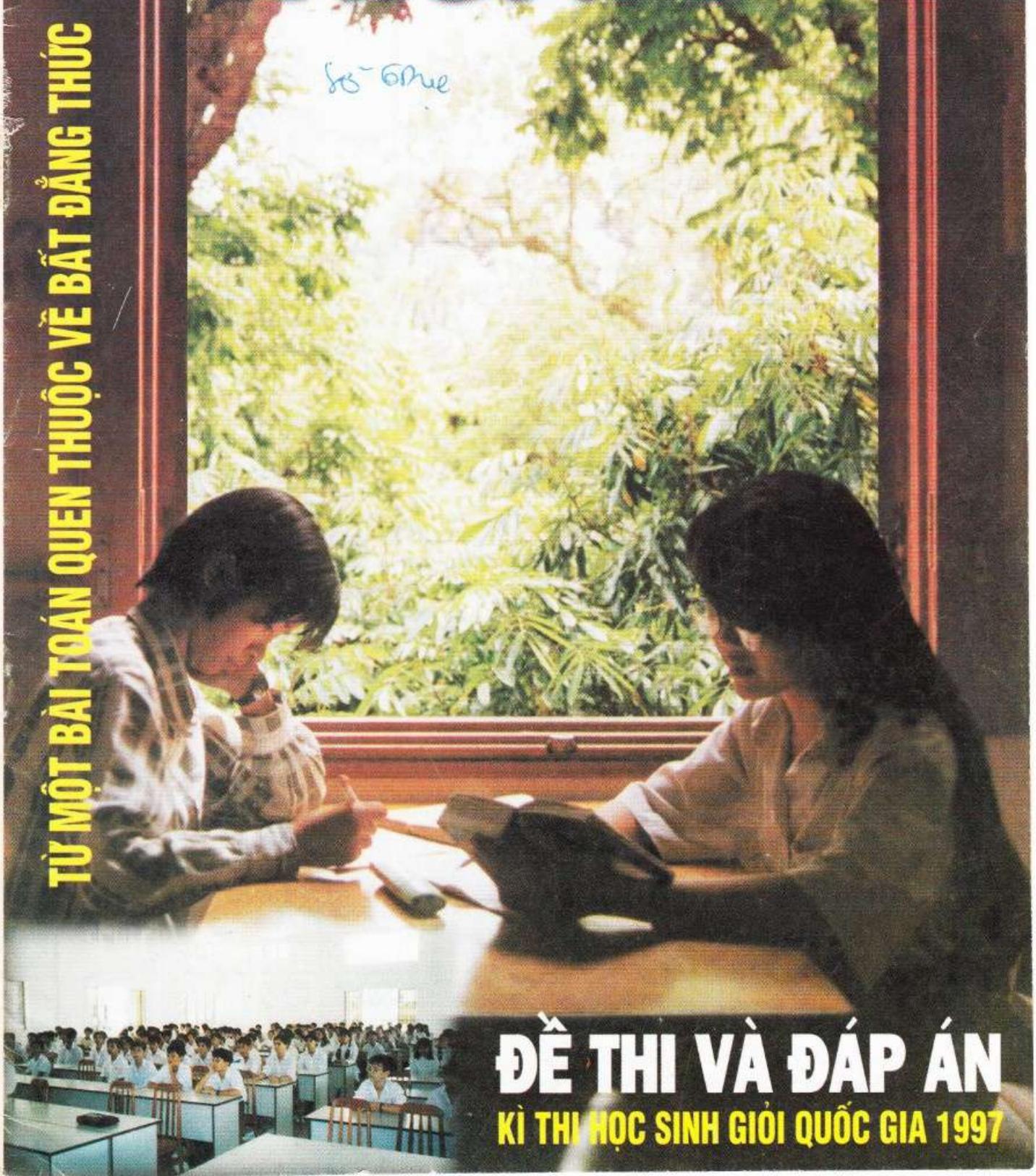


TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NĂM THIẾU - RA HÀNG THÁNG
Số 2 (248)
1998

TỪ MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC VỀ BẤT ĐẲNG THỨC



ĐỀ THI VÀ ĐÁP ÁN
KÌ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA 1997

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

• Dành cho các bạn Trung học cơ sở For Lower Secondary School Level Friends		<i>Tổng biên tập :</i> NGUYỄN CÁNH TOÀN
<i>Nguyễn Đỗ - Từ một bài toán quen thuộc về bất đẳng thức</i>	1	
• Tiếng Anh qua các bài toán và lời giải - Ngô Việt Trung	2	<i>Phó tổng biên tập:</i> NGÔ ĐẠT TÚ HOÀNG CHÚNG
• Giải bài kì trước Solutions of Problems in Previous Issue	3	
Các bài của số 244		
• Đề ra kì này Problems in this issue	12	
T1/248, ..., T10/248, L1/248, L2/248		
• Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông Helping Young Friends Gain Better Understanding in Secondary School Maths	13	
<i>Nguyễn Đạo Phương - Phương tích của một điểm đối với một đường cô-nic</i>		
• Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học Đề thi tuyển sinh đại học Ngoại thương Hà Nội - 1997	16	
• Tin học Phạm Huy Điện - Tạ Duy Phương - Maple với toán phổ thông	19	
• Bạn có biết Nguyễn Cảnh Toàn - Chứng minh tiên đề Oclit của Legendre	21	
• Nguyễn Việt Hải - Đặng Hùng Thắng - Đề thi chọn học sinh giỏi toán THPT 1996-1997	22	
• Câu lạc bộ Thạch Quỳ - Cái đường thẳng nằm trong hình học (thơ)	bìa 3	
• Trả lời bạn đọc - LTN	bìa 3	
• Giải trí toán học Bình Phương - Giải đáp bài Điện số vào hình vuông	bìa 4	
Võ Kim Huệ - Trò chơi "Tháp ba màu"	bìa 4	
Bìa 1 : Học thi - Huy chương bạc Liên hoan báo chí ASEAN-1997 (Ảnh : Trần Lưu Quang) Học sinh chuyên Toán - Lý trường chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai (Ảnh : LTN)		

Trụ sở tòa soạn :

81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh

ĐT : 8.220073

ĐT: 8.356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY

LÊ THỐNG NHẤT

Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH

Từ một bài toán quen thuộc VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN ĐỀ

(Sở Giáo dục và đào tạo Hải Phòng)

Bài viết này chúng tôi muốn đề cập đến một bất đẳng thức quen thuộc làm cầu nối cho việc chứng minh các bất đẳng thức khác phức tạp hơn. Đó chính là Bất đẳng thức Na-so-bit:

Với a, b, c là các số dương thì :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (*)$$

(xem thêm Tạp chí TH & TT số 66 và số 106).

Giải Ta kí hiệu vẽ trái của (*) là A và biến đổi như sau :

$$A + 3 = (a + b + c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right)$$

Đặt $u = a + b, v = a + c, t = b + c$, ta có :

$$A + 3 = \frac{1}{2} (u + v + t) \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{t} \right)$$

Ta có :

$$\begin{aligned} B &= (u + v + t) \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{t} \right) \\ &= 3 + \left(\frac{v}{u} + \frac{u}{v} \right) + \left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right) + \left(\frac{t}{v} + \frac{v}{t} \right) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta được $B \geq 9$.

Từ đó suy ra $A \geq \frac{3}{2}$.

Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ta hãy tìm cách khai thác bài toán trên.

Để ý thấy rằng nếu ta nhân cả hai vế của (*) với $a + b + c$ ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} &(a + b + c) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right) \geq \\ &\geq \frac{3}{2} (a + b + c) \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \end{aligned}$$

*Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ*



Kết quả trên dẫn đến các phép biến bài toán sau :

Bài toán 1. Giả sử a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \quad (1)$$

Ta thấy rằng từ vế phải của (1) nếu thêm điều kiện $abc = 1$ thì theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc} = 3$. Khi đó vế phải của (1) biến đổi và từ tính chất bậc cầu của bất đẳng thức ta có bài toán 2 :

Bài toán 2. Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Như vậy muốn chứng minh bất đẳng thức (2) ta phải xuất phát từ bất đẳng thức (*), sau đó thực hiện hai bước sau ta sẽ có khẳng định :

• Bước 1 : Nhân 2 vế của (*) với $a + b + c$ và biến đổi

• Bước 2 : Chứng minh bất đẳng thức $\frac{a+b+c}{2} \geq \frac{3}{2}$

Đến đây, nếu từ (2) và từ giả thiết ta biến đổi theo các bước :

• Bước 1 : Bình phương hai vế của (2)

• Bước 2 : Nhân 2 vế của bất đẳng thức thu được sau bước 1 với $\frac{1}{2}$

• Bước 3 : Thay thế các biểu thức a^2b^2, a^2c^2, b^2c^2 bằng các biểu thức tương ứng

$$\frac{1}{c^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2}$$

Từ ba bước biến đổi trên dẫn đến bài toán 3 :

Bài toán 3. Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \frac{a^4}{2(b+c)^2} + \frac{b^4}{2(a+c)^2} + \frac{c^4}{2(a+b)^2} + \\ & + \frac{1}{c^2(a+c)(b+c)} + \frac{1}{b^2(a+b)(b+c)} = \\ & + \frac{1}{a^2(a+c)(a+b)} \geq \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Bây giờ ta xét tiếp :

Bài toán 4. Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{a^3(b+c)} + \frac{2}{b^3(a+c)} + \frac{2}{c^3(a+b)} \geq 3(4)$$

Dễ thấy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Để chứng minh (4) ta đặt :

$$x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$$

Khi đó bất đẳng thức (4) có dạng :

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức trên chính là bất đẳng thức (2).

*

**

Con đường đi từ (*) đến (1), (2), (3), (4) phải chăng là con đường sáng tạo ra các bất đẳng thức mới từ một bất đẳng thức đã biết.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

BÀI SỐ 2

Problem. Prove that $11^{10} - 1$ is divisible by 100.

Solution. We have

$$11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1).$$

The second factor on the right-hand side is the sum of 10 numbers which ends with 1.

Therefore, $11^{10} - 1$ is the product of 10 with a number divisible by 10.

Từ mới :

prove : chứng minh (động từ)

prove that = chứng minh rằng
(mệnh lệnh thức)

divisible by = chia hết cho

second = thứ hai

right-hand = tay phải

side = bên, phía, cạnh (hình học)

sum = tổng

number = số

end = kết thúc (động từ), chỗ kết thúc, điểm cuối (danh từ)

therefore = vì vậy, do đó

product = tích

NGÔ VIỆT TRUNG

CHỨNG MINH TIỀN ĐỀ OCLIT...

(Tiếp theo trang 21)

qua một điểm nằm trong một góc nhọn, bao giờ cũng dựng được một đường thẳng không qua đỉnh góc mà cắt cả hai cạnh của góc.

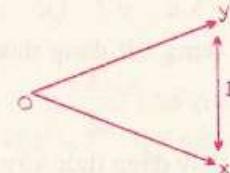
Thời xưa mà nhận ra sự tương đương của tiên đề này với tiên đề Oclit là rất khó. Nhưng, nay nay, bắt cứ ai có hiểu biết sơ đẳng về hình học Lôbasepki thì thấy ngay: quả vậy, trong một góc nhọn xOy (h.3), dù góc đó nhỏ đến đâu, thì trong mặt phẳng Lôbasepki xOy , bao giờ cũng tồn tại một đường thẳng D song song với Ox về phía này và song song với Oy về phía kia (h.3). D chia miền trong của góc xOy ra làm hai phần; phần không chứa đỉnh góc gồm toàn những điểm mà qua đó không có đường thẳng nào (không đi qua O) mà cắt cả tia Ox và cả tia

Oy . Cho nên, trong học tập, muôn hiểu thật sâu cái gì mà chỉ đi sâu vào cái đó là chưa đủ mà phải đi vào cả cái đối lập với cái đó. Lập với cái đó.

Chính vì vậy

mà trong việc học toán nên tìm phản ví dụ cho các khái niệm và định lí đó.

Legendre không thành công trong việc chứng minh tiên đề Oclit. Việc phát hiện ra sự "không thành công" này đáng giá nghìn vàng vì nếu không thì mọi người sẽ cho là tiên đề Oclit đã được chứng minh và thế là hết chuyện, còn làm gì có hình học Lôbasepki, cái con chim én báo hiệu mùa xuân "toán học hiện đại" với cái cảnh trăm hoa đua nở trong những mảnh vườn đầy hoa thơm cỏ lạ.



Hình 3



Bài T1/244: Xét dãy số'

$$x_1, x_2 = \frac{1+x_1}{1-x_1}; x_3 = \frac{1+x_2}{1-x_2}; \dots; x_n = \frac{1+x_{n-1}}{1-x_{n-1}} \text{ trong}$$

đó } x_1 \neq 0 \text{ và } x_1 \neq \pm 1. Chứng minh } x_{1997} = x_1

Lời giải. Ta chứng minh $x_1 = x_{4n+1}$ với mọi $n \in N^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học.

* Với $n = 1$, ta chứng minh $x_5 = x_1$.

Thật vậy, vì $x_1 \neq 0$ và $x_1 \neq \pm 1$ nên:

$$x_3 = \frac{1+x_2}{1-x_2} = \frac{1 + \frac{1+x_1}{1-x_1}}{1 - \frac{1+x_1}{1-x_1}} = \frac{-1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{x_3} \quad (1)$$

Từ đó $x_3 \neq 0$ và $x_3 \neq \pm 1$. Suy ra

$$x_5 = \frac{1+x_4}{1-x_4} = \frac{1 + \frac{1+x_3}{1-x_3}}{1 - \frac{1+x_3}{1-x_3}} = \frac{-1}{x_3} \quad (2)$$

Kết hợp (1), (2) ta có $x_5 = x_1$.

* Giả sử kết quả đúng với $n = k$, tức là $x_{4k+1} = x_1$. Vì $x_1 \neq 0$; $x_1 \neq \pm 1$ nên $x_{4k+1} \neq 0$; $x_{4k+1} \neq \pm 1$. Do đó:

$$x_{4k+3} = \frac{1+x_{4k+1}}{1-x_{4k+1}} = \frac{-1}{x_{4k+1}} \Rightarrow x_{4k+3} = \frac{-1}{x_{4k+3}}$$

và $x_{4k+3} \neq 0$; $x_{4k+3} \neq \pm 1$.

$$\text{Lại có: } x_{4k+5} = \frac{1+x_{4k+3}}{1-x_{4k+3}} = -\frac{1}{x_{4k+3}}$$

Suy ra $x_{4(k+1)+1} = x_{4k+5} = x_{4k+1} = x_1$

Tức là kết quả đúng với $n = k + 1$.

Tóm lại: $x_1 = x_{4n+1}$ với $\forall n \in N^*$.

Thay $n = 499$ ta có $x_1 = x_{1997}$.

Nhận xét. *Rất nhiều bạn tham gia giải bài này nhưng rất khó tìm ra được lời giải thật chặt chẽ. Chỉ có 7 bạn không nhìn ra quy luật $x_1 = x_{4n+1}$ ($n \in N^*$). Những kiểu thiếu sót chủ yếu:

1) Sau khi chứng minh $x_5 = x_1$ và dấu ..., các bạn đã nói tương tự ta có $x_{1997} = x_{1993} = \dots = x_1$.

2) Không sử dụng giả thiết $x_1 \neq 0$; $x_1 \neq \pm 1$. Nếu không có giả thiết này thì liệu có x_{1997} ?

* Một bạn ở chuyên Toán Nghĩa Hưng, Nam Định giải bằng phương pháp lượng giác, nhưng cũng chưa chặt chẽ.

* Các bạn có lời giải khá hơn là: Nguyễn Mạnh Thắng, 9A, chuyên Thạch Thất, Nguyễn Đình Hưng, 9A1, chuyên Thanh Oai, Hà Tây; Nguyễn Đăng Bảo, 9A, Quốc học Quy Nhơn, Bình Định; Ngô Trung Hiếu, 9 Toán, chuyên Nguyễn Du, Tp Hồ Chí Minh; Đào Duy Bình, 7A1, Dương Minh Châu, Tây Ninh; Phạm Kim Anh, 8A, Tư Nghĩa 2, Quảng Ngãi; Lương Thế Nhân, 9A, chuyên Bạc Liêu; Đinh Thị Thái Mai, 9B, Hải Định, Đồng Hới, Quảng Bình; Ngô Quốc Anh, 9C, chuyên Nguyễn Du, Đắc Lắc; Phan Vũ Toàn, 8A, Lê Quý Đôn, Đỗ Trường Giang, 9A, Đồng Anh, Nguyễn Đức Nhật, 8A2, Nguyễn Trường Tộ, Hà Nội; Võ Thành Sơn, 92, Lê Văn Thiêm, Hà Tĩnh; Trần Quang Vinh, Hoàng Tuấn, 9A1, Lê Quý Đôn, ý Yên, Nam Định; Mai Nguyên Dũng, 9A1, Chu Văn An, Thái Nguyên; Nguyễn Việt Dũng, Yên Khê, Thanh Ba, Phú Thọ; Lê Thành Công, 9B, Đồng Hùng, Thái Bình; Nguyễn Thảo Lan, 7A và Nguyễn Xuân Hòa, 8A, trường Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa, Thanh Hóa; Võ Tuấn Bình, 9B, Hà Huy Tập, Vinh, Trần Hồng Yến, 9A, NK Nam Dàn, Nghệ An; Đinh Trung Hiếu, 9A, Phú Bài, Hương Thủy, Thừa Thiên - Huế; Phan Phương Mai, 8CT, Trần Phú, Hải Phòng.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T2/244: Cho 3 số dương tùy ý không lớn hơn 1. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{3} + (1-a)(1-b)(1-c)$$

Lời giải. (của Đặng Ngọc Trang, 8B, PTCS Nguyễn Công Trứ II, Tiên Hải, Thái Bình)

Vai trò của a, b, c là bình đẳng nên không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho 3 số không âm $1-b, 1-c, 1+b+c$ ta có:

$$1 = \frac{(1-b)+(1-c)+(1+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{(1-b)(1-c)(1+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (1-b)(1-c)(1+b+c) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c)(1+b+c) \leq 1-a$$

$$\Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1-a}{1+b+c} \leq \frac{1-a}{a+b+c} \text{ (do } a \leq 1\text{)}$$

Từ đó ta có:

$$(1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1}{a+b+c} - \frac{a}{a+b+c} \leq \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{3}$$

Vậy ta có:

$$\frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{3} + (1-a)(1-b)(1-c)$$

dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$. (dpcm).

