Phương trình

NGHIỆM NGUYÊN

Giáo viên hướng dẫn: thầy **ĐỖ KIM SƠN**

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Phương trình và bài toán với nghiệm nguyên là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ những bài toán về tính mỗi loại trâu ***Trăm trâu trăm cỏ*** đến các chuyên gia toán học lớn với các bài toán như ***định lý lớn Fecma***. Được nghiên cứu từ thời Điôphăng thế kỉ thứ III, phương trình nghiệm nguyên vẫn còn là đối tượng nghiên cứu của toán học.

Phương trình nghiệm nguyên vô cùng đa dạng, vì thế nó thường không có quy tắc giải tổng quát. Mỗi bài toán, với số liệu riêng của nó, đòi hỏi một cách giải riêng phù hợp.

Thời gian qua, nhờ sự hướng dẫn của giáo viên bộ môn, chúng em xin giới thiệu chuyên đề **"Phương trình nghiệm nguyên"**. Chuyên đề này là sự tập hợp các phương pháp cũng như các dạng phương trình khác nhau của phương trình nghiệm nguyên, do chúng em sưu tầm từ các nguồn kiến thức khác nhau. Chúng em mong muốn quyển chuyên đề sẽ giúp ích một phần cho việc tìm hiểu của các bạn học sinh về vấn đề nêu trên.

Quyển chuyên đề này gồm có 3 phần chính. Đầu tiên chúng em xin giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình với nghiệm nguyên, sau đó là việc tìm hiểu cách giải các dạng phương trình khác nhau của nó và cuối cùng là phần bài tập. Trong quá trình biên soạn, sưu tầm và tập hợp các phương pháp cùng những ví dụ, bài tập, tuy chúng em đã cố gắng rất nhiều nhưng thiếu sót là điều khó tránh khỏi. Vì vậy, chúng em mong thầy và các bạn khi xem xong quyển chuyên đề này hãy đóng góp ý kiến để giúp những chuyên đề sau được hoàn thành tốt hơn. Xin chân thành cảm ơn!

Nhóm biên tập

1) Các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên

1) PHƯƠNG PHÁP XÉT SỐ DƯ CỦA TỪNG VẾ

Ví dụ 1: Chứng minh các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$

b) $x^2 + y^2 = 1999$

Giải:

a) Dễ chứng minh x^2, y^2 chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1 nên $x^2 - y^2$ chia cho 4 có số dư 0, 1, 3. Còn vế phải 1998 chia cho 4 dư 2

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

b) x^2, y^2 chia cho 4 có số dư 0, 1 nên $x^2 + y^2$ chia cho 4 có các số dư 0, 1, 2. Còn vế phải 1999 chia cho 4 dư 3.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 2: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$9x + 2 = y^2 + y$

Giải

Biến đổi phương trình: $9x + 2 = y(y+1)$

Ta thấy vế trái của phương trình là số chia hết cho 3 dư 2 nên $y(y+1)$ chia cho 3 dư 2.

Chỉ có thể: $y = 3k+1$, $y+1 = 3k+2$ với k nguyên

Khi đó: $9x + 2 = (3k+1)(3k+2)$

$\Leftrightarrow 9x = 9k(k+1)$

$\Leftrightarrow x = k(k+1)$

Thử lại, $x = k(k+1)$, $y = 3k+1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Đáp số $\begin{cases} x = k(k+1) \\ y = 3k+1 \end{cases}$ với k là số nguyên tùy ý

2) PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ DẠNG TỔNG

Biến đổi phương trình về dạng: vế trái là tổng của các bình phương, vế phải là tổng của các số chính phương.

Ví dụ 3: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^2 + y^2 - x - y = 8 \qquad (1)$$

Giải:

$(1) \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y = 32$

$\Leftrightarrow (4x^2 + 4x + 1) + (4y^2 - 4y + 1) = 34$

$\Leftrightarrow |2x-1|^2 + |2y-1|^2 = 3^2 + 5^2$

Bằng phương pháp thử chọn ta thấy 34 chỉ có duy nhất một dạng phân tích thành tổng của hai số chính phương $3^2, 5^2$. Do đó phương trình thỏa mãn chỉ trong hai khả năng:

$$\begin{cases} |2x-1| = 3 \\ |2y-1| = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} |2x-1| = 5 \\ |2y-1| = 3 \end{cases}$$

Giải các hệ trên $\Rightarrow$ phương trình (1) có bốn nghiệm nguyên là: (2 ; 3), (3 ; 2), (– 1 ; – 2), (– 2 ; – 1)

3) PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

Trong khi giải các phương trình nghiệm nguyên rất cần đánh giá các miền giá trị của các biến, nếu số giá trị mà biến số có thể nhận không nhiều có thể dùng phương pháp thử trực tiếp để kiểm tra. Để đánh giá được miền giá trị của biến số cần vận dụng linh hoạt các tính chất chia hết, đồng dư, bất đẳng thức ...

a) Phương pháp sắp thứ tự các ẩn

Ví dụ 4: Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng

Giải:

Cách 1: Gọi các số nguyên dương phải tìm là x, y, z. Ta có:

$$x+y+z=x.y.z \qquad (1)$$

Chú ý rằng các ẩn x, y, z có vai trò bình đẳng trong phương trình nên có thể sắp xếp thứ tự giá trị của các ẩn, chẳng hạn: $1\le x\le y\le z$

Do đó: $xyz=x+y+z\le 3z$

Chia hai vế của bất đảng thức $xyz\le 3z$ cho số dương z ta được: $xy\le 3$

Do đó $xy\in\{1;2;3\}$

Với xy = 1, ta có x = 1, y = 1. Thay vào (1) được 2 + z = z (loại)

Với xy = 2, ta có x = 1, y = 2. Thay vào (1) được z = 3

Với xy = 3, ta có x = 1, y = 3. Thay vào (1) được z = 2 loại vì $y\le z$

Vậy ba số phải tìm là 1; 2; 3.

Cách 2: Chia hai vế của (1) cho $xyz\ne 0$ được:

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=1$$

Giả sử $x\ge y\ge z\ge 1$ ta có

$$1=\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}\le\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{3}{z^2}$$

Suy ra $1\le\frac{3}{z^2}$ do đó $z^2\le 3$ nên z = 1. Thay z = 1 vào (1):

$$x+y+1=xy$$
$$\Leftrightarrow xy-x-y=1$$
$$\Leftrightarrow x(y-1)-(y-1)=2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(y-1)=2$$

Ta có $x-1\ge y-1\ge 0$ nên

x – 1	2
y – 1	1

Suy ra

x	3
y	2

Ba số phải tìm là 1; 2; 3

Ví dụ 5:

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau :

5(x + y + z + t) + 10 = 2xyzt .

Giải

Vì vai trò của x, y, z, t như nhau nên có thể giả thiết

$x \geq y \geq z \geq t$.

Khi đó : $2xyzt = 5(x + y + z + t) + 10 \leq 20x + 10$

$\Rightarrow yzt \leq 15 \Rightarrow t^3 \leq 15 \Rightarrow t \leq 2$

Với t = 1 ta có : $2xyz = 5(x + y + z) + 15 \leq 15x + 15$

$\Rightarrow 2yz \leq 30 \Rightarrow 2z^2 \leq 30 \Rightarrow z \leq 3$

Nếu z = 1 thì $2xy = 5(x + y) + 20$ hay $4xy = 10(x + y) + 40$ hay

$(2x - 5)(2y - 5) = 65$.

Dễ thấy rằng phương trình này có nghiệm là

$(x = 35; y = 3)$ và $(x = 9; y = 5)$.

Giải tương tự cho các trường còn lại và trường hợp t = 2. Cuối cùng ta tìm được nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho là (x; y; z; t) = (35; 3; 1; 1); (9; 5; 1; 1) và các hoán vị của các bộ số này.

b) Phương pháp xét từng khoảng giá trị của ẩn

Ví dụ 6: Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$$

Giải:

Do vai trò bình đẳng của x và y, giả sử $x \geq y$. Dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của số nhỏ hơn (là y).

Hiển nhiên ta có $\frac{1}{y}<\frac{1}{3}$ nên $y > 3$ (1)

Mặt khác do $x \geq y \geq 1$ nên $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$. Do đó:

$\frac{1}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$ nên $y \leq 6$ (2)

Ta xác định được khoảng giá tri của y là $4 \leq y \leq 6$

Với y = 4 ta được: $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ nên x = 12

Với y = 5 ta được: $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$ loại vì x không là số nguyên

Với y = 6 ta được: $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ nên x = 6

Các nghiệm của phương trình là: (4 ; 12), (12 ; 4), (6 ; 6)

c) Phương pháp chỉ ra nghiệm nguyên

Ví dụ 7: Tìm các số tự nhiên x sao cho:

$$2^x + 3^x = 5^x$$

Giải:

Viết phương trình dưới dạng:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1 \qquad (1)$$

Với x = 0 thì vế trái của (1) bằng 2, loại.
Với x = 1 thì vế trái của (1) bằng 1, đúng

Với $x \ge 2$ thì $\left(\frac{2}{5}\right)^x < \frac{2}{5}, \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{3}{5}$ nên:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \text{ loại}$$

Nghiệm duy nhất của phương trình là x = 1

d) Sử dụng diều kiện $\Delta \ge 0$ để phương trình bậc hai có nghiệm

Ví dụ 8: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$x + y + xy = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

Giải

Viết (1) thành phương trình bậc hai đối với x:

$$x^2 - (y+1)x + (y^2 - y) = 0 \qquad (2)$$

Điều kiện cần để (2) có nghiệm là $\Delta \ge 0$

$$\Delta = (y+1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 6y + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 1 \le 0$$

$$\Leftrightarrow 3(y-1)^2 \le 4$$

Do đó $\Leftrightarrow (y-1)^2 \le 1$ suy ra:

y – 1	-1	0	1
y	0	1	2

Với y = 0 thay vào (2) được $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 1$

Với y = 1 thay vào (2) được $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0; x_4 = 2$

Với y = 2 thay vào (2) được $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_5 = 1; x_6 = 2$

Thử lại, các giá trị trên nghiệm đúng với phương trình (1)

Đáp số: (0 ; 0), (1 ; 0), (0 ; 1), (2 ; 1), (1 ; 2), (2 ; 2)

4) PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHIA HẾT, TÍNH ĐỒNG DƯ

Khi giải các phương trình nghiệm nguyên cần vận dụng linh hoạt các tính chất về chia hết, đồng dư, tính chẵn lẻ,… để tìm ra điểm đặc biệt của các biến số cũng như các biểu thức chứa trong phương trình, từ đó đưa phương trình về các dạng mà ta đã biết cách giải hoặc đưa về những phương trình đơn giản hơn..

a) Phương pháp phát hiện tính chia hết của ẩn:

Ví dụ 9: Giải phương trính với nghiệm nguyên:

3x + 17y = 159

Giải:

Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn phương trình. Ta thấy 159 và 2x đều chia hết cho 3 nên 17y $\vdots$ 3 do đó y $\vdots$ 3 (vì 17 và 3 nguyên tố cùng nhau)

Đặt y = 3t ($t \in \mathbb{Z}$). Thay vào phương trình ta được:

3x + 17.3t = 159

$\Leftrightarrow$ x + 17t = 53

Do đó: $\begin{cases} x = 53 - 17t \\ y = 3t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{Z}$)

Đảo lại, thay các biểu thức của x và y vào phương trình ta được nghiệm đúng.
Vậy phương trình (1) có vô số nghiệm nguyênđược xác định bằng công thức:

$\begin{cases} x = 53 - 17t \\ y = 3t \end{cases}$ (t là số nguyên tùy ý)

Ví dụ 10:

Chứng minh rằng phương trình : $x^2 - 5y^2 = 27$ (1) không có nghiệm là số nguyên.

Giải

Một số nguyên x bất kì chỉ có thể biểu diễn dưới dạng x = 5k hoặc x = 5k ± 1 hoặc x = 5k ± 2 trong đó $k \in \mathbb{Z}$

- Nếu x = 5k thì :

(1) $\Leftrightarrow (5k)^2 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow 5(5k^2 - y^2) = 27$

Điều này vô lí, vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y là số nguyên, còn vế phải không chia hết cho 5

- Nếu x = 5k ± 1 thì :

(1) $\Leftrightarrow (5k \pm 1)^2 - 5y^2 = 27$

$\Leftrightarrow 25k^2 \pm 10k + 1 - 5y^2 = 27$

$\Leftrightarrow 5(5k^2 \pm 4k - y^2) = 23$

Điều này cũng vô lí, vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y là số nguyên, còn vế phải không chia hết cho 5

- Nếu x = 5k ± 2 thì :

(1) $\Leftrightarrow (5k \pm 2)^2 - 5y^2 = 27$

$\Leftrightarrow 25k^2 \pm 20k + 4 - 5y^2 = 27$

$\Leftrightarrow 5(5k^2 \pm 4k - y^2) = 23$

Lập luận tương tự như trên, điều này cũng vô lí

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm là số nguyên

Ví dụ 11:

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau :

$19x^2 + 28y^2 = 729$.

Giải

Cách 1. Viết phương trình đã cho dưới dạng

$(18x^2 + 27y^2) + (x^2 + y^2) = 729$ (1)

Từ (1) suy ra $x^2 + y^2$ chia hết 3, do đó x và y đều chia hết cho 3. Đặt

x = 3u, y = 3v $(u, v \in \mathbb{Z})$

Thay vào phương trình đã cho ta được : $19u^2 + 28v^2 = 81$. (2)

Từ (2) lập luận tương tự trên ta suy ra u = 3s, v = 3t $(s, t \in \mathbb{Z})$

Thay vào (2) ta có $19s^2 + 28t^2 = 9$. (3)

Từ (3) suy ra s, t không đồng thời bằng 0, do đó

$19s^2 + 28t^2 \geq 19 > 9.$

Vậy (3) vô nghiệm và do đó phương trình đã cho cũng vô nghiệm.

