cần và đủ để đường $R(j\omega)\tilde{S}(j\omega)$ cũng không bao điểm -1 là bán kính $|R(j\omega)|\Delta_{\max}(j\omega)$ phải nhỏ hơn khoảng cách từ tâm đường tròn $R(j\omega)S(j\omega)$ tới điểm -1 (hình 3.46b). Nói cách khác:

$$|R(j\omega)|\Delta_{\max}(j\omega) < |1 + R(j\omega)S(j\omega)|.$$

Suy ra:

Định lý 3.45: Nếu hệ kín với $R(s)$ và $S(s)$ là ổn định và hàm truyền $R(s)\tilde{S}(s)$ là hàm bền với mọi $|\Delta S(s)| \leq \Delta_{\max}(s)$ thì cần và đủ để hệ kín ổn định bền vững với mọi yếu tố không chắc chắn $|\Delta S(j\omega)| \leq \Delta_{\max}(j\omega)$ kiểu bù công của đối tượng là

$$\Delta_{\max}(j\omega) < \left| \frac{1 + R(j\omega)S(j\omega)}{R(j\omega)} \right|. \quad (3.74)$$

Khi hệ kín đã ổn định (bền vững) thì định lý 3.44 lại có thể được sử dụng để khảo sát sai lệch tĩnh. Do định lý 3.44 không có yêu cầu gì về tính chắc chắn của đối tượng nên ta đến được:

Định lý 3.46: Nếu hệ kín với những yếu tố không chắc chắn ΔS về đối tượng là ổn định bền vững và $S(s)R(s)$ có chứa thành phần tích phân (với mọi ΔS) thì khi được kích thích bởi $1(t)$, nó sẽ không có sai lệch tĩnh.

Về tính tối ưu

Sau này, trong chương 4, khi nói về các phương pháp tổng hợp bộ điều khiển tối ưu, ta sẽ có dịp đi chi tiết hơn về yêu cầu chất lượng tốt nhất cho hệ thống của bộ điều khiển. Ở phần này, và cũng để minh họa việc xác định tham số cho bộ điều khiển sao cho hệ thống đạt được chỉ tiêu tối ưu cho chất lượng động là bình phương sai lệch nhỏ nhất, ta sẽ xét một ví dụ.

Ví dụ 43: Cho hệ kín có cấu trúc sơ đồ khôi như ở hình 3.44, trong đó

$$S(s) = \frac{1}{s}, \quad R(s) = \frac{1}{a_0 + a_1 s + s^2}.$$

Hãy xác định hai tham số a_0, a_1 cho bộ điều khiển $R(s)$ để hệ có được chất lượng động tốt nhất theo nghĩa

$$Q = \|e(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty e^2(t)dt} \rightarrow \min.$$

Áp dụng phương pháp Krasowski cho sai lệch $e(t)$ khi hệ được kích thích bởi $1(t)$ tại đầu vào, ta có

$$E(s) = \frac{1}{1+SR} \cdot \frac{1}{s} = \frac{a_0 + a_1 s + s^2}{1 + a_0 s + a_1 s^2 + s^3}$$

$$\Rightarrow \Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & -1 \\ 0 & -1 & a_1 \end{pmatrix} = a_0 a_1 - 1, \quad \Delta_1 = \det \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & 0 \\ 1 & a_0 & -1 \\ 0 & -1 & a_1 \end{pmatrix} = a_1 a_0^2 - a_0 + a_1^2$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & a_0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} = a_1, \quad \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & a_0 \\ 0 & a_0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_1 = -1, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

$$B_1 = 1, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0$$

Suy ra

$$Q^2 = \frac{a_1 a_0^2 - a_0 + a_1^2}{2(a_0 a_1 - 1)}.$$

Để Q có giá trị nhỏ nhất thì hai tham số a_0, a_1 phải thỏa mãn:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$$
□

3.5.4 Phương pháp quỹ đạo nghiệm số

Trong mục 3.5.2 trước đây ta đã nhắc đến mối liên quan giữa chất lượng hệ thống với vị trí điểm cực và điểm không của hàm truyền hệ thống trong mặt phẳng phức. Trên cơ sở mối quan hệ đó, để thực hiện nhiệm vụ của bài toán là xác định bộ điều khiển $R(s)$ cho đối tượng $S(s)$ sao cho hệ thống có được chất lượng mong muốn, ta có thể tìm $R(s)$ sao cho các điểm cực cũng như điểm không của hàm truyền đạt hệ kín:

$$G(s) = \frac{S(s)R(s)}{1 + S(s)R(s)} \quad (3.75)$$

là những giá trị cụ thể đã cho trước trong mặt phẳng phức.

Nhưng trước khi tìm bộ điều khiển $R(s)$ theo phương hướng như trên ta cũng cần phải phân tích để biết được các điểm cực, điểm không của hàm (3.75) phụ thuộc như thế nào vào bộ điều khiển $R(s)$. Đơn giản hơn nữa, nếu như cấu trúc của $R(s)$ là đã biết, chẳng hạn như đã biết bộ điều khiển được sử dụng là bộ PID với hàm truyền đạt

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

thì công việc phân tích trên sẽ trở thành xác định mối liên hệ giữa vị trí điểm cực, điểm không của hàm (3.75) với các tham số k_p, T_I, T_D của bộ điều khiển $R(s)$.

Sau đây ta sẽ giới hạn bài toán phân tích trên ở trường hợp đơn giản nhất là xác định mối quan hệ giữa tham số k của bộ điều khiển $R(s)$ có cấu trúc

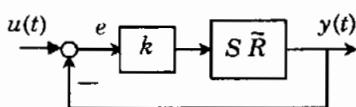
$$R(s) = k \tilde{R}(s), \quad (3.76a)$$

với các điểm cực của hàm (3.75), tức là với các nghiệm của

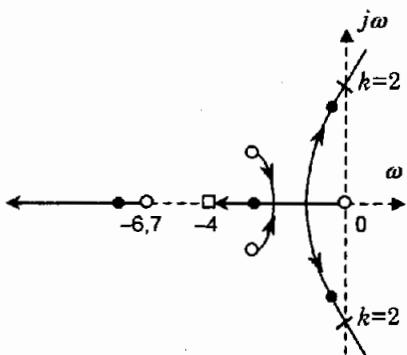
$$F(s) = 1 + S(s)R(s) \quad (3.76b)$$

trong đó giống như $S(s)$, hàm $\tilde{R}(s)$ được giả thiết là đã biết (hình 3.47).

Định nghĩa 3.7: Phương pháp *quỹ đạo nghiệm số* là một phương pháp phân tích chất lượng hệ kín trên cơ sở đường đồ thị biểu diễn nghiệm số của hàm (3.76b) theo tham số k của bộ điều khiển (3.76a).



Hình 3.47: Hệ có một tham số



Hình 3.48: Quỹ đạo nghiệm số của ví dụ 44.

Ví dụ 44: Xét hệ kín có cấu trúc sơ đồ khối cho trong hình 3.47 và

$$S(s) \tilde{R}(s) = \frac{10(s+4)}{s(s^2 + 6s + 10)(0.15s + 1)}$$

Giải phương trình phụ thuộc tham số k

$$1 + k \frac{10(s+4)}{s(s^2 + 6s + 10)(0.15s + 1)} = 0 \quad (3.77)$$

ta có được điểm cực của hệ kín. Biểu diễn các điểm cực đó trong mặt phẳng phức dưới dạng đồ thị phụ thuộc tham số k ta được quỹ đạo nghiệm số của hệ. Hình 3.48 là đồ thị quỹ đạo nghiệm số ứng với dải biến thiên $0 \leq k \leq \infty$ của tham số k . Chiều tăng của k được thể hiện bằng chiều mũi tên trên đồ thị quỹ đạo nghiệm số. Các dấu ● trên đồ thị là nghiệm của (3.77) khi $k=0,25$.

Quỹ đạo nghiệm số của hệ gồm bốn nhánh ứng với bậc đa thức mẫu số của hàm truyền đạt $S(s)R(s)$ của hệ hở là bốn. Cả bốn nhánh này đều xuất phát (khi $k=0$) từ các điểm cực của hàm truyền đạt $S(s)\tilde{R}(s)$. Chúng được đánh dấu bằng ký hiệu ○ trong hình

3.48. Điểm không của hàm $S(s)\tilde{R}(s)$ được ký hiệu bởi \square và cũng là điểm kết thúc (khi $k=\infty$) của một trong các nhánh quỹ đạo nghiệm số.

Với đường quỹ đạo nghiệm số này ta có được một cái nhìn trực quan về sự phụ thuộc của chất lượng hệ kín vào tham số k . Chẳng hạn nhất do quỹ đạo nghiệm cắt trực ảo tại $k=2$ và nằm bên phải trực ảo khi $k>2$ nên hệ sẽ không ổn định với $k\geq 2$. \square

Qua ví dụ trên, ta đã có được khái niệm về ý nghĩa cũng như bản chất của phương pháp quỹ đạo nghiệm số đối với công việc phân tích hệ kín SISO có hàm truyền hệ hở phụ thuộc một tham số k :

$$G_h(s) = k \underbrace{\frac{S(s)\tilde{R}(s)}{\tilde{G}_h(s)}}_k = k \frac{B(s)}{A(s)} = k \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}, \quad (m \leq n)$$

trong đó $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ và k là những số thực.

Gọi $p_i, i=1, \dots, n$ là các điểm cực và $q_k, k=1, \dots, m$ là những điểm không của $\tilde{G}_h(s)$. Khi đó $G_h(s)$ sẽ viết được thành

$$G_h(s) = k \frac{(s - q_1)(s - q_2) \cdots (s - q_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}.$$

Hệ kín ổn định nếu như các điểm cực của hàm truyền hệ kín, tức là nghiệm của

$$1 + G_h(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -k = \frac{A(s)}{B(s)} \quad (3.78a)$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{i=1}^m |s - q_i|} \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^n \arg(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \arg(s - q_i) = (2l+1)\pi \quad \text{với } l \in \mathbb{Z}. \quad (3.78b)$$

nằm bên trái trực ảo.

Nhưng do nghiệm của (3.78b) phụ thuộc k nên khi k thay đổi, các nghiệm đó cũng có thể sẽ dịch chuyển từ nửa mặt phẳng bên trái trực ảo sang nửa phải hoặc ngược lại tạo thành các đường quỹ đạo nghiệm số.

Để xây dựng đường quỹ đạo nghiệm số ta có tám quy tắc của Evans phát biểu như sau:

- 1) Quy tắc 1: Quỹ đạo nghiệm số có dạng đối xứng qua trục thực.

Điều này là hiển nhiên, vì phương trình (3.78a) có các hệ số là số thực nên nghiệm của nó phải hoặc là số thực, hoặc là các số phức liên hợp. Nói cách khác, nghiệm của (3.78a) nằm đối xứng qua trục thực.

- 2) Quy tắc 2: Quỹ đạo nghiệm số có n nhánh. Các nhánh này đều bắt đầu khi $k=0$ ở những điểm p_i , $i=1, \dots, n$ (điểm cực của $\tilde{G}_k(s)$). Sẽ có m nhánh kết thúc khi $k \rightarrow \infty$ tại q_k , $k=1, \dots, m$ (điểm không của $\tilde{G}_k(s)$).

Quỹ đạo nghiệm số có n đường vì phương trình (3.78a) có n nghiệm ứng với số bậc của đa thức $A(s)$ là n . Khi $k=0$, phương trình (3.78a) trở thành $A(s)=0$, do đó nghiệm của nó chính là điểm cực của $\tilde{G}_k(s)$. Vậy tất cả n nhánh này đều phải bắt đầu từ các điểm cực p_i , $i=1, \dots, n$.

Trường hợp $k \rightarrow \infty$ thì do (3.78a) tương đương với

$$\frac{A(s)}{k} + B(s) = 0$$

nên nghiệm của nó cũng sẽ bao gồm m nghiệm của $B(s)=0$. Do đó trong số n nhánh sẽ có m nhánh kết thúc tại các điểm không q_k , $k=1, \dots, m$.

- 3) Quy tắc 3: Quỹ đạo nghiệm số có $n-m$ nhánh kéo ra xa tận vô cùng khi $k \rightarrow \infty$.

Từ phần phương trình (3.78b) với

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{i=1}^m |s - q_i|} = \infty$$

thì rõ ràng phải có $n-m$ nhánh kéo ra xa tận vô cùng khi $k \rightarrow \infty$.

- 4) Quy tắc 4: Góc xuất phát của các nhánh tại điểm cực p_i , $i=1, \dots, n$ là:

$$\alpha_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \arg(p_i - p_j) + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - q_j) + (2l+1)\pi \quad \text{với } l \in \mathbb{Z} \quad (3.79a)$$

và góc kết thúc tại các điểm không q_i , $i=1, \dots, m$ là:

$$\beta_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \arg(q_i - p_j) + \sum_{j=1}^m \arg(q_i - q_j) + (2l+1)\pi \quad \text{với } l \in \mathbb{Z}. \quad (3.79b)$$

Tính đúng đắn của hai công thức (3.79a) và (3.79b) được kiểm chứng một cách dễ dàng nhờ (3.78b) bằng cách cho nghiệm s tiến tới p_i để có góc xuất phát α_i ($s \rightarrow p_i$) hoặc tới q_i để có góc kết thúc β_i ($s \rightarrow q_i$).

- 5) Quy tắc 5: $n-m$ nhánh kéo ra xa vô cùng đều có đường tiệm cận. Các đường tiệm cận đó cùng cắt trực thực tại một điểm:

$$r_0 = \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m q_i \right) \quad (3.80a)$$

và hợp với trục thực một góc

$$\gamma_l = \frac{2l+1}{n-m}\pi, \quad l=0, 1, \dots, n-m+1. \quad (3.80b)$$

Để xác định phương trình đường tiệm cận của những nhánh quỹ đạo nghiệm số kéo ra tận vô cùng ta sẽ sử dụng công thức (3.78a). Từ (3.78a) với giả thiết $p_i, i=1, \dots, n$ là các điểm cực và $q_k, k=1, \dots, m$ là những điểm không của $\tilde{G}_h(s)$ ta được

$$-k = \frac{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}{\prod_{i=1}^m (s - q_i)} = \frac{s^n - \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) s^{n-1} + \dots}{s^m - \left(\sum_{i=1}^m q_i \right) s^{m-1} + \dots}.$$

Chia đa thức tử số cho đa thức mẫu số, sau đó cho $s \rightarrow \infty$ rồi chỉ giữ lại hai giá trị đầu tiên (vì thực chất ta chỉ cần có phương trình đường thẳng khi s đủ lớn):

$$\begin{aligned} -k &= s^{n-m} - \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m q_i \right) s^{n-m-1} \quad (\text{với } s \rightarrow \infty) \\ \Rightarrow (-k)^{\frac{1}{n-m}} &= s \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m q_i}{s} \right)^{\frac{1}{n-m}}. \end{aligned}$$

Khai triển về phải bằng công thức khai triển nhị thức Newton và cho $s \rightarrow \infty$ ta có

$$(-k)^{\frac{1}{n-m}} = s - \underbrace{\frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m q_i \right)}_{r_0} = s - r_0. \quad (3.81)$$

Rõ ràng r_0 là một số thực vì $p_i, i=1, \dots, n$ cũng như $q_i, i=1, \dots, m$ hoặc là các số thực, hoặc là các số phức liên hợp.

Từ (3.81) ta suy ra được tiếp

$$s = (-k)^{\frac{1}{n-m}} + r_0$$

Nhưng vì

$$-k = k [\cos(2l+1)\pi - j\sin(2l+1)\pi] = k e^{j(2l+1)\pi}$$

nên

$$s = k^{\frac{1}{n-m}} e^{j \frac{2l+1}{n-m} \pi} + r_0.$$

Như vậy, tất cả các đường tiệm cận đều có chung một giao điểm với trục thực là r_0 và hợp với trục thực một góc

$$\gamma_l = \frac{2l+1}{n-m}\pi \quad , \quad l=0, 1, \dots, n-m+1.$$

Tổng cộng có tất cả $n-m$ đường tiệm cận đồng quy tại r_0 trên trục thực tạo thành một hình sao có $n-m$ tia xung quanh r_0 .

- 6) Quy tắc 6: Tất cả các điểm trên trục thực nằm bên trái tổng số lẻ các điểm p_i và q_i đều thuộc quỹ đạo nghiệm số.

Điều này ta có thể thấy được ngay từ phương trình về góc pha (3.78b) cho các nghiệm thực s với p_i và q_j cũng là những số thực

$$\sum_{i=1}^n \arg(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \arg(s - q_i) = (2l+1)\pi.$$

Nhưng do các điểm phức p_i, q_j đều đối xứng qua trục thực nên số các điểm p_i và q_j nằm bên phải nghiệm của (3.78a) cũng sẽ vẫn là số lẻ.

- 7) Quy tắc 7: Các nhánh của quỹ đạo nghiệm số cắt nhau tại những điểm thỏa mãn:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - q_i}. \quad (3.82)$$

Từ phương trình (3.78a) ta có

$$\ln G_h(s) = \ln k + \sum_{i=1}^n \ln(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \ln(s - q_i)$$

suy ra

$$\frac{d}{ds} \ln G_h(s) = \frac{1}{G_h(s)} \cdot \frac{dG_h(s)}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - q_i}. \quad (3.83a)$$

Gọi s là giao điểm của các nhánh của quỹ đạo nghiệm số. Vậy thì s phải là nghiệm bội của phương trình (3.78a), tức là nó phải thỏa mãn

$$1 + G_h(s) = 0 \quad \text{và} \quad \frac{dG_h(s)}{ds} = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{G_h(s)} \cdot \frac{dG_h(s)}{ds} = 0. \quad (3.83b)$$

Thay (3.83b) vào (3.83a) ta có điều khẳng định (3.82). Chú ý rằng điều kiện (3.82) chỉ là điều kiện cần chứ không đủ, tức là không phải tất cả các nghiệm của (3.82) đều là điểm giao nhau giữa các nhánh quỹ đạo nghiệm số.

- 8) Quy tắc 8: Giao điểm $s_c = j\omega_c$ của quỹ đạo nghiệm số với trục ảo là nghiệm của:

$$A(j\omega_c) + k_c B(j\omega_c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Re}[A(j\omega_c)] + k_c \operatorname{Re}[B(j\omega_c)] = 0 \\ \operatorname{Im}[A(j\omega_c)] + k_c \operatorname{Im}[B(j\omega_c)] = 0 \end{cases}. \quad (3.84)$$

Tính đúng đắn của (3.84) được suy trực tiếp từ (3.78a).

Ví dụ 45: Cho hệ kín có cấu trúc sơ đồ khôi như trong hình 3.47 và

$$\tilde{G}_h(s) = S(s) \tilde{R}(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}.$$

Trước hết ta thấy $\tilde{G}_h(s)$ có 3 điểm cực là $p_1 = 0$, $p_2 = -2$ và $p_3 = -4$. Ngoài ra $\tilde{G}_h(s)$ không có điểm không. Do đó quỹ đạo nghiệm số mô tả hệ kín sẽ gồm ba nhánh và cả ba nhánh này đều kéo ra xa vô cùng khi $k \rightarrow \infty$. Ba nhánh quỹ đạo nghiệm đều có chứa những đoạn trên trục thực gồm đoạn thẳng giữa các điểm $p_1 = 0$, $p_2 = -2$ và nửa đường thẳng bên trái điểm $p_3 = -4$ (hình 3.49).

Đường tiệm cận của các nhánh đồng quy tại

$$r_0 = \frac{1}{3}(0-2-4) = -3$$

và hợp với trục thực các góc

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma_1 = \pi, \quad \gamma_2 = \frac{5\pi}{3}.$$

Các nhánh có giao điểm với nhau tại

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3s^2 + 12s + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow s_1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad s_2 = -2 - \frac{2}{\sqrt{3}},$$

trong đó chỉ có thực sự

$$s_1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx -0,85$$

là giao điểm vì "điểm tương là giao nhau" s_2 lại không thuộc về quỹ đạo nghiệm số (không trên một nhánh nào) nên bị loại.

Quỹ đạo nghiệm số cắt trực ảo tại

$$j\omega_c(j\omega_c + 2)(j\omega_c + 4) + k_c = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -6\omega_c^2 + k_c = 0 \\ -\omega_c^3 + 8\omega_c = 0 \end{cases}$$

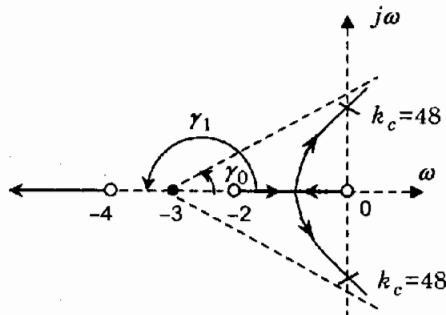
$$\Rightarrow \omega_c = 2\sqrt{2} \quad \text{và} \quad k_c = 48.$$

□

3.5.5 Mối liên hệ giữa chuẩn của tín hiệu và của hệ thống

Trong chương 1, mục 1.5 ta đã được biết khái niệm chuẩn tín hiệu, cũng như mối liên hệ qua lại giữa ảnh Fourier và ảnh Laplace của nó. Mục này sẽ giới thiệu thêm khái niệm chuẩn của một hệ thống và quan hệ của nó với chuẩn các tín hiệu vào ra.

Câu nói thêm là nội dung mục 3.5.5 có xuất xứ mang nhiều tính nghiên cứu hệ thống về mặt toán học hơn là điều khiển tuyến tính thông thường. Song gần hai thập kỷ



Hình 3.49: Minh họa ví dụ 45.

gần đây, trong điều khiển bền vững, đặc biệt là trong điều khiển H_∞ , trên nền tảng các kiến thức này người ta đã đạt được nhiều thành công trong việc xây dựng, tổng hợp bộ điều khiển có thể chịu đựng được nhiều lần cũng như miễn sai lệch mô hình đối tượng rộng. Bởi vậy, thiết nghĩ cũng là cần thiết nếu ta được trang bị thêm các kiến thức đó.

Cho hệ SISO có đầu vào $u(t)$ và đầu ra $y(t)$. Gọi G là mô hình mô tả hệ thống. Vậy G chính là ánh xạ biến đổi một tín hiệu $u(t)$ thành tín hiệu $y(t)$. Người ta biểu diễn khái niệm ánh xạ đó như sau:

$$G : u(t) \mapsto y(t). \quad (3.85)$$

Định nghĩa 3.8: Chuẩn $\|G\|$ của ánh xạ $G : u(t) \mapsto y(t)$ (cũng là chuẩn của hệ thống) là giá trị lớn nhất trong các tỷ số chuẩn bậc hai của tín hiệu $y(t)$ chia cho chuẩn bậc hai của tín hiệu $u(t)$, tức là

$$\|G\| = \sup_u \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}. \quad (3.86)$$

Ngoài ánh xạ G kiểu tổng quát (3.85) và nếu hệ là tuyến tính thì như ở chương 2 đã chỉ rõ, ta còn có nhiều dạng mô hình khác nhau cụ thể hơn để mô tả hệ thống, trong đó thường dùng nhất cho hệ SISO tuyến tính là hàm truyền đạt $G(s)$. Hàm truyền đạt $G(s) \in \mathbb{C}$ là hàm phức có đối số phức $s \in \mathbb{C}$ và là ảnh Laplace của hàm trọng lượng $g(t)$, trong đó bản thân $g(t)$ cũng lại là một mô hình mô tả hệ thống. Do $G(s)$ là một hàm số nên nó cũng có chuẩn hàm số định nghĩa tương tự như các công thức (1.40) ÷ (1.43) đã cho trong mục 1.5.1, chương 1, trang 40.

Khi hệ ổn định thì $G(s)$ là hàm bessel và chuẩn của hàm phức bessel $G(s)$ được xác định như sau:

$$1) \text{ Chuẩn bậc 2: } \|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega} = \|g(t)\|_2. \quad (3.87)$$

$$2) \text{ Chuẩn vô cùng: } \|G(s)\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)|. \quad (3.88)$$

Định lý 3.47: Chuẩn vô cùng $\|G(s)\|_\infty$ của hàm truyền đạt $G(s)$ định nghĩa theo (3.88) cũng chính là chuẩn ánh xạ $G : u(t) \mapsto y(t)$ định nghĩa theo (3.86)

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)| = \|G\| = \sup_u \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}.$$

Chứng minh:

Trước hết ta sẽ chỉ rằng $\|G(s)\|_\infty$ xác định theo (3.88) chính là một giá trị chặn trên của $\frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}$. Với công thức Parseval (định lý 1.1, mục 1.5.2, trang 42) ta có

$$\begin{aligned}\|y(t)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 |U(j\omega)|^2 d\omega \\ &\leq \|G(s)\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega = \|G(s)\|_\infty^2 \|u(t)\|_2^2\end{aligned}$$

trong đó $u(t)$ là một tín hiệu vào tùy ý. Vậy

$$\|G(s)\|_\infty \geq \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \quad \text{với mọi } u(t) \Rightarrow \|G(s)\|_\infty \geq \sup_u \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} = \|G\|. \quad (3.89a)$$

Bây giờ ta giả sử ω_0 là điểm tần số mà tại đó hàm $G(j\omega)$ có giá trị cực đại, tức là $\|G(s)\|_\infty = G(j\omega_0)$.

Xét những tín hiệu vào $\tilde{u}(t)$ có

$$\tilde{U}(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \Rightarrow \|\tilde{u}(t)\|_2 = 1$$

và gọi $\tilde{y}(t)$ là đáp ứng của hệ với những tín hiệu này. Khi đó thì

$$\begin{aligned}\|G\|^2 &= \sup_u \frac{\|y(t)\|_2^2}{\|u(t)\|_2^2} \\ &\geq \frac{\|\tilde{y}(t)\|_2^2}{\|\tilde{u}(t)\|_2^2} = \|\tilde{y}(t)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{Y}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 |\tilde{U}(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 \delta^2(\omega - \omega_0) d\omega = |G(j\omega_0)|^2 \quad (\text{công thức tích phân (1.2c)}) \\ &= \|G(s)\|_\infty^2.\end{aligned} \quad (3.89b)$$

Cuối cùng, so sánh (3.89a) với (3.89b) ta đến được điều phải chứng minh. \square

Trên tinh thần nội dung định lý 3.47, từ nay về sau ta sẽ ký hiệu $\|G\|_\infty$ thay vì $\|G\|$ để nhấn mạnh rằng nó được xác định theo cả hai cách (3.86) hoặc (3.88).

Để xác định mối liên hệ giữa chuẩn tín hiệu vào $u(t)$, tín hiệu ra $y(t)$ của hệ SISO với bản thân chuẩn của hệ thống là $\|G\|_\infty$ hoặc $\|G(s)\|_2$ hoặc $\|g(t)\|_1$ ta có định lý sau:

Định lý 3.48: Cho hệ SISO ổn định, có hàm truyền đạt hợp thức chặt $G(s)$. Giữa chuẩn tín hiệu vào $u(t)$, ra $y(t)$ và các chuẩn $\|g(t)\|_1$, $\|G(s)\|_2$, $\|G\|_\infty$ của hệ có quan hệ:

$$a) \|y(t)\|_\infty = \|G(s)\|_2 \|u(t)\|_2 \quad (3.90a)$$

$$b) \|y(t)\|_\infty = \|g(t)\|_1 \|u(t)\|_\infty. \quad (3.90b)$$

$$c) \|y(t)\|_2 = \|G\|_\infty \|u(t)\|_2. \quad (3.90c)$$

Chứng minh:

Để chứng minh (a) ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz:

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau \right| \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t-\tau)d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau)d\tau \right)^{1/2} = \|g(t)\|_2 \|u(t)\|_2 = \|G(s)\|_2 \|u(t)\|_2. \end{aligned}$$

Do bất đẳng thức trên đúng với mọi tín hiệu vào $u(t)$, ra $y(t)$ nên

$$\|y(t)\|_\infty \leq \|G(s)\|_2 \|u(t)\|_2. \quad (3.91a)$$

Mặt khác nếu ta chọn tín hiệu vào $\tilde{u}(t) = \frac{g(-t)}{\|g(t)\|_2}$ thì do $\|\tilde{u}(t)\|_2 = 1$ và tín hiệu ra $\tilde{y}(t)$ có $\tilde{y}(0) = \|G(s)\|_2$ nên

$$\|\tilde{y}(t)\|_\infty \geq \|G(s)\|_2 = \|G(s)\|_2 \|\tilde{u}(t)\|_2. \quad (3.91b)$$

So sánh (3.91a) với (3.91b) ta có được đ.p.c.m.

Tương tự ta cũng sẽ chứng minh (b). Với mọi tín hiệu vào ra $u(t), y(t)$ thì

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)d\tau \right| \|u(t)\|_\infty = \|g(t)\|_1 \|u(t)\|_\infty \\ \Rightarrow \|y(t)\|_\infty &\leq \|g(t)\|_1 \|u(t)\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.91c)$$

Nếu chọn $\tilde{u}(t-\tau) = \text{sgn } g(\tau)$ thì do $\|\tilde{u}(t)\|_\infty = 1$, tín hiệu ra $\tilde{y}(t)$ sẽ thỏa mãn

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\tilde{u}(t-\tau)d\tau = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)d\tau \right| = \|g(t)\|_1 = \|g(t)\|_1 \|\tilde{u}(t)\|_\infty = \|g(t)\|_1 \\ \Rightarrow \|\tilde{y}(t)\|_\infty &\geq \|g(t)\|_1 = \|g(t)\|_1 \|\tilde{u}(t)\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.91d)$$

So sánh (3.91c) với (3.91d) ta có được đ.p.c.m.

Câu (c) chính là hệ quả của định lý 3.47. Thật vậy, do

$$\|G\|_\infty = \sup_u \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \geq \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \quad \text{nên} \quad \|G\|_\infty \|u(t)\|_2 \geq \|y(t)\|_2. \quad (3.91e)$$

Mặt khác nếu chọn $\tilde{u}(t)$ có $\tilde{U}(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ thì với $\|\tilde{u}(t)\|_2 = 1$ ta còn được

$$\|G\|_\infty^2 \|\tilde{u}(t)\|_2^2 = \|G\|_\infty^2 \geq \|\tilde{y}(t)\|_2^2 \quad (\text{xem phần chứng minh định lý 3.47}). \quad (3.91f)$$

Kết hợp (3.91e) với (3.91f) ta có đ.p.c.m. □

Ví dụ 46: Cho hệ mô tả bởi hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{s}{1 + 2Ts + s^2}.$$

Giả sử rằng trong tín hiệu đầu vào $u(t)$ có lắn nhiễu $n(t)$ kiểu bù cộng với nồng lượng $\|n(t)\|_2 \leq 0,4$. Hãy xác định sự ảnh hưởng của nhiễu đó đối với tín hiệu ra $y(t)$.

Gọi thành phần nhiễu có lắn trong đầu ra là $y_n(t)$ thì theo định lý 3.48 câu c), nồng lượng của thành phần đó sẽ được đánh giá bởi

$$\|y_n(t)\|_2 = \|G\|_\infty \|n(t)\|_2 \leq 0,4 \|G\|_\infty$$

Thay $\|G\|_\infty = \frac{1}{2T}$ (xác định nhờ biểu đồ Bode) ta được $\|y_n(t)\|_2 \leq \frac{0,2}{T}$.

Để đánh giá $\|y_n(t)\|_\infty$ ta sử dụng định lý 3.48 câu a)

$$\|y_n(t)\|_\infty = \|G(s)\|_2 \|n(t)\|_2 \leq 0,4 \|G(s)\|_2.$$

Thay $\|G(s)\|_2 = \frac{1}{2\sqrt{T}}$ (xác định nhờ phương pháp Krasowski – xem ví dụ 41) ta được

$$\|y_n(t)\|_\infty \leq \frac{0,2}{\sqrt{T}}.$$

□

3.6 Phân tích hệ không liên tục

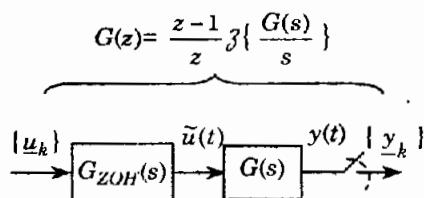
Trong phần này ta sẽ phân tích các hệ thống tuyến tính có tín hiệu đầu vào không liên tục dạng xung $\{\underline{u}_k\}$ đã được đưa qua khâu ZOH thành $\tilde{u}(t)$ dạng liên tục-rồi rạc và tín hiệu ra $\{\underline{y}_k\}$ là không liên tục dạng xung. Hệ có thể là MIMO hoặc SISO.

Mục 2.4 của chương 2 (trang 151) đã cung cấp những hình thái khác nhau mô tả hệ thống đó. Hai hình thái cơ bản trong số chúng là:

- 1) Hệ SISO với sơ đồ nguyên lý cơ bản như ở hình 3.50 sẽ có hàm truyền đạt

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \beta \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \\ &= \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}, \end{aligned}$$

trong đó $z = e^{sT_a}$ và T_a là chu kỳ trích mẫu tín hiệu, tức là $\underline{u}_k = \underline{u}(kT_a)$ cũng như $\underline{y}_k = \underline{y}(kT_a)$.



Hình 3.50: Sơ đồ khối hệ không liên tục.

- 2) Mô tả với mô hình trạng thái: Cũng ở mục 2.4.4 thuộc chương 2, trang 161 ta đã được biết là hệ MIMO với tín hiệu vào $\underline{u}(t)$ dạng liên tục-rời rạc

$$\underline{\tilde{u}}(t) = \underline{u}_k = \underline{u}(kT_a) \quad \text{khi} \quad kT_a \leq t < (k+1)T_a$$

và tín hiệu ra $\{\underline{y}_k\}$ dạng xung sẽ được mô tả bởi mô hình trạng thái

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= \tilde{A}\underline{x}_k + \tilde{B}\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= \tilde{C}\underline{x}_k + \tilde{D}\underline{u}_k\end{aligned}\tag{3.92}$$

Nếu như trước khi trích mẫu tín hiệu đầu ra hệ có mô hình liên tục

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{x}}{dt} &= A\underline{x} + Bu \\ \underline{y} &= C\underline{x} + Du\end{aligned}\tag{3.93}$$

thì giữa các ma trận $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ của (3.92) với A, B, C, D của (3.93) có mối quan hệ (xem lại mục 2.4.4):

$$\tilde{A} = e^{AT_a}, \quad \tilde{B} = \int_0^{T_a} e^{At} dt \cdot B, \quad \tilde{C} = C \quad \text{và} \quad \tilde{D} = D.\tag{3.94}$$

Với hệ SISO thì từ mô hình trạng thái (3.92), trong đó \underline{u}_k được viết thành u_k và \underline{y}_k thành y_k vì các vector $\underline{u}_k, \underline{y}_k$ chỉ có một phần tử, ta sẽ suy ra được hàm truyền đạt $G(z)$ bằng cách chuyển hai vế của phương trình thứ nhất trong (3.92) sang miền phức nhờ toán tử Z , trong đó có để ý tới tính chất dịch phải (mục 1.4.2, trang 26):

$$z\underline{X}(z) = \tilde{A}\underline{X}(z) + \tilde{B}U(z) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{X}(z) = (zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}U(z)$$

sau đó thay vào phương trình thứ hai cũng đã được chuyển sang miền phức:

$$\begin{aligned}Y(z) &= \tilde{C}\underline{X}(z) + \tilde{D}U(z) = [\tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}]U(z) \\ \Leftrightarrow G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}.\end{aligned}\tag{3.95}$$

Ngược lại, cũng với hệ SISO, thì từ mô hình hàm truyền đạt

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} = \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 z + \dots + \tilde{b}_{n-1} z^{n-1}}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n} + d,$$

trong đó

$$\tilde{b}_i = \frac{b_i - a_i b_n}{a_n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{và} \quad d = \frac{b_n}{a_n}.$$

Ta có được

$$Y(z) - dU(z) = \left[\frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 z + \dots + \tilde{b}_{n-1} z^{n-1}}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n} + d \right] U(z).$$

Đặt biến trạng thái

$$X_n(z) = Y(z) - dU(z)$$

ta đi đến

$$\begin{aligned} X_n + a_{n-1} \frac{1}{z} X_n + \cdots + a_1 \frac{1}{z} X_n + a_0 \frac{1}{z} X_n &= U + \tilde{b}_{n-1} \frac{1}{z} U + \cdots + \tilde{b}_1 \frac{1}{z} U + \tilde{b}_0 \frac{1}{z} U \\ \Leftrightarrow X_n &= \left[\underbrace{\cdots \left[\underbrace{\tilde{b}_0 U - a_0 X_n}_{X_1} \right] \frac{1}{z} + \tilde{b}_1 U - a_1 X_n}_{X_2} \right] \frac{1}{z} + \cdots + \left[\underbrace{\tilde{b}_{n-1} U - a_{n-1} X_n}_{X_{n-1}} \right] \frac{1}{z} \end{aligned}$$

trong đó

$$X_1 = \frac{1}{z} (\tilde{b}_0 U - a_0 X_n)$$

$$X_2 = \frac{1}{z} (X_1 + \tilde{b}_1 U - a_1 X_n)$$

⋮

$$X_n = \frac{1}{z} (X_{n-1} + \tilde{b}_{n-1} U - a_{n-1} X_n).$$

Chuyển toàn bộ các đẳng thức trên sang miền thời gian và viết lại dưới dạng ma trận ta sẽ có mô hình trạng thái dạng *chuẩn quan sát* như sau:

$$\underline{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \underline{x}_k + \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-2} \\ \tilde{b}_{n-1} \end{pmatrix}}_{\tilde{B}} u_k, \quad (3.96a)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{C}} \underline{x}_k + \tilde{D} u_k \quad \text{với} \quad \tilde{D} = d = \frac{b_n}{a_n}. \quad (3.96b)$$

3.6.1 Quá trình tự do và tính ổn định

Từ mô hình (3.92) ta suy ra được (xem lại định lý 2.26, trang 163)

$$\underline{x}_k = \tilde{A}^k \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}^{k-i-1} \tilde{B} u_i$$

Do đó quá trình tự do của hệ sẽ là (quá trình tự do là quá trình mô tả hệ di từ điểm trạng thái đầu \underline{x}_0 và không bị kích thích):

$$\underline{x}_k = \tilde{A}^k \underline{x}_0.$$

Hệ ổn định khi quá trình tự do tắt dần. Xuất phát từ mô hình liên tục (3.93) mà từ đó thông qua việc trích mẫu tín hiệu ta được mô hình rời rạc (3.92) thì quá trình tự do của hệ rời rạc cũng chính là những giá trị trích mẫu của quá trình tự do hệ liên tục

$$\begin{aligned} \underline{y}_t(t) &= Ce^{At} \underline{x}_0 \Rightarrow x_t(t) = e^{At} \underline{x}_0 \\ &\Rightarrow \underline{x}_k = \underbrace{e^{AkT_a}}_{\tilde{A}^k} \underline{x}_0 \end{aligned} \quad (3.97)$$

(định lý 3.1, trang 176). Do đó dãy $\{\underline{x}_k\}$ tắt dần khi $x_t(t)$ tắt dần, hay A là ma trận bên. Nếu gọi s_i là một giá trị riêng của A thì thông qua quan hệ (3.97) hay $\tilde{A} = e^{AT_a}$ mà

$$z_i = e^{s_i T_a}$$

cũng là một giá trị riêng của \tilde{A} . Bởi vậy khi A là ma trận bên thì các giá trị riêng của \tilde{A} phải thỏa mãn

$$|z_i| = |e^{s_i T_a}| < 1.$$

Ta di đến:

Định lý 3.49: Hệ MIMO có tín hiệu vào liên tục-rời rạc $\underline{u}(t)$ tín hiệu ra $\{\underline{y}_k\}$ dạng xung với mô hình trạng thái (3.92), sẽ ổn định khi và chỉ khi tất cả các giá trị riêng z_i của ma trận \tilde{A} nằm bên trong đường tròn đơn vị, tức là $|z_i| < 1$.

Đặc biệt, nếu hệ (3.92) là SISO thì do có quan hệ (3.95), đa thức mẫu số của hàm truyền đạt $G(z)$ cũng chính là $\det(zI - \tilde{A})$. Do đó định lý 3.49 có dạng phát biểu tương đương cho hệ SISO như sau:

Định lý 3.50: Hệ SISO có tín hiệu vào ra không liên tục với hàm truyền đạt $G(z)$ sẽ ổn định khi và chỉ khi tất cả các điểm cực z_i của $G(z)$ nằm bên trong đường tròn đơn vị, tức là $|z_i| < 1$.

Trên tinh thần nội dung hai định lý trên, để kiểm tra tính ổn định của một hệ không liên tục, ta chỉ cần kiểm tra xem nghiệm của đa thức đặc tính $\det(zI - \tilde{A})$ hay nghiệm của đa thức mẫu số hàm truyền đạt $G(z)$ có nằm bên trong đường tròn đơn vị hay không.

Định nghĩa 3.9: Một đa thức

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

nếu có tất cả các nghiệm z_i , $i=1, 2, \dots, n$ nằm bên trong đường tròn đơn vị ($|z_i| < 1$), được gọi là *đa thức đường tròn đơn vị*.

3.6.2 Tiêu chuẩn xét tính ổn định Schur–Cohn–Jury

Xét đa thức $A(z)$ bậc n và giả sử $z_i, i=1, 2, \dots, n$ là nghiệm của nó. Theo định lý Vieta, các hệ số của đa thức $A(z)$ sẽ có quan hệ với nghiệm z_i của nó như sau:

$$\begin{aligned} A(z) &= a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = a_n(z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n) \\ &= a_n \left[z^n - z^{n-1} \sum_{i=1}^n z_i + \dots + (-1)^n \prod_{i=1}^n z_i \right] \\ \Rightarrow a_{n-1} &= -a_n \sum_{i=1}^n z_i, \quad a_0 = (-1)^n a_n \prod_{i=1}^n z_i \end{aligned}$$

Định lý 3.51 (điều kiện cần): Nếu đa thức

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

là đa thức đường tròn đơn vị thì $|a_0| < |a_n|$.

Chứng minh:

Từ giả thiết $|z_i| < 1$ với mọi i ta có $\prod_{i=1}^n |z_i| < 1$ nên cũng có

$$|a_0| = |a_n \prod_{i=1}^n z_i| = |a_n| \cdot |\prod_{i=1}^n z_i| = |a_n| \cdot \prod_{i=1}^n |z_i| < |a_n|$$

$$\Rightarrow |a_0| < |a_n|. \quad \square$$

Chú ý: Định lý 3.51 chỉ là một tiêu chuẩn giúp xác định nhanh một đa thức $A(z)$ có thể là đa thức đường tròn đơn vị hay không chứ chưa đủ để khẳng định nó chắc chắn sẽ là đa thức đường tròn đơn vị. Ví dụ sau minh họa điều đó.

Ví dụ 47: Đa thức

$$A(z) = 0,8 + 4z + 0,2z^2 + z^3 = (z+2j)(z-2j)(z+0,2)$$

có $a_0 = 0,8$ và $a_3 = 1$ thỏa mãn $|a_0| < |a_3|$ nhưng lại không phải là đa thức đường tròn đơn vị vì có hai nghiệm $z_{1,2} = \pm 2j$ nằm ngoài đường tròn đơn vị. \square

Định lý 3.52 (Schur–Cohn): Để đa thức

$$A_0(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

là đa thức đường tròn đơn vị thì cần và đủ là

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| < 1 \quad \text{và} \quad A_1(z) = A_0(z) - \frac{a_0}{a_n} D_0(z)$$

cũng là đa thức đường tròn đơn vị, trong đó

$$D_0(z) = z^n A_0(z^{-1}) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

Chứng minh:

Xét đa thức phụ thuộc tham số ε

$$C(z, \varepsilon) = A_0(z) - \varepsilon D_0(z)$$

Giả sử rằng $C(z, \varepsilon)$ có nghiệm z_k nằm trên đường tròn đơn vị ($|z_k| = 1$). Vậy thì do

$$\begin{aligned} |D_0(z_k)| &= |A_0(z_k^{-1})| = |A_0(\bar{z}_k)| & \bar{z}_k \text{ là giá trị liên hợp của } z_k \\ &= |\overline{A}_0(z_k)| = |A_0(z_k)| & \overline{A}_0(z_k) \text{ là giá trị liên hợp của } A_0(z_k) \end{aligned}$$

nên ta có

$$0 = |C(z_k, \varepsilon)| = |A_0(z_k)| \cdot |1 - \varepsilon|.$$

Nói cách khác, khi $\varepsilon \neq 1$ thì mọi nghiệm z_k với $|z_k| = 1$ của $C(z, \varepsilon)$ cũng là nghiệm của $A_0(z)$. Ngược lại, nếu z_k với $|z_k| = 1$ là nghiệm của $A_0(z)$ thì do

$$0 = A_0(z_k) = \frac{A_0(z_k)}{z_k^n} = A_0(z_k^{-1}) = z_k^n A_0(z_k^{-1}) = D_0(z_k)$$

nên z_k cũng là nghiệm của $C(z, \varepsilon)$.

Ta đã đến kết luận rằng với mọi $\varepsilon \neq 1$ nghiệm nằm trên đường tròn đơn vị của đa thức $C(z, \varepsilon)$ cũng chính là nghiệm của $A_0(z)$ và ngược lại. Do nghiệm của $A_0(z)$ không phụ thuộc ε nên các nghiệm z_k với $|z_k| = 1$ của $C(z, \varepsilon)$ cũng không phụ thuộc ε khi mà $\varepsilon \neq 1$. Kết luận này chỉ rõ số các nghiệm nằm trên đường tròn đơn vị của $C(z, \varepsilon)$ là một hằng số với mọi $\varepsilon \neq 1$.

Bây giờ ta cho ε chạy trong khoảng $[0, 1]$.

- Với $\varepsilon=0$ thì do $C(z, 0) = A_0(z)$ nên tất cả nghiệm của $A_0(z)$ cũng là nghiệm của $C(z, 0)$, hay số các nghiệm của $A_0(z)$ nằm trong đường tròn đơn vị cũng bằng số các nghiệm nằm trong đường tròn đơn vị của $C(z, 0)$. Gọi số các nghiệm đó là l .
- Tăng dần ε và giả sử trong quá trình tăng dần ε như vậy số các nghiệm nằm bên trong đường tròn đơn vị là l của $C(z, \varepsilon)$ bị thay đổi, tức là có một nghiệm từ bên trong di ra ngoài hoặc có thêm nghiệm từ bên ngoài di vào trong đường tròn đơn vị. Do nghiệm của $C(z, \varepsilon)$ thay đổi liên tục theo ε nên bắt buộc trong quá trình dịch chuyển đó phải có lúc chúng nằm trên đường tròn đơn vị. Điều này đã làm cho số các nghiệm nằm trên đường tròn đơn vị của $C(z, \varepsilon)$ đã có lúc bị thay đổi (lớn hơn hoặc nhỏ hơn l). Điều này trái ngược với kết luận trên. Vậy điều giả sử là sai. Nói cách khác là khi $0 \leq \varepsilon < 1$, số các nghiệm nằm bên trong đường tròn đơn vị của $C(z, \varepsilon)$ là l phải là một hằng số và bằng số nghiệm nằm bên trong đường tròn đơn vị của $A_0(z)$.

Chọn $\varepsilon = \left| \frac{a_0}{a_n} \right|$ sẽ có $C(z, \varepsilon) = A_1(z)$. Bởi vậy nếu $A_0(z)$ là đa thức đường tròn đơn vị thì

do $\varepsilon < 1$, $A_1(z)$ cũng là đa thức đường tròn đơn vị. Ngược lại khi $A_1(z)$ là đa thức đường tròn đơn vị và $\varepsilon < 1$ thì $A_0(z)$ cũng là đa thức đường tròn đơn vị giống như $A_1(z)$. \square

Đa thức $A_1(z)$ trong định lý 3.52 còn viết được thành

$$\begin{aligned} A_1(z) &= A_0(z) - \frac{a_0}{a_n} D_0(z) = A_0(z) - \frac{a_0}{a_n} z^n A_0(z^{-1}) \\ &= z \left[\left(a_1 - \frac{a_0}{a_n} a_{n-1} \right) + \left(a_2 - \frac{a_0}{a_n} a_{n-2} \right) z + \cdots + \left(a_n - \frac{a_0}{a_n} a_0 \right) z^{n-1} \right] \end{aligned}$$

do đó $A_1(z)$ sẽ là đa thức đường tròn đơn vị khi và chỉ khi đa thức có bậc thấp hơn

$$p_1(z) = \left(a_1 - \frac{a_0}{a_n} a_{n-1} \right) + \left(a_2 - \frac{a_0}{a_n} a_{n-2} \right) z + \cdots + \left(a_n - \frac{a_0}{a_n} a_0 \right) z^{n-1}$$

cũng là đa thức đường tròn đơn vị. Với nhận xét như vậy Jury đã xây dựng thuật toán kiểm tra xem

$$A_0(z) = a_0^{(0)} + a_1^{(0)} z + \cdots + a_n^{(0)} z^n \quad (3.98)$$

có phải là đa thức đường tròn đơn vị hay không gồm hai bước như sau:

1) HẠ DẦM BẬC CỦA $A_0(z)$

$$p_1(z) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} z + \cdots + a_{n-1}^{(1)} z^{n-1}$$

với $a_i^{(1)} = a_{i+1}^{(0)} - \frac{a_0^{(0)}}{a_n^{(0)}} a_{n-i-1}^{(0)}$, $i=0, 1, \dots, n-1$.

$$p_2(z) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} z + \cdots + a_{n-2}^{(2)} z^{n-2}$$

với $a_i^{(2)} = a_{i+1}^{(1)} - \frac{a_0^{(1)}}{a_{n-1}^{(1)}} a_{n-i-2}^{(1)}$, $i=0, 1, \dots, n-2$.