Nhận xét. 1. Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt:
Nguyễn Đăng Quý, 9A, Trọng điểm Thuận Thành; **Bắc Ninh**: **Vuong Gia Vũ**, 8H Trung Vuong, **Hà Nội**; **Vũ Thành Bình**, 8T, Chu Văn An, **Hải Phòng**; **Nguyễn Cao Cường**, Lê Trung Dũng, 9B, Chu Văn An, Thanh Hà; **Hải Dương**; **Lê Thành Công**, 9B, Đông Hưng, **Thái Bình**; **Nguyễn Trung Quân**, 9A₁, Lê Quý Đôn, ý Yên, **Nam Định**: **Hoàng Lan Anh**, Lê Ngọc Khoa, Lê Thị Thúy, Lê Mạnh Thúy, 8A, NK Hoàng Hóa, Lê Kim Phụng, Lê Anh Sơn, 9C, NL Tp Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; **Nguyễn Xuân Toán**, 9A, Điện Châu, **Nguyễn Đức Trường**, 9A Trung Đô, Vinh, **Nghệ An**; **Đương Tuấn Anh**, 9/2 Lê Văn Thiêm, TX **Hà Tĩnh**; **Huỳnh Minh Việt**, 9A Nguyễn Hiền, Điện Bàn, **Quảng Nam**; **Đào Duy Bình**, 7A₁, Dương Minh Châu, **Tây Ninh**; **Nguyễn Lương Hoàng**, 9A, QH Quy Nhơn, **Bình Định**; **Vũ Xuân Ngọc Tin**, 6 Quang Trung, Tân Phú, **Đồng Nai**.
2. Các bạn sau đây đã phát biểu và chứng minh bài toán mở rộng cho n số như sau:

Cho n số dương $a_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a_1+a_2+\dots+a_n} \geq \frac{1}{n} + (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)$$

Đặng Thị Hiền, 9B, TD Thuận Thành, **Bắc Ninh**; **Mai Nguyễn Dũng**, 9A₁, Chu Văn An, Tp **Thái Nguyên**; **Tạ Ngọc Thạch**, 9B, CLC Tp Việt Trì, **Phú Thọ**; **Nguyễn Đức Giang**, 8A, Lê Quý Đôn, Từ Liêm, **Nguyễn Hoàng Anh**, 9A, Quang Trung, **Hà Nội**; **Lại Đức Phương**, 9A, Nguyễn Khuyến, Bình Lục, **Hà Nam**; **Hoàng Văn Long**, 9, Chu Văn An, Thanh Hà, **Hải Dương**; **Đỗ Trọng Giang**, 10A₁, Phụ Đức, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**; **Lê Khả An**, Nguyễn Văn Giáp, Trương Thanh Giáp, **Nguyễn Xuân Hòa**, 8A, NK Hoàng Hóa, **Nguyễn Việt Hà**, 8B NK Thành phố, **Phan Văn Tiến**, 9C, Quang Trung, Tp Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; **Đương Tuấn Anh**, **Võ Thành Sơn**, 9₂, Lê Văn Thiêm, TX, **Hà Tĩnh**.

3. Các bạn sau đây đã phát biểu và chứng minh bài toán mở rộng cho n số dương như sau:

Cho n số dương a_1, a_2, \dots, a_n tùy ý không lớn hơn α ($\alpha > 0, n \in \mathbb{N}$). Chứng minh:

$$\frac{\alpha^{n+1}}{a_1+a_2+\dots+a_n} \geq \frac{\alpha^n}{n} + (\alpha-a_1)(\alpha-a_2)\dots(\alpha-a_n)$$

Lê Minh Đức, 8A, CLC **Hải Dương**; **Hoàng Tuấn**, 9A, Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định**; **Lê Hoàng**, 9C, NK Thành phố, **Thanh Hóa**.

TỔ NGUYỄN

Bài T3/244. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = \frac{85}{3} \\ 2x + \frac{1}{x+y} = \frac{13}{3} \end{cases}$$

Lời giải. Phương trình thứ nhất có thể viết lại thành :

$$3\left[(x+y)^2 + \frac{1}{(x+y)^2}\right] + (x-y)^2 = \frac{85}{3}$$

Do đó, đặt $a = x+y$ và $b = x-y$, ta có $2x = a+b$, và hệ đã cho trở thành :

$$\begin{cases} 3\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + b^2 = \frac{85}{3} \\ a+b + \frac{1}{a} = \frac{13}{3} \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Rút b từ (2) thế vào (1) rồi đặt $t = a + \frac{1}{a}$,

được phương trình bậc 2 đối với t :

$$18t^2 - 39t - 70 = 0.$$

Giải ra được $t_1 = 3; t_2 = \frac{1}{3}$ (loại vì $|a + \frac{1}{a}| \geq 2$).

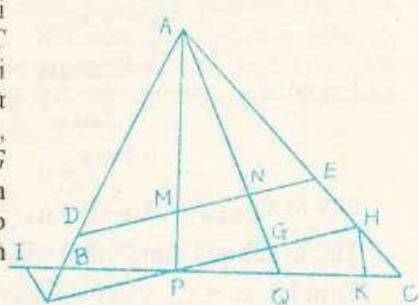
Tính ra được hai nghiệm là $(2; 1)$ và $(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$.

Nhận xét. Có 89 bài giải trong đó có 4 bài giải sai. Lời giải tốt gồm có: **TP. Hồ Chí Minh**: **Huỳnh Công Thành**, 9T Nguyễn Du, Q.1; **Hà Nội**: **Đỗ Trường Giang**, 9A - THCS Đông Anh, Nguyễn Hoàng Anh, 9A THCS Quang Trung; **Thanh Hóa**: **Nguyễn Ánh Tuấn**, 9B - THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơm; **Nam Định**: **Nguyễn Đức Chính**, 9B - PTCS Hải Hậu; **Bắc Liêu**: **Trương Yến Nhi**, 9A PTTH chuyên; **Bắc Ninh**: **Nguyễn Đăng Quý**, 9A Trọng điểm, Thuận Thành; **Nghệ An**: **Võ Tuấn Bình**, 9B THCS Hà Huy Tập, TP Vinh; **Hải Phòng**: **Phạm Đức Hiệp**, Vũ Ngọc Minh (8T Chu Văn An); **Quảng Ngãi**: **Phạm Anh Tuấn**, 9A chuyên Lê Khiết;

ĐẶNG VIỄN

Bài T4/244. Cho tam giác ABC , điểm D trên cạnh AB , điểm E trên cạnh AC . Trên đoạn DE lấy các điểm M, N sao cho $DM = MN = NE$. Gọi P, Q là các giao điểm tương ứng của các tia AM, AN với cạnh BC . Chứng minh rằng nếu $BP < PQ < QC$.

Lời giải. (dựa theo **Nguyễn Hoài Anh**, 8A THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**). Qua P kẻ đường thẳng song song với DE , cắt AB, AQ, AC tương ứng tại các điểm F, G, H . Áp dụng định lí Ta-lét, dễ dàng chứng minh $FP = PG = GH$ (1). Qua F, H kẻ các đường thẳng song song với AQ ; cắt BC tương ứng tại I, K (2). Từ (1) và (2), $\Delta IPF \sim \Delta QPG$ (g.c.g), suy ra $IP = PQ$. Do $IF \parallel AQ$ nên $\frac{AB}{AF} = \frac{BQ}{QI} = \frac{BQ}{PQ} = \frac{BQ}{IP}$



$\frac{BP+PQ}{2PQ}$. Mà $BP < PQ$ nên $\frac{AB}{AF} < 1$ hay $AB < AF$,
vậy là F nằm ngoài cạnh AB . Suy ra A, B nằm
cùng phía đối với đường thẳng FP . Do P nằm
giữa B, C nên C, B nằm khác phía đối với
đường thẳng FP . Vậy C, A nằm khác phía đối
với đường thẳng FP , hay H nằm giữa A, C . Mà
 $HK \parallel AQ$ nên K nằm giữa Q, C hay là $QK < QC$.
Hơn nữa, do HQ là đường trung bình trong tam
giác PHK nên $PQ = QK$. Vậy: $PQ < QC$ (dpcm).

Nhận xét. Có 90 bạn gửi bài giải, tất cả đều giải
đúng, tuy nhiên còn nhiều bạn mắc phải thiếu sót sau
đây: hoặc là trình bày quá dài (có bài dài tới ba trang
giấy học sinh), hoặc là trình bày ngắn gọn nhưng thiếu
chất chẽ. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

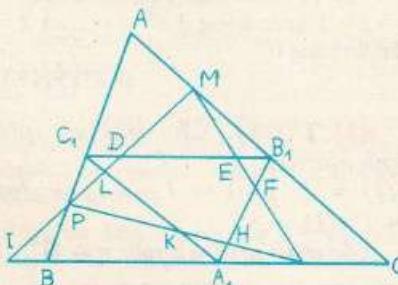
Hà Nội: *Dỗ Trường Giang, 9A THCS Đông Anh,
Nguyễn Hoài Anh, 8A THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu
Giáy; Hải Phòng:* *Triệu Tuấn Dat, 8T THCS Chu Văn
An; Đồng Nai:* *Vũ Xuân Ngọc Tin, lớp 6 THCS Quang
Trung - Tân Phú; Bắc Liêu:* *Trương Yến Nhi, Trần Lê
Minh, 9A PTTH chuyên; Nghệ An:* *Nguyễn Nghĩa Tài,
9A THCS Đô Lương, H. Đô Lương, Nguyễn Như
Phong, 7C THCS Đông Vĩnh; Nam Định:* *Cao Lê
Đuản, Trung tâm CLC Giao Thủy; Hải Dương:*
*Nguyễn Cao Cường, 9B THCS Chu Văn An, H. Thanh
Hà; Bắc Ninh:* *Phùng Văn Thủy, 9A THCS Lê Văn
Thịnh, Gia Lương; Đắc Lắc:* *Ngô Quốc Anh, 9C
chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột.*

ĐẶNG VIỄN

Bài T5/244. Cho tam giác ABC với các
trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 . Lấy các điểm M
(nằm giữa A, B_1), N (nằm giữa C, A_1), P (nằm
giữa B, C_1). Tim giá trị bé nhất của diện tích
phần chung của hai tam giác $A_1B_1C_1$ và MNP
biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 1.

Lời giải.
(của Chu
Diệp Anh,
8B, chuyên
Ứng Hòa,
Hà Tây).

Gọi diện
tích
 $DEFHKL$
bằng S .



Do $DB_1 \parallel IC$ và $NC \leq IN$ nên $EB_1 \leq DE$.

Suy ra $S_{EB_1F} \leq S_{DEF}$

Tương tự $S_{DC_1L} \leq S_{DLK}$

$S_{KA_1H} \leq S_{KHF}$

Từ đó $S_{A_1B_1C_1} - S \leq S - S_{DFK}$ hay $S_{A_1B_1C_1} \leq 2S$.

Vậy $S \geq \frac{1}{2} S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

2-BT2

Dấu = xảy ra khi 1 đỉnh của ΔMNP trùng với
1 đỉnh của ΔABC và 1 đỉnh trùng trung điểm
cạnh đối diện. Do đó giá trị bé nhất của phần
chung là $\frac{1}{8}$.

Nhận xét. Giải tốt bài toán này có các bạn:

Thái Nguyên: Nguyễn Văn Thắng, 9A₁, THCS Độc
Lập; **Phú Thọ:** Lê Tuyết Nhường, 9A, THCS Phú Thọ; **Bắc
Giang:** Vũ Chí Minh, 9A, THCS Hiệp Hòa; **Bắc Ninh:**
Nguyễn Đăng Quý, 9A TD Thuận Thành; **Vĩnh Phúc:**
Đào Duy Vũ, 9B THCS Yên Lạc, Trịnh Minh Đức, 9A,
THCS Vĩnh Yên; **Hải Phòng:** Lê Văn Thành, 9A, THCS
Ngô Quyền, Triệu Tuấn Đạt, 8T, THCS Chu Văn An; **Hải
Đường:** Nguyễn Huy Sơn, 8L, THCS Nguyễn Trãi; **Hà
Tây:** Nguyễn Mạnh Thắng, 9A chuyên Thach Thát, Vũ
Cao Cường, 9A chuyên Thanh Oai; **Hà Nội:** Ngô Thế
Hùng, 8C Hà Nội - Amsterdam, Nguyễn Đức Giang, 8A
Lê Quý Đôn, Từ Liêm, Nguyễn Việt Tùng, 9I Tô Hoàng;
Nam Định: Đặng Phương Thảo, 8A₂, Lương Thế Vinh,
Trần Thanh Tùng, 8A₆; **Đắk Nông:** Đỗ Minh Tiến, 9A₆, Trần Đặng
Ninh, Trần Đức Hiếu, 9I Hành Thuỷ; **Hà Nam:** Lại Đức
Phương, 9A Nguyễn Khuyến, Bình Lục; **Thanh Hóa:**
Phạm Tuấn Anh, 8C NK thành phố, Nguyễn Thùy Linh,
8A NK Hoàng Hóa, Nguyễn Anh Tuấn, 9B Lê Quý Đôn,
Bỉm Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Tiến Tài, 9A THCS Đô
Lương, Nguyễn Như Phong, 7C Đông Vĩnh, Vũ Ngọc
Dũng, 9B Đặng Thai Mai, Vinh; **Hà Tĩnh:** Dương Tuấn
Anh, 9/2 Lê Văn Thiêm; **Quảng Bình:** Phạm Lê Hạnh
Dung, 9² THCS Võ Ninh; Quảng Ninh; **Quảng Ngãi:**
Trần Thái An Nghĩa, 8I, Hà Quang Đạt, 8J Trần Hưng
Đạo; **Bình Định:** Nguyễn Lương Hoàng, 9A Quốc học
Quy Nhơn; **Đắc Lắc:** Nguyễn Thành Nam, 8T, Nguyễn
Du; **Đồng Tháp:** Lê Trọng Duy, 8T, THCB Sa Đéc; **Bắc
Liêu:** Lương Thế Nhán, 9A chuyên.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/244. Cho số dương a . Xét các số
đương x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$xy + yz + zx + \frac{2}{a}xyz = a^2,$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x+y+z}{xy+yz+zx}$$

Lời giải. Ta đã biết:

Bài toán 1. Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn
điều kiện: $xy + yz + xyz = 4$ (*).

Chứng minh rằng: $x + y + z \geq xy + yz + zx$ (1). Hỏi
dấu bằng xảy ra khi nào?

(Bài 6 - Đề thi chọn HSG Toán THPT Toàn quốc
năm học 95-96. Bảng B).

Lời giải của bài toán 1 đã được công bố trên Tạp
chi THHT số 12 (234) năm 1996. Theo đó, dấu " $=$ " ở
(1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hoặc trong 3 số x, y, z có 2 số
bằng 2 và số còn lại bằng 0.

Lấy $t > 0$ tùy ý. Đặt $x = t\alpha, y = t\beta, z = t\gamma$. Khi đó,
Bài toán 1 sẽ được phát biểu dưới dạng *tương đương*
sau:

Bài toán 1'. Cho $t > 0$ và cho các số không âm α, β, γ thỏa mãn điều kiện: $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + t\alpha\beta\gamma = \frac{4}{t^2}$.
Chứng minh rằng: $\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$. Hỏi dấu " $=$ " xảy ra khi nào?

Đặt $t = \frac{2}{a}$, $a > 0$, từ **Bài toán 1'** ta có **Bài T6/244**.
Và, theo những điều đã trình bày ở trên thì: $\min P = \frac{a}{a} = 1$,
đạt được khi $x = y = z = \frac{a}{2}$.

Nhận xét. 1. Trong tổng số 114 bạn gửi lời giải tới T.S. có 15 bạn cho lời giải sai, do đã mắc phải một trong các sai lầm sau:

- Không nắm vững các tính chất của BĐT. Có nhiều bạn cho rằng: Từ $a > b > 0$ và $c > d > 0$ suy ra $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ (?!).

• Không thuộc BĐT Trébusep.

• Nhầm lẫn trong các biến đổi đại số.

2. Hầu hết các bạn có lời giải đúng đều cho lời giải tương tự lời giải bài toán 1 (như đã công bố). Dưới đây là danh sách các bạn có lời giải tốt hơn cả:

Tây Ninh: Đoàn Hồng Anh, 11A₄ PTTH Hoàng Lê Kha; **Vĩnh Long:** Nguyễn Minh Trường, không rõ trường lớp; **Đắklắc:** Lê Định Bình, Lê Anh Dũng, Lê Thế Tân, 12CT PTTH Nguyễn Du - Buôn Ma Thuột; **Đồng Nai:** Phan Thị Thu Hằng, Nguyễn Văn Thành Sang, 11CT PTTH Lương Thế Vinh - Biên Hòa; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Lương Anh Hùng, 11A₁ PTTHCB Vũng Tàu; **TP.Hồ Chí Minh:** Vũ Đức Phú, 12CT PTTH Lê Hồng Phong; **Đà Nẵng:** Lê Đại Dương, Vũ Quý Lộc, 10A₁; 11A₄ PTTH Lê Quý Đôn; Nguyễn Tân Phong 12A₁ PTTH Hoàng Hoa Thám; **Thừa Thiên - Huế:** Huỳnh Công Phước, 10CT Quốc học Huế; **Quảng Trị:** Đào Thị Mỹ Châu, 10T PTTH Lê Quý Đôn, Hoàng Văn áu, không rõ trường lớp; **Quảng Bình:** Lê Trung Hiếu, Nguyễn Hoa, Nguyễn Việt Thành, Trần Hữu Lực (PTTHINK); **Nghệ An:** Hoàng Minh Sơn, 10G₁ PTTH Nghĩ Lộc 1, Trần Nam Dũng, 12CT PTTH Phan Bội Châu - Vinh); **Thanh Hóa:** Lưu Văn Hiệu, Cao Xuân Sinh, 10A₆; 11A PTTH Ba Đình - Nga Sơn, Lê Xuân Trung, 11T PTTH Lam Sơn; **Ninh Bình:** Vũ Hồng Việt, 11T PTTH Lương Văn Tuy; **Nam Định:** Trần Quang Vinh, 9A₁ THCS Lê Quý Đôn - ý Yên, Vũ Trần Cường, Phạm Ngọc Hùng, Nguyễn Trọng Kiên, Vũ Việt Tài, Nguyễn Trường Giang, 10T, 12T-L PTTH Lê Hồng Phong; **Hòa Bình:** Đỗ Quang Dương, Phùng Minh Đức 11T, 12CT PTTH Hoàng Văn Thủ; **Hà Tây:** Lưu Tiến Đức, 9B Trường chuyên ứng Hòa, Ngô Đình Trung, 12T THCB Sơn Tây, Nguyễn Mạnh Hà, 11A CT PTTH Nguyễn Huệ; **Hà Nội:** Nguyễn Đức Mạnh, 12A PTTH Cố Loa - Đông Anh, Lê Hải Bình, 10 Tin PTTH Hà Nội - Amsterdam; **Bắc Ninh:** Phùng Văn Thủy, 9A THCS Lê Văn Thích - Gia Lương; **Bắc Giang:** Đặng Hoàng Việt Hà, Nguyễn Tiến Mạnh, Phạm Việt ngọc, 12A PTTH Ngõ Sĩ Liên; **Hải Dương:** Nguyễn Huy Khuê, Đào Thu Mai, Trần Đại Nghĩa, Vũ Văn Tâm, Nguyễn Văn Luật, 11CT, 12CT PTTH Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** Dương Mạnh Hùng, Nguyễn Thành Sơn, 12PTNK Hưng Yên; **Hải Phòng:** Phạm Đức Hiệp 8T THCS Chu Văn An, Trần Văn Hà, Nguyễn Mai Hưng, Trần Trung Hiếu, Đoàn

Mạnh Hà, Phạm Dương Hiếu, 10T, 12T PTTH Trần Phú; **Thái Bình:** Vũ Tiến Đạt, 11A PTTH Chuyên; **Quảng Ninh:** Lê Xuân Thành, 12A, PTTH Ha Long; **Vĩnh Phúc:** Vũ Văn Phong, Nguyễn Thành Tú, Cao Thế Thu, 10A, 11A PTTH chuyên; **Phú Thọ:** Nguyễn Kim Sô, 12A PTTH Thanh Ba, Đào Mạnh Thắng, 12A PTTH chuyên Hùng Vương; **Lào Cai:** Nguyễn Hồng Quang, 11A₁ PTTH Lào Cai; **ĐHQG TP Hồ Chí Minh:** Phạm Ngọc Huy, Lê Quang Năm, 10T, 12T Trường PTNK; **ĐHSP Vinh:** Lê Hồng Hà, 12A khối PTCT; **ĐHQG Hà Nội:** Nguyễn Phong Thiên, Hoàng Tùng, Nguyễn Tùng, Đoàn Huy Hiền, Nguyễn Minh Hoài, 10 khối PTCT Tin ĐHKHTN).