Cách 2. Giả sử phương trình có nghiệm

Từ phương trình đã cho ta suy ra $x^2 \equiv -1 \pmod 4$, điều này không xảy ra với mọi số nguyên x. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

b) Phương pháp đưa về phương trình ước số

Ví dụ 12: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$xy - x - y = 2$$

Giải:

Biến đổi phương trình thành:

$x(y - 1) - y = 2$

$\Leftrightarrow x(y - 1) - (y - 1) = 3$

$\Leftrightarrow (y - 1)(x - 1) = 3$

Ta gọi phương trình trên là phương trình ước số: vế trái là 1 tích các thừa số nguyên, vế phải là một hằng số. Ta có x và y là các số nguyên nên x – 1 và y – 1 là các số nguyên và là ước của 23.

Do vai trò bình đẳng của x và y trong phương trình nên có thể giả sử $x \geq y$, khi đó $x - 1 \geq y - 1$

Ta có:

x – 1	3	-1
y – 1	1	-3

Do đó:

x	4	0
y	2	-2

Nghiệm nguyên của phương trình: (4 ; 2), (2 ; 4), (0 ; -2), (-2 ; 0)

Ví dụ 13:

Tìm nghiệm nguyên của phương trình : x + xy + y = 9.

Giải

Phương trình đã cho có thể đưa về dạng :

$(x + 1)(y + 1) = 10.$ (1)

Từ (1) ta suy ra (x + 1) là ước của 10 hay $(x+1) \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$

Từ đó ta tìm được các nghiệm của phương trình là :

(1, 4), (4, 1), (-3, -6), (-6, -3), (0, 9), (9, 0), (-2, -11), (-11, -2).

Ví dụ 14:

Xác định tất cả các cặp nguyên dương (x; n) thỏa mãn phương trình sau

$$x^3 + 3367 = 2^n$$

Giải

Để sử dụng được hằng đẳng thức $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ta chứng minh n chia hết cho 3 .

Từ phương trình đã cho ta suy ra $x^3 \equiv 2^n \pmod 7$.

Nếu n không chia hết cho 3 thì 2^n khi chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 2, 4 hoặc 7, trong khi đó x^3 khi chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0, 1, hoặc 6 nên không thể có đồng dư thức $x^3 \equiv 2^n$ (mod 7).

Vậy n = 3m với m là một số nguyên dương nào đó. Thay vào phương trình đã cho ta được

$$x^3 + 3367 = 2^{3m}$$

$$(2^m - x)[(2m - x)^2 + 3x.2^m] = 3367 \qquad (1)$$

Từ (1) ta suy ra $2^m - x$ là ước của 3367

Hơn nữa, $(2^m - x)^3 < 2^{3m} - x^3 = 3367$ nên $(2^m - x) \in \{1;7;13\}$

Xét $2^m - x = 1$, thay vào (1) ta suy ra $2^m(2^m - 1) = 2 \times 561$, vô nghiệm.

Xét $2^m - x = 3$, thay vào (1) ta suy ra $2^m(2^m - 13) = 2 \times 15$, vô nghiệm.

Xét $2^m - x = 7$, thay vào (1) ta suy ra $2^m(2^m - 7) = 24 \times 32$. Từ đó ta có

m = 4; n = 3m = 12, và x = 9.

Vậy (x; n) = (9; 12)

c) Phương pháp tách ra các giá trị nguyên:

Ví dụ 15: Giải phương trình ở ví dụ 2 bằng cách khác

Giải:

Biểu thị x theo y:

x(y – 1) = y + 2

Ta thấy y ≠ 1 (vì nếu y = 1 thì ta có 0x = 3 vô nghiệm)

Do đó: $x = \dfrac{y+2}{y-1} = \dfrac{y-1+3}{y-1} = 1 + \dfrac{3}{y-1}$

Do x là số nguyên nên $\dfrac{3}{y-1}$ là số nguyên, do đó y – 1 là ước của 3. Lần lượt cho y – 1 bằng -1, 1, -3, 3 ta được các đáp số như ở ví dụ 2.

5) PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

a) Sử dụng tính chất về chia hết của số chính phương

Ví dụ 16: Tìm các số nguyên x để 9x + 5 là tích của hai số nguyên liên tiếp

Giải:

Cách 1: Giải sử 9x + 5 = n(n + 1) với n nguyên thì:

36x + 20 = $4n^2 + 4n$

$\Rightarrow 36x + 21 = 4n^2 + 4n + 1$

$\Rightarrow 3(12x + 7) = (2n + 1)^2$

Số chính phương $(2n+1)^2$ chia hết cho 3 nên cũng chia hết cho 9. Ta lại có 12x + 7 không chia hết cho 3 nên 3(12x + 7) không chi hết cho 9.

Mâu thuẫn trên chứng tỏ không tồn tại số nguyên x nào để 9x + 5 = n(n + 1).

Cách 2: Giả sử 9x + 5 = n(n + 1) với n nguyên

Biến đổi $n^2 + n - 9x - 5 = 0$

Để phương trình bậc hai đối với n có nghiệm nguyên, điều kiện cần là Δ là số chính phương.

Nhưng $\Delta = 1 + 4(9x + 5) = 36x + 21$ chi hết cho 3 nhưng không chia hết hco 9 nên không là số chính phương.

Vậy không tồn tại số nguyên n nào để 9x + 5 = n(n + 1), tức là không tồn tại số nguyên x để 9x + 5 là tích của hai số nguyên liên tiếp.

b) Tạo ra bình phương đúng:

Ví dụ 17: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$$

Giải :

$$2x^2 + 4x + 2 = 21 - 3y^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 3(7 - y^2)$$

Ta thấy $3(7 - y^2) \vdots 2 \Rightarrow 7 - y^2 \vdots 2 \Rightarrow$ y lẻ

Ta lại có $7 - y^2 \geq 0$ nên chỉ có thể $y^2 = 1$

Khi đó (2) có dạng: $2(x+1)^2 = 18$

Ta được: x + 1 = ± 3, do đó: $x_1 = 2; x_2 = -4$

Các cặp số (2 ; 1), (2 ; -1), (-4 ; 1), (-4 ; -1) thỏa mãn (2) nên là nghiệm của phương trình đã cho.

c) Xét các số chính phương liên tiếp:

Ví dụ 18: Chứng minh rằng với mọi số nguyên k cho trước, không tồn t5ai số nguyên dương x sao cho:

$$x(x+1) = k(k+2)$$

Giải:

Giả sử $x(x+1) = k(k+2)$ với k nguyên, x nguyên dương.

Ta có:

$$x^2 + x = k^2 + 2k$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Do x > 0 nên $x^2 < x^2 + x + 1 = (k+1)^2$ (1)

Cũng do x > 0 nên

$(k+1)^2 = x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$x^2 < (k+1)^2 < (x+1)^2$ vô lý

Vậy không tồn tại số nguyên dương x để x(x + 1) = k(k + 2)

Ví dụ 19: Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là một số chính phương:

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$$

Giải:

Đặt $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2$ (1) với $y \in \mathbb{N}$

Ta thấy:

$$y^2 = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + x + 3)$$

$$y^2 = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x + 3)$$

Ta sẽ chứng minh $a^2 < y^2 < (a+2)^2$ với a = $x^2 + x$

Thật vậy:

$y^2 - a^2 = x^2 + x + 3 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4} > 0$

$(a+2)^2 - y^2 = (x^2 + x + 2)^2 - (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3)$

$= 3x^2 + 3x + 1$

$= 3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} > 0$

Do $a^2 < y^2 < (a+2)^2$ nên $y^2 = (a+1)^2$

$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2 + x + 1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Với x = 1 hoặc x = -2 biểu thức đã cho bằng $9 = 3^2$

d) Sử dụng tính chất: nếu hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số đều là số chính phương

Ví dụ 20: Giải phương trình với nghiệm nguyên dương:

$xy = z^2$ (1)

Giải:

Trước hết ta có thể giả sử (x , y , z) = 1. Thật vậy nếu bộ ba số x_o, y_o, z_o thỏa mãn (1) và có ƯCLN bằng d, giả sử $x_o = dx_1, y_o = dy_1, z_o = dz_1$ thì x_1, y_1, z_1 cũng là nghiệm của (1).

Với (x , y , z) = 1 thì x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau, vì nếu hai trong ba số x, y, z có ước chung là d thì số còn lại cũng chia hết cho d.

Ta có $z^2 = xy$ mà (x, y) = 1 nên $x = a^2, y = b^2$ với a, b $\in \mathbb{N}^*$

Suy ra: $z^2 = xy = (ab)^2$ do đó, z = ab

Như vậy: $\begin{cases} x = ta^2 \\ y = tb^2 \\ z = tab \end{cases}$ với t là số nguyên dương tùy ý.

Đảo lại, hiển nhiên các số x, y, z có dạng trên thỏa mãn (1)

Công thức trên cho ta các nghiệm nguyên dương của (1)

e) Sử dụng tính chất: nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thí một trong hai số nguyên liên tiếp đó bằng 0

Ví dụ 21: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ (1)

Giải:

Thêm xy vào hai vế:

$x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 = xy(xy+1)$ (2)

Ta thấy xy và xy + 1 là hai số nguyên liên tiếp, có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0.

Xét xy = 0. Từ (1) có $x^2 + y^2 = 0$ nên x = y = 0

Xét xy + 1 = 0. Ta có xy = -1 nên (x , y) = (1 ; -1) hoặc (-1 ; 1)

Thửa lại, ba cặp số (0 ; 0), (1 ; -1), (-1 ; 1) đều là nghiệm của phương trình đã cho.

6) PHƯƠNG PHÁP LÙI VÔ HẠN, NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

Ví dụ 22: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$

Giải:

Hiển nhiên $x \vdots 2$. Đặt $x = 2x_1$ với x_1 nguyên. Thay vào (1) rồi chia hai vế cho 2 ta được:

$$4x_1^3 + y^3 = 2z^3 \qquad (2)$$

Do đó $y \vdots 2$. Đặt $y = 2y_1$ với y_1 nguyên. Thay vào (2) rồi chia hai vế cho 2 ta được:

$$2x_1^3 + 4y_1^3 = z^3 \qquad (3)$$

Do đó $z \vdots 2$. Đặt $z = 2z_1$ với z_1 nguyên. Thay vào (3) rồi chia hai vế cho 2 được:

$$x_1^3 + 4y_1^3 = 4z_1^3 \qquad (4)$$

Như vậy nếu (x , y , z) là nghiệm của (1) thì (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của (1) trong đó $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$.

Lập luận tương tự như trên, (x_2, y_2, z_2) cũng là nghiệm của (1) trong đó $x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2, z_1 = 2z_2$.

Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến: x, y, z chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tùy ý.

Điều này chỉa xảy ra khi x = y = z = 0.

Đó là nghiệm nguyên duy nhất của (1)

Ví dụ 23:

Tìm ba số nguyên dương đôi một khác nhau x, y, z thỏa mãn :

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^2$$

Giải

Vì vai trò của x, y, z như nhau nên có thể giả sử x < y < z.

Áp dụng bất đẳng thức :

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3$$

Với mọi x, y, z ≥ 0 ta suy ra x + y + z ≤ 9.

Dấu bằng không xảy ra vì x, y, z đôi một khác nhau.

Vậy x + y + z ≤ 8. (1)

Mặt khác: x + y + z ≥ 1 + 2 + 3 = 6. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $x + y + z \in \{6; 7; 8\}$

Từ đây kết hợp với phương trình ban đầu ta tìm được x, y, z

Vậy (x, y, z) = (1, 2, 3) và các hoán vị của bộ ba số này

7) PHƯƠNG PHÁP XÉT CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Ví dụ 24: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$1!+2!+...+x!=y^2 \qquad (1)$$

Giải: Cho x lần lượt bằng 1; 2; 3; 4, ta có ngay2 nghiệm nguyên dương (x ; y) củ phương trình là (1 ; 1), (3 ; 3)
Nếu x > 4 thì dễ thấy k! với k > 4 đều có chữ số tận cùng bằng 0
$\Rightarrow$ 1! + 2! + 3! + 4! + … + x! = 33 + 5! + … + x! có chữ số tận cùng bằng 3.
Mặt khác vế phải là số chính phương nên không thể tận cùng là 3.
Vậy phương trình (1) chỉ có hai nghiệm nguyên dương (x ; y) là (1 ; 1) và (3 ; 3)

Ví dụ 25: Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình:

$$x^2+x-1=3^{2y+1} \qquad (1)$$

Giải:

Cho x các giá trị từ đến 9, dễ dàng xác định được chữa số tận cùng của x^2+x-1 chỉ nhận các giá trị 1; 5; 9. Mặt khác ta thấy 3^{2y+1} là lũy thừ bậc lẻ của 3 nên chữ số tận cùng của nó chỉ có thể là 3 hoặc 7, khác với 1; 5; 9.

Vậy (1) không thể xảy ra. Nói các khác phương trình (1) không có nghiệm nguyên dương.

8) PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM RIÊNG

a) Cách giải

Xét phương trình $ax+by+c=0 \qquad (1)$
trong đó $a,b,c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, b \neq 0$
Không mất tính tổng quát, giả thiết rằng (a, b, c) = 1. Thật vậy, nếu $(a, b, c) = d \neq 1$ thì ta chia hai vế của phương trình cho d.

Ta có hai định lý:
Định lý 1: Nếu phương trình (1) có nghiệm nguyên thì (a, b) = 1 (*)
Chứng minh: Giả sử (x_o, y_o) là nghiệm nguyên của (1) thì $ax_o+by_o=c$
Nếu a và b có ước chung là $d \neq 1$ thì $c \,\vdots\, d$, trái với giả thiết (a, b, c) = 1.
Vậy (a, b) = 1
Định lý 2: Nếu (x_o, y_o) là một nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên và mọi nghiệm nguyên của nó đều có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{cases} x = x_o + bt \\ y = y_o - at \end{cases}$$

trong đó t là một số nguyên tùy ý $(t = 0, \pm1, \pm2, ...)$.
Chứng minh:
Bước 1: Mọi cặp số $(x_o+bt; y_o-at)$ đều là nghiệm nguyên của (1). Thật vậy (x_o, y_o) là nghiệm của (1) nên $ax_o+by_o=c$
Ta có: $ax+by=a(x_o+bt)+b(y_o-at)=ax_o+by_o=c$
Do đó $(x_o+bt; y_o-at)$ là nghiệm của (1)
Bước 2: Mọi nghiệm (x, y) của (1) đều có dạng $(x_o+bt; y_o-at)$ với $t \in \mathbf{Z}$
Thật vậy, do (x_o, y_o) và (x, y) là nghiệm của (1) nên

$$ax + by = c$$
$$ax_o + by_o = c$$

Trừ từng vế: $\begin{matrix} a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0 \\ \Rightarrow a(x - x_o) = b(y_o - y) \end{matrix}$ (2)

Ta có $a(x - x_o) \vdots b$ mà (a, b) = 1 (theo định lý 1) nên $x - x_o \vdots b$

Vậy tồn tại số nguyên t sao cho:

$$x - x_o = \text{bt}$$

Tức là: $x = x_o + bt$.

