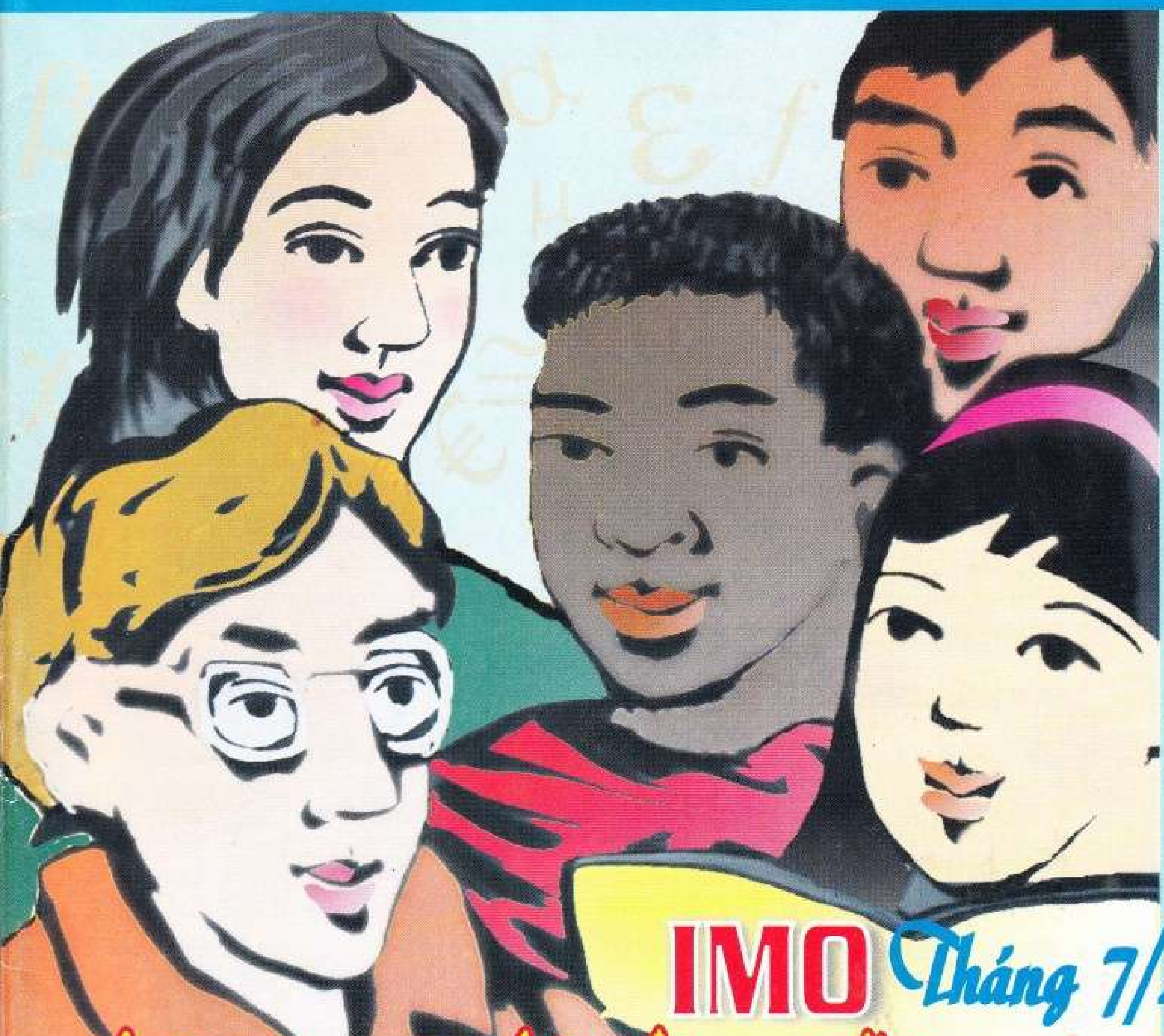
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

7 2006 Số 349

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 43
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre



IMO Tháng 7/2007

Một năm nữa, Việt Nam sẽ đăng cai cuộc thi Olympic Toán Quốc tế

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HỌP HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

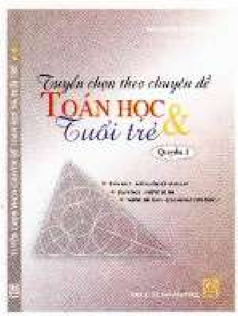
Sáng 21.6 tại Nhà xuất bản Giáo dục, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã tổ chức Lễ kỉ niệm 81 năm ngày Báo chí cách mạng Việt Nam, họp Hội đồng biên tập và kỉ niệm ngày sinh lần thứ 80 của GS.TSKH. Nguyễn Cảnh Toàn, nguyên Tổng biên tập Tạp chí. Tới dự buổi lễ có GS.TSKH Nguyễn Cảnh Toàn; GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu, Hiệu trưởng ĐHKHTN, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội; PGS.TS Phan Doãn Thoại, Phó TBT NXB Giáo dục, TBT tạp chí THTT; Ông Phan Kế Thái, Phó Giám đốc NXB Giáo dục tại Hà Nội; cán bộ NXB Giáo dục cùng các ủy viên Ban cố vấn khoa học, các ủy viên Hội đồng biên tập, Ban Giám đốc Công ti Cổ phần In Diên Hồng, các cộng tác viên thường xuyên của Tạp chí, các cán bộ của Tòa soạn. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tự hào là một trong ít tờ báo ra đời rất sớm trong số 800 tờ báo, tạp chí hiện nay. Suốt chặng đường 43 năm đầy khó khăn Tạp chí đã đạt được những thành công trong việc phổ biến kiến thức khoa học, nuôi dưỡng tình yêu và lòng đam mê Toán học nói riêng và Khoa học nói chung của bao thế hệ trẻ Việt Nam mà nay đã có nhiều người trở thành những nhà khoa học đóng góp cho sự phát triển của đất nước.

ThS. Vũ Kim Thủy nêu ý nghĩa của Ngày Báo chí Việt Nam, truyền thống của Tạp chí THTT và khai trương website của THTT: **http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre.**

PGS.TS. Phan Doãn Thoại giới thiệu về tổ chức, cách thức hoạt động và phương hướng phát triển Tạp chí trong giai đoạn tới. Ông cũng đề cập đến việc chuẩn bị cho Kì thi Olympic Toán học Quốc tế tổ chức tại Việt Nam vào năm 2007 mà THTT nên tích cực tham gia. TS. Phạm Thị Bạch Ngọc, trình bày vắn tắt về hoạt động của Tạp chí trong thời gian qua kể từ khi ra mắt Hội đồng biên tập mới.

Tại buổi lễ, Tạp chí cũng đã nhận được những đóng góp ý kiến quý báu của GS. Nguyễn Cảnh Toàn, GS. Nguyễn Văn Mậu, GS. Nguyễn Đăng Phất... và các nhà giáo nhiều năm tâm huyết gắn bó vì sự phát triển của Tạp chí, mong muốn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ không chỉ có uy tín phục vụ tốt nhất nhu cầu của độc giả trong nước mà còn được bạn bè Quốc tế biết đến.

VNTT



TRUNG HỌC CƠ SỞ

Sử dụng số vô tỉ ĐỂ GIẢI TOÁN

HOÀNG HẢI DƯƠNG
(GV THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, Hưng Yên)

Các bạn học sinh THCS được làm quen với số vô tỉ từ lớp 7, nhưng sử dụng số vô tỉ để giải toán lại là một công việc còn mới mẻ bởi các em rất ít được làm các bài toán dạng này. Với kiến thức về số vô tỉ ở THCS, ta có thể giải được một số bài toán hay, khó với lời giải ngắn gọn, đẹp.

Trước hết ta cần nhớ chú ý quan trọng sau: *Với a là số nguyên dương không chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.*

Sau đây là một số bài toán ứng dụng.

✪ **Bài toán 1.** *Cho a, b, c, m, n là các số hữu tỉ và $a \neq 0$. Chứng minh rằng nếu $x = m + n\sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) thì $x = m - n\sqrt{2}$ cũng là nghiệm của phương trình đó.*

Lời giải

Do $x = m + n\sqrt{2}$ là nghiệm của (1) nên

$$a(m+n\sqrt{2})^2+b(m+n\sqrt{2})+c=0$$

$$\Leftrightarrow (am^2+2an^2+bm+c)+(2amn+bn)\sqrt{2}=0 \quad (1')$$

Nếu $2amn + bn \neq 0$ thì từ (1') suy ra

$\sqrt{2}=-\dfrac{am^2+2an^2+bm+c}{2amn+bn}$. Khi đó vế trái là số vô tỉ, vế phải là số hữu tỉ. Điều này vô lí.

Vậy $2amn + bn = 0$. Từ (1') suy ra

$$am^2+2an^2+bm+c=0.$$

Do đó

$$a(m-n\sqrt{2})^2+b(m-n\sqrt{2})+c$$
$$= (am^2+2an^2+bm+c)-(2amn+bn)\sqrt{2}$$
$$= 0-0=0.$$

Vậy $x = m-n\sqrt{2}$ cũng là nghiệm của phương trình (1). □

✪ **Bài toán 2.** *Tìm các số hữu tỉ x, y thỏa mãn*

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{x\sqrt{3}}-\sqrt{y\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Lời giải

Do $\sqrt{2\sqrt{3}-3}>0$ nên $x > y \geq 0$. Ta có

$$(2) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}-3 = x\sqrt{3}+y\sqrt{3}-2\sqrt{3xy}$$

$$\Leftrightarrow (x+y-2)\sqrt{3} = 2\sqrt{3xy}-3 \qquad (2')$$

$$\Rightarrow (x+y-2)^2.3 = 12xy - 12\sqrt{3xy}+9$$

$$\Rightarrow \sqrt{3xy} = \frac{-(x+y-2)^2+4xy+3}{4} \in \mathbb{Q}.$$

Nếu $x+y-2 \neq 0$ thì từ (2') suy ra $\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{3xy}-3}{x+y-2}$. Khi đó vế trái là số vô tỉ, vế phải là số hữu tỉ. Điều này vô lí.

Vậy $x+y-2=0$.

Từ (2') suy ra

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2\sqrt{3xy}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

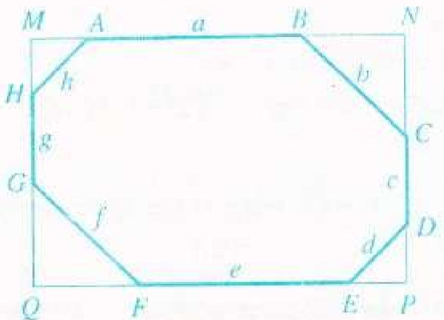
Do $x > y \geq 0$ nên suy ra

$$x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn } x>y\geq 0). \ \square$$

✪ **Bài toán 3.** *Một bát giác lồi có các góc bằng nhau, độ dài các cạnh là những số nguyên dương. Chứng minh rằng các cạnh đối của bát giác đó bằng nhau.*

Lời giải

Gọi bát giác đã cho là $ABCDEFGH$. Đường thẳng AB lần lượt cắt các đường thẳng HG và CD tại M, N. Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng HG và CD tại Q, P (hình vẽ).



Do các góc của bát giác bằng nhau nên mỗi góc trong của nó là

$$\frac{(8-2).180^o}{8}=135^o.$$

Từ đó suy ra mỗi góc ngoài của bát giác là $180^o-135^o=45^o$, do đó các tam giác MAH, NBC, PDE, QGF là các tam giác vuông cân và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Gọi độ dài các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HA theo thứ tự là a, b, c, d, e, f, g, h (với a, b, c, d, e, f, g, h là các số nguyên dương).

Suy ra $MA=MH=\frac{h}{\sqrt2}$; $NB=NC=\frac{b}{\sqrt2}$;

$$PD=PE=\frac{d}{\sqrt2};\quad QG=QF=\frac{f}{\sqrt2}.$$

Ta có $MN=PQ$ nên

$$\frac{h}{\sqrt2}+a+\frac{b}{\sqrt2}=\frac{f}{\sqrt2}+e+\frac{d}{\sqrt2}$$

$\Leftrightarrow\ (e-a)\sqrt2=h+b-f-d.$

Nếu $e-a\neq0$ thì

$\sqrt2=\frac{h+b-f-d}{e-a}\in\mathbb{Q}$, điều này vô lí.

Vậy $e-a=0\Leftrightarrow e=a$.

Chứng minh tương tự, ta có

$$c=g;\ b=f;\ d=h\ \square$$

✪ **Bài toán 4.** *Cho hai thùng A và B đựng nước với dung tích lớn tùy ý và hai cái gáo với dung tích lần lượt là $\sqrt2$ lít và $2-\sqrt2$ lít. Hỏi có thể dùng hai cái gáo đó để chuyển 1 lít nước từ thùng này sang thùng kia được hay không? Vì sao?*

(Đề thi vào lớp 10, ĐHSP Hà Nội năm 1995)

Lời giải

Giả sử có thể dùng gáo I (dung tích $\sqrt2$ lít) và gáo II (dung tích $2-\sqrt2$ lít) để chuyển 1 lít nước từ thùng A sang thùng B bằng cách đong m gáo I và n gáo II (m, $n\in N^*$) với quy ước: *$m>0$ nếu đong từ thùng A sang thùng B, $m<0$ nếu đong từ thùng B sang thùng A; tương tự với n.*

Ta có

$$m\sqrt2+n(2-\sqrt2)=1\Leftrightarrow(n-m)\sqrt2=2n-1.$$

Nếu $m\neq n$ thì $\sqrt2=\frac{2n-1}{n-m}\in\mathbb{Q}$ (vô lí).

Nếu $m=n$ thì $m=n=\frac12$. Điều này mâu thuẫn, vì $m,n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy không thể dùng hai cái gáo với dung tích là $\sqrt2$ lít và $2-\sqrt2$ lít để chuyển 1 lít nước từ thùng này sang thùng kia. ❐

Mời các bạn hãy làm các bài toán sau đây.

Bài 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\frac{11x}{5}-\sqrt{2x+1}=3y-\sqrt{4y-1}+2.$$

Bài 2. Chứng minh rằng số $99999+111111\sqrt3$ không thể biểu diễn được dưới dạng $(A+B\sqrt3)^2$ với A, B là hai số nguyên.

Bài 3. Chứng minh rằng số $\{10^n.\sqrt2\}$ với $n=0;1;2;3;\ldots$ từng đôi một khác nhau (kí hiệu $\{a\}$ chỉ phần thập phân của số thực a).

BÌNH LUẬN về đề thi đại học

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

LTS. Đề thi tuyển sinh Đại học môn Toán, khối A năm 2006 gồm các bài toán cơ bản, sát với chương trình phổ thông và có những câu khó để phân loại học sinh. Các bài toán về Hình học và Lượng giác trong đề nói chung rất cơ bản và quen thuộc với học sinh. Trong bài viết này, tác giả Nguyễn Anh Dũng bàn về một số bài toán Đại số và nêu nhận xét về phương pháp giải chung cho các loại toán đó. Bài viết dưới dạng bình luận những điểm cần lưu ý, không đơn thuần là một đáp án. Những nhận xét trên sẽ giúp học sinh biết cách định hướng khi tìm lời giải cho các bài toán tương tự. Ngoài ra các bạn có thể thực hành qua các bài luyện tập trong bài viết.

Câu 2.2. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 & (1)\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 & (2)\end{cases} \quad (x,\ y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Từ PT (1) có $xy \ge 0$. Nếu x hoặc y âm thì vế trái của (1) có giá trị âm, PT không thoả mãn. Đặt $S = x + y$, $P = xy$ $(S, P \ge 0)$.

Từ (1) suy ra $S-\sqrt{P}=3$ (3)

Từ (2), bình phương hai vế, ta được

$x+y+2\sqrt{xy+x+y+1}=16$

$\Rightarrow S+2\sqrt{P+S+1}=14$ (4)

Từ (3) và (4), tìm được $S = 6$, $P = 9$ (Lưu ý $S, P \ge 0$).

Từ đó x, y là nghiệm của PT bậc hai $t^2-6t+9=0$.

Ta được nghiệm duy nhất của hệ là $(x ; y) = (3; 3)$.

Nhận xét. Khi giải hệ đối xứng loại I đối với hai ẩn x, y, ta đặt $S = x+y$, $P = xy$ với điều kiện đối với S, P là $S^2-4P\ge 0$.

Bài luyện tập 1. Giải hệ PT $\begin{cases} x+y-xy=1\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$.

Bài luyện tập 2. Giả sử x, y, z là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} xy+yz+zx=1\\ x^2+y^2+z^2=2.\end{cases}$$

Chứng minh rằng $-\dfrac{4}{3}\le x,\ y,\ z\le\dfrac{4}{3}$.

Câu 4.2. *Cho hai số thực $x\ne 0, y\ne 0$ thay đổi và thoả mãn điều kiện $(x+y)xy=x^2+y^2-xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}$.*

Lời giải. *Cách 1.* Đặt $S = x+y$, $P = xy$. Điều kiện đối với S, P là $S^2-4P\ge 0$.

Dễ thấy $(x+y)xy=x^2+y^2-xy>0$ nên $x+y$ và xy cùng dấu. Sử dụng giả thiết trên, ta có

$$A=\frac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{x^3y^3}=\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 \Rightarrow S=\sqrt{A}.P \quad (1).$$

Mặt khác, từ giả thiết suy ra $SP=S^2-3P$ (2).

Từ (1), (2), tính được $P=\dfrac{3}{A-\sqrt{A}}$; $S=\dfrac{3\sqrt{A}}{A-\sqrt{A}}$.

Giải BPT $S^2-4P\ge 0$, ta tìm được $A\le 16$.

Từ đó $\max A = 16$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Cách 2. Đặt $x = ty$. Từ

$(x+y)xy=x^2+y^2-xy$ suy ra

$(t+1)ty^3=(t^2-t+1)y^2$.