3. Có 4 bạn cho nhận xét rằng, bài đã ra là một dạng phát biểu khác của bài toán 1. Tuy nhiên, một số bạn khác lại cho rằng, bài đã ra là bài toán khái quát của bài toán 1. Ai đúng, ai sai? Thiết nghĩ, Lời giải đã trình bày ở trên là lời giải đáp cho câu hỏi đó. Vâ hì vọng, qua đây, các bạn sẽ có cách nhìn nhận đúng hơn đối với bản chất toán học của các vấn đề đã được đặt ra.

4. Nhân đây, xin trình bày thêm một cách giải (ngoài cách giải đã công bố trên Tạp chí THTT) cho bài toán 1:

"Không mất tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$. Khi đó, từ (*) dễ thấy $x \geq 1$ và $z \geq 1$. Hơn nữa, ta còn có:

$$(*) \Leftrightarrow y = \frac{4 - xz}{x + z + xz} \text{ và } (*) \Leftrightarrow xy + yz + zx = 4 - xyz.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } (1) &\Leftrightarrow x + z + \frac{4 - xz}{x + z + xz} \geq 4 - xz, \frac{4 - xz}{x + z + xz} \\ &\Leftrightarrow (x + z)^2 + xz(x + z) + 4 - xz \geq 4(x + z + xz) - xz(4 - xz) \\ &\Leftrightarrow (x + z)^2 - 4(x + z) + 4 + xz(x + z - xz - 1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x + z - 2)^2 + xz(x - 1)(1 - z) \geq 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do } x \geq 1 \geq z \geq 0 \text{ nên (2) là BĐT đúng và vì thế (1)} \\ \text{là BĐT đúng. Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ xz(x - 1)(1 - z) = 0 \\ x = y = z = 1 \\ x = y = 2, z = 0 \text{ (do (*))} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy, (2) được chứng minh và dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hoặc trong 3 số x, y, z có 2 số bằng 2 và số còn lại bằng 0".

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/244. Cho dãy số $\{p(n)\}$ được xác định như sau:

$$p(1) = 1; p(n) = 1.p(n-1) + 2p(n-2) + \dots + (n-1)p(1), n \geq 2.$$

Xác định $p(n)$ với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. (của đa số các bạn)

Với $n \geq 3$ ta có:

$$\begin{aligned} p(n) &= [p(n-1) + p(n-2) + \dots + p(1)] + \\ &\quad + [1.p(n-2) + 2.p(n-3) + \dots + (n-2)p(1)] \\ &= p(n-1) + p(n-2) + \dots + p(1) + p(n-1) \\ &\Leftrightarrow p(n) - p(n-1) = \\ &= p(n-1) + p(n-2) + \dots + p(1) \quad (*) \end{aligned}$$

Thay n bởi $(n+1)$ trong (*) ta được:

$$p(n+1) - p(n) = p(n) + p(n-1) + \dots + p(1) \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta thu được:

$$p(n+1) = 3p(n) - p(n-1); p(1) = 1, p(2) = 1$$

$$\text{Hay: } p(n+2) - 3p(n+1) + p(n) = 0; n \geq 1 (1)$$

$$p(1) = 1, p(2) = 1, p(3) = 3$$

Xét phương trình đặc trưng của (1):

$$t^2 - 3t + 1 = 0$$

Phương trình đặc trưng này có 2 nghiệm

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \text{ Vậy nên:}$$

$$p(n) = a\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + b\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Kết hợp với điều kiện $p(1) = 1, p(2) = 1$, ta thu được hệ: $a = \frac{\sqrt{5}}{5}; b = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ và:

$$p(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \right], n \geq 2.$$

$$p(1) = 1.$$

Nhận xét. Hầu hết các bạn gửi đến đều có lời giải đúng và thường theo cách trình bày ở trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Khánh Hòa: Trần Tuấn Anh, 10A Toán Lê Quý Đôn; **Tây Ninh:** Đoàn Hồng Anh, 11 chuyên Hoàng Lê Kha; **Trà Vinh:** Bùi Trinh Khoa, 10A₁ trung học chuyên; **Hà Giang:** Vũ Anh Hải, 11A PTTH Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Vũ Tiến Đạt, 11A PTTH chuyên; **Hòa Bình:** Phùng Minh Đức, 12CT, Hà Khánh Toàn, 12CT, PTTH NK Hoàng Văn Thủ; **Đà Nẵng:** Nguyễn Tân Phong, 12A₁ PTTH Hoàng Hoa Thám, Lê Văn Duy, 11, Phan Văn Thảo, 11A, Lê Quý Đôn; **Cà Mau:** Phan Quốc Bảo, 12A₁ - PTTH Hồ Thị Kỷ; **Quảng Ninh:** Phan Thành Nam, 11A₁ TH chuyên Hạ Long; **Lào Cai:** Nguyễn Hồng Quang, 11A₁ - PTTH Lào Cai; **Hưng Yên:** Dương Mạnh Hùng, 12 T-L-H, trường thông thông năng khiếu; **Phú Thọ:** Nguyễn Kim Sô, 12A PTTH Thanh Ba, Đào Mạnh Thắng, 12A, Vũ Đoàn Hưng, 10A₁, PTTH chuyên Hùng Vương; **Bình Định:** Ngô Lê Quốc Kha, 11A₁ - Quốc học Quy Nhơn; **Ninh Bình:** Lương Ngọc Anh, 10T - PTTH Lương Văn Tuy; **Yên Bái:** Lê Hồng Hải, 11A₂, Nguyễn Đăng Trung, 11A₂, Nguyễn Công Chính, 11A₁, PTTH chuyên Yên Bái; **Vĩnh Phúc:** Phạm Hoang Hà, 11A chuyên; **Đăk Lăk:** Lê Đình Bình, 12T, Lê Thế Tân, 12T, Lê Anh Dũng, 12CT, PTTH chuyên Nguyễn Du; **Quảng Trị:** Đào Thị Mĩ Châu, 10AT, Lê Thọ Kha, 10T, chuyên lê Quý Đôn, Hoàng Văn Áu, khu phố 5, phường 1, Nguyễn Công Thành, 11 chuyên toán trường chuyên PTTH Lê Quý Đôn; **Quảng Bình:** Nguyễn Hoa, 11 PTTH năng khiếu; **Hải Dương:** Đào Thu Mai, 11T, Nguyễn Huy Khuong, 11T, Phạm Văn Hải, 11T, Trần Đại Nghĩa, 11T, Hoàng Xuân Quỳ, 12T, PTTH Nguyễn Trãi, Phạm Ngọc Hiển, 10 chuyên Toán, Vũ Việt Tài, 10 Toán, PTTH Lê Hồng Phong; **Hải Phòng:** Phạm Dương Hiếu, 12T, Đoàn Trung Cường, 11A₁, Nguyễn Mai Hưng, 10T, Trần Trung Hiếu, 10AT, Đoàn Mạnh Hà, 12T, Nguyễn Bắc Hải, 12 tin, Vũ Huy Toàn, 11T, Trần Văn Hà, 10T, Đặng

Anh Tuấn, 12T, Nguyễn Quang Minh, 10T, PTTH năng khiếu Trần Phú; **Bắc Giang:** Phạm Việt Ngọc, 12A, Vũ Duy Tuấn, 12A, Đặng Hoàng Việt Hà, 12A, Nguyễn Tiến Manh, 12A, PTTH năng khiếu Ngô Sĩ Liên; **Hà Tây:** Đặng Trần Dũng, 10A, Bùi Xuân Hảo, 12A, Nguyễn Manh Hà, 11A chuyên toán, PTTH năng khiếu Nguyễn Huệ, Ngô Đình Trung, 12T, trường THCB Sơn Tây; **TP Hồ Chí Minh:** Lê Quang Năm, 12CT-PTNK-ĐHQG, Vũ Đức Phú, 12CT, Lê Hồng Phong, Nguyễn Lê Lực, 12T-PTNK-ĐHQG; **Hà Nội:** Bùi Thu Cúc, 11A - khối PTCT - DHSPI, Lưu Minh Ngọc, 10AT - ĐHKHTN - ĐHQG, Nguyễn Minh Hoài, 10BT - khối chuyên toán tin ĐHKHTN-ĐHQG, Nguyễn Huy Dương, 10A toán- ĐHKHTN-ĐHQG, Đỗ Minh Châu, 11T₁, PTTH Hà Nội-Amsterdam, Vũ Văn Hải, 10A chuyên toán ĐHSPHN I - ĐHQGHN, Nguyễn Phong Thiên, 10B toán - ĐHKHTN, Nguyễn Minh Công, 11 toán, PTTH Hà Nội-Amsterdam, Dương Việt Hùng, 12A PTTH Vân Nội; **Thanh Hóa:** Lê Xuân Trung, 11T, Lê Văn Phương, 11T, Lê Huy Bình, 11T, Hoàng Yên Thế, 11T, PTTH Lam Sơn, Nguyễn Anh Tuấn, 9B - THCS Lê Quý Đôn, Lê Đức Hân, 11T - PTTH Lam Sơn; **Nghệ An:** Lê Quang Đạo, 10A₂, Hoàng Trường Giang, 12CT, Phan Bội Châu, Đặng Duy Điện Hải, 10T - ĐHSP Vinh, Trần Nam Dũng, 12CT, Hà Văn Đạt, 10A₃, Nguyễn Phan Nhân, 11A, PTTH Phan Bội Châu, Hồ Sĩ Ngọc, 11A - KPTCT-ĐHSP Vinh.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/244. Cho hệ phương trình hai ẩn x, y

$$\begin{cases} k(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = xy \\ k(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (k-1)\sqrt[3]{x^4} = 2y \sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

1) Xác định k để hệ phương trình có nghiệm.

2) Giải hệ phương trình với $k = 16$.

Lời giải. Nếu $k = 0$ hệ có dạng

$$\begin{cases} yx = 0 \\ 2y \sqrt[3]{x^4} = -\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

hệ có nghiệm $(x, y) = (0, c), c \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Xét $k \neq 0$. Đặt $t = \sqrt[3]{x}$ ta được hệ

$$\begin{cases} k(t^6 + t^4 + t^2 + 1) = yt^3 \\ k(t^8 + t^6 + t^4 + t^2 + 1) = (2y + 1)t^4 \end{cases} \quad (I)$$

Ta có $t = 0$ không là nghiệm của hệ.

Đặt $u = t + \frac{1}{t}$ ($|u| \geq 2$) ta có (I) tương đương với

$$\begin{cases} k(u^3 - 2u) = y \\ k(u^4 - 3^2 + 1) = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(u^3 - 2u) = y \quad (II) \\ k(u^4 - 3u^4 + 1) = 2k(u^3 - 2u) + 1 \quad (2) \end{cases}$$

Rõ ràng (II) có nghiệm \Leftrightarrow phương trình (2) có nghiệm.

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u + 1 = \frac{1}{k}.$$

Xét bảng biến thiên của hàm $f(u) = u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u + 1$ Ta thấy với $|u| \geq 2$ thì

$$f(u) \in [-3, \infty].$$

$$\begin{aligned} \text{Vì phương trình (2) có nghiệm } &\Leftrightarrow \frac{1}{k} \geq -3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \leq -\frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận: Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow k \geq 0$ hoặc $k \leq -\frac{1}{3}$

2) Với $k = 16$ phương trình (2) trở thành

$$\begin{aligned} u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u + \frac{15}{16} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2u - 1)^4 - 18(2u - 1)^2 + 32 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (2u - 1)^2 = 2 \\ (2u - 1)^2 = 16 \end{cases} &\Leftrightarrow u = \frac{5}{2} \\ &\quad (\text{loại nghiệm } |u| < 2) \end{aligned}$$

Từ đó $y = 170$ và $x = 8$ hoặc $x = \frac{1}{8}$

Đáp số: $(8, 170), (\frac{1}{8}, 170)$.

Nhận xét. Nhiều bạn giải tốt bài này như các bạn sau đây: Nguyễn Thành Hả, 12A PTTH Kiến Xương, Thái Bình; Trần Đại Nghĩa, 11T, Nguyễn Trãi, Hải Dương; Đào Thị Mỹ Châu, Lê Quý Đôn, Quảng Trị; Vũ Anh Hải, 11A, PTTH Lê Hồng Phong, Hà Giang; Võ Nhu Phương, 12T, Lê Quý Đôn, Quảng Trị; Nguyễn Quang Minh, 10T Trần Phú, Hải Phòng; Vũ Việt Tài, 10T Lê Hồng Phong, Nam Định; Nguyễn Minh Hoài, 10T, khối chuyên ĐHKHTN; Đặng Xuân Thành, PTTH Yên Bài; Hoàng Tùng, 10A ĐHKHTN; Hà Nội; Phùng Đức Tuân, 12CT Hải Dương; Lương Anh Hùng, 11A PTTH chuyên ban Vũng Tàu, Bà Rịa; Nguyễn Lê Lực, 12T PTNK ĐHQG TP Hồ Chí Minh; Đặng Hoàng Việt Hả, 12A Ngô Sỹ Liên, Bắc Giang, Đỗ Minh Châu, 11T Hà Nội-Amsterdam, và nhiều bạn khác. Chỉ có một số ít bạn giải sai.

ĐÁNG HƯNG THÁNG

Bài T9/244. Trong một tam giác dựng ba đường tròn, mỗi đường tròn này tiếp xúc với hai cạnh của tam giác và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác đó. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác theo các bán kính r_1, r_2 và r_3 của ba đường tròn nói trên.

Lời giải. (của nhiều bạn). Đặt $\alpha = \frac{\pi - A}{4}$,

$\beta = \frac{\pi - B}{4}, \gamma = \frac{\pi - C}{4}$; thế thì $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ và từ đó ta được:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha = 1$$

Gọi A', B' và C' là tiếp điểm của đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác ABC lần lượt trên các cạnh BC, CA và AB . Thế thì ba đường tròn nhỏ $(I_i, r_i), i = 1, 2, 3$ nói trong bài toán có thể gọi là ba đường tròn nội tiếp ba tam giác cong lõm $AB'C', BC'A'$ và $CA'B'$. Đường tròn nội tiếp (I, r) và ba đường tròn (I_i, r_i) này chúng ta đã gặp trong bài toán T9/209 (1994). Từ tâm I_3 của đường tròn nội tiếp tam giác cong lõm $CA'B'$, hạ $I_3 I_3 \perp IA' = I_3$, ta được: $II_3 = II_3 \sin \frac{C}{2}$

hay: $r - r_3 = (r + r_3) \sin \frac{C}{2}$. Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{r_3}{r} &= \frac{1 - \sin \frac{C}{2}}{1 + \sin \frac{C}{2}} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi - C}{4} \right) = \operatorname{tg}^2 \gamma \\ \Rightarrow \sqrt{r_3} &= \sqrt{r} \operatorname{tg} \gamma, \end{aligned}$$

và hai hệ thức tương tự:

$$\sqrt{r_1} = \sqrt{r} \operatorname{tg} \alpha, \quad \sqrt{r_2} = \sqrt{r} \operatorname{tg} \beta;$$

Từ (1) và (2) ta thu được hệ thức sau, liên hệ giữa r và r_i ($i = 1, 2, 3$):

$$r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}$$

Đó là hệ thức cần tìm.

Nhận xét. 1) Hệ thức (3) đã được thiết lập trong lời giải của bài toán T9/209 (1994), đăng trong THVT số 213 (1995). Bạn Nguyễn Tiến Manh, 12A PTTHHNK Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang: đã chỉ ra điều này, cho Tòa soạn biết: bạn viết như sau: Đây là một bài toán nhỏ của bài T9/209. Bạn không trình bày lời giải và viết ngay hệ thức (3) ở trên. Bạn Đoàn Mạnh Hả, 12CT PTTHHNK Trần Phú, Hải Phòng cũng có nhận xét như thế. Tòa soạn rất hoan nghênh nhận xét trên của bạn Manh và Hả, nhận xét đó còn chứng tỏ hai bạn Manh và Hả rất quan tâm và yêu thích tạp chí THVT của chúng ta, thường xuyên theo dõi và giải toán đều đặn.