\vdots

$$p_{n-1}(z) = a_0^{(n-1)} + a_1^{(n-1)} z$$

với $a_i^{(n-1)} = a_{i+1}^{(n-2)} - \frac{a_0^{(n-2)}}{a_2^{(n-2)}} a_{1-i}^{(n-2)}$, $i=0, 1$.

2) Kiểm tra điều kiện cần và đủ $\lambda_i = \left| \frac{a_0^{(i)}}{a_{n-i}^{(i)}} \right| < 1$, với mọi $i=0, 1, \dots, n-1$.

Thuật toán trên sẽ rất tiện lợi cho việc sử dụng khi nó được biểu diễn dưới dạng bảng như sau (bảng Schur–Cohn–Jury):

	$a_0^{(0)}$	$a_1^{(0)}$	$a_2^{(0)}$...
$\lambda_0 = \frac{a_0^{(0)}}{a_n^{(0)}}$	$a_n^{(0)}$	$a_{n-1}^{(0)}$	$a_{n-2}^{(0)}$...
	$a_0^{(1)} = a_1^{(0)} - \lambda_0 a_{n-1}^{(0)}$	$a_1^{(1)} = a_2^{(0)} - \lambda_0 a_{n-2}^{(0)}$	$a_2^{(1)} = a_3^{(0)} - \lambda_0 a_{n-3}^{(0)}$...
$\lambda_1 = \frac{a_0^{(1)}}{a_{n-1}^{(1)}}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	$a_{n-3}^{(1)}$...
	$a_0^{(2)} = a_1^{(1)} - \lambda_1 a_{n-2}^{(1)}$	$a_1^{(2)} = a_2^{(1)} - \lambda_1 a_{n-3}^{(1)}$	$a_2^{(2)} = a_3^{(1)} - \lambda_1 a_{n-4}^{(1)}$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	$a_0^{(n-1)}$	$a_1^{(n-1)}$	0	...
$\lambda_{n-1} = \frac{a_0^{(n-1)}}{a_1^{(n-1)}}$	$a_1^{(n-1)}$	$a_0^{(n-1)}$	0	...

Với bảng trên, đa thức (3.98) sẽ là đa thức đường tròn đơn vị khi và chỉ khi giá trị tuyệt đối của các số hạng λ_i trong cột đầu tiên nhỏ hơn 1.

Ví dụ 48: Cho đa thức

$$A(z) = -1 - 7z - 8z^2 + 28z^3 + 48z^4.$$

Lập bảng Schur–Cohn–Jury

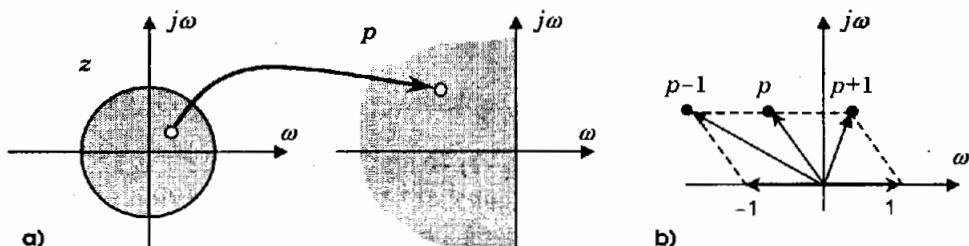
	-1	-7	-8	28	48
-0,02	48	28	-8	-7	-1
	-6,42	-8,17	27,85	47,98	
-0,14	47,98	27,85	-8,17	-6,42	
	-4,45	26,76	47,12		
-0,1	47,12	26,76	-4,45		
	29,28	46,7			
0,63	46,7	29,28			

Do các giá trị cột đầu đều có trị tuyệt đối nhỏ hơn 1 nên đa thức đã cho là đa thức đường tròn đơn vị. \square

3.6.3 Sử dụng các tiêu chuẩn xét tính ổn định hệ liên tục

Trong mục 3.2 ta đã làm quen với rất nhiều tiêu chuẩn xét tính ổn định hệ liên tục trên cơ sở khảo sát vùng chứa nghiệm đa thức đặc tính của nó (vùng chứa điểm cực của hệ), trong đó các tiêu chuẩn như của Routh-Hurwitz, Liénard-Chipart là khá thông dụng. Các tiêu chuẩn này có nhiệm vụ xác định xem nghiệm đa thức đặc tính có nằm bên trái trục ảo hay không mà không cần phải trực tiếp đi tìm các nghiệm đó.

Khác với tiêu chuẩn xét tính ổn định hệ liên tục, việc xét tính ổn định hệ không liên tục thông qua sự phân bố nghiệm đa thức đặc tính của hệ lại phải chỉ rõ nghiệm của đa thức đặc tính có nằm trong đường tròn đơn vị hay không. Bởi vậy muốn sử dụng được những tiêu chuẩn xét tính ổn định hệ liên tục cho việc xét tính ổn định hệ không liên tục thì cần thiết ta phải tìm được một ánh xạ (phép biến đổi một-một) các điểm z nằm bên trong đường tròn đơn vị thành một điểm p nằm bên trái trục ảo trong mặt phẳng phức (hình 3.51a). Chú ý rằng ở đây ta ký hiệu đổi số là p chứ không phải là s như ở hệ liên tục là để nhấn mạnh rằng phép biến đổi đó chỉ có ý nghĩa cho việc xét tính ổn định chứ hoàn toàn không phải là một ánh xạ chuyển đổi mô hình không liên tục thành mô hình liên tục tương đương, chẳng hạn như không thể bằng phép biến đổi này để chuyển hàm truyền đạt không liên tục $G(z)$ thành hàm truyền đạt liên tục $G(s)$.



Hình 3.51: Phép biến đổi để sử dụng các tiêu chuẩn xét ổn định hệ liên tục cho việc xét tính ổn định hệ không liên tục

Hình 3.51b) mô tả một phép biến đổi như vậy. Nếu như điểm p nằm bên trái trục ảo thì vector $p+1$ sẽ có độ dài nhỏ hơn độ dài của vector $p-1$, do đó tỷ số

$$z = \frac{p+1}{p-1} \quad (3.99a)$$

sẽ cho ra một vector z có độ dài nhỏ hơn 1, hay z sẽ nằm trong đường tròn đơn vị. Ngược lại, khi p nằm trên hoặc bên phải trục ảo thì do độ dài vector $p+1$ sẽ bằng hoặc lớn hơn độ dài của vector $p-1$, dẫn đến z theo (3.99a) nằm trên hoặc ngoài đường tròn đơn vị.

Phép biến đổi (3.99a) là phép biến đổi một-một, tức là ánh xạ ngược của nó

$$p = \frac{z+1}{z-1} \quad (3.99b)$$

cũng sẽ chuyển đổi một điểm z nằm bên trong đường tròn đơn vị thành một điểm p nằm bên trái trục ảo. Người ta thường gọi (3.99) là *ánh xạ lưỡng tuyến tính*.

Với ánh xạ lưỡng tuyến tính (3.99) thì:

Định lý 3.53: Tất cả các nghiệm của đa thức

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad (3.100)$$

nằm bên trong đường tròn đơn vị khi và chỉ khi các nghiệm của

$$A^*(p) = a_0 + a_1 \frac{p+1}{p-1} + \dots + a_n \left(\frac{p+1}{p-1} \right)^n$$

nằm bên trái trục ảo.

Biến đổi chút ít $A^*(p)$ thành

$$(p-1)^n A^*(p) = a_0(p-1)^n + a_1(p-1)^{n-1}(p+1) + \dots + a_n(p+1)^n \quad (3.101)$$

thì định lý 3.53 trên còn được phát biểu lại như sau:

Định lý 3.54: Để (3.100) là đa thức đường tròn đơn vị thì cần và đủ là (3.101) phải là đa thức Hurwitz.

Ví dụ 49: Xét đa thức

$$A(z) = -0,1 - 0,5z + 0,2z^2 + z^3. \quad (3.102a)$$

Tương ứng với nó là đa thức

$$\begin{aligned} (p-1)^3 A^*(p) &= -0,1(p-1)^3 - 0,5(p-1)^2(p+1) + 0,2(p-1)(p+1)^2 + (p+1)^3 \\ &= 0,4 + 3p + 4p^2 + 0,6p^3. \end{aligned} \quad (3.102b)$$

Lập các ma trận

$$H_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0,6 & 0 \\ 0,4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0,6 \\ 0,4 & 4 \end{pmatrix}, \quad H_1 = 3$$

Do có

$$\det(H_3) = 7,056 > 0, \quad \det(H_2) = 11,76 > 0, \quad \det(H_1) = 3 > 0$$

nên (3.102b) là đa thức Hurwitz. Suy ra (3.102a) là đa thức đường tròn đơn vị.

Khẳng định trên có thể được kiểm chứng lại trực tiếp từ (3.102a):

$$\begin{aligned} A(z) &= -0,1 - 0,5z + 0,2z^2 + z^3 = (z^2 - 0,5)(z + 0,2) \\ &= (z - \frac{1}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{2}})(z + 0,2). \end{aligned}$$

□

Ví dụ 50: Đa thức bậc 2 dạng tổng quát

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$$

có

$$\begin{aligned} (p-1)^2 A^*(p) &= a_0(p-1)^2 - a_1(p-1)(p+1) + a_2(p+1)^2 \\ &= (a_0 - a_1 + a_2) + 2(a_0 - a_2)p + (a_0 + a_1 + a_2)p^2. \end{aligned}$$

Bởi vậy nó sẽ là đa thức đường tròn đơn vị khi và chỉ khi các hệ số

$$(a_0 + a_1 + a_2), \quad (a_0 - a_2), \quad (a_0 + a_1 + a_2)$$

cùng dấu và khác 0 (theo định lý 3.10, trang 192). \square

3.6.4 Tính điều khiển được và quan sát được

Cho hệ MIMO có r tín hiệu vào dạng liên tục-rời rạc được viết chung lại thành vector $\underline{\tilde{u}}(t)$

$$\underline{\tilde{u}}(t) = \underline{u}_k = \underline{u}(kT_a) \quad \text{khi} \quad kT_a \leq t < (k+1)T_a$$

và r tín hiệu ra dạng xung cũng được viết chung thành vector $\{\underline{y}_k\}$, mô tả bởi mô hình trạng thái bậc n (có n biến trạng thái)

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \tilde{A}\underline{x}_k + \tilde{B}\underline{u}_k \quad \text{với} \quad \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}, \tilde{C} \in \mathbb{R}^{s \times n}, \tilde{D} \in \mathbb{R}^{s \times r}. \\ \underline{y}_k &= \tilde{C}\underline{x}_k + \tilde{D}\underline{u}_k \end{aligned} \quad (3.103)$$

Định nghĩa 3.10: Hệ (3.103) với bậc n được gọi là

- điều khiển được* nếu ứng với mọi điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ cho trước bao giờ ta cũng tìm được dãy gồm hữu hạn N các giá trị tín hiệu $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{N-1}\}$ để đưa được hệ đi từ \underline{x}_0 về tới gốc tọa độ $\underline{0}$.
- đạt tới được* nếu ứng với mọi điểm trạng thái cuối $\underline{x}_N \in \mathbb{R}^n$ cho trước bao giờ ta cũng tìm được dãy gồm hữu hạn N giá trị tín hiệu $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{N-1}\}$ để đưa được hệ từ gốc tọa độ $\underline{0}$ tới được \underline{x}_N .
- điều khiển được hoàn toàn* nếu ứng với mọi điểm trạng thái đầu $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ và mọi điểm trạng thái cuối cho trước $\underline{x}_N \in \mathbb{R}^n$ bao giờ ta cũng tìm được dãy gồm hữu hạn N các giá trị tín hiệu $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{N-1}\}$ để đưa được hệ đi từ \underline{x}_0 về tới được \underline{x}_N .

Theo định nghĩa vừa nêu thì rõ ràng hệ sẽ điều khiển được hoàn toàn khi và chỉ khi nó đồng thời điều khiển được và đạt tới được.

Từ mô hình (3.103) cho hệ MIMO tham số hằng ta có:

$$\begin{aligned}
\underline{x}_{k+1} &= \tilde{A} \underline{x}_k + \tilde{B} \underline{u}_k = \tilde{A} (\tilde{A} \underline{x}_{k-1} + \tilde{B} \underline{u}_{k-1}) + \tilde{B} \underline{u}_k \\
&= \tilde{A}^2 \underline{x}_{k-1} + (\tilde{A}\tilde{B} \underline{u}_{k-1} + \tilde{B} \underline{u}_k) \\
&\vdots \\
&= \tilde{A}^{k+1} \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^k \tilde{A}^{k-i} \tilde{B} \underline{u}_i. \tag{3.104}
\end{aligned}$$

Bởi vậy, để kiểm tra tính điều khiển được, ta chỉ cần xác định xem phương trình (3.104) ứng với $\underline{x}_N = \underline{0}$ và \underline{x}_0 tùy ý

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}^N \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{A}^{N-i-1} \tilde{B} \underline{u}_i = \underline{0} \\
\Leftrightarrow \quad -\tilde{A}^N \underline{x}_0 &= \begin{pmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{N-1}\tilde{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_0 \\ \vdots \\ \underline{u}_{N-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

có nghiệm $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{N-1}\}$ hay không.

Xem \tilde{A}^N và $(\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{N-1}\tilde{B})$ là hai ánh xạ tuyến tính thì rõ ràng (3.105) có nghiệm với mọi $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi miền ảnh của chúng trùng nhau:

$$\text{Im}(\tilde{A}^N) = \text{Im}(\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{N-1}\tilde{B}). \tag{3.105}$$

Nhưng theo định lý Cayley–Hamilton (định lý 2.12, trang 138) thì khi $N \geq n$, ma trận \tilde{A}^N sẽ phụ thuộc tuyến tính theo $\tilde{A}, \tilde{A}^2, \dots, \tilde{A}^{n-1}$. Do đó việc có nhiều hơn n giá trị tín hiệu điều khiển là không cần thiết. Vì vậy (3.105) sẽ tương đương với

$$\dim \text{Im}(\tilde{A}^N) = \dim \text{Im}(\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}).$$

Ta đi đến:

Định lý 3.55: Cần và đủ để hệ (3.103) điều khiển được là:

$$\text{Rank}(\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) = \text{Rank}(\tilde{A}^n). \tag{3.106}$$

Tương tự, cũng từ (3.104) thì để kiểm tra tính đạt-tối được của hệ (3.103) ta phải kiểm tra xem phương trình

$$\underline{x}_N = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{A}^{N-i-1} \tilde{B} \underline{u}_i \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x}_N = \begin{pmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{N-1}\tilde{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_0 \\ \vdots \\ \underline{u}_{N-1} \end{pmatrix}$$

có nghiệm với mọi $\underline{x}_n \in \mathbb{R}^n$ hay không.

Suy ra:

Định lý 3.56: Cần và đủ để hệ (3.103) đạt tới được là:

$$\text{Rank}(\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \dots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) = n. \quad (3.107)$$

So sánh (3.106) và (3.107) ta nhận xét thấy:

- Điều kiện (3.106) để hệ điều khiển được và (3.107) để hệ đạt tới được chỉ tương đương với nhau khi $\text{Rank}(\tilde{A}^n) = n$, tức là khi ma trận \tilde{A} không suy biến. Nói cách khác, chỉ khi \tilde{A} không suy biến thì giống như ở hệ liên tục, hệ sẽ điều khiển được hoàn toàn nếu nó điều khiển được.
- Nếu \tilde{A} suy biến thì $\text{Rank}(\tilde{A}^n) < n$. Do đó khi hệ đạt tới được thì nó cũng sẽ điều khiển được, nhưng ngược lại nếu hệ chỉ điều khiển được thì không có nghĩa là nó cũng đạt tới được và do đó cũng không điều khiển được hoàn toàn. Đây chính là điều khác biệt so với hệ liên tục.

Định lý 3.57: Cần và đủ để hệ (3.103) điều khiển được hoàn toàn là nó đạt tới được.

Ví dụ 51: Cho hệ có một đầu vào mô tả bởi

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u_k.$$

Hệ này có

$$\tilde{A}\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Rank}(\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B}) = \text{Rank}(\tilde{A}^2) = \text{Rank}\left(\begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix}\right) = 1$$

nên nó điều khiển được. Nhưng vì

$$\text{Rank}(\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B}) = 1 \neq 2$$

nên nó không đạt tới được, do đó nó không điều khiển được hoàn toàn. Chẳng hạn như

với $\underline{x}_N = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ thì do phương trình

$$(\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B}) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vô nghiệm nên không tồn tại $\{u_0, u_1\}$ để đưa hệ từ gốc tọa độ $\underline{0}$ tới được \underline{x}_N . □

Ví dụ 52: Xét hệ với một đầu vào mô tả bởi

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u_k.$$

Hệ này có

$$\tilde{A}\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B}) = \text{Rank} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

nên nó vừa điều khiển được, vừa đạt tối được, tức là điều khiển được hoàn toàn. \square

Tiếp theo ta phân tích tính quan sát được của hệ tham số hằng có mô hình trạng thái (3.103). Ý nghĩa của việc phân tích đó như sau: Giả sử rằng tại thời điểm $k=0$ hệ đang ở trạng thái $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ nàq đó và ta phải xác định $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Nếu ta có thể làm được việc đó thông qua quan sát (do) các tín hiệu vào ra trong một khoảng thời gian hữu hạn thi hệ sẽ được gọi là quan sát được.

Định nghĩa 3.11: Hệ (3.103) với bậc n được gọi là quan sát được nếu điểm trạng thái $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ của nó có thể được xác định một cách chính xác thông qua hữu hạn N các giá trị tín hiệu vào ra $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{N-1}\}$ và $\{\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{N-1}\}$.

Viết lại (3.104)

$$\underline{x}_k = \tilde{A}^k \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}^{k-1-i} \tilde{B} \underline{u}_i$$

rồi thay vào phương trình thứ hai trong (3.103) ta được

$$\begin{aligned} \underline{y}_k &= \tilde{C} \tilde{A}^k \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{C} \tilde{A}^{k-1-i} \tilde{B} \underline{u}_i + \tilde{D} \underline{u}_k \\ \Leftrightarrow \tilde{C} \tilde{A}^k \underline{x}_0 &= \underline{y}_k - \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \tilde{C} \tilde{A}^{k-1-i} \tilde{B} \underline{u}_i}_{\Delta \underline{y}_k} - \tilde{D} \underline{u}_k \end{aligned}$$

Cho k chạy từ 0 đến $N-1$ sẽ có

$$\begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C} \tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C} \tilde{A}^{N-1} \end{pmatrix} \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} \Delta \underline{y}_0 \\ \Delta \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \Delta \underline{y}_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Nhưng do \tilde{A}^k phụ thuộc tuyến tính theo $\tilde{A}, \tilde{A}^2, \dots, \tilde{A}^{n-1}$ khi $k \geq n$ nên thực chất phương trình trên viết được thành

$$\begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C} \tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C} \tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix} \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} \Delta \underline{y}_0 \\ \Delta \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \Delta \underline{y}_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{3.108}$$

Từ (3.108) ta thấy điểm trạng thái \underline{x}_0 sẽ xác định được nếu như ánh xạ

$$\begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{CA} \\ \vdots \\ \tilde{CA}^{n-1} \end{pmatrix}$$

có miền ảnh là toàn bộ không gian trạng thái. Nói cách khác:

Định lý 3.58: Hệ (3.103) sẽ quan sát được khi và chỉ khi

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{CA} \\ \vdots \\ \tilde{CA}^{n-1} \end{pmatrix} = n. \quad (3.109)$$

Ví dụ 53: Cho hệ mô tả bởi

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_k, \quad y_k = (2 \ 1) \underline{x}_k + u_k.$$

Hệ này có

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{CA} \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

nên nó quan sát được, tức là mọi điểm trạng thái $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ của nó sẽ được xác định từ hữu hạn các giá trị tín hiệu $\{u_0, u_1\}$ và $\{y_0, y_1\}$ nhờ công thức (3.108):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{CA} \end{pmatrix} \underline{x}_0 &= \begin{pmatrix} \Delta y_0 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - u_0 \\ y_1 - 2u_0 - u_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} y_0 - u_0 \\ y_1 - 2u_0 - u_1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \underline{x}_0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 - u_0 \\ y_1 - 2u_0 - u_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
□

Tiếp tục, nếu so sánh (3.107) với (3.109) ta còn thấy

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{CA} \\ \vdots \\ \tilde{CA}^{n-1} \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{CA} \\ \vdots \\ \tilde{CA}^{n-1} \end{pmatrix}^T = \text{Rank} (\tilde{C}^T \ \tilde{A}^T \tilde{C}^T \ \dots \ (\tilde{A}^T)^{n-1} \tilde{C}^T)$$

do đó khi hệ (3.103) quan sát được thì hệ với mô hình:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \tilde{A}^T \underline{x}_k + \tilde{C}^T u_k \\ \underline{y}_k &= \tilde{B}^T \underline{x}_k + \tilde{E} u_k \end{aligned} \quad (3.110)$$

sẽ đạt tới được (tức là điều khiển được hoàn toàn) và ngược lại. Hệ (3.110) được gọi là hệ đối ngẫu với hệ (3.103). Ta đã đến:

Định lý 3.59: Hệ (3.103) sẽ điều khiển được hoàn toàn (hay quan sát được) khi và chỉ khi hệ đối ngẫu với nó là (3.110) quan sát được (hay điều khiển được hoàn toàn).

Ví dụ 54: Xét hệ SISO có hàm truyền đạt

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^{n-1}}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n}.$$

Theo (3.96) thì hệ còn được mô tả bởi mô hình trạng thái dạng chuẩn quan sát:

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u_k$$

$$y_k = (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1) \underline{x}_k.$$

Hệ có

$$\begin{aligned} \tilde{C}\tilde{A} &= (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ \cdots \ 1 \ -a_{n-1}) \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 &= (0 \ 0 \ \cdots \ 1 \ -a_{n-1}) \tilde{A} = (0 \ \cdots \ 1 \ -a_{n-1} \ -a_{n-2} + a_{n-1}^2) \\ &\vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} &= (1 \ -a_{n-1} \ -a_{n-2} + a_{n-1}^2 \ \cdots) \end{aligned}$$

nên

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & \bullet \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \bullet & \bullet \end{pmatrix} = n \ (\text{vì có định thức bằng } 1)$$

và do đó nó quan sát được (các dấu \bullet là chỉ những giá trị được xác định từ bộ tham số a_0, a_1, \dots, a_{n-1}).

Hệ đối ngẫu với nó có mô hình trạng thái

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$

$$y_k = (b_0 \ \cdots \ b_{n-1}) \underline{x}_k$$

có cùng hàm truyền đạt như hệ đã cho

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^{n-1}}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n}$$

nên thực chất nó cũng chính là hệ đã cho. Vậy theo định lý 3.59 thì hệ đã cho ngoài quan sát được còn điều khiển được hoàn toàn. \square

Câu hỏi ôn tập và bài tập

- 1) Hãy xác định quá trình cưỡng bức và quá trình tự do của những hệ thống SISO được mô tả bởi các hàm truyền đạt sau:

$$\text{a) } G(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+4)} \quad \text{b) } G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 + 2s + 4)} \quad \text{c) } G(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 9s^2 + 27s + 27}$$

- 2) Hãy xác định xem những hệ nào trong bài 1 là hệ pha cực tiểu và tìm các hàm truyền đạt pha cực tiểu ứng với những hệ không phải là pha cực tiểu còn lại.
 3) Hãy xác định quá trình cưỡng bức và quá trình tự do của những hệ thống được mô tả bởi các mô hình trạng thái sau. Vẽ quỹ đạo pha của quá trình tự do và biện luận tính ổn định của hệ

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u & \text{b) } \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u \\ \text{c) } \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u & \text{c) } \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}u \end{array}$$

- 4) Hãy xác định quá trình tự do và biện luận tính ổn định của những hệ thống được mô tả bởi các mô hình trạng thái sau

$$\text{a) } \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u \quad \text{b) } \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}u$$

- 5) Hãy xác định khoảng thời gian xảy ra quá trình quá độ của những hệ thống có hàm truyền đạt cho trong bài 1, biết rằng quá trình quá độ sẽ kết thúc khi hàm quá độ $h(t)$ của nó không sai khác quá 5% giá trị giới hạn cuối cùng $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$.

- 6) Không tìm nghiệm, hãy chỉ ra rằng tất cả nghiệm của đa thức sau đều có phần thực nhỏ hơn -1

$$\begin{array}{l} \text{a) } A(s) = s^3 + 8s^2 + 22s + 20 \\ \text{b) } A(s) = s^4 + 10s^3 + 38s^2 + 64s + 40 \end{array}$$

- 7) Sử dụng tiêu chuẩn Routh-Hurwitz để kiểm tra tính ổn định hệ thống có phương trình đặc tính

a) $A(s) = 1,15s^6 + 7,25s^5 + 18,60s^4 + 24,84s^3 + 18,20s^2 + 6,69s + 1,08$

b) $A(s) = 5s^5 + 47s^4 + 140,55s^3 + 168,67s^2 + 82,63s + 13,8$

c) $A(s) = 25s^5 + 87,5s^4 + 80s^3 + 5,5s^2 - 8,64s + 0,72$

Có bao nhiêu điểm cực s_k của hệ thỏa mãn $0 < \text{Re}(s_k) < 1$ và $-1 < \text{Re}(s_k) < 0$.

- 8) Sử dụng tiêu chuẩn Michailov để kiểm tra tính ổn định hệ thống có phương trình đặc tính:

a) $A(s) = s^5 + s^4 + 20s^3 + 10s^2 + 64s + 9$

b) $A(s) = s^5 + s^4 + 25s^3 + 5s^2 + 144s + 4$

- 9) Cho hệ kín có hàm truyền đạt của hệ hở $S(s)R(s)$ là

a) $\frac{k}{(1+Ts)(1+T^{-1}s)}$ b) $\frac{k(1+Ts)}{(1+2,5s)(1+0,2s)}$ c) $\frac{k(s^2+s+1)}{s(T^2s^2+1)}$

trong đó $T > 1$ là hằng số cho trước. Hãy sử dụng tiêu chuẩn Nyquist và những hệ quả của nó để biện luận theo hệ số khuếch đại k tính ổn định hệ kín. Xác định miền giá trị lớn nhất cho k (phụ thuộc theo T) để hệ kín ổn định.

- 10) Hãy sử dụng tiêu chuẩn Nyquist để kiểm tra tính ổn định hệ kín có hàm truyền đạt của hệ hở là $S(s)R(s) = \frac{1+6s}{(1+2s)(1-3s)}$

- 11) Hãy sử dụng tiêu chuẩn Nyquist dạng biểu đồ Bode để biện luận tính ổn định hệ kín có hàm truyền đạt hệ hở là $S(s)R(s) = \frac{k}{(1+sT)^n}$.

- 12) Hãy phát biểu định lý đủ Geschgorin để xét tính ổn định cho hệ MIMO không liên tục. Bằng một ví dụ cụ thể, hãy chỉ rõ định lý Geschgorin chỉ là điều kiện đủ.

- 13) Sử dụng định lý Geschgorin để chỉ rằng hệ phụ thuộc tham số

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & a & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ a+b & 1 & -4 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

chắc chắn ổn định nếu $|a| < 3$ và $|a+b| < 3$.

- 14) Cho hệ SISO có hàm truyền đạt $G(s) = \frac{1}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$.

- a) Chứng minh rằng quá trình tự do của hệ mô tả được bằng mô hình trạng thái:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -b_n & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

trong đó

$$b_1 = D_1, b_2 = \frac{D_2}{D_1}, b_3 = \frac{D_3}{D_1 D_2}, \dots, b_k = \frac{D_{k-3} D_k}{D_{k-2} D_{k-1}}, k = 4, 5, \dots, n$$

$$\text{và } D_i = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2i-1} & a_{2i-2} & \cdots & a_i \end{pmatrix}.$$

- b) Chứng minh rằng ma trận đường chéo

$$Q = \text{diag}(q_i) \quad \text{với } q_i = \prod_{k=1}^{n+1-i} b_i, i = 1, 2, \dots, n$$

xác định dương khi và chỉ khi tất cả các hệ số $b_i, i = 1, 2, \dots, n$ là dương.

- c) Chứng minh rằng hàm $V = \underline{x}^T Q \underline{x}$ có $\frac{dV}{dt} = -2b_1^2 x_n^2$. Từ đó chỉ ra mối liên hệ giữa tiêu chuẩn Lyapunov và tiêu chuẩn Hurwitz.

- 15) Sử dụng tiêu chuẩn Kharitonov để kiểm tra tính Hurwitz chặt của các đa thức sau:

- a) $A(s) = s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad \text{với } 6 \leq a_0 \leq 30, 20 \leq a_1 \leq 100, 20 \leq a_2 \leq 70, 7 \leq a_3 \leq 16$
 b) $A(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad \text{với } 0 \leq a_0 \leq 30, 30 \leq a_1 \leq 50, 20 \leq a_2 \leq 60, 10 \leq a_3 \leq 15$

- 16) Cho đa thức có tham số thay đổi:

$$A(s, \underline{a}) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n$$

trong đó $a_i^- \leq a_i \leq a_i^+, i = 0, 1, \dots, n$. Gọi $K_1(s), K_2(s), K_3(s), K_4(s)$ là các đa thức Kharitonov của nó. Chứng minh rằng với ω cố định, bao giờ ta cũng tìm được một chỉ số $q \in \{1, 2, 3, 4\}$ và một chỉ số $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ để có

$$|K_q(j\omega)| \leq |A(j\omega, \underline{a})| \leq |K_k(j\omega)|$$

với mọi $a_i^- \leq a_i \leq a_i^+, i = 0, 1, \dots, n$.

- 17) Cho hệ tuyến tính có vector $\underline{x}(t)$ gồm n biến trạng thái, mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} \quad \text{với } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r},$$

trong đó $\underline{u}(t)$ là vector của r tín hiệu đầu vào.

- a) Giả sử rằng hệ là điều khiển được. Gọi \underline{x}_0 và \underline{x}_1 là hai điểm trạng thái bất kỳ trong không gian trạng thái, cũng như $\underline{u}_0(t)$ là tín hiệu đưa hệ từ điểm trạng thái ban đầu \underline{x}_0 về gốc tọa độ trong khoảng thời gian hữu hạn T_0 . Hãy xác định một tín hiệu điều khiển $\underline{u}_1(t)$ đưa hệ từ điểm trạng thái ban đầu \underline{x}_1 về gốc tọa độ và khoảng thời gian hữu hạn cần thiết T_1 .
- b) Gọi S là ma trận modal của A , tức là $S = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$ với \underline{a}_k là vector riêng bên phải ứng với giá trị riêng λ_k của A . Chứng minh rằng nếu S không suy biến (A là ma trận giống đường chéo) thì điều kiện cần và đủ để hệ đã cho điều khiển được là các vector hàng ứng với cùng một giá trị riêng của tích $S^{-1}B$ phải độc lập tuyến tính với nhau.
- 18) Hãy kiểm tra tính điều khiển được và quan sát được của hệ có mô hình trạng thái sau:

a) $\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -20 & -25 & 0 \\ 16 & 20 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \underline{u} \quad \text{và } \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}$

b) $\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{u} \quad \text{và } \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$

- 19) Hãy xác định điều kiện cho tham số α để hệ sau điều khiển được

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{u}$$

- 20) Cho hệ có hàm truyền đạt $G(s) = \frac{1}{1 + 2DTs + (Ts)^2}$, $0 < D < 1$.

- a) Giữ T cố định, hãy xác định D để $Q = \int_0^\infty [h(t) - h_\infty]^2 dt \rightarrow \min$, trong đó $h(t)$ là hàm quá độ của hệ và $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$.
- b) Tại sao đối với việc tối ưu $Q \rightarrow \min$ thì tham số T lại không có ý nghĩa.
- c) Xác định độ quá điều chỉnh $\Delta h_{\max} = h_{\max}(t) - h_\infty$.
- d) Tính các giá trị T_∞ , T_{\max} và $T_{5\%}$.

- 21) Xét hệ hồi tiếp với mô hình dạng sơ đồ khôi như ở hình 3.52. Biết rằng hệ hở có hàm truyền đạt

$$G_h(s) = k \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$$

Chứng minh rằng khi được kích thích bởi tín hiệu $1(t)$ ở đầu vào, hệ sẽ có sai lệch tĩnh e_∞ là

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + G_h(0)} = \frac{a_0}{a_0 + k b_0}.$$

Từ đó rút ra được điều kiện cần phải có như thế nào của $G_h(s)$ để sai lệch tĩnh e_∞ của hệ hồi tiếp bằng không.

- 22) Hãy chỉ rằng hệ kín có hàm truyền đạt hệ hở $G_h(s) = \frac{k}{s} e^{-s\tau}$ sẽ ổn định nếu $\tau < \frac{\pi}{2k}$.

- 23) Xác định có tồn tại hay không tham số $a > 0$ để hàm quá độ của những hệ thống có hàm truyền đạt $G(s)$ như sau không có độ quá độ điều chỉnh:

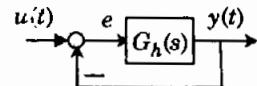
$$\text{a) } \frac{(1+as)^2}{(1+s)(1+0,8s)} \quad \text{b) } \frac{(1+0,5s)(1+as)}{(1+0,75s)(1+a^2s)} \quad \text{c) } \frac{(1+s)(1+2s)(1+3s)}{(1+0,5s)(1+a^2s)(1+as)^2}$$

- 24) Cho hệ mô tả bởi

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -k & -11 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \text{và} \quad y = (1 \ 10 \ 10 \ 0) \mathbf{x} + u$$

- a) Xác định điều kiện cho tham số k để hệ ổn định.
 b) Xác định điều kiện cho tham số k để hệ điều khiển được.
 c) Hệ có quan sát được hay không với $k = 40$.
 25) Hãy xây dựng đường quỹ đạo nghiệm số cho hệ kín với hàm truyền đạt hệ hở cho sau đây. Dựa vào đường quỹ đạo nghiệm số đó, hãy xác định hằng số k giới hạn cho tính ổn định của hệ kín.

a) $\frac{k}{(1+5s)(1+s)}$	b) $\frac{k(1+0,2s)}{6s(1+0,5s)(1+0,33s)}$
c) $\frac{k(s+6)}{(s^2+4s+5)(s+3)(s+5)}$	d) $\frac{k}{s(s+20)(s^2+20s+200)}$
e) $\frac{k(s+7)}{s^2+6s+18}$	f) $\frac{k}{(1+0,5s)(1+1,32s+(0,33s)^2)}$
g) $\frac{(1+3s)(1+s)}{(1+ks)(1+2s)(1+4s)}$	h) $\frac{2,7}{(1+0,5s)(1+0,66ks+(0,33s)^2)}$



Hình 3.52: Cho bài tập 21.

26) Cho hệ tuyến tính với tín hiệu vào $u(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$. Chứng minh rằng:

$$\sup_u \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} = \sup_{\|u\|_2 \leq 1} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} = \sup_{\|u\|_2 = 1} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}.$$

27) Hãy xét tính ổn định, điều khiển được, đạt tối ưu và quan sát được của hệ có mô hình trạng thái sau:

a) $\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} u_k \quad \text{và} \quad y_k = (1 \ 0 \ 0) \underline{x}_k$

b) $\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} u_k \quad \text{và} \quad y_k = (1 \ 0 \ 0) \underline{x}_k$

28) Cho hệ tuyến tính SISO có tín hiệu vào $\tilde{u}(t)$ dạng liên tục-rời rạc

$$\tilde{u}(t) = u_k = u(kT_a) \quad \text{khi} \quad kT_a \leq t < (k+1)T_a$$

và tín hiệu ra $\{y_k\}$ dạng xung được mô tả bởi hàm truyền đạt

$$G(z) = \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 z + \dots + \tilde{b}_{n-1} z^{n-1}}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 z + \dots + \tilde{a}_{n-1} z^{n-1} + z^n} + d.$$

Chứng minh rằng nó cũng sẽ được mô tả bởi mô hình trạng thái *chuẩn điều khiển* như sau:

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\tilde{a}_0 & -\tilde{a}_1 & \cdots & -\tilde{a}_{n-1} & -\tilde{a}_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k,$$

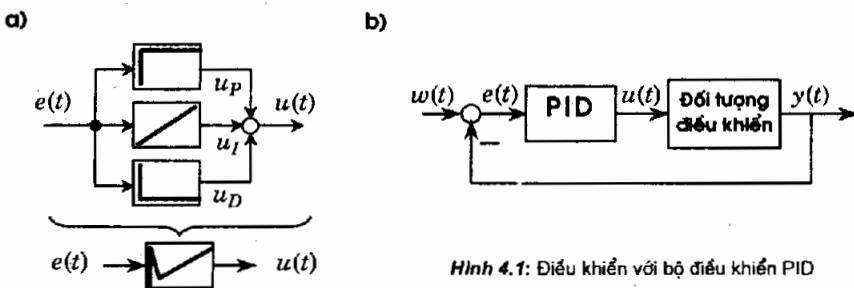
$$y_k = (\tilde{b}_0 \ \tilde{b}_1 \ \cdots \ \tilde{b}_{n-2} \ \tilde{b}_{n-1}) \underline{x}_k + d u_k.$$

4 TỔNG HỢP BỘ ĐIỀU KHIỂN

4.1 Bộ điều khiển PID

Tên gọi PID là chữ viết tắt của ba thành phần cơ bản có trong bộ điều khiển (hình 4.1a): khuếch đại tỷ lệ (P), tích phân (I) và vi phân (D). Người ta vẫn thường nói rằng PID là một tập thể hoàn hảo bao gồm ba tính cách khác nhau:

- phục vụ và thực hiện chính xác nhiệm vụ được giao (tỷ lệ);
- làm việc và có tích luỹ kinh nghiệm để thực hiện tốt nhiệm vụ (tích phân);
- luôn có sáng kiến và phản ứng nhanh nhạy với sự thay đổi tình huống trong quá trình thực hiện nhiệm vụ (vi phân).



Hình 4.1: Điều khiển với bộ điều khiển PID

Bộ điều khiển PID được sử dụng rộng rãi để điều khiển đối tượng SISO theo nguyên lý hồi tiếp (hình 4.1b). Lý do bộ PID được sử dụng rộng rãi là tính đơn giản của nó cả về cấu trúc lẫn nguyên lý làm việc. Bộ PID có nhiệm vụ đưa sai lệch $e(t)$ của hệ thống về 0 sao cho quá trình quá độ thỏa mãn các yêu cầu cơ bản về chất lượng:

- Nếu sai lệch $e(t)$ càng lớn thì thông qua thành phần $u_P(t)$, tín hiệu điều chỉnh $u(t)$ càng lớn (vai trò của khuếch đại k_p).
- Nếu sai lệch $e(t)$ chưa bằng 0 thì thông qua thành phần $u_I(t)$, PID vẫn còn tạo tín hiệu điều chỉnh (vai trò của tích phân T_I).
- Nếu sự thay đổi của sai lệch $e(t)$ càng lớn thì thông qua thành phần $u_D(t)$, phản ứng thích hợp của $u(t)$ sẽ càng nhanh (vai trò của vi phân T_D).

Bộ điều khiển PID được mô tả bằng mô hình vào-ra:

$$u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

trong đó $e(t)$ là tín hiệu đầu vào, $u(t)$ là tín hiệu đầu ra, k_p được gọi là hệ số khuếch đại, T_I là hằng số tích phân và T_D là hằng số vi phân.

Từ mô hình vào-ra trên ta có được hàm truyền đạt của bộ điều khiển PID:

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right). \quad (4.1)$$

Chất lượng hệ thống phụ thuộc vào các tham số k_p , T_I , T_D . Muốn hệ thống có được chất lượng như mong muốn thì phải phân tích đối tượng rồi trên cơ sở đó chọn các tham số đó cho phù hợp. Hiện có khá nhiều các phương pháp xác định các tham số k_p , T_I , T_D cho bộ điều khiển PID, song tiện ích hơn cả trong ứng dụng vẫn là:

- Phương pháp sử dụng mô hình xấp xỉ bậc nhất của đối tượng.
- Phương pháp thực nghiệm.
- Phương pháp xác định tham số theo tổng T.

Một điều cần nói thêm là không phải mọi trường hợp ta đều bị bắt buộc phải xác định cả ba tham số k_p , T_I và T_D . Chẳng hạn như khi bản thân đối tượng đã có thành phần tích phân thì trong bộ điều khiển ta không cần phải có thêm khâu tích phân mới diệt được sai lệch tĩnh, hay nói cách khác, khi đó ta chỉ cần sử dụng bộ điều khiển PD

$$R(s) = k_p (1 + T_D s). \quad (4.2a)$$

là đủ ($T_I = \infty$). Hoặc khi tín hiệu trong hệ thống thay đổi tương đối chậm và bản thân bộ điều khiển không cần phải có phản ứng thật nhanh với sự thay đổi của sai lệch $e(t)$ thì ta có thể chỉ cần sử dụng bộ điều khiển PI ($T_D = 0$) có hàm truyền đạt:

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right). \quad (4.2b)$$

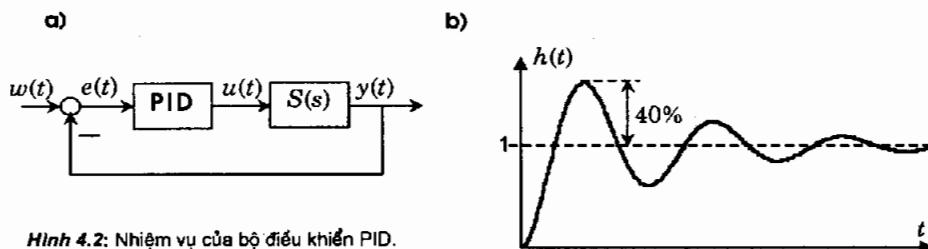
4.1.1 Sử dụng mô hình xấp xỉ bậc nhất có trễ của đối tượng

Phương pháp xác định tham số sử dụng mô hình xấp xỉ bậc nhất có trễ cho đối tượng được trình bày ở đây còn có tên là phương pháp thứ nhất của Ziegler-Nichols. Nó có nhiệm vụ xác định tham số k_p , T_I , T_D cho bộ điều khiển PID trên cơ sở đối tượng có thể được mô tả xấp xỉ bởi hàm truyền đạt dạng:

$$S(s) = \frac{k e^{-Ls}}{1 + Ts} \quad (4.3)$$

sao cho hệ thống nhanh chóng về chế độ xác lập và độ quá điệu chỉnh Δh_{\max} không vượt quá một giới hạn cho phép, khoảng 40% so với $h_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$:

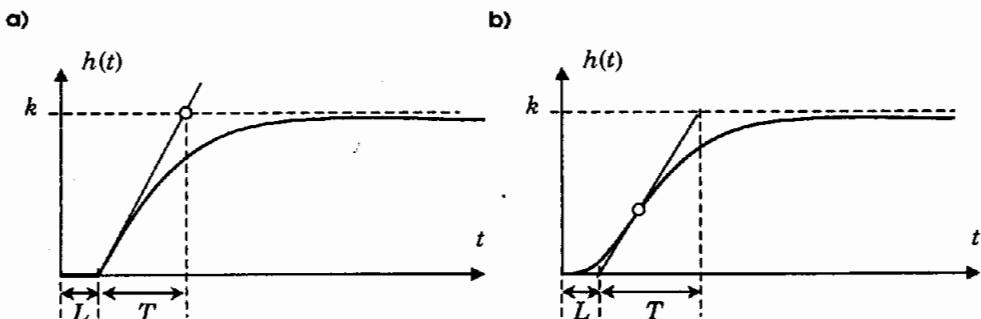
$$\left| \frac{\Delta h_{\max}}{h_{\infty}} \right| \leq 0,4 \quad (\text{hình 4.2}).$$



Hình 4.2: Nhiệm vụ của bộ điều khiển PID.

Ba tham số L (hằng số thời gian trễ), k (hệ số khuếch đại) và T (hằng số thời gian quấn tính) của mô hình xấp xỉ (4.3) có thể được xác định gần đúng từ đồ thị hàm quá độ $h(t)$ của đối tượng. Nếu đối tượng có hàm quá độ dạng như hình 4.3a) mô tả thì từ đồ thị hàm $h(t)$ đó ta đọc ra được ngay (xem lại mục 2.2.1, trang 102 và mục 2.2.9, trang 113):

- L là khoảng thời gian đầu ra $h(t)$ chưa có phản ứng ngay với kích thích $1(t)$ tại đầu vào.
- k là giá trị giới hạn $h_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$.
- Gọi A là điểm kết thúc khoảng thời gian trễ, tức là điểm trên trục hoành có hoành độ bằng L . Khi đó T là khoảng thời gian cần thiết sau L để tiếp tuyến của $h(t)$ tại A đạt được giá trị k .



Hình 4.3: Xác định tham số cho mô hình xấp xỉ (4.3) của đối tượng.

Trường hợp hàm quá độ $h(t)$ không có dạng lý tưởng như ở hình 4.3a), song có dạng gần giống là hình chữ S của khâu quan tính bậc 2 hoặc bậc n như hình 4.3b) mô tả (xem lại các mục 2.2.4, 2.2.5, trang 105 và 106), thì ba tham số k , L , T của mô hình (4.3) được xác định xấp xỉ như sau:

a) k là giá trị giới hạn $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$.

b) Kẻ đường tiếp tuyến của $h(t)$ tại điểm uốn của nó. Khi đó L sẽ là hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành và T là khoảng thời gian cần thiết để đường tiếp tuyến di dời từ giá trị 0 tới giá trị k .

Như vậy ta có thể thấy là điều kiện để áp dụng được phương pháp xấp xỉ mô hình bậc nhất có trễ của đối tượng là đối tượng đã phải ổn định, không có dao động và ít nhất hàm quá độ của nó phải có dạng hình chữ S . Sau khi đã có các tham số cho mô hình xấp xỉ (4.3) của đối tượng, Ziegler–Nichols đã đề nghị sử dụng các tham số k_p , T_I , T_D sau cho bộ điều khiển:

1) Nếu chỉ sử dụng bộ điều khiển khuếch đại $R(s) = k_p$ thì chọn $k_p = \frac{T}{kL}$.

2) Nếu sử dụng bộ PI với $R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$ thì chọn $k_p = \frac{0,9T}{kL}$ và $T_I = \frac{10}{3}L$.

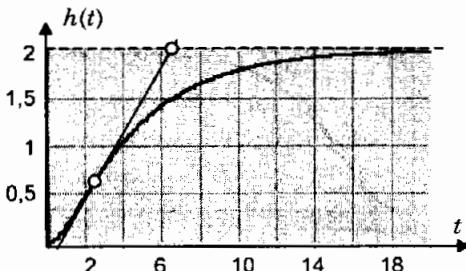
3) Nếu sử dụng PID có $R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$ thì chọn $k_p = \frac{1,2T}{kL}$, $T_I = 2L$, $T_D = \frac{L}{2}$.