Thay vào (2):

$abt = b(y_o - y)$

$\Rightarrow at = y_o - y$

$\Rightarrow y = y_o - at$

Vậy tồn tại số nguyên t sao cho:

$$\begin{cases} x = x_o + bt \\ y = y_o - at \end{cases}$$

b) Ví dụ:

Ví dụ 26: Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình:

$$3x - 2y = 5$$

Giải:

Cách 1: Ta thấy $x_o = 3; y_o = 2$ là một nghiệm riêng.

Theo định lý 2, mọi nghiệm nguyên của phương trình là:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{(t là số nguyên tùy ý)}$$

Cách 2: Ta thấy $x_o = 1; y_o = -1$ là một nghiệm riêng

Theo định lý 2, mọi nghiệm nguyên của phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 - 3t \end{cases} \quad \text{(t là số nguyên tùy ý)}$$

Chú ý: Qua hai cách giải trên, ta thấy có nhiều công thức biểu thị tập hợp các nghiệm nguyên của cùng một phương trình.

c) Cách tìm một nghiệm riêng của phương trình bậc nhất hai ẩn:

Để tìm một nghiệm nguyên riêng của phương trình $ax + by = c$, ta có thể dùng phương pháp thử chọn: lần lượt cho x bằng số có giá giá trị tuyệt đối nhỏ $(0; \pm 1; \pm 2...)$ rồi tìm giá trị tương ứng của y.

9) PHƯƠNG PHÁP HẠ BẬC

Ví dụ 27:

Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$x^3 + 2y^3 - 4z^3 = 0$ (1)

Giải

(1) $\Leftrightarrow x^3 = 4z^3 - 2y^3$ (2)

Rõ ràng vế phải của (2) chia hết cho 2 nên $x^3 \vdots 2$ do đó $x \vdots 2$. Đặt $x = 2x_1$ ($x_1 \in \mathbf{Z}$). Thay vào (2) ta có :

(2) $\Leftrightarrow 8x_1^3 = 4x^3 - 2y^3 \Leftrightarrow y^3 = 2z^3 - 4x_1^3$ (3)

Lập luận tương tự ta có $y \vdots 2$, đặt y = 2y1 (y1 $\in \mathbf{Z}$). Biến đổi tương tự, ta được:

$z^3 = 4y_1^3 + 2x_1^3$ (4)

Lập luận tương tự ta có $z \vdots 2$, đặt $z = 2z_1$ ($z_1 \in \mathbf{Z}$). Biến đổi tương tự, ta lại có:

(4) $\Leftrightarrow 8z_1^3 = 4y_1^3 + 2x_1^3 \Leftrightarrow x_1^3 + 2y_1^3 - 4z_1^3 = 0$ (5)

Rõ ràng nếu bộ số (x_0; y_0; z_0) là nghiệm của (1) thì bộ số $(\frac{x_0}{2};\frac{y_0}{2};\frac{z_0}{2})$ cũng là nghiệm của (1), hơn nữa x_0, y_0, z_0 là số chẵn và $\frac{x_0}{2};\frac{y_0}{2};\frac{z_0}{2}$ cũng là số chẵn. Quá trình này có thể tiếp tục mãi và các số $\frac{x_0}{2^n};\frac{y_0}{2^n};\frac{z_0}{2^n}$ là số chẵn với mọi n là số nguyên dương.

Vậy x = y = z = 0

2) Các dạng phương trình

với nghiệm nguyên

1) PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Ví dụ 1: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

11x + 18y = 120

Giải:

Ta thấy $11x \vdots 6$ nên $x \vdots 6$. Đặt x = 6k (k nguyên). Thay vào (1) và rút gọn ta được:

11k + 3y = 20

Biểu thị ẩn mà hệ số của nó có giá trị tuyệt đối nhỏ (là y) theo k ta được:

$$y = \frac{20 - 11k}{3}$$

Tách riêng giá trị nguyên của biểu thức này:

$$y = 7 - 4k + \frac{k-1}{3}$$

Lại đặt $\frac{k-1}{3}$ = t với t nguyên suy ra k = 3t + 1. Do đó:

$$y = 7 - 4(3t+1) + t = 3 - 11t$$

$$x = 6k = 6(3t+1) = 18t + 6$$

Thay các biểu thức của x và y vào (1), phương trình được nghiệm đúng.

Vậy các nghiệm nguyên của (10 được biểu thị bởi công thức:

$\begin{cases} x = 18t + 6 \\ y = 3 - 11t \end{cases}$ với t là số nguyên tùy ý

Cách giải:

- Rút gọn phương trình, chú ý đến tính chia hết của các ẩn
- Biểu thị ẩn mà hệ số của nó có giá trị tuyệt đối nhỏ (chẳng hạn x) theo ẩn kia.
- Tách riêng giá trị nguyên ở biểu thức của x
- Đặt điều kiện để phân bố trong biểu thức của x bằng một số nguyên t_1, ta được một phương trình bậc nhất hai ẩn y và t_1
- Cứ tiếp tục như trên cho đến khi các ẩn đều được biểu thị dưới dạng một đa thức với các hệ số nguyên

2) PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

Ví dụ 2: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

5x – 3y = 2xy – 11

Giải: Biểu thị y theo x:

(2x + 3)y = 5x + 11

Dễ thấy 2x + 3 ≠ 0 (vì x nguyên) do đó:

$$y = \frac{5x+11}{2x+3} = 2 + \frac{x+5}{2x+3}$$

Để $y \in \mathbb{Z}$ phải có $x + 5 \vdots 2x + 3$

$$\Rightarrow 2(x+5) \vdots 2x+3$$

$$\Rightarrow 2x + 3 + 7 \vdots 2x + 3$$

$$\Rightarrow 7 \vdots 2x + 3$$

Ta có:

2x + 3	1	-1	7	-7
x	-1	-2	2	-5
y	6	-1	3	2

Thử lại các cặp giá trị trên của (x , y) đều thỏa mãn phương trình đã cho.

Ví dụ 3: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^2 - 2x - 11 = y^2$$

Giải:

Cách 1: Đưa về phương trình ước số:

$$x^2 - 2x + 1 - 12 = y^2$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 = 12$

$\Leftrightarrow (x-1+y)(x-1-y) = 12$

Ta có các nhận xét:

a) Vì (1) chùa y có số mũ chẵn nên có thể giả thiết rằng $y \geq 0$. Thế thì $x - 1 + y \geq x - 1 - y$

b) $(x-1+y) - (x-1-y) = 2y$ nên $x-1+y$ và $x-1-y$ cùng tính chẵn lẻ. Tích của chúng bằng 12 nên chúng cùng chẵn.

Với các nhận xét trên ta có hai trường hợp:

x – 1 + y	6	-2
x – 1 - y	2	-6

Do đó:

x - 1	4	-4
y	2	2
x	5	-3

Đáp số: (5 ; 2), (5 ; -2), (-3 ; 2), (-3 ; -2)

Cách 2:

Viết thành phương trình bậc hai đối với x:

$$x^2 - 2x - (11 + y^2) = 0$$

$\Delta' = 1 + 11 + y^2 = 12 + y^2$

Điều kiện cần để (2) có nghiệm nguyên:

Δ' là số chính phương $\Leftrightarrow 12 + y^2 = k^2 (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow k^2 - y^2 = 12 \Leftrightarrow (k+y)(k-y) = 12$

Giả sử $y \geq 0$ thì k + y ≥ k – y và k + y ≥ 0

(k + y) – (k – y) = 2y nên k + y và k – y cùng tính chẵn lẻ và phải cùng chẵn.

Từ các nhận xét trên ta có:

$$\begin{cases} k + y = 6 \\ k - y = 2 \end{cases}$$

Do đó: y = 2

Thay vào (2): $x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -3$

Ta có bốn nghiệm: (5 ; 2), (5 ; -2), (-3 ; -2), (-3 ; 2)

Ví dụ 4: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0 \qquad (1)$$

Giải:

Viết thành phương trình bậc hai đối với x:

$$x^2 + (3y-1)x + (2y^2 - y + 3) = 0 \qquad (2)$$

$\Delta = (3y-1)^2 - 4(2y^2 - y + 3) = y^2 - 2y - 11$

Điều kiện cần và đủ để (2) có nghiệm nguyên là Δ là số chính phương

$\Leftrightarrow y^2 - 2y - 11 = k^2 (k \in \mathbb{Z}) \qquad (3)$

Giải (3) với nghiệm nguyên ta được $y_1 = 5, y_2 = -3$

Với y = 5 thay vào (2) được $x^2 + 14x + 48 = 0$. Ta có: $x_1 = -8, x_2 = -6$

Với y = -3 thay vào (2) được $x^2 - 10x + 24 = 0$. Ta có $x_3 = 6, x_4 = 4$

Đáp số: (-8 ; 5), (-6 ; 5), (6 ; -3), (4 ; -3)

3) PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA TRỞ LÊN CÓ HAI ẨN:

Ví dụ 5: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = y^2 \qquad (1)$$

Giải:

Nếu y thỏa mãn phương trình thì – y cũng thỏa mãn, do đó ta giả sử $y \ge 0$

(1) $\Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = y^2$

Đặt $x^2 + 3x + 2 + 1 = a$, ta được:

$(a-1)(a+1) = y^2 \Leftrightarrow a^2 - 1 = y^2$

$\Leftrightarrow (a+y)(a-y) = 1$

Suy ra a + y = a – y, do đó y = 0

Thay vào (1) được: $x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = -2; x_4 = -3$

Đáp số: (0 ; 0), (-1 ; 0), (-2 ; 0), (-3 ; 0)

Ví dụ 6: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^3 - y^3 = xy + 8 \qquad (1)$$

Giải:

Cách 1: $|x-y|.|x^2 + xy + y^2| = |xy + 8|$

Dễ thấy $x \ne y$, vì nếu x = y thì (1) trở thành $0 = x^2 + 8$, loại.

Do x, y nguyên nên $|x - y| \ge 1$

Suy ra: $|x^2 + xy + y^2| \le |xy + 8|$

Do đó: $x^2 + xy + y^2 \le |xy + 8| \qquad (2)$

Xét hai trường hợp:

a) xy + 8 < 0. Khi đó (2) trở thành:

$x^2 + xy + y^2 \le -xy - 8 \Leftrightarrow (x+y)^2 \le -8$, loại

b) $xy + 8 \ge 0$. Khi đó (2) trở thành:

$$x^2 + xy + y^2 \le xy + 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 8 \qquad (3)$$

Do đó: $x^2, y^2 \in \{0;1;4\}$

Nếu x = 0 thì từ (1) có $y^3 = -8$ nên y = -2

Nếu y = 0 thì từ (1) có $x^3 = -8$ nên x = 2

Nếu x, y khác 0 thì $x^2, y^2 \in \{1;4\}$. Do $x \ne y$ nên chỉ có:

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

Như vậy trong hai số x và y có một số chẵn, một số lẻ. Khi đó vế trái của (1) lẻ còn vế phải của (1) chẵn, không xảy ra.

Đáp số: (0 ; -2), (2 ; 0)

Cách 2: $x^3 - y^3 - xy = 8 \qquad (1)$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 27y^3 - 27xy = 216$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 27y^3 - 1 - 27xy = 215 \qquad (2)$$

Ta thấy $27x^3$, $-27y^3$, -1 là lập phương của 3x, $-$ 3y, -1 còn 27xy là ba bần tích của ba số ấy. Áp dụng hằng đẳng thức:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c).\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2}$$

Với a = 3x, b = -3y, c = -1, ta biến đổi (2) thành:

$$(3x - 3y - 1).\left[\frac{(3x+3y)^2 + (1-3y)^2 + (3x+1)^2}{2}\right] = 215 \qquad (3)$$

Đặt biểu thức trong dấu móc của (3) là A. Ta thấy A > 0 nên A và $3x - 3y - 1$ là ước tự nhiên của 215. Phân tích ra thừa số nguyên tố: 215 = 5.43 nen 215 cò bốn ước tự nhiên: 1, 5, 43, 215.

Do $3x - 3y - 1$ chi cho 3 dư 2 nên $3x - 3y - 1 \in \{5;215\}$

Xét hai trường hợp:

$$\begin{cases} 3x - 3y - 1 = 5 (4) \\ A = 43 (5) \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3x - 3y - 1 = 215 \\ A = 1 \end{cases}$$

Trường hợp 1: từ (4) suy ra x – y = 2. Thay y = x – 2 vào (5) được:

$$[3x + 3(x-2)]^2 + [1 - 3(x-2)]^2 + (3x+1)^2 = 86$$

Rút gọn được: x(x – 2) = 0 $\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

Với x = 0 thì y = 2. Với x =2 thì y =0

Trường hợp 2: Từ A = 1 suy ra:

$$(3x+3y)^2 + (1-3y)^2 + (3x+1)^2 = 2$$

Tổng của ba số chính phương bằng 2 nên có một số bằng 0, hai số bằng số 1. Số bằng 0 không thề là 1 – 3y hoặc 3x + 1, do đó 3x + 3y = 0. Nghiệm nguyên của hệ:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ (1-3y)^2 = 1 \\ (3x+1)^2 = 1 \end{cases}$$ là x = y = 0, không thỏa mãn 3x – 3y – 1 = 215.

Đáp số: (0 ; -0), (2 ; 0)

Cách 3: $x^3 - y^3 = xy + 8$

$\Leftrightarrow (x-y)^3 + 3xy(x-y) = xy + 8$

Đặt x – y = a, xy = b ta có:

$a^3 + 3ab = b + 8$

$\Leftrightarrow a^3 - 8 = -b(3a-1)$

Suy ra: $a^3 - 8 \vdots 3a - 1$

$\Rightarrow 27(a^3 - 8) \vdots 3a - 1$

$\Rightarrow 27a^3 - 1 - 215 \vdots 3a - 1$

Do $27a^3 - 1 \vdots 3a - 1$ nên $215 \vdots 3a - 1$

Phân tích ra thừa số nguyên tố: 215 = 5.43

Do đó $3a - 1 \in \{\pm 1; \pm 5; \pm 43; \pm 215\}$

Do 3a – 1 chia cho 3 dư 2 nên $3a - 1 \in \{-1; 5; -43; 215\}$

Ta có:

3a – 1	– 1	5	– 43	215
a	0	2	– 14	72
$b = \dfrac{a^3 - 8}{1 - 3a}$	– 8	0	– 64	– 1736

Chú ý rằng $(x-y)^2 + 4xy \geq 0$ nên $a^2 + 4b \geq 0$, do đó trong bốn trường hợp trên chỉ có $a = 2; b = 0$. Ta được: x – y = 2; xy = 0

Đáp số: (0 ; -2) và (2 ; 0)

4) PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC CÓ BA ẨN TRỞ LÊN

Ví dụ 7: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$6x + 15y + 10z = 3$

Giải:

Ta thấy $10z \vdots 3$ nên $z \vdots 3$. Đặt z = 3k ta được:

$6x + 15y + 10.3k = 3$

$\Leftrightarrow 2x + 5y + 10k = 1$

Đưa về phương trình hai ẩn x, y với các hệ số tương ứng 2 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau.

$2x + 5y = 1 - 10k$

$x = \dfrac{1 - 10k - 5y}{2} = -5k - 2y + \dfrac{1 - y}{2}$

Đặt $\dfrac{1-y}{2}$ = t với t nguyên. Ta có:

$y = 1 - 2t$

$x = -5k - 2(1 - 2t) + t = 5t - 5k - 2$

$z = 3k$

Nghiệm của phương trình: $(5t - 5k - 2; 1 - 2t; 3k)$ với t, k là các số nguyên tùy ý.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên:

$x^2 + y^2 + z^2 = 1999$ (1)

Giải:
Ta biết rằng số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, còn số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1 và chia cho 8 dư 1.
Tổng $x^2 + y^2 + z^2$ là số lẻ nên trong ba số $x^2; y^2; z^2$ phải có: hoặc có một số lẻ, hai số chẵn; hoặc cả ba số lẻ.
Trường hợp trong ba số $x^2; y^2; z^2$ có một số lẻ, hai số chẵn thì vế trái của (1) chia cho 4 dư 1, còn vế phải là 1999chia cho 4 dư 3, loại.
Trong trường hợp ba số $x^2; y^2; z^2$ đều lẻ thì vế trái của (1) chia cho 8 dư 3, còn vế phải là 1999 chia cho 8 dư 7, loại.
Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

5) PHƯƠNG TRÌNH DẠNG PHÂN THỨC

Ví dụ 9: Tìm các nghei65m nguyên dương của phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{6xy} = \frac{1}{6}$$

Giải:
Nhân hai vế của phương trình với 6xy:

$$6y + 6x + 1 = xy$$

Đưa về phương trình ước số:

$$x(y-6) - 6(y-6) = 37$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(y-6) = 37$$

Do vai trò bình đẳng của x và y, giả sử $x \geq y \geq 1$, thế thì $x - 6 \geq y - 6 \geq -5$.
Chỉ có một trường hợp:

$$\begin{cases} x - 6 = 37 \\ y - 6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 43 \\ y = 7 \end{cases}$$

Đáp số: (43 ; 7), (7 ; 43)

Ví dụ 10: Tìm các số nguyên x sao cho $\dfrac{x-17}{x-9}$ là bình phương của một phân số

Giải:
Giải sử $\dfrac{x-17}{x-9} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$ với $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$.
Xét a = 0 thì x = 17
Xét $a \neq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử (a, b) = 1. Do $(a^2, b^2) = 1$ nên:

$x - 17 = a^2 k$ (1)

$x - 9 = b^2 k$ (2) k nguyên

Từ (1) và (2) suy ra:

$$(x-9) - (x-17) = (b^2 - a^2)k$$

$$8 = (b+a)(b-a)k$$

Ta thấy b + a và b – a là ước của 8. Chú ý rằng (b + a) – (b – a) = 2a nên b + a và b – a cùng tính chẵn lẻ. Ta lại có b + a > b – a và b + a > 0. Có các trường hợp:

b + a	b – a	k	b	a	$x = b^2k + 9$
4	2	1	3	1	18
4	– 2	– 1	1	3	8
2	– 2	– 2	0, loại		
2	– 4	– 1	– 1, loại		

Có ba đáp số:

x = 17 thì $\dfrac{17-17}{17-9} = \dfrac{0}{8} = 0^2$

x = 18 thì $\dfrac{18-17}{18-9} = \dfrac{1}{9} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

x = 8 thì $\dfrac{8-17}{8-9} = 9 = 3^2$

6) PHƯƠNG TRÌNH DẠNG MŨ

Ví dụ 11: Tìm các số tự nhiên x và các số nguyên y sao cho:

$$2^x + 3 = y^2$$

Giải:
Lần lượt xét các giá trị tự nhiên của x:
Nếu x = 0 thì $y^2 = 4$ nên $y = \pm 2$
Nếu x = 1 thì $y^2 = 5$, không có nghiệm nguyên
Nếu $x \geq 2$ thì $2^x \vdots 4$, do đó vế trái chia cho 4 dư 3, còn y lẻ nên vế phải chia cho 4 dư 1. Mâu thuẫn.
Kết luận: Nghiệm của phương trình là (0 ; 2), (0 ; – 2)

Ví dụ 12: Giải phương trình với nghiệm nguyên dương:

$$2^x + 57 = y^2 \qquad (1)$$

Giải:
Xét hai trường hợp:

a) x lẻ. Đặt x = 2n + 1 $(n \in \mathbb{N})$. Ta có:

$2^x = 2^{2n+1} = 2.4^n = 2(3+1)^n = 2(BS3+1) = BS3+2$

Khi đó vế trái của (1) là số chia cho 3 dư 2, còn vế phải là số chính phương chia cho 3 không dư 2, loại.

b) x chẵn. Đặt x = 2n $(n \in \mathbb{N}^*)$. Ta có:

$y^2 - 2^{2n} = 57$

$\Leftrightarrow (y+2^n)(y-2^n) = 3.19$

Ta thấy $y + 2^n > 0$ nên $y - 2^n > 0$ và $y + 2^n > y - 2^n$
Do đó có các trường hợp:

$y+2^n$	57	19
$y-2^n$	1	3
2^n	28, loại	8
n		3
y		11
x = 2n		6

Ta có: $2^6+57=11^2$
Kết luận: nghiệm của phương trình là (6 ; 11)

Ví dụ 13: Giải phương trình với nghiệm tự nhiên:

$$2^x+2^y+2^z=1024 \quad (1) \quad \text{với } x\le y\le z$$

Giải:
Chia hai vế của (1) cho $2^x\neq 0$ ta được:

$$1+2^{y-x}+2^{z-x}=2^{10-x} \quad (2)$$

Do $2^{10-x}>1$ nên 2^{10-x} là bội của 2. Ta lại có z > x, vì nếu z = x thì x = y = z, khi đó (2) trở thành $1+2^0+2^0=BS2$, loại. Do đó 2^{y-x} là bội của 2.
Suy ra $1+2^{y-x}$ là bội của 2. Do đó 2^{y-x} = 1, vậy y = x.
Thay vào (2):

$$1+1+2^{z-x}=2^{10-x}$$
$$\Leftrightarrow 2+2^{z-x}=2^{10-x}$$
$$\Leftrightarrow 2(1+2^{z-x-1})=2^{10-x}$$
$$\Leftrightarrow 1+2^{z-x-1}=2^{9-x}$$

Do $2^{9-x}>1$ nên 2^{9-x} là bội của 2. Do đó 2^{z-x-1} = 1 và 2 = 2^{9-x}. Từ đó x = 8; y = 9; z = 9.

7) PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Ví dụ 14: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

Giải:
Điều kiện: $x\ge 1$

$$y=\sqrt{(x-1)+1+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{(x-1)+1-2\sqrt{x-1}}$$
$$=|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|$$
$$=\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|$$

Xét hai trương hợp:

a) Với x = 1 thì y =2.
b) Với $x\ge 2$ thì $y=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}$

Do đó: $y^2=4(x-1)$. Do $x\ge 2$ nên có thể đặt x – 1 = t^2 với t nguyên dương.

Ta có: $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t \end{cases}$

Kếtt luận: nghiệm của phương trình là: (1 ; 2), ($t^2 + 1$; 2t) với t là số nguyên dương tùy ý.

Ví dụ 15: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = y$$

Giải:

Ta có: $x \geq 0, y \geq 0$

Bình phương hai vế rồi chuyển vế:

$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = y^2 - x = k(k \in \mathbb{N})$

Bình phương hai vế rồi chuyển vế:

$\sqrt{x + \sqrt{x}} = k^2 - x = m(m \in \mathbb{N})$

Bình phương hai vế:

$x + \sqrt{x} = m^2$

Ta biết rằng với x nguyên thì $\sqrt{x}$ hoặc là số nguyên hoặc là số vô tỉ. Do $x + \sqrt{x} = m^2$ $(m \in \mathbb{N})$ nên $\sqrt{x}$ không là số vô tỉ. Do đó $\sqrt{x}$ là số nguyên và là số tự nhiên.

Ta có: $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = m^2$

Hai số tự nhiên liên tiếp $\sqrt{x}$ và $\sqrt{x} + 1$ có tích là số chính phương nên số nhỏ bằng 0:

$$\sqrt{x} = 0$$

Suy ra: x = 0; y = 0 thỏa mãn phương trình đã cho.

Nghiệm của phương trình là (0 ; 0)

Ví dụ 16: Tìm các nghei65m nguyên của phương trình:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980} \qquad (1)$$

Giải:

$$\sqrt{x} = \sqrt{1980} - \sqrt{y} \qquad (2)$$

Với điều kiện $0 \leq x, y \leq 1980$:

$(2) \Leftrightarrow x = 1980 + y - 2\sqrt{1980y}$

$\Leftrightarrow x = 1980 + y - 12\sqrt{55y}$

Do x, y nguyên nên $12\sqrt{55y}$ nguyên. Ta biết rằng với y nguyên thì $\sqrt{55y}$ hoặc là số nguyên hoặc là số vô tỉ. Do đó $\sqrt{55y}$ là số nguyên, tức là 55y là số chính phương:

11.5.y = k^2. Do đó: y = $11.5.a^2 = 55a^2$ với $a \in \mathbb{N}$

Tương tự: x = $55b^2$ với $b \in \mathbb{N}$

Thay vào (1):

$$a\sqrt{55}+b\sqrt{55}=6\sqrt{55}$$
$$\Leftrightarrow a+b=6$$
Giả sử $y \le x$ thì $a \le b$. Ta có:

a	b	$x=55a^2$	$y=55b^2$
0	6	0	1980
1	5	55	1375
2	4	220	880
3	3	495	495

Có 7 đáp số: (0 ; 1980), (1980 ; 0), (55 ; 1375), (1375 ; 55), (220 ; 880), (880 ; 220), (495 ; 495)

8) HỆ PHƯƠNG TRÌNH VỚI NGHIỆM NGUYÊN

Ví dụ 17: Tìm các nghiệm nguyên của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$
Giải:
Ta có hằng đẳng thức:
$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$
Nên : $27-3=3(x+y)(y+z)(z+x)$
$\Leftrightarrow 8=(x+y)(y+z)(x+z)$
Đặt x + y = c, y + z = a, z + x = b.
Ta có: abc = 8 $\Rightarrow a,b,c \in \{\pm1,\pm2,\pm4,\pm8\}$
Giả sử $x \le y \le z$ thì $a \ge b \ge c$.
Ta có: a + b + c = 2(x + y + z) = 6 nên $a \ge 2$

a) Với a = 2 ta có $\begin{cases} b+c=4 \\ bc=4 \end{cases}$

Suy ra: b = c = 2
Ta được: x = y = z = 1

b) Với a = 4 ta có $\begin{cases} b+c=2 \\ bc=2 \end{cases}$

Không có nghiệm nguyên.

c) Với a = 8 ta có $\begin{cases} b+c=-2 \\ bc=1 \end{cases}$

Suy ra: b = c = – 1
Ta được: x = y = 4; z = – 5
Đáp số: (1 ; 1 ; 1), (4 ; 4 ; – 5), (4 ; – 5 ; 4), (– 5 ; 4 ; 4)

9) PHƯƠNG TRÌNH PYTAGO

Ví dụ 19: Tìm nghiệm nguyên của phương trình:
$$x^2+y^2=z^2 \qquad (1)$$
Giải:

Trước hết ta giả sử x, y, z nguyên tố cùng nhau. Thật vậy nếu bộ ba số x_o, y_o, z_o thỏa mãn (1) và có ƯCLN là d, giả sử $x_o = dx_1, y_o = dy_1, z_o = dz_1$ thì $(x_1; y_1; z_1)$ cũng là nghiệm của (1)

Với x, y, z nguyên tố cùng nhau thì chúng đôi một nguyên tố cùng nhau, vì nếu hai trong ba số ấy có ước chung là d thì số còn lại cũng chia hết cho d.

Ta thấy x và y không thể cùng chẵn (vì chúng nguyên tố cùng nhau, không thể cùng lẻ (vì nếu x và y cùng lẻ thì z chẵn, khi đó $x^2 + y^2$ chia cho 4 dư 2, còn $z^2 \vdots 4$). Như vậy trong hai số x và y có một số chẵn, một số lẻ.

Cách 1: Giả sử x lẻ, y chẵn thì z lẻ. Ta viết (1) dưới dạng:

$$x^2 = (z+y)(z-y)$$

Ta có z + y và z – y là các số lẻ. Chúng nguyên tố cùng nhau. Thật vậy, giả sử $z + y \vdots d, z - y \vdots d$ (d lẻ) thì:

(z + y) + (z – y) = 2z$\vdots d$

(z + y) − (z – y) = 2y $\vdots d$

Do (2,d) = 1 nên $z \vdots d; y \vdots d$

Do (y,z) = 1 nên d = 1. Vậy (z + y, z – y) = 1

Hai số nguyên dương z + y và z – y nguyên tố cùng nhau, có tích là số chính phương x^2 nên mỗi số z + y và z – y cũng là số chính phương.