2) Sau đây, người viết nhận xét lời giải bài toán này để xuất hai bài toán tương tự, mong các bạn hưởng ứng bằng cách tự giải các bài toán đó

Bài toán 1. Thay đường tròn nội tiếp (I, r) tam giác ABC bằng đường tròn (J, r) bằng tiếp góc A của tam giác ABC , tiếp xúc với cạnh BC ở A' với hai cạnh AC và AB kéo dài lần lượt ở B' và C' . Tìm hệ thức liên hệ giữa r và các bán kính r_1, r_2, r_3 của các đường tròn nội tiếp các tam giác cong $AB'C', BC'A'$ và $CA'B'$. Hệ thức liên hệ này thay đổi như thế nào so với hệ thức (3) đã tìm được ở trên.

Bài toán 2. Nghiên cứu bài toán tương tự trong HKH của bài toán trên bằng cách: thay tam giác bởi tứ diện, thay đường tròn nội tiếp tam giác bởi mặt cầu nội tiếp tứ diện, thay tam giác cong bởi tứ diện "cong" và đường tròn nội tiếp tam giác cong (I, r) bởi mặt cầu nội tiếp tứ diện "cong" mặt cầu nằm trong tứ diện, tiếp xúc với ba mặt của một góc tam diện và tiếp xúc với mặt cầu nội tiếp tứ diện.

3) Hi vọng trong số gần 300 bạn tham gia giải bài toán này, có không dưới 50% các bạn hưởng ứng giải thêm hai bài toán mới đề xuất ở trên. Chúc các bạn thành công.

NGUYỄN ĐÀNG PHÁT

Bài T10/244. Gọi I và R lần lượt là tổng độ dài các cạnh và bán kính mặt cầu ngoại tiếp một tứ diện. Hỏi trong số các tứ diện, tứ diện nào đạt giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{I}{R}$? Và tính giá trị lớn nhất đó.

Lời giải. (của Lê Đình Bình, 12T, PTTH chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, Đăk Lăk và nhiều bạn khác).

Gọi G và O lần lượt là trọng tâm và tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Theo bất đẳng thức Bunhiacópxki, ta có:

$$\begin{aligned} I^2 &= (BC + CA + AB + DA + DB + DC)^2 \leq \\ &\leq 6(BC^2 + CA^2 + AB^2 + DA^2 + DB^2 + DC^2); \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác, ta lại có:

$$\begin{aligned} BC^2 + CA^2 + AB^2 + DA^2 + DB^2 + DC^2 &= \\ &= (\vec{OC} - \vec{OB})^2 + (\vec{OA} - \vec{OC})^2 + (\vec{OB} - \vec{OA})^2 + \\ &+ (\vec{OA} - \vec{OD})^2 + (\vec{OB} - \vec{OD})^2 + (\vec{OC} - \vec{OD})^2 \\ &= 16R^2 - (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})^2 = \\ &= 16R^2 - 16OG^2 \leq 16R^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được: $I^2 \leq 6.16R^2$

$$\text{hay là: } \frac{I}{R} \leq 4\sqrt{6}; \quad (3)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} BC = CA = AB = DA = DB = DC \\ G = O \end{cases}$$

$\Leftrightarrow ABCD$ là một tứ diện đều.

Kết luận. Trong số các tứ diện thì, tỉ số $\frac{I}{R}$ (giữa tổng độ dài các cạnh và bán kính mặt cầu ngoại tiếp) đạt giá trị lớn nhất ở tứ diện đều, và giá trị đó bằng $4\sqrt{6}$.

Nhận xét. 1) Nhìn chung, hầu hết các bạn đã biết sử dụng phương pháp vecto để giải bài toán này, (chọn tâm O mặt cầu ngoại tiếp tứ diện làm gốc các vectơ).

2) Để đánh giá, ước lượng các величин hình học, mà cụ thể trong bài toán này là độ dài đoạn thẳng, các bạn đã biết sử dụng một BĐT. dài số quen thuộc là BĐT Bunhiacópxki:

$$\begin{aligned} (a+b+c+a'+b'+c')^2 &\leq \\ &\leq (1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2) \end{aligned}$$

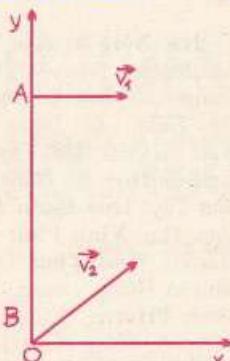
3) Tuy nhiên, về mặt trình bày lời giải thi lời giải nêu trên là ngắn gọn, sáng sủa và theo đúng phong cách của phương pháp tổng hợp hơn cả. Ngoài bạn Lê Đình Bình, các bạn sau đây có lời giải tốt.

Hà Nội: Nguyễn Minh Công, 11T, Hà Nội - Amsterdam, Nguyễn Đức Mạnh, 12A PTTH Cố Loa, Đông Anh; **Bắc Giang:** Nguyễn Tiến Mạnh, 12A, Vũ Duy Tuấn, 12A, Đặng Hoáng Việt Hà, 12A, PTTHHNK Ngô Sĩ Liên; **Hà Tây:** Bùi Xuân Hảo, 12A, PTTH Nguyễn Huệ, Hà Đông, Ngô Đình Trung, 12T, THCB Sơn Tây; **Hòa Bình:** Đỗ Quang Dương, 11T, Hoàng Văn Thu; **Vĩnh Phú:** Phạm Hoàng Hà, 11A, THPT chuyên: **Phú Thọ:** Đào Mạnh Thắng, 12A PTTH chuyên Hùng Vương, Nguyễn Ngọc Kiến, 9A, THCS Minh Phượng, Việt Trì; **Yên Bái:** Tạ Xuân Hưng, 11A₂, Lê Hồng Hải, 11A₂, Nguyễn Đăng Trung, 11A₂, PTTH chuyên Yên Bái; **Đà Nẵng:** Nguyễn Dũng, 11 toán tin, Đào Chu Mai, 11Ct, Nguyễn Quỳnh Diệp, 11T, Vũ Văn Tâm, 11T, Trần Đại Nghĩa, 11T, Phùng Đức Tuấn, 12T, Hoàng Xuân Quý, 12T, PTTH Nguyễn Trãi, Vũ Đặng Huyền, 12G, PTTH Từ Ký; **Đà Nẵng:** Nguyễn Bắc Hải, 12 Tin, Trịnh Việt Anh, 11 toán, Đặng Anh Tuấn, 12 toán, PTTHHNK Trần Phú; **Thái Bình:** Trịnh Thị Thu Hiền, 11D PTTH Bác Kiến Xương; **Ninh Bình:** Lê Hồng Linh, 10T, Vũ Hải Châu, 12T, Vũ Hồng Việt, Lương Ngọc Anh, 10T, PTTH Lương Văn Tụy; **Thanh Hóa:** Lê Ngọc Giang, 10A, Lê Huy Bình, 11, PTTH Lam Sơn; **Nghệ An:** Võ Văn Vinh, 10A₄, Trần Nam Dũng, 12T Phan Bội Châu, Hồ Sỹ Ngọc, 11A PTCT ĐHSP Vinh; **Quảng Bình:** Đỗ Hải Phú, 12A₁, Nguyễn Trung Kiên, 12A₂, THCB Lê Thủy; **Quảng Trị:** Đào Thị Mỹ Châu, 10T, Trần Nhật Hóa, 11T, Nguyễn Công Thành, 11T PTTH Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên - Huế:** Trần Bá ôn, 11CT, ĐHKH; **Quảng Nam:** Nguyễn Hùng Đại, 12A₂, PTTH Huỳnh Ngọc Huệ, Đạt Lộc; **Phú Yên:** Nguyễn Ngọc Minh, 11T, LVC; **Khánh Hòa:** Trần Tuấn Anh, 10T Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Đăk Lăk:** Lê Thế Tân, 12T, Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **TP Hồ Chí Minh:** Lê Quang Năm, 12T, PTNK ĐHKHTN, Vũ Đức Phú, 12C PTTH Lê Hồng Phong; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Lương Anh Hùng, 11A₁, THCB Vũng Tàu; **Vĩnh Long:** Ninh Hồng Phú, Cao Minh Quang, 12T; PTTH chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Hưng Yên:** Nguyễn Thành Sơn, 12 tự nhiên, PTTHHNK Hưng Yên.

4) Ngoài ra, bạn Võ Văn Vinh còn đề xuất và giải đúng bài toán tương tự; Trong số các tứ diện thi, tỉ số $\frac{\frac{I}{R}}{R^2}$ giữa diện tích toàn phần và bình phương bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đạt giá trị lớn nhất ở tứ diện đều. Cũng có một số bạn khác đề xuất và giải bài toán tổng quát đối với hình đa diện lồi (có n đỉnh). Đáng tiếc, các bạn này đã giải sai vì chưa nắm vững khái niệm và tính chất đặc trưng (cùng sự phân loại các đa diện đều) của các hình đa diện đều nên đã dẫn đến kết luận sai lầm và vội vàng (xem đường chéo cũng là cạnh !!!) Trừ bạn Hoàng Xuân Quý có đề xuất bài toán xét đa diện nội tiếp một hình cầu cùng tỉ số $\frac{I}{R}$ giữa tổng độ dài các cạnh và bán kính mặt cầu ngoại tiếp đa diện đó. Bạn Quý đã đến kết luận: $\frac{I}{R}$ đạt max = $n\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$ ở đa diện đều (hoặc đa giác đều) trong đó n là số đỉnh, nhưng chỉ là trực giác, không có lí luận chặt chẽ và cụ thể.

NGUYỄN ĐÀNG PHÁT

Bài L1/244. A đi về hướng Đông với vận tốc không đổi $v_1 = 15\text{km/h}$. B ở phía Nam, cách A 6km, đồng thời chuyển động đều với vận tốc $v_2 = 26\text{km/h}$, theo hướng tạo với phương ngang một góc α . Khoảng cách nhỏ nhất giữa chúng là 3km.



- 1) Xác định hướng di chuyển của B (góc α)?
- 2) Tim thời gian chuyển động khi A và B cách nhau một khoảng nhỏ nhất.

Hướng dẫn. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Tọa độ của A và B ở thời điểm t : $x_1 = v_1 t$; $y_1 = 6$; $x_2 = v_2 t \cos \alpha$; $y_2 = v_2 t \sin \alpha$. Khoảng cách giữa A và B ở thời điểm t :

$$\begin{aligned} S^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \\ &= (v_1 - v_2 \cos \alpha)^2 t^2 + (6 - v_2 t \sin \alpha)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Từ điều kiện $\frac{dS}{dt} = 0$ rút ra

$$t_{\min} = \frac{6v_2 \sin \alpha}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha} \quad (2)$$

Thay t_{\min} vào (1) và đặt $S^2 = 3^2 = 9$, rút ra

$$936 \cos^2 \alpha - 810 \cos \alpha = 0.$$

Suy ra $\alpha_1 \approx 90^\circ$ và $\alpha_2 \approx 30^\circ$.

Từ đó $t_{\min 1} \approx 0,17h \approx 10$ phút và $t_{\min 2} \approx 0,35h \approx 21$ phút.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn: Mai Anh Tuấn, 12A2, PTTH chuyên Lê Quý Đôn, TP Đà Nẵng; Đào Anh Đức 10A3, PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An; Nguyễn Việt Tiến 12A1, PTTH Vĩnh Linh, Quảng Trị; Đặng Trần Trí, 10CL, PTTH Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh; Trần Mai Sơn Hà, 12CL, PTTH Năng khiếu Quảng Bình; Lê Thị Nhu Bích, 10CT, Quốc học Huế; Phùng Đức Tuấn, 12CT, PTTH Nguyễn Trãi, Hải Dương; Nguyễn Quang Tùng, 12 chuyên Hóa, ĐHKHTN, Đại học Quốc gia Hà Nội; Nguyễn Thái Hà, 12A1, PTTH chuyên Yên Báu, Yên Báu; Nguyễn Minh Vũ, 11L, PTTHHNK Hán Thuyên, Bắc Ninh; Nguyễn Văn Thới, 12A, PTTH Lê Quý Đôn, Long An; Nguyễn Trung Dũng, 10L, PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định; Nguyễn Quang Hưng, 11CL, PTTHHNK Hoàng Văn Thu, Trương Quang Trí, 12A1, THCB Sơn Tịnh 1, Quảng Ngãi; Nguyễn Thành Tùng, 10A2, chuyên Hùng Vương, Phú Thọ; Đào Xuân Thân, 12B, PTTH dân lập Châu Phong, Mê Linh, Vĩnh Phúc; Nguyễn Thành Tùng, 10C chuyên Vĩnh Phúc; Trương Hữu Cát, 10L, THCB Năng khiếu, Hà Tĩnh.

MAI ANH

Bài L2/244. Có một nguồn điện U dao động trong khoảng $(240V \div 120V)$, một ngắt K và 5

đèn: 2 đèn R_1, R_2 ghi $(120V - 120W)$; 2 đèn R_3, R_4 ghi $(120V - 60W)$; một đèn R_5 . Yêu cầu không đèn nào được sáng quá định mức, hãy:

1) Mắc một mạch sao cho:

- Khi $U = 240V$ và mở K, chỉ có R_1, R_2 sáng đúng mức.

- Khi $U = 220V$, đóng K, chỉ có R_1 sáng đúng mức. Từ đó tính R_5 .

2) Mắc lại mạch sao cho:

- Khi $U = 210V$, đóng K, chỉ có R_3, R_4, R_5 sáng đúng mức;

- Khi $U = 180V$, mở K, chỉ có R_3, R_4 sáng đúng mức.

Từ đó tính hiệu điện thế định mức và công suất định mức của R_5 .

3) Mắc lại mạch, có thêm một biến trở R , sao cho như U thay đổi từ $240V$ đến $120V$, sử dụng R vẫn luôn luôn có r_1, R_2, R_3, R_4 sáng đúng mức. Tính giá trị lớn nhất của R . Tim điều kiện để cả R_5 cũng sáng đúng mức.

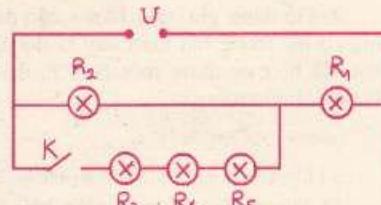
Hướng dẫn giải. Trước hết tính các điện trở R_1, R_2, R_3, R_4 của các đèn (coi như không thay đổi): $R_1 = R_2 = 120\Omega$ và $R_3 = R_4 = 240\Omega$. Sau đó tìm cách mắc sao cho thỏa mãn được yêu cầu của đề bài, với lưu ý rằng đèn sáng đúng mức khi hiệu điện thế đặt vào nó đúng bằng hiệu điện thế định mức. Chẳng hạn với trường hợp 1, vì hai đèn R_1, R_2 giống nhau và có hiệu điện thế định mức là $120V$, cho nên muốn mắc vào nguồn $220V$ sao cho R_1, R_2 sáng đúng mức thì phải mắc R_1 và R_2 nối tiếp với nhau vào nguồn. Còn 3 bóng R_3, R_4, R_5 còn lại thì mắc thành 1 nhánh thứ hai, nhánh này nối với nhánh R_1, R_2 nói trên qua một cái ngắt điện K. Phương án mắc R_3, R_4, R_5 tùy thuộc vào yêu cầu thứ hai: khi $U = 220V$ và đóng K chỉ có R_1 sáng đúng mức, nghĩa là hiệu điện thế trên R_1 bằng $120V$, và do đó phần còn lại (sau khi đóng K) phải có hiệu điện thế bằng $220-120 = 100V$, dựa vào đó tính được R_5 . Sơ đồ đơn giản nhất là như sau (hình 1).

Khi đó $R_5 = 120\Omega$. Còn sơ đồ khác gần tương tự nhau, chẳng hạn

Khi đó $R_5 = 2880\Omega$.

Nếu mắc R_5 ở đoạn BC còn R_3, R_4 ở đoạn AB thì $R_5 = 240\Omega$.

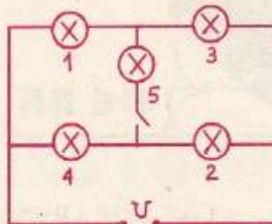
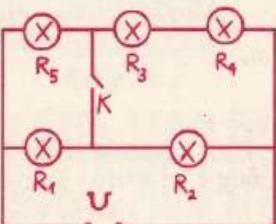
Nếu mắc $R_3 // R_4$ vào hai



đầu B, C thì $R_5 = 180\Omega$. Cũng có thể mắc $R_3 R_5$ vào đoạn AB còn R_4 ở đoạn BC thi $R_5 = 240\Omega$. Cuối cùng, ở hình 1 nếu mắc R_5 nối tiếp ($R_3 // R_4$) thì $R_5 = 480\Omega$. Đó là tất cả các sơ đồ khả dĩ. Sử dụng các giá trị khả dĩ đó của R_5 để xét tiếp trường hợp 2 và 3 và sẽ thấy giá trị nào của R_5 phù hợp với yêu cầu của đề bài, từ đó tính được đáp số cần thiết. Kết quả là:

Trường hợp 2: + Với $R_5 = 120\Omega$, mắc sơ đồ ($R_1 // R_2$) nt ($R_3 // R_4, R_5$), tìm được đèn 5 ghi $120V - 60W$; Với $R_5 = 120\Omega$, mắc 5 đèn thành mạch cầu (hình 3), tìm được đèn R_5 ghi $(30V - 7,5W)$; đổi chỗ đèn 1 và đèn 5, tìm được đèn R_5 ghi $(90V - 67,5W)$:

+ VỚI $R_5 = 240\Omega$, mắc sơ đồ ($R_1 // R_2$) nt ($R_3 // R_4 // R_5$), tìm được đèn R_5 ghi $(120V - 60W)$.



Trường hợp 3.

Sử dụng 3 đèn R_5 vừa tìm được ở trên.

+ VỚI ĐÈN R_5 ($120V - 60W$): Mắc ($R_1 // R_2 // R_3 // R_4$) nt ($R // R_5$) tìm được $R_{max} = 48\Omega$;

$U_{phai} = 240V$.

+ VỚI ĐÈN R_5 ($30V - 7,5W$): Mắc như trên. $R_{max} = 40\Omega$ khi K mở. Khi K mở $R_{max} \approx 11\Omega$; $U_{phai} = 150V$.