Do đó $y=\dfrac{t^2-t+1}{t^2+t}$; $x=ty=\dfrac{t^2-t+1}{t+1}$.

Ta tính được

$$A=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2=\left(\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\right)^2.$$

Đặt $\dfrac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}=m$. Biến đổi thành PT bậc hai của t. Từ điều kiện để PT bậc hai đó có nghiệm ta tìm được tập giá trị của m và suy ra $A\le 16$.

Nhận xét. *1)* Nếu gặp bài toán dạng "*Cho x, y thoả mãn f(x, y) = 0. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức A = g(x, y)*".

Ta thường đưa về :

Tìm A để hệ PT $\begin{cases}f(x,y)=0\\g(x,y)=A\end{cases}$ có nghiệm.

Ta được tập giá trị của A, từ đó suy ra giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của A.

2) Với bài toán dạng "*Cho các số thực x, y thoả mãn f(x, y) = g(x, y). Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức A = p(x, y). Trong đó f(x, y) và g(x, y) đều là các biểu thức đẳng cấp đối với x, y*", có thể giải bài toán bằng cách sau:

Với $y=0$ ta thử trực tiếp.

Nếu $y\neq 0$, đặt $x=ty$. Thay vào giả thiết $f(x,y)=g(x,y)$, ta sẽ tính được y, x theo t. Biểu diễn A theo t. Từ đó tìm được tập giá trị của A.

Bài luyện tập 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2-3xy-2y^2$, trong đó x, y là hai số thực thỏa mãn x^2+xy+y^2.

Bài luyện tập 4. Cho hai số thực $x\neq 0$, $y\neq 0$ thoả mãn $x^2+y^2=x^2y+y^2x$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}$.

Câu Va.2. *Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\dfrac{1}{x^4}+x^7\right)^n$. Biết rằng $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+\ldots+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$. (n nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).*

Lời giải. Sử dụng công thức $C_n^k=C_n^{n-k}$ có $C_{2n+1}^1=C_{2n+1}^{2n}, C_{2n+1}^2=C_{2n+1}^{2n-1}, \ldots, C_{2n+1}^n=C_{2n+1}^{n+1}$.

Do đó $2(2^{20}-1)=C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+\ldots+C_{2n+1}^{2n}$

$\Rightarrow 2^{21}=(1+1)^{2n+1}\Rightarrow n=10$. Ta có

$$\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(\frac{1}{x^4}\right)^{10-k}x^{7k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k x^{11k-40}.$$

Số hạng chứa x^{26} ứng với $11k-40=26$.

Ta được $k=6$, suy ra hệ số của x^{26} là

$$C_{10}^6=210.$$

Nhận xét. Với bài toán "*Tìm hệ số của x^q trong khai triển $P(x)=\left(ax^m+bx^k\right)^n$, trong đó m, k, q là các số nguyên cho trước, $n\in\mathbb{N}^*$*", ta thường làm như sau :

Khai triển $P(x)=\sum_{i=1}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i x^{mn-mi+ki}$. Dẫn đến $mn-mi+ki=q$. Ta tìm được i. Suy ra hệ số của x^q là $C_n^i a^{n-i}b^i$.

Bài luyện tập 5. Khi khai triển

$P(x)=\left(x^3+\dfrac{1}{2x^2}\right)^n$, ta được

$$P(x)=a_0x^{3n}+a_1x^{3n-5}+a_2x^{3n-10}+\ldots$$

Biết rằng ba hệ số đầu a_0, a_1, a_2 lập thành một cấp số cộng.

Hãy tính n và tính hệ số của số hạng chứa x^4.

Bài luyện tập 6. Tìm hệ số không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của $\left(3x^2+\dfrac{2}{x}\right)^n$. Biết rằng $C_n^0+C_n^1+C_n^2=121$ (n nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ứng dụng của HAI BẤT ĐẲNG THỨC

TRẦN TUẤN ANH
(GV Khoa Toán - Tin học ĐHKHTN, - ĐHQG TP. HCM)

Trong bài viết này, chúng ta xem xét việc sử dụng hai bất đẳng thức (BĐT) sau để chứng minh một số bài toán về bất đẳng thức:

(i) $(1+z)^{\alpha} \le 1+\alpha z$ với $z>-1$ và $\alpha\in[0;1]$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha=0$ hoặc $\alpha=1$ (bất đẳng thức Bernoulli).

(ii) $(1+z)^{\alpha} \le 1+z^{\alpha}$ với $z>0$ và $\alpha\le1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha=1$.

Chứng minh **(ii)**

Do $1>\dfrac{1}{1+z}>0,\ 1>\dfrac{z}{1+z}>0$ và $\alpha\le 1$ nên

$\left(\dfrac{1}{1+z}\right)^{\alpha}\ge\dfrac{1}{1+z}$ và $\left(\dfrac{z}{1+z}\right)^{\alpha}\ge\dfrac{z}{1+z}$.

Cộng theo vế hai BĐT trên ta được

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)^{\alpha}+\left(\frac{z}{1+z}\right)^{\alpha}\ge\frac{1}{1+z}+\frac{z}{1+z}=1.$$

Từ đó suy ra $1+z^{\alpha}\ge(1+z)^{\alpha}$. □

Nhận xét

1) Trong BĐT (ii) cho $z=\dfrac{x}{y}$ (với x, y là số thực dương) ta nhận được các BĐT (ii) cho hai số thực dương x, y như sau:

$$(x+y)^{\alpha}\le x^{\alpha}+y^{\alpha}\quad \text{với } \alpha\le 1.$$

2) Bằng phương pháp quy nạp hoặc phương pháp như trên ta chứng minh được BĐT (ii) cho ($m\ge2$) số thực dương $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m$:

$$(x_1+x_2+...+x_m)^{\alpha}\le x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+...+x_m^{\alpha}\quad \text{với } \alpha\le 1.$$

Bây giờ chúng ta vận dụng chúng để giải quyết các bài toán sau đây.

Bài 1. *Cho a là một số thực nằm trong đoạn $[0;1]$. Chứng minh rằng* $1+a\ge 2^{a}\ge 1+a^2$.

Chứng minh. Do $a\in[0;1]$ nên áp dụng bất đẳng thức (i) ta có

$$2^{a}=(1+1)^{a}\le 1+a.1=1+a \qquad (1)$$

Mặt khác, do $1-a\in[0;1]$ nên theo bất đẳng thức (1) ta có

$$2^{1-a}\le 1+(1-a)=2-a.$$

Từ đó suy ra $\quad 2^{a}\ge\dfrac{2}{2-a} \qquad (2)$

Bây giờ ta chứng minh $\dfrac{2}{2-a}\ge 1+a^2 \qquad (3)$

Thật vậy, dễ thấy BĐT (3) tương đương với BĐT đúng $a(a-1)^2\ge0$.

Từ đó, kết hợp hai BĐT (2) và (3) ta có $2^{a}\ge1+a^2$. □

Nhận xét. Sử dụng BĐT $2^{a}\ge1+a^2$ với $a\in[0;1]$ ta sẽ giải được các bài toán sau đây.

1) Cho $a_1, a_2, ..., a_m$ ($m\ge1$) là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a_1^2+a_2^2+...+a_m^2=1$. Chứng minh rằng $2^{a_1}+2^{a_2}+...+2^{a_m}\ge m+1$.

2) Cho $x_1, x_2, ..., x_m$ ($m\ge1$) là các số thực. Chứng minh rằng

$2^{|\cos x_1|}+2^{|\sin x_1\cos x_2|}+...+2^{|\sin x_1\sin x_2...\sin x_{m-1}\cos x_m|}$

$+2^{|\sin x_1\sin x_2...\sin x_{m-1}\sin x_m|}\geq m+1$.

Hướng dẫn. Tổng bình phương các số mũ ở vế trái bằng 1.

Bài 2. *Cho a, b là các số thực dương nằm trong khoảng $(0;1)$. Chứng minh rằng*

1) $a^a>\frac{1}{2}$; 2) $a^b+b^a>1$.

Chứng minh

1) Do $a>\frac{a}{a+1}>0$ nên

$$a^a>\left(\frac{a}{a+1}\right)^a=\frac{1}{\left(\frac{a+1}{a}\right)^a}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^a} \quad (4)$$

Vì $a\in(0;1)$ nên áp dụng BĐT (i) ta có

$$0<\left(1+\frac{1}{a}\right)^a\leq 1+a.\frac{1}{a}=2.$$

Kết hợp BĐT này và BĐT (4) ta nhận được BĐT cần chứng minh.

2) Do $a>\frac{a}{a+1}>0$ và $b>\frac{b}{b+1}>0$ nên

$$a^b+b^a>\left(\frac{a}{a+1}\right)^b+\left(\frac{b}{b+1}\right)^a=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^b}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{b}\right)^a} \quad (5)$$

Vì $a, b\in(0;1)$ nên áp dụng BĐT (i) ta có

$$0<\left(1+\frac{1}{a}\right)^b\leq 1+b.\frac{1}{a}=\frac{a+b}{a},$$

$$0<\left(1+\frac{1}{b}\right)^a\leq 1+a.\frac{1}{b}=\frac{a+b}{b}.$$

Kết hợp hai BĐT trên và BĐT (5) ta được

$$a^b+b^a>\frac{1}{\frac{a+b}{a}}+\frac{1}{\frac{a+b}{b}}=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1. \square$$

Nhận xét. Bằng phương pháp trên ta có thể chứng minh bài toán tổng quát sau: Cho $a_1, a_2, ..., a_m$ $(m\geq 2)$ là các số thực dương có tổng bằng S. Chứng minh rằng

$$(S-a_1)^{a_1}+(S-a_2)^{a_2}+...+(S-a_m)^{a_m}>m-1.$$

Hướng dẫn. Nếu tồn tại một chỉ số k $(1\leq k\leq m)$ sao cho $a_k\geq 1$ thì với mọi $i\neq k$ và $1\leq i\leq m$ ta có $S-a_i>a_k\geq 1$. Suy ra $(S-a_i)^{a_i}>1$. Từ đó có được BĐT cần chứng minh.

Trong trường hợp tất cả các số a_i $(1\leq i\leq m)$ đều nằm trong khoảng $(0;1)$ thì ta giải tương tự như trong câu 2) của bài toán này.

Bài 3. *Cho $a_1, a_2, ..., a_m$ $(m\geq 2)$ là các số thực dương và α, β là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện $\alpha\geq\beta$. Chứng minh rằng*

$$\left(a_1^\alpha+a_2^\alpha+...+a_m^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leq\left(a_1^\beta+a_2^\beta+...+a_m^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Chứng minh. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\left(a_1^\alpha+a_2^\alpha+...+a_m^\alpha\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\leq a_1^\beta+a_2^\beta+...+a_m^\beta.$$

Hay $(x_1+x_2+...+x_m)^{\frac{\beta}{\alpha}}\leq x_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+x_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+...+x_m^{\frac{\beta}{\alpha}}$ với $x_i=a_i^\alpha>0$, $i=\overline{1,m}$.

Do $\alpha\geq\beta>0$ nên $\frac{\beta}{\alpha}\leq 1$. Lúc đó áp dụng BĐT (ii) cho các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_m$ và $\frac{\beta}{\alpha}\leq 1$ ta nhận được BĐT cần chứng minh. $\square$

Bài 4. *Cho a, b, c là các số thực dương và n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng* $\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[n]{\frac{c}{a+b}}>2$.

Chứng minh. Vì $0<\frac{2}{n}\leq 1$ nên áp dụng BĐT (ii) ta có $0<(b+c)^{\frac{2}{n}}\leq b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}$.

Kết hợp BĐT trên và BĐT Cauchy cho hai số dương có

$$0<\sqrt[n]{a(b+c)}\leq\frac{a^{\frac{2}{n}}+(b+c)^{\frac{2}{n}}}{2}\leq\frac{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}{2}.$$

(Xem tiếp trang 10)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

Bất phương trình hàm với CẶP BIẾN TỰ DO

NGUYỄN VĂN MẬU
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Trong bài báo này, dựa vào một số đặc trưng cơ bản của hàm số, ta khảo sát một số bất phương trình hàm sơ cấp thường gặp trong các đề thi Olympic Toán học.

Bài toán 1. *Xác định các hàm số f(x) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(i) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Thay $x = 0$ vào điều kiện đầu bài, ta thu được

$\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(0) \geq 2f(0) \end{cases}$ hay $f(0) = 0$.

Vậy nên $f(0) = f(x + (-x)) \geq f(x) + f(-x) \geq 0$.

Suy ra $f(x) \equiv 0$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn điều kiện bài ra. ❐

Bài toán 2. *Cho a là số thực. Xác định các hàm số f(x) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(i) $f(x) \geq ax, \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Đặt $g(x) = f(x) - a(x)$. Khi đó ta thu được các điều kiện

(i) $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $g(x+y) \geq g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Theo kết quả bài toán 1 thì $g(x) \equiv 0$ hay $f(x) = ax$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = ax$ thỏa mãn điều kiện bài ra. ❐

Bài toán 3. *Cho a là số thực dương. Xác định các hàm số f(x) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(i) $f(x) \geq a^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x+y) \geq f(x) \,.\, f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Để ý rằng $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy ta có thể lôgarit hóa hai vế các bất đẳng thức (BĐT) của điều kiện đã cho với mỗi x.

(i) $\ln f(x) \geq (\ln a)x, \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) $\ln f(x+y) \geq \ln f(x) + \ln f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Đặt $\ln f(x) = \varphi(x)$, ta thu được

(i) $\varphi(x) \geq (\ln a)x, \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\varphi(x+y) \geq \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Theo kết quả của bài toán 2 ta có $\varphi(x) = (\ln a)x$. Suy ra $f(x) = a^x$.

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = a^x$ thỏa mãn điều kiện bài ra. ❐

Bài toán 4. *Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$,

(ii) *Tồn tại hằng số M sao cho*

$$f(x) \leq M, \forall x \in [0; 1].$$

Lời giải. Từ giả thiết (i), ta có $f(2x) = 2f(x)$ và $f(0) = 2f(0)$ nên $f(0) = 0$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, với cặp số nguyên dương m, n ta có

$$m.f\left(\frac{n}{m}x\right) = f(nx) = nf(x)$$

hay $\quad f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}x, \forall m, n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hơn nữa, $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$. Như vậy, với mọi số hữu tỉ $r \in \mathbb{Q}$ ta luôn có $f(rx) = rf(x), \forall x \in \mathbb{R}$. (1)

Từ giả thiết (ii) của bài toán ta có $f(1-x) \leq M$ $\Leftrightarrow f(1) - f(x) \leq M$ hay $f(x) \geq f(1) - M, \forall x \in [0; 1]$.

Như vậy với mọi $x \in [0; 1]$ ta có
$f(1) - M \le f(x) \le M$.

Suy ra, với số $N = \max\{|M| ; |M - f(1)|\}$ có $-N \le f(x) \le N$, $\forall x \in [0, 1]$ hay $|f(x)| \le N$, $\forall x \in [0; 1]$. Lại do $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên suy ra $|f(x)| \le N, \forall x \in [-1; 1]$ (2).

Với x tùy ý, gọi r là số hữu tỉ dương sao cho $|x| \le r$ thì $\left|\frac{x}{r}\right| \le 1$ và theo (2) ta có

$$\left|f\left(\frac{x}{r}\right)\right| \le N \Rightarrow \frac{1}{r}.|f(x)| \le N \text{ (do (1))}$$

hay $|f(x)| \le N.r$, $\forall x \in [-r; r]$.

Với mỗi x thuộc $[-r; r]$ khi $r \to |x|$ thì $|f(x)| \le N.|x|$ suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Đặt $f(1) = c$ thì $f(r) = r.c$, với mọi r hữu tỉ.

Xét x_0 tùy ý. Nếu $x \to x_0$ thì $x - x_0 \to 0$. Khi đó ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x-x_0) = 0$ hay $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (3).

Xét số thực x tùy ý, luôn tồn tại dãy $\{r_n\}$ các số hữu tỉ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

Theo (3) ta có $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = f(x)$.

Mặt khác $f(r_n) = c.r_n$, nên ta có

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty}(c.r_n) = c.\lim_{n\to\infty}(r_n) = c.x.$$

Thử lại, dễ thấy hàm $f(x) = f(1).x$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = f(1).x$. ❐

✪ **Bài toán 5.** *Tồn tại hay không hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, không là hàm hằng mà thỏa mãn bất đẳng thức*

$$(f(x) - f(y))^2 \le |x - y|^3, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài giải. Từ bất đẳng thức

$$(f(x) - f(y))^2 \le |x - y|^3,$$

với $x \ne y$ ta suy ra

$$\frac{(f(x)-f(y))^2}{(x-y)^2} \le |x-y| \text{ hay } \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le |x-y|^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Trong biểu thức (4), cố định x và cho $y \to x$ ta được $f'(x) = 0$ hay $f(x)$ là hằng số. Vậy không tồn tại hàm $f(x)$ khác hằng số mà thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❐

✪ **Bài toán 6.** *Xác định tất cả cặp hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*
(i) $2f(x) - g(x) = f(y) - y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
(ii) $f(x).g(x) \ge x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Từ giả thiết (i), thay $y = x$, ta có

$$2f(x) - g(x) = f(x) - x.$$

Suy ra $f(x) = g(x) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó giả thiết (i) trở thành

$$2(g(x) - x) - g(x) = (g(y) - y) - y$$

hay $g(x) = 2x - 2y + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Cho $y = 0$ và đặt $g(0) = b$, ta có $g(x) = 2x + b$ và từ đó $f(x) = x + b$.