Đặt $\begin{matrix} z + y = m^2 \\ z - y = n^2 \end{matrix}$

Với m, n là các số lẻ, nguyên tố cùng nhau, m > n.

Ta được:

$$\begin{cases} x = mn \\ y = \dfrac{m^2 - n^2}{2} \\ z = \dfrac{m^2 + n^2}{2} \end{cases}$$

Với m và n là các số lẻ, nguyên tố cùng nhau, m > n.

Đảo lại, dễ thấy bộ ba số (x, y, z) nói trên thỏa mãn (1)

Cách 2: Giả sử x chẵn, y lẻ thì z là số lẻ.

Ta có: $x^2 = (z+y)(z-y)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{z+y}{2}.\dfrac{z-y}{2}$. Do z, y là các số lẻ nguyên tố cùng nhau nên $\dfrac{z+y}{2}$ và $\dfrac{z-y}{2}$ là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau (thật vậy, giả sử $\dfrac{z+y}{2} \vdots d$, $\dfrac{z-y}{2} \vdots d$ thì $\begin{cases} \dfrac{z+y}{2} + \dfrac{z-y}{2} \vdots d \\ \dfrac{z+y}{2} - \dfrac{z-y}{2} \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \vdots d \\ y \vdots d \end{cases} \Rightarrow d = 1$)

Hai số nguyên dương $\dfrac{z+y}{2}$ và $\dfrac{z-y}{2}$ nguyên tố cùng nhau có tích là số chính phương $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ nên mỗi số là số chính phương.

Đặt $\dfrac{z+y}{2} = m^2$; $\dfrac{z-y}{2} = n^2$ (m, n $\in \mathbb{N}$) thì:

$z = m^2 + n^2$; $y = m^2 - n^2$.

Do y, z lẻ nên m, n chẵn lẻ khác nhau.

Do (m^2, n^2) = 1 nên (m, n) = 1

Như vậy:

$$\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$$

Với m và n là các số nguyên tố cùng nhau, chẵn lẻ khác nhau, m > n.

Đảo lại, dễ thấy ba bộ số (x, y, z) nói trên thỏa mãn (1)

Ta gọi ba bộ số (x, y, z) nói trên là *bộ ba số Pitago gốc.* Nhân bộ ba số này với mọi số nguyên dương, ta được tất cả các bộ ba số Pitago, đó là tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 + y^2 = z^2$.

10) PHƯƠNG TRÌNH PEL

Phương trình $x^2 - Py^2 = 1$ với P là số nguyên dương không chính phương gọi là phương trình Pel, mang tên nhà toán học Anh là Pel (Pell)

Thực ra nhà toán học Pháp Lagrăng, cùng thời với Pel, là người đầu tiên công bố lới giải đầy đủ của phương trình trên năm 1766.

Phương trình Pel có vô nghiệm nguyên. Ngoài nghiệm tầm thường $x = \pm 1; y = 0$, để tìm các nghiệm nguyên của phương trình, ta chỉ cần tìm nghiệm nguyên dương của nó.

Ta gọi (x_1, y_1) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pel nếu nó là nghiệm không tầm thường và $x_1 + y_1\sqrt{P}$ là số nhỏ nhất trong tập hợp:

$$\left\{x + y\sqrt{P} \mid x, y \in \mathbb{N}^*, x^2 - Py^2 = 1\right\}$$

Bảng sau cho ta các nghiệm nguyên dương nhỏ nhất (x_1, y_1) của một số phương trình Pel:

P	$x^2 - Py^2 = 1$	x_1	y_1
2	$x^2 - 2y^2 = 1$	3	2
3	$x^2 - 3y^2 = 1$	2	1
5	$x^2 - 5y^2 = 1$	9	4
6	$x^2 - 6y^2 = 1$	5	2
7	$x^2 - 7y^2 = 1$	4	3
8	$x^2 - 8y^2 = 1$	3	1
10	$x^2 - 10y^2 = 1$	19	6
11	$x^2 - 11y^2 = 1$	10	3
12	$x^2 - 12y^2 = 1$	7	2
13	$x^2 - 13y^2 = 1$	649	180

Người ta chứng minh được rằng: nếu (x_1, y_1) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình (x_k, y_k) của phương trình được xác định bởi:

$x_k + y_k\sqrt{P} = (x_1 + y_1\sqrt{P})^k$ với k = 1, 2, 3…

Ví dụ 20: Cho phương trình: $x^2 - 2y^2 = 1$ (1)

a) Kiểm tra rằng: (3 ; 2) là một nghiệm của (1).

b) Khai triển $(3+2\sqrt{2})^k$ được $a + b\sqrt{2}$ $(a, b \in □)$. Chứng minh rằng (a, b) là nghiệm của (1)

c) Bằng nhận xét ở câu b, hãy tìm thêm hai nghiệm nguyên dương khác của (1)

Giải

a) $3^2 - 2.2^2 = 1$. Vậy (3, 2) là một nghiệm của (1)

b) Ta có: $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 1$

$\Rightarrow (3+2\sqrt{2})^k(3-2\sqrt{2})^k = 1$

Ta biết rằng nếu $(3+2\sqrt{2})^k = a + b\sqrt{2}$ thì

$(3-2\sqrt{2})^k = a - b\sqrt{2}$. Do đó:

$(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2}) = 1$

$\Rightarrow a^2 - 2b^2 = 1$

Vậy (a, b) là nghiệm của (1)

c) Ta tính:

$(3+2\sqrt{2})^2 = 9 + 8 + 12\sqrt{2} = 17 + 12\sqrt{2}$

$(3+2\sqrt{2})^3 = (17+12\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$

$= 51 + 34\sqrt{2} + 36\sqrt{2} + 48$

$= 99 + 70\sqrt{2}$

Vậy: (17; 12), (99; 70) cũng là nghiệm của (1).

Ví dụ 21: Tìm nghiệm nguyên dương nhỏ nhất rồi tìm thêm hai nghiệm nguyên dương khác của phương trình sau:

$$x^2 - 15y^2 = 1$$

Giải

Kiểm tra ta được (4; 1) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất.

$(4+\sqrt{15})^2 = 31+8\sqrt{15}$

$(4+\sqrt{15})^3 = 244+63\sqrt{15}$

Hai nghiệm nguyên dương khác (31; 8) và (244; 63)

11) ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM NGUYÊN

Ví dụ 18: Tìm các số thực a để các nghiệm của phương trình sau đều là số nguyên:

$$x^2 - ax + (a+2) = 0 \qquad (1)$$

Giải:

Gọi x_1, x_2 là nghiệm nguyên của (1). Theo định lý Viete:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1x_2 = a+2 \end{cases}$$

Do đó:

$x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 2$

$\Leftrightarrow x_1(x_2-1) - (x_2-1) = 3$

$\Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-2) = 3$

$x_1 - 1$ và $x_2 - 2$ là ước của 3. Giả sử $x_1 \geq x_2$ thì $x_1 - 1 \geq x_2 - 2$. Ta có hai trường hợp:

a) $\begin{cases} x_1 - 1 = 3 \\ x_2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Khi đó a = 6

b) $\begin{cases} x_1 - 1 = -1 \\ x_2 - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Khi đó a = -2

3) Bài tập áp dụng

Bài 1: Tìm tất cả các cặp nghiệm nguyên (x, y) thỏa mãn :

$$y(x-1) = x^2 + 2.$$

Hướng dẫn:

Ta có $y(x-1) = x^2 + 2 \Rightarrow y = \dfrac{x^2+2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{3}{x-1}$

Vì x, y nguyên nên $x - 1$ là ước của 3

Vậy (x, y) = (4, 6) ; (2, 6) ; (-2, -2) ; (0, -2)

Bài 2: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn :

$$2x^2 - 2xy = 5x - y - 19 .$$

Hướng dẫn:

(x, y) = (0, -19) ; (1, 16) ; (9, 8) và (-8, -11)

Bài 3: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$xy^2 + 2xy - 243y + x = 0$$

Hướng dẫn:

Ta có $xy^2 + 2xy - 243y + x = 0 \Leftrightarrow x(y+1)^2 = 243y \quad (1)$

Từ (1) với chú ý rằng $(y + 1; y) = 1$ ta suy ra $(y + 1)^2$ là ước của 243.

Vậy (x, y) = (54, 2) ; (24, 8)

Bài 4: Tìm nghiệm của phương trình:

$$2^x - 3 = 65y$$

Hướng dẫn:

Ta chứng tỏ phương trình đã cho không có nghiệm nguyên. Giả sử phương trình $2^x - 3 = 65y$ có nghiệm nguyên ta suy ra

$2^x \equiv 3 \pmod 5$ và $2^x \equiv 3 \pmod{13}$

Từ $2^x \equiv 3 \pmod 5$ suy ra $x \equiv 3 \pmod 4$ (1)

Từ $2^x \equiv 3 \pmod{13}$ ta suy ra $x \equiv 4 \pmod{12}$, trái với (1)

Bài 5: Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau :

a) $15x^2 - 7y^2 = 9$
b) $29x^2 - 28y^2 = 2000$
c) $1999x^2 - 2000y^2 = 2001$
d) $x^{2002} - 2000.y^{2001} = 2003$
e) $19x^2 - 84y^2 = 198$

Hướng dẫn:

a) Từ phương trình đã cho ta suy ra y chia hết cho 3. Đặt $y = 3y_1$. Ta có

$$5x^2 - 21y1^2 = 3 \quad (1)$$

Từ (1) suy ra x chia hết cho 3. Đặt x = 3x1. Ta có

$$15x1^2 - 7y1^2 = 1 \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $y_1^2 \equiv -1 \pmod 3$, vô nghiệm

b) Từ phương trình đã cho ta suy ra $x^2 \equiv 5 \pmod 7$. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

c) Từ phương trình đã cho ta suy ra $x^2 \equiv -1 \pmod 4$. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

d) Từ phương trình đã cho ta suy ra x lẻ và $x^{2002} \equiv 1 \pmod 4$

Suy ra $2003 \equiv 1 \pmod 4$, vô lí. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

e) Giả sử phương trình đã cho có nghiệm. Khi đó: $y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{19}$. Vì 19 là số nguyên tố có dạng 4k + 3 nên $y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{19}$ ta suy ra 19 \ 1, vô lí

Bài 6: Tìm các số nguyên dương thỏa mãn :

$x < y < z$ và $5^x + 2.5^y + 5^z = 4500$.

Hướng dẫn:

Nếu $z < 5$ thì $5^x + 2.5^y + 5^z < 4500$.

Nếu $z > 5$ thì $5^x + 2.5^y + 5^z > 4500$.

Vậy x = 3, y = 4, z = 5.

Bài 7: Tìm các số tự nhiên x, y, x thỏa mãn:

a) $2002^x - 2001^y = 1$

b) $5^x = 1 + 2^y$

c) $5^x + 1 = 2^y$

d) $2^x.3^y = 1 + 5^z$

Hướng dẫn:

a) Ta có $2002^x = 2001^y + 1 \equiv 2 \pmod 4$, suy ra x = 1 và y = 1.

b) Nếu x chẵn thì $5^x \equiv 1 \pmod 3$ suy ra $2^y \equiv 0 \pmod 3$: loại

Nếu x lẻ thì $5^x \equiv 5 \pmod 8$ suy ra $2^y \equiv 4 \pmod 8$. Suy ra y = 2

Đáp số : (x; y) = (1; 2)

c) Nếu x lẻ thì $5^x + 1$ chia hết cho 3 còn 2^y không chia hết cho 3: loại

Nếu x chẵn thì $5^x + 1 \equiv 2 \pmod 4$ suy ra $2^y \equiv 2 \pmod 4$. Suy ra y = 1 và x = 0

Đáp số : (x; y) = (0; 1)

d) Ta có $1 + 5^z \equiv 2 \pmod 4$ suy ra $2^x.3^y \equiv 2 \pmod 4$ do đó x = 1.

Khi đó ta có $2.3^y = 1 + 5^z$

Nếu y = 0 thì z = 0. Nếu y = 1 thì z = 1.

Nếu y > 1 thì $2.3^y \equiv 0 \pmod 9$ nên $5^z \equiv -1 \pmod 9$.

Suy ra z chia hết cho 3 và z lẻ.

Vậy z có dạng z = $6k + 3 (k \in \mathbb{N})$. Nhưng khi đó,

$2.3^y = 1 + 125^{2k+1} \equiv 0 \pmod 7$: loại

Vậy phương trình có 2 nghiệm tự nhiên là: (1; 0; 0) và (1; 1; 1)

Bài 8: Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn:

a) $1! + 2! + ... + x! = y^2$

b) $x! + y! = 10z + 9$

Hướng dẫn:

a) Đây là bài toán liên quan đến chữ số tận cùng của một số chính phương.

Nếu $x \geq 4$ thì 1!+2!+…+x! tận cùng bởi 3 và không có số nguyên dương y nào thỏa mãn.

Đáp số : x= y = 1 hoặc x = y = 3.

b) Nếu x, y > 1 thì x!+y! chia hết cho 2; loại

Nếu y = 1 thì x! = 10z + 8 ≡ 8(mod10), suy ra $x \leq 4$.

Đáp số : vô nghiệm .

Bài 9: Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn :

$x^y + 1 = z$

Hướng dẫn:

Vì x, y nguyên tố nên x, y $\geq$ 2. Từ phương trình đã cho ta suy ra z $\geq$ 5 và z lẻ (do z nguyên tố). Vì z lẻ nên x chẵn hay x = 2. Khi đó, $z = 1 + 2^y$.
Nếu y lẻ thì z chia hết cho 3 (loại). Vậy y = 2.
Đáp số : x = y = 2 và z = 5.

Bài 10: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (n, z) thỏa mãn phương trình :

$$2^n + 12^2 = z^2 - 3^2$$

Hướng dẫn:
Nếu n lẻ thì $2^n \equiv -1 \pmod 3$. Từ phương trình đã cho ta suy ra $z^2 \equiv -1 \pmod 3$, loại.
Nếu n chẵn thì n = 2m (m € N) và phương trình đã cho trở thành:

$$z^2 - 2^{2m} = 153 \text{ hay } (z - 2^m)(z + 2^m) = 153.$$

Cho $z + 2^m$ và $z - 2^m$ là các ước của 153 ta tìm được m = 2, z = 13.
Đáp số : n = 4, z = 13.

Bài 11: Tìm x, y nguyên thỏa mãn :

$$x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy$$

Hướng dẫn:
Viết lại phương trình đã cho dưới dạng:

$$y^2(x^2 - 7) = (x + y)^2. \qquad (1)$$

Phương trình đã cho có nghiệm x = y = 0. Xét x, y $\neq$ 0. Từ (1) suy ra $x^2 - 7$ là một số chính phương. Đặt $x^2 - 7 = a^2$, ta có

$$(x - a)(x + a) = 7$$

Từ đó tìm được x
Đáp số: (0, 0) ; (4, -1) ; (4, 2) ; (-4, 1) ; (-4, -2)

Bài 12: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$\sqrt{x + 2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Hướng dẫn:
Vì vai trò của x, y, z như nhau nên có thể giả sử $y \geq z$. Từ phương trình đã cho ta suy ra $x + 2\sqrt{3} = y + z + 2\sqrt{yz}$. Suy ra

$$(x - y - z)^2 + 4\sqrt{3}(x - y - z) = 4yz - 12. \qquad (1)$$

Vì $\sqrt{3}$ là số vô tỉ nên từ (1) ta suy ra :

$$x - y - z = 4yz - 12 = 0 \Rightarrow yz = 3 \Rightarrow y = 3,\ z = 1 \text{ và } x = y + z = 4$$

Đáp số : phương trình có 2 nghiệm là (4; 3; 1) và (4; 1; 3)

Bài 13: Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c đôi một khác nhau sao cho biểu thức :

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \quad \text{nhận giá trị nguyên dương.}$$

Hướng dẫn:
Ta có A.abc = ab + bc + ca + a + b + c (1)
Từ (1) ta CM được a, b, c cùng tính chẵn lẻ. Vì vau trò của a, b, c như nhau và a, b, c đôi một khác nhau nên có thể giả thiết a < b < c.
Nếu $a \geq 3$ thì $b \geq 5, c \geq 7$ và A < 1, loại. Suy ra a = 1 hoặc a = 2
Nếu a = 1 thì $b \geq 3, c \geq 5$ do đó 1 < A < 3 suy ra A = 2. Thay a = 1, A = 2 ta được: 2(b + c) + 1 = bc hay (b – 2)(c – 2) =5. Từ đó ta được b = 3, c = 7. Trường hợp a = 2 xét tương tự.
Đáp số : (2; 4; 14), (1; 3; 7) và các hoán vị của 2 bộ số này

Bài 14: Tìm tất cả các bộ ba số tự nhiên không nhỏ hơn 1 sao cho tích của hai số bất kì cộng với 1 chia hết cho số còn lại

Hướng dẫn:

Giả sử ba số đã cho là $a \geq b \geq c \geq 1$. Ta có

$$\frac{c}{ab+1}, \frac{a}{bc+1}, \frac{b}{ac+1}$$

Suy ra

$$\frac{abc}{(ab+1)(ac+1)(bc+1)}$$

$\Rightarrow$ ab + bc + ca + 1 $\vdots$ abc

$\Rightarrow$ ab + bc + ca + 1 = k.abc, $k \in \mathbb{N}^{+}$. (1)

Vì ab + bc + ca + 1 $\leq$ 4abc nên k $\leq$ 4

Nếu k = 4 thì a = b = c = 1 (thỏa mãn)

Nếu k = 3 thì từ (1) ta suy ra 3abc $\leq$ 4ab suy ra c $\leq$ 1

Do đó c = 1 $\Rightarrow$ a = 2, b = 1

Trường hợp k = 2, k = 1 được xét tương tự như trường hợp k = 3

Đáp số : (1; 1; 1) , (2; 1; 1) , (3; 2; 1) , (7; 3; 2)

Bài 15: Tìm ba số nguyên dương đôi một khác nhau x, y, z thỏa mãn :

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^2$$

Hướng dẫn:

Vì vai trò của x, y, z như nhau nên có thể giả sử x < y < z

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

$\forall x, y, z \geq 0$ ta suy ra x + y + z $\leq$ 9

Dấu bằng không xảy ra vì x, y, z đôi một khác nhau

Vậy x + y + z $\leq$ 8 (1)

Mặt khác x + y + z $\geq$ 1 + 2 + 3 =6 (2)

Từ (1) , (2) ta suy ra x $\in \{6, 7, 8\}$

Từ đây kết hợp với phương trình ban đầu ta tìm được x, y, z

Đáp số : (1, 2, 3) và các hoán vị của bộ ba số này

Bài 16: Tìm tất cả nghiệm nguyên (x; y) của phương trình :

$$(x^2+y)(x+y^2) = (x-y)^3$$

Hướng dẫn:

Biến đổi phương trình về dạng

$$y[2y^2 + (x^2-3x)y + (x+3x^2)] = 0 \qquad (1)$$

TH 1: y = 0

TH 2: y $\neq 0$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 2y^2 + (x^2-3x)y + (x+3x^2) = 0 \qquad (2)$$

Xem (2) là phương trình bậc 2 đối với biến y. Để (2) có nghiệm nguyên thì $\Delta = (x+1)^2 x(x-8)$ phải là một số chính phương, tức là

$$x(x-8) = a^2 (a \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x-4-a)(x-4+a) = 16$$

Từ đó ta tìm được x

Đáp số : (x; y) = (9; -6) , (9; -21) , (8; -10) , (-1; -1) và (m; 0) với $m \in \mathbb{Z}$

Bài 17: Tìm các số nguyên không âm x, y sao cho :

$$x^2 = y^2 + \sqrt{y+1}$$

Hướng dẫn:

Nếu y = 0 thì x = 1

Nếu y ≥ 1 thì từ phương trình đã cho ta suy ra y < x < y + 1, vô lí

Bài 18: Tìm các số nguyên x, y, z, t sao cho :

a) $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$

Hướng dẫn:

Sử dụng phương pháp xuống thang

a) Phương trình đã cho : $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$ (1)

Nếu cả x và y đều lẻ thì từ (1) suy ra z chẵn. Khi đó, $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2 \pmod 4$ còn $x^2y^2 \equiv 1 \pmod 4$: vô lí

Vậy 1 trong 2 biến x, y phải chẵn

Giả sử x chẵn, từ (1) suy ra $y^2 + z^2 \vdots 4$ do đó cả y và z đều phải chẵn

Đặt $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1 (x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z})$.

Thay vào (1) ta có $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1^2.y_1^2$. (2)

Từ (2) lại lập luận như trên ta suy ra x_1, y_1, z_1 đều chẵn

Cứ tiếp tục như vậy sẽ dẫn đến $x \vdots 2^k, y \vdots 2^k, z \vdots 2^k, \forall k \in \mathbb{N}$.

Điều này chỉ xảy ra khi x = y = z = 0

b) , c) tương tự

Bài 19: Tìm các số nguyên x, y, z, t thỏa mãn:

$$\begin{cases} xy - 3zt = 1 \\ xz + yt = 2. \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Ta có $\begin{cases} xy - 3zt = 1 \\ xz + yt = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (xy - 3zt)^2 = 1 \\ 3(xz + yt)^2 = 12 \end{cases}$

Cộng theo từng vế ta có $(x^2 + 3t^2)(y^2 + 3z^2) = 13$

Đáp số : (x; y; z; t) = (1; 1; 2; 0) , (-1; -1; -2; 0) , (1; 1; 0; 2) , (-1; -1; 0; -2)

Bài 20: Tìm các nghiệm nguyên dương của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = z \\ x^3 + y^3 = z^2 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Khử z đưa đến phương trình : $y^2 - (x+1)y + x^2 - x = 0$

Xem đây là phương trình bậc 2, biến y, từ điều kiện tồn tại nghiệm ta suy ra x = 1 hoặc x = 2

Đáp số : (x; y; z) = (1; 2; 3) , (2; 1; 3) , (2; 2; 4)

Bài 21: Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$7(x + y) = 3(x^2 – xy + y^2)$$

Hướng dẫn:

Đáp số : (x, y) = (4, 5) hoặc (5,4)

Cách 1: Đổi biến u = x + y, v = x – y ta đưa về phương trình:

28u = 3(u2 + 3v2). (*)

Từ (*) chứng minh được u chia hết cho 9 và $0 \le u \le 9$ suy ra u = 0 hoặc u = 9

Cách 2: Xem phương trình đã cho là phương trình bậc hai đối với x.

3x2 – (3y + 7)x + 3y2 – 7y = 0 (1)

Để (1) có nghiệm thì biệt thức Δ phải là số chính phương

Từ đó tìm được y

Bài 22: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$12x^2 + 6xy + 3y^2 = 28(x + y)$$

Hướng dẫn:

Đáp số (x, y) = (0, 0) ; (1, 8) ; (-1, 10)

Phương trình : $12x^2 + 6xy + 3y^2 = 28(x + y)$ (*)

Cách 1

Ta sẽ đánh giá miền giá trị của x :

Từ (*) suy ra

$$9x^2 = -3(x+y)^2 + 28(x+y) = \frac{14^2}{3} - 3\left[(x+y) - \frac{14}{3}\right]^2 \le \frac{196}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 \le 7 \Rightarrow x^2 \in \{0,1,4\}$$

Cách 2 : tương tự Bài 24

Bài 23: Tìm x, y $\in \mathbf{Z}^+$ thỏa mãn :

$$x^{2000} + y^{2000} = 2003^{2000} \quad (1)$$

Hướng dẫn:

Đáp số: phương trình vô nghiệm

Giả sử $x \ge y$. Từ (1) suy ra x < 2003 và x + 1 < 2003

Ta có

$$2003^{2000} \ge (x + 1)^{2000} > x^{200}0 + 2000.x^{1999}$$

$$\Rightarrow y^{2000} > 2000.x^{1999} \ge 2000.y^{1999} \Rightarrow 2003 > x \ge y > 2000$$

Vậy x = 2002, y = 2001

Thử lại không thỏa mãn (1)

Bài 24: Tìm $x \in □ : \sqrt{x + 2\sqrt{x + ... + 2\sqrt{x + 2\sqrt{3x}}}} = x$

Hướng dẫn:

Đáp số : x = 0 hoặc x = 3

Xét các trường hợp của x và đánh giá hai vế

Bài 25: Tìm $x, y, z \in \mathbf{Z} : \begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$

Hướng dẫn:
Đáp số : x = y = z =1 hoặc x= y = z = 2
Đặt $f(\text{t}) = 2t^3 - 7t^2 + 8t - 2$ và sử dụng tính chất $f(\text{a}) - f(\text{b}) \vdots (a-b) \forall a \neq b$

Bài 26: Tìm x, y $\in \mathbf{Z}: \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2001}$ (*)

Hướng dẫn:
Điều kiện $x, y \geq 0$
Từ (*) suy ra $\sqrt{y} = \sqrt{2001} - \sqrt{x}$. Bình phương hai vế ta được

$$y = 2001 + x - 2\sqrt{2001.x} \Rightarrow \sqrt{2001.x} \in \mathbb{Z}$$

Vì 2001 = 3 × 667, ta lại có 3 và 667 là các số nguyên tố nên

x = 3 × 667 × a^2 = 2001.a^2 (trong đó $a \in \mathbb{Z}$)

Lập luận tương tự ta có y = $2001.b^2 (b \in \mathbb{Z}$)
Thay $x = 2001a^2, y = 2001b^2$ vào (*) cà rút gọn ta suy ra : a + b =1
Từ đó có hai nghiệm : (x; y) =(2001; 0) hoặc (0; 2001)

Bài 27: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho $\dfrac{a^2-2}{ab+2}$ là số nguyên

Hướng dẫn:
Từ giả thiết suy ra

$$2(a+b) \vdots (ab+2) \Rightarrow 2(a+b) = k(ab+2) \quad (1)$$

Từ (1) chứng tỏ k = 1 suy ra a = 4, b = 3
Đáp số : (a; b) = (4; 3)

Bài 28: Tìm n nguyên dương sao cho phương trình $x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$ có nghiệm nguyên dương. Với các giá trị vừa tìm được của n, hãy giải phương trình trên.

Hướng dẫn:
Đáp số : n = 1 hoặc n = 3

Bài 29: Cho phương trình : $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$

a) Giả sử phương trình đã cho có một nghiệm nguyên (x, y). Chứng minh rằng phương trình đã cho có ít nhất ba nghiệm nguyên
b) Giải phương trình tìm nghiệm nguyên với n = 2002

Hướng dẫn:

a) Ta có

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y-x)^3 - 3(y-x)x^2 + (-x)^3 = (-y)^3 - 3(-y)(x-y)^2 + (x-y)^3.$$

b) Từ phương trình đã cho ta suy ra $x^3 + y^3 \equiv 1 (\bmod 3)$.

Suy ra $x \equiv 1 (\bmod 3)$ và $y \equiv 0 (\bmod 3)$ hoặc $x \equiv 0 (\bmod 3)$ và $y \equiv 1 (\bmod 3)$
Cả hai trường hợp ta đều có $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv 1 (\bmod 9)$. Do đó phương trình đã cho không cò nghiệm khi n = 2002.

Bài 30: Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$, phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_n = x_1.x_2...x_n$ luôn có nghiệm trong $\mathbb{N}^*$.

Hướng dẫn:
Cho $x_1 = x_2 = ... = x_{n-2} = 1$ ta đi đến phương trình

$$(x_{n-1} - 1)(x_n - 1) = n - 1. \quad (1)$$

Dễ thấy $x_n = n$ và $x_{n-1} = 2$ thỏa mãn (1)

Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm nguyên dương là

$(x_1; x_2; ...; x_n) = (1; 1; ...; 2; n)$

Bài 31: Chứng minh rằng phương trình $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2001^n$ luôn có nghiệm nguyên với mọi $n \geq 2$

Hướng dẫn:

Đặt $2001^n = 9m$. Bộ ba số (m; m – 1; m + 1) là một nghiệm của phương trình đã cho

Bài 32: Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^5 = z^3$ có vô số nghiệm nguyên (x, y, z) thỏa mãn $xyz \neq 0$

Hướng dẫn:

Dễ thấy bộ các bộ ba sau là nghiệm của phương trình đã cho

(3; -1; 2) và (10; 3; 7)

Ta thấy nếu (x; y; z) là nghiệm của phương trình đã cho thì

$$(k^{15}x, k^6 y, k^{10}z)$$

cũng là nghiệm của phương trình đã cho. Từ đó có điều phải chứng minh

Bài 33: Chứng minh các phương trình sau không có nghiệm nguyên?:

$a) 3x^2 - 4y^2 = 13$

$b) 19x^2 + 28y^2 = 2001$

$c) x^2 = 2y^2 - 8y + 3$

$d) x^5 - 5x^3 + 4x = 24(5y + 1)$

$e) 3x^5 - x^3 + 6x^2 - 18x = 2001$

Hướng dẫn: dùng phương pháp xét số dư của từng vế. Từ đó ta thấy số dư của hai vế phương trình sẽ không bằng nhau. Điều đó dẫn tới các phương trình vô nghiệm.