+ VỚI ĐÈN R_5 ($90V - 67,5W$): $R_{max} = 40\Omega$; $U = 210V$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng: **Đào Anh Đức**, 10A3, trường PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An; **Đặng Trần Trí**, 10CL, PTTH Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh; **Nguyễn Ngọc Tuấn**, 11F chuyên lí, PTTH chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ.

MAI ANH

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS.

T1/248. Prove that if $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ and $a^2 + b^2 + c^2 = 90$ then $a + b + c \geq 16$

T2/248. Solve the system of equations:

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

T3/248. In the plane, let be given 6 points, no three of them are collinear and the distances between them are distinct numbers. Consider the triangles formed by the segments joining these points. Prove that there exists a segment which is the shortest side of one such triangle and simultaneously the longest side of another such triangle.

T4/248. The altitudes AH , BE and CF of an acuteangled triangle ABC cut again the circumcircle of ABC respectively at M , N and K . Calculate $\frac{AM}{AH} + \frac{BN}{BE} + \frac{CK}{CF}$

T5/248. The incircle of an equilateral triangle ABC touches the sides BC , CA , AB respectively at A' , B' , C' . Let M be an arbitrary point on the minor arc $B'C'$ and H, K, L be its orthogonal projections respectively on the sides BC , CA , AB . Prove that

$$\sqrt{MH} = \sqrt{MK} + \sqrt{ML}$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/248. For each $n \in \mathbb{N}$, let $T(n)$ be the sum of the digits of n , written in decimal system.

1) Prove that

$$\alpha T(\beta) + \beta T(\alpha) - 2T(\alpha \cdot \beta) : 9 \quad (\text{for } \alpha, \beta \in \mathbb{N})$$

$$2) \text{Calculate } Q = \sum_{k=1}^{1998} T(k)$$

T7/248. Prove the equality:

$$(1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)^2 = 2^n$$

T8/248. Find all positive integers x, y, z satisfying the equation $\sqrt{x + 2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$

T9/248. Let M be the point inside a given triangle ABC such that $AMC = 90^\circ$, $AMB = 150^\circ$ and $BMC = 120^\circ$. Let P, Q, R be respectively the circumcenters of the triangles AMC , AMB and BMC . Compare the areas of the triangles PQR and ABC .

T10/248. Let be given a triangle ABC ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$) and let A_1, B_1, C_1 be respectively the points of intersection of the inbisectors of the angles A, B, C with the opposite sides. The lines passing through A, B, C parallel respectively to B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 , by cutting each other, form a triangle $A_2B_2C_2$. Prove that

$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8R}$$

where R is the radius of the circumcircle of ABC .



DỄ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài T1/248: Chứng minh rằng nếu $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$ thì $a + b + c \geq 16$

TRẦN VĂN VUÔNG
(Hà Nội)

Bài T2/248: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

ĐỖ THANH HÂN
(Bac Liêu)

Bài T3/248: Trên mặt phẳng cho 6 điểm mà khoảng cách của chúng khác nhau từng đôi một và không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nối các điểm đó với nhau bằng những đoạn thẳng ta thu được một số tam giác. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng là cạnh nhỏ nhất của tam giác đồng thời là cạnh lớn nhất của một tam giác khác.

TRỊNH TUÂN
(Thanh Hóa)

Bài T4/248: Các đường cao AH , BE và CF của tam giác nhọn ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác đó tại các điểm thứ hai tương ứng M, N, K .

Tính $\frac{AM}{AH} + \frac{BN}{BE} + \frac{CK}{CF}$

NGUYỄN DỄ
(Hải Phòng)

Bài T5/248: Cho tam giác đều ABC , đường tròn nội tiếp của tam giác tiếp xúc với 3 cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C' . Gọi M là một điểm bất kì trên cung nhỏ $B'C'$ và H, K, L lần lượt là hình chiếu của M lên các cạnh BC, AC, AB . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{MH} = \sqrt{MK} + \sqrt{ML}$$

PHƯƠNG TỐ TỰ
(Tp Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP PHỔ THÔNG TRUNG HỌC

Bài T6/248: Với mỗi $n \in N$, ký hiệu $T(n)$ là tổng các chữ số của n viết trong hệ thập phân.

a) Chứng minh rằng:

$$\alpha T(\beta) + \beta T(\alpha) - 2T(\alpha \cdot \beta) : 9 ; (\alpha, \beta \in N)$$

1998

b) Tính: $Q = \sum_{k=1}^{1998} T(k)$

DOÀN KIM SANG
(Yên Bái)

Bài T7/248: Chứng minh đẳng thức

$$(1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)^2 = 2^n$$

ở đó $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

DOÀN NHU TRIỆU
(Hải Dương)

Bài T8/248: Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình:

$$\sqrt{x+2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

TRẦN DUY HINH
(Quy Nhơn)

Bài T9/248: Giả sử M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $AMC = 90^\circ$, $AMB = 150^\circ$ và $BMC = 120^\circ$. Gọi P, Q, R là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMC , AMB và BMC . Hãy so sánh diện tích của hai tam giác PQR và ABC .

PHẠM NGỌC QUANG
(Thanh Hóa)

Bài T10/248: Cho tam giác ABC ($BC = a$; $CA = b$; $AB = c$). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của các đường phân giác trong của các góc A, B, C với các cạnh đối diện. Qua A, B, C kẻ các đường thẳng song song với $B_1C_1; C_1A_1; A_1B_1$, chúng cắt nhau tạo thành tam giác $A_2B_2C_2$. Chứng minh:

$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8R}$$

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
HO QUANG VINH
(Nghệ An)

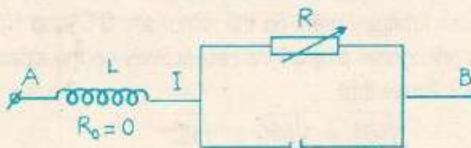
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/248: Một quả cầu có thể tích $V = 50\text{cm}^3$, có khối lượng $m = 10\text{g}$, được gắn vào một sợi dây. Đầu còn lại của sợi dây được gắn với đáy bể đựng chất lỏng. Khối lượng riêng của chất lỏng $D = 1500\text{kg/m}^3$. Đẩy cho dây neo quả cầu lệch khỏi phương thẳng đứng 5° rồi thả tay cho quả cầu dao động. Chiều dài dây neo $l = 1\text{m}$. Trong khi dao động, quả cầu luôn luôn ở trong lòng chất lỏng. Ma sát giữa quả cầu và chất lỏng được bỏ qua. Chứng minh quả cầu dao động điều hòa và lập phương trình dao động.

PHẠM HƯNG QUYẾT
(Hà Nội)

Bài L2/248: Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ với $L = \frac{1}{\pi} H$; $U_{AB} = 100\text{V}$. Chứng tỏ rằng ta có thể tìm được một giá trị C để dòng điện hiệu dụng I_A qua R không phụ thuộc R . Tính I_R .

TRẦN TRỌNG HUNG
(Quảng Ngãi)



TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM đối với MỘT ĐƯỜNG CÔ-NIC

NGUYỄN ĐẠO PHƯƠNG

CÁC bạn đã được làm quen với các đường cô-nic qua sách giáo khoa.

Trong bài viết này tôi xin giới thiệu một tính chất khác của ba đường cô-nic đã được các nhà toán học nghiên cứu và ứng dụng. Đó là phương tích của một điểm đối với một đường cô-nic. Ta đã biết khi tâm sai e của ba đường cô-nic tiến tới O thì các đường này suy biến về một đường tròn. Đối với đường tròn (\mathcal{C}) tâm O bán kính R , một đường thẳng chuyển động Δ luôn di qua một điểm cố định M , cắt (\mathcal{C}) tại hai điểm A, B , phương tích của điểm M đối với (\mathcal{C}) là :

$$\wp_M/(\mathcal{C}) = MA \cdot MB = MO^2 - R^2 = \text{không đổi.}$$

$\wp_M/(\mathcal{C})$ là một đại lượng đại số, có giá trị dương, âm, bằng không tùy theo điểm M ở ngoài, trong hoặc ở trên (\mathcal{C}).

Vậy trong trường hợp tổng quát, liệu đối với đường cô-nic (Γ) có phương tích của một điểm cố định M đối với (Γ) hay không, đại lượng đó là đại lượng nào, vì sao đại lượng này là không đổi đối với M và (Γ) đã chọn.

I. Phương tích của một điểm M đối với một đường cô-nic (Γ)

Trên mặt phẳng cho đường cô-nic (Γ), tiêu điểm F , đường chuẩn (D) ứng với F . Δ là một đường thẳng chuyển động luôn qua một điểm cố định M , cắt (Γ) tại A và B , hợp với trực tiêu của cô-nic góc α , $0 \leq \alpha \leq \pi$ (trực tiêu là đường thẳng qua F vuông góc với (D)). Phương tích của điểm M đối với cô-nic (Γ) là :

$$\begin{aligned} \wp_M/(\Gamma) &= \overline{MA} \cdot \overline{MB} (1 - e^2 \cos^2 \alpha) = \\ &= MF^2 - e^2 MH^2 = \text{không đổi} \end{aligned}$$

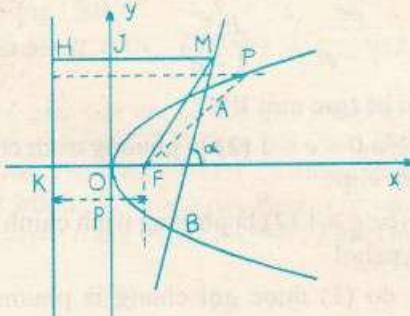
e là tâm sai của cô-nic, H là hình chiếu vuông góc của M trên (D). Trong phần tiếp theo ta sẽ chứng minh, với M và (Γ) đã cho, đại lượng $\wp_M/(\Gamma)$ không đổi và

$$MA \cdot MB (1 - e^2 \cos^2 \alpha) = MF^2 - e^2 MH^2$$

II. Phương trình của cô-nic (Γ) đối với tiêu điểm F và đường chuẩn (D) ứng với F

Trên mặt phẳng cho điểm F cố định và đường thẳng (D) cố định không qua F , ta tìm

quỹ tích các điểm P sao cho tỉ số khoảng cách từ P đến F và đến (D) bằng một số không đổi.



Gọi I là hình chiếu vuông góc của P trên (D) và e là số không đổi. Ta tìm quỹ tích của P sao cho $\frac{PF}{PI} = e = \text{không đổi}$ ($e > 0$). Gọi K là hình chiếu của F trên (D). Đặt $KF = p$. Chọn điểm O trên đường thẳng KF sao cho $\frac{OF}{OK} = -e$ (như vậy O là điểm quỹ tích vì $\frac{OF}{OK} = e$).

Lập hệ trục tọa độ vuông góc Đề các Oxy, trục hoành Ox chứa KF, chiếu dương từ K đến F trực tung Oy vuông góc với Ox tại O.

Từ $\frac{OF}{OK} = -e$ ta được $\overline{OF} = \frac{pe}{1+e}$ và $\overline{OK} = \frac{-p}{1+e}$ tọa độ của F là $F\left(\frac{pe}{1+e}; 0\right)$, của K là $K\left(\frac{-p}{1+e}; 0\right)$. Gọi x, y là tọa độ của điểm P , ta có $\overline{PI} = -\left(x + \frac{p}{1+e}\right)$ và $\overline{PF}^2 = \left(x - \frac{pe}{1+e}\right)^2 + y^2$.

Từ $\frac{PF}{PI} = e$ ta được $\overline{PF}^2 = e^2 \overline{PI}^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{pe}{1+e}\right)^2 + y^2 = e^2 \left(x + \frac{p}{1+e}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - e^2)x^2 - 2pex + y^2 = 0 \quad (1)$$

(1) là phương trình quỹ tích của P

a) Nếu $e = 1$ (1) $\Leftrightarrow y^2 = 2px$ quỹ tích là một parabol

b) Nếu $0 < e \neq 1$

Tịnh tiến hệ trục tọa độ Oxy , lấy W ($\frac{pe}{1-e^2}; 0$) làm gốc hệ trục mới WXY , công thức tịnh tiến hệ trục là :

$$\begin{cases} x = X + \frac{pe}{1-e^2} \\ y = Y \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\frac{pe}{1-e^2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\frac{p^2e^2}{1-e^2}} = 1 \quad (2)$$

Với hệ trục mới WXY :

+ Nếu $0 < e < 1$ (2) là phương trình chính tắc của một elip

+ Nếu $e > 1$ (2) là phương trình chính tắc của một hyperbol

Do đó (1) được gọi chung là phương trình của ba đường cô-nic (Γ) (theo tâm sai e và tham số tiêu p)

III. Giá trị của $\wp_M/(\Gamma)$

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Phương trình tham số của

$$(\Delta) : \begin{cases} x = x_o + t\cos\alpha \\ y = y_o + t\sin\alpha \end{cases} \quad (x_o, y_o \text{ là tọa độ của điểm } M)$$

Xét điểm M' chạy trên Δ . Giá trị của $\overline{MM'} = t$ (tham số). Khi M' ở A và ở B ta có $MA = t_A, MB = t_B$.

Tọa độ của A và B là nghiệm của hệ :

$$(\Gamma_{x,y}) : (1 - e^2)x^2 - 2pex + y^2 = 0$$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = x_o + t\cos\alpha \\ y = y_o + t\sin\alpha \end{cases}$$

Thay giá trị của x, y từ (Δ) vào $(\Gamma_{x,y})$ ta được phương trình bậc hai (ân t):

$$(1 - e^2\cos^2\alpha)t^2 + 2[(1 - e^2)(x_o\cos\alpha - p\cos\alpha) + y_o\sin\alpha]t + (1 - e^2)x_o^2 - 2pex_o + y_o^2 = 0 \quad (3)$$

Vì theo giả thiết (Δ) cắt (Γ) tại hai điểm A, B nên phương trình (3) có hai nghiệm t_A, t_B .

Theo định lí Viết ta được :

$$t_A - t_B = \frac{(1 - e^2)x_o^2 - 2pex_o + y_o^2}{1 - e^2\cos^2\alpha}$$

Do đó

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB}(1 - e^2\cos^2\alpha) = (1 - e^2)x_o^2 - 2pex_o + y_o^2$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \wp_M/(\Gamma) &= \overline{MA} \cdot \overline{MB}(1 - e^2\cos^2\alpha) = \\ &= (1 - e^2)x_o^2 - 2pex_o + y_o^2 \end{aligned}$$

Bạn đọc để ý rằng kết quả này tương tự với phương tích của điểm $M(x_o, y_o)$ đối với đường tròn (\mathcal{C}) :

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 - C > 0) \text{ là } \wp_M/(\mathcal{C}) = x_o^2 + y_o^2 + 2Ax_o + 2By_o + C$$

Bây giờ ta chứng minh

$$\wp_M/(\Gamma) = MF^2 - e^2MH^2$$

Gọi J là giao điểm của MH với trục Oy. Ta có $\overline{MH} = \overline{MJ} + \overline{JH} = -x_o + \overline{OK} = -x - \frac{p}{1+e}$

$$\text{Do đó } \overline{MF}^2 - e^2\overline{MH}^2 =$$

$$= \left(x_o - \frac{pe}{1+e} \right)^2 + y_o^2 - e^2 \left(x + \frac{p}{1+e} \right)^2 = (1 - e^2)x_o^2 - 2pex_o + y_o^2$$

$$\text{Vậy } \wp_M/(\Gamma) =$$

$$= MA \cdot MB(1 - e^2\cos^2\alpha) = \overline{MF}^2 - e^2\overline{MH}^2 = (1 - e^2)x_o^2 - 2pex_o + y_o^2 = \text{không đổi}$$

IV. Một vài ứng dụng

a) *Bài toán về tứ giác nội tiếp.* Cho cô-nic (Γ) . Qua một điểm M có hai cát tuyến Δ_1 và Δ_2 . Hai đường thẳng này cắt (Γ) theo thứ tự ở A, B và C, D. Chứng minh điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD nội tiếp là Δ_1, Δ_2 nghiêng đều trên trực tiêu.

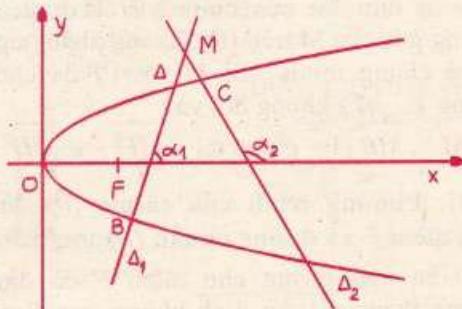
Δ_1, Δ_2 hợp với trực tiêu OF các góc α_1, α_2

Phương tích của giao điểm M đối với (Γ) là :

$$\begin{aligned} \wp_M/(\Gamma) &= \overline{MA} \cdot \overline{MB}(1 - e^2\cos^2\alpha_1) = \\ &= \overline{MC} \cdot \overline{MD}(q - e^2\cos^2\alpha_2) \end{aligned} \quad (4)$$

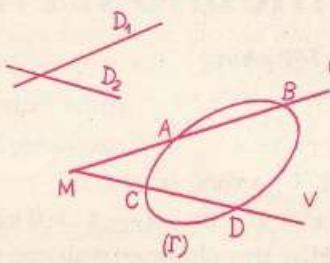
Nếu tứ giác ABCD nội tiếp thì $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$, do đó $\cos^2\alpha_1 = \cos^2\alpha_2$.

Từ đó ta được $\alpha_1 = \alpha_2$ hoặc $\alpha_1 = \pi - \alpha_2$. Loại bỏ trường hợp $\alpha_1 = \alpha_2$ ta được $\alpha_1 = \pi - \alpha_2$. Điều ngược lại cũng đúng.



Vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Leftrightarrow \Delta_1, \Delta_2$ nghịch đảo trên trục tiêu.

b) *Bài toán Newton.* Cho cô-nic (Γ) và hai đường thẳng cắt nhau D_1, D_2 . Một góc MUV chuyển động sao cho cạnh MU và cạnh MV cắt (Γ) và sao cho $MU \parallel D_1 ; MV \parallel D_2$. Gọi các giao điểm của MU, MV với (Γ) là $A; B$ và $C; D$. Chứng minh $\frac{\overline{MA} \cdot \overline{MB}}{\overline{MC} \cdot \overline{MD}} = \text{khoảng đổi}$.



D_1 và D_2 hợp với trục tiêu các góc α_1 và α_2 không đổi.