Thay biểu thức của $f(x)$ và $g(x)$ vào bất đẳng thức (ii), ta thu được $(x + b)(2x + b) \ge x + 1$ hay $2x^2 + (3b - 1)x + b^2 - 1 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Từ đó suy ra $\Delta = (3b - 1)^2 - 8(b^2 - 1) \le 0$
$\Leftrightarrow (b - 3)^2 \le 0 \Leftrightarrow b = 3$.

Vậy cặp hàm $f(x) = x + 3$ và $g(x) = 2x + 3$ thỏa mãn điều kiện (ii).

Xét điều kiện (i), ta có $2f(x) - g(x) = 3 = f(y) - y$.

Vậy (i) được thỏa mãn. Cặp hàm số cần tìm là: $f(x) = x + 3$ và $g(x) = 2x + 3$. ❐

BÀI TẬP

Bài 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(0) = f(1) = 0$ và

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le f(x) + f(y), \ \forall x, y \in [0; 1] \quad (1)$$

1) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có vô số nghiệm trên đoạn $[0; 1]$.
2) Tồn tại hay không hàm số xác định trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn các điều kiện trên và không đồng thời bằng 0.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[0; 1]$ và thỏa mãn các điều kiện:

(Xem tiếp trang 15)

HÌNH THÀNH CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

(Tiếp theo kì trước)

THÁI VIẾT THẢO
(Sở GD-ĐT Nghệ An)

II. Các bất đẳng thức liên quan đến đường tròn ngoại tiếp

Khi cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, BĐT (*) trở thành

$$R^2(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta \quad (4^*)$$

Đến đây bằng một số phép biến đổi, ta có một số trường hợp đặc biệt của nó.

- Chọn $\alpha = \beta = \gamma$ thay vào (4*) được $R^2 \geq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$;

- Chọn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ thay vào (4*) được $R \geq 2r$;

- Chọn $\alpha = \beta = -\gamma$ thay vào (4*) được $R^2 + a^2 + b^2 \geq c^2$;

- Chọn $\alpha = bc$, $\beta = ca$, $\gamma = ab$ thay vào (4*) ta được
$$(ab+bc+ca)\sqrt{\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}} \geq 4S \quad (17)$$

- Chọn $\alpha = b+c$, $\beta = c+a$, $\gamma = a+b$, thay vào (4*) và biến đổi ta được
$$8R(R-2r) \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \quad (18)$$

Để ý rằng $a = 2R.\sin A$, $b = 2R.\sin B$, $c = 2R.\sin C$ thì BĐT (4*) có dạng

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 4(\beta\gamma.\sin^2 A + \alpha\gamma.\sin^2 B + \alpha\beta.\sin^2 C) \quad (5^*)$$

BĐT này gợi cho ta nhiều liên tưởng tới tính lượng giác của nó.

- Chọn $\alpha = c$, $\beta = a$, $\gamma = b$ thay vào (5*) có
$$p^2 \geq ab.\sin^2 A + bc.\sin^2 B + ca.\sin^2 C \quad (19)$$

- Chọn $\alpha = \cos A$, $\beta = \cos B$, $\gamma = \cos C$ thay vào (5*) với chú ý $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$, ta được BĐT
$$(R+r)^2 \geq a^2.\cos B.\cos C + b^2.\cos C.\cos A + c^2.\cos A.\cos B \quad (20)$$

III. Các bất đẳng thức về đường tròn nội tiếp

Áp dụng BĐT (*) cho trường hợp M trùng với tâm T đường tròn nội tiếp tam giác ABC được

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha TA^2 + \beta TB^2 + \gamma TC^2) \geq a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta. \quad (6^*)$$

Từ BĐT này ta chọn các bộ số (α, β, γ) thích hợp sẽ đi tới các BĐT mới.

- Chọn $\alpha = \beta = \gamma$ thay vào (6*) được BĐT
$$TA^2 + TB^2 + TC^2 \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \quad (21)$$

- Chọn $\alpha = \dfrac{a}{TA}$, $\beta = \dfrac{b}{TB}$, $\gamma = \dfrac{c}{TC}$ thay vào (6*) và biến đổi ta được
$$a.\sin\frac{A}{2} + b.\sin\frac{B}{2} + c.\sin\frac{C}{2} \geq p \quad (22)$$

- Chọn $\alpha = p-a$, $\beta = p-b$, $\gamma = p-c$ thay vào (6*) ta được
$$\frac{TA^2}{r_a} + \frac{TB^2}{r_b} + \frac{TC^2}{r_c} \geq 8(R-r)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{r_a^3} + \frac{1}{r_b^3} + \frac{1}{r_c^3} \geq \frac{8R-9r}{S^2} \quad (23)$$

- Chọn $\alpha = \sin\dfrac{A}{2}$, $\beta = \sin\dfrac{B}{2}$, $\gamma = \sin\dfrac{C}{2}$ thay vào (6*). Sau khi biến đổi ta có tiếp
$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq \frac{1}{r}\left(a.\cos\frac{A}{2}+b.\cos\frac{B}{2}+c.\cos\frac{C}{2}\right) \quad (24)$$

Như vậy mới chỉ qua năm trường hợp đặc biệt của điểm M mà ta đã đề xuất được 24 BĐT.

Dưới đây chúng tôi đưa ra một số BĐT khác có được bằng cách làm như trên, bạn đọc tự giải xem như bài tập.

Bài 1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng
$$r_a^2+r_b^2+r_c^2\ge 6r^2+24Rr-p^2$$
trong đó r_a, r_b, r_c là các bán kính đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C của tam giác ABC.

Bài 2. Cho tam giác ABC và một điểm P tùy ý trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh BC, CA và AB theo thứ tự. Đặt $PA=d_1$, $PB=d_2$, $PC=d_3$, $PA_1=r_1$, $PB_1=r_2$, $PC_1=r_3$. Chứng minh rằng:

a) $3(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$
$\ge d_1^2.\sin^2A+d_2^2.\sin^2B+d_3^2.\sin^2C$;

b) $(a^2+b^2+c^2)(S_a^2+S_b^2+S_c^2)$
$\ge S^2(R_1^2+R_2^2+R_3^2)$;

c) $\sqrt{IA^2+IB^2+IC^2}\le\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$.

Ở đây I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, S, S_a, S_b, S_c là diện tích các tam giác ABC, PBC, PCA và PAB tương ứng.

Bài 3. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì. Chứng minh rằng:
$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha MB^2.MC^2+\beta MC^2.MA^2+\gamma MA^2.MB^2)$
$\ge a^2.MA^2.\beta\gamma+b^2.MB^2.\alpha\gamma+c^2.MC^2.\alpha\beta$,
với α, β, γ là các số thực tùy ý.

GIỚI THIỆU SÁCH GIÁO KHOA MỚI...

(Tiếp trang 14)

Mỗi chương có các phần

- Kiến thức cần nhớ
- Bài tập mẫu
- Bài tập
- Lời giải. Hướng dẫn. Đáp số.

Học tốt, luyện tập tốt theo sách bài tập sẽ giúp học sinh nắm chắc kiến thức cơ bản của môn học, tạo điều kiện đạt hiệu quả cao ở những lớp trên.

ỨNG DỤNG ... *(Tiếp trang 6)*

Từ đó suy ra $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b+c}}=\dfrac{a^{\frac{2}{n}}}{\sqrt[n]{a(b+c)}}$

$$\ge\frac{a^{\frac{2}{n}}}{\dfrac{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}{2}}=\frac{2a^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n=2$ và $a=b+c$.

Tương tự: $\sqrt[n]{\dfrac{b}{c+a}}\ge\dfrac{2b^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}$

và $\sqrt[n]{\dfrac{c}{a+b}}\ge\dfrac{2c^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}$.

Cộng theo vế ba BĐT trên nhận được

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[n]{\frac{c}{a+b}}\ge\frac{2a^{\frac{2}{n}}+2b^{\frac{2}{n}}+2c^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n=2$ và $a=b+c$, $b=c+a$, $c=a+b$.

Điều này không thể có vì a, b, c là các số thực dương. Từ đó suy ra đpcm. ❐

Nhận xét: Bất đẳng thức trên đã được chứng minh trong THTT số 341, tháng 11/2005 khi $n=3$, nhưng phương pháp chứng minh trong đó khó mở rộng cho trường hợp n là một số nguyên dương lớn hơn 1 bất kì. Tuy nhiên, với việc sử dụng ý tưởng trong bài viết đó cùng với BĐT (ii) chúng ta có một chứng minh khá gọn trong trường hợp $n\ge 1$ nguyên dương tùy ý. Ngoài ra, cũng bằng cách sử dụng BĐT (ii) cho nhiều số chúng ta có thể chứng minh bài toán tổng quát sau:

Cho $a_1, a_2, ..., a_m$ ($m\ge3$) là các số thực dương có tổng bằng S và n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng
$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{S-a_1}}+\sqrt[n]{\frac{a_2}{S-a_2}}+...+\sqrt[n]{\frac{a_m}{S-a_m}}>2.$$

Đại số sửa sai

Máy vi tính không phải lúc nào cũng tuyệt đối đúng. Các nhà tin học luôn tìm cách"dạy" cho nó biết sửa sai khi phát hiện cái sai. Công cụ hữu hiệu là mã Reed-Solomon, kết hợp Đại số tuyến tính và Đại số các đa thức.

Năm 1947, trước sự kiện máy vi tính trục trặc (nhầm lẫn) Richard Hamming một người Mĩ cho rằng nếu máy tính biết dừng lại khi nó nhầm lẫn, thì nó cũng biết phát hiện và sửa sai. Vì thế nhà toán học Bell Labs đưa ra ý tưởng về mã sửa sai, là những công cụ mà ngày nay người ta thấy khắp nơi trong thế giới tin học và viễn thông.

Khoảng cách giữa hai từ

Cơ chế sửa sai do Hamming đề xuất có mô hình ra sao?

Để dễ hiểu, giả sử có cửa hàng hoa quả của Pháp bán ananas (dứa), mangue (xoài), orange (cam). Giả sử có người đặt hàng qua mạng điện tử. Họ đặt "mangue", nhưng do trục trặc thế nào đó cửa hàng nhận được "langue". Người bán biết ngay ý người mua là "mangue", vì hai từ chỉ khác nhau có một chữ (*m* thành *l*). Lại giả sử có hai chữ sai, ví dụ nhận được "oranas" thì có hai khả năng hoặc là "orange" hoặc "ananas".

Một cách tổng quát, người ta có thể tính được "khoảng cách" giữa hai từ, tức là số chữ cái khác nhau của chúng có tính đến thứ tự. Ví dụ giữa "orange" và "langue" khoảng cách là 5, ...

Tham chiếu mã

Khi tìm một cái sai, trước hết người ta xem từ đó có nằm trong tập hợp các từ nói trên không. Người ta gọi *mã* là tập hợp các từ đó. Nếu từ đang xét không có trong *mã*, thì tìm xem từ đó gần từ nào trong mã nhất. Trong ví dụ trên, tập hợp các từ tên các loại quả nói trên là một *mã* có độ dài 6 (mỗi từ có 6 chữ), gồm 3 từ. Khoảng cách tối thiểu giữa hai từ khác nhau của *mã* là 4 (4 chữ cái khác nhau giữa ananas và orange)

Sự khác biệt lớn

Có thể xảy ra trường hợp có 4 cái sai cùng một lúc, ví dụ "ananas" thành "orange", không ai biết cái đúng là cái nào. *Ngược lại, nếu có 3 cái sai hoặc ít hơn thì chắc chắn rằng sẽ không rơi vào một từ của mã.* Như vậy với một mã có độ dài tối thiểu là d, thì luôn luôn có thể tìm ra đến $(d-1)$ cái sai.

Nhưng "tìm ra" và "sửa sai" là khác nhau! Không phải luôn luôn tìm được một từ khi nó có khoảng cách $\left[\frac{d}{2}\right]$ đến hai từ của mã, ví dụ như trường hợp "oranas".

Không có sự do dự nào nếu nhiều nhất có $\left[\frac{d-1}{2}\right]$ cái sai xảy ra. Trong ví dụ trên người bán đã có thể sửa một cái sai, mà không phải là hai. Kết luận rút ra là để đối phó tốt nạn sai, mật mã phải có một khoảng cách tối thiểu lớn. Nói cách khác, phải có sự khác biệt lớn giữa các từ tạo thành. Vì tất cả các từ của mã có độ dài như nhau nên nếu mã đó chứa càng nhiều từ, thì khả năng hai từ của chúng sát nhau càng lớn. Một trong những mục tiêu của lí luận dựa vào mã là khả năng xây dựng một mã chứa bao nhiêu từ cũng được, khác biệt cũng tùy ý, có độ dài tùy ý, bằng cách chọn số từ khác biệt cũng tùy ý.

Để biểu diễn những mã có một số lớn từ, Hamming và đồng nghiệp David Slepian, đề nghị áp dụng đại số tuyến tính. Chữ cái được dùng là tập hợp hữu hạn những số gọi là *thể hữu hạn*. Khi tập hợp đó chứa q số, ta kí hiệu

F_q. Trên tập hợp đó trang bị phép toán như số học thông thường (+, ×, ...) làm sao cho kết quả phép toán giữa hai phần tử của F_q cho một phần tử của F_q. Thể hữu hạn hay dùng là F_2, gồm hai phần tử là 0 và 1. Trong F_2 quy ước $1 + 1 = 0$. Đại số tuyến tính cho phép biểu diễn các mã (tuyến tính) rất lớn. Ví dụ chỉ cần vài phương trình để biểu diễn các mã chứa 2^{256} từ (nhiều hơn số nguyên tử trong vũ trụ!).

Giới hạn của những mã tuyến tính

Đại số tuyến tính rất có ích cho việc biểu diễn các mã, nhưng năm 1978 các nhà toán học (Mĩ, Hà Lan) đã chứng minh rằng không thể giải mã hữu hiệu đa số mã tuyến tính. Thật vậy, nói chung rất khó tính khoảng cách tối thiểu của một mã tuyến tính.

Thuật toán sửa sai

Nếu các mã tuyến tính không phải "đa năng" thì một vài mã lại rất tốt. Trong đó phải kể đến mã gồm những đa thức có những tính chất đáng chú ý là một mặt chúng có khoảng cách tối thiểu d thích hợp, mặt khác sự sửa $\left[\frac{d-1}{2}\right]$ cái sai (nhiều nhất) có thể thực hiện nhờ *thuật toán* giải mã do Berlekamp đưa ra năm 1965. Đó là hai lí do chính mà mã Reed-Solomon được dùng trong đĩa cứng, đầu đọc CD và trong thăm dò không gian.

Nếu có trên $\left[\frac{d-1}{2}\right]$ cái sai thì sao? Có một danh sách những từ gần nhất là rất tốt để giải quyết việc "bất khả giải mã". "Giải mã theo danh sách' do Peter Elias đề ra từ cuối năm 1950. Nhưng làm sao để mở rộng hữu hiệu thuật toán giải mã và cho phép thuật toán đó tìm lại nhanh chóng một danh sách như vậy?

Tổng quát hóa

Chưa có tiến bộ nào đáng kể trong lĩnh vực này cho đến năm 1996 Madhu Sudan đề nghị một thuật toán giải mã theo danh sách cho một số mã đặc biệt của Reed-Solomon.

Bài toán tổng quát dẫn đến một mối quan hệ rất gần giữa Tin học lí thuyết và Lí thuyết mã.

Hình học đại số và Lí thuyết số cũng vào cuộc để tìm cách giải quyết vấn đề giải mã.

PHAN THANH QUANG

(*Theo* ***Lancelot Pecquet, Recherche****, số 1/2006*)

PROBLEMS...

(Tiếp trang 17)

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/349. Let be given three prime numbers p_1, p_2, p_3 ($p_1 < p_2 < p_3$). Put

$A = \{n \mid n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \le n \le p_1 p_2 p_3,\ n \nmid p_1,\ n \nmid p_2, n \nmid p_3\}$.

Prove that $|A| \ge 8$ ($|A|$ denotes the number of elements of the set A).

When does equality occur ?

T9/349. Let be given six real numbers a, b, c, a_1, b_1, c_1 ($aa_1 \ne 0$) satisfying the condition

$$\left(\frac{c}{a}-\frac{c_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{b}{a}-\frac{b_1}{a_1}\right)\cdot\frac{bc_1-cb_1}{aa_1}<0.$$

Prove that each of the following equations

$$ax^2+bx+c=0 \text{ and } a_1x^2+b_1x+c_1=0$$

has two distinct roots and by representing these roots on the number line, the roots of one equation alternate with the roots of the other equation.

T10/349. Find all polynomials with real coefficients $P(x)$ satisfying the condition

$P(x).P(x+1) = P(x^2+2)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

T11/349. Let AA_1, BB_1, CC_1 be the inner angled bisectors of triangle ABC and A_2, B_2, C_2 be the touching points of the incircle of triangle ABC with the sides BC, CA, AB respectively. Let S, S_1, S_2 be the areas of triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ respectively. Prove that $\frac{3}{S_1}-\frac{2}{S_2}\le\frac{4}{S}$.

T12/349. Let $Sxyz$ be a trihedral angle with $\widehat{xSy} = 121^\circ$; $\widehat{xSz} = 59^\circ$. A is a point on Sx,

$OA = a$. On the ray bisecting the angle $\widehat{zSy}$, take the point B such that $SB = a\sqrt{3}$. Calculate the measures of the angles of triangle SAB.

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

Giới thiệu sách giáo khoa mới ĐẠI SỐ 10 THPT

VŨ TUẤN
(Chủ biên SGK Đại số 10)

Bắt đầu từ năm học 2006-2007, các lớp 10 trường THPT trong toàn quốc đều học theo SGK mới. Chúng tôi muốn giới thiệu một số nét về SGK Toán 10 lần thay sách này.