Ví dụ 1: Xét đối tượng là động cơ có hàm quá độ cho trong hình 4.4a). Từ hàm quá độ đó ta có được $k=2$, $T=6$ và $L=0,5$. Chọn bộ điều khiển PID với các tham số

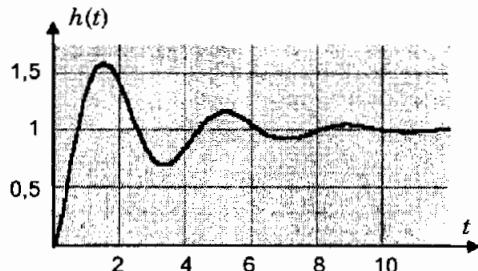
$$k_p = \frac{1,2T}{kL} = 7,2 \quad , \quad T_I = 2L = 1 \quad , \quad T_D = \frac{L}{2} = 0,25$$

thì hệ kín sẽ nhanh về chế độ xác lập hơn như hình 4.4b) mô tả. □

a)



b)



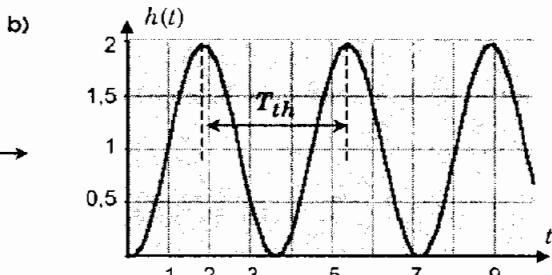
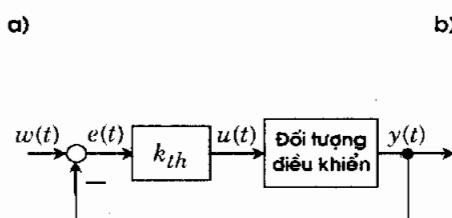
Hình 4.4: Minh họa cho ví dụ 1.

4.1.2 Xác định tham số bằng thực nghiệm

Phương pháp xác định tham số k_p , T_I , T_D cho bộ điều khiển PID theo phương pháp thực nghiệm trình bày dưới đây có tên là phương pháp thứ hai của Ziegler-Nichols. Điều đặc biệt của phương pháp này là nó không sử dụng mô hình toán học của đối tượng, ngay cả mô hình xấp xỉ gần đúng (4.3).

Nguyên lý của phương pháp như sau:

- 4) Thay bộ điều khiển PID trong hệ kín (hình 4.5a) bằng bộ khuếch đại. Sau đó tăng hệ số khuếch đại tới giá trị tới hạn k_{th} để hệ kín ở chế độ biên giới ổn định, tức là $h(t)$ có dạng dao động điều hòa (hình 4.5b). Xác định chu kỳ T_{th} của dao động.
- 5) Xác định tham số cho bộ điều khiển P, PI hay PID như sau:
 - a) Nếu sử dụng bộ điều khiển khuếch đại $R(s) = k_p$ thì chọn $k_p = \frac{1}{2} k_{th}$.
 - b) Nếu sử dụng PI với $R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$ thì chọn $k_p = 0,45 k_{th}$ và $T_I = 0,85 T_{th}$.
 - c) Chọn $k_p = 0,6 k_{th}$, $T_I = 0,5 T_{th}$ và $T_D = 0,12 T_{th}$ cho bộ PID.

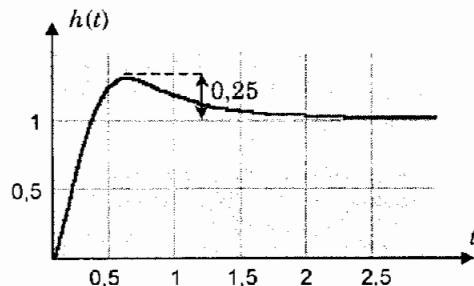


Hình 4.5: Xác định hằng số khuếch đại tới hạn.

Ví dụ 2: Giả sử khi khuếch đại với hệ số $k_{th} = 24,5$ ta đạt được chế độ tới hạn (dao động) cho hệ kín như hình 4.5b). Từ dao động đó ta đọc ra được thêm $T_{th} = 3,3$. Chọn các tham số:

$$k_p = 14,6, T_I = 1,7 \text{ và } T_D = 0,4$$

cho bộ điều khiển PID, ta sẽ có hệ kín với chất lượng như hàm quá độ của nó ở hình 4.6 bên cạnh mô tả. \square



Hình 4.6: Minh họa cho ví dụ 2.

Cũng cần nói thêm ở đây là tham số bộ điều khiển PID xác định theo phương pháp thứ hai này của Ziegler–Nichols cho ra được một chất lượng hệ kín tốt hơn về mặt độ quá điều chỉnh so với phương pháp thứ nhất (xấp xỉ mô hình). Thực tế, phương pháp xác định thực nghiệm tham số PID đưa ra được một hệ kín có độ quá điều chỉnh Δh_{\max} không vượt quá 25% so với $h_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$, tức là $\left| \frac{\Delta h_{\max}}{h_{\infty}} \right| \leq 0,25$ như ví dụ 2 chỉ rõ.

Nhược điểm của phương pháp thứ hai này là chỉ áp dụng được cho những đối tượng có được chế độ biên giới ổn định khi hiệu chỉnh hằng số khuếch đại trong hệ kín.

4.1.3 Phương pháp Chien–Hrones–Reswick

Về mặt nguyên lý, phương pháp Chien–Hrones–Reswick gần giống với phương pháp thứ nhất của Ziegler–Nichols, song nó không sử dụng mô hình tham số (4.3) gần đúng dạng quán tính bậc nhất có trễ cho đối tượng mà thay vào đó là trực tiếp dạng hàm quá độ $h(t)$ của đối tượng.

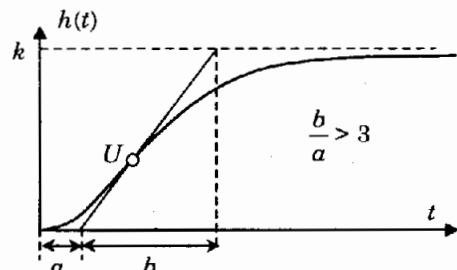
Phương pháp Chien–Hrones–Reswick cũng phải có giả thiết rằng đối tượng là ổn định, hàm quá độ không dao động và có dạng hình chữ S (hình 4.7). Tuy nhiên phương pháp này thích ứng với những đối tượng bậc rất cao như quán tính bậc n (xem lại mục 2.2.5, trang 106):

$$S(s) = \frac{k}{(1+sT)^n}$$

cụ thể là những đối tượng với hàm quá độ $h(t)$ thỏa mãn:

$$\frac{b}{a} > 3 \quad (4.4)$$

trong đó a là hoành độ giao điểm tiếp tuyến của $h(t)$ tại điểm uốn U với trục thời gian và b là khoảng thời gian cần thiết để tiếp tuyến đó đi được từ 0 tới giá trị $k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$.



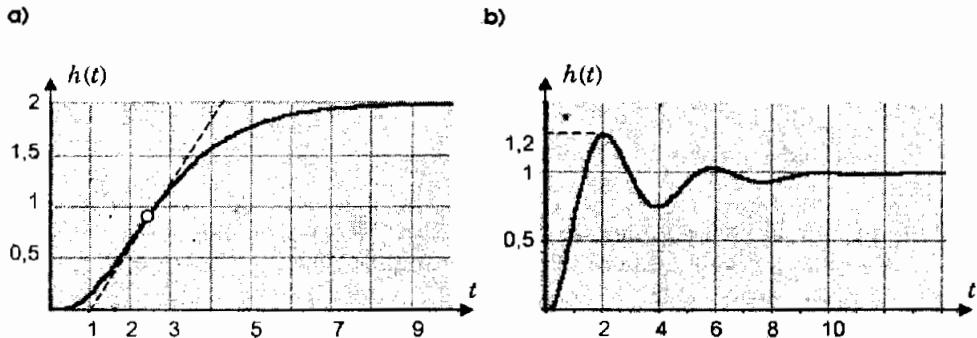
Hình 4.7: Hàm quá độ đối tượng thích hợp cho phương pháp Chien–Hrones–Reswick.

Từ dạng hàm quá độ $h(t)$ đối tượng với hai tham số a , b thỏa mãn, Chien–Hrones–Reswick đã đưa bốn cách xác định tham số bộ điều khiển cho bốn yêu cầu chất lượng khác nhau như sau:

- 1) Yêu cầu tối ưu theo nhiễu (giảm ảnh hưởng nhiễu) và hệ kín không có độ quá điều chỉnh:
- Bộ điều khiển P: Chọn $k_p = \frac{3b}{10ak}$.
 - Bộ điều khiển PI: Chọn $k_p = \frac{6b}{10ak}$ và $T_I = 4a$.
 - Bộ điều khiển PID: Chọn $k_p = \frac{19b}{20ak}$, $T_I = \frac{12a}{5}$ và $T_D = \frac{21a}{50}$.
- 2) Yêu cầu tối ưu theo nhiễu (giảm ảnh hưởng nhiễu) và hệ kín có độ quá điều chỉnh Δh_{\max} không vượt quá 20% so với $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$:
- Bộ điều khiển P: Chọn $k_p = \frac{7b}{10ak}$.
 - Bộ điều khiển PI: Chọn $k_p = \frac{7b}{10ak}$ và $T_I = \frac{23a}{10}$.
 - Bộ điều khiển PID: Chọn $k_p = \frac{6b}{5ak}$, $T_I = 2a$ và $T_D = \frac{21a}{50}$.
- 3) Yêu cầu tối ưu theo tín hiệu đặt trước (giảm sai lệch bám) và hệ kín không có độ quá điều chỉnh Δh_{\max} :
- Bộ điều khiển P: Chọn $k_p = \frac{3b}{10ak}$.
 - Bộ điều khiển PI: Chọn $k_p = \frac{7b}{20ak}$ và $T_I = \frac{6b}{5}$.
 - Bộ điều khiển PID: Chọn $k_p = \frac{3b}{5ak}$, $T_I = b$ và $T_D = \frac{a}{2}$.
- 4) Yêu cầu tối ưu theo tín hiệu đặt trước (giảm sai lệch bám) và hệ kín có độ quá điều chỉnh Δh_{\max} không vượt quá 20% so với $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$:
- Bộ điều khiển P: Chọn $k_p = \frac{7b}{10ak}$.
 - Bộ điều khiển PI: Chọn $k_p = \frac{6b}{5ak}$ và $T_I = b$.
 - Bộ điều khiển PID: Chọn $k_p = \frac{19b}{20ak}$, $T_I = \frac{27b}{20}$ và $T_D = \frac{47a}{100}$.

Ví dụ 3: Giả sử ta có đối tượng với hàm quá độ cho trong hình 4.8a). Từ dạng hàm quá độ đó của đối tượng ta đọc ra được:

$$k = 2, \quad a = 1 \quad \text{và} \quad b = 4,3.$$



Hình 4.8: Minh họa cho ví dụ 3

Các tham số đó của mô hình thỏa mãn điều kiện (4.4) vì $\frac{b}{a} = 4,3 > 3$. Do đó ta áp dụng được phương pháp Chien–Hrones–Reswick. Chọn bộ điều khiển PID và các tham số tối ưu theo tín hiệu đặt trước để hệ kín có độ quá điều chỉnh Δh_{\max} cho phép không vượt quá 20% so với $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$:

$$k_p = \frac{19b}{20ak} = 2,0245, \quad T_I = \frac{27b}{20} = 5,805 \quad \text{và} \quad T_D = \frac{47a}{100} = 0,47$$

ta thu được hệ kín có chất lượng được phản ánh qua hàm quá độ của nó là $h(t)$ cho ở hình 4.8b). \square

4.1.4 Phương pháp tổng T của Kuhn

Lại xét đối tượng ổn định, không có độ quá điều chỉnh, hàm quá độ $h(t)$ của nó đi từ điểm 0 và có dạng hình chữ S. Theo nội dung mục 3.5.2, trang 244, thì đối tượng có thể được mô tả một cách tổng quát bởi hàm truyền đạt

$$S(s) = k \frac{(1 + T_1^t s)(1 + T_2^t s) \cdots (1 + T_m^t s)}{(1 + T_1^m s)(1 + T_2^m s) \cdots (1 + T_n^m s)} e^{-sT}, \quad (m < n) \quad (4.5)$$

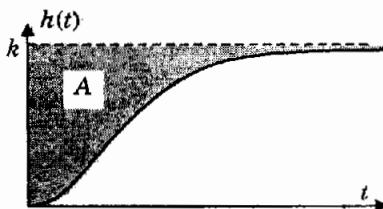
trong đó các hằng số thời gian ở tử số T_i^t phải nhỏ hơn hằng số thời gian tương ứng với nó ở mẫu số T_j^m . Nói cách khác, nếu như đã có sự sắp xếp:

$$T_1^t \geq T_2^t \geq \cdots \geq T_m^t \quad \text{và} \quad T_1^m \geq T_2^m \geq \cdots \geq T_n^m$$

thì phải có

$$T_1^t < T_1^m, \quad T_2^t < T_2^m, \quad \dots, \quad T_m^t < T_m^m.$$

Chú ý là các chữ cái t và m trong T_i^t , T_j^m không có ý nghĩa lũy thừa mà chỉ là ký hiệu nói rằng nó thuộc về đa thức tử số hay mẫu số trong hàm truyền đạt $S(s)$.



Hình 4.9: Quan hệ giữa diện tích A và tổng các hằng số thời gian.

Gọi A là diện tích bao bởi đường cong $h(t)$ và $k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$. Vậy thì:

Định lý 4.1: Giữa diện tích A và các hằng số thời gian T_i^t , T_j^m , T có quan hệ:

$$A = kT_{\Sigma} = k \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n T_j^m - \sum_{i=1}^m T_i^t + T}_{T_{\Sigma}} \right).$$

Chứng minh:

Theo khái niệm về diện tích A thì

$$A = \int_0^{\infty} [k - h(t)] dt.$$

Chuyển hai vế đẳng thức trên sang miền phức nhờ toán tử Laplace, đặc biệt là tính chất 6) của nó (xem lại mục 1.3.1, trang 10) và gọi $A(s)$ là ảnh Laplace của A , $H(s)$ là ảnh của $h(t)$, ta có:

$$A(s) = \frac{1}{s} \cdot \left[\frac{k}{s} - H(s) \right]$$

Vì A là hằng số nên nó có giới hạn $A = \lim_{t \rightarrow \infty} A$. Do đó nếu áp dụng định lý về giới hạn thứ nhất của toán tử Laplace (tính chất 9), trang 10) sẽ đi đến:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{k}{s} - H(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k - S(s)}{s} \\ &= k \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 + T_1^m s)(1 + T_2^m s) \cdots (1 + T_n^m s) - (1 + T_1^t s)(1 + T_2^t s) \cdots (1 + T_m^t s)e^{-sT}}{s(1 + T_1^m s)(1 + T_2^m s) \cdots (1 + T_n^m s)} \\ &= k \lim_{s \rightarrow 0} \left[(T_1^m + T_2^m + \cdots + T_n^m) - (T_1^t + T_2^t + \cdots + T_m^t) + \frac{1 - e^{-sT}}{s} \right]. \end{aligned}$$

Suy ra

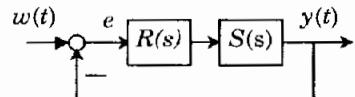
$$A = k \left(\sum_{j=1}^n T_j^m - \sum_{i=1}^m T_i^t + T \right) = k T_\Sigma \quad \text{với} \quad T_\Sigma = \sum_{j=1}^n T_j^m - \sum_{i=1}^m T_i^t + T. \quad \square$$

Ví dụ 4: Xét hệ hồi tiếp cho trong hình 4.10 kích thích bởi $w(t)=1(t)$ và có

$$R(s) = \frac{2(1+3s)}{s}, \quad S(s) = \frac{0.5}{24s^2 + 23s + 9}.$$

Hàm truyền đạt của hệ kín sẽ là

$$G(s) = \frac{1+3s}{(1+s)(1+2s)(1+5s)}.$$



Hình 4.10: Minh họa ví dụ 4.

Do $G(s)$ có

$$k=1, \quad T_1^t = 3, \quad T_1^m = 5, \quad T_2^m = 2 \quad \text{và} \quad T_3^m = 1$$

thỏa mãn điều kiện $T_1^m > T_1^t$ nên ta áp dụng được định lý 4.1 để xác định sai lệch

$$\int_0^\infty e(t)dt = \int_0^\infty [w(t) - y(t)]dt = \int_0^\infty [k - h(t)]dt = A = (5+2+1)-3 = 5. \quad \square$$

Định lý 4.1 chỉ rằng T_Σ có thể dễ dàng được xác định từ hàm quá độ $h(t)$ dạng hình chữ S và đi từ 0 của đối tượng ổn định, không dao động, bằng cách ước lượng diện tích A cũng như hệ số khuếch đại $k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ rồi tính $T_\Sigma = \frac{A}{k}$.

Trên cơ sở giá trị k , T_Σ đã có của đối tượng, Kuhn đã đề ra phương pháp tổng T xác định tham số k_p , T_I , T_D cho bộ điều khiển PID sao cho hệ hồi tiếp có quá trình độ quá độ ngắn hơn và độ quá điều chỉnh Δh_{\max} không vượt quá 25%. Phương pháp này của Kuhn khá thích ứng với những đối tượng có thể xấp xỉ được bởi hàm truyền đạt dạng khai quan tinh bậc n :

$$S(s) = \frac{k}{(1+sT)^n}. \quad (4.6)$$

Mặc dù được xây dựng cho đối tượng được giả thiết là có mô hình hàm truyền đạt dạng (4.6) song, trong thực tế phương pháp tổng T vẫn được áp dụng hiệu quả cho cả những đối tượng có hàm truyền không giống như (4.6), miễn là nó ổn định, không có dao động, hàm quá độ $h(t)$ của nó đi từ 0 và có dạng hình chữ S . Phương pháp tổng T của Kuhn bao gồm hai bước như sau:

- 1) Xác định k , T_Σ , có thể từ hàm truyền đạt $S(s)$ cho trong (4.5) nếu như đã biết trước $S(s)$ hoặc bằng thực nghiệm từ hàm quá độ $h(t)$ đi từ 0 và có dạng hình chữ S của đối tượng.

2) Xác định tham số:

a) Nếu sử dụng bộ điều khiển PI: Chọn $k_p = \frac{1}{2k}$ và $T_I = \frac{T_\Sigma}{2}$.

b) Nếu sử dụng bộ điều khiển PID: Chọn $k_p = \frac{1}{k}$, $T_I = \frac{2T_\Sigma}{3}$ và $T_D = 0,167T_\Sigma$.

Ví dụ 5: Cho đối tượng có hàm truyền đạt

$$S(s) = \frac{2}{(1+2s)(1+3s)(1+5s)} \quad \text{với} \quad k=2 \quad \text{và} \quad T_\Sigma=10.$$

Sử dụng bộ điều khiển PI với các tham số được xác định theo phương pháp tổng T của Kuhn:

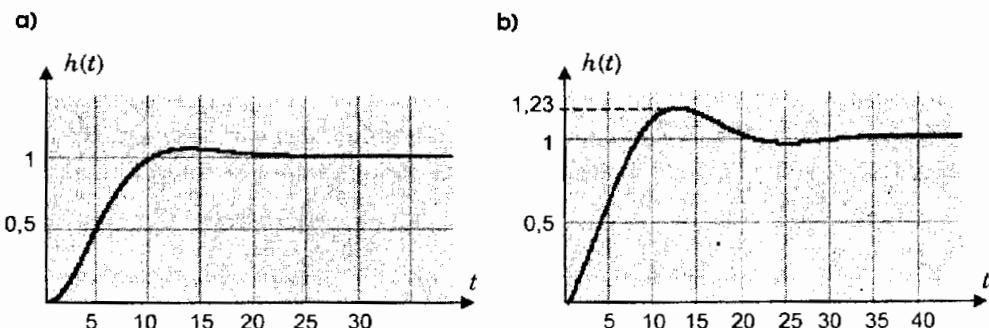
$$k_p = \frac{1}{2k} = 0,25, \quad T_I = \frac{T_\Sigma}{2} = 5$$

ta sẽ được hệ kín với chất lượng được phản ánh thông qua hàm quá độ của nó cho trong hình 4.11a). Từ hàm quá độ đó ta cũng nhận thấy là độ quá điều chỉnh của hệ nhỏ hơn 25% như yêu cầu (hệ có $\Delta h_{\max} = 0,04$).

Nếu sử dụng bộ điều khiển PID với các tham số cũng được xác định theo phương pháp tổng T của Kuhn:

$$k_p = \frac{1}{2k} = 0,25, \quad T_I = \frac{2T_\Sigma}{3} = 6,67, \quad T_D = 0,167T_\Sigma = 1,67$$

thì hệ kín lại có chất lượng thể hiện qua hàm quá độ của nó cho trong hình 4.11b). Lúc này hệ có độ quá điều chỉnh $\Delta h_{\max} = 0,23$. □



Hình 4.11: Minh họa cho ví dụ 5

Ví dụ 5 cho thấy không phải trong mọi trường hợp bộ điều khiển PID sẽ mang lại một chất lượng tốt hơn bộ điều khiển PI. Nhận xét này ta sẽ còn thấy rõ hơn ở đối tượng với hàm truyền đạt

$$S(s) = \frac{k}{(1+sT)^2} \quad (4.7a)$$

là bộ điều khiển PI có tham số được xác định theo phương pháp tổng T thậm chí còn mang đến cho hệ kín độ quá điêu chỉnh nhỏ hơn 5%.

Bộ điều khiển PI có hàm truyền đạt

$$R(s) = \frac{k_p(1+T_I s)}{T_I s} = \frac{(2+T_\Sigma s)}{2kT_\Sigma s} \quad (4.7b)$$

do đó hàm truyền đạt của hệ kín gồm đối tượng (4.7a), bộ điều khiển (4.7b) sẽ là

$$G(s) = \frac{S(s)R(s)}{1+S(s)R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2D\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{với} \quad D = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T_\Sigma = \frac{T}{2}, \quad \omega_n = \frac{\sqrt{2}}{T_\Sigma}.$$

Theo kết quả của ví dụ 4, thuộc chương 3 (mục 3.1.3, trang 181) ta có

$$\Delta h_{\max} = e^{-\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}} = e^{-\pi} \approx 4,32\% \quad (\text{độ quá điêu chỉnh})$$

$$T_{5\%} \approx \frac{3}{D\omega_n} = 3T_\Sigma \quad (\text{thời gian quá độ}).$$

4.2 Bộ điều khiển tối ưu độ lớn

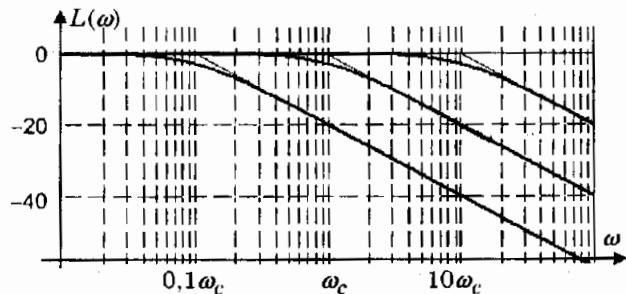
4.2.1 Nguyên lý tối ưu độ lớn

Một trong những yêu cầu chất lượng đối với hệ thống điều khiển kín (hình 4.10) mô tả bởi hàm truyền đạt $G(s)$

$$G(s) = \frac{S(s)R(s)}{1+S(s)R(s)}$$

là hệ thống luôn có được đáp ứng $y(t)$ giống như tín hiệu lệnh được đưa ở đầu vào $w(t)$ tại mọi điểm tần số hoặc ít ra thời gian quá độ để $y(t)$ bám được vào $w(t)$ càng ngắn càng tốt. Nói cách khác, bộ điều khiển lý tưởng $R(s)$ cần phải mang đến cho hệ thống khả năng

$$|G(j\omega)| = 1 \quad \text{với mọi } \omega. \quad (4.8a)$$



Hình 4.12: Dải tần số mà ở đó $|G(j\omega)| \approx 1$ càng lớn càng tốt.

Nhưng trong thực tế, vì nhiều lý do mà yêu cầu $R(s)$ thỏa mãn (4.8a) khó được đáp ứng, chẳng hạn như vì hệ thống thực luôn chứa trong nó bản chất quan tính, tính "cưỡng lại lệnh" tác động từ ngoài vào. Song "tính xấu" đó của hệ thống lại được giảm bớt một cách tự nhiên ở chế độ làm việc có tần số lớn, nên người ta thường đã thỏa mãn với bộ điều khiển $R(s)$ khi nó mang lại được cho hệ thống tính chất (4.8a) trong một dải tần số rộng lân cận 0.

Bộ điều khiển $R(s)$ thỏa mãn:

$$|G(j\omega)| \approx 1 \quad (4.8b)$$

trong dải tần số thấp có độ rộng lớn được gọi là *bộ điều khiển tối ưu độ lớn*. Hình 4.12 là ví dụ minh họa cho nguyên tắc điều khiển tối ưu độ lớn. Bộ điều khiển $R(s)$ cần phải được chọn sao cho miền tần số của biểu đồ Bode hàm truyền hệ kín $G(s)$ thỏa mãn

$$L(\omega) = 20\lg |G(j\omega)| \approx 0$$

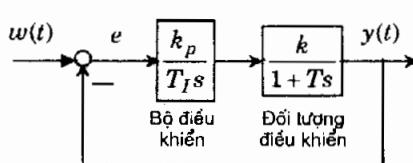
là lớn nhất. Dải tần số này càng lớn, chất lượng hệ kín theo nghĩa (4.8b) càng cao.

Một điều cần nói thêm là tên gọi *tối ưu độ lớn* được dùng ở đây không mang ý nghĩa chặt chẽ về mặt toán học cho một bài toán tối ưu, tức là ở đây không có phiến hàm đánh giá chất lượng nào được sử dụng do đó cũng không xác định cụ thể là với bộ điều khiển $R(s)$ phiến hàm đó có giá trị lớn nhất hay không. Thuần túy, tên gọi này chỉ mang tính chất định tính chỉ rằng dải tần số ω mà ở đó $G(s)$ thỏa mãn (4.8b) càng rộng càng tốt.

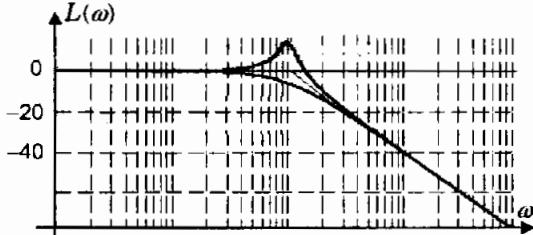
Ví dụ 6: Cho hệ kín có sơ đồ khối cho trong hình 4.13. Hệ kín có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{k}{T_R s(1 + T_R s) + k} \quad \text{trong đó } T_R = \frac{T_I}{k_p}.$$

a)



b)



Hình 4.13: Minh họa ví dụ 6.

Suy ra

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(k - T_R T \omega^2)^2 + (\omega T_R)^2}}$$

$$\Leftrightarrow |G(j\omega)|^2 = \frac{k^2}{k^2 + (T_R^2 - 2kT_R T)\omega^2 + T_R^2 T^2 \omega^4}$$

Để điều kiện (4.8b) được thỏa mãn trong một dải tần số thấp có độ rộng lớn, tất nhiên người ta chỉ có thể chọn T_R sao cho

$$T_R^2 - 2kT_R T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_R = \frac{T_I}{k_p} = 2kT. \quad (4.9)$$

Khi đó hàm truyền hệ kín có dạng

$$G(s) = \frac{k}{2kTs(1+Ts) + k} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2D\omega_n s + \omega_n^2}$$

trong đó $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{2T}}$ và $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Biểu đồ Bode của nó được cho trong hình 4.13b). □

4.2.2 Thiết kế bộ điều khiển

Kết quả ví dụ 6 gợi ý cho ta chọn bộ điều khiển I

$$R(s) = \frac{k_p}{T_I s}$$

trong đó k_p và T_I được chọn theo (4.9), khi mà đối tượng có thể mô tả được bởi

$$S(s) = \frac{k}{1+Ts}. \quad (4.10)$$

Nói cách khác, nó chỉ rằng ta nên chọn bộ điều khiển $R(s)$ sao cho hệ hở có hàm truyền

$$G_h(s) = S(s)R(s) = \frac{k_p k}{T_I s (1+Ts)}$$

Vấn đề cần bàn ở đây là sẽ phải làm gì, nếu như đối tượng không mô tả được gần đúng như (4.10), chẳng hạn như ta sẽ phải làm gì khi mô hình hàm truyền đạt của đối tượng lại có dạng:

$$S(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s) \cdots (1+T_ns)}. \quad (4.11a)$$

Tất nhiên câu trả lời đơn giản là tìm cách chuyển (4.11a) về dạng xấp xỉ giống như (4.10) hoặc chí ít thì cũng về dạng:

$$S(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+Ts)} \Rightarrow R(s) = \frac{k_p(1+T_1s)}{T_I s} \quad (4.11b)$$

hoặc về dạng:

$$S(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+Ts)} \Rightarrow R(s) = \frac{k_p(1+T_1s)(1+T_2s)}{T_I s}. \quad (4.11c)$$

Xấp xỉ (4.11a) bằng (4.10)

Phương pháp xấp xỉ mô hình (4.11a) bằng (4.10) còn được gọi là *phương pháp tổng các hằng số thời gian nhỏ*. Nó được sử dụng chủ yếu cho các hàm truyền $S(s)$ có dạng (4.11a) với:

$$T_1, T_2, \dots, T_n$$

tương đối nhỏ.

Sử dụng công thức khai triển Vieta cho đa thức mâu số trong (4.11a) sẽ có

$$S(s) = \frac{k}{1 + (T_1 + T_2 + \dots + T_n)s + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + \dots)s^2 + \dots}$$

Ở những điểm tần số thấp, tức là khi s nhỏ ta có thể bỏ qua những thành phần bậc cao của s và được công thức xấp xỉ (4.10) với

$$T = \sum_{k=1}^n T_k.$$

Do đó, với kết quả ví dụ 6, bộ điều khiển tối ưu độ lớn sẽ là bộ điều khiển I có tham số xác định theo (4.9):

$$R(s) = \frac{1}{T_I s} \quad \text{và} \quad T_I = 2kT = 2k \sum_{k=1}^n T_k. \quad (4.12)$$

Ví dụ 7: Giả sử đối tượng điều khiển có dạng

$$S(s) = \frac{2}{(1 + 0,1s)^6}.$$

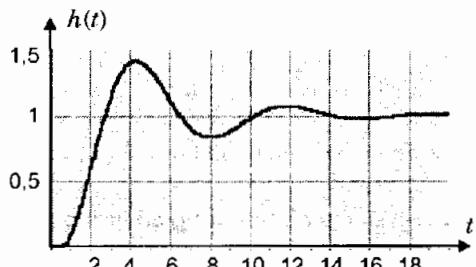
Vậy thì

$$k = 2 \quad \text{và} \quad T = 0,6.$$

Do đó bộ điều khiển I được sử dụng sẽ có

$$T_I = 2,4 \quad \Rightarrow \quad R(s) = \frac{1}{2,4s}.$$

Hệ kín có hàm quá độ cho ở hình 4.14. \square



Hình 4.14: Minh họa cho ví dụ 7.

Phương pháp bù hằng số thời gian lớn nhất nhờ PI

Nếu như đối tượng với hàm truyền (4.11a) không thỏa mãn điều kiện tất cả các hằng số thời gian T_1, T_2, \dots, T_n đều tương đối nhỏ, song trong đó chỉ có một hằng số thời gian, chẳng hạn như T_1 là lớn nhất, còn lại các hằng số khác T_2, T_3, \dots, T_n là nhỏ thì tương tự như trên, ta sẽ xấp xỉ hàm truyền (4.11a) của nó thành (4.11b):

$$S(s) = \frac{k}{(1 + T_1 s)(1 + Ts)} \quad \text{với} \quad T = \sum_{k=2}^n T_k \quad \text{và} \quad T_1 > T.$$

Để điều khiển, ta sử dụng bộ điều khiển PI thay vì I

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{k_p (1 + T_I s)}{T_I s} = \frac{(1 + T_I s)}{T_R s}$$

trong đó $T_R = \frac{T_I}{k_p}$, nhằm mục đích bù cho T_1 theo nghĩa

$$T_I = T_1. \quad (4.13a)$$

Suy ra

$$T_R = \frac{T_I}{k_p} = 2kT = 2k \sum_{k=2}^n T_k \Leftrightarrow k_p = \frac{T_1}{2k \sum_{k=2}^n T_k}. \quad (4.13b)$$

Ví dụ 8: Giả sử đối tượng điều khiển có dạng

$$S(s) = \frac{3}{(1+2s)(1+0,1s)^5}.$$

Vậy thì

$$k=3, T_1=2 \quad \text{và} \quad T=0,5.$$

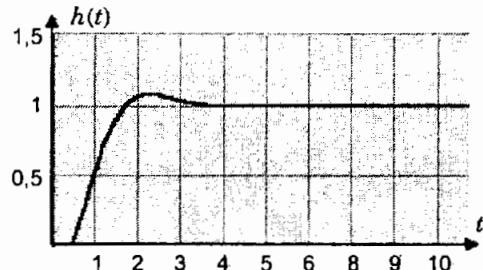
Chọn các tham số theo (4.13)

$$T_I = 2 \quad \text{và} \quad k_p = 0,67.$$

cho bộ điều khiển được sử dụng là PI

$$R(s) = 0,67\left(1 + \frac{1}{2s}\right),$$

ta sẽ được chất lượng hệ kín mô tả bởi hàm quá độ của nó ở hình 4.15. □



Hình 4.15: Minh họa cho ví dụ 8.

Phương pháp bù hai hằng số thời gian lớn nhờ PID

Nếu đối tượng với mô hình hàm truyền đạt $S(s)$ cho trong (4.11a) có hai hằng số lớn vượt trội là T_1, T_2 so với những hằng số thời gian T_3, T_4, \dots, T_n còn lại thì ta sẽ xấp xỉ $S(s)$ bằng hàm truyền đạt dạng (4.11c)

$$S(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+Ts)} \quad \text{trong đó} \quad T = \sum_{k=3}^n T_k \quad \text{và} \quad T_1, T_2 > T.$$

Để bù hai hằng số thời gian T_1, T_2 lớn vượt trội này ta sử dụng bộ điều khiển PID:

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) = \frac{k_p (1+T_A s)(1+T_B s)}{T_I s} = \frac{(1+T_A s)(1+T_B s)}{T_R s},$$

trong đó

$$T_R = \frac{T_I}{k_p} = 2kT = 2k \sum_{k=3}^n T_k, \quad T_A + T_B = T_I \quad \text{và} \quad T_A T_B = T_I T_D$$

bằng cách chọn

$$T_A = T_1, \quad T_B = T_2$$

Suy ra

$$T_I = T_1 + T_2 , \quad T_D = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \quad \text{và} \quad k_p = \frac{T_1 + T_2}{2k \sum_{k=3}^n T_k} . \quad (4.14)$$

Ví dụ 9: Giả sử đối tượng điều khiển có dạng

$$S(s) = \frac{4}{(1+5s)(1+2s)(1+0,1s)^4} .$$

Vậy thì

$$k=4 , \quad T_1=5 , \quad T_2=2 , \quad T=0,4.$$

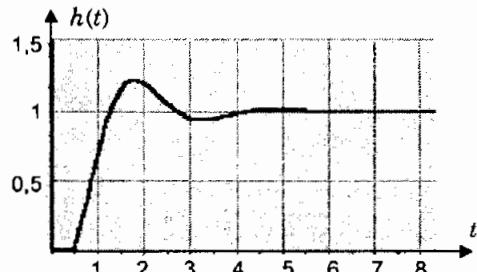
Chọn các tham số theo (4.14)

$$T_I = 7 , \quad T_D = 1,43 \quad \text{và} \quad k_p = 2,2 .$$

cho bộ điều khiển được sử dụng là PID

$$R(s) = 2,2\left(1 + \frac{1}{7s} + 1,43s\right),$$

ta sẽ được chất lượng hệ kín mô tả bởi hàm quá độ của nó ở hình 4.16. □



Hình 4.16: Minh họa cho ví dụ 9.

4.2.3 Tổng kết

Nội dung của mục 4.2.2 được tổng kết lại như sau cho tiện việc tra cứu khi phải thiết kế bộ điều khiển tối ưu độ lớn:

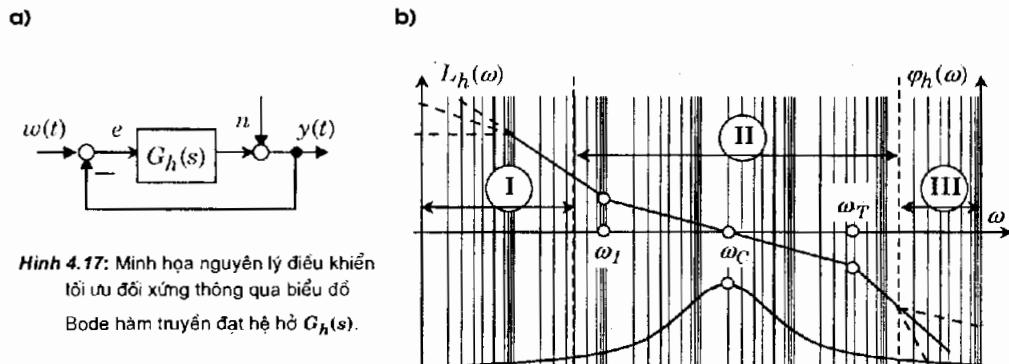
- 1) Nếu đối tượng có hàm truyền đạt (4.11a) với tất cả các hằng số thời gian T_1, T_2, \dots, T_n đều đủ nhỏ thì ta chọn bộ điều khiển I có tham số được xác định theo (4.12).
- 2) Nếu hàm truyền đạt $S(s)$ cho trong (4.11a) của đối tượng có một hằng số thời gian T_1 lớn vượt trội, còn lại các hằng số khác T_2, T_3, \dots, T_n là đủ nhỏ thì ta chọn bộ điều khiển PI với các tham số được xác định theo (4.13).
- 3) Nếu $S(s)$ cho trong (4.11a) của đối tượng có hai hằng số thời gian T_1, T_2 lớn vượt trội, còn lại các hằng số khác T_3, T_4, \dots, T_n là đủ nhỏ thì ta chọn bộ điều khiển PID với các tham số được xác định theo (4.14).

4.3 Bộ điều khiển tối ưu đối xứng

4.3.1 Nguyên lý tối ưu đối xứng

Ta có thể thấy là những phương pháp xác định tham số cho bộ điều khiển PID ở mục 4.1 cũng như thiết kế bộ điều khiển tối ưu độ lớn ở mục 4.2 đều phải có giả thiết rằng đối tượng với hàm truyền đạt $S(s)$ là ổn định, hàm quá độ $h(t)$ của nó phải đi từ 0 và có dạng hình chữ S.

Như vậy, muốn áp dụng các phương pháp đó cho những đối tượng không thỏa mãn giả thiết trên, bắt buộc khi thiết kế bộ điều khiển, ta phải làm sao can thiệp được sơ bộ trước vào đối tượng để đưa đối tượng không ổn định thành ổn định, có hàm quá độ không đi từ 0 thành ra đi từ 0 và không có dạng hình chữ S thành có dạng hình chữ S. Để tránh tất cả những công việc rườm rà đó người ta đã đưa ra phương pháp thiết kế bộ điều khiển tối ưu đối xứng mà ở đó không phải thực hiện các bước trung gian trên nhưng vẫn mang lại cho hệ kín một chất lượng gần giống như ở phương pháp tối ưu độ lớn.



Hình 4.17: Minh họa nguyên lý điều khiển
lối ưu đối xứng thông qua biểu đồ
Bode hàm truyền đạt hệ hở $G_h(s)$.

Xét hệ kín cho trong hình 4.17a), trong đó $G_h(s)$ là hàm truyền đạt của hệ hở, tức là

$$G_h(s) = S(s)R(s)$$

với $S(s)$ là mô hình hàm truyền đạt của đối tượng và $R(s)$ là của bộ điều khiển. Khi đó hệ kín sẽ có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{G_h(s)}{1 + G_h(s)} \quad \Leftrightarrow \quad G_h(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)}. \quad (4.15)$$

Như vậy, để có

$$|G(j\omega)| \approx 1 \quad (4.16b)$$

trong dải tần số thấp giống như ở phương pháp tối ưu độ lớn, thì phải có

$$|G_h(j\omega)| \gg 1 \quad \text{khi } \omega \text{ tương đối nhỏ.} \quad (4.16b)$$

Hình 4.17b) minh họa biểu đồ Bode với $L_h(\omega)$ và $\varphi_h(\omega)$ của hàm truyền đạt hệ hở. Dải tần số ω trong biểu đồ Bode được chia ra làm ba vùng:

- 1) *Vùng 1 là vùng tần số thấp.* Điều kiện (4.16) được thể hiện rõ nét ở vùng I là hàm đặc tính tần số $G_h(j\omega)$ phải có biên độ rất lớn, hay $L_h(\omega) \gg 0$. Vùng này đại diện cho chất lượng hệ thống ở chế độ xác lập hoặc tĩnh (tần số nhỏ). Sự ảnh hưởng của nó tới tính động học của hệ kín là có thể bỏ qua.

- 2) *Vùng II là vùng tần số trung bình và cao.* Vùng này mang thông tin đặc trưng của tính động học hệ kín. Sự ảnh hưởng của vùng này tới tính chất hệ kín ở dải tần số thấp (tĩnh) hoặc rất cao là có thể bỏ qua. Vùng II được đặc trưng bởi điểm tần số cắt $L_h(\omega_c)=0$ hay $|G_h(j\omega_c)|=1$. Mong muốn rằng hệ kín không có cấu trúc phức tạp nên hàm đặc tính tần số hở $G_h(j\omega)$ cũng được giả thiết chỉ có một tần số cắt ω_c .

Theo nội dung mục 2.1.6, trang 88, đường $L_h(\omega_c)$ sẽ thay đổi độ nghiêng một giá trị 20db/dec tại điểm tần số gãy ω_I của đa thức tử số và -20db/dec tại điểm tần số gãy ω_T của đa thức mẫu số. Nếu khoảng cách độ nghiêng đủ dài thì đường $\varphi_h(\omega)$ sẽ thay đổi một giá trị là 90° tại ω_I và -90° tại ω_T . Ngoài ra, trên cơ sở định lý 3.22, trang 208, mục 3.27 của chương 3, hệ kín sẽ ổn định nếu như tại tần số cắt đó hệ hở có góc pha $\varphi_h(\omega_c)$ lớn hơn $-\pi$. Bởi vậy, tính ổn định hệ kín sẽ được đảm bảo nếu như trong vùng I đã có $|G_h(j\omega)| >> 1$ và ở vùng II này, xung quanh điểm tần số cắt, biểu đồ Bode $L_h(\omega)$ có độ dốc là $-20\text{dB}/\text{dec}$ cũng như khoảng cách độ dốc đó là đủ lớn.

- 3) *Vùng III là vùng tần số rất cao.* Vùng này mang ít, có thể bỏ qua được, những thông tin về chất lượng kỹ thuật của hệ thống. Để hệ không bị ảnh hưởng bởi nhiều tần số rất cao, tức là khi ở tần số rất cao $G(s)$ cần có biên độ rất nhỏ, thì trong vùng này hàm $G_h(j\omega)$ nên có giá trị tiến đến 0.

Ta có thể thấy được rằng hàm truyền đạt

$$G_h(s) = \frac{k_h(1 + T_s)}{(T_1 s)^2 (1 + sT_2)}$$

có cấu trúc đơn giản song đáp ứng được các yêu cầu nêu trên của cả ba vùng tần số. Hàm truyền đạt $G_h(s)$ này tương ứng với hàm truyền đạt hệ hở của hệ kín có bộ điều khiển PI

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{k_p(1 + T_I s)}{T_I s}$$

và đổi tương tích phân-quán tính bậc nhất IT_1 (mục 2.2.2, trang 103)

$$S(s) = \frac{k}{T s (1 + T_\Sigma s)}$$

tức là

$$G_h(s) = S(s)R(s) = \frac{k_p k (1 + T_I s)}{T_I T s^2 (1 + T_\Sigma s)} \quad (4.17)$$

Rõ ràng là trong vùng I, hàm $G_h(s)$ theo (4.17) thỏa mãn (4.16b). Để ở vùng II, biểu đồ biên độ Bode của $G(s)$ cho trong (4.17) có độ nghiêng $-20\text{dB}/\text{dec}$ xung quanh điểm tần số cắt ω_c thì phải có

$$\omega_I = \frac{1}{T_I} < \omega_\Sigma = \frac{1}{T_\Sigma} \quad \Rightarrow \quad T_I > T_\Sigma \quad (4.18a)$$

$$\text{và} \quad |G_h(j\omega_I)| > |G_h(j\omega_c)| = 1 > |G_h(j\omega_\Sigma)|. \quad (4.18b)$$

Từ mô hình (4.17) của hệ hồi, ta có góc pha

$$\varphi_h(\omega) = \arg G_h(j\omega) = \arctan(\omega T_I) - \arctan(\omega T_\Sigma) - \pi$$

Nhằm nâng cao độ dự trữ ổn định cho hệ kín, các tham số bộ điều khiển cần phải được chọn sao cho tại tần số cắt ω_c góc pha $\varphi_h(\omega_c)$ là lớn nhất. Điều này dẫn đến:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_h(\omega_c)}{d\omega} = 0 &\Rightarrow \frac{T_I}{1 + (\omega_c T_I)^2} - \frac{T_\Sigma}{1 + (\omega_c T_\Sigma)^2} = 0 \\ &\Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\sqrt{T_I T_\Sigma}} \quad \Rightarrow \quad \lg(\omega_c) = \frac{\lg(\omega_I) + \lg(\omega_\Sigma)}{2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Kết quả (4.19) này nói rằng trong biểu đồ Bode, điểm tần số cắt ω_c cần phải nằm giữa hai điểm tần số gây ω_I và ω_Σ (hình 4.17b). Đó cũng là lý do tại sao phương pháp có tên là *đổi xứng*.

Gọi khoảng cách giữa ω_I và ω_Σ do trong hệ trực tọa độ biểu đồ Bode là a , ta có

$$\lg a = \lg \omega_\Sigma - \lg \omega_I = \lg \frac{T_I}{T_\Sigma} \Rightarrow a = \frac{T_I}{T_\Sigma}. \quad (4.20)$$

Như vậy, rõ ràng sẽ có (4.18a) nếu có $a > 1$.

Thay ω_c cho trong (4.19) vào (4.18b), ta sẽ có với (4.17) và (4.20)

$$\begin{aligned} |G_h(j\omega_c)| = 1 &\Leftrightarrow \frac{k_p k \sqrt{1 + (T_I \omega_C)^2}}{T_I T_C \omega_C^2 \sqrt{1 + (T_\Sigma \omega_C)^2}} = 1 \\ &\Leftrightarrow k_p = \frac{T}{k T_\Sigma \sqrt{a}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Nói cách khác nếu đã có $a > 1$ và (4.21) thì cũng có (4.18b).

Khoảng cách a giữa ω_I và ω_Σ còn là một đại lượng đặc trưng cho độ quá điều chỉnh Δh_{\max} của hệ kín nếu hệ có dao động. Cụ thể là a càng lớn, độ quá điều chỉnh Δh_{\max} càng nhỏ. Điều này ta thấy được như sau.

Trong vùng II, hàm truyền đạt hệ hồi $G_h(s)$ được thay thế gần đúng bằng (kiểm tra lại nhờ biểu đồ Bode):

$$\tilde{G}_h(s) = \frac{1}{T_C s (1 + T_\Sigma s)} \quad \text{với} \quad T_C = \frac{1}{\omega_C}.$$

Khi đó hệ kín sẽ có hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{\tilde{G}_h(s)}{1 + \tilde{G}_h(s)} = \frac{1}{1 + T_C s + T_C T_\Sigma s^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2D\omega_n s + \omega_n^2}$$

với $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{T_C T_\Sigma}}$ và $2D = \sqrt{\frac{T_C}{T_\Sigma}}$

$$\Rightarrow \lg 2D = (\lg T_C - \lg T_\Sigma) = \frac{\lg a}{2} \quad (\text{vì tính chất đối xứng của } \omega_c)$$

$$\Rightarrow D = \frac{\sqrt{a}}{2} < 1 \quad \text{nếu } 4 > a > 1.$$

Vậy trong vùng II, hàm quá độ hệ kín có dạng dao động tắt dần khi $4 > a > 1$. Theo nội dung mục 3.1.3, trang 181, độ quá điều chỉnh của hàm quá độ hệ kín sẽ là

$$\Delta h_{\max} = e^{-\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}} \Rightarrow a = \frac{4 \ln^2(\Delta h_{\max})}{\pi^2 + \ln^2(\Delta h_{\max})}. \quad (4.22)$$

Công thức (4.22) xác nhận điều kiện là Δh_{\max} nghịch biến với a . Ngoài ra nó còn chỉ rằng Δh_{\max} chỉ phụ thuộc vào a do đó sẽ được sử dụng để xác định a từ yêu cầu chất lượng hệ kín về Δh_{\max} .

Tóm lại, nếu đối tượng là khâu tích phân-quán tính bậc nhất (trong vùng II)

$$S(s) = \frac{k}{Ts(1 + T_\Sigma s)}$$

thì bộ điều khiển tối ưu đối xứng sẽ là bộ điều khiển PI

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$

với các tham số xác định như sau:

- 1) Xác định $4 > a > 1$ từ độ quá điều chỉnh Δh_{\max} cần có của hệ kín có dao động theo (4.22), hoặc chọn $a > 1$ từ yêu cầu chất lượng đề ra. Giá trị a được chọn càng lớn, độ quá điều chỉnh càng nhỏ. Để hệ kín không có dao động thì chọn $a \geq 4$. Nếu $a \leq 1$, hệ kín sẽ không ổn định.
- 2) Tính T_I theo (4.20), tức là $T_I = a T_\Sigma$.
- 3) Tính k_p theo (4.21), tức là $k_p = \frac{T}{k T_\Sigma \sqrt{a}}$.

Chú ý là tên gọi *tối ưu đối xứng* không mang ý nghĩa toán học chặt chẽ của bài toán tối ưu. Nó chỉ muốn nói rằng nếu chọn tham số cho bộ điều khiển theo phương pháp này sẽ được một hệ kín có độ dự trữ ổn định theo nghĩa góc pha $\varphi_h(\omega_c)$ đã được xấp xỉ trong vùng II là lớn nhất.

Ví dụ 10: Xét đổi tương tích phân-quán tính bậc nhất mô tả bởi

$$S(s) = \frac{2}{s(1+0,3s)}, \quad k=2, \quad T=1, \quad T_{\Sigma}=0,3.$$

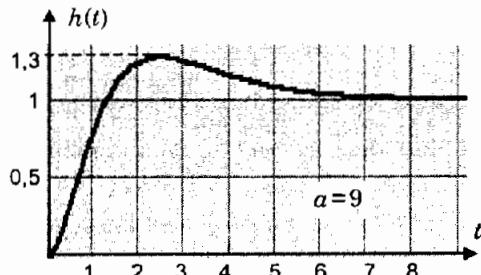
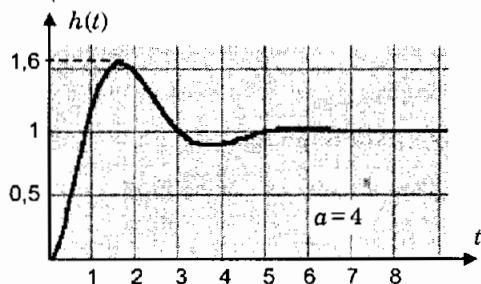
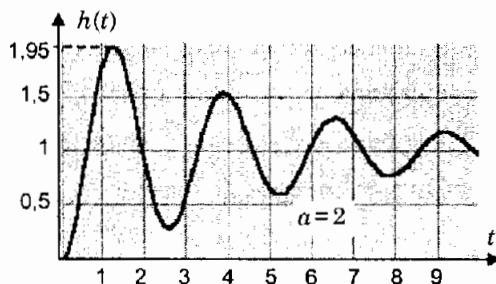
Chọn bộ điều khiển PI để điều khiển theo nguyên tắc tối ưu đối xứng

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{k_p(1+T_I s)}{T_I s}$$

ta sẽ có các tham số sau được chọn theo (4.20) và (4.21):

- a) Khi $\alpha=2$: $k_p=1,18$, $T_I=0,6$
- b) Khi $\alpha=4$: $k_p=0,83$, $T_I=1,2$
- c) Khi $\alpha=9$: $k_p=0,56$, $T_I=2,7$

Hình 4.18 là đồ thị hàm quá độ hệ kín ứng với các tham số bộ điều khiển đã được chọn cho cả ba trường hợp nêu trên. \square



Hình 4.18: Hàm quá độ hệ kín với bộ điều khiển PI có các tham số được chọn theo nguyên tắc điều khiển tối ưu đối xứng ứng với những giá trị α khác nhau.

4.3.2 Điều khiển đổi tương tích phân – quán tính bậc hai

Phản 4.3.1 đã giới thiệu thuật toán xác định tham số bộ điều khiển PI cho đổi tương tích phân-quán tính bậc nhất. Nếu sử dụng bộ điều khiển PID thay vì PI ta sẽ có thêm một tham số tự do để lựa chọn là T_D . Điều này cho phép điều khiển được đổi tương có độ phức tạp hơn một cấp là khai tích phân-quán tính bậc hai:

$$S(s) = \frac{k}{Ts(1+T_1s)(1+T_{\Sigma}s)} \quad (4.23)$$

Bộ điều khiển PID có hàm truyền đạt

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) = \frac{k_p (1 + T_A s)(1 + T_B s)}{T_I s}$$

trong đó

$$T_A + T_B = T_I \quad \text{và} \quad T_A T_B = T_I T_D.$$

Ta sẽ chọn một trong hai tham số T_A hoặc T_B của bộ điều khiển để bù một hằng số thời gian của đối tượng sao cho cuối cùng hệ hồi lại có hàm truyền đạt dạng chính tắc (4.17), tức là chọn hoặc $T_A = T_1$ hoặc $T_B = T_1$. Các tham số còn lại được xác định theo nguyên tắc tối ưu đối xứng đã trình bày trong phần trên (mục 4.3.1).

Không mất tính tổng quát nếu ta chọn $T_A = T_1$. Khi đó hệ hồi có hàm truyền đạt

$$G_h(s) = S(s)R(s) = \frac{k_p k (1 + T_B s)}{T_I T s^2 (1 + T_\Sigma s)} = \underbrace{\frac{k_p T_B}{T_I}}_{\tilde{k}_p} \cdot \frac{k (1 + T_B s)}{T_B T s^2 (1 + T_\Sigma s)} \quad (4.24)$$

So sánh với dạng chính tắc (4.17) thì chỉ có một sửa đổi nhỏ trong (4.24) là k_p nay được thay bởi $\tilde{k}_p = \frac{k_p T_B}{T_I}$. Tương ứng, thuật toán xác định tham số tối ưu đối xứng cho bộ điều khiển cũng được hiệu chỉnh lại như sau:

a) Chọn $T_A = T_1$.

b) Xác định $4 > a > 1$ từ độ quá điều chỉnh Δh_{\max} cần có của hệ kín có dao động, hoặc chọn $a > 1$ từ yêu cầu chất lượng đề ra. Giá trị a được chọn càng lớn, độ quá điều chỉnh càng nhỏ. Để hệ kín không có dao động thì chọn $a \geq 4$. Nếu chọn $a \leq 1$, hệ kín sẽ không ổn định.

c) Tính $T_B = a T_\Sigma$. Từ đó suy ra $T_I = T_A + T_B$ và $T_D = \frac{T_A T_B}{T_I}$.

d) Tính $\tilde{k}_p = \frac{T}{k T_\Sigma \sqrt{a}}$ rồi suy ra $k_p = \frac{\tilde{k}_p T_I}{T_B}$.

Ví dụ 11: Xét đối tượng tích phân-quán tính bậc hai

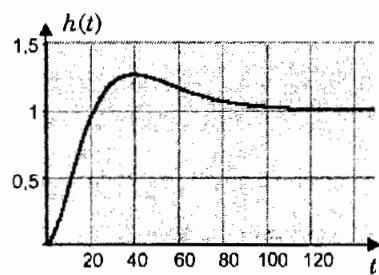
$$S(s) = \frac{2}{s(1+3s)(1+5s)},$$

Từ $k=2$, $T=1$, $T_1=3$, $T_\Sigma=5$ ta có với $a=8$

$$k_p = 0,04, T_I = 43, T_D = 2,8$$

cho bộ điều khiển PID.

Hình 4.19 bên cạnh biểu diễn hàm quá độ hệ kín.



Hình 4.19: Minh họa cho ví dụ 11.

4.3.3 Điều khiển đối tượng tích phân – quán tính bậc cao

Nhớ lại mục 4.2.2, khi thiết kế bộ điều khiển tối ưu độ lớn cho đối tượng quán tính bậc cao ta đã xấp xỉ nó bằng một hàm truyền đạt quán tính bậc một hoặc hai. Tương tự, ở đây cũng vậy, với đối tượng có hàm truyền đạt

$$S(s) = \frac{k}{Ts(1+T_1s)(1+T_2s) \cdots (1+T_ns)}$$

trong đó tất cả các hằng số thời gian T_1, T_2, \dots, T_n đều đủ nhỏ thì ta sẽ ghép chúng lại thành

$$T_\Sigma = \sum_{k=1}^n T_k$$

để đưa hàm truyền đạt của đối tượng thành dạng chính tắc

$$S(s) = \frac{k}{Ts(1+T_\Sigma s)}.$$

Giống như ở mục 4.3.1, bộ điều khiển thích hợp là bộ điều khiển PI:

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{k_p(1+T_I s)}{T_I s}.$$

Các tham số k_p và T_I của bộ điều khiển PI sẽ được chọn như sau:

- 1) Xấp xỉ $T_\Sigma = \sum_{k=1}^n T_k$.
- 2) Xác định $4 > a > 1$ từ độ quá điều chỉnh Δh_{\max} cần có của hệ kín có dao động, hoặc chọn $a > 1$ từ yêu cầu chất lượng đề ra. Giá trị a được chọn càng lớn, độ quá điều chỉnh càng nhỏ. Để hệ kín sẽ không có dao động thì chọn $a \geq 4$.
- 3) Tính $T_I = a T_\Sigma$.
- 4) Tính $k_p = \frac{T}{k T_\Sigma \sqrt{a}}$.

Riêng trường hợp $S(s)$ có một hằng số thời gian T_1 lớn vượt trội, còn lại các hằng số khác T_2, T_3, \dots, T_n đều đủ nhỏ thì ta sẽ xấp xỉ hàm truyền của nó thành dạng (4.23):

$$S(s) = \frac{k}{Ts(1+T_1s)(1+T_\Sigma s)} \quad \text{với} \quad T_\Sigma = \sum_{k=2}^n T_k, \quad T_1 > T_\Sigma.$$

Các tham số k_p , T_I và T_D của bộ điều khiển PID sẽ được chọn như sau:

- 1) Xấp xỉ $T_\Sigma = \sum_{k=2}^n T_k$.
- 2) Chọn $T_A = T_1$.

- 3) Xác định $a > \alpha > 1$ từ độ quá điều chỉnh Δh_{\max} cần có của hệ kín có dao động, hoặc chọn $\alpha > 1$ từ yêu cầu chất lượng đề ra. Giá trị α được chọn càng lớn, độ quá điều chỉnh càng nhỏ. Để hệ kín sẽ không có dao động thì chọn $\alpha \geq 4$.
- 4) Tính $T_B = \alpha T_\Sigma$. Từ đó suy ra $T_I = T_A + T_B$ và $T_D = \frac{T_A T_B}{T_I}$.
- 5) Tính $\tilde{k}_p = \frac{T}{k T_\Sigma \sqrt{a}}$ rồi suy ra $k_p = \frac{\tilde{k}_p T_I}{T_B}$.

Song một điều cần phải đặc biệt chú ý khi sử dụng các phương pháp xấp xỉ hàm truyền đạt nêu trên cho công việc thiết kế bộ điều khiển tối ưu đối xứng là sự xấp xỉ đó chỉ thỏa mãn về mặt biên độ (nên nó áp dụng được cho bộ điều khiển tối ưu độ lớn) chứ không xấp xỉ được góc pha, trong khi bộ điều khiển tối ưu đối xứng lại rất dễ ý đến góc pha $\varphi_h(\omega_c)$ của hệ hở để đảm bảo tính ổn định cho hệ kín. Việc xấp xỉ các hằng số thời gian T_1, T_2, \dots, T_n cũng như T_2, T_3, \dots, T_n bởi T_Σ đã vô hình chung xấp xỉ quá thô sự thay đổi góc pha của đối tượng từ $-n \frac{\pi}{2}$ thành $-\frac{\pi}{2}$. Điều này rất dễ đưa đến sự vi phạm điều kiện về góc pha $\varphi_h(\omega_c)$ và làm cho hệ kín mất ổn định.

4.3.4 Điều khiển đối tượng bất kỳ

Như đã lý luận ở mục 4.3.3, việc xấp xỉ hàm truyền đạt bậc cao của đối tượng thành những dạng chính tắc tích phân-quán tính bậc 1 hoặc 2 dễ đưa đến trường hợp hệ kín không ổn định nếu như bộ điều khiển được dùng vẫn là PI hoặc PID.

Nhưng khi rời bỏ bộ điều khiển PID quen thuộc, ta sẽ áp dụng được nguyên lý tối ưu đối xứng cho một đối tượng bất kỳ.

Mục đích của điều khiển tối ưu đối xứng là xác định bộ điều khiển $R(s)$ cho đối tượng $S(s)$, sao cho với nó, hệ thống có được hàm truyền đạt hệ hở dạng:

$$G_h(s) = S(s)R(s) = \frac{k_h(1 + T_1 s)}{(Ts)^2(1 + sT_2)}, \quad (4.25)$$

với

- a) $T_1 > T_2$
- b) Tần số cắt $\omega_C \approx \frac{T}{\sqrt{k_h}}$ nằm ở giữa hai điểm tần số gãy $\omega_1 = \frac{1}{T_1}, \omega_2 = \frac{1}{T_2}$ trong biểu đồ Bode (xung quanh tần số cắt ω_C có độ nghiêng -20dB/dec).
- c) Khoảng cách a giữa hai điểm tần số gãy ω_1, ω_2 là đủ lớn.

Từ mô hình mong muốn (4.25) của hệ hở, trong vùng tần số II (hình 4.17b) hệ kín sẽ có hàm truyền đạt gần đúng (mục 4.3.1, trang 312)

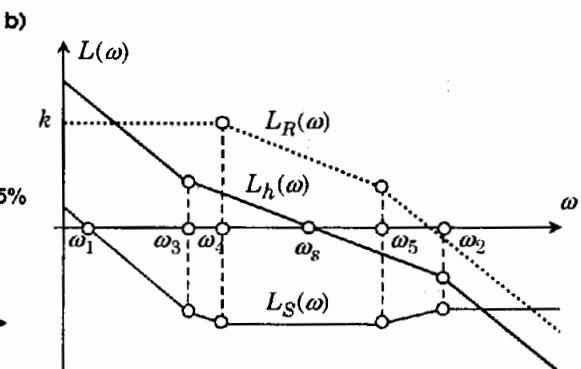
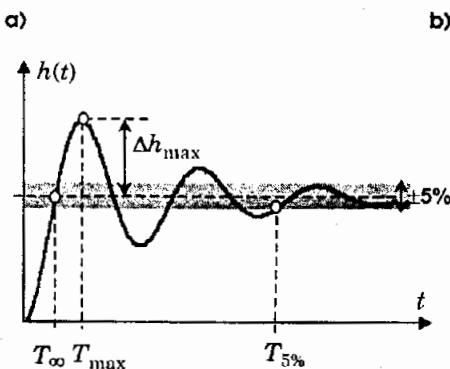
$$G(s) = \frac{G_h(s)}{1 + G_h(s)} \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2D\omega_n s + \omega_n^2}$$

với $\omega_n = \sqrt{\frac{\omega_C}{T_2}}$ và $D = \frac{\sqrt{a}}{2}$.

Do đó khi $D < 1$ sẽ có (trang 183):

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \Delta h_{\max} &= e^{-\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}} \\ \text{b)} \quad T_{5\%} &\approx \frac{3}{D\omega_n} \\ \text{c)} \quad T_c &\approx \frac{3}{2\omega_C} \\ \text{c)} \quad T_{\max} &= \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-D^2}} \\ \text{d)} \quad T_\infty &= \frac{\arctan \frac{-\sqrt{1-D^2}}{D}}{\omega_n \sqrt{1-D^2}}. \end{aligned}$$

trong đó T_c là khoảng thời gian cần thiết để tiếp tuyến tại điểm uốn đầu tiên của $h(t)$ đi được từ 0 đến $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ (giống như giá trị b cho trong hình 4.7, trang 298).



Hình 4.20: Xác định tham số hệ hở từ yêu cầu chất lượng của hệ kín để từ đó có bộ điều khiển $R(s)$.

Các công thức trên được sử dụng để xác định tham số cho hàm truyền hệ hở (4.25) trên cơ sở từ yêu cầu chất lượng cần có của hệ kín (hình 4.20a). Với những tham số đã được xác định đó, ta có được biểu đồ Bode $L_h(\omega)$ mong muốn của $G_h(s)$ và do đó cũng suy ra được biểu đồ Bode $L_R(\omega)$ của bộ điều khiển $R(s)$ theo công thức (hình 4.20b)

$$L_R(\omega) = L_h(\omega) - L_S(\omega). \quad (4.26)$$

Từ $L_R(\omega)$ ta sẽ có công thức hàm truyền đạt $R(s)$ cho bộ điều khiển.

Ví dụ 12: Xét đối tượng có hàm truyền đạt

$$S(s) = \frac{(1+T_3s)(1+T_4s)(1+T_5s)}{(T_1s)^2(1+T_2s)}, \quad \text{trong đó } T_1 > T_3 > T_4 > T_5 > T_2.$$

Đồ thị biên độ $L_S(\omega)$ của đối tượng cho trong hình 4.20b).

Giả sử từ yêu cầu chất lượng cần có cho hệ kín ta có $L_h(\omega)$ của hệ hở với điểm tần số cát ω_s là điểm giữa của hai tần số gãy $\omega_3 = \frac{1}{T_3}$, $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$. Thực hiện phép trừ (4.26) ngay trên đồ thị Bode ta được $L_R(\omega)$ cho bộ điều khiển. Với đường đồ thị $L_R(\omega)$ này thì:

$$R(s) = \frac{k}{(1+T_4s)(1+T_5s)}.$$

□

4.3.5 Nâng cao chất lượng hệ kín bằng bộ điều khiển tiên xử lý

Quy tụ chung lại ở phương pháp thiết kế bộ điều khiển tối ưu đối xứng là từ hàm truyền đạt $S(s)$ của đối tượng, bộ điều khiển $R(s)$ phải được chọn sao cho cùng với nó, hệ hở của hệ thống có hàm truyền đạt với cấu trúc

$$G_h(s) = S(s)R(s) = \frac{Kk(1+\tilde{T}s)}{\tilde{T} \cdot Ts^2(1+T_\Sigma s)} \quad (4.27a)$$

trong đó

$$K = \frac{T}{kT_\Sigma \sqrt{a}}, \quad \tilde{T} = aT_\Sigma. \quad (4.27b)$$

Chẳng hạn như với đối tượng là khâu tích phân-quán tính bậc nhất IT_1 và bộ điều khiển PI đã nói tới ở mục 4.3.1 thì $K = k_p$, $\tilde{T} = T_I$, hay khi đối tượng là khâu tích phân-quán tính bậc hai, bộ điều khiển là PID ở mục 4.3.2 theo công thức (4.24) thì $K = \tilde{k}_p$, $\tilde{T} = T_B$.

Tham số a được chọn từ yêu cầu chất lượng cần có của hệ kín. Cụ thể là:

- Hệ kín có dao động khi $4 > a > 1$. Nếu $a \geq 4$ hệ kín sẽ không có dao động.
- Hệ kín sẽ không ổn định với $a \leq 1$.
- Độ quá điều chỉnh Δh_{\max} của hệ kín và a tỷ lệ nghịch với nhau, Δh_{\max} càng nhỏ nếu giá trị a được chọn càng lớn.
- Khi a được chọn càng lớn, vùng I sẽ càng hẹp làm cho miền tần số mà tại đó chất lượng hệ thống được đánh giá theo biên độ hàm đặc tính tần số hệ kín càng thấp (hình 4.17b).

$$|G(j\omega)| \approx 1 \quad (4.27c)$$

Vậy làm thế nào nâng cao được chất lượng hệ thống theo nghĩa mở rộng miền tần số mà ở đó có (4.27c) nhưng lại không làm tăng độ quá điều chỉnh Δh_{\max} của hệ kín?. Để trả lời ta hãy thay (4.27b) vào (4.27a)

$$G_h(s) = \frac{1 + aT_\Sigma s}{a\sqrt{a}T_\Sigma^2 s^2(1 + T_\Sigma s)}$$

rồi xác định hàm truyền đạt hệ kín

$$G(s) = \frac{G_h(s)}{1 + G_h(s)} = \frac{1 + aT_\Sigma s}{1 + aT_\Sigma s + a\sqrt{a}T_\Sigma^2 s^2 + a\sqrt{a}T_\Sigma^3 s^3}.$$

Như vậy nguyên nhân làm tăng độ quá điều chỉnh Δh_{\max} chính là thành phần vi phân có trong đa thức tử số của $G(s)$. Nhận xét này đưa đến suy nghĩ là để giảm độ quá điều chỉnh này ta nên nối hệ kín với khâu tiền xử lý

$$M(s) = \frac{1}{1 + aT_\Sigma s}$$

để loại bỏ thành phần vi phân này ra khỏi đa thức tử số (hình 4.21):

$$\tilde{G}(s) = M(s)G(s) = \frac{1}{1 + aT_\Sigma s + a\sqrt{a}T_\Sigma^2 s^2 + a\sqrt{a}T_\Sigma^3 s^3}. \quad (4.28)$$

Vấn đề còn lại là xác định tham số a để $\tilde{G}(s)$ có dải tần số thấp thỏa mãn

$$|\tilde{G}(j\omega)| \approx 1 \quad (4.29)$$

là rộng nhất.

Từ (4.28) có

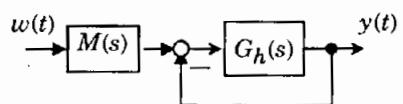
$$|\tilde{G}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + a\sqrt{a}T_\Sigma^2(\sqrt{a} - 2)\omega^2 + a^2\sqrt{a}T_\Sigma^4(\sqrt{a} - 2)\omega^4 + a^3T_\Sigma^6\omega^6}$$

Suy ra, để có (4.29) trong miền tần số thấp có độ rộng lớn nhất thì

$$\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4.$$

Ta đi đến các thuật toán:

- 1) Nếu đối tượng là khâu tích phân-quán tính bậc nhất $S(s) = \frac{k}{Ts(1 + T_\Sigma s)}$ thì
 - a) Chọn bộ điều khiển PI với $R(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_I s})$, $k_p = \frac{T}{2kT_\Sigma}$, $T_I = 4T_\Sigma$.
 - b) Chọn bộ tiền xử lý $M(s) = \frac{1}{1 + 4T_\Sigma s}$.



Hình 4.21: Giảm độ quá điều chỉnh bằng bộ tiền xử lý.

- 2) Nếu đối tượng là khâu tích phân-quán tính bậc hai $S(s) = \frac{k}{Ts(1+T_1s)(1+T_\Sigma s)}$ thì
- a) Chọn bộ điều khiển PID với $R(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s)$, trong đó

$$T_I = T_1 + 4T_\Sigma, \quad T_D = \frac{4T_1 T_\Sigma}{T_1 + 4T_\Sigma}, \quad k_p = \frac{T_I T}{8k T_\Sigma^2}.$$

- b) Chọn bộ tiền xử lý $M(s) = \frac{1}{1 + 4T_\Sigma s}$.

- 3) Nếu đối tượng là khâu tích phân-quán tính bậc cao thì ta xấp xỉ nó về dạng hoặc tích phân-quán tính bậc nhất hoặc tích phân-quán tính bậc hai như ở mục 4.3.3 rồi sử dụng một trong hai thuật toán nêu trên.

Ví dụ 13: Xét lại đối tượng đã cho trong ví dụ 11

$$S(s) = \frac{2}{s(1+3s)(1+5s)},$$

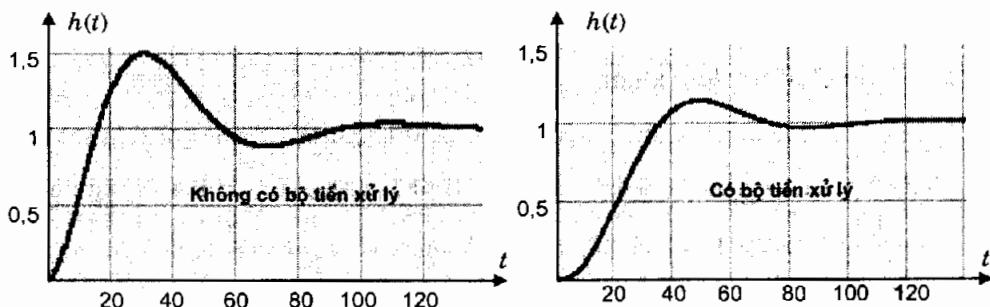
Như vậy đối tượng có dạng tích phân-quán tính bậc hai nên sẽ được điều khiển bằng bộ điều khiển PID. Từ $k=2$, $T=1$, $T_1=3$, $T_\Sigma=5$ ta có với $\alpha=4$ các tham số sau cho bộ điều khiển PID

$$T_I = 23, T_D = 2,6, k_p = 0,0125$$

Hình 4.22 biểu diễn hàm quá độ $h(t)$ của hệ kín cho hai trường hợp không có và có bộ điều khiển tiền xử lý

$$M(s) = \frac{1}{1 + 20s}.$$

Cũng từ hình 4.22 ta thấy bộ điều khiển tiền xử lý đã có tác dụng giảm độ quá điều chỉnh Δh_{\max} cho $h(t)$ của hệ kín. \square

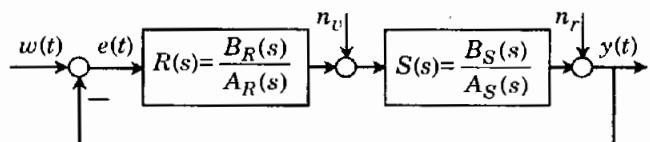


Hình 4.22: Minh họa ví dụ 13.

4.4 Phương pháp cân bằng mô hình

4.4.1 Nội dung phương pháp

Trong một số tài liệu (đặc biệt các tài liệu tiếng Đức), phương pháp cân bằng mô hình (*model matching*) còn được gọi là phương pháp thiết kế bộ điều khiển bù. Nó có nhiệm vụ xác định bộ điều khiển $R(s)$ trên cơ sở đã biết trước hàm truyền đạt $S(s)$ của đối tượng và hàm truyền đạt cần có $G(s)$ của hệ thống kín (hình 4.23), trong đó hàm truyền đạt $G(s)$ của hệ kín được xác định từ các yêu cầu chất lượng phải có của bài toán điều khiển.



Hình 4.23: Minh họa phương pháp cân bằng mô hình.

Nếu gọi

$$S(s) = \frac{B_S(s)}{A_S(s)} \quad \text{và} \quad G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

thì từ

$$G(s) = \frac{S(s)R(s)}{1 + S(s)R(s)} \quad (4.30a)$$

sẽ có hàm truyền đạt của bộ điều khiển

$$R(s) = \frac{G(s)}{S(s) - S(s)G(s)} = \frac{1}{S(s)} \cdot \frac{G(s)}{1 - G(s)} \quad (4.30b)$$

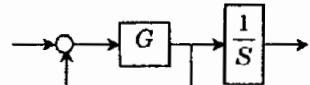
$$\Leftrightarrow R(s) = \frac{A_S(s)}{B_S(s)} \cdot \frac{B(s)}{A(s) - B(s)} \quad (4.30c)$$

4.4.2 Tính chất bộ điều khiển

Công thức (4.30b) cho thấy bộ điều khiển $R(s)$ chính là sự mắc nối tiếp của khâu nghịch đảo đối tượng $\frac{1}{S(s)}$ với khâu hồi tiếp phản hồi dương có hàm truyền đạt hệ hở là $G(s)$ – hình 4.24. Do đó điều kiện đầu tiên để có được bộ điều khiển ổn định là tất cả các điểm không của $S(s)$ phải nằm bên trái trục ảo.

Mặt khác, từ mong muốn rằng hệ kín ổn định nội, tức là tất cả các hàm truyền đạt tính từ những tín hiệu tác động vào hệ, gồm có tín hiệu đặt trước $w(t)$, tín hiệu nhiễu $n_v(t)$, $n_r(t)$, cho tới các tín hiệu ra, gồm có $e(t)$, $y(t)$

- a) Từ $w(t)$ tới $y(t)$ là $G(s)$.
- b) Từ $n_v(t)$ tới $y(t)$ là $\frac{1}{1+SR}$.
- c) Từ $n_v(t)$ tới $y(t)$ là $\frac{S}{1+SR}$.
- d) Từ $w(t)$ tới $e(t)$ và từ $n_r(t)$ tới $y(t)$ là $\frac{1}{1+SR}$.



Hình 4.24: Cấu trúc bộ điều khiển.

phải là những hàm bền, thì đối tượng phải ổn định. Kết hợp với kết quả trước ta có được điều kiện đầu tiên:

- 1) Muốn có được bộ điều khiển $R(s)$ ổn định và cùng với nó hệ kín ổn định nội thì đối tượng $S(s)$ phải là một khâu pha cực tiêu.

Tiếp tục, nếu $S(s)$ là pha cực tiêu thì từ sơ đồ cấu trúc ở hình 4.24 cho bộ điều khiển, phần hồi tiếp phản hồi dương với $G(s)$ có hàm truyền đạt $\frac{G}{1-G}$ phải ổn định thì bộ điều khiển mới ổn định. Bởi vậy:

- 2) Để bộ điều khiển $R(s)$ ổn định khi đối tượng là pha cực tiêu thì $\frac{G}{1-G}$ phải là hàm bền, hay hiệu $A(s) - B(s)$ phải là đa thức Hurwitz.

Muốn sử dụng bộ điều khiển $R(s)$ xác định theo công thức (4.30c) thì nó phải tích hợp được trên các thiết bị thực tế, nói cách khác $R(s)$ phải là hàm hợp thức. Điều này dẫn đến bậc của đa thức tích $A_S(s)B(s)$ không được lớn hơn bậc của $B_S(s)[A(s) - B(s)]$. Nếu gọi n_{A_S} là bậc của $A_S(s)$, n_B là bậc của $B(s)$, n_{B_S} là bậc của $B_S(s)$, n_A là bậc của $A(s)$ thì do $n_A \geq n_B$ nên điều kiện trên được biểu diễn thành

$$n_{A_S} + n_B \leq n_{B_S} + n_A \quad \Leftrightarrow \quad n_{A_S} - n_{B_S} \leq n_A - n_B.$$

Suy ra:

- 3) Muốn tích hợp được bộ điều khiển cân bằng mô hình thì bậc tương đối của hệ kín không được nhỏ hơn bậc tương đối của đối tượng.

Trong khi hai tính chất 1 và 2 là thứ yếu, chỉ có tác dụng để bộ điều khiển $R(s)$ được ổn định thì tính chất thứ 3 có vai trò quyết định giúp cho người thiết kế, ngoài các chỉ tiêu chất lượng mong muốn của hệ, có thêm thông tin về bậc tương đối giúp xác định được đúng cấu trúc hàm truyền đạt $G(s)$ cần phải có. Ta xét một ví dụ:

Ví dụ 14: Cho đối tượng

$$S(s) = \frac{0.5}{1 + 3s + 2s^2}.$$

Đo đối tượng có bậc tương đối là hai nên bậc tương đối của hàm truyền đạt hệ kín là $G(s)$ cũng phải ít nhất là hai. Cấu trúc $G(s)$ đơn giản nhất có bậc tương đối bằng hai và làm cho hệ kín ổn định, không có sai lệch tĩnh khi được kích thích bởi $1(t)$, là:

$$G(s) = \frac{ab}{(s+a)(s+b)} \quad \text{với} \quad a, b > 0.$$

Từ đây ta suy ra được theo (4.27b):

$$R(s) = \frac{1+3s+2s^2}{0,5} \cdot \frac{ab}{s^2 + (a+b)s} = \frac{2ab(1+3s+2s^2)}{s[s+(a+b)]}.$$
□

Kết quả của ví dụ 14 cho thấy bộ điều khiển $R(s)$ có chứa thành phần tích phân và điều này là phù hợp với nội dung định lý 3.44, trang 254 để hệ không có sai lệch tĩnh.

Một cách tổng quát, nếu ta giả sử

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n}$$

thì để hệ không có sai lệch tĩnh ($\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1$), hàm $G(s)$ phải thỏa mãn $G(0) = 1$ và do đó $a_0 = b_0$. Điều này đưa đến là đa thức $A(s) - B(s)$ có một nghiệm 0. Nếu $A_S(s)$ không có nghiệm 0, bộ điều khiển $R(s)$ xác định theo (4.30c) sẽ có điểm cực là gốc tọa độ (có thành phần tích phân). Ngược lại nếu $A_S(s)$ có nghiệm 0, tức là đối tượng đã có thành phần tích phân, thì nghiệm 0 đó được giản ước với nghiệm 0 của $A(s) - B(s)$ làm cho $R(s)$ không còn chứa thành phần tích phân. Vậy:

- 4) *Từ yêu cầu chất lượng rằng hệ kín không có sai lệch tĩnh, bộ điều khiển thiết kế theo phương pháp cân bằng mô hình sẽ chứa thành phần tích phân nếu đối tượng không có thành phần đó. Ngược lại khi đối tượng đã có sẵn thành phần tích phân trong nó thì bộ điều khiển sẽ không có thành phần này.*

4.4.3 Sự ảnh hưởng của nhiễu

Nhiễu được quan tâm ở đây là nhiễu tác động tại đầu ra của đối tượng, giống như $n(t)$ trong hình 4.17a) hay $n_r(t)$ trong hình 4.23. Đây là thể loại nhiễu thường gặp nhất trong các hệ thống điều khiển, ví dụ như trong hệ thống điều khiển mạng lưới phân phối điện của nhà máy điện thì nhiễu đó sẽ là mực độ tiêu thụ năng lượng điện đầu cuối, ở hệ thống điều khiển động cơ thì nó sẽ là nhiễu tải động cơ, trong hệ thống điều khiển cầu trục, nhiễu đầu ra là trọng lượng của vật được cầu cũng như độ dài dây buộc hàng

Đánh giá chất lượng bộ điều khiển đã được thiết kế đối với sự ảnh hưởng của nhiễu là công việc xác định phản ứng của hệ thống đối với kích thích $n(t)$ hay $n_r(t)$ tại đầu ra của đối tượng. Gọi hàm truyền đạt với đầu vào $n_r(t)$ và đầu ra $y(t)$ là $G_n(s)$ thì

$$G_n(s) = \frac{1}{1+SR} = 1 - G(s), \quad (4.31)$$

trong đó $G(s)$ là hàm truyền đạt của hệ kín, có đầu vào $w(t)$ và đầu ra $y(t)$.

Hệ thống sẽ được gọi là có chất lượng tốt (bền vững) đối với nhiễu nếu như

$$G_n(s) \approx 0.$$

Vậy thì từ quan hệ (4.31) ta thấy được những bộ điều khiển $R(s)$ nào đã mang đến cho hệ thống chất lượng

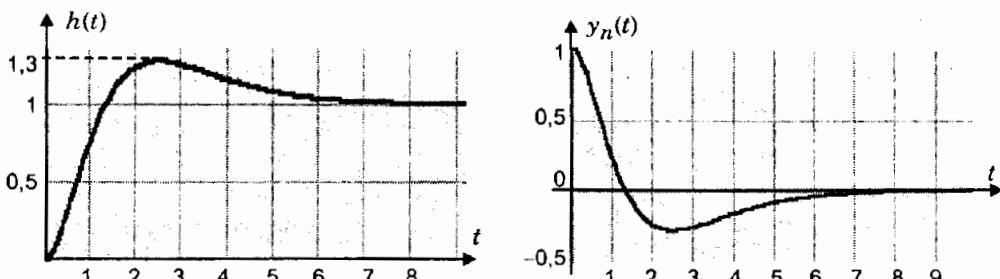
$$|G(j\omega)| \approx 1$$

trong một dải tần số (thấp) rộng như bộ điều khiển tối ưu độ lớn, tối ưu đối xứng, cũng sẽ mang đến cho hệ thống khả năng bền vững với nhiễu.

Ví dụ 15: Xét lại hệ thống gồm đối tượng tích phân-quán tính bậc nhất và bộ điều khiển PI được thiết kế theo nguyên tắc tối ưu đối xứng ứng với $a=9$ đã cho trong ví dụ 10

$$S(s) = \frac{2}{s(1+0.3s)}, \quad R(s) = 0.56\left(1 + \frac{1}{2.7s}\right)$$

Khi đó hàm quá độ $h(t)$ của hệ kín cũng như đáp ứng $y_n(t)$ của hệ thống khi có nhiễu $n_r(t)=1(t)$ và $w(t)=0$ sẽ có dạng như hình 4.25 mô tả. \square



Hình 4.25: Hàm quá độ và phản ứng của hệ thống khi có nhiễu tác động tại đầu ra của đối tượng.

Ký hiệu $y_n(t)$ là thành phần nhiễu $n_r(t)$ có lẫn trong đầu ra $y(t)$ của hệ thống. Nếu $w(t)$ là đồng nhất bằng 0 và nhiễu $n_r(t)$ là hàm $1(t)$ thì $y_n(t)$ được xác định như sau:

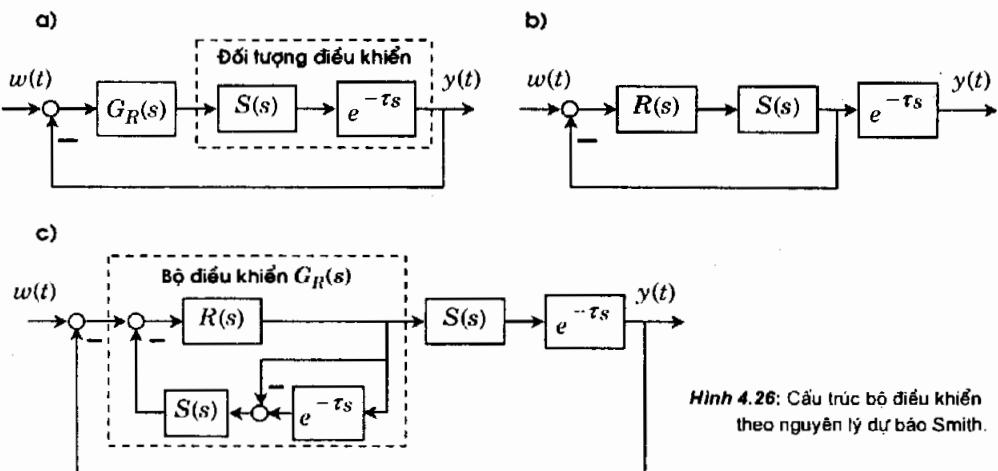
$$Y_n(s) = \frac{G_n(s)}{s} = \frac{1-G(s)}{s} \Rightarrow y_n(t) = 1 - h(t).$$

Do đó hệ sẽ không bị ảnh hưởng bởi nhiễu nếu nó không có sai lệch tĩnh. Hàm quá độ $h(t)$ càng tiến nhanh tới giá trị xác lập 1 thì nhiễu càng được "lọc" tốt.

4.4.4 Bộ điều khiển dự báo Smith

Phương pháp cân bằng mô hình nói riêng và những phương pháp thiết kế bộ điều khiển đã được giới thiệu trên đây nói chung đều có giải thiết rằng đối tượng không có thành phần trễ $e^{-\tau s}$. Trong khi ở các phương pháp sử dụng bộ PID trực tiếp (xác định tham số PID theo Ziegler–Nichols, theo tổng T của Kuhn, ...) hay thiết kế theo tối ưu độ lớn, ta có thể thay xấp xỉ thành phần trễ đó bằng khâu quán tính bậc cao PT_n , hoặc theo công thức Padé (mục 2.2.9, trang 113) thì với phương pháp tối ưu đối xứng hoặc cân bằng mô hình là không thể được. Nó thường đưa đến hàm truyền đạt đối tượng có bậc quá cao làm cho mô hình xấp xỉ có sai lệch góc pha lớn hoặc dẫn đến trường hợp không tích hợp được bộ điều khiển do vi phạm tính nhân quả.

Để vẫn sử dụng được các phương pháp thiết kế đã giới thiệu cho những đối tượng có thành phần trễ $e^{-\tau s}$, Smith đã đưa ra nguyên tắc dự báo (Smith–predictor) khá đơn giản song lại có một ý nghĩa ứng dụng to lớn.



Hình 4.26: Cấu trúc bộ điều khiển theo nguyên lý dự báo Smith.

Nguyên tắc dự báo Smith như sau. Để thiết kế bộ điều khiển $G_R(s)$ cho đối tượng

$$G_S(s) = e^{-\tau s} S(s)$$

(hình 4.26a), Smith đề nghị thiết kế bộ điều khiển $R(s)$ riêng cho đối tượng $S(s)$ không có thành phần trễ (hình 4.26b). Việc thiết kế $R(s)$ được thực hiện một cách đơn giản theo những phương pháp đã trình bày (các mục 4.1, 4.2, 4.3, 4.4.2).

Do hàm truyền đạt hệ kín là $G(s)$ ở hình 4.26a cũng như $R(s)$ ở hình 4.26b có dạng

$$G(s) = \frac{G_S G_R}{1 + G_S G_R} = \frac{G_R S e^{-\tau s}}{1 + G_R S e^{-\tau s}} = \frac{R S}{1 + R S} e^{-\tau s}$$

nên giữa $R(s)$ đã tìm được và $G_R(s)$ phải đi tìm có mối quan hệ

$$G_R(s) = \frac{R}{1 + RS(1 - e^{-\tau s})}.$$

Mối quan hệ trên được thể hiện trong hình 4.26c). Như vậy công việc thiết kế bộ điều khiển dự báo Smith cho đối tượng có trễ

$$G_S(s) = e^{-\tau s} S(s)$$

sẽ gồm các bước sau:

- 1) Thiết kế bộ điều khiển $R(s)$ cho riêng phần $S(s)$ của đối tượng theo các phương pháp đã biết (ví dụ theo tối ưu đối xứng hay cầu bằng mô hình).
- 2) Xây dựng bộ điều khiển $G_R(s) = \frac{R}{1 + RS(1 - e^{-\tau s})}$ với cấu trúc cho trong hình 4.26c).

Chú ý rằng do bộ điều khiển $G_R(s)$ tìm được có chứa mô hình đối tượng ở mạch hồi tiếp nên $G_R(s)$ khá nhạy cảm với những sai lệch mô hình đối tượng. Bởi vậy yêu cầu sử dụng được một cách có hiệu quả phương pháp dự báo Smith là hàm truyền đạt của đối tượng phải đủ chính xác.

4.5 Điều khiển tách kênh

4.5.1 Tại sao phải tách kênh và phát biểu bài toán

Có rất nhiều bộ điều khiển được ứng dụng thành công lại chỉ dùng được cho hệ SISO, bộ điều khiển PID là một ví dụ điển hình. Vì mong muốn sử dụng các bộ điều khiển đó cho hệ MIMO người ta đã nghĩ đến việc can thiệp sơ bộ trước vào hệ MIMO, biến một hệ thống MIMO thành nhiều hệ SISO với mỗi đầu ra $y_i(t)$ chỉ phụ thuộc vào một tín hiệu đầu vào $w_i(t)$.

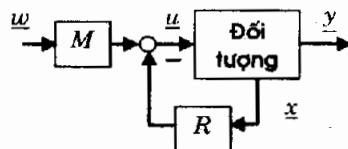
Xét đối tượng MIMO tuyến tính, có s đầu vào u_1, u_2, \dots, u_s và cũng có s đầu ra y_1, y_2, \dots, y_s mô tả bởi

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{x}}{dt} &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= C\underline{x}\end{aligned}$$

Để tách kênh, ta phải xác định các bộ điều khiển R và M (hình 4.27) sao cho đầu ra $y_i(t)$ chỉ phụ thuộc vào một mình đầu vào $w_i(t)$ với $i = 1, 2, \dots, s$. Sự phụ thuộc đó được mô tả trong miền thời gian bởi phương trình vi phân bậc n_i hệ số hằng

$$\begin{aligned}
 & q_{i0}y_i + q_{i1}\frac{dy_i}{dt} + \dots + q_{i,n_i-1}\frac{d^{n_i-1}y_i}{dt^{n_i-1}} + \frac{d^{n_i}y_i}{dt^{n_i}} = \lambda_i w_i \\
 \Leftrightarrow & \frac{d^{n_i}y_i}{dt^{n_i}} + \sum_{k=0}^{n_i-1} q_{ik} \frac{d^k y_i}{dt^k} = \lambda_i w_i
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

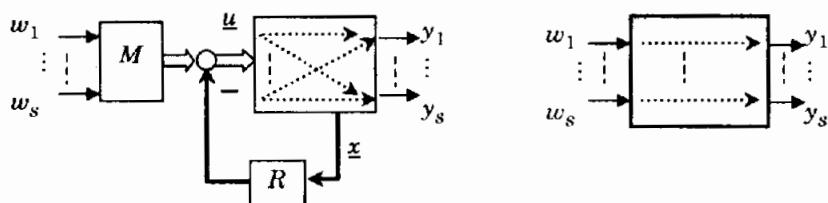
trong đó λ_i và q_{ik} , $i=1, 2, \dots, s$, $k=0, 1, \dots, n_i-1$ là các tham số tự do được chọn tùy ý (hình 4.28).



Hình 4.27: Phát biểu bài toán điều khiển tách kênh.

Trong một chừng mực nào đó, nếu tồn tại nhiều bộ điều khiển R , M ứng với những bộ tham số λ_i và q_{ik} , khác nhau thỏa mãn bài toán tách kênh thì ta có thể thông qua λ_i và q_{ik} để xác định một trong số các bộ điều khiển đó sao cho chất lượng đề ra được thỏa mãn một cách tốt nhất, chẳng hạn như $\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} w_i(t)$ để không có sai lệch tĩnh, tức là không có sai lệch ở chế độ xác lập.

Do bài toán điều khiển tách kênh dựa vào việc phản hồi trạng thái như vậy nên để áp dụng được, đối tượng không những phải điều khiển được mà còn phải quan sát được.



Hình 4.28: Mục đích của điều khiển tách kênh.

4.5.2 Thuật toán tách kênh

Trước hết ta bàn tới vấn đề bậc n_i , $i=1, 2, \dots, s$ của mô hình (4.32) cần phải có, tức là xét xem với n_i như thế nào thì về phái của (4.32) chỉ có $w_i(t)$ chứ không có các đạo hàm của $w_i(t)$.

Để xác định n_i cho riêng kênh thứ i ta sử dụng khái niệm bậc tương đối đã được định nghĩa ở mục 2.3.6 (trang 149) cho hệ SISO. Ký hiệu \underline{c}_i , $i=1, 2, \dots, s$ là vector

hàng thứ i của ma trận C , tức là $C = \begin{pmatrix} \underline{c}_1^T \\ \vdots \\ \underline{c}_s^T \end{pmatrix}$, thì phương trình đầu ra của mô hình trạng thái hệ thống cho riêng kênh thứ i có dạng

$$y_i = \underline{c}_i^T \underline{x}, \quad i=1, 2, \dots, s. \quad (4.33)$$

Do đó theo định nghĩa ở mục 2.3.6 thì bậc tương đối r_i của kênh thứ i sẽ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn

$$\underline{c}_i^T A^k B = \underline{0}^T \text{ nếu } 0 \leq k < r_i - 1$$

$$\underline{c}_i^T A^{r_i-1} B \neq \underline{0}^T.$$

Sử dụng bậc tương đối r_i ta sẽ có từ phương trình (4.33)

$$\frac{dy_i}{dt} = \underline{c}_i^T \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{c}_i^T (A\underline{x} + B\underline{u}) = \underline{c}_i^T A\underline{x} \quad (\text{vì } \underline{c}_i^T B = \underline{0}^T) \quad (4.34a)$$

⋮

$$\frac{d^k y_i}{dt^k} = \underline{c}_i^T A^k \underline{x} \quad \text{nếu } 0 \leq k < r_i - 1 \quad (4.34b)$$

⋮

$$\begin{aligned} \frac{d^{r_i} y_i}{dt^{r_i}} &= \underline{c}_i^T A^{r_i} \underline{x} + \underline{c}_i^T A^{r_i-1} B \cdot \underline{u} = \underline{c}_i^T A^{r_i} \underline{x} + \underline{c}_i^T A^{r_i-1} B \cdot (M\underline{w} - R\underline{x}) \\ &= \underline{c}_i^T (A^{r_i} - A^{r_i-1} BR) \underline{x} + \underline{c}_i^T A^{r_i-1} BM \underline{w} \end{aligned} \quad (4.34c)$$

Kết quả (4.34) cho thấy bậc n_i của phương trình vi phân (4.32) chỉ có thể là bậc tương đối r_i của kênh thứ i . Viết lại (4.32) cho bậc r_i

$$\frac{d^{r_i} y_i}{dt^{r_i}} + \sum_{k=0}^{r_i-1} q_{ik} \frac{d^k y_i}{dt^k} = \lambda_i w_i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^r y_i}{dt^r} = - \sum_{k=0}^{r_i-1} q_{ik} \frac{d^k y_i}{dt^k} + \lambda_i w_i \quad (4.35)$$

rồi thay (4.34a), (4.34b), (4.34c) vào (4.35) sẽ được

$$\underline{c}_i^T (A^{r_i} - A^{r_i-1} BR) \underline{x} + \underline{c}_i^T A^{r_i-1} BM \underline{w} = - \sum_{k=0}^{r_i-1} q_{ik} \underline{c}_i^T A^k \underline{x} + \lambda_i w_i$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \underline{c}_i^T \left(A^{r_i} - A^{r_i-1} B R \right) = - \sum_{k=0}^{r_i-1} q_{ik} \underline{c}_i^T A^k \\ \Leftrightarrow & \underline{c}_i^T A^{r_i-1} B R = \underline{c}_i^T A^{r_i} + \sum_{k=0}^{r_i-1} q_{ik} \underline{c}_i^T A^k \end{aligned} \quad (4.36a)$$

và

$$\begin{aligned} & \underline{c}_i^T A^{r_i-1} B M \underline{w} = \lambda_i w_i \\ \Leftrightarrow & \underline{c}_i^T A^{r_i-1} B M = (0, \dots, 0, \lambda_i, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (4.36b)$$

↑
phần tử thứ i

Viết chung lại (4.36a) và (4.36b) cho tất cả $i=1, 2, \dots, s$ ta đi đến

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{c}_1^T A^{r_1-1} B \\ \vdots \\ \underline{c}_s^T A^{r_s-1} B \end{pmatrix}}_{\tilde{D}} R = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{r_1-1} q_{1k} \underline{c}_1^T A^k + \underline{c}_1^T A^{r_1} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{r_s-1} q_{sk} \underline{c}_s^T A^k + \underline{c}_s^T A^{r_s} \end{pmatrix}}_{\tilde{C}} \Rightarrow R = \tilde{D}^{-1} \tilde{C} \quad (4.37a)$$

và

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{c}_1^T A^{r_1-1} B \\ \vdots \\ \underline{c}_s^T A^{r_s-1} B \end{pmatrix}}_{\tilde{D}} M = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s \end{pmatrix}}_{\tilde{L}} \Rightarrow M = \tilde{D}^{-1} \tilde{L} \quad (4.37b)$$

Hai công thức (4.37a) và (4.37b) chính là lời giải R và M của bài toán tách kênh. Cũng từ hai công thức đó mà ta thấy điều kiện để bài toán có nghiệm là \tilde{D} phải là ma trận không suy biến.