Ta có :

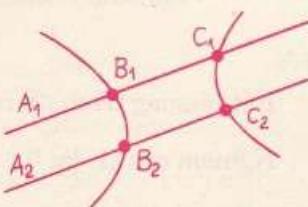
$$\varphi_M/(\Gamma) = \frac{\overline{MA} \cdot \overline{MB}}{\overline{MC} \cdot \overline{MD}} (1 - e^2 \cos^2 \alpha_1) = \\ = \frac{\overline{MC} \cdot \overline{MD}}{\overline{MA} \cdot \overline{MB}} (1 - e^2 \cos^2 \alpha_2)$$

Do đó

$$\frac{\overline{MA} \cdot \overline{MB}}{\overline{MC} \cdot \overline{MD}} = \frac{1 - e^2 \cos^2 \alpha_2}{1 - e^2 \cos^2 \alpha_1} = \text{khoảng đổi}$$

c) *Bài toán Mac-Laurin* Cho cô-nic (Γ) và hai điểm cố định A_1, A_2 ; Δ_1 và Δ_2 là hai đường thẳng chuyển động luôn song song với nhau, Δ_1 qua A_1, Δ_2 qua A_2 .

Δ_1, Δ_2 cắt (Γ) tại B_1, C_1 và B_2, C_2 . Chứng minh $\frac{\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_1C_1}}{\overline{A_2B_2} \cdot \overline{A_2C_2}} = \text{khoảng đổi.}$



Δ_1, Δ_2 cùng hợp với trục tiêu góc α .

Ta có :

$$\varphi_{A_1}/(\Gamma) = \overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_1C_1} (1 - e^2 \cos^2 \alpha)$$

$$\varphi_{A_2}/(\Gamma) = \overline{A_2B_2} \cdot \overline{A_2C_2} (1 - e^2 \cos^2 \alpha)$$

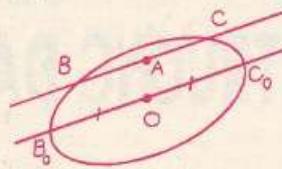
Vì $\varphi_{A_1}/(\Gamma); \varphi_{A_2}/(\Gamma)$ là các số không đổi nên $\frac{\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_1C_1}}{\overline{A_2B_2} \cdot \overline{A_2C_2} (1 - e^2 \cos^2 \alpha)} = \text{khoảng đổi}$

do đó $\frac{\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_1C_1}}{\overline{A_2B_2} \cdot \overline{A_2C_2}} = \text{khoảng đổi.}$

d) *Bài toán*

C.Michel + Clifftord

Cho cô-nic (Γ) có tâm là O . A là một điểm cố định. Một đường thẳng Δ chuyển động luôn qua A cắt (Γ) ở B và C ; d là một đường kính của (Γ) song song với Δ cắt (Γ) ở B_o và C_o . Chứng minh $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{OB_o}^2} = \text{khoảng đổi.}$



Δ và d cùng hợp với trục tiêu góc α . Ta có :

$$\varphi_A/(\Gamma) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{OB_o} \cdot \overline{OC_o}} (1 - e^2 \cos^2 \alpha)$$

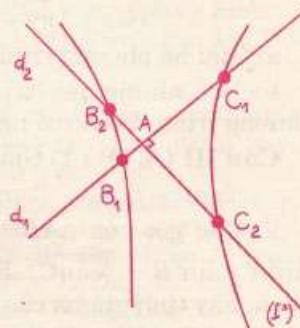
và $\varphi_O/(\Gamma) = \frac{\overline{OB_o} \cdot \overline{OC_o}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} (1 - e^2 \cos^2 \alpha)$

$$\text{Do đó } \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{OB_o}^2} = - \frac{\varphi_A/(\Gamma)}{\varphi_O/(\Gamma)} = \text{khoảng đổi}$$

e) *Bài toán*

Michel. Cho

cô-nic (Γ) , tâm O , không phải là hyperbol vuông góc, A là một điểm cố định, d_1 và d_2 là hai đường thẳng chuyển động luôn qua A và luôn vuông góc với nhau cắt (Γ) theo thứ tự ở B_1, C_1 và B_2, C_2 . Chứng minh



$$\frac{1}{\overline{AB}_1 \cdot \overline{AC}_1} + \frac{1}{\overline{AB}_2 \cdot \overline{AC}_2} = \text{khoảng đổi.}$$

Ta có $\varphi_A/(\Gamma) = \frac{1}{\overline{AB}_1 \cdot \overline{AC}_1} (1 - e^2 \cos^2 \alpha)$ (1) với α là góc hợp bởi d_1 và trục tiêu.

Do $d_1 \perp d_2$ nên d_2 hợp với trục tiêu góc $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, ta có :

$$\varphi_A/(\Gamma) = \frac{1}{\overline{AB}_2 \cdot \overline{AC}_2} (1 - e^2 \sin^2 \alpha) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\overline{AB}_1 \cdot \overline{AC}_1} + \frac{1}{\overline{AB}_2 \cdot \overline{AC}_2} = \\ & = \frac{1 - e^2 \cos^2 \alpha + 1 - e^2 \sin^2 \alpha}{\varphi_A/(\Gamma)} = \frac{2 - e^2}{\varphi_A/(\Gamma)} = \\ & = \text{khoảng đổi} \end{aligned}$$

Ta được đpcm với điều kiện $e \neq \sqrt{2}$ tức (Γ) không phải là hyperbol vuông góc.

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG HÀ NỘI - 1997

Thời gian làm bài : 180 phút

Câu I (A, D) : Cho hàm số :

$$x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$$

1) Với những giá trị nào của m thì hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1, 1)$.

2) Khảo sát sự biến thiên và vê đồ thị của hàm số ứng với $m = -1$.

Câu II (A, D) : 1) Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau có nghiệm:

$$x^2 - 2x + 1 - m \leq 0$$

$$x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \leq 0$$

2) Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y+x^2+y^2 = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = m \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 12$.

b) Với những giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho có nghiệm.

Câu III (A, D) : 1) Giải phương trình:

$$9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$$

2) Các góc của ΔABC thỏa mãn hệ thức:

$\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[3]{\sin C}$. Biết rằng các góc A nhọn, hãy tính giá trị của góc C .

Câu IV (A, D) : 1) Tìm họ nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{\sin 3x \cdot \sin 4x}{\tan x + \cot 2x}$$

2) Cho vòng tròn (C):

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \text{ và điểm } A(3, 5).$$

Hãy tìm phương trình các tiếp tuyến kẻ từ A đến vòng tròn. Giả sử các tiếp tuyến tiếp xúc với vòng tròn tại M và N ; hãy tính độ dài đoạn MN .

Câu V(A) .1) Cho $a, b, c > 0$. **Chứng minh** rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

2) Giả sử x, y, z là những số dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện:

$$x + y + z = 1$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

Câu V(D): 1) Giải phương trình:

$$(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 14.$$

2) Chứng minh rằng trong mọi ΔABC ta luôn có:

$$0 < \sin A + \sin B + \sin C -$$

$$-\sin A \sin B - \sin B \sin C - \sin C \sin A < 1$$

ĐÁP ÁN

Câu I (2 điểm)

$$y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$$

1) Ta phải có $y' = 3x^2 + 6x + m + 1 \leq 0$

$$\forall x \in (-1, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -10 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -10$$

2) $m = -1 \Rightarrow y = x^3 + 3x^2 - 4$. (Bạn đọc tự giải)

Câu II (2 điểm)

1) Nghiệm của bất phương trình thứ nhất là

$$1 - \sqrt{m} \leq x \leq 1 + \sqrt{m} \quad (m \geq 0)$$

nghiệm của bất phương trình thứ hai là:

$$m \leq x \leq m + 1$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \leq 1 + \sqrt{m} \\ m + 1 \geq 1 - \sqrt{m} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} m \geq 0 \\ m + 1 \geq 1 - \sqrt{m} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Bất phương trình (2) hiển nhiên thỏa mãn.

Nghiệm của (1) là: $0 \leq m \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Vậy đáp số của bài toán là: $0 \leq m \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$$2) a) \begin{cases} x+y+x^2+y^2 = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+1) + y(y+1) = 8 \\ x(x+1) \cdot y(y+1) = 12 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x(x+1) = u \\ y(y+1) = v \end{cases}$ thì hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u+v=8 \\ u \cdot v=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=6 \\ u=6 \\ v=2 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x(x+1) = 2 \\ y(y+1) = 6 \end{cases} \Rightarrow 4$ nghiệm $(1, 2), (1, -3), (-2, 2), (-2, -3)$.

Với $\begin{cases} x(x+1) = 6 \\ y(y+1) = 2 \end{cases} \Rightarrow 4$ nghiệm $(2, 1); (2, -2); (-3, 1); (-3, -2)$.

Hệ có tất cả 8 nghiệm.

b) Với $u = x(x+1), v = y(y+1)$

Ta có: $u \geq -\frac{1}{4} \forall x, v \geq -\frac{1}{4} \forall y$

$\begin{cases} u+v=8 \\ u.v=m \end{cases} \Rightarrow u \text{ và } v \text{ là nghiệm của phương}$

trình bậc hai: $f(t)=t^2 - 8t + m = 0 (*)$

Hệ đã cho có nghiệm \Leftrightarrow phương trình (*)
có 2 nghiệm đều lớn hơn hoặc bằng $-\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ f(-\frac{1}{4}) \geq 0 \\ \frac{S}{2} > -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-m \geq 0 \\ \frac{33}{16} + m \geq 0 \\ 4 > -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{33}{16} \leq m \leq 16$$

Câu III (2 điểm)

$$\begin{aligned} 1) & 9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8 \\ & \Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x - 6\sin x \cos x + 1 - 2\sin^2 x = 8 \\ & \Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x - 6\sin x \cos x - 2\sin^2 x - 7 = 0 \\ & \Leftrightarrow 6\cos x - 6\sin x \cos x + 2\sin x - 2\sin^2 x + 7\sin x - 7 = 0 \\ & \Leftrightarrow 6\cos x(1 - \sin x) + 2\sin x(1 - \sin x) - 7(1 - \sin x) = 0 \\ & \Leftrightarrow (1 - \sin x)(6\cos x + 2\sin x - 7) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 & (1) \\ 2\sin x + 6\cos x = 7 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Hiển nhiên (2) vô nghiệm. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = k\pi$.

2) Ta chứng minh $C = 90^\circ$. Thật vậy

a) Giả sử $C < 90^\circ$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B &= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2}[\cos 2A + \cos 2B] \end{aligned}$$

$$1 - \cos(A+B) \cdot \cos(A-B) = 1 + \cos C \cdot \cos(A-B) > 1 > \sqrt[3]{\sin C} \text{ vô lí.}$$

$(\cos(A-B) > 0 \text{ do } -90^\circ < A - B < 90^\circ)$.

b) Giả sử $C > 90^\circ$. Khi đó:

$$\cos C < 0 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 < c^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C < \sqrt[3]{\sin C} \text{ vô lí.}$$

Vậy $C = 90^\circ$.

Câu IV (2 điểm)

$$1) \text{Chú ý rằng: } \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} 2x = \frac{1}{\sin 2x}$$

Vậy $f(x) = \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 4x$

$$= \frac{1}{2} [\cos x - \cos 5x] \cdot \sin 4x$$

$$= \frac{1}{2} \sin 3x \cdot \cos x - \frac{1}{2} \cos 5x \sin 4x$$

$$= \frac{1}{4} [\sin 5x + \sin 3x] - \frac{1}{4} [\sin 9x - \sin x]$$

$$= \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 5x - \frac{1}{4} \sin 9x$$

Vậy hổn số nguyên hàm của $f(x)$ là:

$$F(x) = -\frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{12} \cos 3x - \frac{1}{20} \cos 5x + \frac{1}{36} \cos 9x + C$$

2) Phương trình đường tròn C có dạng:

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ là phương trình đường tròn có tâm $I(-1, 2)$ và bán kính $R=3$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(3, 5)$ và có hệ số góc bằng k . Phương trình Δ là

$$y = k(x-1) + 5 \Leftrightarrow kx - y + 5 - 3k = 0$$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi $d(I, \Delta) = 3$. Tức là:

$$\frac{|-k-2+5-3k|}{\sqrt{k^2+1}} = 3$$

$$\Leftrightarrow |-4k+3| = 3\sqrt{k^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 16k^2 - 24k + 9 = 9k^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow 7k^2 - 24k = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = \frac{24}{7} \end{cases}$$

Vậy các phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$* \quad y = 5 \quad (k = 0)$$

$$* \quad \frac{24}{7}x - y - \frac{37}{7} = 0 \quad (k = \frac{24}{7})$$

Tính độ dài MN : Ta có $MN \perp IA$.

Gọi H là giao điểm của MN với IA

$$\text{Ta có: } MN = 2 \cdot MH = 2 \cdot \frac{MI \cdot MA}{IA} = 2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{24}{5}$$

Câu V (A, 2 điểm)

1) Áp dụng: với $M, N > 0$; $\frac{M}{N} < 1$ thì

$$\frac{M}{N} < \frac{M+k}{N+k} \quad \forall k > 0$$

$$\text{Ta có: } \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}; \quad \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{b+c+a}; \quad \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{c+a+b}$$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên lại, ta có :

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Mặt khác :

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \sqrt{\frac{a^2}{a(b+c)}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{a}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2a}{a+b+c}$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}$
 $\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$

Từ đó $\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$

Từ (1) và (2) \Rightarrow điều phải chứng minh.

2) Trước hết ta chứng minh với $a, b, c > 0$ thì

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \text{ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a=b=c.$$

Thật vậy:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \\ = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 9$$

Từ đó: áp dụng với $a = x+1, b = y+1, c = z+1$ ta có:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{(x+1)+(y+1)+(z+1)} = \frac{9}{4} \\ \Rightarrow -\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \leq -\frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{z+1}\right) \\ &= 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Ta đã chứng minh được $P \leq \frac{3}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$. Vậy $P_{\max} = \frac{3}{4}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Câu V (D, 2 điểm)

1) Giải $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 14$

Đặt $(2 + \sqrt{3})^x = t \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$

$\Rightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} = 14 \Rightarrow t^2 - 14t + 1 = 0$

$\Rightarrow t_{1,2} = 7 \pm \sqrt{48} = (2 \pm \sqrt{3})^2$

với $(2 + \sqrt{3})^x = (2 + \sqrt{3})^2 \Rightarrow x = 2$

với $(2 + \sqrt{3})^x = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow x = -2$.

2) Hiển nhiên ràng:

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B - \sin A \sin B - \sin B \sin C - \sin C \sin A &= \\ &= \sin A(1 - \sin B) + \sin B(1 - \sin C) + \sin C(1 - \sin A) > 0 \end{aligned}$$

Mặt khác, từ:

$(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) \geq 0 \Rightarrow$

$1 - \sin A - \sin B - \sin C + \sin A \sin B + \sin B \sin C +$

$+ \sin C \sin A - \sin A \sin B \sin C \geq 0$

$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C - \sin A \sin B -$

$- \sin B \sin C - \sin C \sin A \leq 1 - \sin A \sin B \sin C < 1$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI ...

(Tiếp theo trang 24)

...theo nhận xét trên. Điều này dẫn đến mâu thuẫn, do đó không tồn tại đa thức bậc nhất thỏa mãn đề bài.

Giả sử có đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in Q$ thỏa mãn

$$f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{9} \text{ thì}$$

$$(3a+b)\sqrt[3]{3} + (a+b-1)\sqrt[3]{9} + 6a + c - 3 = 0.$$

Theo nhận xét trên phải có $3a+b=0, a+b-1=0$ và $6a+c-3=0$ suy ra $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}, c=6$. Vậy tồn tại duy nhất đa thức bậc hai

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 6 \text{ thỏa mãn đề bài.}$$

Bài 5. Giải thiết cho $n \geq 7$ và $2 \leq k < n$. Ta có:

$$k^n > 2n^k \Leftrightarrow n \ln k > \ln 2 + k \ln n (1)$$

Xét hàm số $f(x) = n \ln x - x \ln n$ trên $(1, \infty)$.

$$\text{Tính } f'(x) = \frac{n}{x} - \ln n \text{ nên } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{n}{\ln n} \text{ và } f(x)$$

đồng biến trong khoảng $(1, \frac{n}{\ln n})$, $f(x)$ nghịch biến

trong khoảng $\left(\frac{n}{\ln n}, \infty\right)$. Do điều kiện $2 \leq k \leq n-1$ nên hàm số $f(x)$ trên $[2, n-1]$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong hai đầu mút của tập xác định.

Để chứng minh (1) chỉ cần chứng minh:

$$f(2) > \ln 2 \text{ và } f(n-1) > \ln 2.$$

a) $f(2) > \ln 2 \Leftrightarrow n \ln 2 - 2 \ln n > \ln 2 \Leftrightarrow 2^{n-1} > n^2$ với $n \geq 7$. Điều này dễ dàng chứng minh bằng quy nạp.

b) $f(n-1) > \ln 2 \Leftrightarrow n \ln(n-1) > (n-1) \ln n + \ln 2 \Leftrightarrow (n-1)^n > 2n^{n-1}.(3)$.

Đặt $n-1 = t \geq 6$ thì (3) trở thành

$$t^{t+1} > 2(t+1)^t \Leftrightarrow t > 2\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t.$$

Ta đã biết $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < 3$ nên $2\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < 6 \leq t$. Vậy (3) đúng. Từ (a) và (b) suy ra (1) đúng.

Bài 6. Xem bài 6 bảng A.

DẶNG HÙNG THẮNG - NGUYỄN VIỆT HẢI

2. Tính toán với các số thập phân

Để tính giá trị của một biểu thức hoặc bằng một số M nào đó với độ chính xác n , ta chỉ cần dùng một lệnh evalf (M, n)

Thí dụ : Tính giá trị của $\sqrt{2}$ chính xác đến 50 chữ số thập phân

```
[> evalf(sqrt(2), 50);
1.41421356237309504880168872420969807856967
18753769]
```

Thí dụ : Tính giá trị của $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ chính xác đến 20 chữ số thập phân

```
[> evalf(sin(Pi/12), 20;
.25881904510252076235]
```

Năm 1946 và 1947 Feguxon và Rensor đã tính được số π với 808 chữ số thập phân. Dùng MAPLE, bạn có thể tính số π chính xác đến 15000 chữ số thập phân trong vòng một phút !

3. Tính toán với các biểu thức số học

Muốn tính một biểu thức số học nào đó, bạn chỉ cần nhập biểu thức đó từ bàn phím và ra lệnh cho máy tính nó bằng cách đánh dấu ";" sau biểu thức và gõ "Enter".