Về môn Toán lớp 10, ban KHTN dùng SGK Đại số 10 nâng cao và Hình học 10 nâng cao, hai ban còn lại sử dụng SGK Đại số 10 và Hình học 10. So với chương trình cũ, chương trình môn Đại số 10 có những thay đổi sau đây.

• Thêm chương Thống kê, tiếp tục cung cấp các kiến thức về ứng dụng của Toán học (bắt đầu từ lớp 7). Chuyển một phần của Lượng giác (chương Cung và góc lượng giác. Công thức lượng giác) từ chương trình 11 vào cuối chương trình Đại số 10 nhằm phục vụ kịp thời cho việc học Vật lí, Sinh học, ...

• Để nội dung bớt nặng nề, trong các chương khác giảm bớt một số nội dung tương đối phức tạp. Đó là, bỏ các phần: giải hệ phương trình bậc hai hai ẩn, bất phương trình bậc hai, định lí đảo về dấu tam thức bậc hai.

Khi sử dụng Đại số 10 THPT nên lưu ý mấy điểm sau:

❶ *Yêu cầu quan trọng* nhất của việc thay sách lần này là thay đổi bước đầu thói quen dạy và học từ xưa: "Thầy truyền đạt (một cách áp đặt) và trò tiếp thu (một cách thụ động)". Cách học đó rõ ràng hạn chế kết quả dạy và học, đặc biệt làm giảm tính năng động, trí sáng tạo của người học. Với cách dạy và học đó, bài giảng, sách giáo khoa có thể trình bày gọn, chặt chẽ và hệ thống. Tuy nhiên, đó thường là cách làm đẹp, "hàn lâm" nhưng khô cứng, khó tiếp thu. Rất có thể làm cách này thích hợp và có lợi cho một số rất ít học sinh có năng khiếu rõ rệt về Toán và sẽ theo đuổi nghiệp "Toán" trong suốt cuộc đời mình, nhưng lại không dễ đối với đa số học sinh.

Phải thay đổi cách đào tạo. Đó là một trong những yêu cầu quan trọng của các cuộc cải cách giáo dục không chỉ ở nước ta mà ở nhiều nước trên thế giới. Để góp phần có hiệu quả trong mục tiêu đổi mới phương pháp giảng dạy, việc biên soạn SGK lần này cần đạt được các yêu cầu sau đây.

a) Tạo điều kiện tăng cường tính chủ động của học sinh trong giờ học. Trong SGK lần này có các hoạt động (kí hiệu là) yêu cầu học sinh tham gia xây dựng khái niệm, đặt vấn đề, nêu bài toán, hướng giải quyết, ...) nhằm mục đích trên.

b) Tránh đưa ra kiến thức quá chặt chẽ hệ thống, thiếu tự nhiên. Không yêu cầu học sinh phải làm những bài tập khá lắt léo. Thay vào đó, phải tìm cách đưa nội dung một cách nhẹ nhàng, dễ hiểu, tự nhiên mà vẫn chính xác. Làm sao để học sinh thu nhận được kiến thức như thể mình là người "phát minh" thì tốt nhất.

c) Làm cho học sinh thấy rõ Toán học gần với cuộc sống, Toán học phát triển từ thực tế và giúp họ làm quen với việc áp dụng hiểu biết của mình để giải các bài toán thực tế hoặc các bài toán của môn học khác (Vật lí, Hóa học, Sinh vật, ...).

Dưới đây là một số minh họa

1°. Cách trình bày khái niệm mệnh đề kéo theo, SGK trình bày theo thứ tự sau:

• Dẫn dắt. Ví dụ 3 (trang 6) cho thấy "mệnh đề kéo theo" thường gặp trong cuộc sống, chẳng hạn

Nếu "Trái đất không có nước" thì "Trái đất không có sự sống"

• Giới thiệu cách lập mệnh đề kéo theo.

Giả sử P, Q là hai mệnh đề đã cho. *Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là* ***mệnh đề kéo theo****, và kí hiệu là* $P \Rightarrow Q$.

• Cho học sinh tập phát biểu mệnh đề kéo theo bằng hoạt động 5.

"Gió mùa đông bắc về" $\Rightarrow$ *"Trời trở lạnh".*

• Nêu tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$:

"*Mệnh đề* $P \Rightarrow Q$ *chỉ sai khi P đúng và Q sai.*

Ở đây hiểu là những trường hợp còn lại thì mệnh đề $P \Rightarrow Q$ đều đúng. Cách nêu điều kiện như vậy để tránh phải nêu ra hai trường hợp rất khó hình dung đối với học sinh là : Khi P sai thì $P \Rightarrow Q$ luôn luôn đúng. *Như vậy ta chỉ cần xét tính đúng sai của mệnh đề khi P đúng.*

2°. Khái niệm hàm số

I. Ôn tập về hàm số

1. Hàm số. Tập xác định của hàm số

Giả sử có hai đại lượng biến thiên x và y, trong đó x nhận giá trị thuộc một tập số D.

> *Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực* $\mathbb{R}$ *thì ta có một* **hàm số**.

Ví dụ 1. Về thu nhập bình quân đầu người (TNBQĐN) của nước ta từ năm 1995 đến năm 2004.

2. Cách cho hàm số.

Một hàm số có thể được cho bằng các cách sau

- Hàm số cho bằng bảng
- Hàm số cho bằng biểu đồ
- Hàm số cho bằng công thức.

Khi hàm số cho bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định ta có quy ước:

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

3°. SGK mới đưa ra *điều kiện xác định* của phương trình (bất phương trình) thay cho *tập xác định* vừa trừu tượng vừa khó kiểm tra.

1. Phương trình (bất phương trình) một ẩn

Phương trình (bất phương trình) một ẩn là mệnh đề chứa biến dạng

$$f(x) = g(x)(f(x) < g(x)) \qquad (1)$$

trong đó x là ẩn số; $f(x)$, $g(x)$ là những biểu thức của x.

2. Điều kiện của một phương trình (bất phương trình)

Điều kiện của ẩn số x để $f(x)$, $g(x)$ có nghĩa là điều kiện xác định (hay gọi tắt là điều kiện) của phương trình (bất phương trình) (1).

❷ Đổi mới cách kiểm tra đánh giá một phần thể hiện ở SGK mới là bài tập trắc nghiệm khách quan. Cách kiểm tra *trắc nghiệm* khách quan đã được sử dụng ở nhiều nước. Trắc nghiệm khách quan giúp kiểm tra rộng hơn, toàn diện hơn đồng thời vẫn kiểm tra được sự thông minh, cách vận dụng linh hoạt các kiến thức được học. Để giúp học sinh làm quen với cách kiểm tra trắc nghiệm khách quan, mỗi chương của SGK mới đều có bài tập loại này.

❸ Để thống nhất các kí hiệu theo chuẩn Quốc tế, SGK lần này thay đổi một vài kí hiệu. Chẳng hạn thay tgα bằng tanα, cotgα bằng cotα.

❹ SGK mới có nhiều "*Bài đọc thêm*", "*Bạn có biết*" trong mỗi chương, liên quan đến kiến thức của chương. Điều này làm cho sách sinh động hơn, thiết thực hơn, thực tế hơn. Những hiểu biết này đôi khi rất cần thiết nhưng không thể chính thức đưa vào chương trình.

Để hỗ trợ cho việc học các kiến thức của SGK, sách bài tập được biên soạn với hệ thống bài tập mới (khác bài tập trong SGK) theo cấu trúc sau đây:

(Xem tiếp trang 10)

Giải trí toán học

MA PHƯƠNG ĐÔ-MI-NÔ

(Đề đăng trên THTT số 347 tháng 5.2006)

Xét ma phương đô-mi-nô với kí hiệu số dấu tròn trong các ô vuông như ở hình 1.

a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4
a_5	a_6	a_7	a_8
b_5	b_6	b_7	b_8

Hình 1

Điều kiện: $1 \le a_i \le 6$, $1 \le b_i \le 6$ mà $(a_i, b_i) \neq (a_j, b_j)$ và $(a_i, b_i) \neq (b_j, a_j)$ với mọi $i \neq j$; i, j thuộc $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1) Giả sử có số 6 nằm ở một ô nào đó, chẳng hạn $a_4 = 6$ thì phải có $a_1 = a_2 = a_3 = b_4 = a_8 = b_8 = 1$. Từ đó suy ra, b_1, b_2, b_3 đều khác nhau và lớn hơn 1, lúc đó $b_4 + b_1 + b_2 + b_3 \ge 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, trái giả thiết. Vậy không có ô vuông nào có 6 dấu tròn.

2) Từ $9 = 1 + 1 + 2 + 5 = 1 + 1 + 3 + 4 = 1 + 2 + 2 + 4 = 1 + 2 + 3 + 3 = 2 + 2 + 2 + 3$ suy ra mỗi hàng hoặc mỗi cột của ma phương chỉ lấy trong các bộ bốn số trên.

Ta thấy không xảy ra trường hợp $a_1 = b_1 = a_5 = 2$, $b_5 = 3$. Thực vậy,

- nếu $a_2 + b_2 = 4$ thì $a_2 = 3$, $b_2 = 1$ và $a_3 = a_4 = 2$, $b_3 = b_4 = 3$ nên $a_3 = a_4$, $b_3 = b_4$ trái giả thiết.
- nếu $a_2 + b_2 = 5$ thì thấy cũng không có a_3, b_3, a_4, b_4 thỏa mãn giả thiết.

Xét tương tự, ta thấy không xảy ra trường hợp $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_5 = b_5 = 3$. Chọn các bộ số (a_1, b_1, a_5, b_5) là (1, 1, 2, 5); (1, 1, 3, 4); (1, 2, 2, 4) được các nghiệm ở hình 2, 3, 4.

1	1	2	5
1	4	3	1
2	2	3	2
5	2	1	1

Hình 2

1	1	2	5
1	4	3	1
3	2	3	1
4	2	1	2

Hình 3

1	1	2	5
2	3	2	2
2	2	4	1
4	3	1	1

Hình 4

Ở hình 2 hoặc hình 3 có thể chọn (a_2, b_2, a_3, b_3) là (1, 4, 3, 2) hoặc (2, 3, 4, 1) hoặc (3, 2, 4, 1). Trong mỗi trường hợp đó có thể đổi chỗ (a_6, b_6) với (a_7, b_7).

Ở hình 4 còn có thể chọn (a_2, b_2, a_3, b_3) là (2, 2, 3, 1). Trong mỗi trường hợp đó có thể đổi chỗ (a_6, b_6) với (a_7, b_7).

Các bạn có lập luận và chỉ ra được nhiều nghiệm là :

1) *Nguyễn Văn Huyên*, 10A0, THPT Yên Phong I, **Bắc Ninh**.
2) *Ngô Thị Phương Trinh*, 11A1, THPT Võ Thị Sáu, Đất Đỏ, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.
3) *Trần Thế Phúc*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.
4) *Lê Tiến Cường*, 8B, THCS Kim Chung, Đông Anh, **Hà Nội**.
5) *Dương Văn An*, 10A1, THPT Châu Thành, Thị xã Bà Rịa, **Bà Rịa - Vũng Tàu.**

VÂN KHANH

BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM... *(Tiếp trang 8)*

(i) $f(1) = 1$,

(ii) $f(x) \ge 0$, $\forall x \in [0; 1]$,

(iii) Nếu $x, y, x + y$ thuộc $[0; 1]$ thì

$f(x + y) \ge f(x) + f(y)$.

Chứng minh rằng khi đó $f(x) \le 2x$, $\forall x \in [0; 1]$.

Bài 3. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

Nếu tồn tại số $a \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

(i) $f(x + a) = f(x) + g(x)$

(ii) $f(x) = 1$ nếu $0 \le x \le a$,

(iii) $g(x + na) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } n \text{ chẵn} \\ -g(x) & \text{khi } n \text{ lẻ}. \end{cases}$

Chứng minh rằng khi $|g(x)| \le 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $0 \le f(x) \le 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 4. Cho M, a là các số dương. Tìm các hàm số $f(x)$, $g(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$|f(y) - f(x) - g(x).(x - y)| \le M.|x - y|^{2+a}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/349. (Lớp 6) Xét tổng S gồm 2006 số hạng sau:

$$S=\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{n+1}{2^n}+\ldots+\frac{2007}{2^{2006}}.$$

Hãy so sánh S với 3.

NGUYỄN ANH THUẤN
(GV THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T2/349. (Lớp 7) Cho tam giác ABC, trung tuyến AD và BE cắt nhau tại M. Chứng minh rằng nếu $\widehat{AMB}\le 90^\circ$ thì $AC+BC>3AB$.

TẠ MINH HIẾU
(GV THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

Bài T3/349. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương r nhỏ hơn 59 đều tồn tại duy nhất số nguyên dương n nhỏ hơn 59 sao cho (2^n-r) chia hết cho 59.

NGUYỄN HỮU BẰNG
(GV THCS Hưng Hòa, Vinh, Nghệ An)

Bài T4/349. Giải phương trình

$$2x^2-5x+2=4\sqrt{2(x^3-21x-20)}.$$

TRẦN VĂN HẠNH
(GV CĐSP Quảng Ngãi)

Bài T5/349. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$4abc\left[\frac{1}{(a+b)^2c}+\frac{1}{(b+c)^2a}+\frac{1}{(c+a)^2b}\right]+$$
$$+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}\ge 9.$$

TẠ ĐỨC HẢI
(SN T12, Phố Trì Chính, TTr Phát Diệm, Kim Sơn, Ninh Bình)

Bài T6/349. Cho tam giác ABC vuông tại B với $AB=2BC$. Lấy điểm D thuộc cạnh AC sao cho $BC=CD$, điểm E thuộc cạnh AB sao cho $AD=AE$. Chứng minh rằng $AD^2=AB.BE$.

HUỲNH QUANG LÂU
(GV THCS Ngô Mây, Phù Cát, Bình Định)

Bài T7/349. Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại O. Điểm M thay đổi, không thuộc Δ_1, Δ_2 sao cho $OM=R$ không đổi. H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên Δ_1, Δ_2. Tìm tập hợp tâm đường tròn nội tiếp của tam giác MHK.

NGUYỄN BẰNG
(GV THCS Lê Quý Đôn, TP Vũng Tàu Bà Rịa - Vũng Tàu)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/349. Cho p_1, p_2, p_3 (với $p_1<p_2<p_3$) là ba số nguyên tố. Gọi tập hợp

$A=\{n \mid n\in\mathbb{N}^*,\ 1\le n\le p_1p_2p_3,\ n \not\vdots\ p_1, n \not\vdots\ p_2, n \not\vdots\ p_3\}$.

Chứng minh rằng $|A|\ge 8$ (kí hiệu $|A|$ là số các phần tử của tập hợp A).

Đẳng thức xảy ra khi nào?

ĐẶNG THANH HẢI
(GV Học viện PKKQ, Sơn Tây, Hà Tây)

Bài T9/349. Cho sáu số thực a, b, c, a_1, b_1, c_1 (với a, a_1 khác 0) thỏa mãn hệ thức

$$\left(\frac{c}{a}-\frac{c_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{b}{a}-\frac{b_1}{a_1}\right).\frac{bc_1-cb_1}{aa_1}<0.$$

Chứng minh rằng hai phương trình

$$ax^2+bx+c=0 \text{ và } a_1x^2+b_1x+c_1=0$$

đều có các nghiệm phân biệt và các nghiệm của chúng nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số.

HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Bài T10/349. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có hệ số thực thỏa mãn

$$P(x).P(x+1)=P(x^2+2) \text{ với mọi } x\in\mathbb{R}.$$

BÙI TUẤN NGỌC
(GV THPT Chu Văn An, Lạng Sơn)

Bài T11/349. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác trong của tam giác ABC và A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh BC, AC, AB. Kí hiệu S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Chứng minh rằng $\frac{3}{S_1} - \frac{2}{S_2} \le \frac{4}{S}$.

TRẦN NGỌC DIỆP
(GV THPT chuyên Nguyễn Huệ, TX Hà Đông, Hà Tây)

Bài T12/349. Cho góc tam diện $Sxyz$ thỏa mãn $\widehat{xSy} = 121^\circ$; $\widehat{xSz} = 59^\circ$. Trên tia Sx lấy điểm A sao cho $SA = a$ cho trước. Trên tia phân giác của góc $\widehat{zSy}$ lấy điểm B thỏa mãn $SB = a\sqrt{3}$. Tính các góc của tam giác SAB.

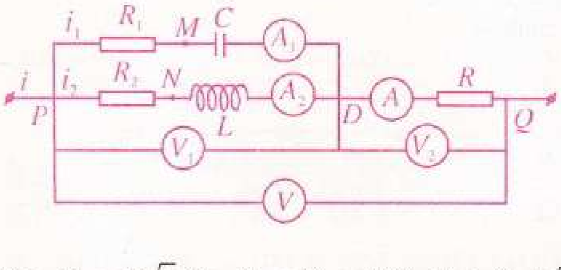
PHẠM HÙNG
(46 Hàng Chuối, Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/349. Từ độ cao h_1, h_2 người ta ném cùng lúc hai vật có khối lượng m_1, m_2 (xem như hai chất điểm) theo phương ngang với vận tốc tương ứng là v_1, v_2. Vật thứ hai chạm, đất tại B, va chạm đàn hồi với đất, nẩy lên và rơi xuống chạm đất lần thứ hai tại A cùng thời điểm với vật thứ nhất. Biết h_2 = 20m. Tìm h_1 và tỉ số $\frac{v_1}{v_2}$ (lấy g = 10m/s^2).

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/349. Một mạch điện xoay chiều như sơ đồ dưới đây



Cho $R_1 = 5\sqrt{3}\,\Omega$; $R_2 = Z_C = 5\Omega$. Hai vôn kế V_1 và V_2 chỉ cùng một giá trị U = 20V. Hãy xác định các số chỉ của các ampe kế A_1, A_2, A và số chỉ của vôn kế V ; tìm giá trị của điện trở R. Bỏ qua điện trở của các ampe kế và dây dẫn nối ; coi điện trở các vôn kế là vô cùng lớn.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/349. (For 6th grade)
Let S be the following sum of 2006 terms
$$S = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{n+1}{2^n} + \ldots + \frac{2007}{2^{2006}}.$$
Compare S with 3.