Vậy thuật toán tìm các bộ điều khiển R và M cho bài toán tách kênh sẽ như sau:

- Xác định bậc tương đối r_i , $i=1, 2, \dots, s$ của hệ thống, tức là tìm số nguyên dương r_i nhỏ nhất thỏa mãn

$$\underline{c}_i^T A^k B = \underline{0}^T \text{ nếu } 0 \leq k < r_i - 1$$

$$\underline{c}_i^T A^{r_i-1} B \neq \underline{0}^T.$$

2) Khẳng định tính không suy biến của $\tilde{D} = \begin{pmatrix} \underline{c}_1^T A^{r_1-1} B \\ \vdots \\ \underline{c}_s^T A^{r_s-1} B \end{pmatrix}$.

3) Chọn tùy ý các tham số λ_i và q_{ik} , $i=1, 2, \dots, s$, $k=0, 1, \dots, r_i-1$.

4) Lập các ma trận

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{r_1-1} q_{1k} \underline{c}_1^T A^k + \underline{c}_1^T A^{r_1} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{r_s-1} q_{sk} \underline{c}_s^T A^k + \underline{c}_s^T A^{r_s} \end{pmatrix}$$

5) Tính $M = \tilde{D}^{-1}L$ và $R = \tilde{D}^{-1}\tilde{C}$.

Nhờ có bộ điều khiển phản hồi trạng thái R và bộ điều khiển tiêu xử lý M xác định theo thuật toán trên, tín hiệu đầu ra $y_i(t)$ của hệ kín sẽ chỉ phụ thuộc vào tín hiệu vào $w_i(t)$. Mối quan hệ giữa $y_i(t)$ và $w_i(t)$ được biểu diễn trong miền thời gian bởi (4.35). Chuyển sang miền phức ta có hàm truyền đạt giữa $y_i(t)$ và $w_i(t)$ như sau:

$$G_i(s) = \frac{Y_i(s)}{W_i(s)} = \frac{\lambda_i}{q_{i0} + q_{i1}s + \cdots + q_{ir_i-1}s^{r_i-1} + s^{r_i}}. \quad (4.38)$$

Với (4.38) và lợi dụng tính được chọn tùy ý của các tham số λ_i và q_{ik} , $i=1, 2, \dots, s$, $k=0, 1, \dots, r_i-1$ ta có thể chọn

$$\lambda_i = q_{i0}, \quad i=1, 2, \dots, s$$

để hệ thu được không có sai lệch tĩnh, tức là để có được $y_i = w_i$ trong chế độ xác lập.

Ví dụ 16: Xét hệ có hai tín hiệu vào, hai tín hiệu ra và ba biến trạng thái mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{u}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}.$$

Trước hết ta xác định bậc tương đối r_1, r_2 của hệ.

$$\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{c}_1^T B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{c}_1^T A B = (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 1) \neq \underline{0}^T.$$

Vậy $r_1 = 2$.

$$\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{c}_2^T B = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 1) \neq \underline{0}^T.$$

Vậy $r_2 = 1$.

Tiếp theo ta tính

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \underline{c}_1^T A B \\ \underline{c}_2^T B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bây giờ ta chọn các hằng số λ_1, λ_2 và q_{10}, q_{11}, q_{20} với điều kiện $\lambda_1 = q_{10}$ cũng như $\lambda_2 = q_{20}$ để không có sai lệch tĩnh, chẳng hạn như:

$$\lambda_1 = q_{10} = 2, \quad \lambda_2 = q_{20} = 3, \quad q_{11} = 1.$$

Với các tham số được chọn thì

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} q_{10} \underline{c}_1^T + q_{11} \underline{c}_1^T A + \underline{c}_1^T A^2 \\ q_{20} \underline{c}_2^T + \underline{c}_2^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra các bộ điều khiển cần tìm là:

$$M = \tilde{D}^{-1} L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R = \tilde{D}^{-1} \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

4.5.3 Ma trận truyền đạt của hệ đã tách kênh

Một hệ thống gồm đối tượng có số các tín hiệu vào bằng số các tín hiệu ra và cùng bằng s

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}, \quad \underline{y} = C\underline{x}$$

đã được tách kênh nhờ bộ điều khiển phản hồi trạng thái R và bộ điều khiển tiền xử lý M sẽ có mô hình trạng thái (xem hình 4.27)

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B(M\underline{w} - R\underline{x}) = (A - BR)\underline{x} + BM\underline{w}$$

$$\underline{y} = C\underline{x}$$

Chuyển hai phương trình trên sang miền phức nhờ toán tử Laplace với các giá trị trạng thái đầu bằng 0 sẽ được

$$\underline{X}(s) = (sI - A + BR)^{-1} BM \underline{W}(s)$$

$$\underline{Y}(s) = C \underline{X}(s)$$

Do đó

$$\underline{Y}(s) = C(sI - A + BR)^{-1} BM \underline{W}(s). \quad (4.39a)$$

Mặt khác, theo bản chất tách kênh thì tín hiệu ra $y_i(t)$ chỉ phụ thuộc vào một mình tín hiệu vào $w_i(t)$ theo quan hệ (4.38), tức là

$$G_i(s) = \frac{Y_i(s)}{W_i(s)} = \frac{\lambda_i}{q_{i0} + q_{i1}s + \dots + q_{i\tilde{n}_i-1}s^{\tilde{n}_i-1} + s^{\tilde{n}_i}}$$

nên phải có

$$\underline{Y}(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & G_s(s) \end{pmatrix} \underline{W}(s) = \text{diag}(G_1(s), \dots, G_s(s)) \underline{W}(s). \quad (4.39b)$$

So sánh (4.39a) và (4.39b) ta đi đến

$$C(sI - A + BR)^{-1} BM = \text{diag}(G_1(s), \dots, G_s(s)),$$

nói cách khác, cùng với những bộ điều khiển M, R tìm được, ma trận

$$C(sI - A + BR)^{-1} BM \quad (4.40)$$

là một ma trận đường chéo.

Ví dụ 17: Trong ví dụ 16 ta đã tìm được các bộ điều khiển

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

để tách kênh đối tượng

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{u}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

với bộ tham số được chọn

$$\lambda_1 = q_{10} = 2, \quad \lambda_2 = q_{20} = 3, \quad q_{11} = 1.$$

Theo (4.38), khi đã được tách kênh thì

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{W_1(s)} = \frac{2}{2+s+s^2} \quad \text{và} \quad G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{W_2(s)} = \frac{3}{3+s}$$

Kiểm tra lại với (4.40) ta cũng có

$$\begin{aligned} C(sI-A+BR)^{-1}BM &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-1 & 4 & -4 \\ -1 & s+2 & -1 \\ 0 & 0 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{s^2+s+2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{s+3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
□

4.5.4 Dạng Smith–McMillan của ma trận truyền đạt và cách biến đổi

Ở ví dụ 16, 17 ta thấy hệ

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{u}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

có ma trận truyền đạt

$$T(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{s^3+6s^2+9s+2} \begin{pmatrix} s+3 & s+1 \\ 1 & s^2+3s+1 \end{pmatrix}.$$

Nhưng cùng với hai ma trận

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

thì ma trận truyền đạt đó được biến đổi thành

$$\tilde{T}(s) = C(sI-A+BR)^{-1}BM = \begin{pmatrix} \frac{2}{s^2+s+2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{s+3} \end{pmatrix}.$$

Như vậy, hai ma trận M, R được tìm theo thuật toán tách kênh đã biến đổi ma trận truyền đạt của hệ

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}, \quad \underline{y} = C\underline{x}$$

là

$$T(s) = C(sI-A)^{-1}B$$

thành ma trận đường chéo

$$\tilde{T}(s) = C(sI-A+BR)^{-1}BM = \text{diag}(G_1(s), \dots, G_s(s)).$$

Thuật toán tách kênh cũng là một chứng minh cho kết luận rằng mọi ma trận vuông $T(s)$ với cấu trúc (4.41), có \tilde{D} xác định theo (4.37) không suy biến đều biến đổi được về dạng ma trận đường chéo $\tilde{T}(s)$.

Mở rộng kết luận trên, phép biến đổi Smith-McMillan trình bày sau đây còn chỉ rằng mọi ma trận $T(s)$, không cần phải vuông và cũng không cần phải có \tilde{D} không suy biến đều biến đổi được về dạng "đường chéo" $\tilde{T}(s)$:

$$\tilde{T}(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & G_m(s) \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{hay} \quad \tilde{T}(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & G_m(s) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Điều đó nói rằng mọi hệ thống MIMO đều có thể tách được kênh.

Phép biến đổi Smith-McMillan dựa vào việc thay đổi các dòng hay cột của ma trận bằng những dòng, cột mới tương đương (phép biến đổi tương đương). Chúng bao gồm:

- Hoán đổi vị trí vector hàng thứ i với hàng thứ k của $T(s)$. Việc này tương ứng phép nhân I_{ik} với $T(s)$, trong đó I_{ik} là ma trận không suy biến thu được từ ma trận đơn vị I sau khi đổi chỗ hai hàng thứ i và k (hoặc hai cột). Ví dụ

$$I_{25}T(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & \vdash \\ t_2 & \vdash \\ t_3 & \vdash \\ t_4 & \vdash \\ t_5 & \vdash \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & \vdash \\ t_5 & \vdash \\ t_3 & \vdash \\ t_4 & \vdash \\ t_2 & \vdash \end{pmatrix}$$

- Hoán đổi vị trí vector cột thứ i với cột thứ k của $T(s)$. Việc này tương ứng phép nhân $T(s)$ với I_{ik} , trong đó I_{ik} là ma trận không suy biến thu được từ ma trận đơn vị I sau khi đổi chỗ hai hàng thứ i và k (hoặc hai cột). Ví dụ

$$T(s)I_{25} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_5 & t_3 & t_4 & t_2 \end{pmatrix}$$

- Hàng thứ i được cộng thêm với tích của c và hàng thứ k trong $T(s)$. Việc này tương ứng phép nhân C_{ik} với $T(s)$, trong đó C_{ik} là ma trận không suy biến thu được từ ma trận đơn vị I sau khi thay phần tử 0 thứ ik bằng phần tử c . Ví dụ

$$C_{24}T(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & - \\ t_2 & - \\ t_3 & - \\ t_4 & - \\ t_5 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & - \\ t_2 + c \cdot t_4 & - \\ t_3 & - \\ t_4 & - \\ t_5 & - \end{pmatrix}$$

- Cột thứ k được cộng thêm với tích của c và cột thứ i trong $T(s)$. Việc này tương ứng phép nhân $T(s)$ với C_{ik} , trong đó C_{ik} là ma trận không suy biến thu được từ ma trận đơn vị I sau khi thay phần tử 0 thứ ik bằng phần tử c . Ví dụ

$$T(s)C_{24} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 + c \cdot t_2 & t_5 \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

Phép biến đổi Smith–McMillan được tóm tắt như sau:

- Viết lại $T(s)$ thành $\frac{1}{d(s)}P(s)$, trong đó $d(s)$ là đa thức bội số chung nhỏ nhất của tất cả các đa thức mẫu số có trong các phân tử của $T(s)$ và $P(s)$ là ma trận có các phân tử là đa thức. Ví dụ:

$$T(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2 + 3s + 2} & \frac{-1}{s^2 + 3s + 2} \\ \frac{s^2 + s - 4}{s^2 + 3s + 2} & \frac{2s^2 - s - 8}{s^2 + 3s + 2} \\ \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 3s + 2} & \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 3s + 2} \\ \frac{s - 2}{s + 1} & \frac{2s - 4}{s + 1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underbrace{\frac{s^2 + 3s + 2}{d(s)}}_{d(s)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{pmatrix} \underbrace{P(s)}_{P(s)}$$

- Sử dụng các phép biến đổi tương đương đã nói ở trên để đưa $P(s)$ về dạng "đường chéo" bằng cách đưa dần các phân tử không nằm trên đường chéo về 0 thông qua việc cộng trừ hàng và cột. Điều này đã được Smith–McMillan chuyển thành những bước của thuật toán sau:
 - Đặt $d_0(s) = 1$.
 - Chọn $d_1(s)$ là ước số chung lớn nhất của tất cả các phân tử của $P(s)$. Ví dụ $d_1(s) = \text{USCLN}\{1, -1, s^2 + s - 4, 2s^2 - s - 4, s^2 - 4, 2s^2 - 8\} = 1$
 - Chọn $d_k(s)$ là ước số chung lớn nhất của tất cả các phân tử là định thức ma trận vuông $k \times k$ lấy từ $P(s)$. Ví dụ

$$\begin{aligned}
d_2(s) &= \text{USCLN} \left\{ \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{pmatrix}, \right. \\
&\quad \left. \det \begin{pmatrix} s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \text{USCLN} \{ 3s^2 - 2s - 4, 3s^2 - 4, s(s^2 - 4) \} = (s+2)(s-2)
\end{aligned}$$

d) Ma trận "đường chéo" $\tilde{T}(s)$ tương đương với $T(s)$ sẽ có các phần tử $G_k(s)$ là

$$G_k(s) = \frac{1}{d(s)} \cdot \frac{d_k(s)}{d_{k-1}(s)}$$

Ví dụ

$$\tilde{T}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+2)(s-2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Như vậy phép biến đổi Smith-McMillan không cần có giải thiết rằng $T(s)$ phải là ma trận vuông và có \tilde{D} không suy biến. Ma trận $\tilde{T}(s)$ được tạo thành là tương đương với $T(s)$ theo nghĩa (xem lại khái niệm ma trận tương đương đã định nghĩa ở mục 2.3.2, trang 128):

$$\tilde{T}(s) = S_T(s)T(s)S_P(s)$$

trong đó $S_T(s)$ và $S_P(s)$ là những ma trận không suy biến (với phần lớn các giá trị s), được sinh ra từ các phép đổi hàng cột của $T(s)$.

4.6 Phương pháp cho trước điểm cực

4.6.1 Đặt vấn đề

Xét hệ MIMO có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{s \times r}$ là những ma trận có phần tử là hằng số.

Nói cách khác, hệ có n biến trạng thái $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, r tín hiệu vào $\underline{u} \in \mathbb{R}^r$ và s tín hiệu ra $\underline{y} \in \mathbb{R}^s$.

Hệ có ma trận truyền đạt

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{C(sI - A)_{adj}B}{\det(sI - A)} + D$$

nên các phần tử của ma trận truyền đạt đó đều có dạng hàm thực-hữu tỷ với các điểm cực là giá trị riêng của ma trận A .

Các mục 1.3.2, 1.3.4 và đặc biệt là nội dung chương 3 đã chỉ rằng chất lượng hệ thống phụ thuộc nhiều vào vị trí của các điểm cực (giá trị riêng của A) trong mặt phẳng phức. Chẳng hạn như:

- Nếu tất cả các điểm cực đều nằm bên trái trực ảo thì hệ ổn định. Các điểm cực nằm càng xa trực ảo, quán tính của hệ càng nhỏ.
 - Nếu có một điểm cực không nằm trên trực thực thì quá trình tự do của hệ có dạng dao động. Các điểm cực nằm càng xa trực thực, tần số của dao động càng lớn.
 - Nếu có ít nhất một điểm cực là gốc tọa độ thì hệ sẽ có chứa thành phần tích phân. Những hệ thống có chứa thành phần tích phân sẽ luôn có tín hiệu ra thay đổi khi tín hiệu vào vẫn còn khác 0.
- ...

Do chất lượng hệ thống phụ thuộc vào vị trí điểm cực nên để hệ thống có được chất lượng mong muốn, người ta có thể can thiệp vào hệ thống sao cho với sự can thiệp đó, hệ có được các điểm cực là những giá trị cho trước ứng với chất lượng mong muốn. Cũng vì nguyên lý can thiệp để hệ nhận được các điểm cực cho trước như vậy nên phương pháp thiết kế bộ điều khiển can thiệp này có tên gọi là *phương pháp cho trước điểm cực*, hay *phương pháp gán điểm cực* (pole placement).

Có hai khả năng thiết kế bộ điều khiển gán điểm cực R (tịnh) là:

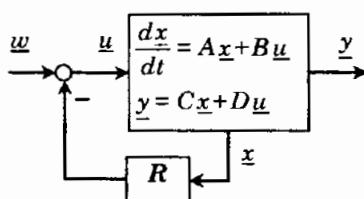
- Thiết kế theo nguyên tắc phản hồi trạng thái (hình 4.29a). Với bộ điều khiển R , hệ kín thu được sẽ có mô hình

$$\frac{dx}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u} = A\underline{x} + B(\underline{w} - R\underline{x}) = (A - BR)\underline{x} + B\underline{w}$$

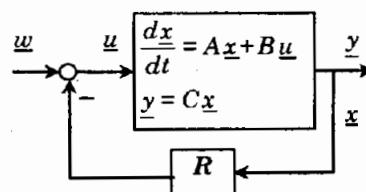
bởi vậy nhiệm vụ "gán điểm cực" của R là phải thiết kế sao cho ma trận $A - BR$

nhận n giá trị cho trước s_i , $i=1, 2, \dots, n$ (đã được chọn từ yêu cầu chất lượng cần có của hệ thống) làm giá trị riêng.

a)



b)



Hình 4.29: Nguyên tắc thiết kế bộ điều khiển cho trước điểm cực.

- b) Thiết kế theo nguyên tắc phản hồi tín hiệu ra \underline{y} (hình 4.29b). Vì tín hiệu phản hồi về bộ điều khiển R là \underline{y} nên hệ kín có mô hình (ma trận $D=\Theta$)

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{x}}{dt} &= A\underline{x} + B\underline{u} = A\underline{x} + B(\underline{w} - R\underline{y}) = A\underline{x} + B\underline{w} - BRC\underline{x} \\ &= (A - BRC)\underline{x} + B\underline{w}\end{aligned}$$

Do đó nhiệm vụ "gán điểm cực" của R là làm sao cho ma trận
 $A - BRC$

có giá trị riêng là n giá trị cho trước s_i , $i=1, 2, \dots, n$ (đã được chọn từ yêu cầu chất lượng cần có của hệ thống).

Khác với nguyên lý phản hồi trạng thái, ở nguyên lý phản hồi đầu ra người ta thường chỉ xét đối tượng hợp thức chất, tức là có $D=\Theta$, trong đó Θ là ký hiệu chỉ ma trận có tất cả các phần tử bằng 0.

4.6.2 Phương pháp Ackermann

Fương pháp Ackermann là phương pháp thiết kế bộ điều khiển gán điểm cực R theo nguyên lý phản hồi trạng thái cho đối tượng SISO.

Xét đối tượng SISO được mô tả bởi mô hình trạng thái dạng chuẩn điều khiển:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \text{với } \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad (4.41a)$$

$$y = (c_1 \quad \cdots \quad c_n) \underline{x} + du. \quad (4.41b)$$

Mô hình trạng thái (4.41) có thể được xây dựng từ hàm truyền đạt $G(s)$ của đối tượng

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}.$$

trong đó (xem lại mục 2.3.6, trang 146 hoặc mục 3.5.1, trang 242):

$$c_k = b_{k-1} - a_{k-1} b_n, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

$$d = b_n.$$

Tương ứng với hệ SISO, bộ điều khiển phản hồi trạng thái R có dạng:

$$R = (r_1 \quad \cdots \quad r_n).$$

Giả sử rằng chất lượng yêu cầu cần có của hệ thống đã được thể hiện qua n giá trị riêng s_i , $i=1, 2, \dots, n$ phải có của ma trận $A - BR$, tức là

$$\begin{aligned}\det(sI - A + BR) &= (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) \\ &= s^n + \tilde{a}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_1s + \tilde{a}_0\end{aligned}\quad (4.42)$$

Vậy thì nhiệm vụ thiết kế bây giờ là phải tìm các phần tử r_i , $i=1, 2, \dots, n$ của R từ những hệ số \tilde{a}_i , $i=0, 1, \dots, n-1$ đã có của phương trình đặc tính (4.42).

Hệ thống có phương trình đặc tính (4.42) là hệ mà ma trận \tilde{A} của nó trong mô hình trạng thái dạng chuẩn điều khiển có dạng:

$$A - BR = \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\tilde{a}_0 & -\tilde{a}_1 & -\tilde{a}_2 & \cdots & -\tilde{a}_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Mặt khác thì

$$\begin{aligned}A - BR &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_n) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0 + r_1) & -(a_1 + r_2) & -(a_2 + r_3) & \cdots & -(a_{n-1} + r_n) \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (4.44)$$

Do đó khi so sánh (4.43) với (4.44) ta được:

$$r_i = \tilde{a}_{i-1} - a_{i-1}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4.45)$$

Vậy thuật toán xác định bộ điều khiển R gán điểm cực s_i , $i=1, 2, \dots, n$ theo nguyên tắc phản hồi trạng thái cho đối tượng SISO mô tả bởi mô hình trạng thái dạng chuẩn điều khiển (4.41) gồm có các bước sau:

- 1) Tính các hệ số \tilde{a}_i , $i=0, 1, \dots, n-1$ của phương trình đặc tính cần phải có của hệ kín từ những giá trị điểm cực s_i , $i=1, 2, \dots, n$ đã cho theo (4.42).
- 2) Tính các phần tử r_i , $i=1, 2, \dots, n$ của bộ điều khiển R từ \tilde{a}_i , a_i , $i=0, 1, \dots, n-1$ theo (4.45).

Ví dụ 18: Xét đối tượng SISO có mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Giả sử rằng chất lượng mong muốn của hệ kín đã được chọn với những điểm cực $s_1=-3$, $s_2=-4$, $s_3=-5$ cần phải có. Vậy thì với

$$(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3) = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$$

bộ điều khiển phản hồi trạng thái cần tìm sẽ là

$$R = (60 - 1 \quad 47 + 2 \quad 12 + 3) = (59 \quad 49 \quad 15).$$

□

Tiếp tục, ta bàn tới vấn đề hệ SISO ban đầu không được mô tả bởi mô hình trạng thái dạng chuẩn điều khiển, mà nói chung là

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{b}u, \quad y = \underline{c}^T \underline{x} + du \quad (4.46)$$

Để vẫn áp dụng được thuật toán Ackermann cho việc thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái R theo nguyên lý cho trước điểm cực, tất nhiên ta phải nghĩ tới việc chuyển mô hình trạng thái (4.46) đã cho về dạng chuẩn điều khiển (4.41). Một cách rất tự nhiên, ta có hai hướng giải quyết:

- Cách thứ nhất là thông qua hàm truyền đạt $G(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} + d$ rồi từ đó chuyển về dạng chuẩn điều khiển (4.41). Cách này tỏ ra không thích hợp vì không chỉ được rõ mối quan hệ giữa biến trạng thái cũ cho trong (4.46) và biến trạng thái mới của mô hình dạng chuẩn điều khiển (trạng thái phản hồi về là trạng thái cũ của (4.46), song trạng thái cần cho bộ điều khiển R lại là trạng thái của mô hình chuẩn điều khiển).
- Cách thứ hai là xác định một bộ chuyển đổi S (không suy biến) sao cho với nó, khi thế biến trạng thái mới

$$\underline{z} = S\underline{x} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = S^{-1}\underline{z} \quad (4.47)$$

ta sẽ được

$$\frac{d(S^{-1}\underline{z})}{dt} = AS^{-1}\underline{z} + \underline{b}u \quad \Rightarrow \quad \frac{d\underline{z}}{dt} = SAS^{-1}\underline{z} + S\underline{b}u$$

có dạng chuẩn điều khiển, tức là

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad S\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Định lý 4.2: Nếu hệ (4.46) điều khiển được thì bộ chuyển đổi (ma trận) S với cấu trúc

$$S = \begin{pmatrix} \underline{s}^T \\ \underline{s}^T A \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{trong đó } \underline{s} = \left[(\underline{b} \quad A\underline{b} \quad \cdots \quad A^{n-1}\underline{b})^T \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

sẽ chuyển được hệ về dạng chuẩn điều khiển (4.48).

Chứng minh:

Trước hết ta thấy ngay được từ (4.49)

$$\begin{aligned} \underline{s}^T &= (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1) (\underline{b} \quad A\underline{b} \quad \cdots \quad A^{n-1}\underline{b})^{-1} \\ \Rightarrow \underline{s}^T (\underline{b} \quad A\underline{b} \quad \cdots \quad A^{n-1}\underline{b}) &= (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1) \\ \Rightarrow \underline{s}^T A^k \underline{b} &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leq k \leq n-2 \\ 1 & \text{nếu } k = n-1 \end{cases} \end{aligned}$$

nên

$$S\underline{b} = \begin{pmatrix} \underline{s}^T \\ \underline{s}^T A \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix} \underline{b} = \begin{pmatrix} \underline{s}^T \underline{b} \\ \underline{s}^T A\underline{b} \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1}\underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ngoài ra, với S cho trong (4.49) thì theo định lý Cayley-Hamilton (trang 138) có

$$SA = \begin{pmatrix} \underline{s}^T \\ \underline{s}^T A \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \underline{s}^T A \\ \underline{s}^T A^2 \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{s}^T A \\ \underline{s}^T A^2 \\ \vdots \\ -a_0 \underline{s}^T - a_1 \underline{s}^T A - \cdots - a_{n-1} \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix}$$

và

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{s}^T \\ \underline{s}^T A \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{s}^T A \\ \underline{s}^T A^2 \\ \vdots \\ -a_0 \underline{s}^T - a_1 \underline{s}^T A - \cdots - a_{n-1} \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$SA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} S \quad (\text{đ.p.c.m}).$$

□

Một điều biết thêm được thông qua lời chứng minh định lý 4.2 (nhất là định lý 2.12 của Cayley–Hamilton, trang 138) là các hệ số a_i , $i=0, 1, \dots, n-1$ thu được thông qua mô hình chuẩn điều khiển (4.48) chính là hệ số của phương trình đặc tính $\det(sI-A)$ của hệ (4.46) đã cho.

Ví dụ 19: Cho hệ

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Hệ này có

$$A\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A^2 \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{s} = [(\underline{b} \ A\underline{b} \ A^2\underline{b})^T]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{s}^T A = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (0 \ 1 \ 0)$$

$$\Rightarrow \underline{s}^T A^2 = (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (0 \ -1 \ 1)$$

Vậy

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đặt

$$\underline{z} = S\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{z}.$$

ta sẽ được

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{z}}{dt} &= S A S^{-1} \underline{z} + S \underline{b} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{z} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \underline{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u. \end{aligned}$$

□

Sau khi đã chuyển được (4.46) về dạng chuẩn điều khiển nhờ bộ chuyển đổi S , ta áp dụng được thuật toán đã nêu để thiết kế bộ điều khiển R phản hồi trạng thái \underline{z} từ yêu cầu (4.42) phải có. Hình 4.30 minh họa cho việc thiết kế R .

Gọi \tilde{a}_i , $i=0, 1, \dots, n-1$ là những hệ số của đa thức

$$(s-s_1)(s-s_2) \cdots (s-s_n) = s^n + \tilde{a}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_1s + \tilde{a}_0 \quad (4.50)$$

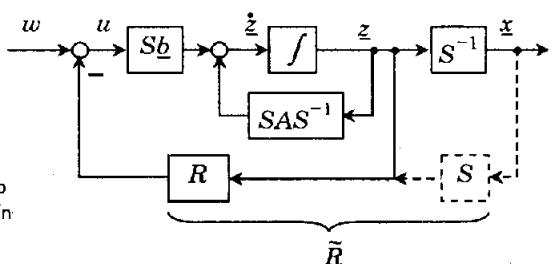
trong đó s_i , $i=1, 2, \dots, n$ là các điểm cực cản phải có của hệ kín và a_i , $i=0, 1, \dots, n-1$ là hệ số đa thức đặc tính của đối tượng:

$$\det(sI-A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0. \quad (4.51)$$

thì từ R đã thiết kế được ta cũng có được bộ điều khiển \tilde{R} cho hệ (4.46) ứng với việc phản hồi \underline{x} như sau

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= RS = (\tilde{a}_0 - a_0 \quad \tilde{a}_1 - a_1 \quad \cdots \quad \tilde{a}_{n-1} - a_{n-1}) \begin{pmatrix} \underline{s}^T A \\ \underline{s}^T A^2 \\ \vdots \\ \underline{s}^T A^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{a}_i - a_i) \underline{s}^T A^i = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i \underline{s}^T A^i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \underline{s}^T A^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i \underline{s}^T A^i + \underline{s}^T A^n \end{aligned} \quad (4.52)$$

vì $-\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = A^n$ (định lý 2.12 của Cayley-Hamilton, trang 138).



Hình 4.30: Minh họa phương pháp Ackermann cho hệ có mô hình trạng thái không ở dạng chuẩn điều khiển.

Như vậy, thuật toán Ackermann để thiết kế bộ điều khiển \tilde{R} phản hồi trạng thái \underline{x} theo nguyên tắc đặt điểm cực s_i , $i=1, 2, \dots, n$ cho hệ SISO, giả thiết là điều khiển được với mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{b}u, \quad y = \underline{c}^T \underline{x} + du$$

sẽ gồm các bước như sau:

- 1) Xác định vector \underline{s} theo (4.49). Ta có thể thấy \underline{s} chính là vector hàng cuối cùng của ma trận $(\underline{b} \quad A\underline{b} \quad \dots \quad A^{n-1}\underline{b})^{-1}$.
- 2) Xác định \tilde{a}_i , $i=0, 1, \dots, n-1$ từ các điểm cực s_i , $i=1, 2, \dots, n$ cần phải có của hệ kín theo công thức (4.50).
- 3) Xác định bộ điều khiển \tilde{R} theo công thức (4.52).

Ví dụ 20: Cho hệ

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} u.$$

Hệ này có

$$\begin{aligned} \underline{b} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad A^3\underline{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 28 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow (\underline{b} \quad A\underline{b} \quad A^2\underline{b} \quad A^3\underline{b})^{-1} &= \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ -0,17 & 0 & -0,08 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{s} = \begin{pmatrix} -0,17 \\ 0 \\ -0,08 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

nên bộ điều khiển \tilde{R} của nó sẽ là

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \tilde{a}_0 \underline{s}^T + \tilde{a}_1 \underline{s}^T A + \tilde{a}_2 \underline{s}^T A^2 + \tilde{a}_3 \underline{s}^T A^3 + \underline{s}^T A^4 \\ &= \tilde{a}_0 \begin{pmatrix} -0,17 \\ 0 \\ -0,08 \\ 0 \end{pmatrix}^T + \tilde{a}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -0,17 \\ 0 \\ -0,08 \end{pmatrix}^T + \tilde{a}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,29 \\ 0 \end{pmatrix}^T + \tilde{a}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,29 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2,03 \end{pmatrix}^T \\ &= (-0,17\tilde{a}_0 - 0,17\tilde{a}_1 - 0,08\tilde{a}_0 - 0,29\tilde{a}_2 + 2,03 - 0,08\tilde{a}_1 - 0,29\tilde{a}_3). \end{aligned}$$

□

4.6.3 Phương pháp Roppeneker

Giống như phương pháp Ackermann, phương pháp Roppeneker được sử dụng để thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái theo nguyên lý cho trước điểm cực. Khác với Ackermann, phương pháp Roppeneker không bị giới hạn ở hệ SISO.

Để bắt đầu ta hãy xét đối tượng MIMO

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{s \times r}$.

Nhiệm vụ đặt ra là tìm bộ điều khiển phản hồi trạng thái R sao cho hệ kíu với mô hình trạng thái (hình 4.29a)

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A - BR)\underline{x} + B\underline{w}$$

có ma trận hệ thống $A - BR$ nhận những số phức s_i , $i = 1, 2, \dots, n$ cho trước làm giá trị riêng. Chú ý rằng nếu có s_k là một số phức thì cũng phải có một giá trị liên hợp với nó $s_l = \bar{s}_k$, vì chỉ như vậy các phần tử của R mới có thể là những số thực.

Giả sử rằng đã tìm được R . Vậy thì do $\det(s_i I - A + BR) = 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ nên ứng với mỗi i phải có một vector (riêng bên phải) \underline{a}_i không đồng nhất bằng $\underline{0}$ thỏa mãn

$$(s_i I - A + BR) \underline{a}_i = \underline{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Suy ra

$$(s_i I - A) \underline{a}_i = -BR \underline{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.53)$$

Nếu gọi

$$\underline{t}_i = -R \underline{a}_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r, \quad (4.54)$$

là những vector tham số thì (4.53) viết được thành

$$(s_i I - A) \underline{a}_i = B \underline{t}_i$$

$$\Rightarrow \underline{a}_i = (s_i I - A)^{-1} B \underline{t}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.55)$$

Viết chung toàn bộ n phương trình (4.54) thành

$$(\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n) = -R(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$$

và nếu ma trận vuông $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ không suy biến thì

$$R = -(\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n)(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)^{-1} \quad (4.56)$$

Xuất phát từ những điều nhận xét gồm các công thức (4.54), (4.55) và (4.56) về bộ điều khiển R , Roppenecker đã đưa ra thuật toán tìm R với hai bước như sau:

- 1) Chọn n vector tham số $\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n$ sao cho với nó n vector $\underline{a}_i, i=1, 2, \dots, n$ xác định theo (4.55) lập thành hệ độc lập tuyến tính, tức là ma trận $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ sẽ không bị suy biến.
- 2) Xác định R theo (4.56).

Ví dụ 21: Hãy thiết kế bộ điều khiển tĩnh R , phản hồi trạng thái cho đối tượng

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

sao cho ma trận hệ thống của hệ mới nhận $s_1 = -1, s_2 = -2$ làm các giá trị riêng.

Vì đối tượng có hai biến trạng thái và một đầu vào ($r=1$) nên $\underline{t}_1, \underline{t}_2$ chỉ có một phần tử, bởi vậy ta có thể viết một cách đơn giản là t_1, t_2 thay vì phải sử dụng ký hiệu vector.

Üng với $i=1$ và $i=2$ thì từ (4.55) được

$$(s_1 I - A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (s_1 I - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$(s_2 I - A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow (s_2 I - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

và vì hai vector trên đã độc lập tuyến tính nên cũng chỉ cần chọn $t_1 = 3, t_2 = 8$. Khi đó

$$\underline{a}_1 = (s_1 I - A)^{-1} B t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \underline{a}_2 = (s_2 I - A)^{-1} B t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

là hai vector độc lập tuyến tính. Suy ra

$$R = -(\underline{t}_1 \quad \underline{t}_2)(\underline{a}_1 \quad \underline{a}_2)^{-1} = -(3 \quad 8) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = (2 \quad 5).$$

Kiểm tra lại thì thấy với R tổng hợp được ma trận hệ kín

$$A - BR = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (2 \quad 5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

đúng là có hai giá trị riêng -1 và -2 như yêu cầu đã đặt ra. □

Tuy nhiên, có ba vấn đề cần phải bàn thêm về thuật toán Roppenecker. Đó là:

- Có thực sự với bộ điều khiển R tổng hợp được, mà trận hệ thống của hệ kín sẽ có các giá trị riêng là s_i , $i=1, 2, \dots, n$?
- Phải có điều kiện gì để tồn tại \underline{a}_i tính theo (4.55)?
- Phải làm gì để tất cả n vector $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ lập thành hệ độc lập tuyến tính?

Về câu hỏi thứ nhất. Từ (4.56) có

$$R(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = -(\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n)$$

$$\Leftrightarrow R\underline{a}_i = -\underline{t}_i \quad \text{với mọi } i=1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow BR\underline{a}_i = -B\underline{t}_i = -(s_i I - A)\underline{a}_i$$

$$\Leftrightarrow (s_i I - A + BR)\underline{a}_i = \underline{0}$$

Do $\underline{a}_i \neq \underline{0}$ nên $(s_i I - A + BR)$ phải là ma trận suy biến, tức là

$$\det(s_i I - A + BR) = 0 \quad \text{với mọi } i=1, 2, \dots, n$$

hay s_i , $i=1, 2, \dots, n$ là giá trị riêng của $(A - BR)$.

Về câu hỏi thứ hai. Để tính được \underline{a}_i , $i=1, 2, \dots, n$ theo (4.55) thì rõ ràng phải có $(s_i I - A)^{-1}$. Nói cách khác, khi những điểm cực cho trước s_i , $i=1, 2, \dots, n$ không phải là giá trị riêng của A thì ta tính được \underline{a}_i , $i=1, 2, \dots, n$ theo (4.55). Trường hợp có một giá trị s_k trong số n giá trị s_i , $i=1, 2, \dots, n$ làm cho $(s_k I - A)$ suy biến thì có nghĩa là bộ điều khiển R không cần phải dịch chuyển giá trị riêng s_k . Bởi vậy ứng với nó sẽ có

$$(s_k I - A)\underline{a}_k = B\underline{t}_k = \underline{0}$$

Nói cách khác, trong công thức (4.56), khi đó vector tham số \underline{t}_k phải được chọn bằng $\underline{0}$

$$\underline{t}_k = \underline{0}$$

và vector \underline{a}_k phải là vector riêng bên phải ứng với giá trị riêng s_k của đối tượng chứ không phải được tính theo (4.55).

Về câu hỏi thứ ba. Để xét khi nào $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ độc lập tuyến tính với nhau ta chia làm ba trường hợp:

- Khi tồn tại các vector $(s_i I - A)^{-1}$ thì chúng *ít nhất* phải khác nhau từng đôi một.

Nói cách khác những giá trị điểm cực cho trước s_i , $i=1, 2, \dots, n$ mà không phải là giá trị riêng của A thì phải khác nhau từng đôi một.

- Nếu có nhiều giá trị s_k mà ứng với nó không tồn tại $(s_k I - A)^{-1}$, tức là những giá trị này là giá trị riêng của A và bộ điều khiển R không cần dịch chuyển các điểm cực s_k đó. Gọi \underline{a}_k là vector riêng bên phải của A ứng với s_k . Theo nội dung mục 2.3.2 về giá trị riêng và vector riêng của một ma trận (trang 136), các vector riêng này sẽ độc lập tuyến tính với nhau nếu như những giá trị riêng không cần dịch chuyển đó cũng lại khác nhau từng đôi một. Trường hợp chúng không khác nhau, chẳng hạn như có q giá trị s_k giống nhau (phương trình $\det(sI - A) = 0$ có nghiệm s_k bội q) thì bắt buộc ứng với nghiệm s_k bội q đó phải có đúng q vector riêng bên phải độc lập tuyến tính với nhau.
- Nếu $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vẫn không độc lập tuyến tính mặc dù đã thỏa mãn các yêu cầu trên thì ta có thể thông qua việc lựa chọn $\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n$ để $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ lập thành hệ độc lập tuyến tính. Trường hợp điều đó vẫn không xảy ra thì cuối cùng ta có thể thay đổi nhỏ các giá trị s_i , $i=1, 2, \dots, n$ để có được $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ độc lập tuyến tính. Việc sửa đổi s_i , $i=1, 2, \dots, n$ cũng là hợp lý vì thực tế có rất nhiều bộ giá trị s_i , $i=1, 2, \dots, n$ cùng mang đến một chất lượng như nhau cho hệ kín.

Tổng kết lại các trường hợp vừa xét, ta đi đến thuật toán Roppeneker dạng tổng quát như sau:

- 1) Tính các vector \underline{a}_i ứng với các giá trị s_i , $i=1, 2, \dots, n$ đã cho:
 - Nếu s_i không phải là giá trị riêng của A thì tính theo (4.55), trong đó \underline{t}_i là tham số tự do.
 - Nếu s_i là giá trị riêng của A thì chọn $\underline{t}_i = \underline{0}$ và \underline{a}_i là một nghiệm của $(s_i I - A) \underline{a}_i = \underline{0}$
- 2) Chọn các vector tham số còn tự do \underline{t}_i sao cho với nó n vector \underline{a}_i , $i=1, 2, \dots, n$ xác định ở bước 1 lập thành hệ độc lập tuyến tính.
- 3) Xác định R theo (4.56).

Ví dụ 22: Xét dõi tương

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Ta sẽ tìm bộ điều khiển tinh R , phản hồi trạng thái theo thuật toán Roppeneker để ma trận hệ thống của hệ kín nhận $s_1 = -2$, $s_2 = -1$ làm các giá trị riêng.

Với $s_1 = -2$ thì

$$(s_1 I - A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (s_1 I - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{a}_1 = (s_1 I - A)^{-1} B t_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ở đây ta đã chọn $t_1 = 4$.

Với $s_2 = -1$ thì do $\det(s_2 I - A) = 0$, tức là s_2 đã là giá trị riêng của A nên bộ điều khiển R không cần dịch chuyển s_2 . Chọn $t_2 = 0$ và \underline{a}_2 là vector riêng bên phải của đối tượng:

$$(s_2 I - A) \underline{a}_2 = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{a}_2 = \underline{0} \Rightarrow \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Vậy thì

$$R = -(t_1 \ t_2) (\underline{a}_1 \ \underline{a}_2)^{-1} = -(4 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = (12 \ -4).$$

Kiểm tra lại thì thấy với R tổng hợp được ma trận hệ kín

$$A - BR = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (12 \ -4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$$

có hai giá trị riêng -2 và -1 như yêu cầu đã đặt ra. \square

4.6.4 Phương pháp modal phản hồi trạng thái

Fương pháp modal do Rosenbrock xây dựng năm 1962 là phương pháp thiết kế bộ điều khiển tĩnh R , phản hồi trạng thái cho đối tượng MIMO mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$$

với $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{s \times r}$ để hệ kín thu được với mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A - BR)\underline{x} + B\underline{w}$$

$$\underline{y} = (C - DR)\underline{x} + D\underline{w}$$

nhận những giá trị cho trước s_i , $i=1, 2, \dots, n$ làm điểm cực (hình 4.29a), tức là có:

$$\det(s_i I - A + BR) = 0 \quad \text{với mọi } i=1, 2, \dots, n.$$

Tư tưởng của phương pháp là khá đơn giản. Nó bắt đầu từ việc chuyển mô hình đối tượng, cụ thể là ma trận A , sang dạng đường chéo (dạng modal) hay Jordan để thiết kế bộ điều khiển rồi sau đó mới chuyển ngược lại mô hình ban đầu.

Để mô tả nội dung phương pháp modal, ta bắt đầu với trường hợp ma trận A của đối tượng có dạng giống đường chéo (xem lại khái niệm ma trận giống đường chéo đã được nói tới ở mục 2.3.3 về phương pháp modal, trang 133).

Một ma trận A được gọi là giống đường chéo, nếu:

- hoặc là các giá trị riêng g_i , $i=1, 2, \dots, n$ của nó khác nhau từng đôi một,
- hoặc là ứng với một giá trị riêng g_k bởi q thì phải có đúng q vector riêng bên phải độc lập tuyến tính.

Một ma trận A giống đường chéo luôn chuyển được về dạng đường chéo nhờ phép biến đổi tương đương, trong đó ma trận đường chéo thu được có các phần tử trên đường chéo chính là giá trị riêng của nó g_i , $i=1, 2, \dots, n$:

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_n \end{pmatrix} = \text{diag}(g_i) \quad (4.57)$$

và M là ma trận modal có các vector cột là vector riêng bên phải của A :

$$M = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \quad (4.58a)$$

$$(g_i I - A) \underline{a}_i = \underline{0} \quad \text{với mọi } i=1, 2, \dots, n. \quad (4.58b)$$

Ví dụ 23: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Ma trận này có hai giá trị riêng là

$$\det(gI - A) = (g-1)(g-2) = 0 \Rightarrow g_1 = 1 \text{ và } g_2 = 2.$$

Tương ứng với hai giá trị riêng đó là hai vector riêng bên phải

$$(g_1 I - A) \underline{a}_1 = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \underline{a}_1 = \underline{0} \Rightarrow \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(g_2 I - A) \underline{a}_2 = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \underline{a}_2 = \underline{0} \Rightarrow \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

và hiển nhiên hai vector đó độc lập tuyến tính với nhau. Do vậy ma trận modal

$$M = (\underline{a}_1 \quad \underline{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

không suy biến và ta có

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{diag}(g_1 \ g_2).$$

□

Ví dụ 24: Ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ có các giá trị riêng

$$\det(gI - A) = -g^3 - g^2 - 21g + 45 = (g+3)^2(g-5) = 0$$

$$\Rightarrow g_1 = g_2 = -3 \quad \text{và} \quad g_3 = 5.$$

Như vậy A có một giá trị riêng $g_1 = -3$ bội 2 và một giá trị riêng $g_3 = 5$ là nghiệm đơn.

Ứng với $g_1 = -3$ bội 2 có 2 vector riêng độc lập tuyến tính là nghiệm của

$$(A - g_1 I)\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 - 6a_3 = 0 \\ -a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a_1 = -2a_2 + 3a_3.$$

$$\Leftrightarrow \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Còn lại, ứng với $g_3 = 5$ là vector riêng

$$(A - g_3 I)\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \underline{a}_3 = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$M = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vậy

$$\begin{aligned} M^{-1}AM &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \text{diag}(-3 \ -3 \ 5) \end{aligned}$$

□

Quay lại bài toán thiết kế bộ điều khiển R . Xét đổi tương

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

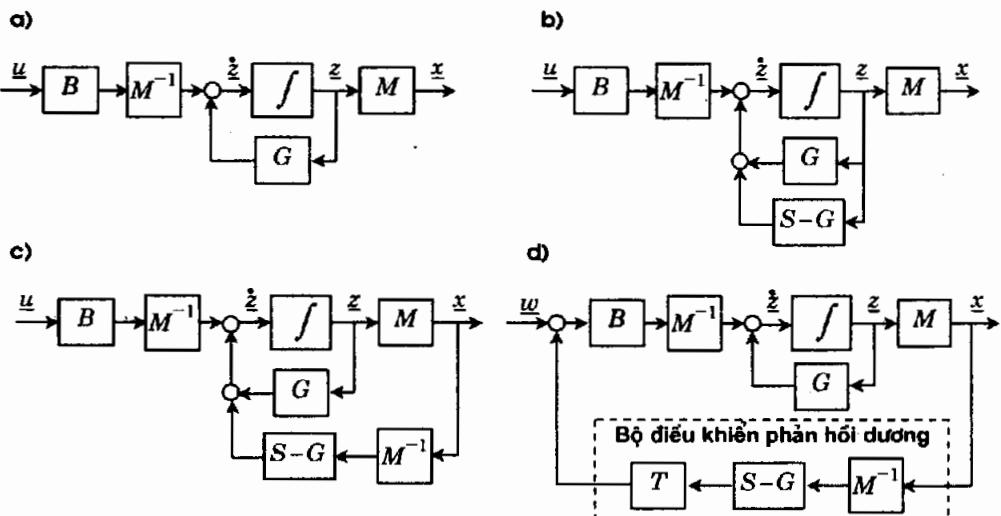
có A là ma trận giống đường chéo. Gọi g_i , $i=1, 2, \dots, n$ là các giá trị riêng và M là ma trận modal của A . Đặt biến mới

$$\underline{x} = M\underline{z}$$

ta sẽ thu được mô hình trạng thái tương ứng cho đổi tương (hình 4.31a)

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = M^{-1}AM\underline{z} + M^{-1}B\underline{u}$$

$$= G\underline{z} + M^{-1}B\underline{u} \quad \text{trong đó } G = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & g_n \end{pmatrix} = \text{diag}(g_i)$$



Hình 4.31: Minh họa phương pháp thiết kế modal

Với việc chuyển đổi trạng thái nhờ ma trận modal M như vậy thì mạch phản hồi chính là ma trận đường chéo chứa các điểm cực của hệ. Do đó, muốn hệ thống nhận tất cả các giá trị cho trước s_i , $i=1, 2, \dots, n$ làm giá trị riêng ta chỉ cần nối song song với G một khối khác có $S-G$ (hình 4.31b), trong đó

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{pmatrix} = \text{diag}(s_i) . \quad (4.59)$$

Định lý 4.3: Hệ với sơ đồ khối mô tả ở hình 4.31b có các điểm cực là s_i , $i=1, 2, \dots, n$.