Thí dụ : (HS giỏi cấp 2 miền Bắc, lần thứ mười, 1970 - 1971)

```
Rút gọn : 
$$\frac{2^{19}27^3 + 15 \cdot 4^9 9^4}{6^9 2^{10} + 12^{10}}$$

[> 2^19*27^3 + 15*4^9*9^4) / (6^9*2^10 +
12^10);
```

$$\frac{1}{2}$$

Chú ý : Phép cộng (+) và phép trừ (-) và thứ tự thực hiện các phép tính giống như các quy ước thông thường ta đã học. Phép nhân được kí hiệu bởi dấu (*), phép chia được kí hiệu bởi dấu (/), phép lũy thừa được kí hiệu bởi dấu mũ (^), phép khai căn thức bậc hai được kí hiệu bằng sqrt (.). Số π được kí hiệu là Pi, nhưng số e không có kí hiệu riêng (như ta vẫn dùng) mà chỉ được xem là một giá trị của hàm số mũ tại điểm 1 (tức là exp (1)). Tính toán chính xác các phép toán số học với các kí hiệu hình thức là khả năng mạnh mẽ tính nguyên tắc của MAPLE. Các phép chia và khai căn, các hằng số toán học trong tính toán không bị đổi sang các số thập phân gần đúng. Khả năng này cho phép tránh được sai số trong quá trình tính toán.

Thí dụ : Biểu thức
$$\frac{2^3(\sqrt{3} - \pi)}{(3^2 + 4 \cdot 5)(\log_2 3 - e)}$$
 không bị đổi

sang số thập phân mà vẫn giữ nguyên giá trị đúng của nó (máy chỉ tính : $2^3 = 8$, $3^2 + 4 \cdot 5 = 29$, $\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}$).

[(2^3 * (sqrt(3) - Pi)) / ((3^2 + 4*5) * (log [2] (3) - exp (1))) ;

$$\frac{8(\sqrt{3} - \pi)}{29\left(\frac{\ln 3}{\ln 2} - e\right)}$$

Tuy nhiên, MAPLE có đầy đủ khả năng tính giá trị xác xỉ của biểu thức này dưới dạng số thập phân với độ

chính xác bất kì, bằng lệnh evalf (" , n) (tính giá trị của biểu thức trên dây chính xác tới n chữ số thập phân), thí dụ, $n = 60$:

```
[> evalf (" , 60);
343097589902511600415009700097457974322527
4196796102999379352]
```

II. MAPLE VÀ ĐẠI SỐ

Trong đại số, bạn có thể nhờ MAPLE phân tích đa thức thành nhân tử, giải các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và hệ bất phương trình. .. Mặc dù MAPLE chỉ cho đáp số, nhưng nó sẽ gợi ý cho bạn cách giải hoặc kiểm tra kết quả.

1. Tính toán với các biểu thức đại số

Thí dụ : (Thi vào 10 Chuyên Toán, ĐH Tổng hợp Hà Nội, 1991 - 1992, vòng 2) Phân tích đa thức $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ sau thành nhân tử

```
[> factor ((x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5);
-5(y - z)(z - x)(x - y)(x^2 - xy - zx + y^2 + z^2 - yz)
```

Muốn đơn giản các biểu thức toán học công kênh ta dùng lệnh simplify : *Thí dụ :* (HS Giải cấp 2 miền Bắc, vòng 1, 1961 - 1962)

Đơn giản biểu thức

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

[> simplify (1 / (a*(a - b)*(a - c)) + 1 / (b*(b - a) * (b - c)) + 1 / (c*(c - a) * (c - b)));
$$\frac{1}{abc}$$

2. Giải phương trình và bất phương trình

Bạn có thể dùng MAPLE để giải các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và hệ bất phương trình (có hệ số bằng số hoặc bằng chữ). Muốn giải phương trình ta dùng lệnh solve (f (x) = g (x)), trong đó f(x) = g(x) là phương trình cần giải, còn x là ẩn cần tìm.

Thí dụ : (HS Giải toán lớp 9, Hà Nội, 1994 - 1995)

Giải phương trình :

$$(x + 2)^2 + (x + 3)^3 + (x + 4)^4 = 2$$

[> solve ((x + 2)^2 + (x + 3)^3 + (x + 4)^4 = 2);

$$\{x = -5\}, \{x = -3\}, x = -\frac{9}{2} + \frac{1}{5}\sqrt{5}, x = -\frac{9}{2} - \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

Nếu cần giải phương trình $f(x) < g(x)$ thì bạn thay dấu "=" bởi dấu "<>" : solve (f(x) < g(x)).

Trên đây chỉ là một số thí dụ đơn giản nhất minh họa cách sử dụng MAPLE trong việc học toán ở phổ thông. Chúng tôi hi vọng qua đó các bạn cũng đã hình dung thấy ích lợi của MAPLE.

Tuy nhiên, mọi công cụ tính toán, dù hoàn hảo tới đâu, cũng vẫn chỉ là công cụ, nó chỉ có thể giúp làm giảm nhẹ công việc tính toán thuần túy, chứ không thể thay thế tư duy toán học. Nó giải phóng chúng ta khỏi công việc tính toán nặng nhọc là để hỗ trợ cho việc "mài sắc" tư duy, chứ không phải "làm cùn" tư duy. Chúng tôi hi vọng sẽ có dịp được đề cập đến vấn đề này trong một bài viết khác.

CHỨNG MINH TIỀN ĐỀ OCLIT

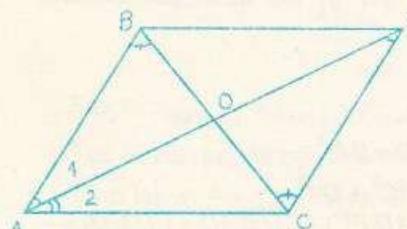
của LEGENDRE

Trải qua trên 2000 năm, loài người đã không một lần tìm cách chứng minh tiên đề Oclit, nhưng đều sa vào cái vòng luẩn quẩn, nhiều trường hợp tưởng rằng chỉ còn một chút xíu nữa là xong, nhưng tất cả vẫn để lại nằm trong cái chút xíu đó. Cái chút xíu lí thú nhất nằm trong chứng minh của nhà toán học Pháp nổi tiếng Legendre (1752 - 1833). Legendre tận dụng điều đã biết thời đó là tiên đề Oclit tương đương với mệnh đề : "tổng các góc của một tam giác bằng 180° " và tìm cách chứng minh mệnh đề này; sau đây là chứng minh của ông:

1) Tổng các góc của một tam giác không thể lớn hơn 180° .

Chứng minh. Cho tam giác ABC (h.1) và giả sử $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ + p$ với $p > 0$.

Gọi O là trung điểm của BC và kéo dài đoạn AO một đoạn $OA' = OA$. Ta được hai tam giác bằng nhau $\triangle A'B$ và $\triangle A'C$ và do đó có tổng số góc bằng nhau và tổng số đó bằng $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ + p$ (sử dụng các tam giác bằng nhau thì thấy ngay). Vì $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}$ nên trong hai góc \hat{A}_1 và \hat{A}_2 , át phải có một góc nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{\hat{A}}{2}$, ví dụ $\hat{A}_2 \leq \frac{\hat{A}}{2}$ trên h.1.



Hình 1

Như vậy là từ tam giác ABC , ta đã dựng nên được một tam giác cũng có tổng số góc bằng $180^\circ + p$ nhưng có một góc $\leq \frac{\hat{A}}{2}$. Ta lại dùng cách dựng đó để từ tam giác thứ hai này dựng nên một tam giác thứ ba cũng có tổng các góc bằng $180^\circ + p$ và có một góc $\leq \frac{\hat{A}}{4}$. Như thế, đến lần dựng thứ n thì được một tam giác có tổng các góc bằng $180^\circ + p$ và có một góc $\leq \frac{\hat{A}}{2^n}$. Ta có thể chọn n đủ

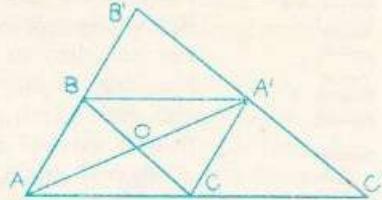
lớn để $\frac{\hat{A}}{2^n} < p$. Vậy, ở tam giác

cuối cùng này, có một góc nhỏ hơn p nên hai góc còn lại có tổng lớn hơn 180° , điều đó trái với một định lí (không phụ thuộc gì tiên đề Oclit) nói rằng tổng hai góc của một tam giác không thể vượt qua 180° (có thể chứng minh điều này ngay trên h.1. Chẳng hạn, $\hat{B} + \hat{C} = \hat{A}CA' < 180^\circ$ vì A và A' ở hai phía khác nhau của đường thẳng BC).

2) Tổng các góc của một tam giác không thể nhỏ hơn 180° .

Bây giờ giả sử $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - p$ với $p > 0$. Ta lây lại hình 1 và qua A' dựng một đường thẳng cắt hai cạnh của góc \hat{BAC} theo thứ tự ở B' và C' (h.2). Tam giác $B'CA'$, vì bằng tam giác ABC nên cũng có tổng các góc bằng $180^\circ - p$. Giả sử tổng các góc của tam giác $BB'A'$ bằng $180^\circ - q$ ($q > 0$), của tam giác $CC'A'$ bằng $180^\circ - r$ ($r > 0$). Công tổng các góc của bốn tam giác ABC , $B'CA'$, $BB'A'$, $CC'A'$ rồi trừ đi

NGUYỄN CẢNH TOÀN



Hình 2

chính góc ở B , C , A' , mỗi noi gồm ba góc mà tổng là một góc bẹt, ta được tổng các góc của tam giác $AB'C'$ là :

$$(180^\circ - p) + (180^\circ - p) + (180^\circ - q) + (180^\circ - r) - (3 \times 180^\circ) = 180^\circ - 2p - q - r < 180^\circ - 2p$$

Như vậy, từ tam giác ABC với tổng số góc bằng $180^\circ - p$, ta đã dựng được tam giác $AB'C'$ có tổng các góc $< 180^\circ - 2p$. Lại tiếp tục với tam giác $AB'C'$ để dựng một cách tương tự tam giác $AB'C''$ thì sẽ có một tam giác có tổng các góc nhỏ hơn $180^\circ - 2^2 p$. Tiếp tục như vậy đến lần thứ n sẽ có tam giác với tổng các góc nhỏ hơn $180^\circ - 2^n p$. Với n đủ lớn thì sẽ có tam giác với tổng số góc âm, điều này thật vô lí.

Cái sai của Legendre là ở chỗ nào? Tất cả lập luận đều đúng, trừ chỗ nghiêm nhiên công nhận rằng qua A' có một đường thẳng cắt cả hai cạnh của góc BAC . Lúc đầu, chưa ai nhận ra điều này thì tưởng rằng việc chứng minh tiên đề Oclit đã châm dứt với sự thành công của Legendre. Nhưng thật đáng phục người nào đó, vào thời đó, đã phát hiện ra cái vòng luẩn quẩn của Legendre: công nhận một tiên đề tương đương với tiên đề Oclit để chứng minh tiên đề Oclit. Tiên đề đó là:

(Xem tiếp trang 2)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN THPT NĂM HỌC 1996-1997

VÀ LỜI GIẢI TÓM TẮT

BẢNG A

Bài 1. Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm P nằm trong đường tròn ($OP = d < R$). Trong các tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại P , hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các chu vi đó theo R và d .

Bài 2. Cho số tự nhiên $n > 1$ không chia hết cho 1997. Xét hai dãy số (a_i) và (b_j) được xác định như sau:

$$a_i = i + \frac{m}{1997} \text{ với } i = 1, 2, 3, \dots, 1996,$$

$$b_j = j + \frac{1997j}{n} \text{ với } j = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

Xét tất cả các số của hai dãy trên và sắp thứ tự không giảm ta được

$$c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{1995+n}$$

Chứng minh ràng $c_{k+1} - c_k < 2$ với mọi $k = 1, 2, \dots, 1994 + n$.

Bài 3. Hỏi có bao nhiêu hàm số $f: N^* \rightarrow N^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

$$1) f(1) = 1$$

$$2) f(n)f(n+2) = (f(n+1))^2 + 1997 \text{ với mọi } n \in N.$$

(Kí hiệu N^* là tập hợp số nguyên dương).

Bài 4. a) Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất mà

$$f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3}.$$

b) Tồn tại hay không đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên mà

$$f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3}.$$

Bài 5. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n đều

chọn được số nguyên dương k để $19^k - 97$ chia hết cho 2^n

Bài 6. Cho 75 điểm thuộc khối lập phương với cạnh dài 1 đơn vị, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại tam giác với diện tích không lớn hơn $\frac{7}{72}$ mà ba đỉnh là ba trong số 75 điểm đã cho.

BẢNG B

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = a\sin ux + b\cos vx$ xác định trên tập số thực, trong đó a, b, u, v là các hằng số thực khác không.

Chứng minh ràng $f(x)$ là hàm số tuần hoàn khi và chỉ khi $\frac{u}{v}$ là số hữu tỉ.

Bài 2. Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm P nằm trong đường tròn ($OP = d < R$).

Xét các tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại P .

a) Chứng minh ràng $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

b) Trong các tứ giác $ABCD$ như trên hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tính chu vi đó theo R và d .

Bài 3. Cho dãy số nguyên (a_n) ($n \in N$) được xác định như sau: $a_0 = 1, a_1 = 45$

$$a_{n+2} = 45a_{n+1} - 7a_n \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \dots$$

a) Tính số các ước dương của $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}$ theo n .

b) Chứng minh ràng $1997a_n^2 + 7^{n+1} \cdot 4$ là số chính phương với mỗi n .

Bài 4. Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất mà

$$f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3}$$

Bài 5. Cho n và k là các số nguyên dương với $n \geq 7$ và $2 \leq k < n$. Chứng minh ràng:

$$k^n > 2n^k$$

Bài 6. Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c . Xét diện tích các tam giác có ba đỉnh nằm bên trong hoặc trên mặt của hình hộp đã cho. tìm giá trị lớn nhất của các diện tích đó theo a, b, c .

DÁP ÁN

BẢNG A

Bài 1. Gọi chu vi tứ giác $ABCD$ là p ta có

$$\begin{aligned} p^2 &= (AB + BC + CD + DA)^2 = \\ &= AB^2 + CD^2 + BC^2 + DA^2 + \\ &\quad + 2(AB \cdot CD + AD \cdot BC) + 2(AB \cdot AD + CD \cdot BC) + \end{aligned}$$

$$+ 2(BA \cdot BC + DA \cdot DC)$$

Định lí Ptôlême cho ta

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

$$\text{Để thấy } AB \cdot AD = 2R \cdot PA$$

$$CB \cdot CD = 2R \cdot PC$$

$$\text{Từ đó } AB \cdot AD + CB \cdot CD = 2R \cdot AC$$

$$\text{Tương tự } AB \cdot BC + DA \cdot DC = 2R \cdot BD$$

$$\text{Lại có: } AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2 = 4R^2$$

$$\text{Vậy } p^2 = 8R^2 + 2 \cdot AC \cdot BD + 4R \cdot AC + BD$$

$$\text{Ta có } 2AC \cdot BD = (AC + BD)^2 - 8R^2 + 4d^2 \quad (1)$$

Thành thử

$$p^2 = (AC + BD)^2 + 4R(AC + BD) + 4d^2$$

Vậy p đạt max hay min tùy theo $(AC + BD)$ đạt max hay min.

a) Từ (1) ta thấy $AC + BD$ đạt max $\Leftrightarrow 2AC \cdot BD$ đạt max. Vì $2AC \cdot BD \leq AC^2 + BD^2 = 8R^2 - 4d^2$ nên $AC \cdot BD$ đạt max khi $AC = BD \Leftrightarrow OM = ON \Leftrightarrow OPMN$ là hình vuông $\Leftrightarrow OP$ tạo với AC và BD góc 45° . Khi đó:

$$P_{\max}^2 = 16R^2 - 4d^2 + 8R\sqrt{4R^2 - 2d^2}$$

3) $AC + BD$ đạt min $\Leftrightarrow AC \cdot BD$ đạt min

$$\text{Vì } 2AC \cdot BD = 8R^2 - 4d^2 - (AC - BD)^2 \text{ nên}$$

(*) $\Leftrightarrow |AC - BD|$ đạt max. Điều này xảy ra khi $AC = 2R$, $BD = \sqrt{R^2 - d^2}$.

$$\text{Khi đó } p_{\min}^2 = 16R^2 + 16R\sqrt{R^2 - d^2}$$

Bài 2. Thay 1997 bởi số m không là ước của n . Xét hai dãy $a_i = i\left(1 + \frac{n}{m}\right)$ với $i = 0, 1, \dots, m$ và

$$b_j = j\left(1 + \frac{m}{n}\right) \text{ với } j=0, 1, \dots, n.$$

$$\text{Ta có: } a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_m = m + n$$

$$b_0 = 0 < b_1 < \dots < b_n = m + n$$

Giả sử $n < m$. Khi đó $a_{i+1} - a_i = 1 + \frac{n}{m} < 2$. Với mỗi $k = 1, 2, \dots, m+n-2$ tồn tại duy nhất j để $a_j \leq c_k \leq a_{j+1}$ ($0 \leq j \leq n-1$)

Khi ấy $c_{k+1} = a_{j+1}$ và

$$c_{k+1} - c_k \leq a_{j+1} - a_j < 2.$$

Bài 3. Gọi D là tập tất cả các hàm f có tính chất dã nêu. Để cho gọn kí hiệu $a_n = f(n)$

$$\text{Ta có: } a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 1997 \quad (2)$$

$$a_{n+1} a_{n+3} = a_{n+2}^2 + 1997$$

$$\text{Suy ra } \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_{n+3}}{a_{n+2}}$$

$$\text{Vậy } a_{n+2} = c a_{n+1} - a_n \quad (3)$$

$$\text{ở đó } c \text{ là hằng số } \left(c = \frac{a_3 + a_1}{a_2}\right)$$

Ta chứng minh $c \in N^*$. Thật vậy nếu $c = \frac{p}{q}$

với $(p, q) = 1$ thì từ (3) ta có

$$q(a_{n+2} + a_n) = p a_{n+1} \Rightarrow q | a_{n+1}$$

Vì $1997 = a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 : q^2$ nên $q = 1$ (do 1997 là số nguyên tố).