T2/349. (For 7th grade)
Let ABC be a triangle with its two medians AD, BE meeting at M. Prove that if $\widehat{AMB} \le 90^\circ$ then $AC + BC > 3AB$.

T3/349. Prove that for every given positive integer r less than 59, there exists a unique positive integer n less than 59 such that $(2^n - r)$ is divisible by 59.

T4/349. Solve the equation
$$2x^2 - 5x + 2 = 4\sqrt{2(x^3 - 21x - 20)}.$$

T5/349. Prove that
$$4abc\left[\frac{1}{(a+b)^2c} + \frac{1}{(b+c)^2a} + \frac{1}{(c+a)^2b}\right] + $$
$$+ \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c} \ge 9$$
for arbitrary positive real numbers a, b, c.

T6/349. Let ABC be a right-angled triangle, right at B and $AB = 2BC$. Let D be the point on side AC such that $BC = CD$, let E be the point on side AB such that $AD = AE$. Prove that $AD^2 = AB.BE$.

T7/349. In plane, let be given two lines Δ_1, Δ_2 intersecting at O. A point M moves in plane so that OM is equal to a constant R and M does not lie on Δ_1, Δ_2. Let H, K be the orthogonal projections of M on Δ_1, Δ_2 respectively. Find the locus of the incenter of triangle MHK.

(Xem tiếp trang 12)

★ Bài T1/345. *Cho*

$$A=\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)...\left(1-\frac{1}{1+2+3+...+n}\right)$$

là tích của $n-1$ thừa số và $B=\frac{n+2}{n}$. Tính $\frac{A}{B}$.

Lời giải. Ta đã biết công thức tính tổng của k số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến k là

$1+2+3+...+(k-1)+k=\frac{k(k+1)}{2}$. Từ đó

$$1-\frac{1}{1+2+3+...+k}=1-\frac{2}{k(k+1)}=\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}$$

$$=\frac{k^2-k+2k-2}{k(k+1)}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}.$$

Áp dụng với $k=2, 3, ..., n$ ta được

$$A=\frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}...\frac{(n-2)(n+1)}{(n-1)n}.\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}.$$

$$=\frac{1.2. ...(n-2)(n-1)}{2.3. ...(n-1)n}.\frac{4.5...(n+1)(n+2)}{3.4...n(n+1)}=\frac{n+2}{3n}.$$

Từ đó $\frac{A}{B}=\frac{n+2}{3n}.\frac{n}{n+2}=\frac{1}{3}$. ❐

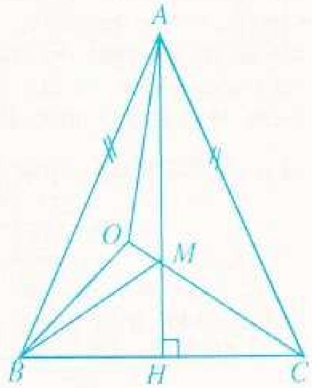
Nhận xét. Đa số các bạn giải theo cách trên. Một số bạn quy đồng mẫu số của A rồi tính riêng tử số và mẫu số nên phức tạp hơn. Các bạn sau có lời giải tốt, trình bày đầy đủ, rõ ràng:

Phú Thọ: *Nguyễn Quốc Hùng*, 6E, THCS Văn Lang, Việt Trì, *Đinh Văn Việt*, 6A2, THCS II TTr Thanh Ba; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thái Hà, Nguyễn Ngọc Thọ*, 6A, *Nguyễn Mạnh Hùng, Nguyễn Hoàng Hào, Nguyễn Việt Dũng*, 6A1, THCS Yên Lạc, *Khổng Hoàng Trang*, 6D, THCS Lập Thạch, *Mạc Thị Thu Huệ*, 6A, THCS Đồng Quế, Lập Thạch, *Lê Thanh Nga*, 6A1, THCS Trưng Vương, Mê Linh; **Hà Nội:** *Nguyễn Ngọc Khánh Linh*, 6A13, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Hà Tây:** *Nguyễn Thị Khánh Hòa*, 6A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức; **Nam Định:** *Nguyễn Quang Nhân*, 6A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định; **Hải Dương:** *Phạm Đức Thuận, Trần Thị Phương, Đặng Thị Thu Hương*, 6A2, THCS Vũ Hữu, Bình Giang; **Thanh Hóa:** *Cao Thanh Tùng, Lê Thị Thúy*, 6A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *La Thị Sáng*, 6C, THCS Tiến Lộc, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Cẩm Dương*, 6A, *Vũ Duy Hùng*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Tăng Văn Tiến*, 6A, THCS Diễn Hạnh, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Võ Thị Phương Thảo*, 6D, THCS Lam Kiều, Song Lộc, Can Lộc; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phi Hùng*, 5A, TH Trung Trạch, Bố Trạch; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thị Ngọc Giàu*, 6/5, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Triệu Phong, *Phạm Thị Nguyên*, 6/3, THCS Hiếu Giang, Đông Giang, Đông Hà; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Bảo Trân*, 6D, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Nguyễn Văn Quân*, 6A, THCS Đội I, Xuyên Lộc; **Đồng Nai:** *Nguyễn Văn Nhơn*, 6/2, THCS Nguyễn Hữu Cảnh, Cẩm Mỹ.

VIỆT HẢI

★ Bài T2/345. *Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm O ở trong tam giác sao cho $\widehat{AOB}<\widehat{AOC}$. So sánh độ dài của OB và OC.*

Lời giải.
Kẻ đường cao AH. Nếu điểm O thuộc AH thì dễ thấy $OB=OC$ và $\widehat{AOB}=\widehat{AOC}$, trái giả thiết.



Giả sử tia AO nằm trong góc BAH và CO cắt AH tại M (hình vẽ).
Nối BM. Ta có $OC=OM+MC=OM+MB>OB$. Từ đó $\widehat{OCB}<\widehat{OBC}$. Suy ra

$$\widehat{ACO}=\widehat{ACB}-\widehat{OCB}>\widehat{ABC}-\widehat{OBC}=\widehat{ABO} \qquad (1)$$

Ta có $\widehat{CAO}>\widehat{CAH}=\widehat{BAH}>\widehat{BAO}$ (2)

Từ (1), (2) có $\widehat{AOB}=180^\circ-(\widehat{ABO}+\widehat{BAO})>$ $>180^\circ-(\widehat{ACO}+\widehat{CAO})=\widehat{AOC}$. Điều này trái giả thiết.

Vậy tia AO phải nằm trong góc CAH. Lập luận tương tự như trên có $OB>OC$ và $\widehat{AOB}<\widehat{AOC}$.

Vậy $\widehat{AOB}<\widehat{AOC}\Leftrightarrow OB>OC$. Đpcm. ❐

Nhận xét. 1) Có rất đông các bạn tham gia gửi bài và đều cho lời giải đúng. Ngoài cách giải trên đây, đa số các bạn nêu lời giải khác bằng các dựng tam giác *ABE* bằng tam giác *ACO* (*E* ở khác phía với *O* đối với đường thẳng *AB*). Tuy nhiên, trong lời giải cần chứng minh thêm tia *EO* nằm giữa hai tia *EA* và *EB* bằng cách chứng tỏ rằng $\widehat{AOE} = \widehat{ACB} < \widehat{AOB}$.

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn hơn cả:
Hưng Yên: *Hoàng Thu Hường*, 7A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang; **Thái Nguyên:** *Đồng Diệu Anh*, 7A5, THCS Chu Văn An, TP Thái Nguyên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thị Thu Hương*, 7A2, THCS TTr. Thanh Ba; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Vĩ, Hoàng Tùng Nam*, 7A1, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Trung Anh*, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; **Hà Tây:** *Nguyễn Thị Khánh Hòa*, 6A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức; **Hà Nội:** *Phạm Phương Chi*, 7A, THCS Ngũ Hiệp, Thanh Trì, *Trần Phương Anh*, 7A11, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Hải Phòng:** *Lê Mạnh Thắng*, 7B9, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền; **Thanh Hóa:** *Trương Thị Dung*, 7B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Tăng Văn Tiến*, 6A, THCS Diễn Hạnh, Diễn Châu, *Bạch Thị Hương Linh*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Võ Thị Thương*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **TP. Hồ Chí Minh:** *Tô Nhã Quế Khanh*, 7A8, THCS Cầu Kiệu, Q. Phú Nhuận; **Đồng Nai:** *Đỗ Mai Anh Tú*, 7/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP Biên Hòa, *Nguyễn Thị Thùy Trang*, 7A6, THCS La Ngà, Định Quán.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T3/345. *Tìm các số x sao cho* $\dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+3}$ *là số nguyên.*

Lời giải. Kí hiệu $A=\dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+3}$ với $x \ge 0$.

Với $x = 0$ thì $A = 0$ là số nguyên.

Nếu $x > 0$: Chia cả tử số và mẫu số của biểu thức A cho $\sqrt{x}$, ta được $A=\dfrac{1}{x-3+\dfrac{3}{\sqrt{x}}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta có $x+\dfrac{3}{\sqrt{x}}=x+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

$$\ge 3.\sqrt[3]{x.\frac{3}{2\sqrt{x}}.\frac{3}{2\sqrt{x}}}=3.\sqrt[3]{\frac{9}{4}} > 3{,}9.$$

Suy ra $x+\dfrac{3}{\sqrt{x}}-3 > 0{,}9$.

Ta được $A > 0$ và

$$A=\frac{1}{x+\dfrac{3}{\sqrt{x}}-3} < \frac{1}{0{,}9} \Rightarrow 0 < A < 2.$$

Vì A là số nguyên nên $A = 1$.

Từ đó suy ra $x\sqrt{x}-4\sqrt{x}+3=0$.

Đặt $t=\sqrt{x}$ $(t > 0)$, ta được phương trình $t^3-4t+3=0$ hay $(t-1)(t^2+t-3)=0$.

Nếu $t - 1 = 0$ thì $t = 1$, tìm được $x = 1$.

Nếu $t^2+t-3=0$ thì $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Vì $t > 0$, nên $t=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ do đó $x=t^2=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$.

Vậy các giá trị x phải tìm là:

$x = 0$; $x = 1$; $x=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$. □

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn đã nhầm rằng $A=\dfrac{1}{x-3+\dfrac{3}{\sqrt{x}}}$ là số nguyên chỉ khi $x-3+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ là ước của 1 (!). Một số khác cũng đã nhầm khi cho rằng A nguyên chỉ khi $\sqrt{x}$ là số nguyên (!). Nghiệm $x=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$ của bài toán đã khẳng định các suy luận trên là sai.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:
Lạng Sơn: *Vũ Ngọc Minh*, 9A1, THCS Lê Quý Đôn, TP Lạng Sơn; **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Trung*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Bắc Giang:** *Hà Khương Duy*, 9B, THCS TT Bố Hạ, Yên Thế; **Hà Tây:** *Nguyễn Thị Thu Thuỷ*, 9A1, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, *Trần Đức Minh, Đỗ Văn Đức, Định Duy Anh, Đinh Hoàng Long*, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức; **Hải Dương:** *Phạm Ngọc Dương*, 8B, THCS Liên Hoà, Kim Thành; **Thái Bình:** *Nguyễn Quốc Trường*, 8A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải; **Thanh Hoá:** *Trịnh Quang Thanh*, 9B, THCS Hàm Rồng, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Thuý Vi, Phan Sỹ Quang*, 9A, *Nguyễn Đức Công*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Đậu Thị Lực*, 8C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Trần Văn Phúc*, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Trị:** *Lê Thị Huyền Trang*, 8/4, THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà; Võ Phi Long, 9E, THCS TT Gio Linh; **Quảng Bình:** *Đinh Thanh Hà*, 9A, THCS Nguyễn Hàm Ninh, Quảng Trạch; **Đà Nẵng:** *Hồ Quý Phương*, 9/2, THCS Trưng Vương; **Đắk Lắk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T4/345.** *Cho x, y là các số thực nằm trong đoạn* $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+x^2}$.

Lời giải. Ta có

$$P=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+x^2}=\frac{x+y+x^3+y^3}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Do $0\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$; $0\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-y\right)\ge 0,\ x^3\le\frac{\sqrt{2}}{2}x^2,\ y^3\le\frac{\sqrt{2}}{2}y^2.$$

Suy ra $x+y\le\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}xy$ (1)

$x^3+y^3\le\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2+y^2)$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$xy\le x^2y^2+\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{2\sqrt{2}}{3}xy\le\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(x^2y^2+\frac{1}{4}\right)\quad(3)$$

$$xy\le\frac{x^2+y^2}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{3}xy\le\frac{\sqrt{2}}{6}(x^2+y^2)\quad(4)$$

$$x+y+x^3+y^3\le\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(x^2y^2+\frac{1}{4}\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{6}(x^2+y^2)+\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2+y^2).$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}(1+x^2+y^2+x^2y^2)=\frac{2\sqrt{2}}{3}(1+x^2)(1+y^2).$$

Từ đó suy ra $P\le\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$P=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ khi và chỉ khi đồng thời các đẳng thức ở (1), (2), (3), (4) xảy ra, từ đó ta được $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ và đạt được khi $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. □

Nhận xét. 1) Đa số các bạn tham gia giải bài này đều làm đúng và đưa ra nhiều cách giải khác nhau nhưng dài hơn cách trên. Tuyên dương bạn *Hoàng Kiên An*, **Thanh Hóa** đã nêu và chứng minh bài toán tổng quát "Cho n số thực $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ nằm trong đoạn $[0; a]$ với $0<a\le\frac{2}{\sqrt{5}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{x_1}{x_2^2+1}+\frac{x_2}{x_3^2+1}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n^2+1}+\frac{x_n}{x_1^2+1}\text{"}$$

Kết quả $\max A=\frac{na}{a^2+1}$ khi $x_1=x_2=\ldots=x_n=a$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Ngọc Trung*, 8A1, THCS Lâm Thao, *Nguyễn Hoàng Hải*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Tây:** *Đỗ Văn Đức*, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức; **Nam Định:** *Phạm Ngọc Điệp*, 6A, THCS YênThọ, Ý Yên; **Hải Dương:** *Phạm Ngọc Dương*, 8B, THCS Liên Hòa, Kim Thành; **Thanh Hóa:** *Hoàng Kiên An*, đường Lê Văn Hưu, thôn Hợp Thành, Phường Bắc Sơn; **Quảng Trị:** *Nguyễn Văn Lương*, 9/3, THCS Trần Hưng Đạo, TX Đông Hà, *Lê Thị Huyền Trang*, 8/4, THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Nguyễn Văn Triển*, 8A, THCS Đội I, Xuyên Lộc; **Đắk Lắk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/345.** *Chứng minh rằng*

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\le\frac{bc}{a(1+bc)}+\frac{ca}{b(1+ca)}+\frac{ab}{c(1+ab)}\le\frac{a+b+c}{4}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện a + b + c = abc.

Các đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Trước tiên ta có nhận xét: Với mọi $x>0, y>0$ thì $\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (1)

Trở lại bài toán, đặt

$$A=\frac{bc}{a(1+bc)}+\frac{ca}{b(1+ca)}+\frac{ab}{c(1+ab)}.$$

Sử dụng giả thiết $a+b+c=abc$ và áp dụng nhật xét (1), ta có

$$A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\left(\frac{1}{a+abc}+\frac{1}{b+abc}+\frac{1}{c+abc}\right)$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$-\left(\frac{1}{(a+b)+(a+c)}+\frac{1}{(a+b)+(b+c)}+\frac{1}{(a+c)+(b+c)}\right)$$

$$\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$
$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$
$$\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2}.\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \qquad (2)$$

Ta chứng minh được: Với mọi x, y, z thì
$(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$ (3)

Dấu "=" trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$. Khi đó theo (3) ta có

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \ge 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=3.\frac{a+b+c}{abc}=3.$$

Do a, b, c dương nên $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\sqrt{3}$ (4)

Từ (2) và (4) suy ra $A \ge \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.

Áp dụng (1), ta cũng có

$$A=\frac{bc}{(a+b)+(a+c)}+\frac{ca}{(a+b)+(b+c)}+\frac{ab}{(a+c)+(b+c)}$$
$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ca}{a+b}+\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right)$$
$$=\frac{a+b+c}{4}.$$

Vậy $A \le \frac{a+b+c}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$. ❒

Nhận xét. Ngoài cách giải trên (của đa số các bạn) một số bạn đã sử dụng các bất đẳng thức: Chebysev, Schwarz, Cauchy hay Bunhiacovski để giải.

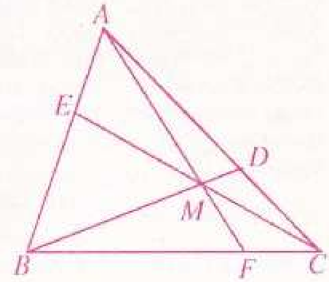
Các bạn có lời giải tốt là:

Phú Thọ: *Nguyễn Ngọc Trung*, 8A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hải Dương:** *Phạm Ngọc Dương*, 8B, THCS Liên Hòa, Kim Thành; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Cao Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Bút Sơn, *Nguyễn Đức Tài*, 9B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Trần Văn Phúc*, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Trị:** *Trần Văn Thành*, 7A, THCS Cam Hiếu, Cam Lộ.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T6/345. *Trên hai cạnh AB, AC của tam giác ABC lần lượt lấy hai điểm E, D sao cho $\frac{AE}{EB}=\frac{CD}{DA}$. Gọi giao điểm của BD và CE là M. Xác định vị trí của E, D sao cho diện tích của tam giác BMC đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó theo diện tích của tam giác ABC.*

Lời giải.
(Của nhiều bạn).