Chứng minh:

Từ sơ đồ khối của hệ ta có mô hình trạng thái

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{z}}{dt} &= (G+S-G)\underline{z} + M^{-1}B\underline{u} = S\underline{z} + M^{-1}B\underline{u} \\ \Leftrightarrow M^{-1}\frac{d\underline{x}}{dt} &= SM^{-1}\underline{x} + M^{-1}B\underline{u} \\ \Leftrightarrow \frac{d\underline{x}}{dt} &= MSM^{-1}\underline{x} + B\underline{u} \end{aligned}$$

Do đó hệ sẽ có các điểm cực là giá trị riêng của MSM^{-1} . Nhưng giá trị riêng của MSM^{-1} cũng là giá trị riêng của S vì MSM^{-1} và S là hai ma trận tương đương (xem lại tính chất giá trị riêng của ma trận ở trang 129) nên hệ sẽ có các điểm cực là s_i , $i=1, 2, \dots, n$ (cũng là các giá trị riêng của S). \square

Việc còn lại là phải đưa hệ trong hình 4.31b) về dạng thực hiện được, tức là về dạng mà điểm hồi tiếp phải là điểm trạng thái \underline{x} và đầu ra của khâu hồi tiếp phải kết hợp được với \underline{u} . Áp dụng quy tắc về đại số sơ đồ khối (mục 2.1.3, trang 69), trước tiên dễ dàng có ngay sơ đồ khối như hình 4.31c), vì M là ma trận không suy biến.

Để tiếp tục, ta chuyển điểm hồi tiếp tới trước khâu B . Vấn đề sẽ rất đơn giản nếu B là ma trận không suy biến. Khi đó ta chọn

$$T = (M^{-1}B)^{-1} = B^{-1}M \quad (4.60)$$

là được và bộ điều khiển phản hồi âm R khi đó sẽ là

$$R = -T(S-G)M^{-1}. \quad (4.61)$$

Ví dụ 25: (Trường hợp B không suy biến)

Xét đối tượng có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\underline{u}$$

Bộ điều khiển R phản hồi âm trạng thái phải được xác định sao cho ma trận hệ thống của hệ mới nhận $s_1 = s_2 = -1$ làm các giá trị riêng (điểm cực của hệ). Trước tiên từ mô hình đối tượng ta thấy đối tượng có các điểm cực $g_1=0$, $g_2=2$.

Với $g_1=0$ thì

$$(g_1 I - A)\underline{a}_1 = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\underline{a}_1 = \underline{0} \Rightarrow \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tương tự, với $g_2=2$ có

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{a}_2 = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vậy ma trận modal của đối tượng là

$$M = (\underline{a}_1 \ \underline{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Ngoài ra còn có

$$(S-G) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

và

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T = B^{-1}M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$R = -T(S-G)M^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Với bộ điều khiển R trên, ma trận hệ thống của hệ kín

$$A-BR = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sẽ có các giá trị riêng $s_1 = s_2 = -1$ đúng như yêu cầu của bài toán đặt ra. \square

Song nói chung do B không phải là ma trận vuông (B có n hàng, r cột với $n \geq r$) nên tích $M^{-1}B$ cũng có n hàng, r cột và do đó không thể tính T theo (4.60). Nếu như rằng tích $M^{-1}B$ có hạng là r thì ta có thể giả sử rằng r vector hàng đầu tiên của nó là độc lập tuyến tính. Điều giả sử này hoàn toàn không làm mất tính chất tổng quát của phương pháp vì tích $M^{-1}B$ phụ thuộc vào M nên lúc nào ta cũng có thể sắp xếp lại thứ tự các vector riêng bên phải của A trong M để có được r vector hàng đầu tiên trong $M^{-1}B$ là độc lập tuyến tính.

Khi $M^{-1}B$ có r vector hàng đầu tiên là độc lập tuyến tính, tức là

$$M^{-1}B = \begin{pmatrix} K_r \\ K_{n-r} \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

trong đó K_r là ma trận vuông không suy biến bao gồm r vector hàng đầu tiên của $M^{-1}B$, thì thay vì xác định T theo (4.60) ta chỉ lấy T_r là ma trận nghịch đảo của K_r .

$$T_r = K_r^{-1} \quad (4.63)$$

Lúc này, do T_r chỉ còn là ma trận kiểu $r \times r$ nên công thức (4.61) cũng phải được sửa đổi lại cho phù hợp với phép nhân ma trận như sau:

$$R = -T_r(S_r^{-1}G_r)M_r^{-1} \quad (4.64)$$

trong đó S_r , G_r là các ma trận vuông kiểu $r \times r$ định nghĩa như sau :

$$S_r = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_r \end{pmatrix}, \quad G_r = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_r \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

và M_r^{-1} là ma trận gồm r vector hàng đầu tiên của M^{-1} .

Để biểu diễn được các công thức (4.62), (4.63) dưới dạng gọn hơn ta sử dụng một tính chất sau của đại số ma trận. Nếu

$$M = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$$

là ma trận modal của A , trong đó \underline{a}_i , $i=1, 2, \dots, n$ là các vector riêng bên phải của A ứng với giá trị riêng g_i , $i=1, 2, \dots, n$ của nó

$$(g_i I - A) \underline{a}_i = \underline{0}$$

thì khi biến đổi M^{-1} về dạng

$$M^{-1} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T \\ \vdots \\ \underline{b}_n^T \end{pmatrix}$$

các vector $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ lại chính là những vector riêng bên trái của A ứng với g_i , $i=1, 2, \dots, n$, tức là

$$\underline{b}_i^T (g_i I - A) = \underline{0}^T \quad \text{với mọi } i=1, 2, \dots, n. \quad (4.66)$$

Với tính chất vừa nêu trên của ma trận A thì rõ ràng có

$$M_r^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T \\ \vdots \\ \underline{b}_r^T \end{pmatrix}, \quad T_r = \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T B \\ \vdots \\ \underline{b}_r^T B \end{pmatrix}^{-1} \quad (4.67)$$

Ta đi đến thuật toán xác định bộ điều khiển R dịch chuyển điểm cực cho đối tượng có hạng của B là r và A là ma trận giống đường chéo, như sau:

- 1) Xác định r vector riêng bên trái $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_r$ của A theo công thức (4.66).
- 2) Tính M_r^{-1} và T_r theo (4.67).
- 3) Xác định S_r, G_r từ $g_i, s_i, i=1, 2, \dots, n$ theo (4.65)
- 4) Tính R theo công thức (4.64).

Định lý 4.4: Bộ điều khiển R tổng hợp theo thuật toán trên chỉ dịch chuyển được r điểm cực $g_i, i=1, 2, \dots, r$ trong số n điểm cực của đối tượng (giá trị riêng của A) tới r giá trị mong muốn $s_i, i=1, 2, \dots, r$. Thuật toán không làm thay đổi vị trí các điểm cực còn lại của đối tượng, tức là hệ kín thu được sẽ có các điểm cực là $s_1, \dots, s_r, g_{r+1}, \dots, g_n$.

Chứng minh:

Do giá trị riêng của ma trận (điểm cực của hệ) bất biến với phép biến đổi tương đương nên giá trị riêng của $A - BR$ cũng là giá trị riêng của

$$\begin{aligned} M^{-1}(A - BR)M &= G - M^{-1}BRM = G + M^{-1}BT_r(S_r - G_r)M_r^{-1}M \\ &= G + \begin{pmatrix} K_r \\ K_{n-r} \end{pmatrix} K_r^{-1}(S_r - G_r) \begin{pmatrix} \underline{b}_1^T \\ \vdots \\ \underline{b}_r^T \end{pmatrix} (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \end{aligned}$$

Nhưng vì

$$\underline{b}_i^T \underline{a}_j = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

nên

$$M^{-1}(A - BR)M = G + \begin{pmatrix} I_r \\ K_{n-r}K_r^{-1} \end{pmatrix} (S_r - G_r)(I_r - \Theta)$$

trong đó I_r là ma trận đơn vị kiểu $r \times r$. Suy ra

$$\begin{aligned} M^{-1}(A - BR)M &= G + \begin{pmatrix} I_r \\ K_{n-r}K_r^{-1} \end{pmatrix} (S_r - G_r - \Theta) = G + \begin{pmatrix} S_r - G_r & \Theta \\ K_{n-r}K_r^{-1}(S_r - G_r) & \Theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_r & 0 & \cdots & 0 \\ \times & \cdots & \times & g_{r+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & \cdots & \times & 0 & \cdots & g_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

với \times là một số thực nào đó. Từ đẳng thức sau cùng ta có được d.p.c.m. □

Ví dụ 26: (Trường hợp B suy biến)

Hãy thiết kế bộ điều khiển tĩnh, phản hồi trạng thái hoàn toàn cho đối tượng có mô hình

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

để hệ mới nhận $s_1 = -1$ và $s_2 = -3$ làm các điểm cực.

Do B có hạng là 1 với hàng đầu tiên của nó độc lập tuyến tính (khác 0) nên thuật toán nêu trên chỉ chuyển được một điểm cực. Đối tượng có hai điểm cực là $g_1 = 1$ và $g_2 = -2$. Ta sẽ sử dụng thuật toán để xác định R chuyển $g_1 = 1$ tới $s_1 = -1$.

Bây giờ ta xác định \underline{b}_1 là vector riêng bên trái của đối tượng ứng với $g_1 = 1$

$$\underline{b}_1^T (g_1 I - A) = \underline{0}^T \Rightarrow \underline{b}_1^T \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{0}^T \Rightarrow \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tiếp theo là

$$S_1 - G_1 = -1 - 1 = -2.$$

Suy ra

$$M_r^{-1} = (1 \quad 1) \quad \text{và} \quad T_r = \left[(1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} = 1$$

Do đó ta có R

$$R = -T_r(S_r - G_r) M_r^{-1} = 2(1 \quad 1) = (2 \quad 2).$$

Thử lại với bộ điều khiển R tìm được thì hệ kín với

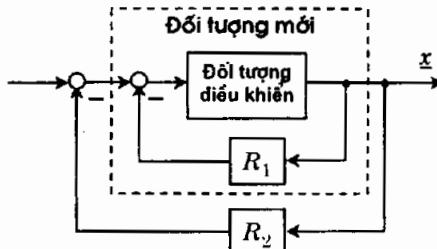
$$A - BR = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (2 \quad 2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

rõ ràng là có một điểm cực mới $s_1 = -1$ và một điểm cực cũ $g_2 = -2$. □

Như vậy, bộ điều khiển R không chuyển được hết tất cả n điểm cực g_i , $i=1, 2, \dots, n$ của đối tượng tới n giá trị mới s_i , $i=1, 2, \dots, n$ như mong muốn mà chỉ chuyển được r trong số chúng, nếu như B có hạng là r . Song với kết quả định lý 4.4 thì điều đó hoàn toàn không hạn chế khả năng ứng dụng của thuật toán vì hai lý do sau đây:

- 1) Thông thường, ở các bài toán tổng hợp theo nguyên lý cho trước điểm cực ít khi người ta đặt ra vấn đề dịch chuyển tất cả n điểm cực mà chỉ những điểm cực mang tính quyết định tới sự thay đổi chất lượng của hệ thống. Nói cách khác, thuật toán sẽ được áp dụng trực tiếp cho bài toán có số các điểm cực phải dịch chuyển là r ít hơn số các điểm cực vốn có của đối tượng là n .

- 2) Trong trường hợp số các điểm cực phải dịch chuyển lại nhiều hơn r hoặc phải dịch chuyển toàn bộ n điểm cực của đối tượng thì dựa vào định lý 4.4 nói rằng những điểm cực được dịch chuyển sẽ là các điểm được sắp xếp trong S_r , cũng như trong G_r , và thuật toán không làm thay đổi vị trí những điểm cực còn lại, ta có thể lần lượt thực hiện các bước như sau:
- Sử dụng thuật toán đã nêu để xác định bộ điều khiển R_1 nhằm dịch chuyển r điểm cực g_i , $i=1, 2, \dots, r$ tới s_i , $i=1, 2, \dots, r$.
 - Xem hệ thống gồm đối tượng và bộ điều khiển R_1 đã tìm được như một đối tượng mới. Vậy thì đối tượng mới này sẽ có các điểm cực là $s_1, \dots, s_r, g_{r+1}, \dots, g_n$. Sắp xếp lại các điểm cực, chẳng hạn như theo thứ tự $g_1, \dots, g_{n-r}, s_{n-r+1}, \dots, s_n$ rồi lại sử dụng thuật toán một lần nữa để tìm bộ điều khiển R_2 thứ hai nhằm chuyển r trong số $n-r$ điểm cực g_1, \dots, g_{n-r} tới các điểm mới s_1, \dots, s_{n-r} (hình 4.32).
 - Cứ như vậy, ta thực hiện bước b) nhiều lần để có được các bộ điều khiển R_k lồng nhau cho tới đã chuyển được hết tất cả các điểm cực. Cách tổng hợp những bộ điều khiển R_k lồng nhau như vậy được gọi là *điều khiển cascade*.



Hình 4.32: Nguyên tắc tổng hợp bộ điều khiển cascade.

Ví dụ 27: Hãy thiết kế bộ điều khiển tĩnh, phản hồi trạng thái cho đối tượng có mô hình

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

sao cho hệ mới nhận $s_1 = -1$ và $s_2 = -2$ làm các điểm cực.

Đối tượng có hai điểm cực là $g_1 = 1$ và $g_2 = 2$. Do B có hạng là 1 với hàng đầu tiên của nó độc lập tuyến tính (khác 0) nên phương pháp modal trực tiếp chỉ có thể chuyển được nhiều nhất một điểm cực. Trước tiên, ta sẽ chuyển $g_1 = 1$ tới $s_1 = -1$. Theo (4.65):

$$S_1 - G_1 = -1 - 1 = -2.$$

Vector riêng bên trái \underline{b}_1 của đối tượng ứng với $g_1=1$ là

$$\underline{b}_1^T (g_1 I - A) = \underline{0}^T \Rightarrow \underline{b}_1^T \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \underline{0}^T \Rightarrow \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$M_r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad T_r = \left[(1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} = 1$$

Do đó ta có R_1

$$R_1 = -T_r(S_r - G_r) M_r^{-1} = 2(1 \quad -1) = (2 \quad -2).$$

Thử lại với bộ điều khiển R_1 tìm được thì hệ kín

$$A - BR_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(2 \quad -2) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

có các giá trị riêng $s_1 = -1$, $s_2 = g_2 = 2$. Như vậy R_1 mới chỉ chuyển $g_1=1$ tới $s_1 = -1$ còn $g_2=2$ thì không.

Xem hệ kín gồm đối tượng đã cho và bộ điều khiển R_1 vừa tìm được như một đối tượng mới thì đối tượng này có mô hình

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Nó có hai điểm cực $g_1=2$, $g_2=-1$. Ta sẽ tìm R_2 để chuyển nốt $g_1=2$ tới $s_1=-1$. Trước hết ta tính

$$\underline{b}_1^T (g_1 I - A) = \underline{0}^T \Rightarrow \underline{b}_1^T \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{0}^T \Rightarrow \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vậy

$$M_r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad T_r = \left[(1 \quad -4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} = 1$$

Ngoài ra

$$S_1 - G_1 = -1 - 2 = -3.$$

Suy ra

$$R_2 = -T_r(S_r - G_r) M_r^{-1} = 3(1 \quad -4) = (3 \quad -12).$$

Thử lại với bộ điều khiển R_2 tìm được thì hệ kín

$$A - BR_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(3 \quad -12) = \begin{pmatrix} -5 & 16 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

rõ ràng có các giá trị riêng $s_1 = s_2 = -1$.

□

4.6.5 Phương pháp modal phản hồi tín hiệu ra

Trong phần này ta sẽ bàn tới bài toán thứ hai đã được đưa ra ở mục 4.6.1 (hình 4.29b, trang 338). Đó là bài toán tìm bộ điều khiển R phản hồi đầu ra của đối tượng

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}$$

$$\underline{y} = C\underline{x}$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$ sao cho hệ kín thu được với mô hình

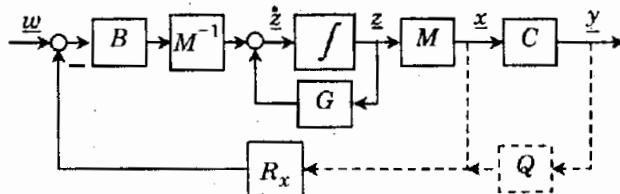
$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A - BRC)\underline{x} + B\underline{w}$$

$$\underline{y} = C\underline{x}$$

có được các điểm cực s_1, \dots, s_n là những giá trị cho trước.

Để thiết kế bộ điều khiển modal phản hồi đầu ra R , tức là tín hiệu phản hồi về không phải là vector trạng thái \underline{x} mà là vector tín hiệu ra \underline{y} , ta cũng bắt đầu với thuật toán tìm bộ điều khiển modal phản hồi trạng thái R_x đã trình bày ở mục 4.6.4, rồi sau đó tìm cách chuyển điểm hồi tiếp từ \underline{x} về \underline{y} nhờ ma trận $Q \in \mathbb{R}^{n \times s}$ (hình 4.33). Ma trận Q phải thỏa mãn

$$QC = I \quad (4.68)$$



Hình 4.33: Phương pháp thiết kế modal phản hồi đầu ra.

Nếu C không suy biến thì ta dễ dàng có được

$$Q = C^{-1}.$$

Khi C suy biến, mà điều này thường gặp phải (vì C là ma trận không vuông, có n hàng, s cột), ta phải tìm Q bằng cách giải hệ phương trình (4.68) với n^2 phương trình cho $n \times s$ ẩn số là các phần tử của Q . Nếu $s \geq n$ thì có thể (4.68) còn giải được, song ngược lại khi $s < n$ hệ phương trình (4.68) là vô nghiệm. Trường hợp (4.68) vô nghiệm lại thường hay gặp ở các bài toán điều khiển, vì nói chung số biến trạng thái của đối tượng bao giờ cũng nhiều hơn số các tín hiệu đầu ra của nó.

Người ta dành phải chấp nhận một giải pháp dung hòa hơn là không tìm Q thỏa mãn (4.68) mà thay vào đó là

$$CQC = C. \quad (4.69a)$$

Phương trình trên lúc nào cũng có nghiệm Q , thậm chí là vô số nghiệm. Một trong các nghiệm đó là

$$Q = C^T (CC^T)^{-1} \quad (4.69b)$$

Từ đây ta có thuật toán tìm R gồm các bước như sau:

- 1) Sử dụng thuật toán modal phản hồi trạng thái đã cho trong mục (4.6.4) để tìm bộ điều khiển R_x (có thể là gồm nhiều bộ điều khiển lồng nhau).
- 2) Tìm Q thỏa mãn (4.69a). Có thể xác định Q theo (4.69b).
- 3) Tính $R = R_x Q \quad (4.70)$

Song một điều cần chú ý là hạng của Q thỏa mãn (4.69) không lớn hơn hạng của C , tức là không thể lớn hơn s , nên hạng của bộ điều khiển R tính theo (4.70) cũng chỉ có thể nhiều nhất là s . Điều này nói rằng bộ điều khiển R không thể chuyển hết được n điểm cực cũ g_1, \dots, g_n (là giá trị riêng của A) tới n vị trí mới s_1, \dots, s_n (là giá trị riêng của $A - BRC$) mà nhiều nhất chỉ có thể là s trong số chúng.

Thuật toán trên còn có một nhược điểm lớn hạn chế khả năng ứng dụng so với thuật toán tìm R_x phản hồi trạng thái là các điểm cực không được dịch chuyển cũng bị ảnh hưởng. Chính xác hơn là chúng cũng được dịch chuyển song không tái được vị trí đã chọn trước. Nguyên nhân nằm ở ma trận Q đã được tìm theo (4.69).

Ví dụ 28: Xét đối tượng có mô hình

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \\ \bar{y} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} \end{aligned}$$

Cùng với bộ điều khiển phản hồi trạng thái R_x

$$R_x = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

hệ kín thu được có các điểm cực

$$s_1 = -2, s_2 = -3 \text{ và } s_3 = -4$$

Để chuyển bộ điều khiển phản hồi trạng thái R_x thành bộ điều khiển phản hồi đầu ra theo (4.70) ta phải tìm ma trận Q thỏa mãn (4.69).

Tìm Q theo (4.69b) ta được

$$Q = C^T (CC^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

và bộ điều khiển R phản hồi đầu ra là

$$R = R_x Q = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Với bộ điều khiển R phản hồi đầu ra đó, hệ kín có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = (A - BRC)\underline{x} + B\underline{w} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 1 \\ -10 & -5 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{w}$$

và các điểm cực là $s_1 = -2$, $s_2 = -3$, $s_3 = -1$. Như vậy điểm cực s_3 đã bị dịch chuyển một cách không mong muốn từ vị trí cũ -4 tới vị trí mới -1 . \square

Do không kiểm soát được các điểm cực không được dịch chuyển như vậy mà cũng không sử dụng được nhiều lần thuật toán tìm R phản hồi đầu ra nhằm tạo những bộ điều khiển cascade giống như ở phương pháp phản hồi trạng thái. Hơn nữa cũng vì không kiểm soát được các điểm cực còn lại nên rất có thể chúng lại bị di chuyển tới những vị trí bất lợi cho chất lượng hệ thống, chẳng hạn như sang phía phải trực áo. Do đó thuật toán không có ý nghĩa ứng dụng. Để có nhiều cố gắng can thiệp thêm để tăng hơn nữa số các điểm cực được dịch chuyển (cùng với nó sẽ giảm số điểm cực không kiểm soát được), ví dụ như phương pháp của Kimura (xem tài liệu AC-20, 1975, trang 509-516) cho phép chuyển dịch được tối đa $\min\{r+s-1, n\}$ điểm cực. Nhưng nếu đã không chuyển được hết n điểm cực thì có nghĩa vẫn còn các điểm cực không kiểm soát được và do đó sự cố gắng đó cũng là vô nghĩa.

Có lẽ khi đọc đến phần này, một số bạn đọc sẽ có câu hỏi là tại sao không xác định Q giống như T_r khi phải chuyển tín hiệu hồi tiếp về từ sau ra trước khôi $M^{-1}B$ ở thuật toán thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái. Tức là cũng chia CM thành

$$CM = \begin{pmatrix} L_s \\ L_{n-r} \end{pmatrix}$$

với giải thích rằng C có hạng là s và tích CM có s vector hàng đầu tiên là độc lập tuyến tính. Sau đó xác định Q là

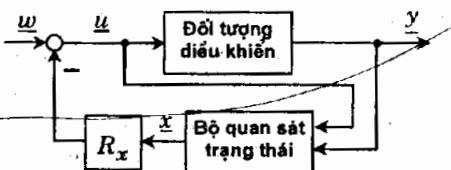
$$Q = L_s^{-1}.$$

Ta sẽ thấy cách suy nghĩ tự nhiên đó sẽ dẫn đến trường hợp là với bộ điều khiển R tìm được hệ kín có điểm cực là giá trị riêng của (xem lại lời chứng minh định lý 4.4):

$$M^{-1}(A - BRC)M = \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_m & \times & \cdots & \times \\ \times & \cdots & \times & g_{m+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & \cdots & \times & 0 & \cdots & g_n \end{pmatrix}$$

với \times là một số thực nào đó và $m = \min\{r, s\}$. Nói cách khác, nó sẽ không có được các giá trị riêng s_1, \dots, s_n như bài toán đặt ra, thậm chí chỉ là s_1, \dots, s_m ở bài toán chuyển m điểm cực trong số n điểm cho trước cũng không được (ma trận vẽ phải không phải là ma trận tam giác).

Cuối cùng, ta không nên bi quan là sẽ không có bộ điều khiển gán điểm cực nào làm việc theo nguyên lý phản hồi tín hiệu ra. Ví dụ, đơn giản nhất là ta vẫn có thể sử dụng bộ điều khiển modal phản hồi trạng thái, cộng thêm các bộ quan sát xác định trạng thái x từ những tín hiệu vào u và ra y , là ta đã có bộ điều khiển phản hồi tín hiệu ra y làm việc gián tiếp theo nguyên lý gán điểm cực (hình 4.34). Những thuật toán thiết kế các bộ quan sát trạng thái sẽ được trình bày sau ở mục 4.8.



Hình 4.34: Điều khiển phản hồi đầu ra nhờ bộ quan sát trạng thái.

4.6.6 Nâng cao chất lượng bằng bộ tiền xử lý

Ở các mục trước đây ta đã nhiều lần đề cập đến vấn đề sai lệch tĩnh trong hệ hồi tiếp. Sai lệch tĩnh này vẫn có thể tồn tại ngay cả khi hệ kín ổn định. Điều này gây những khó chịu khi sử dụng là tín hiệu lệnh $u(t)$ được đưa ra dưới dạng một hằng số, song hệ thống lại có đáp ứng $y(t)$ không giống tín hiệu lệnh (trong chế độ xác lập), tức là nó cũng đã tiến đến một hằng số nhưng khác với hằng số tín hiệu lệnh.

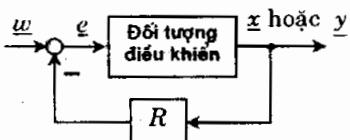
Dể loại bỏ sai lệch tĩnh người ta thường tiến hành một trong hai giải pháp:

- Tạo cho hệ hở có thành phần tích phân (mục 3.5.3, trang 254).
- Sử dụng thêm bộ tiền xử lý V (hình 4.35).

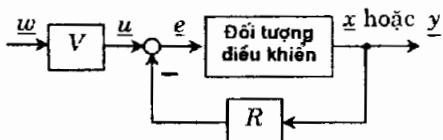
Trong khi giải pháp thứ nhất được áp dụng nhiều ở hệ SISO thì giải pháp thứ hai khá thích ứng cho hệ MIMO. Đặc biệt khi mà bộ điều khiển R được thiết kế theo phương pháp gán điểm cực và việc đưa thêm vào hệ hở khâu tích phân dễ dẫn tới nguy cơ làm thay đổi vị trí các điểm cực đã được gán thì giải pháp thứ hai càng có tính ưu việt.

Một điều chú ý thêm ở đây là ta sử dụng ký hiệu V (ma trận) để chỉ bộ tiền xử lý chứ không phải M như đã dùng trong mục 4.3.5 hay 4.5. Đơn giản chỉ là vì ký hiệu M đã được sử dụng cho ma trận modal.

a)



b)



Hình 4.35: Loại bỏ sai lệch tinh bằng bộ tiền xử lý.

Giả sử rằng đối tượng được mô tả bởi (hình 4.35)

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{e}, \quad \underline{y} = C\underline{x}$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$. Đối tượng được điều khiển theo nguyên lý hồi tiếp bằng bộ điều khiển R (tính). Tín hiệu phản hồi về có thể là trạng thái \underline{x} nhưng cũng có thể là dấu ra \underline{y} . Trong cả hai trường hợp, hệ kín chưa có bộ tiền xử lý V sẽ có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \tilde{A}\underline{x} + B\underline{w}, \quad \underline{y} = C\underline{x}$$

trong đó

$$\tilde{A} = \begin{cases} A - BR & \text{nếu tín hiệu phản hồi là } \underline{x} \\ A - BRC & \text{nếu tín hiệu phản hồi là } \underline{y} \end{cases}$$

Vậy thì ma trận truyền đạt của hệ kín không có bộ tiền xử lý (hình 4.35a) sẽ là

$$\underline{Y}(s) = C(sI - \tilde{A})^{-1} B \underline{W}(s) = G(s) \underline{W}(s).$$

$$\Rightarrow G(s) = C(sI - \tilde{A})^{-1} B.$$

Nếu như bộ điều khiển R đã được thiết kế sao cho hệ kín ổn định (các giá trị riêng nằm bên trái trục ảo) thì ma trận $(sI - \tilde{A})$ sẽ không suy biến trong toàn bộ miền hội tụ của tích phân Laplace (bên phải trục ảo), do đó mà tồn tại $(sI - \tilde{A})^{-1}$.

Khi được nêu thêm bộ tiền xử lý (hình 4.35b) quan hệ vào ra của hệ sẽ là

$$\underline{Y}(s) = G(s)V \underline{W}(s).$$

Nhiệm vụ của bộ tiền xử lý là phải làm sao tạo ra được tín hiệu ra $\underline{y}(t)$ ở chế độ xác lập giống như tín hiệu lệnh dấu vào $\underline{w}(t)$, tức là

$$\underline{y}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{y}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{w}(t) = \underline{w}_\infty \Leftrightarrow \underline{y}_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} s\underline{Y}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\underline{G}(s)V \frac{\underline{w}_\infty}{s}$$

$$\Leftrightarrow \underline{y}_\infty = G(0)V \underline{w}_\infty$$

$$\Leftrightarrow G(0)V = I \quad (\text{vì } \underline{y}_\infty = \underline{w}_\infty).$$

Khi hệ thống có số các tín hiệu đầu vào bằng nhau thì $G(0)$ là ma trận vuông. Giả thiết thêm $G(0)$ không suy biến. Vậy thì bộ điều khiển tiền xử lý V sẽ là

$$V = G^{-1}(0) = [C(-\tilde{A})^{-1}B]^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V = [C(BR - A)^{-1}B]^{-1} & \text{nếu tín hiệu phản hồi là } \underline{x} \\ V = [C(BRC - A)^{-1}B]^{-1} & \text{nếu tín hiệu phản hồi là } \underline{y} \end{cases} \quad (4.71a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V = [C(BR - A)^{-1}B]^{-1} & \text{nếu tín hiệu phản hồi là } \underline{x} \\ V = [C(BRC - A)^{-1}B]^{-1} & \text{nếu tín hiệu phản hồi là } \underline{y} \end{cases} \quad (4.71b)$$

Ví dụ 29: Trong ví dụ 27 ta đã thiết kế bộ điều khiển phản hồi trạng thái R cho đối tượng có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad y = (1 \ 1) \underline{x}$$

Bộ điều khiển R đó gồm hai bộ điều khiển R_1 và R_2 lồng nhau (hình 4.32) nên

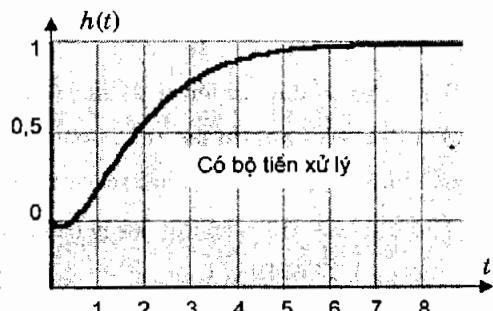
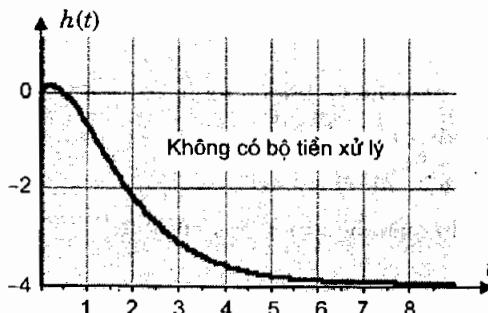
$$R = R_1 + R_2 = (2 \ -2) + (3 \ -12) = (5 \ -14)$$

Cùng với R hệ kín được mô tả bởi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -5 & 16 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} w, \quad y = (1 \ 1) \underline{x}$$

Hình 4.36 dưới đây biểu diễn hàm đáp ứng $y(t)$ của hệ kín khi được kích thích bởi $w(t) = 1(t)$ cho hai trường hợp không có và có bộ tiền xử lý xác định theo (4.71a)

$$V = [C(BR - A)^{-1}B]^{-1} = \frac{-1}{4}. \quad \square$$



Hình 4.36: Minh họa ví dụ 29.

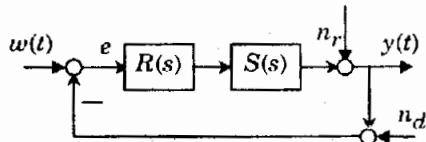
4.7 Bộ điều khiển tối ưu

4.7.1 Xác định tham số tối ưu cho bộ điều khiển

Xét hệ SISO, làm việc theo nguyên lý hồi tiếp, gồm đối tượng $S(s)$ và bộ điều khiển $R(s)$ có cấu trúc xác định, tham số tự do (hình 4.37)

$$R(s) = \frac{b_0^R + b_1^R s + \cdots + b_q^R s^q}{a_0^R + a_1^R s + \cdots + a_p^R s^p} \quad (\text{bậc } p, q \text{ là cho trước})$$

Những ký hiệu R trên các tham số không có ý nghĩa luỹ thừa mà chỉ muốn nói rằng các tham số đó thuộc về bộ điều khiển.



Hình 4.37: Nhiệm vụ bài toán xác định tham số tối ưu.

Bài toán có nhiệm vụ xác định các tham số của bộ điều khiển $b_i^R, a_k^R, i=0,1, \dots, q, k=0,1, \dots, p$ sao cho tín hiệu ra $y(t)$ "bám" được vào tín hiệu lệnh $w(t)$ một cách tốt nhất theo nghĩa

$$Q = \|w(t) - y(t)\|_2^2 = \|e(t)\|_2^2 \rightarrow \min! \quad (4.72)$$

Giả sử rằng hệ kín ổn định. Gọi $E(s)$ là ảnh Laplace của $e(t)$:

$$E(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n}$$

vậy thì $E(s)$ là hàm bền (mục 1.3.4, trang 23) và khi thay s bằng $j\omega$ trong $E(s)$ ta sẽ có được ảnh Fourier $E(j\omega)$ của $e(t)$. Các tham số của $b_i, a_k, i=0,1, \dots, m, k=0,1, \dots, n$ của $E(s)$ được tính từ đối tượng và bộ điều khiển trong trường hợp $w(t)=1(t)$ theo công thức:

$$E(s) = \frac{1}{1 + S(s)R(s)} \cdot \frac{1}{s}.$$

Nói cách khác các tham số $b_i, a_k, i=0,1, \dots, m, k=0,1, \dots, n$ của $E(s)$ phụ thuộc vào bộ tham số $b_i^R, a_k^R, i=0,1, \dots, q, k=0,1, \dots, p$ cần xác định của bộ điều khiển.

Vấn đề mấu chốt là làm sao tính được Q . Một phương pháp tìm Q theo Krasowski đã được trình bày ở trang 255. Nhưng nếu sử dụng công thức Parseval (định lý 1.1, trang 42) thì tiêu chuẩn tối ưu (4.72) còn trở thành

$$Q = \|e(t)\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega \rightarrow \min!$$

Đặt biến mới $s=j\omega$

$$Q = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s)ds \quad (4.73)$$

Do đó với phương pháp residue nhằm xác định tín hiệu từ ảnh Laplace của nó đã được trình bày trong mục 1.3.2, trang 17, đặc biệt là ví dụ 22 và ví dụ 24 của chương 1, trang 19, 20, thì Q trong công thức (4.73) sẽ được tính một cách đơn giản hơn như sau:

- Xác định tất cả các điểm cực s_k của $E(s)$. Do $E(s)$ là hàm bền nên tất cả các điểm cực của nó phải nằm bên trái trực ảo.
- Tính $Q = \sum_k \text{Res}_{s_k} E(s)E(-s)$.

Dựa vào thuật toán tính Q theo (4.73) gồm hai bước như trên người ta đã xác định được cho một số trường hợp đặc biệt:

1) Khi $m=0$ và $n=1$, tức là

$$E(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s}, \quad \text{thì} \quad Q = \frac{b_0^2}{2a_0 a_1}. \quad (4.74)$$

2) Khi $m=1$ và $n=2$, tức là

$$E(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}, \quad \text{thì} \quad Q = \frac{b_1^2 a_0 + b_0^2 a_2}{2a_0 a_1 a_2}. \quad (4.75)$$

3) Khi $m=2$ và $n=3$, tức là

$$E(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3}$$

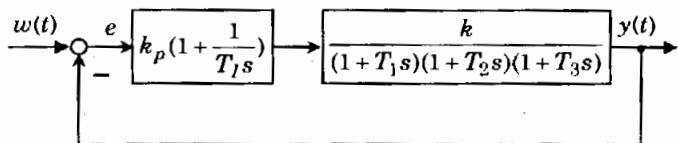
thì

$$Q = \frac{b_2^2 a_0 a_1 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + b_0^2 a_2 a_3}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}. \quad (4.76)$$

Việc xác định $b_i^R, a_k^R, i=0,1, \dots, q, k=0,1, \dots, p$ có trong các hệ số $b_i, a_k, i=0,1, \dots, m, k=0,1, \dots, n$ sao cho Q đạt giá trị nhỏ nhất có thể được tiến hành theo phương pháp tìm kiếm từng bước (xem thêm tài liệu [12] về các thuật toán chuyển động đến cực trị), hoặc phương pháp giải tích, chẳng hạn như xác định nghiệm của

$$\frac{\partial Q}{\partial b_i^R} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial a_k^R} = 0 \quad \text{với mọi } i=0,1, \dots, q, k=0,1, \dots, p. \quad (4.77)$$

Ví dụ 30: Cho hệ kín gồm đối tượng quán tính bậc 3 và bộ điều khiển PI (hình 4.38). Hãy xác định các tham số k_p và T_I của bộ điều khiển PI theo nguyên lý tối ưu (4.72) ứng với kích thích $w(t) = 1(t)$.



Hình 4.38: Minh họa ví dụ 30

Hệ hở có hàm truyền

$$G_h(s) = S(s)R(s) = \frac{k_p k (1 + T_I s)}{s T_I (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}$$

Chọn $T_I = T_3$ để bù một hằng số thời gian của đối tượng. Khi đó $G_h(s)$ trở thành

$$G_h(s) = \frac{\tilde{k}}{s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1 T_2 s^3} \quad \text{với} \quad \tilde{k} = \frac{k_p k}{T_I}$$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + G_h(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1 + (T_1 + T_2)s + T_1 T_2 s^2}{\tilde{k} + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1 T_2 s^3}$$

Sử dụng công thức (4.76) với

$$b_0 = 1, b_1 = (T_1 + T_2), b_2 = T_1 T_2,$$

$$a_0 = \tilde{k}, a_1 = 1, a_2 = (T_1 + T_2) \text{ và } a_3 = T_1 T_2$$

ta được

$$Q = \frac{b_2^2 a_0 a_1 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + b_0^2 a_2 a_3}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{(A^2 - B)\tilde{k} + A}{2(A - B\tilde{k})\tilde{k}}$$

trong đó các hằng số A, B là

$$A = T_1 + T_2, \quad B = T_1 T_2$$

Sử dụng phương pháp giải tích (4.77) để tìm \tilde{k} ta được

$$\frac{\partial Q}{\partial \tilde{k}} = 0 \Leftrightarrow \tilde{k}^2 + \frac{2A}{A^2 - B}\tilde{k} - \frac{A^2}{(A^2 - B)B} = 0$$

Suy ra (chỉ lấy nghiệm \tilde{k} dương)

$$\tilde{k} = \frac{A}{A^2 - B} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{A^2 - B}{B}} \right] = \frac{T_1 + T_2}{(T_1 + T_2)\sqrt{T_1 T_2 + T_1 T_2}}.$$

□

4.7.2 Thiết kế bộ điều khiển (tính) tối ưu phản hồi trạng thái

Cho hệ có mô hình

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad (4.78)$$

Thông thường, nếu hệ ổn định thì khi không bị kích thích hệ sẽ luôn có xu hướng tiến về điểm trạng thái $\underline{0}$ (quá trình tự do tắt dần). Đó là điểm trạng thái mà khi không có tác động từ bên ngoài ($\underline{u}=0$) hệ sẽ nằm nguyên tại đó ($\frac{d\underline{x}}{dt} = 0$). Những điểm trạng thái mà hệ sẽ nằm nguyên tại đó khi không bị kích thích được gọi là điểm cân bằng (*equilibrium point*). Như vậy rõ ràng điểm trạng thái cân bằng phải là nghiệm của

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

và nếu có giả thiết A là ma trận không suy biến thì hệ tuyến tính (4.78) luôn chỉ có một điểm cân bằng là gốc tọa độ $\underline{0}$.

Xét bài toán tìm bộ điều khiển R tĩnh, phản hồi trạng thái (hình 4.39) để điều khiển đổi tương (4.78). Những phương pháp tìm R sao cho hệ có được chất lượng phản ánh bởi vị trí điểm cực đã được mô tả trong mục 4.6. Ở đây ta sẽ làm quen với một phương pháp thiết kế khác sao cho sau khi bị nhiễu đánh bật ra khỏi điểm cân bằng (hoặc điểm làm việc) đến một điểm trạng thái \underline{x}_0 nào đó, bộ điều khiển R sẽ kéo được hệ từ \underline{x}_0 về gốc tọa độ $\underline{0}$ (hay điểm làm việc cũ) và trong quá trình trở lại này sự tổn hao năng lượng, đánh giá bởi *phiêm hàm mục tiêu*

$$Q(\underline{x}, \underline{u}) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{x}^T E \underline{x} + \underline{u}^T F \underline{u}) dt \quad (4.79)$$

là nhỏ nhất. Bài toán này còn có tên gọi là LQR (*linear quadratic regulator*).

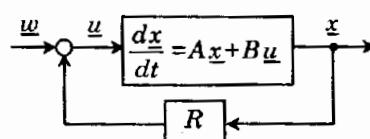
Để bài toán có nghiệm, trong (4.79) ma trận E được giả thiết là ma trận đối xứng xác định không âm và F là ma trận đối xứng xác định dương, tức là

$$E^T = E, \quad \underline{a}^T E \underline{a} \geq 0 \quad \text{với mọi vector } \underline{a}$$

$$F^T = F, \quad \underline{a}^T F \underline{a} \geq 0 \quad \text{với mọi vector } \underline{a}$$

và

$$\underline{a}^T F \underline{a} = 0 \quad \text{khi và chỉ khi } \underline{a} = \underline{0}.$$



Hình 4.39: Mô tả nhiệm vụ bài toán với bộ điều khiển phản hồi dương

Ví dụ 46: Cho hệ mô tả bởi hàm truyền đạt

$$G(s) = \frac{s}{1 + 2Ts + s^2}.$$

Giả sử rằng trong tín hiệu đầu vào $u(t)$ có lỗn nhiễu $n(t)$ kiểu bù cộng với năng lượng $\|n(t)\|_2 \leq 0,4$. Hãy xác định sự ảnh hưởng của nhiễu đó đối với tín hiệu ra $y(t)$.

Gọi thành phần nhiễu có lỗn trong đầu ra là $y_n(t)$ thì theo định lý 3.48 câu c), năng lượng của thành phần đó sẽ được đánh giá bởi

$$\|y_n(t)\|_2 = \|G\|_\infty \|n(t)\|_2 \leq 0,4 \|G\|_\infty$$

Thay $\|G\|_\infty = \frac{1}{2T}$ (xác định nhờ biểu đồ Bode) ta được $\|y_n(t)\|_2 \leq \frac{0,2}{T}$.

Để đánh giá $\|y_n(t)\|_\infty$ ta sử dụng định lý 3.48 câu a)

$$\|y_n(t)\|_\infty = \|G(s)\|_2 \|n(t)\|_2 \leq 0,4 \|G(s)\|_2.$$

Thay $\|G(s)\|_2 = \frac{1}{2\sqrt{T}}$ (xác định nhờ phương pháp Krasowski – xem ví dụ 41) ta được

$$\|y_n(t)\|_\infty \leq \frac{0,2}{\sqrt{T}}.$$

□

3.6 Phân tích hệ không liên tục

Trong phần này ta sẽ phân tích các hệ thống tuyến tính có tín hiệu đầu vào không liên tục dạng xung $\{\underline{u}_k\}$ đã được đưa qua khâu ZOH thành $\tilde{u}(t)$ dạng liên tục – rồi rạc và tín hiệu ra $\{\underline{y}_k\}$ là không liên tục dạng xung. Hệ có thể là MIMO hoặc SISO.

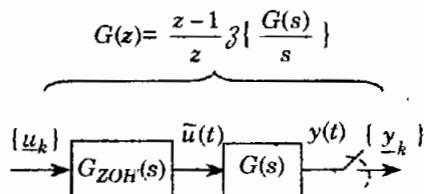
Mục 2.4 của chương 2 (trang 151) đã cung cấp những hình thái khác nhau mô tả hệ thống đó. Hai hình thái cơ bản trong số chúng là:

- 1) Hệ SISO với sơ đồ nguyên lý cơ bản như ở hình 3.50 sẽ có hàm truyền đạt

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

$$= \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n},$$

trong đó $z = e^{sT_a}$ và T_a là chu kỳ trích mẫu tín hiệu, tức là $\underline{u}_k = \underline{u}(kT_a)$ cũng như $\underline{y}_k = \underline{y}(kT_a)$.



Hình 3.50: Sơ đồ khối hệ không liên tục.

- 2) Mô tả với mô hình trạng thái: Cũng ở mục 2.4.4 thuộc chương 2, trang 161 ta đã được biết là hệ MIMO với tín hiệu vào $\tilde{u}(t)$ dạng liên tục-rời rạc

$$\tilde{u}(t) = \underline{u}_k = \underline{u}(kT_a) \quad \text{khi} \quad kT_a \leq t < (k+1)T_a$$

và tín hiệu ra $\{\underline{y}_k\}$ dạng xung sẽ được mô tả bởi mô hình trạng thái

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= \tilde{A}\underline{x}_k + \tilde{B}\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= \tilde{C}\underline{x}_k + \tilde{D}\underline{u}_k\end{aligned}\tag{3.92}$$

Nếu như trước khi trích mẫu tín hiệu đầu ra hệ có mô hình liên tục

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{x}}{dt} &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u}\end{aligned}\tag{3.93}$$

thì giữa các ma trận $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ của (3.92) với A, B, C, D của (3.93) có mối quan hệ (xem lại mục 2.4.4):

$$\tilde{A} = e^{AT_a}, \quad \tilde{B} = \int_0^{T_a} e^{At} dt \cdot B, \quad \tilde{C} = C \quad \text{và} \quad \tilde{D} = D.\tag{3.94}$$

Với hệ SISO thì từ mô hình trạng thái (3.92), trong đó \underline{u}_k được viết thành u_k và \underline{y}_k

thành y_k vì các vector $\underline{u}_k, \underline{y}_k$ chỉ có một phần tử, ta sẽ suy ra được hàm truyền đạt $G(z)$ bằng cách chuyển hai vế của phương trình thứ nhất trong (3.92) sang miền phức nhờ toán tử Z , trong đó có để ý tới tính chất dịch phải (mục 1.4.2, trang 26):

$$z\underline{X}(z) = \tilde{A}\underline{X}(z) + \tilde{B}U(z) \Leftrightarrow \underline{X}(z) = (zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}U(z)$$

sau đó thay vào phương trình thứ hai cũng đã được chuyển sang miền phức:

$$\begin{aligned}Y(z) &= \tilde{C}\underline{X}(z) + \tilde{D}U(z) = [\tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}]U(z) \\ \Leftrightarrow G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}.\end{aligned}\tag{3.95}$$

Ngược lại, cũng với hệ SISO, thì từ mô hình hàm truyền đạt

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1z + \dots + b_nz^n}{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n} = \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1z + \dots + \tilde{b}_{n-1}z^{n-1}}{a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n} + d,$$

trong đó

$$\tilde{b}_i = \frac{b_i - a_ib_n}{a_n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{và} \quad d = \frac{b_n}{a_n}.$$

Ta có được

$$Y(z) - dU(z) = \left[\frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1z + \dots + \tilde{b}_{n-1}z^{n-1}}{a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n} + d \right] U(z).$$

Đặt biến trạng thái

$$X_n(z) = Y(z) - dU(z)$$

ta đi đến

$$\begin{aligned} X_n + a_{n-1} \frac{1}{z} X_n + \cdots + a_1 \frac{1}{z} X_n + a_0 \frac{1}{z} X_n &= U + \tilde{b}_{n-1} \frac{1}{z} U + \cdots + \tilde{b}_1 \frac{1}{z} U + \tilde{b}_0 \frac{1}{z} U \\ \Leftrightarrow X_n &= \left[\underbrace{\left[\cdots \left[\underbrace{\left[\tilde{b}_0 U - a_0 X_n \right] \frac{1}{z} + \tilde{b}_1 U - a_1 X_n \right] \frac{1}{z} + \cdots \right] \frac{1}{z} + \tilde{b}_{n-1} U - a_{n-1} X_n \right]}_{X_1} \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\cdots \underbrace{\left[\cdots \left[\underbrace{\left[\tilde{b}_0 U - a_0 X_n \right] \frac{1}{z} + \tilde{b}_1 U - a_1 X_n \right] \frac{1}{z} + \cdots \right] \frac{1}{z} + \tilde{b}_{n-1} U - a_{n-1} X_n \right]}_{X_2} \right] \\ &\quad \left. \underbrace{\cdots \underbrace{\left[\cdots \left[\underbrace{\left[\tilde{b}_0 U - a_0 X_n \right] \frac{1}{z} + \tilde{b}_1 U - a_1 X_n \right] \frac{1}{z} + \cdots \right] \frac{1}{z} + \tilde{b}_{n-1} U - a_{n-1} X_n \right]}_{X_{n-1}} \right] \end{aligned}$$

trong đó

$$X_1 = \frac{1}{z} (\tilde{b}_0 U - a_0 X_n)$$

$$X_2 = \frac{1}{z} (X_1 + \tilde{b}_1 U - a_1 X_n)$$

⋮

$$X_n = \frac{1}{z} (X_{n-1} + \tilde{b}_{n-1} U - a_{n-1} X_n).$$

Chuyển toàn bộ các đẳng thức trên sang miền thời gian và viết lại dưới dạng ma trận ta sẽ có mô hình trạng thái dạng *chuẩn quan sát* như sau:

$$\underline{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \underline{x}_k + \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-2} \\ \tilde{b}_{n-1} \end{pmatrix}}_{\tilde{B}} u_k, \quad (3.96a)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{C}} \underline{x}_k + \tilde{D} u_k \quad \text{với} \quad \tilde{D} = d = \frac{b_n}{a_n}. \quad (3.96b)$$

3.6.1 Quá trình tự do và tính ổn định

Từ mô hình (3.92) ta suy ra được (xem lại định lý 2.26, trang 163)

$$\underline{x}_k = \tilde{A}^k \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}^{k-i-1} \tilde{B} \underline{u}_i$$

Do đó quá trình tự do của hệ sẽ là (quá trình tự do là quá trình mô tả hệ đi từ điểm trạng thái đầu \underline{x}_0 và không bị kích thích):

$$\underline{x}_k = \tilde{A}^k \underline{x}_0.$$

Hệ ổn định khi quá trình tự do tắt dần. Xuất phát từ mô hình liên tục (3.93) mà từ đó thông qua việc trích mẫu tín hiệu ta được mô hình rời rạc (3.92) thì quá trình tự do của hệ rời rạc cũng chính là những giá trị trích mẫu của quá trình tự do hệ liên tục

$$\begin{aligned}\underline{y}_t(t) &= Ce^{At} \underline{x}_0 \quad \Rightarrow \quad x_t(t) = e^{At} \underline{x}_0 \\ &\Rightarrow \quad \underline{x}_k = \underbrace{e^{AkT_a}}_{\tilde{A}^k} \underline{x}_0\end{aligned}\tag{3.97}$$

(định lý 3.1, trang 176). Do đó dãy $\{\underline{x}_k\}$ tắt dần khi $x_i(t)$ tắt dần, hay A là ma trận bên.

Nếu gọi s_i là một giá trị riêng của A thì thông qua quan hệ (3.97) hay $\tilde{A} = e^{AT_a}$ mà

$$z_i = e^{s_i T_a}$$

cũng là một giá trị riêng của \tilde{A} . Bởi vậy khi A là ma trận bên thì các giá trị riêng của \tilde{A} phải thỏa mãn

$$|z_i| = |e^{s_i T_a}| < 1.$$

Ta đi đến:

Định lý 3.49: Hệ MIMO có tín hiệu vào liên tục-rời rạc $\tilde{u}(t)$ tín hiệu ra $\{\underline{y}_k\}$ dạng xung với mô hình trạng thái (3.92), sẽ ổn định khi và chỉ khi tất cả các giá trị riêng z_i của ma trận \tilde{A} nằm bên trong đường tròn đơn vị, tức là $|z_i| < 1$.

Đặc biệt, nếu hệ (3.92) là SISO thì do có quan hệ (3.95), đa thức mẫu số của hàm truyền đạt $G(z)$ cũng chính là $\det(zI - \tilde{A})$. Do đó định lý 3.49 có dạng phát biểu tương đương cho hệ SISO như sau:

Định lý 3.50: Hệ SISO có tín hiệu vào ra không liên tục với hàm truyền đạt $G(z)$ sẽ ổn định khi và chỉ khi tất cả các điểm cực z_i của $G(z)$ nằm bên trong đường tròn đơn vị, tức là $|z_i| < 1$.

Trên tinh thần nội dung hai định lý trên, để kiểm tra tính ổn định của một hệ không liên tục, ta chỉ cần kiểm tra xem nghiệm của đa thức đặc tính $\det(zI - \tilde{A})$ hay nghiệm của đa thức mẫu số hàm truyền đạt $G(z)$ có nằm bên trong đường tròn đơn vị hay không.

Định nghĩa 3.9: Một đa thức

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

nếu có tất cả các nghiệm z_i , $i=1, 2, \dots, n$ nằm bên trong đường tròn đơn vị ($|z_i| < 1$), được gọi là *đa thức đường tròn đơn vị*.

3.6.2 Tiêu chuẩn xét tính ổn định Schur–Cohn–Jury

Xét đa thức $A(z)$ bậc n và giả sử z_1, z_2, \dots, z_n là nghiệm của nó. Theo định lý Vieta, các hệ số của đa thức $A(z)$ sẽ có quan hệ với nghiệm z_i của nó như sau:

$$\begin{aligned} A(z) &= a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \\ &= a_n \left[z^n - z^{n-1} \sum_{i=1}^n z_i + \dots + (-1)^n \prod_{i=1}^n z_i \right] \\ \Rightarrow a_{n-1} &= -a_n \sum_{i=1}^n z_i, \quad a_0 = (-1)^n a_n \prod_{i=1}^n z_i \end{aligned}$$

Định lý 3.51 (điều kiện cần): Nếu đa thức

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

là đa thức đường tròn đơn vị thì $|a_0| < |a_n|$.

Chứng minh:

Từ giả thiết $|z_i| < 1$ với mọi i ta có $\prod_{i=1}^n |z_i| < 1$ nên cũng có

$$|a_0| = |a_n \prod_{i=1}^n z_i| = |a_n| \cdot |\prod_{i=1}^n z_i| = |a_n| \cdot \prod_{i=1}^n |z_i| < |a_n|$$

$$\Rightarrow |a_0| < |a_n|. \quad \square$$

Chú ý: Định lý 3.51 chỉ là một tiêu chuẩn giúp xác định nhanh một đa thức $A(z)$ có thể là đa thức đường tròn đơn vị hay không chứ chưa đủ để khẳng định nó chắc chắn sẽ là đa thức đường tròn đơn vị. Ví dụ sau minh họa điều đó.

Ví dụ 47: Đa thức

$$A(z) = 0,8 + 4z + 0,2z^2 + z^3 = (z+2j)(z-2j)(z+0,2)$$

có $a_0 = 0,8$ và $a_3 = 1$ thỏa mãn $|a_0| < |a_3|$ nhưng lại không phải là đa thức đường tròn đơn vị vì có hai nghiệm $z_{1,2} = \pm 2j$ nằm ngoài đường tròn đơn vị. \square

Định lý 3.52 (Schur–Cohn): Để đa thức

$$A_0(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

là đa thức đường tròn đơn vị thì cần và đủ là

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| < 1 \quad \text{và} \quad A_1(z) = A_0(z) - \frac{a_0}{a_n} D_0(z)$$

cũng là đa thức đường tròn đơn vị, trong đó

$$D_0(z) = z^n A_0(z^{-1}) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

Chứng minh:

Xét đa thức phụ thuộc tham số ε

$$C(z, \varepsilon) = A_0(z) - \varepsilon D_0(z)$$

Giả sử rằng $C(z, \varepsilon)$ có nghiệm z_k nằm trên đường tròn đơn vị ($|z_k| = 1$). Vậy thì do

$$\begin{aligned} |D_0(z_k)| &= |A_0(z_k^{-1})| = |A_0(\bar{z}_k)| & \bar{z}_k \text{ là giá trị liên hợp của } z_k \\ &= |\bar{A}_0(z_k)| = |A_0(z_k)| & \bar{A}_0(z_k) \text{ là giá trị liên hợp của } A_0(z_k) \end{aligned}$$

nên ta có

$$0 = |C(z_k, \varepsilon)| = |A_0(z_k)| \cdot |1 - \varepsilon|.$$

Nói cách khác, khi $\varepsilon \neq 1$ thì mọi nghiệm z_k với $|z_k| = 1$ của $C(z, \varepsilon)$ cũng là nghiệm của $A_0(z)$. Ngược lại, nếu z_k với $|z_k| = 1$ là nghiệm của $A_0(z)$ thì do

$$0 = A_0(z_k) = \frac{A_0(z_k)}{z_k^n} = A_0(z_k^{-1}) = z_k^n A_0(z_k^{-1}) = D_0(z_k)$$

nên z_k cũng là nghiệm của $C(z, \varepsilon)$.

Ta di đến kết luận rằng với mọi $\varepsilon \neq 1$ nghiệm nằm trên đường tròn đơn vị của đa thức $C(z, \varepsilon)$ cũng chính là nghiệm của $A_0(z)$ và ngược lại. Do nghiệm của $A_0(z)$ không phụ thuộc ε nên các nghiệm z_k với $|z_k| = 1$ của $C(z, \varepsilon)$ cũng không phụ thuộc ε khi mà $\varepsilon \neq 1$. Kết luận này chỉ rõ số các nghiệm nằm trên đường tròn đơn vị của $C(z, \varepsilon)$ là một hằng số với mọi $\varepsilon \neq 1$.

Bây giờ ta cho ε chạy trong khoảng $[0, 1)$.

- Với $\varepsilon = 0$ thì do $C(z, 0) = A_0(z)$ nên tất cả nghiệm của $A_0(z)$ cũng là nghiệm của $C(z, 0)$, hay số các nghiệm của $A_0(z)$ nằm trong đường tròn đơn vị cũng bằng số các nghiệm nằm trong đường tròn đơn vị của $C(z, 0)$. Gọi số các nghiệm đó là l .
- Tăng dần ε và giả sử trong quá trình tăng dần ε như vậy số các nghiệm nằm bên trong đường tròn đơn vị là l của $C(z, \varepsilon)$ bị thay đổi, tức là có một nghiệm từ bên trong di ra ngoài hoặc có thêm nghiệm từ bên ngoài di vào trong đường tròn đơn vị. Do nghiệm của $C(z, \varepsilon)$ thay đổi liên tục theo ε nên bắt buộc trong quá trình dịch chuyển đó phải có lúc chúng nằm trên đường tròn đơn vị. Điều này đã làm cho số các nghiệm nằm trên đường tròn đơn vị của $C(z, \varepsilon)$ đã có lúc bị thay đổi (lớn hơn hoặc nhỏ hơn l). Điều này trái ngược với kết luận trên. Vậy điều giả sử là sai. Nói cách khác là khi $0 \leq \varepsilon < 1$, số các nghiệm nằm bên trong đường tròn đơn vị của $C(z, \varepsilon)$ là l phải là một hằng số và bằng số nghiệm nằm bên trong đường tròn đơn vị của $A_0(z)$.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cc} l_1 & l_3 \\ l_3 & l_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) (0 \quad 1) \left(\begin{array}{cc} l_1 & l_3 \\ l_3 & l_2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} l_1 & l_3 \\ l_3 & l_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} l_1 & l_3 \\ l_3 & l_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 4 & 13 \end{array} \right) \\
 \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{cc} l_3^2 - 2l_3 & l_2l_3 - 2l_1 - l_2 \\ l_2l_3 - 2l_1 - l_2 & l_2^2 - 4l_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 4 & 13 \end{array} \right) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} l_3^2 - 2l_3 = 3 \\ l_2l_3 - 2l_1 - l_2 = 4 \\ l_2^2 - 4l_3 = 13 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Hệ phương trình trên có các nghiệm sau:

a) $l_3 = 3 ; l_2 = 5 ; l_1 = 3$

b) $l_3 = 3 ; l_2 = -5 ; l_1 = -7$

c) $l_3 = -1 ; l_2 = 3 ; l_1 = -5$

d) $l_3 = -1 ; l_2 = -3 ; l_1 = 1$

nhưng chỉ có nghiệm a) là thỏa mãn điều kiện Sylvester để ma trận L xác định dương

$$l_1 > 0 , \quad l_1 l_2 - l_3^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Vậy bộ điều khiển cần tìm được xác định theo (4.89) sẽ là

$$R = F^{-1}B^T L = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = (3 \quad 5). \quad \square$$

4.7.3 Phương pháp tìm nghiệm trực tiếp

Phương trình Riccati (4.87) hay (4.90) không phải là phương trình tuyến tính nên cần có những phương pháp đặc biệt để tìm nghiệm. Tên gọi phương pháp tìm nghiệm trực tiếp của mục này không có ý nói rằng ta sẽ giải trực tiếp phương trình Riccati mà ngược lại nó sẽ xác định K thỏa mãn (4.87) cũng như L của (4.90) trực tiếp từ mục đích bài toán tổng hợp bộ điều khiển tối ưu R .

Phương pháp được trình bày ở đây là của MacFarlane-Potter. Nó cho phép xác định K của phương trình Riccati (4.87) trực tiếp từ nhiệm vụ của bài toán tối ưu.

Dựa theo nội dung định lý 4.5 và 4.6 thì

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^T = A\underline{x} + B\underline{u} = A\underline{x} + BF^{-1}B^T \underline{p}$$

và $\frac{d\underline{p}}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \underline{x}} \right)^T = E\underline{x} - A^T \underline{p}$

Do đó nếu viết chung chúng lại dưới dạng ma trận ta sẽ được

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{p} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & BF^{-1}B^T \\ E & -A^T \end{pmatrix}}_S \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{p} \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

Định lý 4.7: Ma trận S kiểu $2n \times 2n$ định nghĩa trong (4.91) có $2n$ giá trị riêng phân bố đối xứng qua trục ảo. Nếu nó không có giá trị riêng thuần ảo thì sẽ có n giá trị riêng có phần thực âm và n giá trị riêng có phần thực dương.

Chứng minh:

Các giá trị riêng của S là nghiệm s của

$$\det(sI - S) = \det \begin{pmatrix} sI - A & -BF^{-1}B^T \\ -E & sI + A^T \end{pmatrix}$$

Sử dụng công thức của Schur (mục 2.3.2, trang 123) ta có

$$\begin{aligned} \det(sI - S) &= \det(sI - A) \det [(sI + A^T) - E(sI - A)^{-1}BF^{-1}B^T] \\ &= \det(sI - A) \det(sI + A^T) \det(I - E(sI - A)^{-1}BF^{-1}B^T(sI + A^T)^{-1}) \\ &= (-1)^n \det(A - sI) \det(A^T + sI) \det(I - E(sI - A)^{-1}BF^{-1}B^T(sI + A^T)^{-1}) \end{aligned}$$

Như vậy, đa thức $\det(sI - S)$ đã được tách thành tích của hai đa thức cùng hệ số, một là $\det(A - sI)$ với đối số là $-s$ và $\det(A^T + sI)$ với đối số là s nên nghiệm của nó phải nằm đối xứng qua trục ảo (nếu đã có nghiệm s_k thì cũng phải có nghiệm $-s_k$). \square

Giả sử $2n$ giá trị riêng của S là s_k , $k = 1, 2, \dots, 2n$, trong đó s_1, \dots, s_n có phần thực âm và s_{n+1}, \dots, s_{2n} có phần thực dương. Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $s_i = -s_{n+i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Gọi $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ là các vector riêng bên phải của S ứng với những giá trị riêng có phần thực âm cũng như $\underline{a}_{n+1}, \dots, \underline{a}_{2n}$ là vector riêng bên phải ứng với giá trị riêng có phần thực dương. Vậy thì S sẽ phân tích được thành (xem lại phần ma trận modal, trang 133 và trang 351)

$$S = M \begin{pmatrix} \Lambda & \Theta \\ \Theta & -\Lambda \end{pmatrix} M^{-1} \quad (4.92)$$

trong đó

$$\Lambda = \text{diag}(s_1, \dots, s_n), \quad \Lambda \text{ là ma trận bền}$$

$$M = (M^- \quad M^+) = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{a}_{n+1}, \dots, \underline{a}_{2n})$$

với

$$M^- = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \quad \text{và} \quad M^+ = (\underline{a}_{n+1}, \dots, \underline{a}_{2n})$$

Hai ma trận M^- , M^+ có kiểu $2n \times n$ (có $2n$ hàng và n cột). Chia chúng thành những ma trận vuông $n \times n$ M_1^- , M_2^- , M_1^+ và M_2^+

$$M^- = \begin{pmatrix} M_1^- \\ M_2^- \end{pmatrix}, \quad M^+ = \begin{pmatrix} M_1^+ \\ M_2^+ \end{pmatrix}$$

thì (4.92) sẽ có dạng

$$S = \begin{pmatrix} M_1^- & M_1^+ \\ M_2^- & M_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & \Theta \\ \Theta & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1^- & M_1^+ \\ M_2^- & M_2^+ \end{pmatrix}^{-1} \quad (4.93)$$

Đặt biến mới

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{p} \end{pmatrix} = M \underline{z} = \begin{pmatrix} M_1^- & M_1^+ \\ M_2^- & M_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \end{pmatrix} \quad (4.94)$$

ta sẽ có với (4.91)

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{z}}{dt} &= \begin{pmatrix} \frac{d\underline{z}_1}{dt} \\ \frac{d\underline{z}_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & \Theta \\ \Theta & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \underline{z}_1(t) \\ \underline{z}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\Lambda t} & \Theta \\ \Theta & e^{-\Lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}_1(0) \\ \underline{z}_2(0) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \underline{z}_1(t) &= e^{\Lambda t} \underline{z}_1(0) \quad , \quad \underline{z}_2(t) = e^{-\Lambda t} \underline{z}_2(0) \end{aligned}$$

Thay vào (4.94) được

$$\underline{x}(t) = M_1^- \underline{z}_1(t) + M_1^+ \underline{z}_2(t) = M_1^- e^{\Lambda t} \underline{z}_1(0) + M_1^+ e^{-\Lambda t} \underline{z}_2(0)$$

$$\underline{p}(t) = M_2^- \underline{z}_1(t) + M_2^+ \underline{z}_2(t) = M_2^- e^{\Lambda t} \underline{z}_1(0) + M_2^+ e^{-\Lambda t} \underline{z}_2(0)$$

Nhưng do mục đích đặt ra của bài toán tối ưu là $\underline{x}(t)$ phải tiến về gốc tọa độ $\underline{0}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = \underline{0}$$

nên phải có $e^{-\Lambda t} \underline{z}_2(0) = \underline{0}$, vì $-\Lambda$ là ma trận không bền. Suy ra

$$\underline{x}(t) = M_1^- e^{\Lambda t} \underline{z}_1(0) \quad \text{và} \quad \underline{p}(t) = M_2^- e^{\Lambda t} \underline{z}_1(0)$$

Ngoài ra còn có $\underline{p}(t) = K \underline{x}(t)$, tức là

$$K M_1^- e^{-\Lambda t} = M_2^- e^{-\Lambda t} \Leftrightarrow K M_1^- = M_2^-$$

Vậy $K = M_2^- (M_1^-)^{-1}$.

Ta đi đến thuật toán trực tiếp tìm nghiệm K của phương trình Riccati (4.87) như sau:

- 1) Lập ma trận kiểu $2n \times 2n$: $S = \begin{pmatrix} A & BF^{-1}B^T \\ E & -A^T \end{pmatrix}$.
- 2) Xác định tất cả n giá trị riêng s_1, \dots, s_n có phần thực âm của S và các vector riêng bênh phải tương ứng $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ của chúng.
- 3) Xây dựng ma trận $M^- = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ có kiểu $2n \times n$. Gọi M_1^- là ma trận vuông gồm n hàng bên trên, M_2^- là ma trận vuông gồm n hàng bên dưới của M^- .
- 4) Tính $K = M_2^- (M_1^-)^{-1}$.

Một cách hoàn toàn tương tự ta cũng có thể xây dựng được thuật toán trực tiếp tìm nghiệm L của phương trình Riccati (4.90). Tuy nhiên nếu để ý nguồn gốc sự khác nhau của (4.87) và (4.90) trong mục đích bài toán tối ưu chỉ là phản hồi dương hay âm thì thuật toán tìm L cho (4.90) sẽ được suy ra ngay từ thuật toán tìm K đã cho ở trên như sau:

- 1) Lập ma trận kiểu $2n \times 2n$: $S = \begin{pmatrix} A & -BF^{-1}B^T \\ E & -A^T \end{pmatrix}$.
- 2) Tìm tất cả n giá trị riêng s_1, \dots, s_n có phần thực âm của S và tính n vector riêng bênh phải $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ ứng với các giá trị riêng đó.
- 3) Tách ma trận $M^- = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ có kiểu $2n \times n$ thành hai ma trận vuông là M_1^- gồm n hàng bên trên và M_2^- gồm n hàng bên dưới của M^- .
- 4) Tính $L = M_2^- (M_1^-)^{-1}$.

4.7.4 Thuật toán truy hồi tìm nghiệm phương trình Riccati

Một phương pháp tìm nghiệm phương trình Riccati khác có ý nghĩa ứng dụng nhiều trong thực tế thuộc về *Kleinman*. Đây là một thuật toán truy hồi. Ta sẽ trình bày thuật toán trên cơ sở giải phương trình (4.90). Điều này hoàn toàn không hạn chế việc ta sử dụng thuật toán để tìm nghiệm K cho phương trình (4.87) sau này. Điều đặc biệt của thuật toán Kleinman là nó không những xác định nghiệm L của (4.90) mà còn cho ra được luôn bộ điều khiển R tính theo (4.89) sau mỗi bước lặp.

Xuất phát từ công thức (4.89)

$$R = F^{-1}B^T L$$

và do L , F là những ma trận đối xứng, ta có

$$LBR = LBF^{-1}B^T L = L^T B(F^{-1})^T B^T L = R^T B^T L$$

Bởi vậy cùng với phương trình Riccati (4.90)

$$LBF^{-1}B^T L - LA - A^T L = E$$

ta đã đến được

$$(A - BR)^T L + L(A - BR) = -E - R^T FR \quad (4.95)$$

và đó chính là phương trình Lyapunov (định lý 3.29, trang 222).

Kleinman đã đề xuất tìm truy hồi L_k từ R_k dựa vào dạng cải biến của (4.95)

$$(A - BR_k)^T L_k + L_k(A - BR_k) = -E - R_k^T FR_k \quad (4.96)$$

cũng như R_{k+1} từ L_k với sự cải biến (4.89) thành

$$R_{k+1} = F^{-1}B^T L_k \quad (4.97)$$

trong đó $k=0, 1, 2, \dots$. Giá trị khởi đầu R_0 phải được chọn sao cho $(A - BR_0)$ là ma trận bền. Khi đó tại mỗi bước tính ta luôn thu được ma trận bền $(A - BR_k)$ và L_k xác định dương. Dãy $\{L_k\}$ thu được sẽ hội tụ đến nghiệm L của (4.90).

Tóm tắt lại, thuật toán Kleinman có những bước tính sau:

- 1) Chọn R_0 sao cho $(A - BR_0)$ là ma trận bền. Nếu A đã là ma trận bền thì có thể chọn $R_0 = \Theta$.
- 2) Thực hiện lần lượt với $k=1, 2, \dots$ các bước sau:
 - a) Giải phương trình Lyapunov (4.96) để có L_k từ R_k .
 - b) Tính R_{k+1} từ L_k theo (4.97).

Như vậy, thuật toán của Kleinman có sử dụng thêm phương pháp tính giải phương trình Lyapunov. Hiện có khá nhiều phương pháp hữu hiệu phục vụ việc giải phương trình Lyapunov. Nhiều phương pháp trong số chúng còn được cài đặt thành công cụ chuẩn rất tiện ích. Bên cạnh các phương pháp tính đó, nếu để ý thêm tới tính bền của

$$\tilde{A}_k = (A - BR_k)$$

tức là tất cả các giá trị riêng của \tilde{A} nằm bên trái trục ảo, thì nghiệm L_k của phương trình Lyapunov (4.96) còn có thể được xác định trực tiếp theo công thức

$$L_k = \int_0^{\infty} e^{\tilde{A}_k^T t} \tilde{E}_k e^{\tilde{A}_k t} dt$$

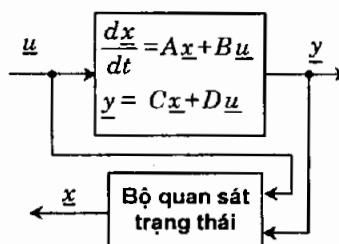
trong đó

$$\tilde{E}_k = E + R_k^T F R_k.$$

Cuối cùng, còn một điều cần bàn đến là khi nào thì nên kết thúc quá trình tính truy hồi trong thuật toán Kleinman. Ta thấy do dãy $\{L_k\}$ hội tụ đến nghiệm L nên quá trình tính truy hồi có thể được kết thúc nếu như sai số $\|L_{k+1} - L_k\|$ đã thỏa mãn điều kiện $\|L_{k+1} - L_k\| < \epsilon$ cho phép, trong đó ϵ là một số dương đủ nhỏ được chọn trước. Chuẩn ma trận $\|L_{k+1} - L_k\|$ thường được dùng là chuẩn bậc hai (giá trị suy biến lớn nhất của ma trận, xem lại khái niệm chuẩn ma trận đã cho ở trang 131).

4.8 Bộ quan sát trạng thái

Trong những phương pháp thiết kế bộ điều khiển hệ MIMO trước đây như phương pháp tách kênh, phương pháp cho trước điểm cực, phương pháp tối ưu, ta thường giả thiết là vector tín hiệu trạng thái \underline{x} là do được để phản hồi ngược về cho bộ điều khiển R . Điều này trong thực tế thường không thực hiện được trực tiếp, đơn giản chỉ là vì có khá nhiều biến trạng thái không thể đo được. Nếu không đo được trực tiếp, song đổi tượng lại là *quan sát được* thì ta có thể thiết kế thêm các bộ quan sát trạng thái nhằm xác định giá trị vector $\underline{x}(t)$ thông qua việc đo những tín hiệu vào ra $\underline{u}(t)$, $\underline{y}(t)$ trong một khoảng thời gian T hữu hạn (hình 4.41).



Hình 4.41: Nguyên tắc hoạt động của bộ quan sát trạng thái.

4.8.1 Bộ quan sát trạng thái của Luenberger

Xét đối tượng hợp thức chặt với mô hình trạng thái

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B\underline{u}, \quad \underline{y} = C\underline{x} \quad (D=0) \quad (4.98)$$

Ý tưởng chính của phương pháp thiết kế bộ quan sát trạng thái Luenberger là sử dụng khâu có mô hình

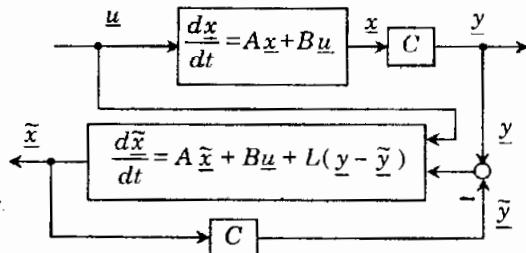
$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = A\tilde{\underline{x}} + B\underline{u} + L(\underline{y} - \tilde{\underline{y}}), \quad \tilde{\underline{y}} = C\tilde{\underline{x}} \quad (4.99)$$

làm bộ quan sát để có được sự xấp xỉ

$$\tilde{x} \approx x$$

ít nhất là sau một khoảng thời gian T đủ ngắn, nói cách khác là có được (hình 4.42)

$$\|\underline{e}(t)\|_\infty = \|\underline{x}(t) - \tilde{\underline{x}}(t)\|_\infty \approx 0 \quad \text{khi} \quad t \geq T. \quad (4.100)$$



Hình 4.42: Bô quan sát trạng thái của Luenberger.

Nhiệm vụ thiết kế là xác định L trong (4.99) để có được yêu cầu (4.100). Từ hai mô hình (4.98), (4.99) ta có

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{d(\underline{x} - \tilde{\underline{x}})}{dt} = A(\underline{x} - \tilde{\underline{x}}) - L(\underline{y} - \tilde{\underline{y}}) = A\underline{e} - L(C\underline{x} - C\tilde{\underline{x}}) \\ &= (A - LC)\underline{e} \end{aligned}$$

Như vậy, rõ ràng để $\underline{e}(t) \rightarrow 0$ thì $A - LC$ phải là ma trận bền. Sai lệch $\underline{e}(t)$ sẽ càng tiến nhanh về 0, tức là thời gian T cần thiết cho việc quan sát tín hiệu vào ra sẽ càng nhỏ, nếu các giá trị riêng của $A - LC$ nằm càng xa trục ảo (về phía $-\infty$). Do đó ta có thể chủ động tìm L với một tốc độ tiến về 0 của $\underline{e}(t)$ đã được chọn trước bằng cách xác định L sao cho $A - LC$ có các giá trị riêng phù hợp với tốc độ đó.

Nếu để ý thêm rằng giá trị riêng của ma trận bất biến với phép chuyển vị, thì công việc xác định L sao cho $A - LC$ có được những giá trị riêng chou trước cũng đồng nghĩa với việc tìm L^T để

$$(A - LC)^T = A^T - C^T L^T$$

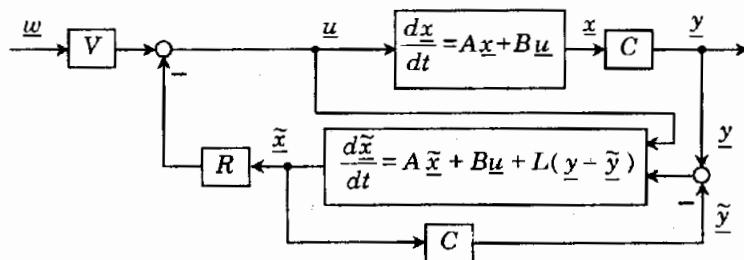
nhận các giá trị cho trước s_1, \dots, s_n làm giá trị riêng và đó cũng là bài toán thiết kế bộ điều khiển cho trước điểm cực đã được trình bày tại mục 4.6. Nói cách khác, bài toán xác định bộ quan sát trạng thái Luenberger chính là bài toán thiết kế bộ điều khiển cho trước điểm cực ứng với hệ đối ngẫu của đối tượng đã cho. Điều kiện để áp dụng được phương pháp thiết kế cho trước điểm cực là đối tượng phải điều khiển được thì nay, thông qua hệ đối ngẫu (định lý 3.37, trang 239) được chuyển thành điều kiện đối tượng phải quan sát được thì mới tồn tại bộ quan sát.

Ta đi đến thuật toán tìm L của bộ quan sát trạng thái Luenberger cho đối tượng (4.98) quan sát được gồm hai bước như sau:

- 1) Chọn trước n giá trị s_1, \dots, s_n có phần thực âm ứng với thời gian T mong muốn để quan sát tín hiệu vào ra. Các giá trị s_1, \dots, s_n được chọn nằm càng xa trục ảo (có phần thực càng nhỏ) thì thời gian T sẽ càng ngắn và do đó sai lệch $\underline{e}(t)$ càng nhanh tiến về 0 .
- 2) Sử dụng các phương pháp đã biết như Roppeneker, modal ... để tìm bộ điều khiển L^T phản hồi trạng thái cho đối tượng

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A^T \underline{x} + C^T \underline{u}$$

Một điều cần chú ý là bộ quan sát trạng thái thường được sử dụng kèm với bộ điều khiển phản hồi trạng thái (hình 4.43). Nói cách khác trạng thái $\underline{\tilde{x}}(t)$ tìm được sẽ là tín hiệu đầu vào của bộ điều khiển. Bởi vậy thời gian xác định trạng thái xấp xỉ $\underline{\tilde{x}}(t)$ của đối tượng không thể chậm hơn thời gian thay đổi trạng thái $\underline{x}(t)$ của bản thân đối tượng. Từ đây suy ra điều kiện tiên quyết để chọn những giá trị s_1, \dots, s_n là chúng đều phải nằm phía bên trái các điểm cực của đối tượng (giá trị riêng của A).



Hình 4.43: Hệ thống điều khiển kín có sự tham gia của bộ quan sát trạng thái Luenberger.

Bây giờ ta sẽ khảo sát sự ảnh hưởng của bộ quan sát trạng thái Luenberger đối với chất lượng hệ kín thông qua vị trí các điểm cực của chúng. Một hệ kín có sự tham gia của bộ quan sát trạng thái được mô tả ở hình 4.43, trong đó R là bộ điều khiển và V là bộ tiền xử lý đã được thiết kế theo chất lượng động học cho trước, chẳng hạn như theo các phương pháp tách kênh, cho trước điểm cực, hay tối ưu

Do điểm cực của hệ thống không thay đổi theo vector tín hiệu đầu vào $\underline{w}(t)$ nên để đơn giản ta sẽ khảo sát hệ thống khi không bị kích thích, tức là khi $\underline{w}(t) = 0$.

Với $\underline{w}(t) = \underline{0}$ thì

$$\underline{u} = -R \tilde{\underline{x}} , \quad \underline{y} = C \underline{x} , \quad \tilde{\underline{y}} = C \tilde{\underline{x}}$$

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A \underline{x} + B \underline{u} = A \underline{x} - BR \tilde{\underline{x}}$$

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = A \tilde{\underline{x}} + B \underline{u} + L(\underline{y} - \tilde{\underline{y}}) = LC \underline{x} + (A - LC - BR) \tilde{\underline{x}}$$

Bởi vậy nếu ghép chung hai phương trình sau lại sẽ được

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \tilde{\underline{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BR \\ LC & A - LC - BR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \tilde{\underline{x}} \end{pmatrix}$$

và điểm cực của hệ sẽ là nghiệm của

$$\det \begin{pmatrix} sI - A & BR \\ -LC & sI - A + LC + BR \end{pmatrix} = 0 \quad (4.101)$$

Do định thức của ma trận không thay đổi nếu ta thêm hoặc bớt nội dung của một hàng hay cột một giá trị gồm tổ hợp tuyến tính của những hàng hay cột khác, nên phương trình (4.101) sẽ tương đương với

$$\det \begin{pmatrix} sI - A + BR & BR \\ sI - A + BR & sI - A + LC + BR \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} sI - A + BR & BR \\ \Theta & sI - A + LC \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(sI - A + BR) \det(sI - A + LC) = 0$$

Từ phương trình cuối ta rút ra được kết luận:

Định lý 4.8: Bộ quan sát trạng thái Luenberger không làm thay đổi vị trí các điểm cực cũ $\det(sI - A + BR) = 0$ của hệ thống. Nó chỉ đưa thêm vào hệ thống các điểm cực mới là nghiệm của $\det(sI - A + LC) = 0$.

4.8.2 Giảm bậc bộ quan sát trạng thái

Bộ quan sát trạng thái Luenberger thiết kế như mục 4.8.1 mô tả đã xác định tất cả n biến trạng thái $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Điều này có lẽ là không cần thiết. Thật vậy, nếu C là ma

trận có hạng bằng s (số hàng của C) và giả sử rằng cột đầu tiên của nó là độc lập tuyến tính thì từ

$$\underline{y} = C \underline{x} = (C_s \ C_{n-s}) \begin{pmatrix} \underline{x}_s \\ \underline{x}_{n-s} \end{pmatrix} = C_s \underline{x}_s + C_{n-s} \underline{x}_{n-s}$$

trong đó

$$\underline{x}_s = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_{n-s} = \begin{pmatrix} x_{s+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ta đã xác định ngay được s giá trị trạng thái đầu tiên x_1, \dots, x_s một cách rất đơn giản theo công thức

$$\underline{x}_s = C_s^{-1} (\underline{y} - C_{n-s} \underline{x}_{n-s})$$

với giả thiết là đã biết $n-s$ trạng thái x_{s+1}, \dots, x_n . Do đó bộ quan sát chỉ cần có nhiệm vụ tính $n-s$ trạng thái x_{s+1}, \dots, x_n là đủ.

Viết lại mô hình đối tượng

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \underline{x}_s \\ \underline{x}_{n-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_s \\ \underline{x}_{n-s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u$$

bằng cách chia A và B thành những ma trận con có số hàng, cột phù hợp với kích thước của các vector \underline{x}_s , \underline{x}_{n-s} , tức là

$$A_1 \in \mathbb{R}^{s \times s}, A_2 \in \mathbb{R}^{s \times (n-s)}, A_3 \in \mathbb{R}^{(n-s) \times s}, A_4 \in \mathbb{R}^{(n-s) \times (n-s)}, B_1 \in \mathbb{R}^{s \times r}, B_2 \in \mathbb{R}^{(n-s) \times r}$$

Khi đó thì $n-s$ trạng thái còn lại cần phải được quan sát x_{s+1}, \dots, x_n sẽ có mô hình

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{x}_{n-s}}{dt} &= A_3 \underline{x}_s + A_4 \underline{x}_{n-s} + B_2 u \\ &= A_3 C_s^{-1} (\underline{y} - C_{n-s} \underline{x}_{n-s}) + A_4 \underline{x}_{n-s} + B_2 u \\ &= (\underbrace{A_4 - A_3 C_s^{-1} C_{n-s}}_A) \underline{x}_{n-s} + (\underbrace{B_2 - A_3 C_s^{-1}}_B) \begin{pmatrix} u \\ \underline{y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cùng với mô hình trạng thái trên ta sử dụng

$$\underline{y}_{n-s} = C_{n-s} \underline{x}_{n-s} = \bar{C} \underline{x}_{n-s} \quad (\bar{C} = C_{n-s})$$

Vậy thì bộ quan sát với cấu trúc (4.99) phải thiết kế để xác định $n-s$ biến trạng thái x_{s+1}, \dots, x_n sẽ chỉ còn có bậc là $n-s$:

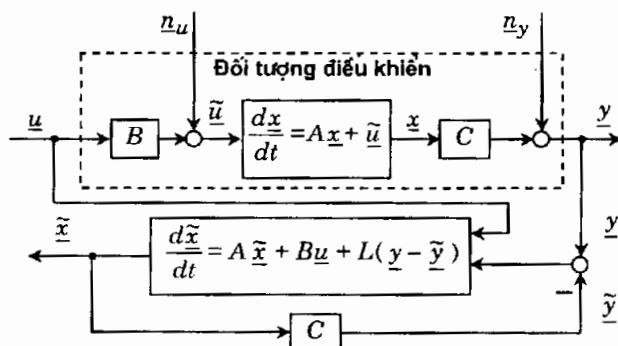
$$\frac{d\tilde{\underline{x}}_{n-s}}{dt} = \bar{A} \underline{x}_{n-s} + \bar{B} \begin{pmatrix} u \\ \underline{y} \end{pmatrix} + L_{n-s} (\underline{y}_{n-s} - \tilde{\underline{y}}_{n-s})$$

$$\tilde{\underline{y}}_{n-s} = \bar{C} \tilde{\underline{x}}_{n-s}.$$

4.8.3 Bộ quan sát trạng thái của Kalman và bài toán LQG

Với bộ quan sát trạng thái Luenberger, phải sau khoảng thời gian T nhất định ta mới phát hiện được sự thay đổi trạng thái $\underline{x}(t)$ trong đối tượng. Điều này đã hạn chế khả năng ứng dụng của nó, tức là nó chỉ sử dụng được khi nhiều tác động vào hệ thống là nhiều tức thời và khoảng thời gian giữa hai lần nhiều tác động không được nhỏ hơn T .

Đã có lúc người ta tìm cách nâng cao khả năng ứng dụng cho bộ quan sát Luenberger bằng cách giảm thời gian quan sát T thông qua việc chọn các giá trị riêng s_1, \dots, s_n càng xa trục ảo về phía trái. Song điều này lại gặp sự giới hạn bởi khả năng tích hợp bộ quan sát, vì không bao giờ ta có thể tích hợp được một thiết bị kỹ thuật có hằng số thời gian nhỏ tùy ý (hằng số thời gian càng nhỏ, giá trị riêng nằm càng xa trục ảo về phía trái). Những thiết bị có hằng số thời gian rất nhỏ đến nỗi có thể bỏ qua được (quán tính gần bằng 0) là không tồn tại trong thực tế.



Hình 4.44: Bộ quan sát trạng thái của Kalman.

Để loại bỏ nhược điểm trên của bộ quan sát trạng thái Luenberger một cách triệt để, Kalman đã đề nghị phải xét luôn sự tham gia các tín hiệu nhiễu $n_u(t)$ ở đầu vào và $n_y(t)$ ở đầu ra của đối tượng trong quá trình xác định ma trận L của bộ quan sát. Nói cách khác mô hình mô tả đối tượng phải thể hiện được sự tham gia của tín hiệu nhiễu:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + n_u \quad (4.102a)$$

$$y = Cx + n_y \quad (4.102b)$$

Hai tín hiệu ngẫu nhiên $n_u(t)$, $n_y(t)$ được giả thiết là

- Chúng là tín hiệu ngẫu nhiên egodic (xem lại khái niệm ở mục 1.6, trang 45).
- Chúng có giá trị trung bình bằng 0, tức là $m_{n_u} = m_{n_y} = 0$.

- Hàm hổ tương quan của chúng có dạng xung dirac tại điểm $\tau=0$

$$r_{\underline{n}_u}(\tau) = M[\underline{n}_u \underline{n}_u^T] = N_u \delta(0)$$

$$r_{\underline{n}_y}(\tau) = M[\underline{n}_y \underline{n}_y^T] = N_y \delta(0)$$

trong đó $M[\cdot]$ là ký hiệu cho phép lấy giá trị trung bình, R và S là hai ma trận hằng (xem lại khái niệm giá trị trung bình tín hiệu ngẫu nhiên ergodic ở trang 46).

- Chúng không tương quan với nhau, $\underline{n}_u(t)$ không tương quan với trạng thái $\underline{x}(t)$ và $\underline{n}_u(t)$ không tương quan với trạng thái $\underline{x}(\tau)$ ở thời điểm trước đó ($\tau < t$), tức là $M[\underline{n}_u \underline{n}_u^T] = M[\underline{n}_y \underline{x}^T] = M[\underline{n}_u(t) \underline{x}^T(\tau)] = \Theta$.

Bộ quan sát trạng thái của Kalman cũng có mô hình giống như bộ quan sát của Luenberger

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = A\tilde{\underline{x}} + B\underline{u} + L(\underline{y} - \tilde{\underline{y}}), \quad \tilde{\underline{y}} = C\tilde{\underline{x}} \quad (4.103)$$

nhưng khác với Luenberger, Kalman đã tìm L sao cho vết của ma trận trung bình bình phương (chuẩn Frobenius, trang 130) của sai lệch

$$\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \tilde{\underline{x}}(t)$$

được nhỏ nhất (xem lại khái niệm vết ma trận ở trang 125), tức là

$$Q = M[\text{trace}(\underline{e} \underline{e}^T)] = \sum_{i=1}^n M[e_i^2] \rightarrow \min!. \quad (4.104)$$

Từ (4.102) và (4.103) ta có

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{e}}{dt} &= \frac{d(\underline{x} - \tilde{\underline{x}})}{dt} = A(\underline{x} - \tilde{\underline{x}}) + \underline{n}_u - L(\underline{y} - \tilde{\underline{y}}) = A\underline{e} + \underline{n}_u - L(C\underline{x} + \underline{n}_y - C\tilde{\underline{x}}) \\ &= (A - LC)\underline{e} + \underline{n}_u - L\underline{n}_y = (A - LC)\underline{e} + (I - L) \begin{pmatrix} \underline{n}_u \\ \underline{n}_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bởi vậy (xem lại công thức (2.65), trang 142)

$$\underline{e}(t) = e^{\tilde{A}t}\underline{e}_0 - \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)}\tilde{B}\underline{n}(\tau)d\tau, \quad \underline{e}_0 = \underline{e}(0) \quad (4.105)$$

với $\tilde{A} = (A - LC)$, $\tilde{B} = (I - L)$ và $\underline{n} = \begin{pmatrix} \underline{n}_u \\ \underline{n}_y \end{pmatrix}$.

Thay (4.105) vào (4.104) có để ý đến các giả thiết về $\underline{n}_u(t)$, $\underline{n}_y(t)$, sau đó tìm L để Q có giá trị nhỏ nhất bằng cách xác định nghiệm của $\frac{\partial Q}{\partial L} = \Theta$, với $\frac{\partial Q}{\partial L}$ là ký hiệu chỉ ma trận Jacobi của Q ta sẽ nhận được

$$L = PC^T N_y^{-1} \quad (4.106)$$

trong đó P là nghiệm của phương trình Riccati

$$PC^T N_y^{-1} CP - PA^T - AP = N_u \quad (4.107)$$

Từ đây ta đến được thuật toán tìm L cho bộ quan sát trạng thái Kalman với mô hình (4.103) gồm các bước như sau:

- 1) Xác định hai ma trận N_u và N_y là ma trận hàm hổ tương quan của $\underline{n}_u(t)$, $\underline{n}_y(t)$.
- 2) Giải phương trình Riccati (4.107) để tìm nghiệm P . Có thể áp dụng phương pháp MacFarlane-Potter hay Kleinman.
- 3) Tính L từ P theo (4.106).

Điều thú vị ở đây là thuật toán xác định bộ quan sát trạng thái Kalman hoàn toàn giống như việc thiết kế bộ điều khiển tối ưu phản hồi trạng thái (bài toán LQR đã nói ở mục 4.7.2), trong đó vai trò của đối tượng (4.78) nay được thay bằng

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A^T \underline{x} + C^T \underline{u}$$

tức là thay bằng hệ đối ngẫu với nó nhưng không có nhiễu, và hàm mục tiêu (4.79) thì được thay bởi

$$Q_K = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T N_u \underline{x} + \underline{u}^T N_y \underline{u}) dt .$$

Bây giờ ta chuyển sang bài toán tổng quát hơn là thiết kế bộ điều khiển tối ưu R phản hồi trạng thái cho đối tượng có nhiễu tín hiệu vào ra

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A \underline{x} + B u + \underline{n}_u , \quad \underline{y} = C \underline{x} + \underline{n}_y$$

và phiến hàm đánh giá sự tổn hao (*cost function*)

$$Q_R = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T E \underline{x} + \underline{u}^T F \underline{u}) dt \rightarrow \min!$$

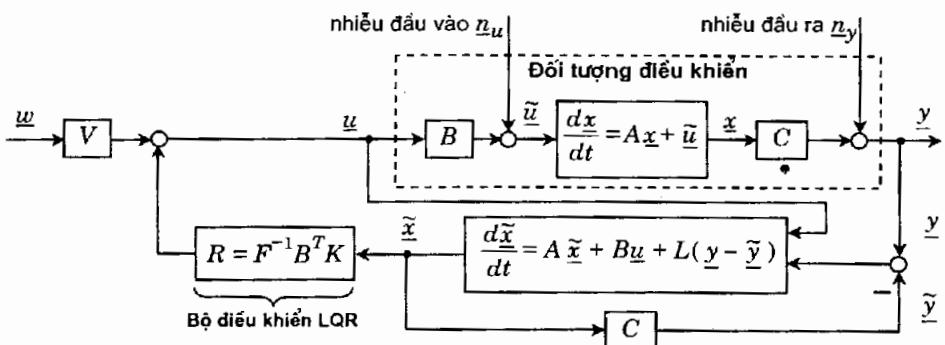
Nếu R được thiết kế theo thuật toán đã trình bày ở mục 4.7.2, tức là cho đối tượng *không* có sự tác động của nhiễu (bài toán LQR), còn sự ảnh hưởng của nhiễu sẽ được giám sát bởi bộ quan sát trạng thái Kalman

$$\frac{d\tilde{\underline{x}}}{dt} = A \tilde{\underline{x}} + B u + L(\underline{y} - \tilde{\underline{y}}) , \quad \tilde{\underline{y}} = C \tilde{\underline{x}}$$

trong đó L được xác định theo $L = PC^T N_y^{-1}$ và P là nghiệm của phương trình Riccati

$$PC^T N_y^{-1} CP - PA^T - AP = N_u$$

thì bài toán điều khiển đó được gọi là bài toán LQG (*linear quadratic Gaussian*).



Hình 4.45: Hệ thống điều khiển LQG (Linear Quadratic Gaussian).

Do sự khác nhau giữa bộ quan sát trạng thái Luenberger và Kalman chỉ nằm ở phương thức xác định ma trận L :

- Luenberger xác định theo nguyên tắc cho trước điểm cực,
- Kalman xác định theo cực tiểu phiếm hàm mục tiêu,

nên cấu trúc hệ thống điều khiển LQG không có gì khác so với hệ có sử dụng bộ quan sát Luenberger. Nói cách khác hệ LQG với sơ đồ khôi như ở hình 4.45 mô tả (cho trường hợp R phản hồi dương) sẽ có mô hình

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \tilde{\underline{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BR \\ LC & A - LC + BR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \tilde{\underline{x}} \end{pmatrix}$$

Tuy rằng mô hình trên được dẫn từ trường hợp R phản hồi dương, song không ảnh hưởng tới kết luận về vị trí điểm cực nếu nó là bộ phản hồi âm với các công thức thiết kế (4.89), (4.90) thay cho (4.87), (4.88). Thực vậy, cho trường hợp phản hồi âm thì từ

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} sI - A & -BR \\ -LC & sI - A + LC - BR \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} sI - A - BR & -BR \\ sI - A - BR & sI - A + LC - BR \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} sI - A - BR & -BR \\ \Theta & sI - A + LC \end{pmatrix} \\ &= \det(sI - A + BR) \det(sI - A + LC) = 0 \end{aligned}$$

ta cũng đến được kết luận cho hệ LQG giống như định lý 4.8 như sau

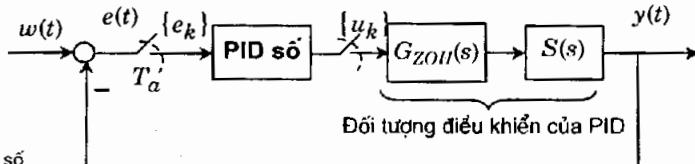
Định lý 4.9: Hệ LQG có các điểm cực gồm tất cả các điểm cực của hệ tối ưu không có bộ quan sát Kalman và các điểm mới được đưa thêm vào thông qua bộ quan sát. Các điểm cực được đưa thêm vào là nghiệm của $\det(sI - A + LC) = 0$.

4.9 Thiết kế bộ điều khiển không liên tục

4.9.1 Bộ điều khiển PID số

Hình 4.46 biểu diễn một hệ thống điều khiển có sử dụng bộ điều khiển PID số, tức là bộ điều khiển PID có tín hiệu vào ra dạng số (không liên tục và rời rạc). Tín hiệu đầu ra của bộ PID số là dãy $\{u_k\}$ được đưa đến điều khiển đối tượng có hàm truyền đạt liên tục $S(s)$. Do $\{u_k\}$ là tín hiệu không liên tục – rời rạc nên để có thể làm tín hiệu điều khiển cho đối tượng liên tục ta cần phải liên tục hóa nó (trong miền thời gian) bằng bộ chuyển đổi số-tương tự ZOH với hàm truyền đạt $G_{ZOH}(s)$. Xem $G_{ZOH}(s)$ chung với $S(s)$ như đối tượng điều khiển không liên tục thì đối tượng này sẽ có hàm truyền đạt:

$$S(z) = \frac{z-1}{z} \beta \left\{ \frac{S(s)}{s} \right\}.$$



Hình 4.46: Điều khiển với bộ PID số

Để xác định mô hình không liên tục của bộ PID số ta sẽ đi từ mô hình liên tục của nó trong miền thời gian:

$$\begin{aligned} u(t) &= k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \\ &= \underbrace{k_p e(t)}_{u_p(t)} + \underbrace{\frac{k_p}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau}_{u_I(t)} + \underbrace{k_p T_D \frac{de(t)}{dt}}_{u_D(t)} \end{aligned}$$

Lý do cho việc không sử dụng toán tử \mathcal{Z} để chuyển trực tiếp

$$R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

sang miền Z là vì $R(s)$ có chứa thành phần vi phân D.

Khi đầu vào $e(t)$ của PID số được thay bằng dãy $\{e_k\}$ có chu kỳ trích mẫu T_a thì:

- Thành phần khuếch đại $u_p(t) = k_p e(t)$ được thay bằng

$$u_k^P = k_p e_k$$

2) Thành phần tích phân $u_I(t) = \frac{k_p}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau$ được thay bằng (hình 4.47)

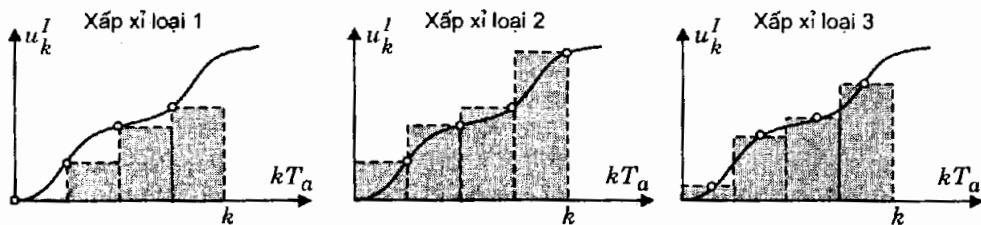
a) Xấp xỉ tích phân loại 1: $u_k^I = \frac{k_p T_a}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e_i$

b) Xấp xỉ tích phân loại 2: $u_k^I = \frac{k_p T_a}{T_I} \sum_{i=1}^k e_i$

c) Xấp xỉ tích phân loại 3: $u_k^I = \frac{k_p T_a}{T_I} \sum_{i=1}^k \frac{e_{i-1} + e_i}{2}$

3) Thành phần vi phân $u_D(t) = k_p T_D \frac{de(t)}{dt}$ được thay bằng

$$u_k^D = \frac{k_p T_D}{T_a} (e_k - e_{k-1})$$



Hình 4.47: Minh họa công thức xấp xỉ thành phần tích phân

Thay các công thức xấp xỉ trên vào

$$u_k = u_k^P + u_k^I + u_k^D$$

ta sẽ được mô hình không liên tục của bộ PID số

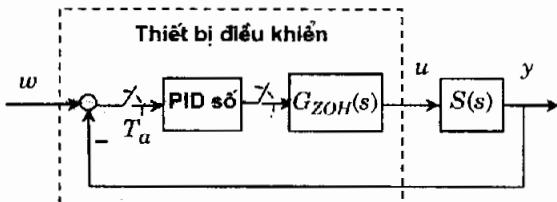
a) Xấp xỉ loại 1: $u_k = k_p \left[e_k + \frac{T_a}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e_i + \frac{T_D(e_k - e_{k-1})}{T_a} \right]$ (4.108a)

b) Xấp xỉ loại 2: $u_k = k_p \left[e_k + \frac{T_a}{T_I} \sum_{i=1}^k e_i + \frac{T_D(e_k - e_{k-1})}{T_a} \right]$ (4.108b)

c) Xấp xỉ loại 3: $u_k = k_p \left[e_k + \frac{T_a}{T_I} \sum_{i=1}^k \frac{e_{i-1} + e_i}{2} + \frac{T_D(e_k - e_{k-1})}{T_a} \right]$ (4.108c)

4.9.2 Xác định tham số cho PID số bằng thực nghiệm

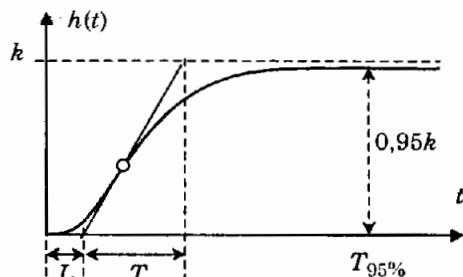
Tương tự như ở phương pháp thực nghiệm của Ziegler-Nichols, Takahashi cũng đưa ra một phương pháp xác định ba tham số k_p , T_I và T_D cho mô hình (4.108) của PID số hoặc từ đường quá độ $h(t)$ của đối tượng $S(s)$ hoặc từ giá trị tối hạn k_{th} và T_{th} .



Hình 4.48: Xác định tham số cho bộ PID số để điều khiển đối tượng liên tục.

Xác định từ hàm quá độ của đối tượng

Điều kiện để áp dụng được phương pháp Takahashi là đối tượng phải ổn định, có hàm quá độ $h(t)$ đi từ 0 và có dạng hình chữ S (không có độ quá diều chỉnh).



Hình 4.49: Xác định tham số của PID số theo phương pháp Takahashi.

Hình 4.49 biểu diễn dạng $h(t)$ chung cho những đối tượng có thể áp dụng được phương pháp Takahashi. Từ đường $h(t)$ đó ta lấy được các giá trị:

- k là hệ số khuếch đại của đối tượng, được xác định từ $h(t)$ theo $k = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$
- L là giá trị xấp xỉ thời gian trễ. Nó là giao điểm đường tiếp tuyến với $h(t)$ tại điểm uốn với trục thời gian.
- T là giá trị đặc trưng cho quá trình quá độ. Nó là thời gian cần thiết để đường tiếp tuyến với $h(t)$ tại điểm uốn đi được từ 0 tới k .
- $T_{95\%}$ là điểm thời gian mà $h(t)$ đạt được giá trị $0.95k$.

Thời gian trích mẫu T_a có thể được chọn từ các thông số của $h(t)$ cho đối tượng liên tục có $h(t)$ ở hình 4.49 như sau:

- Xác định từ L : Nếu $\frac{T}{L} < 12$ thì $\frac{L}{5} \leq T_a \leq \frac{L}{2}$.
- Xác định từ T : $T_a \leq \frac{T}{10}$
- Xác định từ $T_{95\%}$: $\frac{T_{95\%}}{20} \leq T_a \leq \frac{T_{95\%}}{10}$

Nói chung, nếu như rằng thời gian trích mẫu T_a được chọn đã thỏa mãn $T_a \leq 2L$

thì ba tham số k_p , T_I và T_D của PID số sẽ được xác định từ k , L và T theo phương pháp Takahashi như sau:

- 1) Nếu chỉ sử dụng riêng bộ P số: $k_p = \frac{T}{k(L+T_a)}$
- 2) Nếu sử dụng bộ PI số: $k_p = \frac{0.9T}{k(L+0.5T_a)}$ và $T_I = 3,33(L+0,5T_a)$
- 3) Nếu sử dụng bộ PID số: $k_p = \frac{1.2T}{k(L+T_a)}$, $T_I = \frac{2(L+0.5T_a)^2}{L+T_a}$, $T_D = \frac{L+T_a}{2}$

Xác định từ giá trị tối hạn

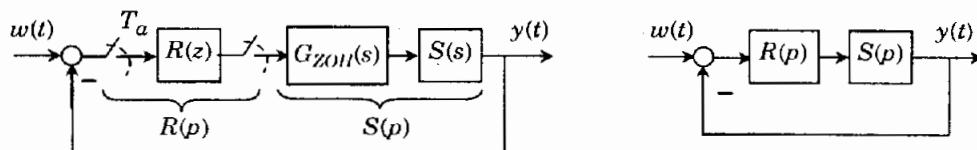
Bên cạnh phương pháp xác định tham số như trên, và nếu không có được đồ thị hàm quá độ $h(t)$ của đối tượng thì ta có thể xác định k_p , T_I và T_D của PID số như sau:

- 1) Thay bộ điều khiển PID số trong hệ kín (hình 4.46) bằng bộ khuếch đại k . Sau đó tăng k tới giá trị tối hạn k_{th} để hệ kín có dao động điều hòa, tức là $y(t)=h(t)$ có dạng hàm tuần hoàn (xem thêm mục 4.1.2). Xác định chu kỳ T_{th} của dao động.
- 2) Xác định k_p , T_I và T_D của PID số
 - a) Nếu chỉ sử dụng riêng bộ P số: $k_p = 0.5 k_{th}$
 - b) Nếu sử dụng bộ PI số: $k_p = 0.45 k_{th}$ và $T_I = 0.83T_{th}$
 - c) Nếu sử dụng bộ PID số: $k_p = 0.6 k_{th}$, $T_I = 0.83T_{th}$ và $T_D = 0.125T_{th}$

4.9.3 Sử dụng ánh xạ lưỡng tuyến tính để thiết kế bộ điều khiển

Trong các mục trên ta đã làm quen với nhiều phương pháp thiết kế bộ điều khiển liên tục rất hữu hiệu như phương pháp tối ưu độ lớn (còn gọi là tối ưu modul), tối ưu đối xứng, cân bằng mô hình ... (xem các mục 4.2, 4.3, 4.4). Các phương pháp này đều có một điểm chung là sử dụng công cụ phức (hàm truyền đạt) nên chúng vẫn thường được xếp vào lớp các phương pháp thiết kế trong miền tần số.

Mong muốn sử dụng những phương pháp thiết kế trong miền tần số này để tổng hợp bộ điều khiển không liên tục, người ta đã nghĩ ra ánh xạ lưỡng tuyến tính nhằm chuyển hàm $S(z)$ của đối tượng sang miền tần số $p = \delta + jv$ gần giống như miền $s = \sigma + j\omega$ của hệ liên tục, sau đó thiết kế bộ điều khiển giả liên tục $R(p)$ cho đối tượng $S(p)$ bằng các phương pháp thiết kế hệ liên tục đã biết rồi cuối cùng lại thông qua ánh xạ lưỡng tuyến tính đó để chuyển ngược $R(p)$ sang miền Z thành $R(z)$ – hình 4.50.



Hình 4.50: Chuyển hệ không liên tục dạng dạng giả "liên tục" để thiết kế bộ điều khiển.

Ở mục 3.6.3, trang 279 ta đã được biết một ánh xạ lưỡng tuyến tính, đó là

$$z = \frac{p+1}{p-1} \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{z+1}{z-1}$$

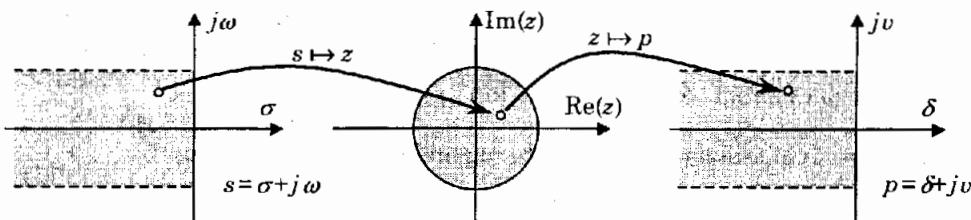
Ánh xạ này được sử dụng nhằm kiểm tra tính ổn định hệ không liên tục bằng các công cụ xét tính ổn định hệ liên tục.

Tuy nhiên, đối với công việc thiết kế bộ điều khiển thì ánh xạ trên tỏ ra không phù hợp vì nó đã không để ý tới tính tuần hoàn của

$$z = e^{sT_a} = e^{(\sigma + j\omega)T_a} \quad (\text{với chu kỳ } \Omega = \frac{2\pi}{T_a} \text{ của } \omega). \quad (4.109)$$

Bởi vậy ta cần có một ánh xạ lưỡng tuyến tính khác phù hợp hơn sao cho ánh xạ này giữ được bản chất của công thức (4.109) là chuyển những điểm z nằm trong đường tròn đơn vị chỉ vào một "đảo băng" nằm bên trái trực ảo (hình 4.51). Ánh xạ đó là:

$$z = \frac{2 + T_a p}{2 - T_a p} \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{2 - z + 1}{T_a z - 1} \quad (4.110)$$



Hình 4.51: Minh họa ánh xạ lưỡng tuyến tính được sử dụng để thiết kế bộ điều khiển không liên tục

Mặc dù ánh xạ (4.110) đã tạo ra được một dải băng trong mặt phẳng phức $p = \sigma + j\omega$ có dạng "gắn giống" như trong mặt phẳng $s = \sigma + j\omega$, song sự gắn giống đó cũng có nghĩa là hoàn toàn chưa giống nhau. Điều này ta có thể thấy thông qua việc thay $p = jv$ và $z = e^{j\omega T_a}$ vào công thức (4.110) và được:

$$\begin{aligned} p = \frac{2}{T_a} \frac{z+1}{z-1} &\Rightarrow jv = \frac{2}{T_a} \frac{e^{j\omega T_a} + 1}{e^{j\omega T_a} - 1} = \frac{2}{T_a} j \tan \frac{\omega T_a}{2} \\ &\Rightarrow v = \frac{2}{T_a} \tan \frac{\omega T_a}{2} \end{aligned} \quad (4.111)$$

Công thức hiệu chỉnh ω thành v theo (4.111) cần phải được lưu tâm khi sử dụng các phương pháp thiết kế bộ điều khiển liên tục có các giá trị tần số cắt ω_c hay các tần số gãy ω_1, ω_2 cho trước để thiết kế bộ điều khiển giả liên tục $R(p)$, chẳng hạn như khi sử dụng phương pháp thiết kế với biểu đồ Bode.

Tổng kết lại, thuật toán thiết kế bộ điều khiển không liên tục $R(z)$ có sử dụng ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.110) và các phương pháp thiết kế hệ liên tục sẽ gồm các bước:

- 1) Từ hàm truyền đạt $S(s)$ của đối tượng, xác định $S(z) = \frac{z-1}{z} \beta \left| \frac{S(s)}{s} \right\}$.
- 2) Chuyển $S(z)$ thành hàm "liên tục" $S(p)$ nhờ ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.110).
- 3) Thiết kế bộ điều khiển $R(p)$ "liên tục" cho đối tượng cũng "liên tục" $S(p)$ bằng các phương pháp đã biết như tối ưu độ lớn, tối ưu đối xứng, cân bằng mô hình, biểu đồ Bode. Nếu trong phương pháp thiết kế đó có sử dụng tần số cắt ω_c hay các tần số gãy ω_1, ω_2 cho trước thì cũng phải chuyển những giá trị cho trước đó sang miền p thành tần số cắt v_c , tần số gãy v_1, v_2 tương ứng nhờ công thức (4.111).
- 4) Chuyển ngược $R(p)$ tìm được sang miền Z nhờ ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.110).

Ví dụ 33: Cho đối tượng liên tục có hàm truyền đạt

$$S(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

Đối tượng được điều khiển bằng bộ điều khiển không liên tục theo sơ đồ cấu trúc mô tả ở hình 4.50. Như vậy đối tượng thực sự của bộ điều khiển không liên tục $R(z)$ sẽ gồm đối tượng đã cho và bộ chuyển đổi số-tương tự $G_{ZOH}(s)$.

Nếu $T_a = 0.2$ giây thì hàm truyền đạt trong miền Z của đối tượng này là

$$S(z) = \frac{z-1}{z} \beta \left| \frac{S(s)}{s} \right\} = \frac{0,02(z+0,94)}{(z-1)(z+0,82)}$$

Sử dụng ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.110) ta có mô hình $S(p)$ "giá liên tục" tương đương của $S(z)$:

$$S(p) = \frac{(1 + 0,0033p)(1 - 0,1p)}{p(1 + 1,003p)}$$

Biểu đồ Bode của $S(p)$ là $L_S(v)$ được vẽ minh họa trong hình 4.52. Từ đường $L_h(v)$ mong muốn của hàm truyền đạt hệ hở $L_h(v)$ ta suy ra được đường $L_R(v)$ của bộ điều khiển $R(p)$ bằng cách cộng trừ đồ thị (xem lại mục 4.3.4, trang 317).

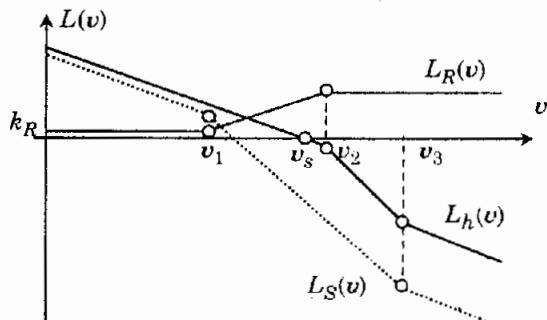
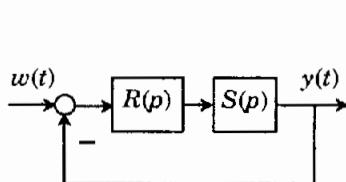
Với $L_R(v)$ tìm được (cho trường hợp $v_s=2$, $v_1=0,997$ và $v_2=3,27$ ta suy ra

$$R(p) = \frac{2(1 + 1,003p)}{1 + 0,31p}$$

Chuyển ngược $R(p)$ lại miền Z cũng với ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.110) $p = \frac{2}{T_a} \frac{z+1}{z-1}$ thì bộ điều khiển không liên tục cần tìm sẽ là

$$R(z) = \frac{5,44(z - 0,82)}{z - 0,51}$$

□



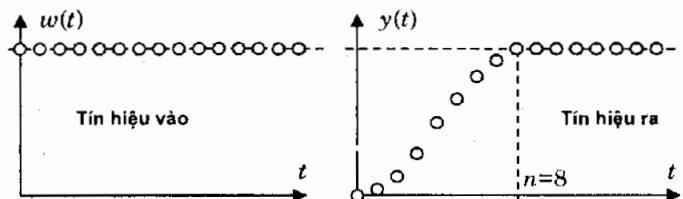
Hình 4.52: Minh họa ví dụ 33 về sử dụng ánh xạ lưỡng tuyến tính (4.110) để thiết kế bộ điều khiển không liên tục.

4.9.4 Thiết kế bộ điều khiển dead-beat

Một hệ thống không liên tục được gọi là dead-beat nếu nó thỏa mãn:

- Khi tín hiệu đầu vào $w(t)$ thay đổi từ hằng số này sang hằng số khác thì sau n bước điều khiển tín hiệu đầu ra cũng đạt tới được hằng số bằng tín hiệu đầu vào (không có sai lệch tĩnh), trong đó n là bậc của mô hình hệ thống.
- Khi tín hiệu đầu ra đạt được giá trị bằng tín hiệu đầu vào (ngay từ lần đầu tiên) thì đó cũng là thời điểm kết thúc quá trình quá độ.
- Ở chế độ xác lập, tín hiệu đầu ra không thay đổi ngay cả trong khoảng thời gian giữa các lần trích mẫu, tức là khi đó $y(t)$ phải là hằng số chứ không riêng gì dãy các giá trị trích mẫu $\{y_k\}$ của nó.

Bộ điều khiển làm cho hệ thống trở thành dead-beat được gọi là bộ điều khiển dead-beat hay bộ điều khiển có thời gian hiệu chỉnh hữu hạn (hình 4.53).



Hình 4.53: Tính chất hệ thống dead-beat.

Để công việc thiết kế bộ điều khiển dead-beat có thể có kết quả thì trước khi thực hiện công việc tổng hợp bộ điều khiển ta cần phải kiểm tra xem khi nào sẽ tồn tại một bộ điều khiển như vậy.

Hình 4.54 mô tả hệ thống phản hồi trạng thái gồm đối tượng SISO có mô hình

$$\underline{x}_{k+1} = \tilde{A}\underline{x}_k + \tilde{b}u_k \quad \text{với} \quad \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

và bộ điều khiển là khâu khuếch đại tinh \underline{k}^T . Giả sử đó là bộ điều khiển dead-beat, tức là với \underline{k}^T hệ sẽ đi được từ trạng thái đầu \underline{x}_0 bất kỳ về gốc tọa độ sau đúng n bước điều khiển (ứng với $w(t)=0$), nói cách khác $\underline{x}_n = \underline{0}$. Tương tự như công thức (3.104), mục 3.6.4, trang 282, trạng thái \underline{x}_n của hệ khi đó sẽ là

$$\underline{x}_n = (\tilde{A} - \tilde{b}\underline{k}^T)\underline{x}_{n-1} = (\tilde{A} - \tilde{b}\underline{k}^T)^n\underline{x}_0$$

Như vậy, để có $\underline{x}_{n+1} = \underline{0}$ thì phải có

$$(\tilde{A} - \tilde{b}\underline{k}^T)^n = \Theta$$

và rõ ràng phương trình trên sẽ có nghiệm \underline{k} nếu đối tượng là điều khiển được hoàn toàn.

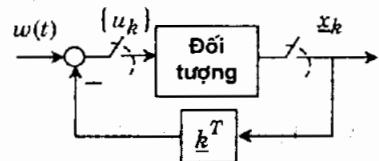
Hơn nữa, theo định lý Cayley-Hamilton (trang 138), khi ma trận

$$F = \tilde{A} - \tilde{b}\underline{k}^T$$

thỏa mãn $F^n = \Theta$ (được gọi là ma trận nilpotent bậc n) thì nó phải có phương trình đặc tính dạng

$$\det(zI - F) = z^n$$

Từ đây ta đi đến khẳng định:



Hình 4.54: Kiểm tra sự tồn tại của bộ điều khiển dead-beat.

Định lý 4.10: Nếu đối tượng SISO bậc n (có n biến trạng thái) là điều khiển được hoàn toàn thì luôn tồn tại bộ điều khiển phản hồi trạng thái dead-beat \underline{k}^T đưa hệ từ một điểm trạng thái đầu x_0 tùy ý về được đến gốc tọa độ sau đúng n bước. Ngoài ra bộ điều khiển đó sẽ làm cho hệ kín có điểm cực $z=0$ bội n .

Sự tồn tại của bộ điều khiển dead-beat như vậy là đã được khẳng định. Cũng cần nói thêm là có thể có các bộ điều khiển dead-beat khác nhau (tĩnh hoặc động) cho cùng một đối tượng chứ không riêng gì bộ điều khiển \underline{k}^T phản hồi trạng thái đã được đề cập trong định lý 4.10. Sau đây ta sẽ xét bài toán tổng hợp bộ điều khiển dead-beat động.

Cho hệ kín không liên tục với sơ đồ cấu trúc ở hình 4.50. Bộ điều khiển có hàm truyền $R(z)$. Đối tượng của $R(z)$ là $S(z)$ bao gồm đối tượng thực $S(s)$ và bộ chuyển đổi số-tương tự $G_{ZOH}(s)$ được ghép chung lại thành

$$S(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{ \frac{S(s)}{s} \right\}. \quad (4.112)$$

Do $S(s)$ phải là hợp thức (điều kiện causal) nên dưới sự ảnh hưởng của khâu chuyển đổi số-tương tự $G_{ZOH}(s)$, hàm truyền đạt $S(z)$ tính theo (4.112) sẽ có dạng

$$S(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} \quad (4.113)$$

tức là luôn có $y_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} U(z)S(z) = 0$ nếu như $u(t) = 1(t)$, hay $U(z) = \frac{z}{z-1}$.

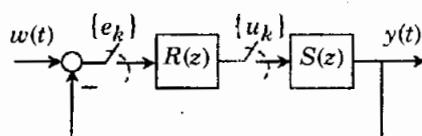
Nhiệm vụ đặt ra của bài toán là phải xác định $R(z)$ sao cho hệ kín

$$G(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{R(z)S(z)}{1 + R(z)S(z)} \quad (4.114)$$

đạt được những yêu cầu của một hệ dead-beat (hình 4.55).

Nếu như rằng từ yêu cầu hệ dead-beat ta đã có được hàm truyền mong muốn $G(z)$ của hệ kín thì với (4.114) ta cũng sẽ suy ra được bộ điều khiển $R(z)$ theo nguyên tắc cân bằng mô hình (mục 4.4.1, trang 322) như sau

$$R(z) = \frac{1}{S(z)} \cdot \frac{G(z)}{1 - G(z)} \quad (4.115)$$



Hình 4.55: Nhiệm vụ bài toán điều khiển dead-beat.

Tuy nhiên, khác với bài toán cân bằng mô hình hệ liên tục, ở bài toán cân bằng mô hình hệ rời rạc cần phải chú ý tới:

- 1) Các điểm cực không ổn định (không nằm trong đường tròn đơn vị) của đối tượng $S(z)$ không thể cân bằng (bù) được bởi một điểm không của $R(z)$, vì nếu như vậy, hệ vẫn có bản chất không ổn định giữa những lùi trích mẫu.
- 2) Cũng như vậy, không thể cân bằng các điểm không nằm ngoài đường tròn đơn vị của $S(z)$ bằng điểm cực của $R(z)$, vì nếu làm như vậy $R(z)$ sẽ là bộ điều khiển không ổn định, dẫn đến hệ sẽ không ổn định giữa các lùi trích mẫu.

Định lý 4.11: Gọi $G(z)$ là hàm truyền đạt của hệ dead-beat gồm bộ điều khiển $R(z)$ và đối tượng $S(z)$. Nếu z_k là điểm cực không nằm trong đường tròn đơn vị của $S(z)$, tức là $|z_k| \geq 1$, thì nó phải là điểm không của $1 - G(z)$. Ngược lại tất cả các điểm không z_l không nằm trong đường tròn đơn vị của $S(z)$ cũng phải là điểm không của $G(z)$.

Chứng minh:

Gọi z_k là điểm cực không nằm trong đường tròn đơn vị của $S(z)$ và ký hiệu

$$S(z) = \frac{\tilde{S}(z)}{z - z_k}$$

Vậy thì điều khẳng định thứ nhất được suy ra ngay từ quan hệ

$$1 - G(z) = 1 - \frac{R(z)S(z)}{1 + R(z)S(z)} = \frac{1}{1 + R(z)} \frac{\tilde{S}(z)}{z - z_k} = \frac{z - z_k}{z - z_k + R(z)\tilde{S}(z)}$$

vì $R(z)$ không được phép cân bằng (bù) z_k , tức là $R(z)$ không nhận z_k làm điểm không.

Tương tự, điều khẳng định thứ hai cũng được suy ra từ quan hệ (4.114). \square

Bây giờ ta sẽ đi vào phần thiết kế bộ điều khiển dead-beat $R(z)$. Xét với $w(t)=1(t)$ và do có yêu cầu rằng sau đúng n bước điều khiển tín hiệu đầu ra $y(t)$ tới được hằng số bằng tín hiệu đầu vào, tức là $y_k = 1$ khi $k \geq n$ và (4.113), tức là $y_0 = 0$ nên dãy $\{y_k\}$ phải có dạng

$$\{y_k\} = \{0, y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, 1, 1, \dots\}. \quad (4.116)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} Y(z) &= y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots + y_{n-1} z^{-n+1} + \sum_{k=n}^{\infty} z^{-k} \\ \Leftrightarrow G(z) &= \frac{Y(z)}{W(z)} = Y(z) \frac{z-1}{z} = Y(z) (1 - z^{-1}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow G(z) = (y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots + y_{n-1} z^{-n+1} + \sum_{k=n}^{\infty} z^{-k})(1 - z^{-1}) \\ = [y_1 z^{-1} + (y_2 - y_1) z^{-2} + \dots + (y_{n-1} - y_{n-2}) z^{-n+1} + (1 - y_{n-1}) z^{-n}] \\ = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_{n-1} z^{-n+1} + p_n z^{-n} = P(z^{-1}) \quad (4.117)$$

với

$$\sum_{k=1}^n p_k = y_1 + (y_2 - y_1) + \dots + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (1 - y_{n-1}) = 1$$

Nếu $\{y_k\}$ có dạng như (4.116) mô tả thì tương ứng $\{u_k\}$ cũng phải có dạng $\{u_k\} = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, u_n, \dots\}$.

Do đó

$$U(z) = u_0 + u_1 z^{-1} + \dots + u_{n-1} z^{-n+1} + u_n \sum_{k=n}^{\infty} z^{-k} \\ \Leftrightarrow \frac{U(z)}{W(z)} = U(z) \frac{z-1}{z} = Y(z) (1 - z^{-1}) \\ = [u_0 + u_1 z^{-1} + \dots + u_{n-1} z^{-n+1} + u_n \sum_{k=n}^{\infty} z^{-k}] (1 - z^{-1}) \\ = u_0 + (u_1 - u_0) z^{-1} + \dots + (u_{n-1} - u_{n-2}) z^{-n+1} + (u_n - u_{n-1}) z^{-n} \\ = q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_{n-1} z^{-n+1} + q_n z^{-n} = Q(z^{-1}) \quad (4.118)$$

Từ (4.117) và (4.118) ta được

$$S(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{W(z)} \frac{W(z)}{U(z)} = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

sau đó so sánh với (4.113) sẽ có

$$\frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_n z^{-n}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_n z^{-n}} \\ = \frac{\frac{p_1}{q_0} z^{-1} + \frac{p_2}{q_0} z^{-2} + \dots + \frac{p_n}{q_0} z^{-n}}{1 + \frac{q_1}{q_0} z^{-1} + \frac{q_2}{q_0} z^{-2} + \dots + \frac{q_n}{q_0} z^{-n}}$$

và đây chính là công thức cho phép xác định các hệ số p_1, \dots, p_n của $P(z^{-1})$ và q_0, q_1, \dots, q_n của $Q(z^{-1})$ từ b_1, \dots, b_n và a_1, a_2, \dots, a_n của $S(z)$ như sau:

- Cân bằng hệ số các đa thức tử và mẫu với nhau

$$p_k = q_0 b_k \quad \text{và} \quad q_k = q_0 a_k \quad (4.119a)$$

- Xác định q_0

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{q_0} = \frac{1}{q_0} \sum_{k=1}^n p_k = \frac{1}{q_0} \Leftrightarrow q_0 = \frac{1}{\sum_{k=1}^n b_k} \quad (4.119b)$$

Thay các đa thức $G(z) = P(z^{-1})$ và $S(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$ tìm được vào (4.115) ta có hàm truyền đạt của bộ điều khiển dead-beat

$$R(z) = \frac{1}{S(z)} \cdot \frac{G(z)}{1 - G(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \cdot \frac{P(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} \quad (4.120)$$

Vậy thuật toán thiết kế bộ điều khiển dead-beat $R(z)$ cho trường hợp tín hiệu đầu vào $w(t)$ có dạng bậc thang, sẽ gồm các bước như sau:

- 1) Viết lại hàm truyền đạt của đối tượng $S(z)$ dưới dạng hàm thực-hữu tỷ của z^{-1}

$$S(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{ \frac{S(s)}{s} \right\} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

- 2) Xác định các hệ số p_1, \dots, p_n của $P(z^{-1})$ và q_0, q_1, \dots, q_n của $Q(z^{-1})$ từ b_1, \dots, b_n và a_1, a_2, \dots, a_n của $S(z)$ theo (4.119), tức là

$$q_0 = \frac{1}{\sum_{k=1}^n b_k}, \quad p_k = q_0 b_k \quad \text{và} \quad q_k = q_0 a_k, \quad k = 1, \dots, n$$

- 3) Tính hàm truyền đạt $R(z)$ của bộ điều khiển theo (4.120), tức là $R(z) = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})}$.

Chú ý: Theo nội dung định lý 4.10 thì hàm truyền đạt $G(z)$ của hệ kín có điểm cực bộ n tại $z=0$. Điều này tương ứng với hiện tượng là $G(z)$ có dạng một đa thức của z^{-1} với bậc hữu hạn như công thức (4.117) mô tả. Việc có điểm cực bộ $z=0$ sẽ làm cho hệ khá nhạy cảm với sự thay đổi nhỏ trong $S(z)$. Nói cách khác hệ dead-beat không có tính bền vững cao. Hơn nữa, người ta còn chứng minh được rằng việc tăng tần số trích mẫu còn có thể làm cho hệ mất ổn định, bởi vậy bộ điều khiển đã được thiết kế với tần số trích mẫu nào thì chỉ nên làm việc với tần số trích mẫu đó. Ngoài ra, do hệ dead-beat khá nhạy cảm với sự thay đổi tham số như vậy nên bộ điều khiển dead-beat đã được thiết kế cho

trường hợp $w(t)$ có dạng bậc thang sẽ mất tác dụng dead-beat nếu $w(t)$ là các tín hiệu khác, chẳng hạn như tang đều $w(t) = t1(t)$.

Ví dụ 34: Xét hệ kín có

$$S(s) = \frac{1}{s(1+s)} \quad \Rightarrow \quad S(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{ \frac{S(s)}{s} \right\} = \frac{0.37z^{-1} + 0.26z^{-2}}{1 - 1.37z^{-1} + 0.37z^{-2}}$$

trong đó $T_a = 1$ giây. Vậy thì

$$P(z^{-1}) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$$

$$Q(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}$$

với

$$q_0 = \frac{1}{\sum_{k=1}^n b_k} = \frac{1}{0.37 + 0.36} = 1.58$$

$$p_1 = 0.58 \quad p_2 = 0.42 \quad q_1 = -2.16 \quad q_2 = 0.58$$

Suy ra

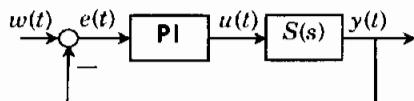
$$R(z) = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} = \frac{1.58 - 2.16z^{-1} + 0.58z^{-2}}{1 - 0.58z^{-1} - 0.42z^{-2}}.$$
□

Câu hỏi ôn tập và bài tập

- 1) Xét hệ thống điều khiển với sơ đồ cấu trúc cho ở hình 4.56. Hãy xác định các tham số bộ điều khiển PI nếu đối tượng có hàm truyền đạt

$$a) \quad S(s) = \frac{2}{(1+0.2s)(1+3s)} \quad b) \quad S(s) = \frac{3(1+2s)}{(1+s)(1+4s)} \quad c) \quad S(s) = \frac{e^{-0.3s}}{1+4s}$$

$$d) \quad S(s) = \frac{3}{(1+0.5s)^3} \quad e) \quad S(s) = \frac{2(1+0.3s)(1+2s)}{(1+0.2s)^5(1+0.5s)(1+3s)}$$



Hình 4.56: Cho các bài tập 1, 2 và 3.

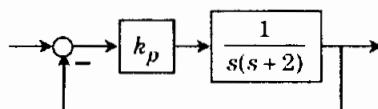
- 2) Xét hệ có cấu trúc giống như ở hình 4.56 nhưng bộ điều khiển $R(s)$ có thể là I hoặc PI hoặc PID và đối tượng có hàm truyền đạt

$$a) \quad S(s) = \frac{4}{(1+2s)(1+5s)} \quad b) \quad S(s) = \frac{2}{(1+3s)(1+0.2s)^4} \quad c) \quad S(s) = \frac{4}{1+2s}$$

d) $S(s) = \frac{2}{(1+3s)(1+5s)(1+0.3s)^5}$

Hãy thiết kế bộ điều khiển theo nguyên lý tối ưu độ lớn.

- 3) Tương tự như bài tập 1 nhưng bộ điều khiển được sử dụng là PID.
- 4) Cho hệ kín mô tả ở hình 4.57. Hãy xác định hằng số khuếch đại k_p để hàm quá độ hệ kín có độ quá điều chỉnh Δh_{max} không vượt quá 17% (ứng với hằng số suy giảm $D=0.5$). Với k_p tìm được thì hệ có thời gian quá độ $T_{5\%}$ bằng bao nhiêu?



Hình 4.57: Cho bài tập 4.

- 5) Hãy xác định bộ điều khiển tối ưu đối xứng (ứng với $a=2$, $a=4$ và $a=9$) cho các đối tượng có hàm truyền đạt như sau:

- a) $S(s) = \frac{2}{s(1+1.5s)}$
- b) $S(s) = \frac{3}{2s(1+s)(1+3s)}$
- c) $S(s) = \frac{1}{3s(1+0.4s)^2(1+3s)}$

Hãy ước lượng độ quá điều chỉnh Δh_{max} của hệ với những bộ điều khiển tìm được, đồng thời so sánh với độ quá điều chỉnh của hệ cho trường hợp $a=4$ và hệ được nối thêm bộ tiền xử lý để giảm độ quá điều chỉnh.

- 6) Giống như bài tập 5) nhưng cho trường hợp đối tượng có thêm khâu giữ trẻ e^{-2s} .
- 7) Cho đối tượng mô tả bởi

- a) $\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u , \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} .$

- b) $\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u , \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} .$

Hãy xác định bộ điều khiển tách kênh sao cho sau khi được tách kênh, hàm quá độ $h_i(t)$, $i=1,2$ của mỗi kênh đều di từ 0, tiến tới 1 (không có sai lệch tĩnh) và có dạng hình chữ S (không có độ quá điều chỉnh).

- 8) Xác định bộ điều khiển R phản hồi trạng thái cho các đối tượng

- a) $\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u$
- b) $\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$
- c) $\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$

sao cho hệ kín nhận các giá trị $s_1 = -2$ và $s_2 = -3$ làm điểm cực.

- 9) Hãy thiết kế thêm cho các hệ kín thu được ở bài 8) những bộ tiền xử lý để hệ không có sai lệch tĩnh.
- 10) Có thể áp dụng phương pháp Roppenecker để thiết kế bộ điều khiển khi mà các điểm cực đặt trước lại giống nhau hay không. Nếu có thì phải làm như thế nào.
- 11) Cho đối tượng có mô hình

$$\frac{d\ddot{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

và ba điểm cực mong muốn $s_1 = -2$, $s_2 = -3$, $s_3 = -4$ được xác định từ chỉ tiêu chất lượng cần phải có của hệ thống.

- a) Hãy thiết kế bộ điều khiển tĩnh, phản hồi trạng thái theo phương pháp Roppenecker.
- b) Hãy thiết kế bộ điều khiển tĩnh, phản hồi trạng thái theo phương pháp modal.
- 12) Chứng minh các công thức (4.74), (4.75) và (4.76) cho ở mục 4.7.1, trang 368.
- 13) Cho hệ kín, phản hồi âm, gồm bộ điều khiển PI và đối tượng có hàm truyền đạt

$$S(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

Hãy xác định tham số cho bộ điều khiển PI để chuẩn bậc 2 của sai lệch $e(t)$ giữa tín hiệu đặt trước $w(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$ là nhỏ nhất (xem hình 4.56), trong đó chuẩn bậc 2 của sai lệch được hiểu là

$$Q = \|e(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} e^2(t) dt}.$$

- 14) Cho đối tượng mô tả bởi

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Hãy xác định bộ điều khiển LQR (tối ưu, phản hồi trạng thái) ứng với phiếm hâm tổn hao (biện luận theo các trường hợp có thể xảy ra).

$$Q = \int_0^{\infty} \left[x^T \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} x + u^2 \right] dt.$$

- 15) Hãy xây dựng bộ quan sát trạng thái Luenberger cho đối tượng

a) $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$, $y = (1 \quad 1)^T x$

b) $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$, $y = (1 \quad 2)^T x$

bằng cách tự chọn trước các điểm cực. Đánh giá thời gian quan sát cần thiết $T_{5\%}$.

- 16) Cho hệ kín có cấu trúc mô tả ở hình 4.55 với bộ điều khiển PI và đối tượng SISO có mô hình trạng thái

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu$$

Hãy xây dựng thuật toán xác định tham số bộ điều khiển PI theo nguyên tắc cho trước điểm cực.

- 17) Phương trình

$$QA + A^T Q = -P$$

với P là ma trận đối xứng, xác định dương được gọi là phương trình Lyapunov. Chứng minh rằng nếu A là ma trận bền (các giá trị riêng nằm bên trái trục ảo) thì

$$Q = \int_0^{\infty} e^{At} P e^{A^T t} dt$$

là nghiệm xác định dương duy nhất của phương trình.

- 18) Hãy xây dựng thuật toán thiết kế bộ điều khiển dead-beat cho trường hợp tín hiệu đầu vào $w(t)$ không phải là bậc thang mà là

a) $w(t) = t1(t)$ tức là $W(z) = \frac{T_a z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$

b) $w(t) = \frac{1}{2} t^2 1(t)$ tức là $W(z) = \frac{T_a^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^3}$

Danh mục khái niệm

B

- Bài toán LQR (Linear Quadratic Regulator) 370
 Bài toán LQG (Linear Quadratic Gaussian) 387
 Bậc tương đối 149, 202, 323, 330
 Biến trạng thái thừa 243, 244

C

- Cơ sở của không gian vector 136
 Công thức xấp xỉ Padé 114, 326
 Công thức Tustin 164
 Công thức Schur 123, 378

D

- Dạng chuẩn điều khiển 146, 186, 339
 Dạng chuẩn quan sát 147, 242

E

- Đa thức Hurwitz 191, 192, 194, 196
 Đa thức Hurwitz chẵn 210, 212
 Đa thức Kharitonov 210, 211
 Đa thức đặc tính 138, 150, 191, 344
 Điểm cực 14, 17, 81
 Điểm không 112, 113
 Điểm nút nguồn 75, 77
 Điểm nút đích 75
 Điều khiển bám (tracking) 251
 Điều khiển cascade 359
 Điều khiển bền vững 56, 210, 258, 268
 Đường chéo chính/phụ 119
 Độ quá điều chỉnh 183, 241, 246, 393
 Độc lập tuyến tính 122, 231, 290, 347

H

- Hàm hợp thức 69, 87, 178, 185, 323
 Hàm hợp thức chẵn 87, 339, 382
 Hàm bền 24, 205
 Hàm mở rộng 4, 23, 153
 Hàm nhạy 166, 257
 Hàm thực-hữu lý 24, 114, 178, 338
 Hàm rỗng lược 25, 153
 Hàm truyền hệ hở 203, 254, 259, 262, 397
 Hàm truyền hệ kín 203, 398
 Hàm sai lệch phản hồi 204
 Hệ đối ngẫu 239, 285, 286, 383
 Hệ không rõ ràng (không chắc chắn) 257, 259

K

- Khâu khuếch đại 88, 90, 94, 183, 293
 Khâu nguyên hàm 88, 89
 Khâu vi phân 90, 183

- Khâu tích phân 88, 183
 Khâu thông tấn 249, 250
 Khâu ZOH (giữ tín hiệu bậc 0) 152, 271, 391
 Không chắc chắn (uncertain) 257, 258
 Krasowski (binh phương sai lệch) 255

M

- Ma trận tam giác 123
 Ma trận đường chéo 120, 132
 Ma trận giống đường chéo 138, 290
 Ma trận dẫn Frobenius 146, 242
 Ma trận xác định dương 221, 222
 Ma trận nilpotent 398
 Mô hình có bậc cực tiểu 244

N

- Nguyên lý xếp chồng 57

P

- Phương pháp tổng hằng số thời gian nhỏ 306
 Phương trình đặc tính 137, 340, 343
 Phương trình Lyapunov 222, 381, 404
 Phương trình Riccati 374, 376

Q

- Quy tắc bàn tay trái 206
 Quy tắc Evans 263
 Quỹ đạo trạng thái 115, 116, 218, 371

S

- Số chiều của không gian 126

T

- Takahashi 393, 394
 Tân số cắt 92, 208, 396
 Tân số gãy 90, 94, 396
 Thuật toán Kleinman 380
 Thuật toán Potter 377
 Tính chất đối ngẫu của đa thức Hurwitz 191
 Tuyến thẳng 76, 78

V

- Vector đơn vị 76, 77, 78
 Vòng lặp 76, 78
 Vòng lặp không định 76, 78

Z

- Ziegler–Nichols 294, 297

Tài liệu tham khảo

- [1] Burmeister, H.L.: Automatische Steuerung. VEB Verlag Technik Berlin, 1976.
- [2] Chui, C. K. and Chen, G.: Linear System and Optimal Control. Springer Verlag, Heidelberg New York, London, Paris, Tokyo, 1989.
- [3] Doyle, J.; Francis, B. and Tannenbaum, A.: Feedback control theory. Macmillan Publishing Co., 1990.
- [4] Fossard, A. and Gueguen, C.: Multivariable System Control. North-Holland Publishing Company, 1979.
- [5] Föllinger, O.: Regelungstechnik (xuất bản lần 9). Hüthig Buch Verlag Heidelberg, 1996.
- [6] Gantmacher, F.R.: Matrizentheorie. Springer Verlag, 1966.
- [7] Katsuhito Ogata: Modern Control Engineering. Prentice-Hall International Inc., 1995.
- [8] Lutz, H. ; Wendt, W.: Taschenbuch der Regelungstechnik (xuất bản lần 2). Harri Deutsch Verlag, 1998.
- [9] Lunze, J.: Regelungstechnik 1,2. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
- [10] Mate, L.: Hilbert Space Methods in Science and Engineering. Akadémiai Kiadó Budapest, 1989.
- [11] Phước, N.D. và Minh, P.X: Nhận dạng hệ thống điều khiển. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2001.
- [12] Phước, N.D. và Minh, P.X.: Điều khiển tối ưu và bền vững (xuất bản lần 2). Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2000.
- [13] Phước, N.D. và Minh, P.X.: Hệ phi tuyến (xuất bản lần 2). Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2000.
- [14] Sontag, E. D.: Mathematical Control Theory. Springer Verlag New York, 1990.
- [15] Unbehauen, R.: Systemtheorie (xuất bản lần 6). R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1993.
- [16] Wunsch, G., Schreiber, H.: Systemtheorie. Theorie stochastischer und analoger Systeme. Springer Verlag New York, 1993.