Bài 34: Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$$

Hướng dẫn: Giả sử $1 \leq x \leq y$ thì $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{x} \Rightarrow x \leq 8$$

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{4} \Rightarrow x > 4$$

Vậy $4 < x \leq 8$, thử chọn để tìm nghiệm.

Đáp số: (5 ; 20), (20 ; 5), (6 ; 12), (12 ; 6), (8 ; 8)

Bài 35: Tìm ba số nguyên dương sao cho tích của chúng gấp đôi tổng của chúng.

Hướng dẫn: $xyz = 2(x + y + z)$

Giải sử $x \leq y \leq z$. Ta có $xyz = 2(x + y + z) \leq 2.3z = 6z$

Suy ra $xy \leq 6$, thử chọn lần lượt xy = 1; 2; 3; 4; 5; 6.

Đáp số: (1 ; 3 ; 8), (1 ; 4 ; 5), (2 ; 2 ; 4) và các hoán vị.

Bài 36: Tìm bốn số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Hướng dẫn: $x+y+z+t=xyzt$
Giả sử $z\ge t\ge z\ge y\ge x$. Ta có $xyzt=x+y+z+t\le 4t$ nên $xyz\le 4$.
Thử chọn lần lượt xy = 1; 2; 3; 4.
Đáp số: 1 ; 1 ; 2 ; 4.

Bài 37: Tìm các nghiệm nguyên dương của các phương trình:

$a) x^2+xy+y^2=2x+y$

$b) x^2+xy+y^2=x+y$

$c) x^2-3xy+3y^2=3y$

$d) x^2-2xy+5y^2=y+1$

Hướng dẫn: đưa các phương trình về dạng phương trình bậc hai theo ẩn x, tìm điều kiện của Δ để phương trình có nghiệm nguyên.
Đáp số: a) (1 ; -1), (2 ; -1), (0 ; 0), (2 ; 0), (0 ; 1), (1 ; 1)
b) (0 ; 0), (1 ; 0), (0 ; 1)
c) (0 ; 0), (0 ; 1), (3 ; 1), (3 ; 3), (6 ; 3), (6 ; 4)
d) (1 ; 0), (-1 ; 0)

Bài 38: Tìm các số tự nhiên x sao cho: $2^x+3^x=35$
Hướng dẫn: Thế x = 0, 1, 2, 3 vào phương trình.
Với x > 3, phương trình vô nghiệm.
Đáp số: x = 3

Bài 39: Tìm các số nguyên x và y sao cho:

$$x^3+x^2+x+1=y^3$$

Hướng dẫn: Chứng minh y > x rồi xét hai trường hợp:
y = x + 1 và y > x + 1

Bài 40: Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x!+y!=(x+y)!$$

Hướng dẫn: Giả sử $x\ge y$ thì $x!\ge y!$. Do đó

$(x+y)!=x!+y!\le 2x!$

$\Leftrightarrow 2\ge (x+1)(x+2)...(x+y)$

Chỉ có x = 1, y = 1 thỏa mãn.
Đáp số (1 ; 1)

Bài 41: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương:

$$x^{17}+y^{17}=19^{17}$$

Hướng dẫn: giả sử $x^{17}+y^{17}=19^{17}$ và $1\le x\le y<19$
Ta có:

$$19^{17}\ge (y+1)^{17}$$

$$\Rightarrow 19^{17}>y^{17}+17y^{16}$$

Vậy x > 17, chỉ có thể x = y = 18.
Thử lại, x = y = 18 không thỏa.
Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Bài 42: Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$3x^2 + 4y^2 = 6x + 13$$

Hướng dẫn: biến đổi $3x^2 - 6x + 3 = 16 - 4y^2$

$$3(x-1)^2 = 4(4 - y^2)$$

Đáp số: (3 ; 1), (3 ; -1), (-1 ; 1), (-1 ; -1), (1 ; 2), (1 ; -2)

Bài 43: Có tồn tại hay không hai số nguyên dương x và y sao cho $x^2 + y$ và $y^2 + x$ đều là số chính phương?

Hướng dẫn: giả sử $y \le x$. Ta có:

$$x^2 < x^2 + y \le x^2 + x < (x+1)^2$$

Vậy không tồn tại hai số thỏa mãn đề bài.

Bài 44: Chứng minh rằng có vô số số nguyên x để biểu thức sau là số chính phương:

$$(1+2+3+4+...+x)(1^2+2^2+3^2+4^2+...+x^2)$$

Hướng dẫn: Đặt $(1+2+3+4+...+x)(1^2+2^2+3^2+4^2+...+x^2) = y^2$

Ta có: $\dfrac{x(x+1)}{2}.\dfrac{x(x+1)(2x+1)}{6} = y^2$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2.\frac{2x+1}{3} = y^2$$

Phương trình này có vô số nghiệm nguyên:

$$x = 6n^2 + 6n + 1$$

Bài 45: Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là số chính phương:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Hướng dẫn: giả sử $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$

Biến đổi về dạng:

$$(2y)^2 = (2x^2 + x)^2 + 2x^2 + (x+2)^2 > (2x^2 + x)^2$$

Nên $(2y)^2 > (2x^2 + x + 1)^2$

$$\Rightarrow -1 \le x \le 3.$$

Xét x = -1; 0; 1; 2; 3.

Đáp số: x = -1; x = 0; x = 3

Bài 46: Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

a) $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$

b) $8x^4 - 4y^4 + 2z^4 = t4$

Hướng dẫn:

a) Dễ thấy x, y, z đều chia hết cho 3.

Đặt $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ (x_1, y_1, z_1 € Z), ta được :

$$x_1^3 + 3y_1^3 - 9z_1^3 = 0$$

Suy ra x = y = z = 0

b) Đáp số : x = y = z = t = 0

Bài 47: Tìm năm sinh của Nguyễn Du, biết rằng vào năm 1786 tuổi của nhà thơ bằng tổng các chữ số năm ông sinh ra.

Hướng dẫn:

Gọi năm sinh của nhà thơ 17xy

Ta có: 1786 -17xy = 1 + 7 + x + y ($0 \le x \le 8$, $0 \le y \le 9$)
$\Rightarrow 11x + 2y = 78$
Đáp số: 1766

Bài 48: Ba người đi câu được một số cá. Trời đã tối và mọi người đều mệt lả, họ vứt cá trên bờ sông, mỗi người tìm một nơi lăn ra ngủ. Người thứ nhất thức dậy, đếm số cá thấy chia 3 thừa 1 con, bèn vứt 1 con xuống sông và xách $\frac{1}{3}$ về nhà. Người thứ hai thức dậy, tưởng hai bạn mình còn ngủ, đếm số cá vứt 1 con xuống sông và xách $\frac{1}{3}$ về nhà. Người thứ 3 thức dậy , tưởng mình dậy sớm nhất, lại vứt 1 con xuống sông và mang $\frac{1}{3}$ về nhà.

Tính số cá 3 chàng trai câu được? biết rằng họ câu rất tồi…..

Hướng dẫn:

$$\frac{2}{3}\left\{\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(x-1)-1\right]-1\right\} = y$$

$8x - 27y = 38$ ($x, y \in N$)
$x = -2 + 27t$, $y = -2 + 8t$
Cho $t = 1 \Rightarrow x = 25$, $y = 6$

Bài 49: giải các phương triình nghiệm nguyên:

a) $x^2 - 4y^2 = 1$
b) $x^2 - y^2 = 91$
c) $2x^3 + xy = 7$
d) $x^2 + y^2 = 2z^2$
e) $x^2 + 2y^2 = z^2$
f) $x^2 + y^2 = z^2 + 1$
g) $2x^2 + 3y^2 = z^2$
h) $x^2 - y^2 + x = 0$
i) $x^3 + 7y = y^3 + 7x$
j) $3x^2 + 10xy + 8y^2 = 96$
k) $19x^2 + 28y^2 = 729$
l) $xy + 3x - 5y = -3$
m) $x + y = xy$
n) $x + y + 1 = xyz$
o) $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$
p) $y^2 = x^3 + 7$
q) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$
r) $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$
s) $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$
t) $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$
u) $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$
v) $x_1^4 + x_2^4 + …….+ x_{14}^4 = 1599$

Hướng dẫn

b) $(x + y)(x - y) = 91$, mà $91= (\pm 1)(\pm 91) = (\pm 13)(\pm 7)$
c) $x(2x^2 + y) = 7 = (\pm1)(\pm7)$
d) x và y phải cùng chẵn hoặc lẻ, suy ra x + y và x - y cùng chẵn
Đặt $x + y = 2u$, $x -y = 2v$, có $4u^2 + 4y^2 = 2(x^2 + y^2)$. giải phương trình $u^2 + v^2 = z^2$, rồi lấy $x = u + v$, $y = u - v$
e) $x = 2m^2 - 1$, $y = 2m$, $z = 2m^2 + 1$.
Có thể áp dụng pp giải phương trình $x^2 + y^2 =z^2$ để giải phương trình $ax^2 + y^2 = z^2$ ($a > 0$)
f) Dùng hằng đẳng thức $\left(n^2 + n - 1\right)^2 + (2n+1)^2 = \left(n^2 + n +1\right)^2 +1$
hoặc $[2n(4n+1)]^2 + \left(16n^3 - 1\right)^2 = \left(16n^3 -1\right)^2 =\left(16n^3 + 2n\right)^2 +1$
g) Có thể gỉa thuyết (x, y,z) = vì nếu x = dx', y = dy', z= dz'(d> 1) thì cũng có $2x'^2 + 3y'^2 =z'^2$. x và z không thể là bội của 3(nếu x = 3u, z =3v thì y =3t). Ta có $2x^2 = z^2 - 3y^2$, chứng tỏ $2x^2$ và z^2 có cùng số dư ($\neq 0$) khi chia cho 3, điều naỳ không thể xảy ra. Phương trình vô nghiệm
h) $x(x +1) = y^2$,mà $(x, x+1) = 1$
j)x = y hoặc $x^2 +xy + y^2 = 7$(với $x \neq y$)
$(x - y)^2 = 7 - 3xy$ suy ra $xy < \frac{7}{3}$ (x =1, y =2) và (x = 2, y = 1)
$(x + 2y)(3x + 4y) = 96$. Chú ý rằng $(x +2y) +(3x +4y) = 2(2x +3y)$, chứng tỏ rằng x + 2y và 3x + 4y đều chẵn
k) $(18x^2 + 27y^2) + (x^2 + y^2) =3243$ suy ra $x^2 + y^2$ chia hết cho 3 suy ra x = 3u, y =3v suy ra $19u^2 + 28q^2 = 81$. Tương tự u =3s, v =3r suy ra $19s^2 + 28r^2 = 9$
s =3p, r =3q suy ra $19q^2 + 28p^2 = 1$. Phương trình vô nghiệm.
l) Giả sử $x \leq y$
x = y thì $2x +1 + x^2 z$ khi và chỉ khi $x(xz - 2) =1$ (x = y = 1, z = 3)
x < y thì xyz < 2y + 1 khi và chỉ khi $xyz \leq 2y$ khi và chỉ khi $xz \leq 2$
Đs: x = 1 y = 2 z = 2, x = 2 y = 2 z = 1
m,n) tương tự
o) $x^3 = 2(y^3 + 2z^3)$ suy ra x^3 chẵn. Do đó x chẵn: x = 2x', suy ra $8x'^3 = 2(y^3 + 2z^3)$ hay $y^3 = 4x'^3 - 2z^3$. Do Đó y = 2y', z = 2z'. Vậy $x'^3 = 2(y'^3 +2z'^3)$. Quá trình này có thể tiếp tục mãi, phương trình chỉ có nghiệm nguyên (0,0,0).
p) $y^2 = z^3 + 7$, chứng minh x lẻ
$y^2 + 1= x^3 + 8 = (x + 2) (x^2 - 2x + 4) = (x -1)^2 + 3$ có dạng 4k +3. Suy ra $y^2 + 1$ không phải là bội của 9. Vậy phương trình vô nghiệm
q,r,s) tương tự p
t) $y^2 = (x^2 + 8x)(x^2 +8x + 7) = z^2 +7z$ (với $z = x^2 +8x$)
Chứng minh nếu z > 9 không có y thỏa
Suy ra $x^2 + 8x \leq 9 \Rightarrow -9 \leq x \leq 1$. thử trực tiếp chọn gía trị của y
u) $y^3 = 8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2)$. Đặt y = 2z, có $z^3 = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$. Thấy ngay : x = -1, y = 0 là nghiệm . Chứng minh rằng phương trình không có nghiệm nào khác.
v)Với n = 2k, $n^4 = 16k^4$ chia hết 16
Với n = 2k +1, $n^4 -1 = (n -1)(n +1)(n^2 +1)$chia hết cho 16.
Như vậy khi chia x + x +….+ x cho 16,có số dư bằng các số lẻ trong dãy x, x,……,x, tức là không vượt quá 14. còn 1599 = 1600 -1, chia 16 dư -1, tức là 15 phương trình vô nghiệm.

Bài 50: Tìm điều kiện cần và đủ cho số k để phương trình có nghiệm nguyên.

$x^2 - y^2 = k$

Hướng dẫn:

Nếu $x^2 - y^2 = k$ có nghiệm nguyên thì $k \neq 4t + 2$

Xét trường hợp k chẵn k lẻ

Bài 51: Chứng minh rằng phương trình :

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1991}$ chỉ có một số hữu hạn nghiệm nguyên dương.

Hướng dẫn:

Gỉa sử $0 < x \leq y \leq z$. Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{1991} \leq \frac{3}{x}$ suy ra $1991 < x \leq 3.1991$ nên x có hữu hạn giá trị

Với mỗi giá trị của x có $y \leq \frac{2.1991x}{x-1991} \leq 2^2.1991$ suy ra giá trị tương ứng của z với mỗi gía trị của x,y

Bài 52: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$a) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}$

$b) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

Hướng dẫn:

a) Xét $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ (a nguyên dương) Với $x \neq 0$, $y \neq 0$, phương trình tương đương $ax + ay = xy$ hay $(x - a)(y - a) = a^2$. Có tất cả 2m -1 nghiệm, với m là các ước số lớn hơn 0 của a^2.

Với a = 14, $a^2 = 196$ Có 9 ước số dương và phương trình có 17 nghiệm.

Bài 53: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$1! + 2! + \ldots\ldots + x! = y^2$

Hướng dẫn:

Thử trực tiếp, thấy x < 5, Phương trình có nghiệm, tìm nghiệm

Chứng minh với $x \geq 5$ phương trình vô nghiệm

Bài 54: Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$xy + 3x - 5y = -3$

$2x^2 - 2xy - 5x + 5y = -19$

Hướng dẫn:

a) $xy + 3x - 5y = -3 \Leftrightarrow (x-5)(y+3) = -18$

Đáp số : (x;y) =(4;15), (-13;-2), (3;6), (14;-5), (2;3), (11,-6), (8;-9), (23 -4), (6;-21), (-1;0), (-4;-1), (7;-13)

b) tương tự

Bài 55: Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$4x + 11y = 4xy$

$x^2 - 656xy - 657y^2 = 1983$

Hướng dẫn:

$4x+11y=4xy \Leftrightarrow (4x-11)(y-1)=1$

Xét 4 hệ phương trình

Đáp số (x; y) (0;0), (3;12)

b) $z(z+7)=y \Leftrightarrow (2z+7+2y)(2z+7-2y)=49$

$x^2-656xy-657y^2=1983 \Leftrightarrow (x+y)(x-657y)=1983$

Đáp số : (x;y);(-4; -1), (4; -1) , (-660 ;-1), (660;1)

Bài 56: Tìm các cặp số nguyên dương (x ; y) thỏa mãn phương trình :

$7x - xy - 3y = 0$

$y^2 = x^2 + 12x - 1923$

Hướng dẫn:

$7x-3y-xy=0 \Leftrightarrow (x+3)(7-y)=21$

Chú ý rằng $x \in Z^+$ nên x +3 ≥4, do đó chỉ có hai phuong trình

Đáp số : (4;4), (8, 16)

Bài 57: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

a) $x(x + 1)(x +7)(x + 8) = y^2$

b) $y(y + 1)(y + 2)(y + 3) = x^2$

Hướng dẫn:

$x(x+1)(x+7)(x+8)=y^2 \Leftrightarrow (x^2+8x+7)=y^2$

Đặt $x^2+ 8x = z$ ($z \in Z$)

Ta có : $z(z+7)=y \Leftrightarrow (2z+7+2y)(2z+7-2y)=49$

Đáp số : (0;0), (-1;0), (1;12), (1;-12), (-9;12), (-9; -12),(-8; 0), (-7;0), (-4;12), (-4; 12)

www.vnmath.com

PHỤ LỤC

www.vnmath.com

PHƯƠNG TRÌNH FECMA

1) Định lý lớn Fecma:

Ta biết có vô số bộ ba số nguyên dương thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 = z^2$. Đương nhiên xuất hiện một câu hỏi: có ba số nguyên dương nào thỏa mãn phương trình $x^3 + y^3 = z^3$ không?

Vào năm 1637, nhà toán học Pháp Fecma (Pierre de Fermat, 1601 – 1665) đã nêu lên mạng đề sau, được gọi là *định lý lớn Fecma:*

Phương trình $x^n + y^n = z^n$ (với n là số nguyên lớn hơn 2) không có nghiệm nguyên dương.

Fecma đã viết vào lề cuốn *Số học* của Điôphăng, ở cạnh mục giải phương trình $x^2 + y^2 = z^2$: "Không thể phân tích được một lập phương đúng thành tổng của hai lập phương, không thể phân tích được một trùng phương thành tổng của hai trùng phương, và nói chung với bất cứ lũy thứa nào lớn hơn 2 thành tổng của hai lũy thừa cùng bậc. Tôi đã tìm được cách chứng minh kì diệu mệnh đề này, nhưng lề sách này quá chật nên không thể ghi lại được."

Năm 1670, năm năm sau khi Fecma mất, con trai ông đã công bố mệnh đề này.

2) Lịch sử về chứng minh định lý lớn Fecma:

Người ta đã tìm thấy chứng minh của Fecma với n = 4, nhưng không biết được ông đã giải bài toán tổng quát như thế nào? Liệu lời giải của ông có sai lầm hay không?

Chỉ biết rằng phải đến một thế kỷ sau, Ơle mới chứng minh được bài toán với n = 3 năm 1753 trong thư gửi Gônbach. Năm 1825, bằng những phát minh mới về lý thuyết số, Đirichlê và Lơgiăngđrơ chứng minh được với n = 5. Năm 1839 Lamê chứng minh được với n = 7. Sau đó khoảng năm 1850 Kume chứng minh được với mọi $n \leq 100$. Năm 1978, nhờ máy tính điện tử người ta đã chứng minh được bài toán với mọi n nhỏ hơn 125000.

Phương trình $x^n + y^n = z^n$ được gọi là *phương trình Fecma.* Nó đã lôi cuốn các nhà toán học chuyên nghiệp và nghiệp dư suốt hơn ba thế kỷ. Trên con đường tìm cách giải phương trình đó, nhiều lý thuyết toán học mới đã được sáng tạo ra. Trong bốn chục năm gần đây, nhiều nhà toán học đã đạt được những kết quả quan trọng. Và để chứng minh định lý lớn Fecma, chỉ còn chứng minh giả thuyết do Taniyama nếu ra: mọi đường cong elliptic đều là đường cong Weil.

Chúng ta tìm hiểu đôi chút về điều này.

Ta xem mỗi nghiệm nguyên của phương trình là một điển có toạ độ nguyên của một đường cong. Đường cong elliptic được Taniyama đưa ra năm 1955 trong một hội nghị quốc tế ở Nhật Bản, đó là đường cong cho bởi phương trình $y^2 = x^3 + mx^2 + nx + p$ thỏa mãn điều kiện "không có điểm kì dị".

Nhà toán học Đức Frey là người đầu tiên gắn việc chứng minh định lý lớn Fecma với các đường cong elliptic: giả sử định lý lớn Fecma không đúng thì tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 và số tự nhiên n sao cho $a^n + b^n = c^n$. Khi đó tồn tại một đường cong elliptic đặc biệt dạng Frey.

Năm 1986, Ribet chứng minh được rằng: đường cong elliptic dạng Frey nếu tồn tại thì nó không phải là đường cong Weil.

Như thế, nếu định lý lớn Fecma không đúng thì tồn tại một đường cong elliptic mà không phải là đường cong Weil, trái với giả thuey61t Taniyama. Điều đó có nghĩa là nếu chứng minh được giả thuyết Taniyama thì cũng chứng min hđược định lí lớn Fecma.

Tháng 6 năm 1993, trong một hội nghị toán học quốc tế ở Anh, nhà toán học Anh Andrew Wiles (Enđriu Oailơ), sinh năm 1953, công bố chứng minh giả thuyết Taniyama cho các đường cong elliptic dạng Frey dày 200 trang, tức là đã chứng minh được địng lý lớn Fecma.

Tháng 12 năm ấy, người ta tìm thấy một "lỗ hổng" trong chứng minh của Wiles. Tuy nhiên các chuyên gia trong lĩnh vực này cho rằng con đường đi của Wiles là hợp lý, sai lầm của Wiles là có thể khắc phục được.

Đúng như vậy, một năm sau, tháng 10 năm 1994, A.Wiles cùng với R. Taylor công bố một bài báo dài 25 trang hoàn thiện các chứng minh của Wiles trước đây.

Việc chứng minh được định lý lớn Fecma cho thấy bộ óc của con người thật kỳ diệu: bất cứ đỉnh cao trí tuệ nào con người cũng có thể vươn tới. Không có bài toán nào mà con người không giải được, chỉ có sớm hay muộn.

3) Chứng minh định lý lớn Fecma với n = 4

Để chứng minh định lý lớn Fecma với n = 4 tức là chứng minh tổng của hai trùng phương không bằng một trùng phương, ta chỉ cần chứng minh tổng của hai trùng phương không bằng một số chính phương, tức là chỉ cần chứng minh phương trình sau không có nghiệm nguyên dương:

$$x^4 + y^4 = z^2$$

Hướng dẫn: dùng nguyên tắc cực hạn

Giả sử (x_o, y_o, z_o) là nghiệm của phương trình đã cho có $x_o^4 + y_o^4$ nhỏ nhất. Hãy chứng minh tồn tại nghiệm của phương trình là (x_1, y_1, z_1) mà $x_1^4 + y_1^4 < x_o^4 + y_o^4$

Sử dụng bổ đề: để các số nguyên tố cùng nhau x, y, z là nghiệm nguyên dương của phương trình Pitago $x^2 + y^2 = z^2$, điều kiện cần và đủ là:

x = 2mn; $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$ (giả sử x chẵn, y lẻ) trong đó m và n là hai số nguyên dương tùy ý, nguyên tố cùng nhau, chẵn lẻ khác nhau, m > n.

PYTAGO

Pytago sinh khoảng năm 580 và mất khoảng năm 500 trước Công nguyên. Ông sinh trưởng trong một gia đình quý tộc ở đảo Xa- môt, một đảo giàu có ở ven biển Ê - giê thuộc địa trung hải.

Mới 16 tuổi , cậu bé Pytago đã nổi tiếng về trí thông minh khác thường. Cậu theo học một nhà toán học nổi tiếng Talét và chính Talét cũng phải kinh ngạc vì trí thông minh, tài năng của cậu.

Để tìm hiểu khoa học của nền văn học các dân tộc, Pytago đã dành nhiều năm đến Ấn Độ, Babilon, Ai Cập và trở nên uyên bác trong hầu hết các lĩnh vực quan trọng: số học, hình học, thiên văn, địa lý âm nhạc, y học, triết học.

Vào tuổi 50, ông mới trở về tổ quốc của mình. Ông thành lập một ngôi trường ở miền nam Ý, nhận hàng trăm môn sinh, kể cả phụ nữ, với thời gian học 5 năm gồm 4 bộ môn: hình học, toán học, thiên văn, âm nhạc. Chỉ những học sinh giỏi vào cuối năm thứ 3 mới được ông trực tiếp dạy. Trường phái Pytago đã đóng một vai trò quan trọng trong sự phát triển nền khoa học của thế giới cổ đại, đặc biệt về số học và hình học.

Pytago chứng minh hệ thức giữa độ dài các cạnh của một tam giác vuông . Hệ thức này đã được người Ai Cập, người Babilon, Trung Quốc, Người Ấn Độ biết đền từ trước, nhưng Pytago là người đầu tiên chứng minh hệ thức ấy.

Trường phái Pytago khảo sát hình vuông có cạnh dài 1 đơn vị và nhận ra rằng không thể biểu thị độ dài đường chéo của nó bằng một số nguyên hay phân số, tức là tồn tại các đoạn thẳng không biểu thị được theo đoạn thẳng đơn vị bởi một sồ hữu tỉ. Sự kiện ấy được so sánh với việc tìm ra hình học Ơclit ở thế kỉ XIX.

Trường phái Pytago cũng nghiên cứu về âm nhạc. Họ giaỉ thích rằng độ cao của âm thanh tỉ lệ nghịch với chiều dài của dây và ba sợi dây đàn có chiều dài tỉ lệ với 6, 4, 3 sẽ cho một hợp âm êm tai.

Pytago còn nghiên cứu cả kiến trúc và thiên văn. Ông cho rằng trái đất có hình cầu và ở tâm của vũ trụ.

Pytago và các môn đệ cũa ông tôn thờ các con sồ và gán cho mỗi con số một ý nghĩa thần bí : họ cho rằng số 1 là nguồn gốc của mọi số, số lẻ là số nam, số chẵn là số nữ, số 5 biểu thị việc xây dựng gai đình, số 7 mang tính chất của sức khỏe, số 8 biểu thị cho tình yêu… Trước lúc vào nghe giảng, các học trò của Pytago đọc những câu kinh như: “Hãy ban ơn cho chúng tôi, hỡi những con số thần linh đã sáng tạo ra loài người”

Pytago cũng có những câu thơ và nêu lên những phương châm xử thế:

Hãy sống giản dị, không xa hoa.

Hãy tôn trọng cha mẹ.

Hãy tập chiến thắng sự đói khát, sự lười biếng và sự giận dữ.

Chớ coi thường sức khỏe. Hãy cung cấp cho cơ thể đúng lúc những đồ ăn thức uống và sự luyện tập cần thiết.

Chưa nhắm mắt nếu chưa soát lại những việc đã làm trong ngày.

Đừng thấy cái bóng trơ của mình trên tường mà tưởng mình vĩ đại.

Lời cảm ơn

Trong quá trình biên soạn quyển chuyên đề này, chúng em đã tham khảo và trích dẫn từ nhiều nguồn sách, báo và tài liệu khác nhau.

- Phương trình và bài toán với nghiệm nguyên, tác giả Vũ Hữu Bình.
- Một số chuyên đề môn toán trung học cơ sở, tác giả Vũ Dương Thụy và Nguyễn Ngọc Đạm.
- Một số chuyên đề số học, các tác giả ở Hà Nội.
- Tạp chí báo Toán Tuổi Thơ 2, do nhà xuất bản giáo dục.
- Một số tài liệu từ mạng.

Cảm ơn các tác giả sách, báo nói trên đã có những quyển sách hay giúp chúng em hoàn thành tốt chuyên đề này.

Chân thành cảm ơn thầy và các bạn đã dành thời gian xem chuyên đề. Nhóm biên tập hân hạnh đón nhận những đóng góp từ thầy và các bạn./.

Nhóm biên tập

Nguyễn Hoàng Anh Thư
Trương Thanh Thư
Lê Thị Thu Thảo
Phạm Ngọc Xuân Đào
Nguyễn Thị Mỹ Huyền