Giả sử
$\frac{AE}{EB}=\frac{CD}{DA}=\frac{1}{m}$
$(m>0)$.

Khi đó

$$\frac{S_{BMC}}{S_{AMC}}=\frac{BE}{EA}=m \qquad (1)$$
$$\frac{S_{AMC}}{S_{DMC}}=\frac{AC}{CD}=m+1 \qquad (2)$$

Từ $S_{BCD}=S_{BMC}+S_{DMC}$ và (1), (2) suy ra
$$\frac{S_{BCD}}{S_{BMC}}=1+\frac{1}{m(m+1)}.$$

Mặt khác $\frac{S_{BCD}}{S_{ABC}}=\frac{CD}{AC}=\frac{1}{m+1}$.

Do đó $\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}}\cdot\frac{S_{BCD}}{S_{BMC}}=m+1+\frac{1}{m}\ge 3$.

Vậy $S_{BMC}\le\frac{S_{ABC}}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m=1$.

Kết luận. Giá trị lớn nhất của diện tích tam giác BMC là $\frac{S_{ABC}}{3}$ đạt được khi và chỉ khi E, D lần lượt là trung điểm của AB và AC. ❒

Nhận xét. Một số bạn sử dụng *định lí Van–Oben*: $\frac{AM}{MF}=\frac{AE}{EB}+\frac{AD}{DC}$ cũng đi đến kết quả của bài toán trên.

Sau đây là những bạn có lời giải gọn hơn cả:
Bắc Ninh: *Trần Văn Luận*, 9A, THCS Yên Phong, Yên Phong, *Nguyễn Hồng Vân*, 7D, THCS Tam Sơn, Từ Sơn; **Bắc Giang:** *Nguyễn Quang Chức, Hà Khương Duy*, 9B, THCS TTr. Bố Hạ, Yên Thế; **Vĩnh Phúc:** *Khổng Hoàng Thao, Mạc Thế Trường*, 9A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; **Phú Thọ:** *Tạ Đức Thành*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hưng Yên:** *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ, Tiên Lữ; **Hà Tây:** *Đặng Dũng Hà, Trần Nhật Tân*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Hải Dương:** *Trần Văn Độ, Phạm Văn Rộng*, 8A1, THCS Vũ Hữu, Bình Giang; **Nam Định:** *Trần Thu Thủy*, 8A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định; **Thanh Hóa:** *Hoàng Kiên An*, thôn Hợp Thành, Phường Bắc Sơn, Sầm Sơn; **Nghệ An:** *Trần Văn Phúc*, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Anh Tú*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Đức Tâm*, 9/8, THCS Hòa Khánh, TP. Đà Nẵng; **Quảng Ngãi:** *Vũ Nguyễn Hoàng Yến*, 9A, THCS Nghĩa Phương, Từ Nghĩa; **Đắk Lắk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Lâm Đồng:** *Đinh Thành Nhân*, 9A7, THCS QuangTrung, TP Đà lạt; **Kiên Giang:** *Võ Đức Huy*, 9/4, THCS Lê Quý Đôn, TP. Rạch Giá.

HỒ QUANG VINH

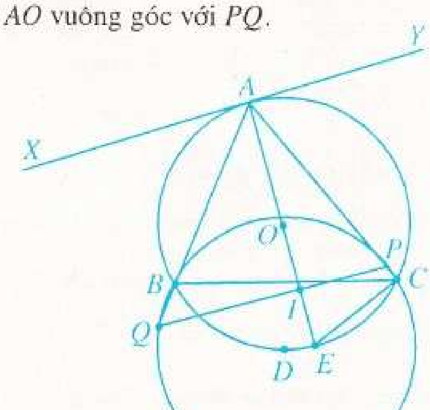
★Bài T7/345. *Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Tia phân giác của góc BAC cắt đường tròn (O) tại A và D. Đường tròn tâm D bán kính DB cắt đường thẳng AB tại B và Q, cắt đường thẳng AC tại C và P. Chứng minh rằng AO vuông góc với PQ.*

Lời giải. *Cách 1:* Gọi I và E lần lượt là giao của AO với PQ và với đường tròn tâm O.

Ta có $\widehat{QBC} = \widehat{CPQ}$. Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{APQ}$. Mà $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$ nên $\widehat{APQ}=\widehat{AEC}$.

Do $\widehat{AEC} + \widehat{EAC} = 90^\circ$ nên $\widehat{AIP} = 90^\circ$.

Vậy AO vuông góc với PQ.



Cách 2: Qua A kẻ tiếp tuyến XY với đường tròn (O). Ta có $\widehat{XAB} = \widehat{ACB}$.

Mặt khác $\widehat{ACB} = \widehat{BQP}$. Từ đó có $\widehat{XAB} = \widehat{BQP}$. (Trong trường hợp $\widehat{ACB} + \widehat{BQP} = 180^\circ$ thì $\widehat{XAQ} = \widehat{AQP}$, bạn đọc tự vẽ hình).

Do đó $PQ \parallel XY$. Mà $AO \perp XY$ nên AO vuông góc với PQ.

Trường hợp đặc biệt nếu $AB = AC$ thì kết luận của bài toán hiển nhiên đúng. ❐

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn:
Yên Bái: *Hoàng Tuấn Anh*, 9H, THCS Lê Hồng Phong; **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Trung*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Hà, Đỗ Thị Huệ 9A1, THCS* Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Xuân Vương*, 9A, THCS Thuận Thành, *Nguyễn Hồng Vân*, 7D, THCS Tam Sơn, Từ Sơn; **Nam Định:** *Trần Thị Hồng Vân*, 9D, Nguyễn Hiền, Nam Trực, *Phạm Thị Điệp*, THCS Yên Phụ, Ý Yên; **Thanh Hóa:** *Lê Bá Công Nguyên, 9B*, THCS Nhữ Bá Sĩ; **Nghệ An:** *Nguyễn Anh Hoàng*, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; **Hà Tĩnh:** Tô Châu, 9B, THCS Kì Tân, Kì Anh; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, **7/7**, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Đắk Lắk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, KRông Búk; **Quảng Ngãi**: *Lê Tiến Hảo*, 9C, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Long An:** *Phạm Thị Huyền Trân, THCS TT* Cần Đước 1.

VŨ KIM THỦY

★Bài T8/345. *Hãy xác định các tập hợp con khác rỗng A, B, C của* $\mathbb{N}$ *thỏa mãn các điều kiện sau:*
i) $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$;
ii) $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$;
iii) Với mọi $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ *thì* $a + c \in A$, $b + c \in B$ *và* $a + b \in C$.

Lời giải
• Xét số 0. Nếu $0 \in A$ thì với $b \in B$ ta có $0 + b = b \in C$ mâu thuẫn. Vậy $0 \notin A$. Tương tự $0 \notin B$. Thành thử $0 \in C$.

• Xét số 1. Nếu $1 \in C$ thì với $a \in A$, $b \in B$ ta có $a + k \in A$ và $b + k \in B$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Giả sử $b > a$. Khi đó với $k = b - a$ ta có
$a + k = a + b - a = b \in A$. Mâu thuẫn.
Vậy $1 \notin C$ thành thử $1 \in A$ hoặc $1 \in B$.

i) Giả sử $1 \in A$. Xét số 2. Nếu $2 \in C$ thì $1 + 2 = 3 \in A \Rightarrow 3 + 2 = 5 \in A$... tổng quát $2k + 1 \in A$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Xét $b \in B$. Do $A \cap B = \varnothing$ nên $B = 2e \Rightarrow 2e + 1 \in C$. Mâu thuẫn vì $A \cap C = \varnothing$. Vậy $2 \notin C$. Nếu $2 \in A$ thì với $b \in B$ ta có $b + 1 \in C$ và $b + 2 \in C$. Nhưng vì $b + 1 \in C$ và $1 \in A$ nên $b + 2 \in A$ mâu thuẫn. Thành thử $2 \notin A$. Suy ra $2 \in B$. Tóm lại ta có $0 \in C$, $1 \in A$ và $2 \in B$.

Từ đó bằng quy nạp dễ thấy

$A \subset \{3k + 1, k \in \mathbb{N}\}$, $B \subset \{3k + 2, k \in \mathbb{N}\}$ và

$C \subset \{3k, k \in \mathbb{N}\}$.

Nhưng vì mọi số $n \in \mathbb{N}$ có biểu diễn duy nhất

$n = 3k + r$ ($r = 0, 1, 2$) nên $A = \{3k + 1, k \in \mathbb{N}\{$

$B = \{3k + 2, k \in \mathbb{N}\}$ và $C = \{3k, k \in \mathbb{N}\}$.

ii) Nếu $1 \in B$ thì lí luận như trên (thay đổi vai trò giữa A và B) ta được

$A = \{3k + 2, k + \mathbb{N}\}$, $B = \{3k + 1, k \in \mathbb{N}\}$

và $C = \{3k, k \in \mathbb{N}\}$. ❒

Nhận xét. Bài này được khá đông các bạn tham gia giải và các bạn đều có lời giải đúng. Các bạn có lời giải tốt là: **Phú Thọ:** *Khổng Ngọc Trọng*, 11T, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Hà Nội:** *Đoàn Trí Dũng*, 11A1, ĐHSP Hà Nội, *Phạm Duy Tùng*, 10A chuyên, ĐHKHTN Hà Nội; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Minh Hằng*, 10A, THPT Yên Phong; **Thanh Hóa:** *Đào Đức Huấn*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Thanh*, 10H, THPT Đô Lương; **Quảng Bình:** *Đặng Ngọc Thanh*, 11 THPT chuyên Quảng Bình; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Thị Như Nguyệt*, 11T chuyên Thăng Long, TP Đà Lạt; **Đăk Lăk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Phú Yên:** *Huỳnh Kim Triển*, 11 Toán, THPT chuyên Phú Yên.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T9/345. *Cho các số thực $x_1, x_2, ..., x_{2007}$ thuộc đoạn $[-1; 1]$ và có tổng các lập phương của chúng bằng 0. Chứng minh rằng*

$$|x_1 + x_2 + ... + x_{2007}| \le \frac{2007}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Nhận xét

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x + 1 &= (4x^3 + 4x^2) - (4x^2 + 4x) + (x + 1)\\ &= (x + 1)(4x^2 - 4x + 1)\\ &= (x + 1)(2x - 1)^2;\\ 4x^3 - 3x - 1 &= (4x^3 - 4x^2) + (4x^2 - 4x) + (x - 1)\\ &= (x - 1)(4x^2 + 4x + 1)\\ &= (x - 1)(2x + 1)^2. \qquad (1)\end{aligned}$$

Từ hai đẳng thức trên ta suy ra:

nếu $-1 \le x \le 1$ thì $-1 \le 4x^3 - 3x \le 1$ (2)

Áp dụng vào bài toán ta có $-1 \le 4x_i^3 - 3x_i \le 1$ với mọi $i = 1, 2, 3, ..., 2007$.

Cộng theo từng vế các BĐT trên ta nhận được

$-2007 \le -3(x_1 + x_2 + ... + x_{2007}) \le 2007$

(do $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{2007}^3 = 0$).

Do đó $|x_1 + x_2 + ... + x_{2007}| \le \dfrac{2007}{3} = 669$.

Cũng từ (1) ta có $x_1 + x_2 + ... + x_{2007} = -669$ khi và chỉ khi $x_i \in \left\{-\dfrac{1}{2}; 1\right\}$ với mọi $i = 1, 2, ..., 2007$.

Kết hợp với $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{2007}^3 = 0$, suy ra $x_1 + x_2 + ... + x_{2007} = -669$ khi và chỉ khi trong các số $x_1, x_2, ..., x_{2007}$ có 223 số bằng 1 và còn lại 1784 số bằng $-\dfrac{1}{2}$.

Tương tự $x_1 + x_2 + ... + x_{2007} = 669$ khi và chỉ khi trong các số $x_1, x_2, ..., x_{2007}$ có 223 số bằng -1 và còn lại 1784 số bằng $\dfrac{1}{2}$. ❒

Nhận xét. Bất đẳng thức (2) có nguồn gốc từ lượng giác: nếu $\cos\alpha = x$ thì $\cos 3\alpha = 4x^3 - 3x$. Hầu hết các bạn học sinh THPT đều giải theo cách lượng giác trên. Các bạn học sinh THCS sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Tạ Đức Hải, Nguyễn Hoàng Hải*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Xuân Vương*, 9A, THCS huyện Thuận Thành; **Hà Tây:** *Trần Nhật Tân*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Vĩnh Phúc:** *Lê Duy Dũng*, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Nam Định:** *Phạm Phi Điệp*, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Minh Anh*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, *Trịnh Quang Thanh*, 9B, THCS Hàm Rồng; **Nghệ An:** *Nguyễn Thúy Vy, Phan Sỹ Quang*, 9A, *Nguyễn Đức Công*, 9D THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Luật*, 9B, THCS Sơn Hồng, Hương Sơn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T10/345.** *Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện sau:*
i) $f(f(m)-n) = f(m^2) + f(n) - 2n.f(m)$ với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$;
ii) $f(1) > 0$.

Lời giải. Trong điều kiện i) thay $m = 1$, ta có

$$f(f(1)-n) = f(1) + f(n) - 2nf(1) \quad (1)$$

Tiếp theo, trong (1) ta thay n bởi $f(1) - n$, ta có

$$f(n) = f(1) + f(f(1)-n) - 2(f(1)-n)f(1) \quad (2)$$

Cộng theo từng vế (1) và (2), ta thu được

$2f(1) - 2[f(1)]^2 = 0$ hay $f(1) = 1$ (do $f(1) > 0$).

Vậy (2) có dạng

$$f(1-n) = f(n) - 2n + 1 \quad (3)$$

Từ (3), với $n = 1$, suy ra $f(0) = 0$. Thế vào điều kiện i), với $m = 0$ ta thu được

$$f(-n) = f(n), \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Khi đó (3) có dạng

$$f(n) - f(n-1) = 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra $f(n) - f(0) =$
$= (2n-1) + (2(n-1)-1) + ... + (2.1-1)$
hay $f(n) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Từ (4) ta thu được $f(n) = n^2$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

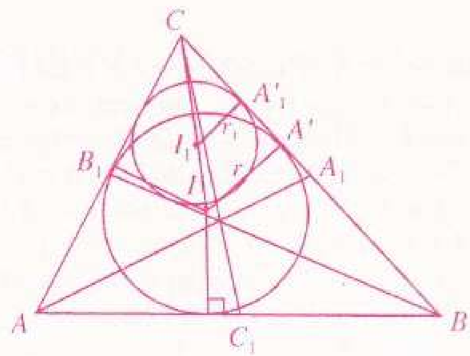
Thử lại, $f(n) = n^2$ thỏa mãn các điều kiện bài ra. ❐

Nhận xét. Nhiều bạn giải được và đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T11/345.** *Tam giác ABC có các đường trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1. Chứng minh rằng nếu bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác BCB_1, CAC_1, ABA_1 bằng nhau thì tam giác ABC là tam giác đều.*

Lời giải 1. Ta đưa vào các kí hiệu sau: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; $AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$, $CC_1 = m_c$; I, r và I_1, r_1 tương ứng là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và BCB_1; $2p$ và $2p_1$ tương ứng là chu vi các tam giác ABC và BCB_1.



Gọi A', A'_1 là tiếp điểm trên cạnh BC của hai đường tròn (I, r) và (I_1, r_1); thế thì:

$IA' = r$, $I_1A'_1 = r_1$; $CA' = p - c$, $CA'_1 = p_1 - m_b$ và ta có

$$\frac{CA'_1}{CA'} = \frac{I_1A'_1}{IA'} \text{ hay là } \frac{a+\frac{b}{2}-m_b}{2(p-c)} = \frac{r_1}{r} (= \lambda).$$

Theo giả thiết và chứng minh tương tự (bằng cách hoán vị vòng quanh) ta có

$$\frac{a+\frac{b}{2}-m_b}{p-c} = \frac{b+\frac{c}{2}-m_c}{p-a} = \frac{c+\frac{a}{2}-m_a}{p-b} = \lambda\left(=\frac{r_1}{r}\right) \text{(i)}$$

Mặt khác, theo giả thiết các tam giác BCB_1, CAC_1 và ABA_1 có diện tích bằng nhau và bán kính đường tròn nội tiếp bằng nhau nên chúng có chu vi bằng nhau. Bởi vậy, ta có các đẳng thức sau

$$a+\frac{b}{2}+m_b = b+\frac{c}{2}+m_c = c+\frac{a}{2}+m_a = v(=2p_1) \text{ (ii)}$$

Từ các hệ đẳng thức (i) và (ii) ta được

$$\begin{cases} v+(p-c)\lambda = 2a+b & (1) \\ v+(p-a)\lambda = 2b+c & (2) \\ v+(p-b)\lambda = 2c+a & (3) \end{cases}$$

Sau đó, từ các cặp đẳng thức (2), (3) và (3), (1) ta được hệ thức

$$\frac{c+a-2b}{a-b} = \frac{a+b-2c}{b-c} (= \lambda) \quad \text{(iii)}$$

Cuối cùng, từ (iii) ta được

$$\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0 \quad \text{(iv)}$$

Suy ra ABC là một tam giác đều, đpcm. ❐

Lời giải 2. (Dựa theo *Võ Thành Lợi*, 11T, THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu, TP Long Xuyên, **An Giang**). Sử dụng kí hiệu như đã được dùng trong lời giải 1. Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau đây.

Bổ đề. Trong một tam giác, ứng với cạnh lớn hơn là trung tuyến nhỏ hơn, và ngược lại. Cụ thể là $a \ge b \ge c \Leftrightarrow m_a \le m_b \le m_c$ (v)

Thật vậy ta có

$4m_a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2$; $4m_b^2 = 2(c^2+a^2) - b^2$

Từ đó $4(m_a^2 - m_b^2) = 3(b^2 - a^2)$ (vi)

Từ (vi) suy ra: $a^2 \ge b^2 \Leftrightarrow m_a^2 \le m_b^2$ (vii)

Từ (vii) ta thu được các BĐT (v) và bổ đề đã được chứng minh.

Trở lại bài toán, ta cũng thiết lập được các đẳng thức (ii) như ở lời giải 1, biểu thị chu vi ba tam giác BCB_1, CAC_1 và ABA_1 bằng nhau.

Bây giờ để áp dụng bổ đề nêu trên, ta viết lại (ii) dưới dạng sau

$$\begin{cases} 2(m_b - m_c) = b + c - 2a & (1') \\ 2(m_c - m_a) = c + a - 2b & (2') \\ 2(m_a - m_b) = a + b - 2c & (3') \end{cases}$$

Từ hệ ba đẳng thức (1'), (2') (3') ta chứng minh rằng $a = b = c$ bằng phương pháp phản chứng.

Thật vậy, nếu $m_b \ge m_c$ thì $c \ge b$ (theo bổ đề) và từ (1') ta được $2c \ge b + c \ge 2a$, hay $c \ge a$; suy ra $m_c \le m_a$. Từ (2') ta được: $c + a \le 2b$ và do đó: $2a \le c + a \le 2b$. Vậy $a \le b$; suy ra $m_a \ge m_b$ hay là $m_a - m_b \ge 0$. Do đó, từ (3') suy ra $a + b \ge 2c$. Do $a \le b$ nên ta lại có: $2b \ge a + b \ge 2c$. Vậy $b \ge c$, nên lại suy ra $m_b \le m_c$. Như vậy là, xuất phát từ giả thiết $m_b \ge m_c$ rồi từ (1'), (2'), (3') và nhờ bổ đề ta lại suy ra: $m_b \le m_c$ và ngược lại tức là từ $c \ge b$ lại suy ra $b \ge c$, và ngược lại. Điều đó chứng tỏ rằng chỉ có thể là $b = c$, đồng thời $m_b = m_c$. Và do đó: $b + c = 2b = 2c$, thay vào (1') ta được $a = b = c$ và ABC là một tam giác đều. đpcm. ❐

Nhận xét. 1) Đối chiếu hai lời giải trên đây ta thấy rằng: Về cơ bản, lời giải 1 chỉ đòi hỏi vận dụng kiến thức Hình học 9 và cho *chứng minh trực tiếp* đồng thời lời giải cũng gọn gàng. Lời giải 2 đòi hỏi sử dụng công thức đường trung tuyến (Hình học 10) và thiết lập một tính chất được phát biểu trong bổ đề nói trên. Lời giải cũng gọn gàng, nhưng sử dụng phương pháp phản chứng, một trong những phương pháp *chứng minh gián tiếp*.

2) Hầu hết các bạn đều sử dụng công thức đường trung tuyến hoặc sử dụng bổ đề dưới dạng một nhận xét, không chứng minh. Tuy nhiên, lập luận của đa số các bạn về chứng minh phản chứng hầu hết lại có tính chất cảm tính, thiếu chặt chẽ và không đầy đủ.

3) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt:
Hưng Yên: *Phan Tiến Dũng*, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** *Tường Thế Nghĩa*, 10T1, THPT Nguyễn Trãi, TP Hải Dương; **Nghệ An:** *Đậu Lệ Thủy*, 11A, THPT Quỳnh Lưu IV, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Hạnh Dung*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Võ Thị Chung*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Tiến Cảnh*, 11 Toán, THPT Quốc học Huế; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Như Đức Trung*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Đà Nẵng; **Long Xuyên:** *Nguyễn Quốc Khánh*, 10A3, THPT Long Xuyên.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

★**Bài T12/345.** *Cho mặt cầu tâm O bán kính R. Một hình chóp S.ABC chuyển động sao cho các cạnh SA, SB, SC luôn tiếp xúc với mặt cầu trên theo thứ tự tại A, B, C; hơn nữa $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Tìm tập hợp đỉnh S.*

Lời giải. *Phần thuận:* Giả sử S thỏa mãn điều kiện đề bài. Ta có, ΔASB vuông cân tại S; ΔSBC đều; ΔCSA cân tại S và $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Suy ra $AB = \sqrt{2}SA$; $BC = SA$; $AC = \sqrt{3}SA$

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B (1)

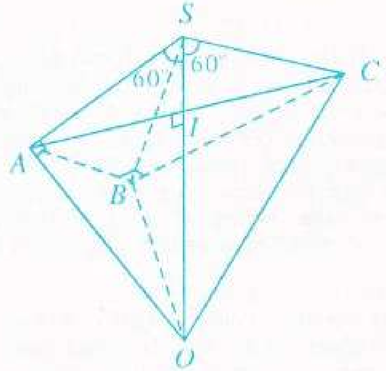
Gọi I là trung điểm của AC.

Từ (1) suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC (2)

Mặt khác dễ thấy:

$\begin{cases} SA = SB = SC & \text{(cùng tiếp xúc với đường tròn } (O; R)) \\ OA = OB = OC & \text{(cùng bằng } R). \end{cases}$

Từ đó và (2) suy ra SI và OI đều vuông góc với mp (ABC) nên S, I, O thẳng hàng.



Vì SO đi qua I nên: $\widehat{ASO} = \widehat{ASI} = 60°$ (do ΔCSA cân tại S và $\widehat{ASC} = 120°$)

$\Rightarrow SO = \dfrac{AO}{\sin 60°} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ (vì $\widehat{SAO} = 90°$).

$\Rightarrow S$ thuộc mặt cầu $\left(O; \dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)$.

Phần đảo. Giả sử S thuộc mặt cầu $\left(O; \dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)$. Gọi SA là tiếp tuyến kẻ từ S tới mặt cầu $(O; R)$. (A là tiếp điểm). Gọi (P) là mặt phẳng qua A, vuông góc với SO và giao với SO tại I. Giao của (P) với mặt cầu $(O; R)$ là đường tròn (ω) và I là tâm của (ω). Gọi C là điểm đối xứng của A qua I ($C \in (\omega)$). Vì $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < 1$ nên trên (ω) tồn tại đúng hai điểm sao cho khoảng cách từ chúng tới C bằng $\dfrac{AC}{\sqrt{3}}$. Lấy một trong hai điểm đó và kí hiệu nó là B thì $BC = \dfrac{AC}{\sqrt{3}}$ (3)

+ Ta có : $\begin{cases} SI \perp (P) \\ IB = IC = IA \end{cases} \Rightarrow SB = SC = SA$

$\Rightarrow SB, SC$ tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ (4) (vì SA tiếp xúc với $(O; R)$)

+ Trong ΔSAO, ta có: $\widehat{SAO} = 90°$ và $AI \perp SO$. Vậy $AI.SO = AS.AO$ $(= 2S_{SAO})$

$\Rightarrow \sin\widehat{ASO} = \dfrac{AI}{AS} = \dfrac{AO}{SO} = \dfrac{R}{\frac{2R}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{ASO} = 60° \Rightarrow \widehat{ASC} = 120°$ (5)

(vì ΔCSA cân tại S và SO đi qua trung điểm I của AC).

+ Trong ΔSAI, ta có

$SA = \dfrac{IA}{\sin 60°} = \dfrac{1}{2}\dfrac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{AC}{\sqrt{3}}$.

Vậy: $SB = SC = \dfrac{AC}{\sqrt{3}} = BC$ (theo (3)) nên ΔBSC là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{BSC} = 60°$ (6)

+ Trong tam giác vuông ABC ($\widehat{ABC} = 90°$), ta có

$AB^2 = AC^2 - BC^2$

$= AC^2 - \dfrac{AC^2}{3} = \dfrac{2AC^2}{3}$

$\Rightarrow AB = \sqrt{2}\dfrac{AC}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}SB = \sqrt{2}SC$

$\Rightarrow AB^2 = SB^2 + SC^2 \Rightarrow \Delta ASB$ vuông tại S

$\Rightarrow \widehat{ASB} = 90°$ (7)

Từ (4), (5), (6), (7) suy ra phần đảo được chứng minh.

Kết luận. Tập hợp các điểm S thỏa mãn điều kiện đề bài là mặt cầu $\left(O; \dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)$.

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó nhưng trình bày lời giải của nó một cách sáng sủa là vấn đề không đơn giản.

2) Rất nhiều bạn tham gia giải và đa số các lời giải đều đúng nhưng không hoàn chỉnh (không làm phần đảo hoặc làm phần đảo không chính xác).

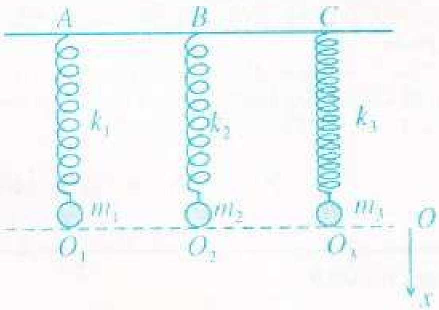
3) Khi làm bài toán hình học không gian không nhất thiết phải vẽ đầy đủ mọi yếu tố có trong đề bài vào hình biểu diễn. Cụ thể, trong bài toán này, không cần vẽ hình cầu $(O; R)$. Tuy nhiên, có những chi tiết cần được vẽ chính xác, cụ thể trong bài toán này, đẳng thức $\dfrac{IS}{IO} = \dfrac{1}{3}$ cần được thể hiện chính xác.

4) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt:

Điện Biên: *Đồng Quang Tiến*, 11B1, THPT Lê Quý Đôn; **Hải Dương:** *Đào Ngọc Hưng*, 11T, THPT Nguyễn Trãi, *Nguyễn Ngọc Uyển*, 11A3, THPT Phúc Thành, Kinh Môn; **Nghệ An:** *Đặng Công Vinh*, 11I, THPT Nghĩa Đàn, *Hoàng Viết Song*, 11A1, THPT Yên Thành, *Đậu Lệ Thủy*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu, *Nguyễn Đức Phương*, 11A1, THPT Nghi Lộc I; **Quảng Trị:** *Võ Thị Chung*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Lê Quang Huy*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Vũng Tàu, *Dương Văn An*, 10A1, THPT Châu Thành.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài L1/345. *Ba vật nhỏ có khối lượng m_1, m_2, m_3 (với $m_1 = m_2 = m = \dfrac{m_3}{2} = 0{,}1$ (kg) được treo vào ba lò xo nhẹ có độ cứng tương ứng k_1, k_2, k_3 (với $k_1 = k_2 = k = 40$ (N/m). Ở vị trí cân bằng các vật nằm trên một đường thẳng nằm ngang như hình vẽ.*



Biết $O_1O_2 = O_2O_3 = 2$ (cm). Tại thời điểm $t = 0$ người ta truyền cho vật m_1 vận tốc $v_1 = 60$ (cm/s) hướng thẳng đứng lên trên, đồng thời kéo vật m_2 theo phương thẳng đứng xuống dưới cách vị trí cân bằng đoạn 2 (cm) rồi thả nhẹ để hai vật dao động điều hòa. Sau khi hai vật dao động được $\dfrac{1}{4}$ chu kì thì vật m_3 mới được kích thích dao động.

a) Hỏi phải kích thích vật m_3 như thế nào để trong suốt quá trình dao động ba vật luôn luôn thẳng hàng? Tính k_3.

b) Tính khoảng cách cực đại giữa các vật m_1 và m_3 trong quá trình dao động.

Lời giải. a) Chọn trục tọa độ Ox thẳng đứng, gốc O ở vị trí cân bằng của ba vật, chiều dương hướng xuống dưới. Phương trình dao động của m_1 và của m_2 có dạng: $x_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ và $x_2 = A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$, với $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 20$(rad/s).

Theo đề bài, lúc $t = 0$ (s), $x_1 = 0$ (cm), $v_1 = 60$ (cm/s) và $x_2 = 2$ (cm), $v_2 = 0$ (cm/s).

Từ đó suy ra $x_1 = 3\sin(20t + \pi)$ (cm) và $x_2 = 2\sin\left(20t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm). Kí hiệu x_3 là tọa độ của vật m_3 ở thời điểm t với $t \geq \dfrac{T}{4} = \dfrac{\pi}{2\omega} = \dfrac{\pi}{40}$ (s).

Vì $O_1O_2 = O_2O_3$ nên để ba vật luôn thẳng hàng thì m_2 sẽ phải nằm cách đều m_1 và m_3, nghĩa là phải có $x_2 = \dfrac{x_1 + x_3}{2}$ hay $x_3 = 2x_2 - x_1$. Áp dụng phương pháp giản đồ vectơ tìm được

$$x_3 = 5\sin(20t + \varphi) \text{ (cm)} \qquad (1)$$

với $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{4}{3}$. Như vậy $\omega_3 = 20$ (rad/s) $= \sqrt{\dfrac{k_3}{m_3}}$, suy ra $k_3 = 2k = 80$ (N/m).

Từ (1) ta thấy tại thời điểm $t = \dfrac{\pi}{40}$ (s) thì

$x_3 = 5\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \varphi\right) = 5\cos\varphi = 3$ (cm), và

$v_3 = 5\omega\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \varphi\right) \Rightarrow v_3 = -80$ (cm/s).

Như vậy phải kích thích m_3 như sau: đưa m_3 đi xuống dưới vị trí cân bằng một đoạn 3cm, rồi truyền cho nó vận tốc $|v_3| = 80$ (cm/s) hướng thẳng đứng lên trên.

b) Khoảng cách giữa m_1 và m_3 tại thời điểm t $\left(\text{với } t \geq \dfrac{T}{4}\right)$ là

$$d = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + 4^2} = \sqrt{52\sin^2(\omega t + \varphi) + 4^2} \text{ (cm)}$$

(theo giản đồ vectơ).

Từ đó $d_{\max} = \sqrt{52 + 16} \approx 8{,}2$ (cm).

Nhận xét. 1) Các bạn sau có lời giải gọn: **Vĩnh Phúc:** *Phùng Đình Phúc*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** *Đặng Tuấn Thành*, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Giang; **Hưng Yên:** *Trần Anh Vũ, Phạm Đức Linh*, 10 Lí, *Nguyễn Thị Kim Loan*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** *Ngô Huy Cừ*, 11Lí, THPT chuyên Hùng Vương,Việt Trì, *Phạm Đăng Hải*, THPT Hùng Vương, TX Phú Thọ; **Thanh Hóa:** *Hà Việt Anh*, 11F, *Trịnh Văn Vương*, 11T, THPT Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Khánh Hòa:** *Lê Thế Huy*, 11 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Quảng Ngãi:** *Bùi Trung Hiếu*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Nam Định:** *Phạm Cao Kỳ*, 12C5, THPT Hải Hậu A.

MAI ANH

★**Bài L2/345.** *Một quả cầu lớn dẫn điện có bán kính R = 0,2 (m), được tích điện đến điện thế V = 1000(V). Một quả cầu nhỏ dẫn điện có bán kính r = 0,1 (cm), chưa tích điện, có gắn tay cầm cách điện. Cho hai quả cầu tiếp xúc nhau rồi đưa quả cầu nhỏ ra xa và cho phóng điện. Hỏi cần làm như vậy bao nhiêu lần để điện thế quả cầu lớn còn lại V ' = 905 (V) ?*

Lời giải. Khi cho hai quả cầu tiếp xúc nhau, điện tích được phân bố lại nhanh chóng đến khi hai quả cầu có cùng điện thế. Gọi V_1 là điện thế của quả cầu lớn (cũng là điện thế của quả cầu nhỏ) sau lần tiếp xúc thứ nhất. Điện tích ban đầu của quả cầu lớn là $Q = \dfrac{VR}{k}$.

Sau lần tiếp xúc thứ nhất, điện tích quả cầu lớn là $Q_1 = \dfrac{V_1R}{k}$, điện tích quả cầu nhỏ là $Q_2 = \dfrac{V_1r}{k}$.

Vì điện tích được bảo toàn nên : $Q = Q_1 + Q_2$, hay $\dfrac{VR}{k} = \dfrac{V_1R}{k} + \dfrac{V_1r}{k}$. Suy ra $V_1 = \dfrac{R}{R+r}V$.

Tương tự, sau lần tiếp xúc thứ hai, điện thế quả cầu lớn là : $V_2 = \dfrac{R}{R+r}V_1 = \left(\dfrac{R}{R+r}\right)^2 V$.

Sau lần tiếp xúc thứ n, điện thế quả cầu lớn là :

$$V_n = \left(\frac{R}{R+r}\right)^n V.$$

Từ đây ta có : $\dfrac{V_n}{V} = \left(\dfrac{R}{R+r}\right)^n$,

suy ra $$n = \log_{\frac{R}{R+r}}\left(\frac{V_n}{V}\right).$$

Khi thay $V_n = V' = 905$ (V), $V = 1000$ (V), $R = 0{,}2$ (m), $r = 0{,}1$ (cm) $= 0{,}001$ (m) thì $n \approx 20$ lần.

Khi cho hai quả cầu tiếp xúc 20 lần, thì điện thế quả cầu lớn còn lại là $V' = 905$ (V).

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt và ngắn gọn :

Phú Thọ : *Nguyễn Thế Anh*, 11A1, THPT Phong Châu, *Ngô Huy Cừ*, 11 Lí, THPT chuyên Hùng Vương ; **Thái Nguyên** : *Nguyễn Hồng Phong*, Toán 11, *Trịnh Quang Hưng*, 12A, THPT chuyên Thái Nguyên ; **Thanh Hoá** : *Trịnh Văn Vương*, 11T, *Lê Bá Ngọc*, 11F, *Lê Bá Sơn*, 11F, THPT Lam Sơn ; **Bà Rịa – Vũng Tàu** : *Nguyễn Phúc Hưng*, 11A1, THPT Võ Thị Sáu, huyện Đất Đỏ ; **Quảng Ngãi** : *Nguyễn Thị Kim Khuyên*, 11 Lí, *Bùi Trung Hiếu*, 11 Lí, THPT Lê Khiết ; **Hải Phòng** : *Võ Sĩ Cường*, 10 Lí, THPT Trần Phú ; **Nghệ An** : *Nguyễn Lê Thương*, 10A3, *Trần Văn Thắng*, 10A3, *Nguyễn Tất Nghĩa*, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Đậu Lê Thuỷ*, 11A, THPT Quỳnh Lưu IV, *Phan Anh Tú*, 11I, THPT Nghĩa Đàn ; **Bắc Ninh** : *Nguyễn Thành Linh*, 10 Lí, *Nguyễn Văn Bảo*, 10 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Vĩnh Phúc** : *Kim Đức Toàn*, 12H, THPT Trần Phú, Vĩnh Yên, *Vũ Ngọc Quang*, 12A3, *Nguyễn Quang Giang*, 10A1, *Phùng Đình Phúc*, 11A1, *Nguyễn Minh Khương*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Đọc lại cho đúng

- Trong số 347 trang 6 dòng 2↑ đã in là Nguyễn Trọng Hiếu (THPT Thoại Ngọc Hầu, An Giang), xin sửa lại là Nguyễn Trọng Hiếu (THPT Chu Văn An, Phú Tân, An Giang).
- Trong lời giải bài T4/343 THTT số 347 (5.2006) trang 19 dòng 7↓ đã in là
  $\Leftrightarrow 91 - 3\sqrt[3]{(x+86)(x-5)} = 1$, xin sửa lại là
  $\Rightarrow 91 - 3\sqrt[3]{(x+86)(x-3)} = 1$,
  Cuối dòng 12↓, bổ sung thêm "Thử lại ta thấy $x = 130$ và $x = -211$ đều thỏa mãn phương trình đã cho."
- Trong đề bài T12/348 THTT số 348 (6.2006) đã in là $\dfrac{4+\sqrt{6}}{r}$, xin sửa lại là $\dfrac{4+2\sqrt{6}}{r}$.

Các tác giả thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

XẾP CHỮ MÙA WORLD CUP

Mỗi mảnh bìa ghi số có phía sau là một chữ cái. Biết rằng số giống nhau thì chữ giống nhau và số khác nhau thì chữ sẽ khác nhau.

Nam đố Hà đoán từ các mảnh bìa ấy tên ba thành phố của Việt Nam lần đầu tổ chức Giải bóng đá Hòa Bình năm 1955. Biết rằng tên mỗi thành phố đều có một chữ *A*, đều có một chữ *I*, tên mỗi thành phố đều có chữ *H*, đều có chữ *N*.

3	1	5	6	4	3	1	4	9	3	6	5	7	5	1	8	2	4	5	3

Bạn có thể giúp Hà được không ?

Năm phần quà dành cho năm bạn có lời giải đúng và gửi sớm nhất (theo dấu bưu điện)

VŨ ĐÔ QUAN

Giải đáp: ĐƯỜNG CHUYỂN HÀNG

(Tiếp bìa 4)

... hai đường đi riêng từ hai hướng nhập lại thành một đường đi chung. Khi xét đường đi chung ấy, dù là đoạn đường chính hay đoạn đường nhánh, thì theo quy tắc chuyển hàng, đoạn đường liền trước đó đều xác định duy nhất, nên điều giả sử trên là sai. Như vậy nếu hàng xuất phát từ hai cửa trong khác nhau thì đến hai cửa ngoài khác nhau.

HOAN NGHÊNH CÁC BẠN SAU ĐÂY CÓ LỜI GIẢI ĐÚNG:

1) *Nguyễn Thu Thủy*, 9I, THCS Lê Hồng Phong, TP Yên Bái.

2) *Vũ Thị Lan Anh*, 11C, THPT Lê Hồng Phong, TP Nam Định.

3) *Dương Văn An*, 10A1, THPT Châu Thành, TX Bà Rịa, Bà Rịa - Vũng Tàu.

4) *Trịnh Văn Hoàng*, 11C1, THPT Hoằng Hóa II, Thanh Hóa.

PHI PHI

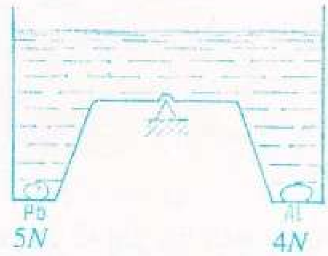
Cuộc thi vui TOLITI 2006

(Do 3 tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Vật lí và Tuổi trẻ, Tin học và Nhà trường đồng tổ chức trong cả năm 2006)

ĐỀ ĐỢT 3

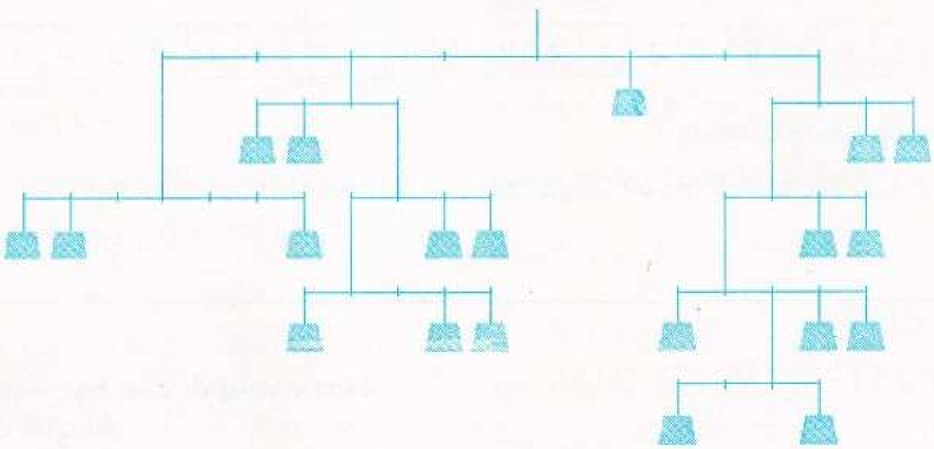
TOLITI-7. Bình nước

Một bình đổ đầy nước và được đặt trên cạnh của dao tựa như hình vẽ. Ở phần bên trái của bình có đặt một mẩu chì (Pb) có trọng lượng 5N và ở phần bên phải có đặt một mẩu nhôm (Al) có trọng lượng 4N. Hỏi bình sẽ bị lệch về phía nào?



TOLITI-8: Cân bằng hoàn hảo

Bạn hãy đặt 20 quả cân có khối lượng liên tiếp từ 1 kg đến 20 kg vào chiếc cân phức tạp như hình vẽ dưới đây để đảm bảo cân bằng. Chú ý độ dài các cán cân xác định đúng theo quy tắc cân bằng về lực.



TOLITI-9. Trồng cây

Khu vườn hình vuông tạo thành từ một lưới ô vuông 10 × 10. Người ta cần trồng một loại cây đặc biệt trong khu vườn, mỗi cây cần được trồng tại một ô vuông trên lưới. Tại thời điểm ban đầu đã có 9 cây được trồng. Loại cây này sẽ được trồng với yêu cầu đặc biệt như sau: tại một ô vuông rỗng chỉ có thể trồng được cây nếu tại 2 hoặc nhiều hơn 2 ô vuông kề cạnh đã trồng loại cây này. Hỏi rằng có cách nào để từ 9 cây ban đầu có thể trồng được tất cả 100 cây trong khu vườn hay không? Hãy giải thích cách suy luận của bạn.

Đáp án các bài TOLITI đợt 2

Tháng 4/2006

Bài TOLITI-4. Nhà toán học xếp thế nào?

Đánh dấu các hình tròn sẫm màu là các nhà toán học, hình tròn trên cùng là vị trí nhà toán học đầu tiên. Bằng cách thử và kiểm tra lại ta có kết quả như hình bên.

Bài TOLITI-5. Tận cùng của vũ trụ

Đáp án: 89.

Lũy thừa bậc chẵn của 9 có dạng $9^{2n} = 81^n$ nên có tận cùng là 1.

Do đó lũy thừa bậc lẻ của 9 có dạng $9^{2n+1} = 9^{2n}.9$ nên có tận cùng là 9.

9^{9^9} và $9^{9^{9^9}}$ đều là lũy thừa bậc lẻ nên có tận cùng là 9.

Ta sử dụng khai triển nhị thức Newton cho các lũy thừa này như sau:

$$9^{9^9} = (10-1)^P = 10^P - C_P^1.10^{P-1} + C_P^2.10^{P-2}$$
$$- C_P^{P-3}10^3 - ... - C_P^{P-2}10^2 + C_P^{P-1}.10-1 \text{ với } P = 9^9$$

$$9^{9^{9^9}} = (10-1)^Q = 10^Q - C_Q^1 10^{Q-1} + C_Q^2.10^{Q-2}$$
$$- ... - C_Q^{Q-2}.10^2 + C_Q^{Q-1}.10-1 \text{ với } Q = 9^{9^9}.$$

Vậy 9^{9^9} và $9^{9^{9^9}}$ có hai chữ số tận cùng chính là hai chữ số tận cùng của $C_P^{P-1}.10-1$ và $C_Q^{Q-1}.10-1$ tương ứng.

Dễ thấy các chữ số này chính là 89.

Bài TOLITI0-6.

Chuyển động của quả cầu

Trong cả ba trường hợp điện trường đều hướng từ trái qua phải, nhưng điện trường I có cường độ bên trái nhỏ hơn bên phải (vì đường sức ở bên phải sít nhau hơn), cường độ của điện trường II ở bên trái lớn hơn, còn cường độ của điện trường III không đổi (điện trường đều). Khi đặt quả cầu kim loại không tích điện vào ba điện trường trên, trên quả cầu sẽ xuất hiện các điện tích cảm ứng: bên trái tích điện âm và bên phải tích điện dương (với độ lớn bằng nhau). Như vậy, trong điện trường I, điện tích dương chịu tác dụng lực lớn hơn là điện tích âm, nên quả cầu sẽ chuyển động về bên phải. Tương tự, trong điện trường II quả cầu sẽ chuyển động về bên trái, còn trong điện trường III, quả cầu đứng yên.

Các bạn có lời giải tốt đợt 2 (4 -2006) :

Nguyễn Anh Minh, 10A3 THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Bình*, 11A1 THPT Nam Tiền Hải, **Thái Bình**; *Trần Như Ngọc*, 9A3 THCS TTr Phước An, Krông Păk, **Đăklăk**; *Nguyễn Thị Hồng Thơm*, 9A THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương, **Nghệ An**; *Vũ Anh Tuấn*, 9A2 THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định**; *Nguyễn Ngọc Lâm*, 10B chuyên Lí, ĐHKHTN-ĐHQG **Hà Nội**; *Nguyễn Mạnh Khôi*, 10T THPT chuyên **Bắc Ninh**; *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 11A1 THPT Trần Phú, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Võ Hà Tĩnh*, 45A4 THPT chuyên Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Quang Tiến*, 11/12 THPT Tiểu La, Thăng Bình, **Quảng Nam**.

VŨ KIM - HOÀNG TRỌNG

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 349 (7-2006)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Mĩ thuật :* MINH THƠ. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 đường Thích Quảng Đức, TX. Thủ Dầu Một, Bình Dương,
Tel : 0650.858330

THƯ TỪ MUÔN NƠI

"... Trong những năm qua, Tạp chí đã có sự phát triển vô cùng mạnh mẽ, đóng góp rất lớn trong việc nâng cao uy tín của Nhà xuất bản Giáo dục với đông đảo bạn đọc trên cả nước, góp phần giúp NXB Giáo dục hoàn thành tốt nhiệm vụ mà Đảng, Nhà nước và Bộ Giáo dục và Đào tạo đã giao phó...".

VŨ BÁ HOÀ
(Phó Tổng Giám đốc NXGGD kiêm Giám đốc NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh)

"...Từ khi biết Tạp chí THTT vào đầu năm học mới, em đã cảm nhận ngay được những bài toán hay, bổ ích. Vì thế mà em đã cố gắng tìm được lại những số năm trước để đọc, và cả các bạn em nữa, tất cả đều rất quan tâm đến những phương pháp giải toán hay trong Tạp chí...".
HOÀNG THẾ DUY (10A1, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, Hà Tây)

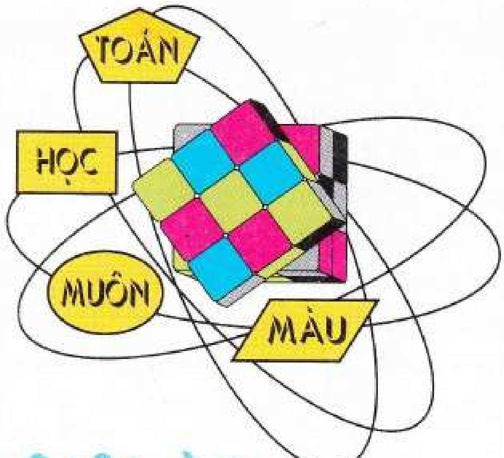
"... Nhớ lại ngày nào cầm tờ báo đầu tiên trong tay, em nghĩ "sao mà khó thế!" rồi dần dần, làm được một bài, hai bài và ngày càng nhiều lên. Hễ làm ra, em lại thấy trong lòng dâng lên một niềm vui, niềm vui trước bao công sức bỏ ra đã gặt hái thành công. Rồi viết bài. Gửi. Mong chờ. Thất vọng khi không thấy tên mình. Lại giải. Lại giải... Hạnh phúc biết bao khi tên mình được lên báo.

Ba năm qua, không biết Báo đã cho em bao nhiêu kiến thức, làm em buồn biết bao nhiêu lần và cũng chừng đó lần làm em hạnh phúc. Bây giờ, em chưa đạt được thành tích gì đáng kể, nhưng nếu có thì ngoài thầy cô đứng lớp, các thầy, các cô trên Báo cũng là những người em biết ơn nhiều nhất..."

NGUYỄN MINH TRÍ
(11T, THPT Sa Đéc, Đồng Tháp)

"...Chính báo THTT đã dạy cho tôi thái độ làm việc một cách cẩn thận, nghiêm túc khi xem xét một vấn đề và nhờ cách trình bày súc tích, chặt chẽ ở các bài toán trên THTT mà tôi đã học tập dễ dàng hơn, đặc biệt là những môn đòi hỏi cao trong lôgic toán học,...
Tôi giữ THTT như kho báu mà theo tôi và các bạn gọi đó là kho tàng tri thức...
Yêu lắm Toán học và Tuổi trẻ ơi!..."

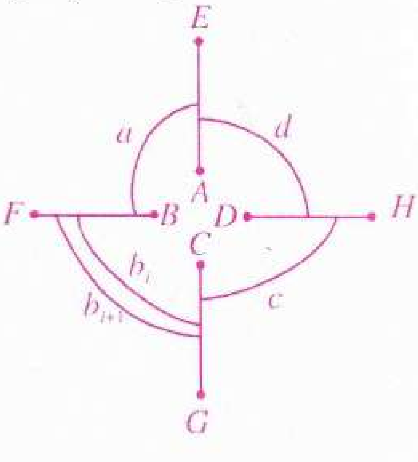
TRIỆU THỊ XUÂN
(12A1, trường PT vùng cao Việt Bắc, Thái Nguyên)



Giải đáp: ĐƯỜNG CHUYỂN HÀNG

(Đề đăng trong THTT số 346 tháng 4.2006)

1) Chú ý đến phần đầu và phần cuối của đường chuyển hàng: *dab...dabb*



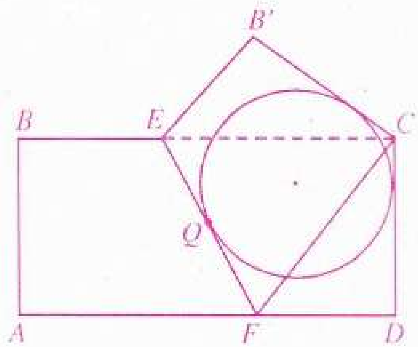
Dựa vào sơ đồ trên nếu hàng qua d rồi qua a thì cửa xuất phát phải là D, nếu hàng qua a rồi qua b_i và qua b_{i+1} thì cửa cuối cùng phải là F.

2) Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử có hai đường đi mà hàng xuất phát từ hai cửa trong khác nhau và đến cùng một cửa ngoài thì phải xảy ra điều là một lúc nào đó có...

(Xem tiếp trang 29)

Khăn chữ nhật PHỦ MẶT BÀN TRÒN

Ở một phòng ăn đang cần khăn phủ một mặt bàn hình tròn đường kính 105 (cm), nhưng trong lúc vội vàng người phục vụ mang ra một khăn hình chữ nhật $ABCD$ với kích thước AB = 100 (cm), CD = 200 (cm). Để khách không phải chờ đợi, người phục vụ nhanh trí gấp khăn theo đường EF sao cho EF đi qua tâm Q của hình chữ nhật $ABCD$ và đỉnh A trùng với đỉnh C, đỉnh B đến điểm B' để phủ mặt bàn tròn như ở hình 1.



Hình 1

Dành cho bạn đọc

1) Hỏi người phục vụ khi gấp khăn như trên có phủ kín được mặt bàn tròn không?

2) Bạn có thể gấp khăn theo đường thẳng đi qua tâm Q (mà A không trùng C) để phủ kín mặt bàn tròn có đường kính lớn hơn nữa không? Tính đường kính lúc đó (chính xác đến xentimet).

PHI PHI

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT51M6
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2006
Giá : 5000 đồng
Năm nghìn đồng