Đặt $f(2) = a$. Từ (2) và (3) ta có:

$$ca_2 - a_1 = a_3 = a_1 a_3 = a_2^2 + 1997$$

$$\Leftrightarrow ca - 1 = a^2 + 1997 \Rightarrow a | 1998.$$

Nghĩa là $f(2)$ là ước dương của 1998 nếu $f \in D$. Đảo lại với mỗi ước dương a của 1998 xây dựng hàm $f: N^* \rightarrow R$ như sau:

$$f(1) = 1, f(2) = a, f(n+2) = (a+b)f(n+1) - f(n);$$

$$\text{ở đó } b = \frac{1998}{a} \in N^*. \text{ Ta chứng minh } f \in D.$$

Để thấy $f(n) \in N^*$ và $f(n+2)f(n) - f^2(n+1)$ không phụ thuộc n , vậy

$$f(n)f(n+2) - f^2(n+1) = f(3) - f^2(2) =$$

$$= (a+b)a - 1 - a^2 = 1997 \Leftrightarrow f \in D$$

Tương ứng $f \rightarrow f(2)$ là một song ánh giữa D và tập các ước dương của 1998. Vậy

$$|D| = (1+1)(1+3)(1+1) = 16.$$

Bài 4. Trước hết ta chứng minh nhận xét:

Nếu $u, v \in Q$ mà $s = u \sqrt[3]{3} + v \sqrt[3]{9} \in Q$ thì $u = v = 0$.

Thật vậy, xét đa thức $g(x) = vx^2 + ux - s$ có $g(\sqrt[3]{3}) = 0$ và đa thức $P(x) = x^3 - 3$ ($P(x)$ không có nghiệm hữu ti).

Chia $r(x)$ cho $g(x)$ ta được

$$P(x) = h(x)g(x) + r(x)$$

Nếu $r(x) = 0 \Rightarrow \deg r(x) = 1 \Rightarrow r(x)$ có nghiệm hữu ti. Mâu thuẫn.

Nếu $r(x) \neq 0 \Rightarrow \deg r(x) = 1 \Rightarrow r(\sqrt[3]{3}) = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{3} \in Q$ mâu thuẫn. Nhận xét được chứng minh.

a) Nếu $\deg f = 1$; $f(x) = ax + b$ với $a, b \in Q$ thỏa mãn bài toán thi tử nhận xét trên ta có $(a - 1)\sqrt[3]{3} + a\sqrt[3]{9} = 3 - b \in Q$ nên $\begin{cases} a - 1 = 0 \\ a = 0 \end{cases}$ mâu thuẫn.

Xét $f(x)$ là đa thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{Khi đó nếu } f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow$$

$$(a+b)\sqrt[3]{9} + (3a+b)\sqrt[3]{3} + 6a + c = 3 + \sqrt[3]{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 3a+b=1 \\ 6a+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = 0.$$

Vậy chỉ có duy nhất đa thức bậc hai thỏa mãn là $f(x) =$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}. \text{ Đó là đa thức bậc nhở nhất.}$$

b) Đặt $\alpha = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ ta có $\alpha^3 = 9\alpha + 12$. Vậy đa thức $g(x) = x^3 - 9x - 12$ nhận α là nghiệm.

Nếu $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên thỏa mãn điều kiện trên thì

$$f(x) = g(x)h(x) + r(x)$$

ở đó $h(x)$, $r(x)$ là đa thức hệ số nguyên với $\deg r(x) \leq 2$. Vì $g(\alpha) = 0$ nên $r(\alpha) = f(\alpha) = 3 + \sqrt[3]{3}$.

Theo câu a) điều này không xảy ra.

Bài 5. Chia cần xét $n \geq 3$. Ta có nhận xét sau:

$$19^{2^{n-2}} - 1 = 2^n q_n \text{ với } q_n \text{ lẻ} \quad (4)$$

Thật vậy với $n = 3$, khẳng định (4) đúng.

Giả sử khẳng định đúng với n . Khi đó

$$\begin{aligned} 19^{2^{n-1}} - 1 &= (19^{2^{n-2}} + 1)(19^{2^{n-2}} - 1) \\ &= 2S_n 2^n q_n = 2^{n+1} (s_n q_n) \quad s_n, q_n \text{ lẻ.} \end{aligned}$$

Nhận xét được chứng minh.

Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp. Với $n = 3$ đúng. Giả sử tồn tại $k_n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$19^{k_n} - 97 = 2^n a$$

Nếu a chẵn thì $19^{k_n} - 97 \vdots 2^{n+1}$

Nếu a lẻ đặt $k_{n+1} = k_n + 2^{n-2}$

Khi đó

$$\begin{aligned} 19^{k_{n+1}} - 97 &= 19^{2^{n-2}} (19^{k_n} - 97) + 97(19^{2^{n-2}} - 1) \\ &= 2^n (19^{2^{n-1}} a + 97q_n) \vdots 2^{n+1} (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Bài 6. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Nếu tam giác MNP có ba đỉnh nằm trong một hình hộp có kích thước a, b, c thì

$$S_{(MNP)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$$

Thật vậy gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích hình chiếu của ΔMNP lên ba mặt phẳng $(ABCD), (ABA'B')$ và $(DAD'A')$ thì $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$. Để thấy nếu một tam giác có 3 đỉnh nằm bên trong (hay trên cạnh) của hình chữ nhật kích thước a, b thì diện tích của nó không vượt quá $\frac{ab}{2}$.

$$\text{Từ đó } S^2 \leq \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{4}$$

Bổ đề được chứng minh.

Bây giờ ta chia khối hộp thành 36 khối có kích thước $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

Tồn tại một khối hộp chứa ít nhất ba điểm M, N, P trong 75 điểm đã cho. áp dụng bổ đề ta được:

$$S_{(MNP)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{18}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2} = \frac{7}{72}$$

BẢNG B

$$\text{Bài 1. } f(x) = a \sin ux + b \cos vx \quad (1)$$

trong đó, a, b, u, v là các số thực khác 0.

a) Chứng minh thuận: Giả sử $f(x)$ là hàm số tuần hoàn có chu kỳ $t \neq 0$, nghĩa là $f(x + t) = f(x)$ với mọi x .

Cho $x = 0$ được $f(t) = f(0)$

$$\text{hay } a \sin ut + b \cos vt = b \quad (2)$$

Cho $x = -t$ được $f(0) = f(-t)$

$$\text{hay } -a \sin ut + b \cos vt = b \quad (3)$$

Cộng từng vế (2) và (3) được:

$$\cos vt = 1 \text{ hay } vt = 2k\pi \quad (4)$$

với k là số nguyên khác 0.

Trừ từng vế (2) và (3) được: $\sin ut = 0$ hay

$$ut = h\pi \quad (5)$$

với h là số nguyên khác 0.

Từ (4) và (5) có $\frac{u}{v} = \frac{h}{2k}$ là số hữu tỉ.

b) Chứng minh đảo: Giả sử $\frac{u}{v} = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên khác 0.

Chọn $t = \frac{2\pi m}{u} = \frac{2\pi n}{v} \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} f(x+t) &= a \sin u \left(x + \frac{2\pi m}{u}\right) + b \cos v \left(x + \frac{2\pi n}{v}\right) = \\ &= a \sin ux + b \cos vx = f(x) \text{ với mọi } x, \text{ nghĩa là } f(x) \text{ là hàm số tuần hoàn có chu kỳ } t \neq 0. \end{aligned}$$

Bài 2. Xem lời giải bài 1 bảng A.

Bài 3. a) Xét dãy số nguyên: $a_0 = 1, a_1 = 45$ và $a_{n+2} = 45a_{n+1} - 7a_n$ với $n = 0, 1, 2, \dots$ (1)

Thử với $n = 0, 1$ để dự đoán hệ thức (2) dưới đây, rồi chứng minh quy nạp là hệ thức đó đúng với mọi n :

$$a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = 7^{n+1} \quad (2)$$

Từ (2) suy ra: số các ước số dương của $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}$ bằng $n+2$.

b) Từ (2) có:

$$a_{n+1}^2 - a_n (45a_{n+1} - 7a_n) - 7^{n+1} = 0$$

hay $a_{n+1}^2 - 45a_n a_{n+1} + 7a_n^2 - 7^{n+1} = 0$ với mọi n .

Điều này chứng tỏ phương trình $x^2 - 45ax + 7a_n^2 - 7^{n+1} = 0$ có nghiệm nguyên nên $\Delta = (45a_n)^2 - 4(7a_n^2 - 7^{n+1}) = 1997a_n^2 + 7^{n+1} \cdot 4$ phải là số chính phương.

Bài 4. Nhận xét: nếu $u, v \in Q$ mà $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \in Q$ thì $u = v = 0$ (xem chứng minh bài 4 bảng A). Nếu có đa thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ với $a, b \in Q$ thỏa mãn $a(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) + b = 3 + \sqrt[3]{9}$ thì

$$a\sqrt[3]{3} + (a-1)\sqrt[3]{9} + b - 3 = 0 \text{ suy ra } a = 0 = a - 1$$

(Xem tiếp trang 18)

BẢN TRÒN ĐỌC THƠ

L.T.S. Nhà thơ Thạch Quý (tên thật là Vương Dinh Huấn) sinh năm 1941 tại Nghệ An. Năm 1960, anh học khoa Toán, trường DHSP Vinh. Anh đã cho ra đời 5 tập thơ. Anh là hội viên Hội nhà văn Việt Nam. Khi hỏi anh: Toán học có giúp đỡ gì cho Thơ? anh đã khẳng định: "Chính Hình học phi O-ca-lit đã khai sáng cho tôi cách suy nghĩ, nhìn nhận và cả cảm xúc đa chiều nữa khi tôi đối diện với cuộc sống". Bài thơ sau đây anh viết và đăng báo Văn Nghệ năm 1967, TH&TT trân trọng giới thiệu với các bạn yêu Toán và mê Thơ.



CÁI ĐƯỜNG THẮNG NĂM TRONG HÌNH HỌC

Cái đường thẳng năm trong hình học
Theo suốt đời, âm lị tận trong tôi.

Là sợi tơ chằng có chất teo
Mà chằng được từ dày đến dày

Lúc thê vụng sờ tay lên mặt giày
Lại nhận ra bông dang cài vò hình
Lúc nghĩ về tia sáng mỏng manh
Lại thấy nó chiếuсти rất thẳng

Như tia mắt em nhìn về anh
Không bị chắn bằng cây, bằng núi
Như ý nghĩ những người đi tôi
Không nghĩ, không nghe, không dùng điểm cuối

Từ chân trời nói với chân trời
Qua những đám mây
Từ hòn qua nói với hòn này
Qua những bàn tay
Lưỡng cung
và súng.

Trong sách vở tôi chỉ tìm thấy bông
Giữa cuộc đời nó bông hiện hình ra
Tiếng con ve gọi nồng tự cảnh đù
Nói rất thẳng với mầm cây của đất.

Nhưng đường thẳng chính là đường ngắn nhất

Cái điểm trên ruộng bước tắt ngang
Để xelux qua trọng điểm chiến trường
Nhưng bờ biển, bờ vùng lèn thẳng tắp

Cái đường thẳng hiền lành và chân thật
Nơi âm thanh tiếng nói biết đi về
Từ phuzeug này nói với phuzeug kia
Là đường thẳng của tình bạn...

Đường ta đi từ qua khứ đến ngày mai
Haben đang bắc qua mỗi tam long tràn trở
Trên trang sách
Đường ngôn ngữ lật mở
Trên luồng cung giáo vui, nghĩa duy

Từ C-colet tên Lebasepky
Đường thẳng bắc qua hòn tròn
Là chiếc cầu của những vòi tinh di
Đường thẳng luôn bắc chinh những con quay
Và gạt bỏ những lỗ mèo có sẵn

Đường thẳng nói về những miền vòi tinh
Mà nghen hít âm lị giữa tim mình
Đường thẳng nói bước chí, bước anh
Mà chén nói: Tôi là đường thẳng

1967

THẠCH QUÝ



Hỏi: Trong bài "Phương pháp chọn phần tử lớn nhất" (Vũ Đức Cảnh) (THTT số 244) có bài toán: Cho a, b, c là 3 số tùy ý thuộc $[1; 3]$ thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 14.$$

Em giải như sau:

$$\begin{aligned} 1 \leq a \leq 3 &\Rightarrow a^2 - 4a + 3 \leq 0, \\ \text{tương tự } b^2 - 4b + 3 \leq 0; c^2 - 4c + 3 \leq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cộng từng vè của 3 bất đẳng thức trên ta có} \\ a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c) + 9 &\leq 0 \text{ suy ra } a^2 + b^2 + c^2 \leq \end{aligned}$$



Giải đáp bài DIỄN SỐ VÀO HÌNH VUÔNG

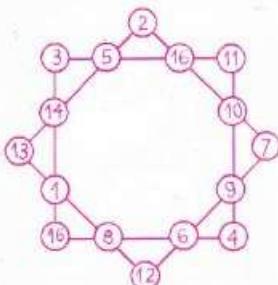
Ta thấy mỗi ô tròn đều có mặt trên hai cạnh của hai hình vuông hoặc trên hai cạnh của một hình vuông. Như vậy mỗi số từ 1 đến 16 sẽ được tính hai lần và tổng các số này được chia đều trên 8 cạnh của hai hình vuông.

Vậy tổng số của 4 ô tròn trên mỗi cạnh của mỗi hình vuông phải là

$$\frac{2(1+2+\dots+15+16)}{8} = \frac{272}{8} = 34.$$

Tù đó ta có cách diễn số như trên hình vẽ. Hình vẽ này có 4 trục đối xứng. Mỗi lần ta lật hình vẽ theo trục đối xứng ta được một cách diễn số mới.

BÌNH PHƯƠNG



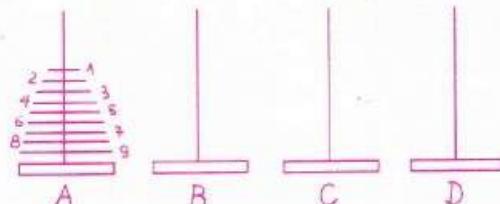
TRÒ CHƠI "THÁP BA MÀU"

Cho 9 đĩa tròn khoét lỗ ở giữa (như đĩa hát) chồng lên nhau xuyên qua cột A theo thứ tự đĩa có bán kính lớn ở dưới, đĩa có bán kính nhỏ ở trên. Giả sử bán kính các đĩa lần lượt là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Các đĩa có bán kính 1, 4, 7 có màu đỏ; các đĩa có bán kính 2, 5, 8 có màu xanh và các đĩa có bán kính 3, 6, 9 có màu vàng.

Hay tìm cách chuyển ít nhất 9 đĩa ở cột A sang ba cột B, C, D chưa có đĩa nào, với yêu cầu là:

- mỗi lần chỉ di chuyển một đĩa.
- không được để đĩa nhỏ ở dưới đĩa lớn.
- được quyền sử dụng cả 4 cột A, B, C, D.

Sao cho cuối cùng cột B chỉ có 3 đĩa màu đỏ, cột C chỉ có 3 đĩa màu xanh và cột D chỉ có 3 đĩa màu vàng.



LTS: Đây là một "biến dạng" của bài toán "Tháp Hà Nội".

VÕ KIM HUẾ



$\leq 4(a+b+c) - 9 = 15$. Vậy giá trị lớn nhất của $a^2 + b^2 + c^2$ bằng 15. Tại sao 2 kết quả lại khác nhau?

PHẠM VĂN VINH

(12D, PTTH Quang Trung, Hà Tây)

Đáp: Tại sao em đã vội vàng kết luận sai: giá trị lớn nhất của $a^2 + b^2 + c^2$ bằng 15? Không bao giờ em có thể chỉ ra được các giá trị của a , b , c để $a^2 + b^2 + c^2$ bằng 15! Phép chứng minh của tác giả Vũ Đức Cảnh là đúng, còn phép chứng minh của em, đến khi có được $a^2 + b^2 + c^2 \leq 15$ là không sai, nhưng... chưa được gì! Tuy nhiên việc cố gắng tìm một con đường chứng minh khác của một bài toán đã có lời giải là việc làm đáng khen. Chúc em tiếp tục yêu... Toán.

Hỏi: Có một đề thi đầu năm (dành cho học sinh lớp 7) như sau: "Gọi O là một điểm ngoài đường thẳng BC sao cho góc $BMO = 60^\circ$. Về góc đối đỉnh với góc BMO . Gọi tên các góc kề bù với góc BMO . Tính số đo các góc đó. Mong THTT có ý kiến vì tổ Toán của trường đang có những ý kiến trái ngược nhau."

NHẬT HƯƠNG
(36B, Thái Phiên, Tp Huế).

Đáp: LTN nghĩ mãi... không biết điểm M ở đâu? Hay tac giả đề thi "thử" trình độ học sinh bởi sự "bí ẩn" này? Giá như nói về M một chút, chẳng hạn: M là điểm thuộc BC hoặc M là điểm không thuộc BC hoặc M là điểm tuy ý của mặt phẳng thì... đề thi "đẹp hơn"!

Nhung nếu M không thuộc BC thì đường thẳng BC có "ý nghĩa" gì trong đề thi này nhỉ? Việc dùng góc BMO , học sinh lớp 7 hoàn toàn vẽ được khi dùng... thước do góc! Tóm lại đề thi này làm LTN cũng gãi đầu đến rụng cả... kiến thức mà thương cho... học sinh lớp 7! Mong tổ Toán có một chuyên "thuyền Rồng sông Hương"... thật vui vẻ và cho đề toán này trôi vào... quá khứ.

Hỏi: Có cuốn sách dành cho học sinh lớp 10, khi giải bài toán: "Tim điều kiện của tham số để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm và nghiêm này gấp đôi nghiêm kia" đã giả sử phương trình có nghiêm để dẫn tới hệ: $x_1 = 2x_2$; $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Khi x_1 , x_2 từ hệ này sẽ dẫn tới phương trình xác định tham số và thủ vào điều kiện $\Delta x \geq 0$ để chọn giá trị tham số thỏa mãn bài toán. Việc thủ này nhiều khi rất phức tạp. Theo tôi thì không cần phải thủ lại, thủ lại là thừa. Mong THTT cho ý kiến.

NGUYỄN ĐÌNH THIỀU
(PTTH Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, Nghệ An)

Đáp: Ý kiến của Anh hoàn toàn đúng! Anh có thể tham khảo thêm bài toán: "Chứng tỏ rằng hệ thức $kb^2 = (k+1)^2ac$ ($k \neq 1$) là điều kiện cần và đủ để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiêm, trong đó một nghiêm bằng k lần nghiêm kia" (đề 138, Bộ Đề thi TSĐH).

LTN

ISSN : 0866 - 0835
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT47M8

Sắp chữ tại Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 1998

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng