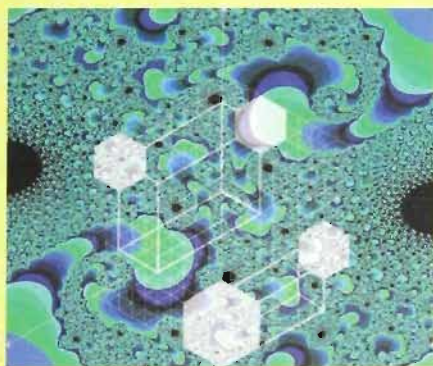


TRẦN VINH

# Thiết kế bài giảng **GIẢI TÍCH 12**

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN HÀ NỘI



TRẦN VINH

**THIẾT KẾ BÀI GIẢNG  
GIẢI TÍCH**



**TẬP HAI**

**NHÀ XUẤT BẢN HÀ NỘI**



# Chương III

## NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

### Phần 1

### NHỮNG VẤN ĐỀ CỦA CHƯƠNG

#### I. NỘI DUNG

Nội dung chính của chương 3 :

• Nguyên hàm : Định nghĩa ; tính chất ; các nguyên hàm cơ bản ; các phương pháp tính nguyên hàm.

Tích phân : Định nghĩa ; các tính chất của tích phân ; các phương pháp tính tích phân.

- Ứng dụng của tích phân : Bài toán diện tích, bài toán thể tích.

#### II. MỤC TIÊU

##### 1. Kiến thức

Nắm được toàn bộ kiến thức cơ bản trong chương đã nêu trên, cụ thể :

Nắm vững định nghĩa nguyên hàm, các nguyên hàm cơ bản, các tính chất của nguyên hàm.

• Định nghĩa tích phân, các tính chất của tích phân, ứng dụng của tích phân, mối quan hệ giữa tích phân và nguyên hàm.

• Một số ứng dụng tích phân trong hình học : Tính được diện tích hình phẳng, thể tích vật thể trong không gian.

##### 2. Kỹ năng

Vận dụng các nguyên hàm cơ bản để tính các nguyên hàm.

Vận dụng thành thạo công thức Niuton – Laibonit để tính tích phân. Mối quan hệ giữa đạo hàm và nguyên hàm.

Vận dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng và thể tích của vật thể.

### **3. Thái độ**

Tự giác, tích cực, độc lập và chủ động phát hiện cũng như lĩnh hội kiến thức trong quá trình hoạt động.

Cảm nhận được sự cần thiết của đạo hàm trong việc khảo sát hàm số.

Cảm nhận được thực tế của toán học, nhất là đối với đạo hàm.

## **Phần 2**

### **CÁC BÀI SOẠN**

## **§1. Nguyên hàm**

### **(tiết 1, 2, 3, 4, 5)**

#### **I. MỤC TIÊU**

##### **1. Kiến thức**

*HS nắm được :*

- Nhớ lại cách tính đạo hàm của hàm số.
- Định nghĩa nguyên hàm.
- Các tính chất của nguyên hàm.

Một số nguyên hàm cơ bản.

Các phương pháp tính nguyên hàm : Phương pháp đổi biến số và phương pháp nguyên hàm từng phần.

##### **2. Kỹ năng**

HS tính thành thạo các nguyên hàm cơ bản.

Tính được nguyên hàm dựa vào phương pháp đổi biến số và phương pháp nguyên hàm từng phần.

##### **3. Thái độ**

Tự giác, tích cực trong học tập.

Biết phân biệt rõ các khái niệm cơ bản và vận dụng trong từng trường hợp cụ thể.

- Tư duy các vấn đề của toán học một cách logic và hệ thống.

#### **II. CHUẨN BỊ CỦA GV VÀ HS**

##### **1. Chuẩn bị của GV**

Chuẩn bị các câu hỏi gợi mở.

Chuẩn bị phần màu, và một số đồ dùng khác.

## 2. Chuẩn bị của HS

Cần ôn lại một số kiến thức đã học về đạo hàm.

## III. PHÂN PHỐI THỜI LƯỢNG

Bài này chia làm 5 tiết :

*Tiết 1 : Từ đầu đến hết mục 2 phần I.*

*Tiết 2 : Tiếp theo đến hết phần I.*

*Tiết 3 : Tiếp theo đến hết mục 1 phần II.*

*Tiết 4 : Tiếp theo đến hết phần II.*

*Tiết 5 : Bài tập*

## IV. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC

### A. ĐẶT VẤN ĐỀ

#### Câu hỏi 1

Xét tính đúng – sai của các câu sau đây :

a) Hàm số  $y = \ln(\cos x)$  có đạo hàm  $y' = -\tan x$ .

b) Hàm số  $y = \ln(\cos x)$  có đạo hàm  $y' = -\cot x$ .

#### Câu hỏi 2

Cho hàm số  $y = 3^{\sin x}$

a) Hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho.

b) Chứng minh rằng hàm số  $y = x3^{\sin x}$  có đạo hàm là  $y' = 3^{\sin x}$

**GV :**

Hàm  $y = x3^{\sin x}$  gọi là nguyên hàm của hàm số  $y' = 3^{\sin x}$

### B. BÀI MỚI

#### I NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT



## HOẠT ĐỘNG 1

### 1. Nguyên hàm

- Thực hiện  1 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Tìm một hàm số <math>F(x)</math> mà</p> $F'(x) = 3x^2$	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p>GV gọi một vài HS trả lời. Bài toán này có nhiều đáp số.</p> <p>Tổng quát : <math>F(x) = x^3 + C</math> trong đó <math>C</math> là hằng số bất kì.</p>
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Tìm một hàm số <math>F(x)</math> mà</p> $F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p>Làm tương tự câu a.</p> $F(x) = \frac{\ln x}{\cos^2 x}$

- GV nêu định nghĩa :

*Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $K$*

*Hàm số  $F(x)$  được gọi là **nguyên hàm** của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  nếu*

$$F'(x) = f(x) \text{ với mọi } x \in K$$

- GV nêu và thực hiện ví dụ 1, GV có thể lấy một vài ví dụ khác.

H1. Tìm nguyên hàm của hàm số  $y = x$ .

H2. Tìm nguyên hàm của hàm số  $y = x^2$

H3. Tìm nguyên hàm của hàm số  $y = x^3$

H4. Tìm nguyên hàm của hàm số  $y = x^n$

- Thực hiện  2 trong 5'.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>    Tìm một hàm số <math>F(x)</math> mà <math>F'(x) = 2x</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p>GV gọi một vài HS trả lời. Bài toán này có nhiều đáp số.</p> <p>Tổng quát : <math>F(x) = x^2 + C</math> trong đó <math>C</math> là hằng số bất kì.</p>
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>    Tìm một hàm số <math>F(x)</math> mà <math>F'(x) = \frac{1}{x}</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p>Làm tương tự câu a.</p> <p><math>F(x) = \ln x + C</math>.</p>

H5. Tìm nguyên hàm của hàm số  $y = \sin x$ .

H6. Tìm nguyên hàm của hàm số  $y = \cos x$ .

H7. Tìm nguyên hàm của hàm số  $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

H8. Tìm nguyên hàm của hàm số  $y = x^{\sqrt{2}}$

• GV nêu định lí 1:

*Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  thì với mỗi hằng số  $C$ , hàm số  $G(x) = F(x) + C$  cũng là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$*

H9. Biết hàm số có một nguyên hàm là  $y = \sin x$ . Hãy tìm nguyên hàm của hàm số đó.

H10. Biết hàm số có một nguyên hàm là  $y = \cos x$ . Hãy tìm nguyên hàm của hàm số đó.

H11. Biết hàm số có một nguyên hàm là  $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Hãy tìm nguyên hàm của hàm số đó.

H12. Biết hàm số có một nguyên hàm là  $y = x^{\sqrt{2}}$ . Hãy tìm nguyên hàm của hàm số đó.

• *Thực hiện  3 trong 5'.*

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>

<p>Tính đạo hàm của hàm số :</p> <p><math>y = G(x)</math>.</p>	<p><math>(G(x))' = [F(x) + C]'</math>  <math>= F'(x) + C' = f(x), x \in K</math>.</p>
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Hãy kết luận.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p>GV tự kết luận.</p>

- GV nêu định lí 2:

*Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  thì mọi nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$  đều có dạng  $F(x) + C$ , với  $C$  là một hằng số.*

- Để chứng minh định lí, GV nêu vấn đề để HS chứng minh.
- GV nêu kí hiệu :

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

- GV nêu chú ý trong SGK.
- Để thực hiện ví dụ 2, GV có thể nêu các ví dụ khác hoặc cho HS tự nêu ví dụ và đặt các câu hỏi sau :

H13. Tính  $\int 3x dx$ .

H14. Tính  $\int k dx$ .

H15. Tính  $\int \frac{1}{x} dx$ .

H16. Tính  $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

## HOẠT ĐỘNG 2

### 2. Tính chất của nguyên hàm

- GV nêu tính chất 1:

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x) ; \quad \int f'(x) dx = f(x) + C.$$

H17. Hãy chứng minh các tính chất trên.

H18. Tính  $\int \tan x dx$ .

- GV nêu và cho HS thực hiện ví dụ 3 hoặc có thể lấy những ví dụ khác.
- GV nêu tính chất 2 :

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

Để chứng minh tính chất này, GV cần đưa ra các câu hỏi sau :

H19. Tính đạo hàm hai vế.

H20. Chứng minh đạo hàm hai vế bằng nhau.

- GV nêu tính chất 3 :

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

- Thực hiện  4 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Tính đạo hàm của hàm số ở mỗi vế.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  $\left[ \int f(x)dx + \int g(x)dx \right]'$ $= \left( \int f(x)dx \right)' + \left( \int g(x)dx \right)' = f(x) + g(x).$
<b>Câu hỏi 2</b>  Hãy làm tương tự đối với trường hợp dấu trừ.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>  $\left[ \int f(x)dx - \int g(x)dx \right]' = f(x) - g(x).$

- GV nêu và thực hiện ví dụ 4. GV có thể thay bởi ví dụ khác.

H21. Tính  $\int (\cos x + \sin x)dx$ .

H22. Tính  $\int (\cos x + \tan x)dx$ .

H23. Tính  $\int (\cos x - \sqrt{x})dx$ .

H24. Tính  $\int (x^3 + x + 1)dx$ .

### HOẠT ĐỘNG 3

#### 3. Sự tồn tại nguyên hàm

- GV nêu định lí 3:

*Mọi hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $K$  đều có nguyên hàm trên  $K$*

- Thực hiện ví dụ 5:

H25. Chứng minh hàm số  $y = x^{\frac{2}{3}}$  có nguyên hàm. Tính nguyên hàm của hàm số đó.

H26. Chứng minh hàm số  $y = \frac{1}{\sin^2 x}$  có nguyên hàm. Tính nguyên hàm của hàm số đó.

- GV cho HS tính nguyên hàm và điền vào bảng sau :

$f'(x)$	$f(x) + C$
0	
$\alpha x^{\alpha-1}$	
$\frac{1}{x}$	
$e^x$	
$a^x \ln a$ ( $a > 0, a \neq 1$ )	
$\cos x$	
$-\sin x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	

- Thực hiện ví dụ 6 trong 5'

Câu a.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Tính nguyên hàm của hàm số:  <math>y = 2x^2</math></p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> $\int 2x^2 dx = \frac{2}{3} x^3$
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Tính nguyên hàm của hàm số:  <math>y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}</math></p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = 3x^{\frac{1}{3}}$
<p><b>Câu hỏi 3</b></p> <p>Tính nguyên hàm của hàm số đã cho.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b></p> <p>HS tự tính.</p>

Câu b. HS tự tính tương tự.

## II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

### HOẠT ĐỘNG 4

#### 1. Phương pháp đổi biến số

- Thực hiện  6 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Đặt <math>u = x - 1</math>, tính du</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p>Ta có <math>du = u' dx = dx</math>.</p>
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Tính <math>\int (x-1)^{10} dx</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p>

	$\int (x-1)^{10} dx = \int u^{10} du = \frac{1}{11} u^{11} + C$ $= \frac{1}{11} (x-1)^{11} + C$
--	---

Câu b.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Đặt <math>x = e^t</math> tính dt.</p> <p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Tính <math>\int \frac{\ln x}{x} dx</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p>Ta có <math>t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx</math></p> <p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p><math>\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C</math></p>

- GV nêu định lí 1:

Nếu  $\int f(u) du = F(u) + C$  và  $u = u(x)$  là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

H27. Hãy chứng minh định lí trên.

- GV nêu hệ quả:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad (a \neq 0).$$

H28. Hãy chứng minh hệ quả trên.

- GV cho HS thực hiện ví dụ 7. GV có thể thay bởi ví dụ tương tự.

- Đối với chú ý trong SGK, GV nêu và nhấn mạnh điều này :

Mọi biến sau khi thay đổi trong quá trình tính toán, song kết quả cuối cùng phải là biến ban đầu.

- Thực hiện ví dụ 8 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Nên đặt biến nào bởi biến $u$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> Đặt $u = x - 1$ .
<b>Câu hỏi 2</b> Tính nguyên hàm của hàm số đã cho.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> HS tự tính.

H29. Tính  $\int (3x + 1)dx$ .

H30. Tính  $\int (x + 1)dx$

H31. Tính  $\int \tan x dx$ .

### HOẠT ĐỘNG 5

## 2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

• Thực hiện  7 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tính $\int (x \cos x)' dx$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> Ta có $\int (x \cos x)' dx = x \cos x + C_1$
<b>Câu hỏi 2</b> Tính $\int \cos x dx$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $\int \cos x dx = \sin x + C_2$ ,
<b>Câu hỏi 3</b> Tính $\int x \sin x dx$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$

• GV nêu định lí 2 :

Nếu hai hàm số  $u = u(x)$  và  $v = v(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $K$  thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$



H32. Hãy chứng minh định lí trên,

• GV nêu chú ý :  $\int u dv = uv - \int v du$ .

• Thực hiện ví dụ 9 trong 7' Đây là ví dụ quan trọng, GV nên hướng dẫn cụ thể :

Câu a.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Đặt u và dv hợp lí.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> Đặt $u = x$ , $dv = e^x dx$
<b>Câu hỏi 2</b> Vận dụng định lí, hãy tính nguyên hàm của hàm số trên.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$ .

Câu b.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Đặt u và dv hợp lí.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> Đặt $u = x$ , $dv = \cos x dx$
<b>Câu hỏi 2</b> Vận dụng định lí hãy tính nguyên hàm của hàm số trên.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$ .

Câu c.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Đặt u và dv hợp lí.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> Đặt $u = \ln x$ , $dv = dx$
<b>Câu hỏi 2</b> Vận dụng định lí hãy tính nguyên hàm của hàm số trên.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$ .

•Thực hiện  8 trong 5'

GV cho HS tự điền vào bảng. Kết quả như sau:

	$\int P(x)e^x dx$	$\int P(x) \cos x dx$	$\int P(x) \ln x dx$
$u$	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
$dv$	$e^x dx$	$\cos x dx$	$P(x) dx$

## HOẠT ĐỘNG 6

### TÓM TẮT BÀI HỌC

1. Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $K$

Hàm số  $F(x)$  được gọi là **nguyên hàm** của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  nếu  $F'(x) = f(x)$  với mọi  $x \in K$

2. Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  thì với mỗi hằng số  $C$ , hàm số  $G(x) = F(x) + C$  cũng là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$

b) Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  thì mọi nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$  đều có dạng  $F(x) + C$ , với  $C$  là một hằng số.

$$3. \left( \int f(x) dx \right)' = f(x) ; \quad \int f'(x) dx = f(x) + C.$$

$$\boxed{\int kf(x) dx = k \int f(x) dx ; \quad \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.}$$

5. Mọi hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $K$  đều có nguyên hàm trên  $K$

6.

$\int 0 dx = C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$\int dx = x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

7. Nếu  $\int f(u)du = F(u) + C$  và  $u = u(x)$  là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

8. Nếu hai hàm số  $u = u(x)$  và  $v = v(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $K$  thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx; \quad \boxed{\int u dv = uv - \int v du.}$$

### HOẠT ĐỘNG 7

## MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP BÀI 1

Câu 1. Cho hàm số  $y = x^3$  Hãy điền đúng sai vào các câu sau

(a) Hàm số luôn có nguyên hàm. ☐

(b) Hàm số chỉ có một nguyên hàm. ☐

(c) Hàm số chỉ có nguyên hàm là  $\frac{1}{4}x^4$  ☐

(d) Hàm số có vô số nguyên hàm dạng  $\frac{1}{4}x^4 + C$ . ☐

Trả lời.

a	b	c	d
Đ	S	S	Đ

Câu 2. Cho hàm số  $y = \sqrt{x}$  Hãy điền đúng sai vào các câu sau

(a) Hàm số luôn có nguyên hàm. ☐

(b) Hàm số chỉ có một nguyên hàm. ☐

(c) Hàm số chỉ có nguyên hàm là  $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$  ☐

(d) Hàm số có vô số nguyên hàm dạng  $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ . ☐

Trả lời.

a	b	c	d
Đ	S	S	Đ

Câu 3. Cho hàm số  $y = x + \cos x$ . Hãy điền đúng sai vào các câu sau

(a) Hàm số luôn có nguyên hàm. ☐

(b) Hàm số chỉ có một nguyên hàm. ☐

(c) Hàm số chỉ có nguyên hàm là  $\frac{1}{2}x^2 + \sin x$ . ☐

(d) Hàm số có vô số nguyên hàm dạng  $\frac{1}{2}x^2 + \sin x + C$ . ☐

Trả lời.

a	b	c	d
Đ	S	S	Đ

Câu 4. Hàm số nào sau đây có nguyên hàm là  $2x$

(a)  $y = x^2 + 2$  ;

(b)  $y = 2x$  ;

(c)  $y = 2$  ;

(d)  $y = \sqrt{x}$  .

Trả lời. (c).

Câu 5. Hàm số nào sau đây có nguyên hàm là  $\sqrt{x}$

(a)  $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  ;

(b)  $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$  ;

(c)  $y = x^2$  ;

(d)  $y = \frac{1}{x}$  .

Trả lời. (a).

Câu 6. Hàm số nào sau đây có nguyên hàm là  $-\cos 2x$

(a)  $y = \sin 2x$  ;

(b)  $y = \frac{1}{2}\sin 2x$  ;

(c)  $y = -\sin 2x$  ;

(d)  $y = \cos 2x$  .

Trả lời. (b).

Câu 7. Hàm số nào sau đây có nguyên hàm là  $\cos 2x$

(a)  $y = \sin 2x$  ;

(b)  $y = -\frac{1}{2}\sin 2x$  ;

(c)  $y = -\sin 2x$  ;

(d)  $y = \sin 2x$  .

Trả lời. (b).

Câu 8. Hàm số nào sau đây có nguyên hàm là  $\sin 2x$

(a)  $y = \sin 2x$  ;

(b)  $y = \frac{1}{2}\cos 2x$  ;

(c)  $y = -\sin 2x$  ;

(d)  $y = \sin 2x$  .

Trả lời. (b).

Câu 9. Hàm số nào sau đây có nguyên hàm là  $e^x$

(a)  $y = e^x$  ;      (b)  $y = \frac{1}{2}e^{2x}$  ;      (c)  $y = \ln x$  ;      (d)  $y = e^{\ln x}$

Trả lời. (a).

Câu 10. Hàm số nào sau đây có nguyên hàm là  $\ln x$

(a)  $y = \ln x$  ;      (b)  $y = \frac{1}{x}$  ;      (c)  $y = -\ln x$  ;      (d)  $y = e^{\ln x}$

Trả lời. (b).

**HƯỚNG DẪN BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA**

**Bài 1.** *Hướng dẫn.* Dựa vào định nghĩa nguyên hàm.

a)  $e^{-x}$  và  $-e^{-x}$  là nguyên hàm của nhau.

HS tự tính đạo hàm của mỗi hàm số trên để chứng minh.

b) Làm tương tự câu a.

$\sin^2 x$  là một nguyên hàm của  $\sin 2x$ .

c) Làm tương tự câu a.

$\left(1 - \frac{4}{x}\right)e^x$  là một nguyên hàm của  $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x$

**Bài 2.** *Hướng dẫn.* Sử dụng các tính chất của nguyên hàm.

Câu a. Chia tử cho mẫu, sau đó sử dụng tính chất của nguyên hàm của hàm số  $y = x^\alpha$

*Đáp số.*  $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C.$

Câu b. *Đáp số.*  $\frac{2^x + \ln 2 - 1}{e^x(\ln 2 - 1)} + C.$

Câu c. Sử dụng công thức lượng giác và nguyên hàm của hàm số lượng giác.

*Đáp số.*  $-2\cot 2x + C.$

Câu d. Sử dụng công thức lượng giác và nguyên hàm của hàm số lượng giác.

*Đáp số.*  $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\cos 8x + \cos 2x\right) + C.$

Câu e. Sử dụng công thức lượng giác và nguyên hàm của hàm số lượng giác.

*Đáp số.*  $\tan x - x + C.$

Câu g. Đặt  $3 - 2x = u.$

*Đáp số.*  $-\frac{1}{2}e^{3-2x} + C.$

Câu h.  $\frac{1}{(1+x)(1-2x)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right).$

Đáp số.  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{1+x}{1-2x} \right| + C.$

**Bài 3. Hướng dẫn.** Sử dụng các tính chất của nguyên hàm.

Câu a. Đặt  $u = 1 - x$

Đáp số.  $-\frac{(1-x)^{10}}{10} + C.$

Câu b. Đặt  $u = 1 + x^2$

Đáp số.  $\frac{1}{5} (1+x^2)^{\frac{5}{2}} + C$

Câu c. Đặt  $t = \cos x$

Đáp số.  $-\frac{1}{4} \cos^4 x + C$

Câu d. Đặt  $t = \cos x$

Đáp số.  $\frac{-1}{1+e^x} + C$

**Bài 4. Hướng dẫn.** Sử dụng các tính chất của nguyên hàm.

Câu a. Áp dụng tính nguyên hàm từng phần :  $u = \ln(1+x), dv = xdx.$

Đáp số.  $\frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{2} + C..$

Câu b.  $u = x^2 + 2x - 1, dv = e^x dx$

Đáp số.  $e^x (x^2 - 1) + C.$

Câu c.  $u = x, dv = \sin(2x+1)dx.$

Đáp số.  $-\frac{x}{2} \cos(2x+1) + \frac{1}{4} \sin(2x+1) + C.$

Câu d. Đặt  $u = 1 - x, dv = \cos x dx.$

Đáp số.  $(1-x) \sin x - \cos x + C.$

## **§2. Tích phân**

### **(tiết 6, 7, 8, 9, 10)**

#### **I. MỤC TIÊU**

##### **1. Kiến thức**

HS nắm được :

Khái niệm tích phân là gì?

- Diện tích hình thang cong ?
- Định nghĩa tích phân.
- Các tính chất của tích phân.
- Các phương pháp tính tích phân
- Phương pháp đổi biến số.
- Phương pháp nguyên hàm từng phần.

Mối quan hệ giữa tích phân và nguyên hàm.

##### **2. Kỹ năng**

Vận dụng thành thạo các tính chất của tích phân.

Tính được tích phân bằng phương pháp đổi biến số, thành thạo trong việc đổi biến số.

Tính được tích phân nhờ phương pháp tích phân từng phần.

##### **3. Thái độ**

Tự giác, tích cực trong học tập.

Biết phân biệt rõ các khái niệm cơ bản và vận dụng trong từng trường hợp cụ thể.

Tư duy các vấn đề của toán học một cách lôgic và hệ thống.

#### **II. CHUẨN BỊ CỦA GV VÀ HS**

##### **1. Chuẩn bị của GV**

Chuẩn bị các câu hỏi gợi mở.

Chuẩn bị các hình từ 45 đến hình 50.



Chuẩn bị phần màu và một số đồ dùng khác.

## 2. Chuẩn bị của HS

Cần ôn lại một số kiến thức đã học về đạo hàm và ôn tập bài 1.

## III. PHÂN PHỐI THỜI LƯỢNG

Bài này chia làm 5 tiết :

*Tiết 1 : Từ đầu đến hết mục 1 phần I.*

*Tiết 2 : Tiếp theo đến hết mục 2 phần I.*

*Tiết 3 : Phần II.*

*Tiết 4 : Mục 1 phần III.*

*Tiết 5 : Mục 2 phần III.*

## IV. TIẾN TRÌNH DẠY – HỌC

### A. ĐẶT VẤN ĐỀ

#### Câu hỏi 1

Nêu định nghĩa và tính chất của nguyên hàm.

Nêu những vấn đề cơ bản của phương pháp đổi biến số và phương pháp tính nguyên hàm từng phần.

#### Câu hỏi 2

Tính nguyên hàm của các hàm số sau đây:

a)  $y = x^2 - 3x + 3$  ;

b)  $y = x \cdot e^x$

#### Câu hỏi 3

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau đây:

a)  $y = \sin x + x \cos x$ .

b)  $y = x \ln x$

### B. BÀI MỚI

#### I – KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

#### HOẠT ĐỘNG 1

##### 1. Diện tích hình thang cong

•Thực hiện  1 trong 5'

GV treo hoặc chiếu hình 45, hình 46 trong SGK.

Câu 1)

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tính chiều cao của hình thang.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> $h = 5 - 1 = 4.$
<b>Câu hỏi 2</b> Tính chiều dài hai đáy của hình thang.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> Chiều dài hai đáy là $f(1) = 3$ và $f(5) = 11.$
<b>Câu hỏi 3</b> Tính diện tích hình thang.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> $\frac{3 + 11}{2} . 4 = 28.$

Câu 2)

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tính chiều cao của hình thang.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> $h = 5 - 1 = 4.$
<b>Câu hỏi 2</b> Tính chiều dài hai đáy của hình thang.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> Chiều dài hai đáy là $f(1) = 3$ và $f(t) = 2t + 1$
<b>Câu hỏi 3</b> Tính diện tích hình thang.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> $S(t) = \frac{3 + 2t + 1}{2} (t - 1) = t^2 + t - 2,$ $t \in [1 ; 5].$

Câu 3)

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Chứng minh $S(t)$ là nguyên hàm của $f(t) = 2x + 1.$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> Vì $S'(t) = 2t + 1, t \in [1 ; 5],$ nên $S(t)$ là một nguyên hàm của $f(t) = 2t + 1$
<b>Câu hỏi 2</b>	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>

Chứng minh  $S = S(5) - S(1)$ .

$$\mathcal{S} = S(5) - S(1) = 28 - 0 = 28.$$

- Tiếp theo GV sử dụng hình 47 để mô tả diện tích hình thang cong.
- GV nêu định nghĩa hình thang cong.

*Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, không đổi dấu trên đoạn  $[a; b]$ . Một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  được gọi là hình thang cong.*

H1. Hãy nêu một vài ví dụ về hình thang cong.

- Thực hiện ví dụ 1 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tính diện tích hình MNPQ.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> $S_{\text{MNPQ}} = h \cdot f(x) = hx^2$
<b>Câu hỏi 2</b> Tính diện tích hình MNEF	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $S_{\text{MNPQ}} = h \cdot f(x+h) = h(x+h)^2$
<b>Câu hỏi 3</b> Tính diện tích hình thang cong MNQE.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> $S(x+h) - S(x)$ .
<b>Câu hỏi 4</b> Chứng minh $S'(x) = x^2$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 4</b> GV hướng dẫn HS chứng minh tương tự SGK

- GV nêu diện tích hình thang cong bất kì :

Với mỗi  $x \in [a; b]$ , kí hiệu  $S(x)$  là diện tích của phần hình thang cong đó nằm giữa hai đường thẳng vuông góc với  $Ox$  lần lượt tại  $a$  và  $x$ . Ta cũng chứng minh được  $S(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ . Giả sử  $F(x)$  cũng là một nguyên hàm của  $f(x)$  thì có một hằng số  $C$  sao cho  $S(x) = F(x) + C$ .

Vì  $S(a) = 0$  nên  $F(a) + C = 0$  hay  $C = -F(a)$ . Vậy

$$S(x) = F(x) - F(a).$$

Thay  $x = b$  vào đẳng thức trên, ta có diện tích của hình thang cần tìm là  $S(b) = F(b) - F(a)$ .

## 2. Định nghĩa tích phân

• Thực hiện  2 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Giả sử <math>F(x)</math> và <math>G(x)</math> là hai nguyên hàm của hàm <math>f(x)</math>. Chứng minh <math>F(x) - G(x) = C</math>.</p> <p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Chứng minh <math>F(a) - F(b) = G(a) - G(b)</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p>HS tự chứng minh theo định nghĩa nguyên hàm.</p> <p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p>HS tự chứng minh</p>

• GV nêu định nghĩa

Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[a ; b]$ . Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên đoạn  $[a ; b]$ .

Hiệu số  $F(b) - F(a)$  được gọi là **tích phân** từ  $a$  đến  $b$  (hay tích phân xác

định trên đoạn  $[a ; b]$ ) của hàm số  $f(x)$ , kí hiệu là  $\int_a^b f(x)dx$ .

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ta gọi  $\int_a^b$  là **dấu tích phân** với  $a$  là *cận dưới* và  $b$  là *cận trên*,  $f(x)dx$  là

*biểu thức dưới dấu tích phân* và  $f(x)$  là *hàm số dưới dấu tích phân*.

H2. Chứng minh  $\int_a^a f(x)dx = 0$ .

H3. Chứng minh  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ .

- GV nêu chú ý trong SGK
- Thực hiện ví dụ 2 trong 5'. GV có thể lấy ví dụ khác

Câu a.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $y = 2x$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> $F(x) = \int 2x dx = x^2$
<b>Câu hỏi 2</b> Tính $\int_1^2 2x dx$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> HS tự tính.

Câu b.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tìm nguyên hàm $F(t)$ của hàm số $y = \frac{1}{t}$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> $F(t) = \int \frac{1}{t} dt = \ln t$ .
<b>Câu hỏi 2</b> Tính $\int_1^2 \frac{1}{t} dt$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> HS tự tính.

- GV nêu chú ý :  
*a) Tích phân của một hàm số không phụ thuộc vào biến số.*

b) Ý nghĩa hình học của tích phân : Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục và không âm trên đoạn  $[a ; b]$ , thì tích phân  $\int_a^b f(x) dx$  là diện tích  $S$  của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của  $f(x)$ , trục  $Ox$  và hai đường thẳng

$$x = a, x = b. \text{ Vậy } S = \int_a^b f(x) dx.$$

H4. Tính các diện tích hình thang ở hoạt động 1 bằng tích phân.

H5. Tính  $\int_1^2 x^2 dx$ .

H6. Tính  $\int_1^2 \ln x dx$ .

### HOẠT ĐỘNG 3

## II – TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

- GV nêu tính chất 1

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

H7. Tính  $\int_1^2 3x^2 dx$ .

H8. Tính  $\int_1^2 5 \ln x dx$ .

- GV nêu tính chất 2 :

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

H9. Tính  $\int_1^2 (3x^2 + \ln x) dx$ .

•Thực hiện  3 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Hãy chứng minh tính chất 1.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p><math>F(x)</math> là một nguyên hàm của <math>f(x)</math> trên đoạn <math>[a ; b]</math>. Khi đó, <math>kF(x)</math> là một nguyên hàm của <math>k f(x)</math> trên đoạn <math>[a ; b]</math>. Ta có</p> $\int_a^b kf(x)dx = (kF(x)) \Big _a^b$ $= kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a))$ $= kF(x) \Big _a^b = k \int_a^b f(x)dx.$
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Hãy chứng minh tính chất 2.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = (F(x) + G(x)) \Big _a^b$ $= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a))$ $= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a))$ $= F(x) \Big _a^b + G(x) \Big _a^b$ $= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

- Thực hiện ví dụ 3 trong 5' GV có thể chọn những ví dụ khác tương tự.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>    Tìm nguyên hàm của hàm số:            <math>y = x^2</math>.</p> <p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>    Tìm nguyên hàm của hàm số:            <math>y = 3\sqrt{x}</math></p> <p><b>Câu hỏi 3</b></p> <p>    Tính tích phân đã cho.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$ <p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> $\int 3\sqrt{x} dx = 2x^{\frac{3}{2}}.$ <p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b></p> <p>HS tự tính :I = 35.</p>

- GV thực nêu tính chất 3:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

H10. Hãy chứng minh tính chất 3

- Thực hiện ví dụ 4 trong 7'. Đây là ví dụ tiêu biểu, quan trọng; GV nên hướng dẫn và khái quát hóa bài toán này.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>    Chứng minh :            <math>\sqrt{1-\cos 2x} =  \sin x </math>.</p> <p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>    Sử dụng tính chất 3 để chứng minh</p> $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$ $= \sqrt{2} \left( \int\limits_0^{\pi} \sin x  dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x  dx \right)$	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p>HS tự chứng minh.</p> <p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p>HS tự phá dấu giá trị tuyệt đối và chứng minh.</p>



<b>Câu hỏi 3</b> Tích tích phân đã cho.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> HS tự tính.
--	---

H 11. Tính  $\int_{-1}^1 |x| dx$ .

H 12. Tính  $\int_{-1}^1 (|x| + 3x) dx$ .

### III – PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

#### HOẠT ĐỘNG 4

#### 1. Phương pháp đổi biến số

• Thực hiện  4 trong 5'.

Câu 1.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Khai triển $(2x+1)^2$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$
<b>Câu hỏi 2</b> Tích tích phân đã cho..	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $I = \int_0^1 (2x+1)^2 dx = \int_0^1 (4x^2 + 4x + 1) dx = \frac{13}{3}.$

Câu 2.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Đặt $u = 2x + 1$ , tính du.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> Ta có $du = 2dx$ .

<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Biến đổi I theo biến <math>u</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p>Đặt <math>u = 2x + 1</math>, ta có</p> <p><math>u(0) = 1, u(1) = 3</math> và</p> <p><math>(2x + 1)^2 dx = \frac{1}{2} u^2 du</math>.</p>
---	---

Câu 3.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Tính <math>\int_{u(0)}^{u(1)} g(u) du</math></p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p><math>\int_1^3 \frac{1}{3} u^2 du = \frac{1}{6} u^3 \Big _1^3 = \frac{13}{3}</math></p>
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>So sánh với kết quả câu 1.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p>HS tự so sánh.</p>

• GV nêu định lí 1 :

*Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a ; b]$ .*

*Giả sử hàm số  $x = \varphi(t)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[\alpha ; \beta]$  sao cho  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$  và  $a \leq \varphi(t) \leq b$  với mọi  $t \in [\alpha; \beta]$ .*

$$\text{Khi đó } \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

• Thực hiện ví dụ 5 trong 5'.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Đặt <math>x = \tan t</math>, tìm <math>dt</math> và các cận mới.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p>Ta có <math>dx = x' dt = \frac{1}{\cos^2 t} dt</math>.</p>

<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Tính tích phân trên.</p>	<p>Khi <math>x = 0</math> thì <math>t = 0</math>, khi <math>x = 1</math> thì <math>t = \frac{\pi}{4}</math></p> <p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t}$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$
---	---

• GV nên đưa ra quy tắc đổi biến số sau :

1. Đặt  $x = \varphi(t)$  và ta xác định đoạn  $[\alpha ; \beta]$ <sup>(1)</sup> sao cho  $a \leq \varphi(t) \leq b$  ;

2. Biến đổi  $f(x)dx = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = g(t)dt$ .

3. Tìm một nguyên hàm  $G(t)$  của  $g(t)$ .

4. Tính  $\int_a^b g(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$ .

5. Kết luận  $\int_a^b f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$ .

• GV nêu chú ý quan trọng trong SGK:

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a ; b]$  . Để tính  $\int_a^b f(x)dx$  , đôi khi

ta chọn hàm số  $u = u(x)$  làm biến số mới, trong đó  $u(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[a ; b]$  và  $u(x) \in [\alpha ; \beta]$ .

<sup>(1)</sup> Thường lấy đoạn  $[\alpha ; \beta]$  (hoặc  $[\beta ; \alpha]$ ) sao cho  $\varphi(t)$  đơn điệu trên đoạn  $[\alpha ; \beta]$  (hoặc  $[\beta ; \alpha]$ ).

Giả sử có thể viết  $f(x) = g(u(x))u'(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , với  $g(u)$  liên tục trên đoạn  $[\alpha; \beta]$ . Khi đó, ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$$

- Thực hiện ví dụ 6 trong 5'.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Đặt $u = \sin x$ , tính $du$ và các cận mới.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  Ta có $du = u' dx = \cos x dx$ .  Khi $x = 0$ thì $u = 0$ ; khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u = 1$ .
<b>Câu hỏi 2</b>  Tính tích phân trên.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 u^2 du = u^3 \Big _0^1 = \frac{1}{3}.$

- Thực hiện ví dụ 7 trong 5'.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Đặt $u = 1 + x^2$ , tính $du$ và các cận mới.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  Ta có $du = u' dx = 2x dx$ .  Khi $x = 0$ thì $u = 1$ ; khi $x = 1$ thì $u = 2$ .
<b>Câu hỏi 2</b>  Tính tích phân trên.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u^3} du$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{1}{u^2} \Big|_1^2 = \frac{3}{16}.$$

## HOẠT ĐỘNG 5

### 2. Phương pháp tích phân từng phần

• Thực hiện  5 trong 5'

Câu a.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Hãy chọn $u$ và $dv$ sao cho hợp lí.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> Đặt $u = (x + 1)$ , $dv = e^x dx$ .
<b>Câu hỏi 2</b> Tìm nguyên hàm đã cho.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $\int (x + 1)e^x dx = (x + 1)e^x - \int e^x dx = xe^x + C.$

Câu b.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tính $\int_0^1 (x + 1)e^x dx$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> $\int_0^1 (x + 1)e^x dx = xe^x \Big _0^1$
<b>Câu hỏi 2</b> Có thể làm bằng cách khác không ?	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> HS tự kết luận.

• GV nêu định lí :

*Nếu  $u(x)$  và  $v(x)$  là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[a ; b]$*

*thì  $\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx$*

*hay  $\int_a^b u \, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v \, du$ .*

GV có thể nêu tóm tắt phương pháp chứng minh định lí trên:

$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$

Tích tích phân đẳng thức trên với cận từ  $a$  đến  $b$  :

$\int_a^b [u(x)v(x)]' \, dx = \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + \int_a^b u(x)v'(x) \, dx$

Hay  $u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$

• GV có thể nêu quy tắc tìm tích phân từng phần như sau :

B1. Tìm hàm  $u$  và  $dv$ .

B2. Tìm  $du$  và  $v$ .

B2. Sử dụng định lí.

• Thực hiện ví dụ 8 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Hãy chọn $u$ và $dv$ sao cho hợp lí.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  Đặt $u = x$ và $dv = \sin x dx$ , ta có
<b>Câu hỏi 2</b>  Tính tích phân đã cho.	$du = dx$ và $v = -\cos x$ .  <b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>

	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = (-x \cos x) \Big _0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$
--	---

• Thực hiện ví dụ 9 trong 5’

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Hãy chọn <math>u</math> và <math>dv</math> sao cho hợp lí.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p>Đặt <math>u = \ln x</math> và <math>dv = \frac{1}{x^2} dx</math>, ta có</p> <p><math>du = \frac{1}{x} dx</math> và <math>v = -\frac{1}{x}</math></p>
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Tính tích phân đã cho.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p><math display="block">\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x \Big _1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx</math></p> <p><math display="block">= \left( -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right) \Big _1^e, \text{ HS tự tính tiếp.}</math></p>

HOẠT ĐỘNG 6

TÓM TẮT BÀI HỌC

1. Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[a ; b]$ . Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên đoạn  $[a ; b]$ .

Hiệu số  $F(b) - F(a)$  được gọi là **tích phân** từ  $a$  đến  $b$  (hay tích phân xác định trên đoạn  $[a ; b]$ ) của hàm số  $f(x)$ , kí hiệu là  $\int_a^b f(x)dx$ .

Ta còn dùng kí hiệu  $F(x) \Big|_a^b$  để chỉ hiệu số  $F(b) - F(a)$ .

$$2. \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$3. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$4. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

5. Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a ; b]$ .

Giả sử hàm số  $x = \varphi(t)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[\alpha ; \beta]^2$  sao cho  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  và  $a \leq \varphi(t) \leq b$  với mọi  $t \in [\alpha; \beta]$ . Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

6. Nếu  $u(x)$  và  $v(x)$  là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[a ; b]$  thì

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = (u(x) v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

hay 
$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

---

<sup>2</sup> Nếu  $\beta < \alpha$ , ta xét đoạn  $[\beta; \alpha]$ .



# MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Hãy điền đúng sai vào ô trống sau:

Câu 1. Cho hàm số  $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

(a) Không tồn tại  $\int_0^1 f(x)dx$  ☐

(b)  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{13}{12}$  ☐

(c)  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{12}{13}$  ☐

(d)  $\int_0^1 f(x)dx = 1$  ☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
S	Đ	S	S

Câu 2. Cho hàm số  $y = \frac{1}{x}$

(a) Không tồn tại  $\int_0^1 f(x)dx$  ☐

(b)  $\int_1^1 f(x)dx = 0$  ☐

$$(c) \int_1^2 f(x) dx = \int_2^1 f(x) dx \quad \square$$

$$(d) \int_1^2 f(x) dx = - \int_2^1 f(x) dx \quad \square$$

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	Đ	S	Đ

Hãy chọn khẳng định đúng trong các câu sau:

Câu 3.  $\int_0^1 (x + e^x) dx$  bằng

(a)  $e$  ;

(b)  $\frac{1}{2} \cdot (2e - 1)$  ;

(c)  $2e$  ;

(d)  $3e$ .

Trả lời. (b).

Câu 4.  $\int_0^{\pi} \sin x dx$  bằng

(a) 1 ;

(b) 2 ;

(c) 3 ;

(d) 4.

Trả lời. (b).

Câu 5.  $\int_0^{\pi} \cos x dx$  bằng

(a) 0 ;

(b) 1 ;

(c) 2 ;

(d) 3.

Trả lời. (a).

Câu 6.  $\int_0^{\pi} \tan x dx$  bằng

(a)  $\ln(\cos 1)$  ;

(b)  $\ln(\sin 1)$ ;

(c)  $-\ln(\cos 1)$  ;

(d)  $\ln(\sin 1)$ .

Trả lời. (c).

Câu 7.  $\int_0^1 \ln(x) dx$  bằng

(a) 1 ;

(b) 2;

(c)  $-1$  ;

(d)  $-2$

Trả lời. (c).

Câu 8.  $\int_0^1 e^{2x+1} dx$  bằng

(a)  $\frac{e^3 - e}{2}$  ;

(b)  $\frac{-e^3 - e}{2}$

(c)  $\frac{e^3 + e}{2}$  ;

(d)  $\frac{e^3 - e}{3}$

Trả lời. (a).

## HOẠT ĐỘNG 8

### HƯỚNG DẪN BÀI TẬP SGK

**Bài 1. Hướng dẫn.** Sử dụng các tính chất của tích phân

Câu a. *Hướng dẫn.* Đặt  $1 - x = t$ .

Đáp số.  $\frac{3}{10\sqrt[3]{4}} (3\sqrt[3]{9} - 1)$ .

Câu b. *Hướng dẫn.* Đặt  $\frac{\pi}{4} - x = t$ .

Đáp số. 0.

Câu c. *Hướng dẫn.* Phân tích  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

*Đáp số.*  $\ln 2$ .

Câu d. *Hướng dẫn.* Phân tích thành đa thức.

*Đáp số.*  $11\frac{1}{3}$ .

Câu e. *Hướng dẫn.* Ta có  $\frac{1-3x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3x}{(x+1)^2}$ . Đặt  $x+1 = t$ .

*Đáp số.*  $\left(\frac{4}{3} - 3 \ln 2\right)$ .

Câu g. *Hướng dẫn.* Ta có  $\sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$ . Đặt  $8x = t$  và  $2x = u$

*Đáp số.* 0.

**Bài 2.** *Hướng dẫn.* Sử dụng các tính chất của tích phân.

Câu a. *Hướng dẫn.*  $\int_0^2 |1-x| dx = \int_0^1 |1-x| dx + \int_1^2 |1-x| dx =$

$$= \int_0^1 (1-x) dx + \int_0^2 (x-1) dx$$

*Đáp số.* 1.

Câu b. *Hướng dẫn.* Ta có  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

*Đáp số.*  $\frac{\pi}{4}$ .

Câu c. *Hướng dẫn.* Ta có  $\frac{e^{2x+1} + 1}{e^x} = \frac{e^{2x+1}}{e^x} + \frac{1}{e^x}$ . Đặt  $e^x = t$ .

*Đáp số.*  $e + \frac{1}{2}$ .

Câu d. *Hướng dẫn.* Ta có  $\sin 2x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{2} \sin 2x (1 + \cos 2x)$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x.$$

Đáp số. 0.

**Bài 3.** *Hướng dẫn.* Sử dụng các tính chất của tích phân.

Câu a. *Hướng dẫn.* Đặt  $u = x + 1$ .

Đáp số.  $\frac{5}{3}$ .

Câu b. *Hướng dẫn.* Đặt  $\sin x = t$ .

Đáp số.  $\frac{\pi}{4}$

Câu c. *Hướng dẫn.* Đặt  $u = 1 + xe^x$ ).

Đáp số.  $\ln(1 + e)$ .

Câu d. *Hướng dẫn.* Đặt  $x = a \sin t$ ).

Đáp số.  $\frac{\pi}{6}$

**Bài 4.** *Hướng dẫn.* Sử dụng các tính chất của tích phân. Phương pháp tích phân từng phần.

Câu a. *Hướng dẫn.* Đặt  $u = x + 1$ ,  $dv = \sin x dx$ .

Đáp số. 2.

Câu b. *Hướng dẫn.* Đặt  $u = \ln x$ ,  $dv = x^2 dx$ .

Đáp số.  $\frac{1}{9}(2e^3 + 1)$ .

Câu c. *Hướng dẫn.* Đặt  $u = \ln(x+1)$ ,  $dv = dx$ .

Đáp số.  $2\ln 2 - 1$ .

Câu d. *Hướng dẫn.* Tính  $\int_0^1 (x^2 - 1)e^{-x} dx$ ,  $u = x^2 - 1$ ,  $dv = e^{-x} dx$ .

Đáp số.  $-1$ .

**Bài 5.** *Hướng dẫn.* Sử dụng các tính chất của tích phân. Phương pháp đổi biến số và phân tích phân thức thành tổng các phân thức.

Câu a. *Hướng dẫn.* Đặt  $u = 3x + 1$ .

Đáp số.  $\frac{62}{25}$

Câu b. *Hướng dẫn.* Ta có  $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = x + 2 + \frac{3}{x + 1}$

Đáp số.  $\frac{1}{8} + \ln \frac{3}{2}$

Câu c. *Hướng dẫn.* Ta có  $\sin 2x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{2} \sin 2x (1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x$ .

Đáp số.  $0$ .

**Bài 6.** *Hướng dẫn.* Sử dụng các tính chất của tích phân. Phương pháp đổi biến số và phương pháp tích phân từng phần.

Câu a. *Hướng dẫn.* Đặt  $u = 1 - x$ .

Câu b. *Hướng dẫn.* Đặt  $u = x$ ,  $dv = (1 - x)^5 dx$ .

Đáp số.  $\frac{1}{42}$

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Bài 1.** Chứng minh  $\int_a^b 0 dx = 0$ .

**Bài 2.** Chứng minh  $\int_a^b c dx = c(b - a)$ .

**Bài 3.** Chứng minh  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ .

**Bài 4.** Chứng minh  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$ .

**Bài 5.** Chứng minh  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

**Bài 6.** Chứng minh Nếu  $f(x) \geq 0, x \in [a; b]$ , thì  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**Bài 7.** Chứng minh  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

**Bài 8.** Nếu  $m \leq f(x) \leq M, x \in [a; b]$ ,  $m, M$  là các hằng số thì

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

# §3. Ứng dụng của tích phân trong hình học

## (tiết 11, 12, 13, 14)

### I. MỤC TIÊU

#### 1. Kiến thức

HS nắm được :

Khái niệm được ứng dụng trong hình học như thế nào?

Bài toán diện tích được tính như thế nào?

- Bài toán thể tích được tính như thế nào?

#### 2. Kỹ năng

- Tính được diện tích và thể tích một số hình cơ bản.

Hoàn thiện cách tính toán tích phân.

#### 3. Thái độ

- Tự giác, tích cực trong học tập.

Biết phân biệt rõ các khái niệm cơ bản và vận dụng trong từng trường hợp cụ thể.

- Tư duy các vấn đề của toán học một cách logic và hệ thống.

### II. CHUẨN BỊ CỦA GV VÀ HS

#### 1. Chuẩn bị của GV

- Chuẩn bị các câu hỏi gợi mở.

Chuẩn bị các hình từ hình 51 đến hình 62.

Chuẩn bị phấn màu, và một số đồ dùng khác.

#### 2. Chuẩn bị của HS

- Cẩn ôn lại một số kiến thức đã học ở hai bài trước.

Ôn tập kĩ bài 2.

### III. PHÂN PHỐI THỜI LƯỢNG

Bài này chia làm 4 tiết :



*Tiết 1 : Từ đầu đến hết mục 1 phần I.*

*Tiết 2 : Tiếp theo đến hết phần I.*

*Tiết 3 : Tiếp theo đến hết mục 1 phần II.*

*Tiết 4 : Tiếp theo đến hết phần II.*

#### IV. TIẾN TRÌNH DẠY - HỌC

##### A. ĐẶT VẤN ĐỀ

###### Câu hỏi 1

a) Nêu các tính chất của tích phân.

b) Nêu các nội dung cơ bản của phương pháp đổi biến số và phương pháp tích phân từng phần.

###### Câu hỏi 2

Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{|x - 1|}$

a) Hãy phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

b) Tính  $\int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{|x - 1|} dx$ .

##### B. BÀI MỚI

###### I – TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

•Thực hiện  1 trong 5'.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Hãy vẽ hình và giới hạn phần hình cần tính diện tích.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  GV gọi HS lên vẽ hình và kết luận phần hình vẽ. GV tham khảo hình 46.
<b>Câu hỏi 2</b>  Hãy thiết lập công thức tính diện tích.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>  $S = \int_1^2  -2x - 1  dx$

<b>Câu hỏi 3</b> Tính diện tích hình đó.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> $S = 3$ .
<b>Câu hỏi 4</b> So sánh theo yêu cầu bài toán.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 4</b> Hai diện tích này bằng nhau

### HOẠT ĐỘNG 1

#### 1. Hình phẳng giới hạn bởi đường cong và trục hoành

- GV nêu các câu hỏi sau:

H1. Diện tích có thể âm được hay không?

H2. Qua hoạt động 1 hãy nêu mối quan hệ giữa diện tích và tích phân.

- GV treo hình 51 và giải thích đối với phần hình nằm dưới trục hoành.
- GV nêu định nghĩa

*Giả sử hàm số  $y = f(x)$  liên tục, không âm trên đoạn  $[a ; b]$ . Ta đã biết hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của  $f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  có diện tích  $S$  được tính theo công thức*

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

- GV sử dụng hình 52 và nêu định nghĩa

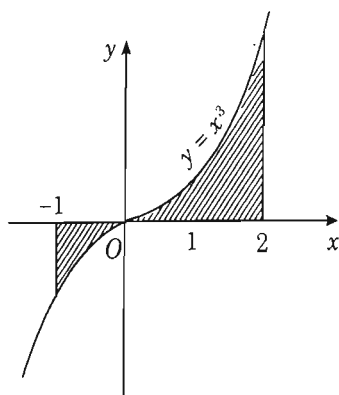
*Diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $f(x)$  liên tục, trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  (H.61) được tính theo công thức*

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

H3. Nếu phần diện tích nằm phía trên trục hoành thì ta sử dụng công thức nào ?

H4. Nếu phần diện tích nằm phía dưới trục hoành thì ta sử dụng công thức nào ?

- Thực hiện ví dụ 1 trong 4' (GV có thể lấy ví dụ khác), GV sử dụng hình 53.



Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Trong đoạn nào hàm số nhận giá trị âm?	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> Trong đoạn $[-1 ; 0]$ .
<b>Câu hỏi 2</b> Trong đoạn nào hàm số nhận giá trị dương?	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> Trong đoạn $[0 ; 2]$ .
<b>Câu hỏi 3</b> Thiết lập công thức tính diện tích hình đã cho.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> $S =$ $S = \int_{-1}^2  x^3  dx = \int_{-1}^0 (-x^3) dx + \int_0^2 x^3 dx$ GV nên để HS tính tiếp.

H5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$  và trục hoành.

H6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = \cos x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$  và trục hoành.

H7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = \sin x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$  và trục hoành.

H8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = \ln x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$  và trục hoành.

## 2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

- GV sử dụng hình 54 để mô tả diện tích hình phẳng trong trường hợp này
- GV nên đặt tên các điểm của hình 54 là giao của  $y = f_1(x)$  và  $y = f_2(x)$  với các đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$ .

- GV đưa ra các câu hỏi sau:

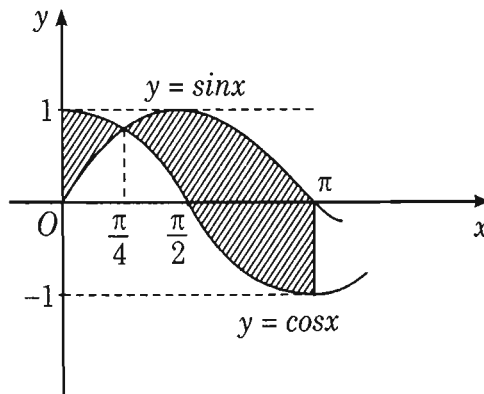
H9. Diện tích hình cần tìm là hiệu của hai hình nào?

H10. Hãy lập công thức tính diện tích đó.

- Gọi  $S_1, S_2$  là diện tích của hai hình thang cong giới hạn bởi trục hoành, hai đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  và các đường cong  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  tương ứng. Khi đó, diện tích  $S$  của hình  $D$  là

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

- GV nêu chú ý trong SGK và lấy một vài ví dụ minh họa
- Thực hiện ví dụ 2 trong 5' GV sử dụng hình 55 trong SGK



Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Ta cần tìm giao điểm của hai đường cong trong đoạn nào?	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> Trong đoạn $[0 ; \pi]$ .
<b>Câu hỏi 2</b> Hãy tìm giao điểm đó.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0 ; \pi]$
<b>Câu hỏi 3</b> Thiết lập công thức tính diện tích đó:	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> $S = \int_0^{\pi}  \cos x - \sin x  dx .$ GV nên để HS tính tiếp. <i>Đáp số</i> $S = 2\sqrt{2}$

- Thực hiện ví dụ 3 trong 5' GV cho HS tự vẽ hình để xác định phần hình cần tính diện tích. Tuy nhiên bài toán này không nhất thiết phải vẽ hình.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Hãy tìm giao điểm của hai đường cong.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> Giải phương trình $f_1(x) - f_2(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1$ .
<b>Câu hỏi 2</b> Thiết lập công thức tính diện tích đó.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $S = \int_{-2}^1  x^3 + x^2 - 2x  dx$ $\left  \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right  + \left  \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right $
<b>Câu hỏi 3</b> Tính diện tích hình đã cho..	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> HS tự tính tiếp.

II – TÍNH THỂ TÍCH

•Thực hiện  2 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Khối lăng trụ là gì?	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  HS trả lời.
<b>Câu hỏi 2</b>  Nhắc lại công thức tính thể tích khối lăng trụ.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>  HS tự trả lời.

HOẠT ĐỘNG 3

1. Thể tích của vật thể

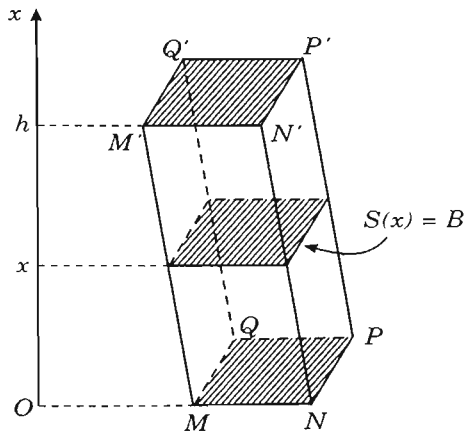
- GV sử dụng hình 56 để mô tả thể tích vật thể.
- GV nêu công thức :

Thể tích  $V$  của phần vật thể bị giới hạn bởi hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$

được tính bởi công thức :

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

- Thực hiện ví dụ 4 trong 5' GV sử dụng hình 57 trong SGK



Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> <p>Hãy nêu công thức thể tích hình lăng trụ.</p>	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> $S = \frac{1}{3} Bh.$
<b>Câu hỏi 2</b> <p>Sử dụng tích phân để tính thể tích hình lăng trụ.</p>	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h B dx = Bx \Big _0^h = Bh$
<b>Câu hỏi 3</b> <p>So sánh và kết luận.</p>	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> <p>HS tự so sánh.</p>

#### HOẠT ĐỘNG 4

### 2. Thể tích khối chóp và khối chóp cụt

H11. Nêu công thức thể tích khối chóp và thể tích khối chóp cụt.

- GV sử dụng hình 58 và nêu vấn đề :

Khi cắt khối chóp bởi một mặt phẳng song song với đáy, ta được thiết diện có diện tích  $S(x)$ .

H12. Hãy tính  $S(x)$ .

H13. Dựa vào công thức tính tích phân, hãy tính  $V$

$$\text{Thể tích } V \text{ của hình chóp } V = \int_0^h B \frac{x^2}{h^2} dx = \frac{B}{h^2} \left( \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^h = \frac{Bh}{3}$$

- GV nêu công thức tính thể tích hình chóp cụt

$$V = \frac{h}{3} (B + \sqrt{BB'} + B').$$

## HOẠT ĐỘNG 5

### III – THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

H14. Nêu công thức thể tích khối chóp và thể tích hình trụ, hình cầu.

H15. Hãy nêu một số hình thuộc khối tròn xoay.

• Thực hiện  3 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Hình trụ là gì?	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  HS trả lời.
<b>Câu hỏi 2</b>  Hình cầu là gì?	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>  HS tự trả lời.

• GV nêu bài toán :

H16. Khi nào ta có một khối-tròn xoay?

H17. Khi cắt khối tròn xoay bởi một mặt phẳng vuông góc với trục thì ta được hình gì? Hãy tính diện tích hình đó.

• GV nêu công thức tổng quát để tính thể tích khối tròn xoay:

*Thiết diện của khối tròn xoay trên tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại  $x \in [a ; b]$  là hình tròn có bán kính bằng  $|f(x)|$  và có diện tích là  $S(x) = \pi f^2(x)$ . Thể tích của vật thể  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .*

• Thực hiện ví dụ 5 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Hãy vẽ hình và mô tả thể tích khối tròn xoay cần tính.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  HS tự vẽ hình.
<b>Câu hỏi 2</b>	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>



Tính thể tích khối tròn xoay đó.	$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx$ <p>HS tự tính tiếp.</p>
----------------------------------	--

• Thực hiện ví dụ 6 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Viết phương trình nửa mặt cầu phía trên trục hoành.</p> <p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Tính thể tích hình cầu bán kính R.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> $y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leq x \leq R).$ <p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> $V = \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx$ <p>HS tự tính tiếp.</p> <p><i>Đáp số:</i> <math>\frac{4}{3} \pi R^3</math></p>

HOẠT ĐỘNG 6

TÓM TẮT BÀI HỌC

1. Diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $f(x)$  liên tục, trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  (H.61) được tính theo công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

2. Cho hai hàm số  $y = f_1(x)$  và  $y = f_2(x)$  liên tục trên đoạn  $[a ; b]$  Gọi  $D$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng  $x = a, x = b$ . Ta có :

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

3. Thể tích  $V$  của phần vật thể bị giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) được tính bởi công thức :

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

4. Thể tích khối tròn xoay :  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

## HOẠT ĐỘNG 7

### MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Hãy điền đúng sai vào ô trống sau:

Câu 1. Cho hàm số  $y = x^3$

(a) Nguyên hàm của hàm số là  $F(x) = \frac{1}{4}x^4$

☐

(b)  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4}$

☐

(c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong, trục hoành, trục tung và đường thẳng  $x = 1$  là  $\frac{1}{4}$

☐

(d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong, trục hoành, trục tung và đường thẳng  $x = 1$  là 1

☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	Đ	Đ	S

Câu 2. Cho hàm số  $y = x^2$

(a) Nguyên hàm của hàm số là  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$  ☐

(b)  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$  ☐

(c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong, trục hoành, trục tung và đường thẳng  $x = 1$  là  $\frac{1}{3}$  ☐

(d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong, trục hoành, trục tung và đường thẳng  $x = 1$  là 1 ☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	Đ	Đ	S

Câu 3. Cho đường cong :  $f(x) = x + \sin x$

(a) Nguyên hàm của hàm số là  $\frac{1}{2}x^2 - \cos x$  ☐

(b)  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}$  ☐

(c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong, trục hoành, trục tung và đường thẳng  $x = 1$  là  $\frac{3}{2}$  ☐

(d) Thể tích khối tròn xoay khi quay đường cong quanh trục hoành, trục tung và đường thẳng  $x = 1$  là  $\frac{3}{2}$  ☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	Đ	Đ	S

Hãy chọn khẳng định đúng trong các câu sau:

Câu 4. Trong các hình giới hạn bởi trục hoành, trục tung,  $x = 1$  và đường cong sau hình nào có diện tích là 1.

(a)  $y = \frac{1}{2}x$  ;      (b)  $y = \frac{1}{2}x^2$  ;      (c)  $y = x$  ;      (d)  $y = x^2$

Trả lời. (b).

Câu 5. Trong các hình giới hạn bởi trục hoành, trục tung,  $x = 1$  và đường cong sau hình nào có diện tích là 1.

(a)  $y = \frac{1}{3}x^3$  ;      (b)  $y = \frac{1}{2}x^3$  ;      (c)  $y = x$  ;      (d)  $y = x^2$

Trả lời. (a).

Câu 6. Trong các hình giới hạn bởi trục hoành, trục tung,  $x = 1$  và đường cong sau hình nào có diện tích là 1.

(a)  $y = \frac{1}{4}x^3$  ;      (b)  $y = \frac{1}{2}x^3$  ;      (c)  $y = 1$  ;      (d)  $y = x^2$

Trả lời. (d).

## HOẠT ĐỘNG 8

### HƯỚNG DẪN BÀI TẬP SGK

Bài 1. Hướng dẫn. Trục tiếp công thức (3) SGK.

Câu a. Giao điểm của hai đường là  $x = -1$  và  $x = 2$ .

$$S = \int_{-1}^2 x^2 - x - 2 \, dx .$$

Đáp số.  $\frac{9}{2}$

Câu b. Giao điểm của hai đường thẳng là  $x = \frac{1}{e}$  và  $x = 1$ .

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^1 |\ln x| - 1 dx.$$

Đáp số.  $\frac{1}{e} + e - 2$ .

Câu c. 
$$S = \int_3^6 [(6x - x^2) - (x - 6)^2] dx = 2 \int_3^6 (9x - x^2 - 18) dx.$$

Đáp số. 9.

**Bài 2. Hướng dẫn.** Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong, GV nên vẽ hình hoặc hướng dẫn HS vẽ hình để thực hiện. Sử dụng trực tiếp công thức (3) SGK.

Phương trình tiếp tuyến là  $y = 4x - 3$ .

$$S = \int_0^2 |x^2 + 1 - 4x + 3| dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{8}{3}.$$

Đáp số.  $\frac{8}{3}$

**Bài 3. Hướng dẫn.** Tính diện tích hình tròn và sử dụng trực tiếp công thức (4) SGK.

Diện tích hình tròn là :  $S = 8\pi$ .

Diện tích phần giới hạn bởi Parabol và hình tròn là  $S' = \int_{-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}^{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \left| \sqrt{x^2 - 8} - \frac{x^2}{2} \right| dx$

Đáp số.  $\frac{9\pi - 2}{3\pi + 2}$ .

**Bài 4. Hướng dẫn.** Sử dụng trực tiếp công thức (6) SGK.

Câu a. Giao điểm của đường cong với trục hoành là :  $x = -1$  và  $x = 1$ .

$$V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx$$

Đáp số.  $\frac{16}{15} \pi$ .

Câu b.  $V = \pi \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

Đáp số.  $\frac{\pi^2}{2}$

Câu c.  $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$

Đáp số.  $\pi \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right)$

**Bài 5. Hướng dẫn.** Sử dụng trực tiếp công thức (6) SGK.

$$\begin{aligned} \text{Câu a. } V &= \pi \int_0^{R \cos \alpha} \tan^2 \alpha \cdot x^2 dx = \pi \tan^2 \alpha \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{R \cos \alpha} \\ &= \frac{\pi R^3}{3} (\cos \alpha - \cos^3 \alpha). \end{aligned}$$

Câu b. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $V = \frac{\pi R^3}{3} (t - t^3)$ .

Đáp số.  $V_{(\max)} \left( t = \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2\sqrt{3} \pi R^3}{27}$

# Ôn tập chương III

## (tiết 15, 16)

### I. MỤC TIÊU

#### 1. Kiến thức

- Nguyên hàm:
  - Định nghĩa nguyên hàm : Định nghĩa, mối quan hệ giữa nguyên hàm và đạo hàm.
  - Định lí về sự tồn tại nguyên hàm.
  - Các tính chất của nguyên hàm : Nguyên hàm của tổng, hiệu, tích và thương.
  - Bảng các nguyên hàm cơ bản
  - Các phương pháp tính nguyên hàm : Phương pháp đổi biến số và phương pháp nguyên hàm từng phần.
- Tích phân:
  - Định nghĩa và tính chất của tích phân : Mối quan hệ giữa tích phân và nguyên hàm.
  - Các phương pháp tính tích phân : Phương pháp đổi biến số và phương pháp tích phân từng phần.
- Ứng dụng của tích phân .
  - Bài toán diện tích.
  - Bài toán thể tích

#### 2. Kỹ năng

- Tính được các nguyên hàm và tích phân của một số hàm số đơn giản.
- Tính được diện tích và thể tích một số hình thường gặp.

#### 3. Thái độ

- Tự giác, tích cực trong học tập.
- Biết phân biệt rõ các khái niệm cơ bản và vận dụng trong từng trường hợp cụ thể.
- Tư duy các vấn đề của toán học một cách logic và hệ thống.

## II. CHUẨN BỊ CỦA GV VÀ HS

### 1. Chuẩn bị của GV

- Chuẩn bị các câu hỏi gợi mở.
- Chuẩn bị một bài kiểm tra.
- Chuẩn bị phần màu, và một số đồ dùng khác.

### 2. Chuẩn bị của HS

Cần ôn lại một số kiến thức đã học về nguyên hàm và tích phân  
Làm bài kiểm tra 1 tiết.

## III. PHÂN PHỐI THỜI LƯỢNG

Bài này chia làm 2 tiết :

*Tiết 1 : Ôn tập*

*Tiết 2 : Kiểm tra*

## IV. TIẾN TRÌNH DẠY - HỌC

### HOẠT ĐỘNG 1

### ÔN TẬP

GV đưa ra các câu hỏi sau đây.

*Câu hỏi 1*

Nêu định nghĩa và tính chất của :

- Nguyên hàm.
- Tích phân.
- Nêu mối quan hệ giữa nguyên hàm và tích phân.

*Câu hỏi 2*

Nêu các phương pháp tính nguyên hàm và tích phân.

*Câu hỏi 3*

Nêu các bước tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số.



#### Câu hỏi 4

Nêu các bước tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần.

#### Câu hỏi 5

Nêu các bước tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số.

#### Câu hỏi 6

Nêu các bước tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần.

#### Câu hỏi 7

Nêu công thức tính diện tích hình phẳng.

#### Câu hỏi 8

Nêu công thức tính thể tích một hình trong không gian.

#### Câu hỏi 9

Nêu công thức tính thể tích một hình tròn xoay bất kì trong không gian.

### HOẠT ĐỘNG 2

## HƯỚNG DẪN BÀI TẬP SGK

**Bài 3. Hướng dẫn.** Dựa vào tính chất của hàm đa thức, hàm phân thức và hàm số lượng giác.

Câu a. Phân tích thành đa thức biểu thức  $f(x) = 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$ .

Đáp số.  $\frac{3}{2}x^4 - \frac{11}{3}x^3 + 3x^2 - x + C$ .

Câu b. Phân tích thành đa thức biểu thức  $f(x) = \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 8x$ .

Đáp số.  $-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 8x + C$ .

Câu c. Phân tích thành đa thức biểu thức  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x} \right)$ .

Đáp số.  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$ .

Câu d. Phân tích thành biểu thức  $f(x) = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1$ .

Đáp số.  $\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{3}{2}e^{2x} + 3e^x - x + C$ .

**Bài 4. Hướng dẫn.** Dựa vào tính chất của nguyên hàm, các phương pháp tính nguyên hàm.

Câu a. Phân tích thành đa thức biểu thức  $f(x) = 2\sin x - x\sin x$ .

Đáp số.  $(x - 2)\cos x - \sin x + C$ .

Câu b. Phân tích thành đa thức biểu thức  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Đáp số.  $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

Câu c. Phân tích thành đa thức biểu thức  $f(x) = \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1}$ .

Đáp số.  $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$

Câu d. Phân tích biểu thức  $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{2\cos^2(x - \frac{\pi}{4})}$ ..

Đáp số.  $\frac{1}{2}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C$

Câu e. Phân tích biểu thức  $\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ ..

Đáp số.  $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

Câu g. Phân tích biểu thức  $\frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right)$ .

Đáp số.  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{1+x}{2-x} \right| + C$ .

**Bài 5. Hướng dẫn.** Dựa vào tính chất của tích phân và các phương pháp tính tích phân.

Câu a. Đặt  $1 + x = t$ ,  $dt = dx$ . Khi  $x = 0$  thì  $t = 1$ , khi  $x = 3$  thì  $t = 4$ .

$$I = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

Đáp số:  $\frac{8}{3}$ .

Câu b. Ta có  $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$  và  $(\sqrt[6]{x})^2 = \sqrt[3]{x}$ ;  $(\sqrt[6]{x})^3 = \sqrt{x}$

Đặt  $\sqrt[6]{x} = t$ . Khi  $x = 1$ ,  $t = 1$ ; khi  $x = 64$ ,  $t = 2$

$$I = \int_1^2 \frac{(1+t^3)dt}{t^2}$$

Đáp số:  $\frac{1839}{14}$

Câu c. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

Đặt  $x^2 = u$ ,  $e^{3x} dx = dv$

Đáp số:  $\frac{2}{27}(13e^6 - 1)$ .

Câu d.  $\sqrt{1 + \sin 2x} = |\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin(x + \frac{\pi}{4}) \right|$ .

Sử dụng phương pháp đổi biến số: đặt  $x + \frac{\pi}{4} = t$ .

Đáp số:  $2\sqrt{2}$ .

**Bài 6. Hướng dẫn.** Dựa vào tính chất của tích phân và các phương pháp tính tích phân.

Câu a.  $\cos 2x \cdot \sin^2 x = \cos 2x \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{1}{4}$ ;

Đáp số.  $-\frac{\pi}{8}$ .

Câu b. Phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối bằng cách thêm cận trung gian 0.

$$I = \int_{-1}^0 \left( 2^x - \frac{1}{2^x} \right) dx + \int_0^1 \left( 2^x - \frac{1}{2^x} \right) dx$$

Đáp số.  $\frac{1}{\ln 2}$

Câu c. Phân tích tử số thành đa thức.

Đáp số.  $\frac{21}{2} + 11 \ln 2$ .

Câu d.  $\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x + 1} \right)$ .

Đáp số.  $-\frac{1}{2} \ln 3$ .

Câu e.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin 2x) dx$ .

Đáp số.  $1 + \frac{\pi}{2}$

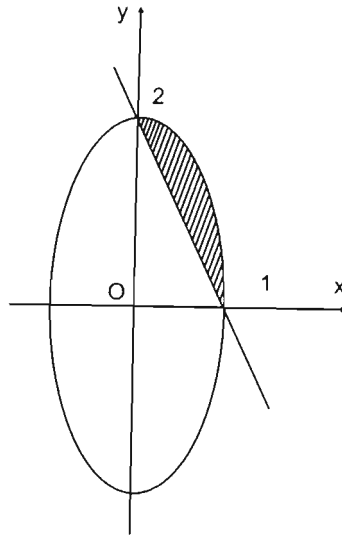
Câu g.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( x^2 + 2x \sin x + \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx$ .

Đáp số.  $\frac{\pi^3}{3} + \frac{5\pi}{2}$ .

**Bài 7. Hướng dẫn.** Dựa vào công thức tính diện tích hình phẳng và thể tích hình tròn xoay.

Câu a.

GV cho HS vẽ hình .



H1. Tính các cận của tích phân.

H2. Tính diện tích :

$$S = 2 \int_0^1 \left( \sqrt{1-x^2} - (1-x) \right) dx .$$

Câu b.

$$V = 4\pi \int_0^1 \left( \sqrt{1-x^2} - (1-x) \right)^2 dx$$

### HOẠT ĐỘNG 3

## ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. (C). 2. (D). 3. (B). 4. (C). 5. a) (C) . b) (B). 6.(D).

# MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA THAM KHẢO

## Đề 1

### Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (4 điểm).

Câu 1. Hãy điền đúng, sai vào ô trống sau đây :

(a)  $\int x dx = x + C$  ☐

(b)  $\int x dx = C$  . ☐

(c)  $\int x dx = x^2 + C$  ☐

(d)  $\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$  . ☐

Câu 2. Hãy điền đúng, sai vào ô trống sau đây :

(a)  $\int_1^1 f(x) dx = 0$  ☐

(b)  $\int_1^1 f(x) dx = 1$  ☐

(c)  $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$  ☐

(d)  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$  ☐

Câu 3.  $\int_1^2 x^2 dx$  bằng:

- (a)  $\frac{1}{3}$ ;                      (b)  $\frac{7}{3}$ ;                      (c) có nghiệm  $\frac{4}{3}$  ;                      (d)  $\frac{5}{3}$

Câu 4. Cho đường cong  $f(x) = x^2$  Diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $f(x) = x^2$  trục tung, trục hoành và  $x = 1$  là

(a)  $\frac{2}{3}$ ;

(b)  $\frac{7}{3}$ ;

(c) có nghiệm  $\frac{4}{3}$  ;

(d)  $\frac{5}{3}$

**Phần 2. Tự luận (6 điểm)**

1. Tính các tích phân sau:

a)  $\int_1^{\pi} x^2 \sin x dx$  ;

b)  $\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$  .

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$  ,  $y = 2x$  và trục hoành.

**Đề 2**

**Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (4 điểm).**

Câu 1. Hãy điền đúng, sai vào ô trống sau đây.

(a) Mọi hàm số đều có nguyên hàm ☐

(b) Hàm số liên tục trên  $(a ; b)$  thì có tích phân trên  $[a ; b]$  ☐

(c)  $\int_1^2 \sin x dx = \cos 2 - \cos 1$  ☐

(d)  $\int_1^2 \sin x dx = \cos 1 - \cos 2$  ☐

Câu 2.  $\int_0^{\pi} x \cos x dx$  bằng

(a) 2 ;                      (b) -2;                      (c)  $\pi$                       (d)  $-\pi$ .

Câu 3.  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$  bằng

- (a) 2;                      (b) -2;                      (c)  $\pi$                       (d)  $-\pi$ .

Câu 4.  $\int_0^e x \ln x dx$  bằng

- (a)  $\frac{1}{2}e^2$ ;                      (b)  $\frac{1}{4}e^2$ ;                      (c)  $\frac{1}{8}e^2$                       (d)  $e^2$

**Phần 2. Tự luận (6 điểm)**

1. Tính các tích phân sau :

a)  $\int_0^1 x(1-x)^{2008} dx$  ;                      b)  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 3x \cos 5x dx$

2. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a ; b]$

a) Chứng minh rằng :  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$  .

b) Tính  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$  .

**Đề 3**

**Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (4 điểm).**

Câu 1. Hãy điền đúng, sai vào ô trống sau đây :

(a)  $\int (x+1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C$  ☐

(b)  $\int (3x+1) dx = \frac{3}{2}x^2 + x + C$  . ☐



$$(c) \int 2x dx = x^2 + C \quad \square$$

$$(d) \int x dx = x^2 + C. \quad \square$$

Câu 2. Hãy điền đúng, sai vào ô trống sau đây :

$$(a) \int_1^1 (x^{2008} - x + 1) dx = 0 \quad \square$$

$$(b) \int_0^1 (x^{2008} - x + 1) dx = 1 \quad \square$$

$$(c) \int_0^1 x(1-x) dx = 0 \quad \square$$

$$(d) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \square$$

Câu 3.  $\int_1^2 (x^2 - 1) dx$  bằng:

$$(a) \frac{1}{3}; \quad (b) \frac{7}{3};$$

$$(c) \frac{4}{3}; \quad (d) \frac{5}{3}$$

Câu 4. Cho đường cong  $f(x) = x^2 + x$ . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $f(x) = x^2 + x$ , trục tung, trục hoành và  $x = 1$  là

$$(a) \frac{2}{3}; \quad (b) \frac{7}{3};$$

$$(c) \frac{4}{3}; \quad (d) \frac{5}{6}$$

## Phần 2. Tự luận (6 điểm)

1. Tính các tích phân sau:

a)  $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$  ;

b)  $\int_0^1 \frac{x+1}{x-2} dx$  .

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $f(x) = x + \sin x$  ,  $y = 2x$  và trục hoành.

### Đề 4

## Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (4 điểm).

Câu 1. Hãy điền đúng, sai vào ô trống sau đây.

(a) Mọi hàm số đều có nguyên hàm

☐

(b) Hàm số liên tục trên  $(a ; b)$  thì có tích phân trên  $[a ; b]$

☐

(c)  $\int_1^2 \cos x dx = \sin 2 - \sin 1$

☐

(d)  $\int_1^2 \cos x dx = \sin 1 - \sin 2$

☐

Câu 2.  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$  bằng

(a) 2 ;

(b) -2;

(c)  $\pi$  ;

(d)  $-\pi$ .

Câu 3.  $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$  bằng

(a)  $\pi^2 - 4$  ;

(b)  $\pi^2 + 4$  ;

(c)  $-\pi^2 + 4$

(d)  $-\pi^2 - 4$

Câu 4.  $\int_0^e \ln x dx$  bằng

(a)  $e$ ;

(b)  $0$ ;

(c)  $\frac{1}{8}e$

(d)  $e^2$

**Phần 2. Tự luận (6 điểm)**

1. Tính các tích phân sau :

a)  $\int_0^1 x^2(1-x)^{100} dx$  ;

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$

2.

a) Tính  $\int_{-2}^3 \frac{dx}{|x|+1}$ ;

b) Tính  $\int_0^2 \min\{\sqrt{x}; x^2\} dx$

**HƯỚNG DẪN**

**Đề 1**

**Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (mỗi câu 1 điểm)**

Câu 1.

(a) (b) (c) (d)

S S S Đ

Câu 2.

(a) (b) (c) (d)

Đ S S Đ

Câu 3. (b),

Câu 4. (a).

**Phần 2. Tự luận (6 điểm)**

1. a)  $\pi^2 - 2 \sin 1 - \cos 1 - 2$ ;

b) Ta có  $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}$

Do đó  $\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = 2 \ln 2 - \ln 3$

2. HS tự tính..

## **Đề 2**

### **Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (mỗi câu 1 điểm)**

Câu 1.

(a) (b) (c) (d)

S Đ Đ S

Câu 2. (b)

Câu 3. (c).

Câu 4. (b).

### **Phần 2. Tự luận (6 điểm)**

1. Tính các tích phân sau :

a) Đặt  $1 - x = t$ , khi  $x = 0$ ,  $t = 1$ ; khi  $x = 1$ ,  $t = 0$ .

$$\int_0^1 x(1-x)^{2008} dx = - \int_1^0 (1-t)t^{2008} dt ;$$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 3x \cos 5x dx = \frac{\sqrt{2}-1}{8}$

2. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a ; b]$

a) Đặt  $t = a + b - x$ .

HS tự chứng minh.

b) Ta có  $1 + \tan x = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ . Vận dụng câu a) ta có  $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$ .

### **Đề 3**

#### **Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (mỗi câu 1 điểm)**

Câu 1.

(a) (b) (c) (d)

Đ Đ Đ S

Câu 2.

(a) (b) (c) (d)

Đ S S Đ

Câu 3. (c).

Câu 4. (b).

#### **Phần 2. Tự luận (6 điểm)**

1. Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{4};$$

$$\text{b) } \int_0^1 \frac{x+1}{x-2} dx = 1 - 3 \ln 2.$$

2. HS tự tính.

### **Đề 4**

#### **Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (mỗi câu 1 điểm)**

Câu 1.

(a) (b) (c) (d)

S Đ Đ S

Câu 2. (c).

Câu 3. (a).

Câu 4. (b).

**Phần 2. Tự luận (6 điểm)**

1. Tính các tích phân sau :

$$\text{a) } \int_0^1 x^2 (1-x)^{100} dx = \frac{1}{530553} ;$$

$$\text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{8}{15}$$

$$2. \text{ a) } \int_{-2}^3 \frac{dx}{|x|+1} = \ln 2 + 2 \ln 3 ;$$

$$\text{b) } \int_0^2 \min \{ \sqrt{x} ; x^2 \} dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{x} dx$$

# CHƯƠNG IV

## SỐ PHỨC

### Phần 1

#### NHỮNG VẤN ĐỀ CỦA CHƯƠNG

#### I. NỘI DUNG

Nội dung chính của chương 4 :

- Số phức : Định nghĩa ; hai số phức bằng nhau; biểu diễn hình học của số phức; mô đun của số phức ; số phức liên hợp.

Các phép toán về số phức : Phép cộng và phép trừ; phép nhân các số phức ; Tổng và tích hai số phức liên hợp ; phép chia hai số phức.

Phương trình bậc hai đối với hệ số thực : Căn bậc hai của số thực âm; phương trình bậc hai đối với hệ số thực.

#### II. MỤC TIÊU

##### 1. Kiến thức

Nắm được toàn bộ kiến thức cơ bản trong chương đã nêu trên, cụ thể :

- Nắm vững định nghĩa số phức và các phép toán của nó.
  - Hiểu được mô đun của số phức và biểu diễn mỗi số phức trên mặt phẳng tọa độ.
- Mối quan hệ của hai số phức liên hợp.

##### 2. Kỹ năng.

Vận dụng thành thạo các phép toán.

- Tìm được mô đun của một số phức.
- Giải được phương trình bậc hai có nghiệm phức.

### 3. Thái độ

Tự giác, tích cực, độc lập và chủ động phát hiện cũng như lĩnh hội kiến thức trong quá trình hoạt động.

Cảm nhận được sự cần thiết của đạo hàm trong việc khảo sát hàm số.

Cảm nhận được thực tế của toán học, nhất là đối với đạo hàm.



## **Phần 2**

### **CÁC BÀI SOẠN**

## **§1. Số phức**

### **(tiết 1, 2, 3)**

#### **I. MỤC TIÊU**

##### **1. Kiến thức**

HS nắm được :

Số  $i$  là gì? Ý nghĩa của nó.

- Định nghĩa số phức

Hai số phức bằng nhau khi nào?

Biểu diễn hình học số phức.

Môđun của số phức.

##### **2. Kỹ năng**

HS tính môđun của số phức.

- Tính thành thạo số phức liên hợp của một số phức.

##### **3. Thái độ**

- Tự giác, tích cực trong học tập.
- Biết phân biệt rõ các khái niệm cơ bản và vận dụng trong từng trường hợp cụ thể.
- Tư duy các vấn đề của toán học một cách logic và hệ thống.

#### **II. CHUẨN BỊ CỦA GV VÀ HS**

##### **1. Chuẩn bị của GV**

- Chuẩn bị các câu hỏi gợi mở.
- Chuẩn bị phấn màu, và một số đồ dùng khác.

##### **2. Chuẩn bị của HS**

Cần ôn lại một số kiến thức đã học phương trình bậc hai.

### III. PHÂN PHỐI THỜI LƯỢNG

Bài này chia làm 3 tiết :

*Tiết 1 : Từ đầu đến hết mục 3.*

*Tiết 2 : Tiếp theo đến hết mục 5.*

*Tiết 3 : Tiếp theo đến hết mục 6 và hướng dẫn bài tập..*

### IV. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC

#### A. ĐẶT VẤN ĐỀ

##### Câu hỏi 1

Xét tính đúng – sai của các câu sau đây :

a) Có số thực  $x$  mà  $x^2 = 1$  .

b) Có số thực  $x$  mà  $x^2 = -1$  .

##### Câu hỏi 2

Chứng minh phương trình sau không có nghiệm thực

a)  $x^2 - 2x + 3$  .                      b)  $-x^2 + x - 7$

GV :

Số  $i$  thỏa mãn  $i^2 = -1$  ta gọi đó là một số phức.

#### B. BÀI MỚI

##### HOẠT ĐỘNG 1

##### 1. Số $i$

H1. Có những số âm nào khi bình phương thì bằng 1.

H2. Có những số âm nào khi bình phương thì bằng  $-1$ .

H3. Phải chăng có một số không là số phức mà khi bình phương bằng  $-1$ .

• GV nêu khái niệm số  $i$ :

*Nghiệm của phương trình  $x^2 + 1 = 0$  là số  $i$ .*

*Như vậy :  $i^2 = -1$ .*

## 2. Định nghĩa số phức

- GV nêu định nghĩa số phức:

Mỗi biểu thức dạng  $a + bi$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$   $i^2 = -1$  được gọi là một số phức.

Đối với số phức  $z = a + bi$ , ta nói  $a$  là **phần thực**,  $b$  là **phần ảo** của  $z$ .

Tập hợp các số phức kí hiệu là  $\mathbb{C}$ .

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

H4. Hãy nêu ví dụ về số phức.

H5. Số thực là trường hợp riêng của số phức. Đúng hay sai?

- Thực hiện  1 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tìm phần thực và phần ảo của số phức $-3 + 5i$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> GV gọi một vài HS trả lời. Phần thực :.... Phần ảo :.... Sau đó kết luận.
<b>Câu hỏi 2</b> Tìm phần thực và phần ảo của số phức $0 + \pi i$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> GV gọi một vài HS trả lời. Phần thực :.... Phần ảo :.... Sau đó kết luận.
<b>Câu hỏi 3</b> Tìm phần thực và phần ảo của số phức $1 + 0i$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> GV gọi một vài HS trả lời. Phần thực :.... Phần ảo :.... Sau đó kết luận.

H6. Phải chăng cả phần thực và phần ảo của một số phức là một số thực?

### HOẠT ĐỘNG 3

### 3. Hai số phức bằng nhau

- GV nêu định nghĩa :

Hai số phức là **bằng nhau** nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ và } b = d$$

H7. Hãy nêu một số ví dụ về hai số phức bằng nhau.

H8. Cho số phức :  $\sqrt{2} + 3i$  . Số nào sau đây bằng số phức trên

(a)  $2 - \sqrt{3}i$ ;

(a)  $-2 - \sqrt{3}i$

(a)  $\frac{4 + 2\sqrt{3}i}{2}$ ;

(a)  $4 + \sqrt{3}i$

- Thực hiện ví dụ 2 trong 5'. GV có thể thực hiện ví dụ khác.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Mối quan hệ của <math>x</math> và <math>y</math> để hai số phức đó bằng nhau.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p><math>2x + 1 = x + 2</math> và <math>3y - 2 = y + 4</math>.</p>
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Tìm <math>x</math> và <math>y</math></p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p>HS giải hệ trên ta có : <math>x = 1</math> và <math>y = 3</math>.</p>

H9. Tìm các số thực  $x$  và  $y$ , biết

$$(x + 1) + (3y - 2)i = (-x + 2) + (2y + 4)i.$$

H10. Tìm các số thực  $x$  và  $y$ , biết

$$(-x + 1) + (2y - 1)i = (x + 2) + (y + 4)i.$$

- GV nêu chú ý :

- Mỗi số thực  $\alpha$  được coi là một số phức với phần ảo bằng 0

$$a = a + 0i.$$

Như vậy, mỗi số thực cũng là một số phức. Ta có  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

- Số phức  $0 + bi$  được gọi là số ảo và viết đơn giản là  $bi$

$$bi = 0 + bi.$$

Đặc biệt  $i = 0 + 1i$ .

Số  $i$  được gọi là đơn vị ảo.

H11. Hãy chỉ ra phần thực và phần ảo của các số sau:

a) 7 ;

b)  $-4i$

Số nào là số thuần ảo?

• Thực hiện  2 trong 5'.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Hãy viết số phức $z$ thỏa mãn đề bài.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$
<b>Câu hỏi 2</b> Hãy viết số phức $z$ có phần ảo 5, phần thực $\sqrt{2}$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> GV gọi một vài HS trả lời. $z = \sqrt{2} + 5i.$
<b>Câu hỏi 3</b> Hãy viết số phức $z$ có phần ảo $-5$ , phần thực $\sqrt{2}$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> $z = \sqrt{2} - 5i.$

#### HOẠT ĐỘNG 4

#### 4. Biểu diễn hình học của số phức

• GV nêu định nghĩa :

*Điểm  $M(a ; b)$  trong một hệ tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức  $z = a + bi$*

• GV sử dụng hình 68 để đặt các câu hỏi:

H12. Biểu diễn các số phức sau trên mặt phẳng:

a)  $1 + 3i$  ;

b)  $2 + \sqrt{3}i$  ;

c)  $1 - 3i$  ;

c)  $2 - \sqrt{3}i$ .

- H13. Tìm tập hợp các số phức trên mặt phẳng tọa độ chỉ có phần ảo.
- H14. Tìm tập hợp các số phức trên mặt phẳng tọa độ chỉ có phần thực.
- H15. Hai số phức được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ có đặc điểm gì nếu:
- a) Có phần thực bằng nhau nhưng phần ảo đối nhau.
  - b) Có phần ảo bằng nhau nhưng phần thực đối nhau.
  - c) Có phần thực và phần ảo đối nhau.

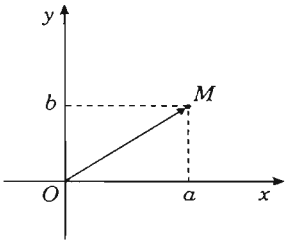
•Thực hiện  3 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Biểu diễn số phức <math>3 - 2i</math></p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p>HS tự biểu diễn</p>
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Biểu diễn số phức <math>-4i, 3</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p>HS tự làm.</p>
<p><b>Câu hỏi 3</b></p> <p>Trả lời câu b.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b></p> <p>HS tự làm.</p>

HOẠT ĐỘNG 5

5. Mô đun của số phức

- GV nêu định nghĩa :



Độ dài của vectơ  $\overline{OM}$  được gọi là **môđun** của số phức  $z$  và kí hiệu là  $|z|$ .

Vậy  $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

•Thực hiện  4 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tìm số phức có mô đun bằng 0.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> $\sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$ Số 0.
<b>Câu hỏi 2</b> Tìm số phức có môđun bằng 1.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $\sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1.$ Các số $z = 1, z = i, z = -i, \dots$ có môđun bằng 1.

H16. Mỗi số phức đều có một môđun. Đúng hay sai?

H17. Hai số phức bằng nhau có môđun bằng nhau. Đúng hay sai?

H18. Hai số phức có môđun bằng nhau thì bằng nhau. Đúng hay sai?

## HOẠT ĐỘNG 6

### 6. Số phức liên hợp

•Thực hiện  5 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Biểu diễn hai số : $2 + 3i$ và $2 - 3i$ trên mặt phẳng tọa độ.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> HS tự biểu diễn. Hai điểm này đối xứng qua Ox.
<b>Câu hỏi 2</b> Biểu diễn hai số : $-2 + 3i$ và $-2 - 3i$ trên mặt phẳng tọa độ..	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> HS tự biểu diễn. Hai điểm này đối xứng qua Ox.

• GV nêu định nghĩa :

Cho số phức  $z = a + bi$ . Ta gọi  $a - bi$  là số phức liên hợp của  $z$  và kí hiệu là  $\bar{z} = a - bi$ .

H19. Hai số phức liên hợp có cùng môđun. Đúng hay sai.

H20. Hãy nêu phản ví dụ về hai số phức có cùng môđun nhưng không phải hai số phức liên hợp.

• Thực hiện  6 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>    Tìm <math>\bar{z}</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p><math>\bar{z} = 3 - 2i</math>.</p>
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>    Tìm <math>\overline{\bar{z}}</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p><math>\overline{\bar{z}} = z = 3 - 2i</math>.</p>
<p><b>Câu hỏi 3</b></p> <p>    Tính <math> z </math> và <math> \bar{z} </math></p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b></p> <p><math> \bar{z}  =  z  = \sqrt{13}</math></p>

• GV nêu kết luận:

$$\overline{\bar{z}} = z.$$

$$|\bar{z}| = |z|.$$

• GV nêu và thực hiện ví dụ 4. GV có thể thay bởi ví dụ khác.

H21. Tìm số phức liên hợp của  $z = 13 - 5i$ .

H22. Tìm số phức liên hợp của  $z = -13 - 5i$ .

H23. Tìm số phức liên hợp của  $z = 13 + 5i$ .

H24. Tìm số phức liên hợp của  $z = -13 + 5i$ .



## TÓM TẮT BÀI HỌC

1. Mỗi biểu thức dạng  $a + bi$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$   $i^2 = -1$  được gọi là một **số phức**.

Đối với số phức  $z = a + bi$ , ta nói  $a$  là **phần thực**,  $b$  là **phần ảo** của  $z$ .

Tập hợp các số phức kí hiệu là  $\mathbb{C}$ .

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

2. Hai số phức là **bằng nhau** nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.  $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ và } b = d.$

3. Điểm  $M(a; b)$  trong một hệ toạ độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là **điểm biểu diễn số phức**  $z = a + bi$

4. Độ dài của vectơ  $\overline{OM}$  được gọi là **môđun** của số phức  $z$  và kí hiệu là  $|z|$ .

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

5. Cho số phức  $z = a + bi$ . Ta gọi  $a - bi$  là **số phức liên hợp** của  $z$  và kí hiệu là  $\bar{z} = a - bi$ .

•  $\overline{\bar{z}} = z.$

•  $|\bar{z}| = |z|.$

## MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP BÀI 1

Điền đúng sai vào chỗ trống sau:

Câu 1. Cho số phức  $z = 2 - 5i$

(a)  $\bar{z} = 2 + 5i$

☐

(b)  $|z| = \sqrt{29}$

☐

$$(c) |\bar{z}| = \sqrt{29}$$

☐

$$(d) z = \bar{z}$$

☐

Trả lời.

a	b	c	d
Đ	Đ	Đ	S

Câu 2. Cho số phức  $z = 2 + 5i$

$$(a) \bar{z} = 2 - 5i$$

☐

$$(b) |z| = \sqrt{29}$$

☐

$$(c) |\bar{z}| = \sqrt{29}$$

☐

$$(d) z = \bar{z}$$

☐

Trả lời.

a	b	c	d
Đ	Đ	Đ	S

Câu 3. Cho số phức  $z = 2 + 5i$ ,  $z' = a + bi$

$$(a) z \text{ không thể bằng } z'$$

☐

$$(b) z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$$

☐

$$(c) z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \end{cases}$$

☐

$$(d) z' = \bar{z} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \end{cases}$$

☐

Trả lời.

a	b	c	d
S	Đ	S	Đ

Câu 4. Cho hai số phức  $z = 2 - yi$ ,  $z' = 5x + 3i$ ;  $z = z'$  khi

(a)  $x = 2, y = -3$ ;

(b)  $x = -\frac{2}{5}, y = -3$ ;

(c)  $x = -2, y = -3$ ;

(d)  $x = 2, y = 3$ ;

Trả lời. (b).

Câu 5. Cho hai số phức  $z = 2 - yi$ ,  $z' = 5x + 3i$ ;  $\bar{z} = z'$  khi

(a)  $x = 2, y = -3$ ;

(b)  $x = -\frac{2}{5}, y = 3$ ;

(c)  $x = -2, y = -3$ ;

(d)  $x = -\frac{2}{5}, y = -3$ ;

Trả lời. (d).

Câu 6. Cho số phức  $z = 12 - \sqrt{3}i$ . Số  $\bar{z}$  là :

(a)  $\bar{z} = 12 + \sqrt{3}i$ ;

(b)  $\bar{z} = 12 - \sqrt{3}i$ ;

(c)  $\bar{z} = -12 - \sqrt{3}i$ ;

(d)  $\bar{z} = -12 + \sqrt{3}i$ .

Trả lời. (a).

Câu 7. Cho số phức  $z = 12 - \sqrt{3}i$ ;  $|z|$  bằng

(a)  $\sqrt{147}$ ;

(b)  $\sqrt{15}$

(c)  $\sqrt{21}$ ;

(d)  $\sqrt{153}$

Trả lời. (a).

Câu 8. Cho số phức  $z = \sqrt{12} - \sqrt{3}i$ ;  $|z|$  bằng

(a)  $\sqrt{147}$ ;

(b)  $\sqrt{15}$

(c)  $\sqrt{21}$ ;

(d)  $\sqrt{153}$

Trả lời. (b).

Câu 9. Cho số phức  $z = \sqrt{12} - 3i$ ;  $|z|$  bằng

(a)  $\sqrt{147}$ ;

(b)  $\sqrt{15}$

(c)  $\sqrt{21}$ ;

(d)  $\sqrt{153}$

Trả lời: (c).

Câu 10. Cho số phức  $z = 12 - 3i$ ;  $|z|$  bằng

(a)  $\sqrt{147}$ ;

(b)  $\sqrt{15}$

(c)  $\sqrt{21}$ ;

(d)  $\sqrt{153}$

Trả lời: (d).

## HOẠT ĐỘNG 9

### HƯỚNG DẪN BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

**Bài 1. Hướng dẫn.**  $z = a + bi$  thì phần thực  $a$ , phần ảo  $b$ .

GV cho HS lên bảng điền vào ô trống

a)

Phần thực	Phần ảo
1	$\pi$

b)

Phần thực	Phần ảo
$\sqrt{2}$ ,	-1

c)

Phần thực	Phần ảo
$2\sqrt{2}$ ,	0

d)

Phần thực	Phần ảo
0	-7

**Bài 2. Hướng dẫn.** Sử dụng các tính chất của hai số phức bằng nhau

Câu a. Giải hệ : 
$$\begin{cases} 3x - 2 = x + 1 \\ 2y + 1 = -(y - 5) \end{cases}$$

Đáp số.  $x = \frac{3}{2}, y = \frac{4}{3}.$

Câu b. Giải hệ : 
$$\begin{cases} 1 - 2x = \sqrt{5} \\ 1 - 3y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Đáp số.  $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, y = \frac{1 + \sqrt{3}}{3}$

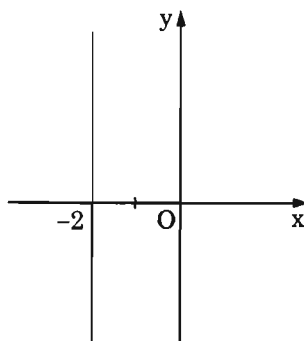
Câu c. Giải hệ : 
$$\begin{cases} 2x + y = x - 2y + 3 \\ 2y - x = y + 2x + 1 \end{cases}$$

Đáp số.  $x = 0, y = 1.$

**Bài 3. Hướng dẫn.** Sử dụng các tính chất của số phức

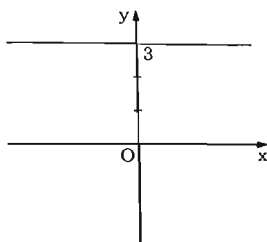
Câu a. Thuộc đường thẳng  $x = -2$ .

Đáp số. Hình vẽ.



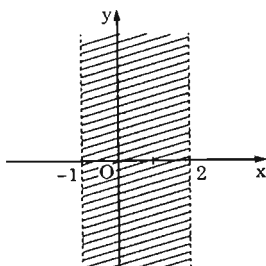
Câu b. Thuộc đường thẳng  $y = 3$

Đáp số. Hình vẽ.



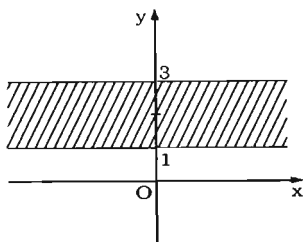
Câu c. Là phần được giới hạn bởi hai đường thẳng  $x = -1$  và  $x = 2$ .

Đáp số. Hình vẽ.



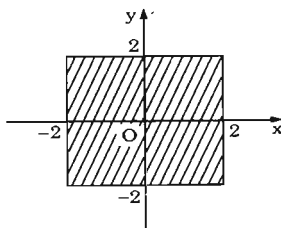
Câu d. Là phần được giới hạn bởi hai đường thẳng  $y = 1$  và  $y = 3$ .

Đáp số. Hình vẽ.



Câu e. Là phần được giới hạn bởi hình vuông.

Đáp số. Hình vẽ.



**Bài 4. Hướng dẫn.** Sử dụng các tính chất của môđun số phức.

Nếu  $z = a + ib$  thì  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Câu a. *Đáp số.*  $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$

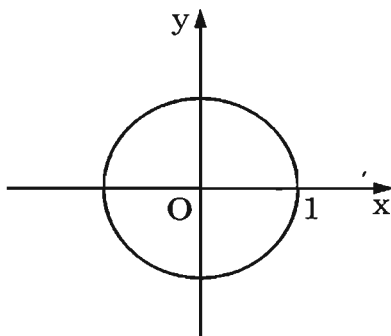
Câu b. *Đáp số.*  $|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-3)^2} = \sqrt{11}$

Câu c. *Đáp số.*  $|z| = \sqrt{(-5)^2} = 5$

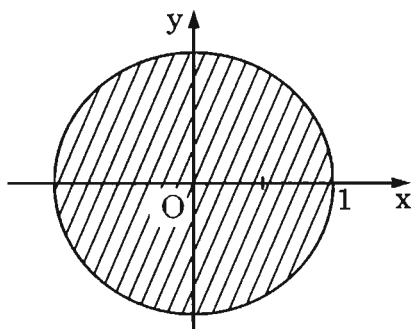
Câu d. *Đáp số.*  $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$ .

**Bài 5. Hướng dẫn.** Tính chất của môđun số phức trên mặt phẳng tọa độ.

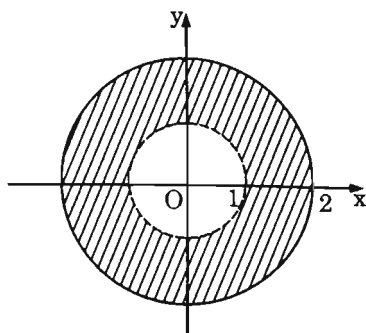
Câu a. *Đáp số.* Là đường tròn bán kính 1.



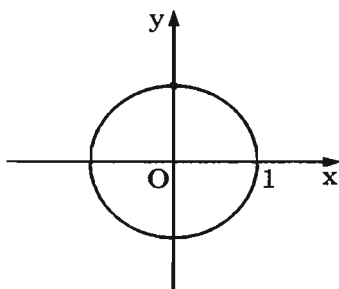
Câu b. *Đáp số.* Là hình tròn bán kính 1.



Câu c. *Đáp số.* Là phần hình giới hạn bởi hai hình tròn bán kính 1 và 2.



Câu d.



*Đáp số.* Là đường tròn bán kính 1.

**Bài 6. Hướng dẫn.** Dựa vào định nghĩa số phức liên hợp.

Câu a. *Đáp số.*  $\bar{z} = 1 + i\sqrt{2}$ .

Câu b. *Đáp số.*  $\bar{z} = -\sqrt{2} - i\sqrt{3}$

Câu a. *Đáp số.*  $\bar{z} = 5$ .

Câu a. *Đáp số.*  $\bar{z} = -7i$ .



## §2. Cộng trừ và nhân số phức (tiết 4, 5)

### I. MỤC TIÊU

#### 1. Kiến thức

HS nắm được :

Khái niệm phép cộng, phép trừ số phức.

– Định nghĩa phép cộng số phức.

– Định nghĩa phép trừ số phức.

· Phép nhân số phức.

#### 2. Kỹ năng

Vận dụng thành thạo các phép toán cộng và trừ số phức.

Kết hợp các tính chất để thực hiện các phép toán.

So sánh với các phép toán của số thực.

#### 3. Thái độ

· Tự giác, tích cực trong học tập.

· Biết phân biệt rõ các khái niệm cơ bản và vận dụng trong từng trường hợp cụ thể.

· Tư duy các vấn đề của toán học một cách logic và hệ thống.

### II. CHUẨN BỊ CỦA GV VÀ HS

#### 1. Chuẩn bị của GV

Chuẩn bị các câu hỏi gợi mở.

Chuẩn bị phấn màu và một số đồ dùng khác.

#### 2. Chuẩn bị của HS

Cần ôn lại một số kiến thức đã học bài 1.

### III. PHÂN PHỐI THỜI LƯỢNG

Bài này chia làm 2 tiết :

*Tiết 1 : Từ đầu đến hết phần 1.*

*Tiết 2 : Tiếp theo đến hết phần 2.*

#### IV. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC

##### A. ĐẶT VẤN ĐỀ

###### Câu hỏi 1

Nêu các khái niệm về số phức :

- Định nghĩa số phức.
- Số phức liên hợp.
- Môđun của số phức.
- Biểu diễn hình học của số phức.

###### Câu hỏi 2

Tìm số phức liên hợp của các số sau:

a)  $z = 4 - 7i$  ;

b)  $z = \sqrt{3} - 5i$

###### Câu hỏi 3

Tìm môđun của các số phức sau :

a)  $z = 4 - 7i$  ;

b)  $z = \sqrt{3} + 5i$

##### B. BÀI MỚI

###### HOẠT ĐỘNG 1

###### 1. Phép cộng và phép trừ

•Thực hiện  1 trong 5'

Câu 1)

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tính $(3+2i)+(5+8i)$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> $(3+2i)+(5+8i) = 8 + 10i$
<b>Câu hỏi 2</b> Tính $(7+5i)-(4+3i)$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $(7+5i)-(4+3i) = 3 + 2i$

<b>Câu hỏi 3</b> Tính $(-\sqrt{3} + 5i) - (4 - 3i)$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> $(-\sqrt{3} + 5i) - (4 - 3i) = (-\sqrt{3} - 4) + 2i$
--	--

• GV nêu định nghĩa

*Phép cộng và phép trừ hai số phức được thực hiện theo quy tắc cộng, trừ đa thức.*

H1. Tính  $(7 + 5i) + (4 + 3i)$ .

H2. Tính  $(7 + 5i) - (4 + 3i)$ .

H3. Tính  $-(7 + 5i) - (4 + 3i)$ .

H4. Tính  $(7 + 5i) - (4 - 3i)$ .

• Thực hiện ví dụ 1 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tính $(5 + 2i) + (3 + 7i)$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> HS tự tính.
<b>Câu hỏi 2</b> Tính $(1 + 6i) - (4 + 3i)$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> HS tự tính.

• GV nêu tổng quát:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i ;$ $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i .$
---

H6. Tìm số phức liên hợp của  $z = (2 - 3i) - (5 + 4i)$ .

H7. Tìm số phức liên hợp của  $z = (2 - 3i) + (5 + 4i)$

H8. Tìm số phức liên hợp của  $z = (2 - 3i) - (5 - 4i)$

H9. Tìm số phức liên hợp của  $z = (2 + 3i) - (5 + 4i)$

## HOẠT ĐỘNG 2

### 2. Phép nhân

- Thực hiện  2 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tính $(3 + 2i)(2 + 3i)$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> $(3 + 2i)(2 + 3i) = 6 + 13i + 6i^2 = 13i$ .
<b>Câu hỏi 2</b> Tính $(3 + 2i)(2 - 3i)$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $(3 + 2i)(2 - 3i) = 6 - 5i - 6i^2 = 12 - 5i$ .

- GV nêu định nghĩa

*Phép nhân hai số phức được thực hiện theo quy tắc nhân đa thức rồi thay  $i^2 = -1$  trong kết quả nhận được.*

- Thực hiện ví dụ 2 trong 5'. GV có thể lấy ví dụ khác

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tính $(5 + 2i)(4 + 3i)$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> HS tự tính
<b>Câu hỏi 2</b> Tính $(5 + 2i)(4 + 3i)$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> HS tự tính.

H10. Tìm số phức liên hợp của  $z = (2 - 3i)(5 + 4i)$ .

H11. Tìm số phức liên hợp của  $z = (2 - 3i)(5 + 4i)$

H12. Tìm số phức liên hợp của  $z = (2 - 3i)(5 - 4i)$

H13. Tìm số phức liên hợp của  $z = (2 + 3i)(5 + 4i)$

- GV nêu tổng quát:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

## TÓM TẮT BÀI HỌC

1. Phép cộng và phép trừ hai số phức được thực hiện theo quy tắc cộng, trừ đa thức.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i ;$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i .$$

2. Phép nhân hai số phức được thực hiện theo quy tắc nhân đa thức rồi thay  $i^2 = -1$  trong kết quả nhận được.

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

## HOẠT ĐỘNG 4

## MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Hãy điền đúng sai vào ô trống sau:

Câu 1. Cho  $z = 2 + 4i$ ,  $z' = 5 - 3i$

(a)  $z$  là số phức liên hợp của  $z'$

☐

(b)  $z + z' = 7 + i$

☐

(c)  $z - z' = -3 + 7i$

☐

(d)  $zz' = 22 + 14i$

☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
S	Đ	Đ	Đ

Câu 2. Cho  $z = 2 + 4i$ ,  $z'$  là số phức liên hợp của  $z$

(a)  $z' = 2 - 4i$

☐

(b)  $z + z' = 0$

☐

(c)  $z - z' = 8i$

☐

(d)  $zz' = 20$

☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	S	Đ	Đ

Câu 3. Cho  $z = 2 + \sqrt{3}i$ ,  $z'$  là số phức liên hợp của  $z$

(a)  $z' = 2 - \sqrt{3}i$

☐

(b)  $z + z' = 0$

☐

(c)  $z - z' = 0$

☐

(d)  $zz' = 7$

☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	S	S	Đ

Câu 4. Cho  $z = \sqrt{3}i$ ,  $z'$  là số phức liên hợp của  $z$

(a)  $z' = -\sqrt{3}i$

☐

(b)  $z + z' = 0$

☐

(c)  $z - z' = 0$

☐

(d)  $zz' = 3$

☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	Đ	S	Đ

Hãy chọn khẳng định đúng trong các câu sau:

Câu 5. Cho  $z = (3 + 2i) + (5 - i)$ . Số phức liên hợp của  $z$  là

(a)  $8 + i$  ;

(b)  $8 - i$

(c)  $-8 - i$  ;

(d)  $-8 + i$ .

Trả lời. (a).

Câu 6. . Cho  $z = (3 + 2i) - (5 - i)$ . Số phức liên hợp của  $z$  là

(a)  $-2 + 3i$  ;

(b)  $-2 - 3i$

(c)  $2 + 3i$  ;

(d)  $2 - 3i$ .

Trả lời. (a).

Câu 7. Cho  $z = (3 + 2i) - (5 - i)$ ;  $z' = i$ .

(a)  $zz' = 3 - 2i$  ;

(b)  $-2i - 3$

(c)  $-2 + 3i$  ;

(d)  $2 + 3i$ .

Trả lời. (a).

Câu 8. Cho  $z = (3 + 2i) + (5 - i)$ ;  $z' = i$ .

(a)  $zz' = -1 + 8i$  ;

(b)  $-1 - 8i$

(c)  $1 + 8i$  ;

(d)  $i$ .

Trả lời. (a).

## HOẠT ĐỘNG 5

### HƯỚNG DẪN BÀI TẬP SGK

Bài 1. Hướng dẫn. Sử dụng định nghĩa phép cộng, phép trừ số phức.

Câu a. Đáp số.  $5 - i$  .

Câu b. Đáp số.  $-3 - 10i$  .

Câu c. Đáp số.  $-1 + 10i$

Câu d. Đáp số.  $-3 + i$  .

**Bài 2. Hướng dẫn.** Sử dụng định nghĩa phép cộng, phép trừ số phức.

Câu a. *Đáp số.*  $\alpha + \beta = 3 + 2i$ ,  $\alpha - \beta = 3 - 2i$  ;

Câu b. *Đáp số.*  $\alpha + \beta = 1 + 4i$ ,  $\alpha - \beta = 1 - 8i$  ;.

Câu c. *Đáp số.*  $\alpha + \beta = -2i$ ,  $\alpha - \beta = 12i$  .

Câu d. *Đáp số.*  $\alpha + \beta = 19 - 2i$ ,  $\alpha - \beta = 11 + 2i$  .

**Bài 3. Hướng dẫn.** Sử dụng các tính chất của phép nhân số phức với  $i^2 = -1$

Câu a. *Đáp số.*  $-13i$

Câu b. *Đáp số.*  $-10 - 4i$  .

Câu c. *Đáp số.*  $20 + 15i$

Câu d. *Đáp số.*  $20 - 8i$  .

**Bài 4. Hướng dẫn.** Làm tương tự như hàng đẳng thức. Chú ý  $i^2 = -1$

Câu a. *Hướng dẫn.*  $i^3 = i^2.i = -i$

*Đáp số.*  $-i$ .

Câu b. *Hướng dẫn.*  $i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$  .

*Đáp số.* 1.

Câu c. *Hướng dẫn.*  $i^5 = i^4.i = i$ .

*Đáp số.*  $i$ .

**Bài 5. Áp dụng các hàng đẳng thức**

Câu a. *Hướng dẫn.*  $(2 + 3i)^2 = 4 + 12i + (3i)^2 = -5 + 12i$

Câu b. *Hướng dẫn.* Ta có  $(2 + 3i)^3 = 8 + 3.4.3i + 3.2(3i)^2 + (3i)^3$   
 $= 8 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i$  .



**BÀI TẬP BỔ SUNG**

**Bài 1.** Chứng minh  $\frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{13}$ .

**Bài 2.** Chứng minh  $\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{13}$

**Bài 3.** Chứng minh  $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

**Bài 4.** Chứng minh  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thì phần thực của  $z$  là  $a = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ,

phần ảo của  $z$  là  $b = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ .

**Bài 5.** Chứng minh  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ .

**Bài 6.** Chứng minh  $\overline{z.z'} = \bar{z}\bar{z'}$ .

# §3. Phép chia số phức

## (tiết 6, 7)

### I. MỤC TIÊU

#### 1. Kiến thức

HS nắm được :

Nghịch đảo của một số phức là gì ?

- Phép chia hai số phức được thực hiện như thế nào ?
- Bài toán tổng và tích của hai số phức liên hợp.

#### 2. Kỹ năng

- Tìm được nghịch đảo của một số phức.
- Thực hiện được phép chia hai số phức.

#### 3. Thái độ

Tự giác, tích cực trong học tập.

Biết phân biệt rõ các khái niệm cơ bản và vận dụng trong từng trường hợp cụ thể.

Tư duy các vấn đề của toán học một cách logic và hệ thống.

### II. CHUẨN BỊ CỦA GV VÀ HS

#### 1. Chuẩn bị của GV

- Chuẩn bị các câu hỏi gợi mở.
- Chuẩn bị phần màu, và một số đồ dùng khác.

#### 2. Chuẩn bị của HS

Cần ôn lại một số kiến thức đã học ở hai bài trước.

Ôn tập kĩ bài 2.

### III. PHÂN PHỐI THỜI LƯỢNG

Bài này chia làm 2 tiết :

*Tiết 1 : Từ đầu đến hết định nghĩa phép chia hai số phức.*

*Tiết 2 : Tiếp theo đến hết.*

IV. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC

A. ĐẶT VẤN ĐỀ

Câu hỏi 1

a) Tìm số phức liên hợp của các số phức sau :

$12 - i$  ;                       $i$  ;                       $-3-12i$ .

b) Nêu một vài ý nghĩa quan trọng của số phức.

Câu hỏi 2

Cho  $z = -3 + 4i$ .

a) Tính  $z^3$

b) Tính  $z^3 - z$  ;  $z^3 + z$ ;  $z^3z$ .

B. BÀI MỚI

HOẠT ĐỘNG 1

1. Tổng và tích của hai số phức liên hợp

•Thực hiện  1 trong 5'.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Hãy tính <math>\bar{z}</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p>Ta có <math>\bar{z} = 2 - 3i</math>.</p>
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Tính <math>z + \bar{z}</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p><math>z + \bar{z} = 4</math></p>
<p><b>Câu hỏi 3</b></p> <p>Tính <math>z.\bar{z}</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b></p> <p><math>z.\bar{z} = 13</math></p>
<p><b>Câu hỏi 4</b></p> <p>Hãy nêu nhận xét cho mọi số phức.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 4</b></p> <p>GV để HS tự nhận xét và kết luận.</p>

H1. Nhận xét về  $z + \bar{z}$ .

H2. Nhận xét về  $z \cdot \bar{z}$ .

H3. Thực hiện tiếp các phép tính sau :

$$z + \bar{z} = \dots$$

$$z \cdot \bar{z} = \dots$$

- GV nêu định nghĩa

*Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số phức đó.*

*Tích của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng bình phương môđun của số phức đó.*

H4. Tổng hai số phức liên hợp là một số phức hay số thực.

H5. Nhận xét về phần thực của số phức tổng đó.

- GV nêu nhận xét :

*Vậy tổng và tích của hai số phức liên hợp là một số thực.*

GV cho HS tự đặt và thực hiện các phép tính sau để hình thành kĩ năng:

$z$	$\bar{z}$	$z + \bar{z}$	$z - \bar{z}$	$z \cdot \bar{z}$

## HOẠT ĐỘNG 2

### 2. Phép chia hai số phức

- GV nêu định nghĩa :

*Chia số phức  $c + di$  cho số phức  $a + bi$  khác 0 là tìm số phức  $z$  sao cho  $c + di = (a + bi)z$ . Số phức  $z$  được gọi là thương trong phép chia  $c + di$  cho  $a + bi$  và kí hiệu là*

$$z = \frac{c + di}{a + bi}.$$

• GV đưa ra các câu hỏi sau:

H6. Tìm  $z$  sao cho  $i = 2z$

H7. Tìm  $z$  sao cho  $i = (3i + 3)z$ .

H8. Ta đã biết  $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$ . Hãy tìm  $\frac{1}{z}$  và  $\frac{1}{\bar{z}}$ .

• Thực hiện ví dụ 1 trong 5' GV sử dụng hình 55 trong SGK

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Ta có $z = \frac{4+2i}{1+i}$ , nghĩa là gì?	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  $z = \frac{4+2i}{1+i} \Leftrightarrow (1+i)z = 4+2i. (*)$
<b>Câu hỏi 2</b>  Hãy tìm số phức liên hợp của $1+i$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>  $1-i$
<b>Câu hỏi 3</b>  Nhân cả hai vế của (*) với $1-i$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b>  Ta được $2z = 6-2i$ . $z = 3-i$ .

• GV nêu các bước tìm thương của hai số phức :

Để tìm thương  $z = \frac{c+di}{a+bi}$  ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Đưa về dạng  $(a+bi)z = c+di$ .

Bước 2. Nhân cả hai vế với số phức liên hợp của  $a+bi$ .

Bước 3.  $z = \frac{1}{a^2+b^2} [(ac+bd) + (ad-bc)i]$

• GV nêu chú ý :

Trong thực hành, để tính thương  $\frac{c+di}{a+bi}$ , ta nhân cả tử và mẫu với số phức liên hợp của  $a+bi$ .

H9. Cho số phức  $z = a + bi$ . Tìm  $z'$  mà  $z'.z = 1$ .

• Cho số phức  $z = a + bi$ , số phức nghịch đảo của  $z$  là  $z' = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$

• GV nêu : Hai số  $z$  và  $z'$  gọi là hai số phức nghịch đảo của nhau.

H10. Chứng minh rằng : để chia  $z$  cho  $z'$  ta nhân  $z$  với nghịch đảo của  $z'$

• Thực hiện ví dụ 2 trong 5'.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Tìm số phức nghịch đảo $z'$ của $2 + 3i$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  Ta có $z. (2 + 3i) = 1 \Leftrightarrow z.13 = 2-3i$  $z = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$ .
<b>Câu hỏi 2</b>  Thực hiện phép chia trên.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>  HS tự thực hiện bằng cách nhân $3 + 2i$ với $z$ .

• Thực hiện  2 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Tính $\frac{1+i}{2-3i}$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  $\frac{1+i}{2-3i} = \frac{(1+i)(2+3i)}{2^2 + (-3)^2} = \frac{-1}{13} + \frac{5}{13}i$
<b>Câu hỏi 2</b>  Tính $\frac{6+3i}{5i}$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>  $\frac{6+3i}{5i} = \frac{(6+3i).(-5i)}{25} = \frac{15}{25} - \frac{30}{25}i$ .

• GV có thể tổng kết :

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{1}{a^2 + b^2} \left[ \begin{pmatrix} a & -b \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} i \right]$$

## TÓM TẮT BÀI HỌC

1.  $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a.$

$$z.\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

2.  $\frac{c + di}{a + bi} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}i.$

3. Trong thực hành, để tính thương  $\frac{c + di}{a + bi}$ , ta nhân cả tử và mẫu với số phức liên hợp của  $a + bi$ .

## HOẠT ĐỘNG 4

## MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Hãy điền đúng sai vào ô trống sau:

Câu 1. Cho số phức  $z = 3 + 2i$

(a)  $\bar{z} = 3 - 2i$

☐

(b)  $z + \bar{z} = 2$

☐

(c)  $z.\bar{z} = 13$

☐

(d) nghịch đảo của  $z$  là  $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	Đ	S	Đ

Câu 2. Cho số phức  $z = 3 - 2i$

(a)  $\bar{z} = 3 + 2i$

☐

(b)  $z + \bar{z} = 2$

☐

(c)  $z.\bar{z} = 13$

☐

(d) nghịch đảo của  $z$  là  $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	Đ	S	Đ

Câu 3. Cho số phức  $z = 3 + 2i$

(a)  $\frac{z}{3} = 1 - \frac{2}{3}i$

☐

(b)  $\frac{z}{i} = 2 + 3i$

☐

(c)  $\frac{z}{2i} = 1 + \frac{3}{2}i$

☐

(d) nghịch đảo của  $z$  là  $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	Đ	Đ	Đ

Hãy chọn khẳng định đúng trong các câu sau:

Câu 4. Trong các số sau, số nào là nghịch đảo của số phức  $2 + i$

(a)  $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$  ;

(b)  $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$  ;

(c)  $-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

(d)  $-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

Trả lời. (b).



Câu 5. Trong các số sau, số nào là nghịch đảo của số phức  $2 - i$

(a)  $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$  ;

(b)  $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$  ;

(c)  $-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

(d)  $-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

Trả lời. (a).

Câu 6. Kết quả  $\frac{10 - 3i}{5 - i}$

(a)  $\frac{53}{26} - \frac{5}{26}i$  ;

(b)  $\frac{53}{26} + \frac{5}{26}i$  ;

(c)  $-\frac{53}{26} + \frac{5}{26}i$  ;

(d)  $-\frac{53}{26} - \frac{5}{26}i$

Trả lời. (a).

Câu 7. Kết quả  $\frac{10 - 3i}{5 + i}$

(a)  $\frac{47}{26} - \frac{25}{26}i$  ;

(b)  $\frac{47}{26} + \frac{25}{26}i$  ;

(c)  $-\frac{47}{26} + \frac{25}{26}i$  ;

(d)  $-\frac{47}{26} - \frac{25}{26}i$  .

Trả lời. (a).

Câu 8. Kết quả  $\frac{10 + 3i}{5 + i}$

(a)  $\frac{53}{26} - \frac{5}{26}i$  ;

(b)  $\frac{53}{26} + \frac{5}{26}i$  ;

(c)  $-\frac{53}{26} + \frac{5}{26}i$  ;

(d)  $-\frac{53}{26} - \frac{5}{26}i$  .

Trả lời. (b).

## HƯỚNG DẪN BÀI TẬP SGK

**Bài 1. Hướng dẫn.** Sử dụng trực tiếp công thức :  $\frac{c+di}{a+bi} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$ .

Câu a. *Hướng dẫn.* Nhân cả tử và mẫu với  $3+2i$

Đáp số.  $\frac{2+i}{3-2i} = \frac{(2+i)(3+2i)}{13} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$ .

Câu b. *Hướng dẫn.* Nhân cả tử và mẫu với  $2-\sqrt{3}i$

Đáp số.  $\frac{2+\sqrt{6}}{7} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{7}i$ .

Câu c. *Hướng dẫn.* Nhân cả tử và mẫu với  $2+3i$

Đáp số.  $-\frac{15}{13} + \frac{10}{13}i$ .

Câu d. *Hướng dẫn.* Nhân cả tử và mẫu với  $-i$

Đáp số.  $\frac{5-2i}{i} = (5-2i)(-i) = -2-5i$ .

**Bài 2. Hướng dẫn.** Sử dụng tính chất của số phức nghịch đảo của  $z = a+bi$  là

$$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Câu a. *Hướng dẫn.* Tìm số phức liên hợp của  $z$  là  $1-2i$ . Chia số phức liên hợp cho  $a^2+b^2$

Đáp số.  $\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ .

Câu b. *Hướng dẫn.* Tìm số phức liên hợp của  $z$  là  $1-2i$ . Chia số phức liên hợp cho  $a^2+b^2 = 11$

Đáp số.  $\frac{1}{\sqrt{2}-3i} = \frac{\sqrt{2}+3i}{(\sqrt{2})^2+(-3)^2} = \frac{\sqrt{2}}{11} + \frac{3}{11}i.$

Câu c. *Hướng dẫn.* Tìm số phức liên hợp của  $z$  là  $1-2i$ . Chia số phức liên hợp cho  $a^2+b^2$

Đáp số.  $\frac{1}{i} = \frac{-i}{1} = -i.$

Câu d. *Hướng dẫn.* Làm tương tự các câu trên.

Đáp số.  $\frac{1}{5+i\sqrt{3}} = \frac{5-i\sqrt{3}}{5^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{5}{28} - \frac{\sqrt{3}}{28}i.$

**Bài 3.** *Hướng dẫn.* Thực hiện các phép nhân bình thường.

Câu a. *Đáp số.*  $-28 + 4i.$

Câu b. *Đáp số.*  $-\frac{32}{5} - \frac{16}{5}i$

Câu a. *Đáp số.*  $32 + 13i$

Câu a. *Đáp số.*  $\frac{219}{45} - \frac{153}{45}i$

**Bài 4.** *Hướng dẫn.* Thực hiện liên hợp các phép toán về số phức.

Câu a. Ta có  $(3-2i)z = 7+3i-4-5i = 3-2i$

Đáp số.  $z = 1.$

Câu b. Làm tương tự câu a.

Đáp số.  $z = \frac{8}{5} - \frac{9}{5}i$

Câu c. Làm tương tự câu a.

Đáp số.  $z = 15 - 5i$

## **§4. Phương trình bậc hai với hệ số thực (tiết 8)**

### **I. MỤC TIÊU**

#### **1. Kiến thức**

HS nắm được :

Cách giải phương trình bậc hai với hệ số thực.

- Căn bậc hai của một số thực âm.

#### **2. Kỹ năng**

- Tìm được công thức nghiệm của phương trình bậc hai

#### **3. Thái độ**

- Tự giác, tích cực trong học tập.

Biết phân biệt rõ các khái niệm cơ bản và vận dụng trong từng trường hợp cụ thể.

- Tư duy các vấn đề của toán học một cách logic và hệ thống.

### **II. CHUẨN BỊ CỦA GV VÀ HS**

#### **1. Chuẩn bị của GV**

Chuẩn bị các câu hỏi gợi mở.

- Chuẩn bị phấn màu, và một số đồ dùng khác.

#### **2. Chuẩn bị của HS**

Cần ôn lại một số kiến thức đã học ở hai bài trước.

Ôn tập kĩ bài 3.

### **III. PHÂN PHỐI THỜI LƯỢNG**

Bài này 1 tiết.

IV. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC

A. ĐẶT VẤN ĐỀ

Câu hỏi 1

Tìm số phức nghịch đảo của các số phức sau :

$12 - i$  ;                       $i$  ;                       $-3 - 12i$ .

Câu hỏi 2

Thực hiện các phép tính sau :

a) Tính  $\frac{12 - i}{3 - i}$                       b) Giải phương trình  $(4 - 3i)z = i$ .

B. BÀI MỚI

HOẠT ĐỘNG 1

1. Căn bậc hai của số thực âm

•Thực hiện  1 trong 5'

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Định nghĩa căn bậc 2 của số dương a.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  HS tự nhắc lại.
<b>Câu hỏi 2</b>  Tìm căn bậc hai của 7	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>  HS tự trả lời.

H1. Nếu  $a = b^2$  thì a là căn bậc hai của b. Đúng hay sai?

H2. Nếu  $a = b^2$  thì -a là căn bậc hai của b. Đúng hay sai?

• GV nêu định nghĩa

$i^2 = -1$  , ta nói i là một căn bậc hai của -1. Cũng vậy, -i cũng là một căn bậc hai của -1.

Căn bậc hai của số thực  $a < 0$  là  $\pm i\sqrt{|a|}$

H3. Căn bậc 2 của  $-3$  là

(a)  $\pm i\sqrt{3}$  ;      (b)  $\pm i\sqrt{-3}$  ;      (a)  $i\sqrt{3}$  ;      (a)  $-i\sqrt{3}$  ;

H5. Căn bậc 2 của  $-5$  là

(a)  $\pm i\sqrt{5}$  ;      (b)  $\pm i\sqrt{-5}$  ;      (a)  $i\sqrt{5}$  ;      (a)  $-i\sqrt{5}$  ;

GV cho HS tự đặt và thực hiện các phép tính sau để hình thành kĩ năng:

$a < 0$	$\sqrt{a}$	$b < 0$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$

HOẠT ĐỘNG 2

2. Phương trình bậc hai với hệ số thực

H6. Trong các phương trình sau, phương trình nào không có nghiệm thực?

(a)  $x^2 + 1100x - 1 = 0$  ;      (b)  $x^2 + 1100x + 1 = 0$  ;  
(a)  $x^2 - 1100x - 1 = 0$  ;      (a)  $x^2 + x + 1 = 0$

• GV nêu vấn đề : Cho phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Tính $\Delta$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  $\Delta = b^2 - 4ac$ .
<b>Câu hỏi 2</b>  $\Delta = 0$ , phương trình có nghiệm như thế nào?	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>  $\Delta = 0$ , phương trình có một nghiệm thực $x = -\frac{b}{2a}$

<b>Câu hỏi 3</b>  $\Delta > 0$ , phương trình có nghiệm như thế nào?	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b>  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
<b>Câu hỏi 4</b>  $\Delta < 0$ , phương trình có nghiệm như thế nào?	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 4</b>  Khi $\Delta < 0$ phương trình không có nghiệm thực.

• GV nêu kết luận :

$\Delta < 0$  , nếu xét trong tập hợp số phức, ta vẫn có hai căn bậc hai ảo của  $\Delta$  là  $\pm i\sqrt{|\Delta|}$  Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức được xác định

bởi công thức 
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

• Thực hiện ví dụ trong 5’.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Tính $\Delta$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  $\Delta = 1 - 4 = -3.$
<b>Câu hỏi 2</b>  Tìm nghiệm.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

• Chú ý trong SGK có thể nêu nhưng đây không phải là chú ý quan trọng.

• Thực hiện một số ví dụ khác (GV tự ra đề )

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Giải phương trình :  $x^2 + 3 = 0$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  $x = \pm i\sqrt{3}$

<b>Câu hỏi 2</b>  Giải phương trình :  $x^2 + x + 3 = 0.$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>  $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}.$
---	--

• GV có thể tổng kết :

Chú ý : Chúng ta có thể sử dụng  $\Delta'$  :  $x_{1,2} = \frac{-b' \pm i\sqrt{|\Delta'|}}{a}.$

•Thực hiện một số ví dụ khác (GV tự ra đề )

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b>  Giải phương trình bằng cách tính $\Delta'$ : $x^2 + 3 = 0$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b>  $x = \pm i\sqrt{3}$
<b>Câu hỏi 2</b>  Giải phương trình bằng cách tính $\Delta'$ : $x^2 - 2x + 3 = 0.$	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b>  $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{1} = -1 \pm i\sqrt{2}.$

HOẠT ĐỘNG 3

TÓM TẮT BÀI HỌC

1. Căn bậc hai của số thực  $a < 0$  là  $\pm i\sqrt{|a|}$
2. Phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức
 
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$
3. Phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức
 
$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm i\sqrt{|\Delta'|}}{a}$$



## MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Hãy điền đúng sai vào ô trống sau

Câu 1.

(a)  $\sqrt{5}$  là  $\pm i\sqrt{5}$

☐

(b)  $\sqrt{-5}$  là  $\pm i\sqrt{5}$

☐

(c)  $\sqrt{-25}$  là  $\pm 5i$

☐

(d)  $\sqrt{-5}$  là  $i\sqrt{5}$

☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
S	Đ	Đ	S

Câu 2. Phương trình  $x^2 - 2x + 7 = 0$

(a) Không có nghiệm thực

☐

(b) Có hai nghiệm phức

☐

(c) Không có nghiệm

☐

(d) Cả ba kết luận trên sai

☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	Đ	S	S

Câu 3. Cho số phức  $x^3 - 1 = 0$

(a) Có một nghiệm

☐

(b) Có một nghiệm thực

☐

(c) Có 3 nghiệm

☐

(d) Cả ba kết luận trên sai

☐

Trả lời

(a)	(b)	(c)	(d)
S	Đ	Đ	S

Hãy chọn khẳng định đúng trong các câu sau:

Câu 4. Phương trình  $x^3 - 1$  có nghiệm là

(a) 1 ;

(b)  $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ;

(c)  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(d)  $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Trả lời. (b).

Câu 5. Phương trình  $x^3 + 1$  có nghiệm là

(a) - 1 ;

(b)  $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ;

(c)  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(d)  $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Trả lời. (b).

Câu 6. Phương trình  $x^3 + x - 2 = 0$  có nghiệm là

(a) 1 ;

(b)  $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$  ;

(c)  $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$

(d)  $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Trả lời. (b).

Câu 7. Phương trình  $x^3 + 2x - 3 = 0$  có nghiệm là

(a) 1 ;

(b)  $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i$  ;

(c)  $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i$

(d)  $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i$

Trả lời. (c).

Câu 8. Phương trình  $x^2 + 2x + 3 = 0$  có nghiệm là

(a)  $-1 + i\sqrt{2}, -1 - i\sqrt{2}$  ;

(b)  $-1 + i\sqrt{2}, 1 - i\sqrt{2}$  ;

(c)  $1 + i\sqrt{2}, 1 - i\sqrt{2}$

(d)  $1 + i\sqrt{2}, -1 - i\sqrt{2}$

Trả lời. (a).

## HOẠT ĐỘNG 5

### HƯỚNG DẪN BÀI TẬP SGK

**Bài 1. Hướng dẫn.** Sử dụng trực tiếp công thức căn bậc hai của số thực  $a < 0$  là  $\pm i\sqrt{|a|}$

Đáp số.  $\pm i\sqrt{7}$

Đáp số.  $\pm 2i\sqrt{2}$ .

Đáp số.  $\pm 2i\sqrt{3}$ .

Đáp số.  $\pm 2i\sqrt{5}$

Đáp số.  $\pm 11i$ .

**Bài 2. Hướng dẫn.** Sử dụng công thức nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} ; x_{1,2} = \frac{-b' \pm i\sqrt{|\Delta'|}}{a}$$

Câu a. *Hướng dẫn.* Ta có  $\Delta' = 1 - 3 = -2$ .

Đáp số.  $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{2}}{3}$ .

Câu b. *Hướng dẫn.* Ta có  $\Delta = -47$ .

Đáp số.  $x_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{47}}{14}$

Câu c. *Hướng dẫn.* Ta có  $\Delta = -171$ .

Đáp số.  $x_{1,2} = \frac{7 \pm i\sqrt{171}}{10}$

**Bài 3. Hướng dẫn.** Đưa về phương trình bậc 2.

Câu a. *Hướng dẫn.* Đặt  $X = x^2$  ta được phương trình  $X^2 + X - 6 = 0$ .

Đáp số.  $\pm\sqrt{2}$  và  $\pm i\sqrt{3}$

Câu b. *Hướng dẫn.* Đặt  $X = x^2$  ta được phương trình  $X^2 + 7X + 10 = 0$ .

Đáp số.  $x_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$ ,  $x_{3,4} = \pm i\sqrt{5}$

**Bài 4. Hướng dẫn.** Đây chính là định lí Vi – et.

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Đáp số.  $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ .

**Bài 5. Hướng dẫn.** phương trình bậc hai nhận  $z, \bar{z}$  làm nghiệm là

$(x - z)(x - \bar{z}) = 0$  hay  $x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z} = 0$ . Bài toán trở thành tìm  $z + \bar{z}$  và  $z\bar{z}$ .

Đáp số.  $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$ .

# Ôn tập chương IV

## (tiết 9, 10)

### I. MỤC TIÊU

#### 1. Kiến thức

- Số phức : Định nghĩa, tính chất, môđun, số phức liên hợp, biểu diễn hình học của số phức.
- Các phép toán về số phức : Công, trừ, nhân và chia.
- Căn bậc hai của số thực âm :
- Giải phương trình bậc hai.

#### 2. Kỹ năng

- Tính được môđun, số phức liên hợp, số phức nghịch đảo của một số phức.
- Giải thành thạo phương trình bậc hai.

#### 3. Thái độ

- Tự giác, tích cực trong học tập.
- Biết phân biệt rõ các khái niệm cơ bản và vận dụng trong từng trường hợp cụ thể.
- Tư duy các vấn đề của toán học một cách logic và hệ thống.

### II. CHUẨN BỊ CỦA GV VÀ HS

#### 1. Chuẩn bị của GV

- Chuẩn bị các câu hỏi gợi mở.
- Chuẩn bị một bài kiểm tra.
- Chuẩn bị phấn màu, và một số đồ dùng khác.

#### 2. Chuẩn bị của HS

- Cần ôn lại một số kiến thức đã học về nguyên hàm và tích phân
- Làm bài kiểm tra 1 tiết.

### III. PHÂN PHỐI THỜI LƯỢNG

Bài này chia làm 2 tiết :

*Tiết 1 : Ôn tập*

*Tiết 2 : Kiểm tra*

### IV. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC

#### HOẠT ĐỘNG 1

#### ÔN TẬP

GV đưa ra các câu hỏi sau đây.

*Câu hỏi 1*

Nêu định nghĩa và tính chất của :

- Số phức.
- Phần thực và phần ảo của số phức.

*Câu hỏi 2*

Nêu các phép toán về số phức.

*Câu hỏi 3*

Hai số phức bằng nhau khi nào?

*Câu hỏi 4*

Nêu cách tìm hai số phức liên hợp

*Câu hỏi 5*

Nêu cách tìm hai số phức nghịch đảo

*Câu hỏi 6*

Nêu các bước giải phương trình bậc hai.

*Câu hỏi 7*

Nêu công thức tính diện tích hình phẳng.

*Câu hỏi 8*

Chứng minh  $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}; \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

### Câu hỏi 9

Chứng minh : Số phức  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) là căn bậc hai của số phức  $w = a + bi$

( $a, b \in \mathbb{R}$ ) khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

## HOẠT ĐỘNG 2

### HƯỚNG DẪN BÀI TẬP SGK

**Bài 4. Hướng dẫn.** Dựa vào tính chất của số phức trong việc biểu diễn hình học.

Hoành độ là phần thực, tung độ là phần ảo.

Câu a. Tung độ bất kì, hoành độ lớn hơn 1.

**Đáp số.** Số phức có phần thực lớn hơn hoặc bằng 1.

Câu b. Tung độ  $y : -1 \leq y \leq 2$ , hoành độ bất kì.

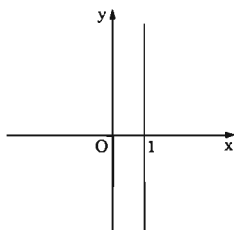
**Đáp số.** Số phức có phần ảo thuộc đoạn  $[-1 ; 2]$ .

Câu c. Hoành độ  $x : -1 \leq x \leq 1$ . Tung độ  $y$  thuộc đường tròn bán kính 2, tâm O.

**Đáp số.** Số phức có phần thực thuộc đoạn  $[-1 ; 1]$  và môđun không vượt quá 2.

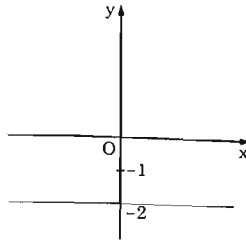
**Bài 5. Hướng dẫn.** Tương tự bài 4.

Câu a. hoành độ bằng 1.



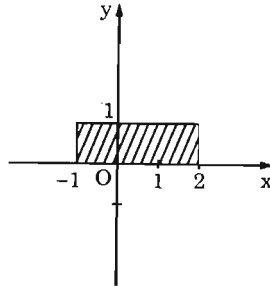
**Đáp số.** Đường thẳng  $x = 1$ .

Câu b. Tung độ bằng  $-2$ .



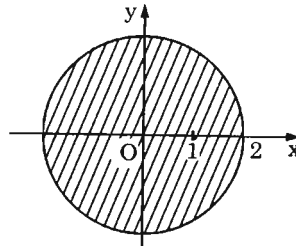
*Đáp số.* Đường thẳng  $y = -2$ .

Câu c.



*Đáp số.* Số phức thuộc hình chữ nhật.

Câu d.



*Đáp số.* Hình tròn bán kính 2, tâm O.

**Bài 6. Hướng dẫn.** Dựa vào hai số phức bằng nhau.

Câu a. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 3x = 2y + 1 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

*Đáp số.*  $x = 1, y = 1$ .

Câu b. Giải hệ 
$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

*Đáp số.*  $x = -1, y = 3$ .



**Bài 7. Hướng dẫn.** Dựa vào việc biểu diễn hình học của số phức và tính chất của tam giác vuông.

**Bài 8. Hướng dẫn.** Dựa vào phép toán về số phức.

Câu a. Ta có  $2 - i + 3 - 2i = 5 - 3i$ .

Đáp số.  $21 + i$ .

Câu b. Cách 1. Ta có  $\frac{1+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2-i)}{5} = \frac{3+i}{5}$ .

Cách 2. Quy đồng mẫu số :  $(4-3i) + \frac{1+i}{2+i} = \frac{(4-3i)(2+i) + 1+i}{2+i} = \frac{12-i}{2+i}$

Đáp số.  $\frac{23}{5} - \frac{14}{5}i$ .

Câu c. Cách 1. Ta có  $(1+i)^2 - (1-i)^2 = (1+i+1-i)(1+i-1+i) = 4i$ .

Cách 2. Thực hiện bình thường :  $(1+i)^2 - (1-i)^2 = 2i - (-2i) = 4i$

Đáp số.  $\frac{23}{5} - \frac{14}{5}i$

Câu d.  $\frac{3+i}{2+i} - \frac{4-3i}{2-i} = \frac{(3+i)(2-i)}{5} - \frac{(4-3i)(2+i)}{5}$

Đáp số.  $-\frac{4}{5} + \frac{1}{5}i$ .

**Bài 9. Hướng dẫn.** Dựa vào các phép tính liên hợp.

Câu a. Ta có  $(3+4i) = 2+5i-1+3i = 1+8i$ . Từ đó ta được  $z = \frac{1+8i}{3+4i}$ .

Đáp số.  $\frac{7}{5} + \frac{4}{5}i$ .

Câu b.  $(4+7i)z - (5-2i) = 6iz \Rightarrow (4+7i)z - 6iz = 5-2i \Rightarrow (4+i)z = 5-2i$

Đáp số.  $\frac{18}{17} - \frac{13}{17}i$ .

**Bài 10. Hướng dẫn.** Dựa vào các phép tính liên hợp.

Câu a. Ta có  $\Delta = 49 - 96 = -47$ .

Đáp số.  $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-7 \pm i\sqrt{47}}{6}$

Câu b. Ta đặt  $u = x^2$ .

Đáp số.  $z_{1,2} = \pm\sqrt[4]{8}$ ;  $z_{3,4} = \pm i\sqrt[4]{8}$

Câu c. Ta đặt  $u = z^2$

Đáp số.  $\pm 1$  và  $\pm i$ .

**Bài 11. Hướng dẫn.** Rõ ràng  $(x - z_1)(x - z_2) = 0$  hay

$$x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1z_2 = 0$$

Hay  $x^2 - 3x + 4 = 0$ .

$$z_1 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}, z_2 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2}$$

**Bài 12. Hướng dẫn.** Rõ ràng  $(x - z_1)(x - z_2) = 0$  hay

$$x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1z_2 = 0.$$

### HOẠT ĐỘNG 3

## ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. (b). 2. (C). 3. (B). 4. (C). 5. (B).

# MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA THAM KHẢO

## Đề 1

### Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (4 điểm).

Câu 1. Hãy điền đúng, sai vào ô trống sau đây :

(a)  $(2+i) - (3 + 4i) = -1 - 3i$  ☐

(b)  $(2+i) - (3 + 4i) = -1 + 5i$  ☐

(c)  $(2+i) + (3 + 4i) = 5 + 5i$  ☐

(d)  $(2+i) + (3 + 4i) = 5 - 5i$  ☐

Câu 2. Hãy điền đúng, sai vào ô trống sau đây :

(a)  $\frac{1-i}{1+i} = i$  ☐

(b)  $\frac{1-i}{1+i} = -i$  ☐

(c)  $\frac{1-2i}{1+2i} = -2i$  ☐

(d)  $\frac{1-2i}{1+2i} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$  ☐

Câu 3. Tập nghiệm của phương trình  $x^3 - 3x + 2 = 0$  là

(a)  $\{1\}$ ; (b)  $\{1 ; 2\}$ ;

(c)  $\{1 ; i\}$  ; (d)  $\{1 ; -i\}$

Câu 4.  $\frac{3-i}{3+4i}$  bằng

(a)  $\frac{1}{5}(1-3i)$ ; (b)  $(1-3i)$ ;

(c) có nghiệm  $\frac{1}{5}(1+3i)$  ; (d)  $-\frac{1}{5}(1-3i)$

**Phần 2. Tự luận (6 điểm)**

1. Giải các phương trình sau

a)  $2x^2 + 3x + 7 = 0$ ;

b)  $x^3 + 3x + 7 = 0$ .

2. Tìm hai số phức biết tổng của chúng là 2 và tích của chúng là 7.

**Đề 2**

**Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (4 điểm).**

Câu 1. Hãy điền đúng, sai vào ô trống sau đây.

(a) Số phức liên hợp của  $3 + 2i$  là  $3 - 2i$

☐

(b) Môđun của số phức  $3 - 2i$  là  $\sqrt{13}$

☐

(c) Môđun của số phức  $3 + 2i$  là  $\sqrt{13}$

☐

(d) Tích của hai số phức liên hợp là một số thực

☐

Câu 2.  $\frac{11-i}{11+2i}$  bằng

(a)  $\frac{119}{125} - \frac{33}{125}i$ ;

(b)  $\frac{119}{125} + \frac{33}{125}i$ ;

(c)  $-\frac{119}{125} - \frac{33}{125}i$

(d)  $-\frac{119}{125} + \frac{33}{125}i$ .

Câu 3. Phương trình  $x^2 - 2x + 3 = 0$  có tất cả các nghiệm là

(a)  $1 + \sqrt{2}i$ ;

(b)  $1 - \sqrt{2}i$ ;

(c)  $1 + \sqrt{2}i$ ;  $1 - \sqrt{2}i$

(d)  $-1 - \sqrt{2}i$ .

Câu 4.  $(1 - i)(1 + 4i)$  bằng

(a)  $5 + 3i$ ;

(b)  $5 - 3i$ ;

(c)  $3 - 5i$ ;

(d)  $3 + 5i$ .

## **Phần 2. Tự luận (6 điểm)**

1. Giải các phương trình sau:

a)  $x^4 + x^2 - 2 = 0$  ;

b)  $x^4 - x^2 + 2 = 0$

2. Giải các phương trình sau

a)  $(2 - 3i)z + 2 = 5i$  ;

b)  $\frac{1+i}{2-i}z = 3 + i$ .

### **Đề 3**

#### **Phần I. Trắc nghiệm khách quan (4 điểm).**

Câu 1. Hãy điền đúng, sai vào ô trống sau đây :

(a)  $(1 - 2i)(1 + 2i) = 5$

☐

(b)  $(2 - 2i)(3 + 2i) = 10 - 2i$

☐

(c)  $(1 - 3i)(1 + 3i) = 10$

☐

(d)  $(1 - 4i)(1 + 4i) = 15$  .

☐

Câu 2. Hãy điền đúng, sai vào ô trống sau đây :

(a)  $\frac{2-i}{3+i} = \frac{1-i}{2}$

☐

(b)  $\frac{2-i}{3-i} = \frac{7-i}{10}$

☐

(c)  $\frac{-2-i}{3-i} = \frac{-1-i}{2}$

☐

(d)  $\frac{-2-i}{3+i} = \frac{-7-i}{10}$

☐

Câu 3. Trong các phương trình sau phương trình nào không có nghiệm thực:

(a)  $x^2 - 3x + 1 = 0$  ;

(b)  $x^3 - 3x + 1 = 0$  ;

(c)  $x^2 + 3x + 7 = 0$  ;

(d)  $x^2 - 3x - 1 = 0$

Câu 4. Trong các phương trình sau phương trình nào không có nghiệm phức:

(a)  $x^2 - 3x + 1 = 0$ ;

(b)  $x^3 - 3x + 1 = 0$ ;

(c)  $x^2 + 3x + 7 = 0$ ;

(d)  $x^2 - 3x - 1 = 0$

**Phần 2. Tự luận (6 điểm)**

1. Giải các phương trình sau

a)  $x^3 - 1$ ;

b)  $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$ .

2. Tìm môđun của các số phức sau :

a)  $3 + 21i$ ;

b)  $33 + 21i$ .

**Đề 4**

**Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (4 điểm).**

Câu 1. Hãy điền đúng, sai vào ô trống sau đây.

(a) Tập hợp các số phức có môđun bằng 1 là một đường tròn

☐

(b) Tập hợp các số phức có môđun  $\leq 1$  là một hình tròn

☐

(c) Phương trình  $x^3 - 1 = 0$  có một nghiệm

☐

(d) Phương trình  $x^3 - 1 = 0$  có một nghiệm thực

☐

Câu 2.  $\frac{10+2i}{3+i}$  bằng

(a)  $\frac{22}{5} - \frac{6}{5}i$ ;

(b)  $\frac{22}{5} + \frac{6}{5}i$ ;

(c)  $-\frac{22}{5} + \frac{6}{5}i$

(d)  $-\frac{22}{5} - \frac{6}{5}i$ .

Câu 3.  $\frac{12+i}{i}$  bằng

(a)  $\frac{12-i}{i}$ ;

(b)  $1 - 12i$ ;

(c)  $-1 - 12i$

(d)  $1 + 12i$ .

Câu 4.  $(1 + i)^3$  bằng

(a)  $-2 + 2i$ ;

(b)  $-2 - 2i$ ;

(c)  $1 + 2i$

(d)  $1 + 3i$ .

**Phần 2. Tự luận (6 điểm)**

1. Giải các phương trình sau :

a)  $x^3 + 1 = 0$  ;

b)  $x^3 + x - 2 = 0$

2. Giải các phương trình sau :

a)  $(2 - i)z + 3i = \frac{1 + 2i}{1 - i}$

b)  $(1 - 2i)z + \bar{z} = 2i$ .

## HƯỚNG DẪN

### Đề 1

**Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (mỗi câu 1 điểm)**

Câu 1.

(a)	(b)	(c)	(d)
S	Đ	S	Đ

Câu 2.

(a)	(b)	(c)	(d)
S	Đ	S	Đ

Câu 3. (b),

Câu 4. (a).

**Phần 2. Tự luận (6 điểm). HS tự giải**

### Đề 2

**Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (mỗi câu 1 điểm)**

Câu 1.

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	Đ	Đ	Đ

Câu 2. (a)

Câu 3. (c).

Câu 4. (a).

**Phần 2. Tự luận (6 điểm). HS tự giải**

### **Đề 3**

**Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (mỗi câu 1 điểm)**

Câu 1.

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	Đ	Đ	Đ

Câu 2.

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	Đ	Đ	Đ

Câu 3. (c).

Câu 4. (c).

**Phần 2. Tự luận (6 điểm). HS tự giải.**

### **Đề 4**

**Phần 1. Trắc nghiệm khách quan (mỗi câu 1 điểm)**

Câu 1.

(a)	(b)	(c)	(d)
Đ	Đ	S	Đ

Câu 2. (a)

Câu 3. (b).

Câu 4. (a).

**Phần 2. Tự luận (6 điểm). HS tự giải.**



# Ôn tập cuối năm

## (tiết 11, 12)

### I. MỤC TIÊU

#### 1. Kiến thức

° Chương I : Ôn tập toàn bộ các kiến thức về khảo sát hàm số.

Khảo sát hàm đa thức : Bậc 3, bậc 4 trùng phương.

- Khảo sát hàm số bậc nhất / bậc hai.

° Chương II : Ôn tập về hàm số mũ, hàm số lôgarit, tính đồng biến và nghịch biến của hàm số. Phương trình mũ và lôgarit.

° Chương III : Nguyên hàm và tích phân

- Các phương pháp tính nguyên hàm, các nguyên hàm cơ bản.

- Các phương pháp tính tích phân, các tích phân cơ bản.

Ứng dụng tích phân trong tính diện tích và thể tích hình phẳng.

° Chương IV : Số phức

- Các phép toán về số phức.

- Số phức liên hợp, số phức nghịch đảo, môđun của số phức.

Phương trình bậc hai.

#### 2. Kỹ năng

- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số thành thạo.
- Tính được các biểu thức mũ và lôgarit
- Giải được các phương trình mũ, lôgarit.
- Tính được nguyên hàm và tích phân
- Thực hiện được một số tính toán đơn giản đối với số phức.

### 3. Thái độ

Tự giác, tích cực trong học tập.

Biết phân biệt rõ các khái niệm cơ bản và vận dụng trong từng trường hợp cụ thể.

- Tư duy các vấn đề của toán học một cách logic và hệ thống.

## II. CHUẨN BỊ CỦA GV VÀ HS

### 1. Chuẩn bị của GV

Chuẩn bị các câu hỏi gợi mở.

Chuẩn bị một bài kiểm tra.

Chuẩn bị phấn màu, và một số đồ dùng khác.

### 2. Chuẩn bị của HS

Cần ôn lại một số kiến thức đã học

Làm bài kiểm tra 1 tiết.

## III. PHÂN PHỐI THỜI LƯỢNG

Bài này chia làm 2 tiết :

*Tiết 1 : Ôn tập*

*Tiết 2 : Kiểm tra*

## IV. TIẾN TRÌNH DẠY - HỌC

### HOẠT ĐỘNG 1

### ÔN TẬP

GV đưa ra các câu hỏi sau đây.

*Câu hỏi 1*

Nêu các bước khảo sát hàm số.

– Khảo sát hàm bậc ba.

– Khảo sát hàm bậc nhất/ bậc nhất.

*Câu hỏi 2*

Tiệm cận là gì?

### Câu hỏi 3

Nêu định nghĩa cực đại và cực tiểu.

### Câu hỏi 4

Nêu định nghĩa mũ và lôgarit ; nêu các tính chất và công thức đổi cơ số của lôgarit

### Câu hỏi 5

Khi nào hàm số mũ và hàm số lôgarit đồng biến, nghịch biến.

### Câu hỏi 6

Nêu một số phương pháp thường gặp để giải phương trình mũ và lôgarit.

### Câu hỏi 7

Nêu các phương pháp tính nguyên hàm.

### Câu hỏi 8

Nêu các phương pháp tính tích phân.

### Câu hỏi 9

Nêu định nghĩa và các phép toán về số phức.

### Câu hỏi 9

Môđun của số phức là gì ? Số phức liên hợp của một số phức, số phức nghịch đảo là gì ?

## HOẠT ĐỘNG 2

## HƯỚNG DẪN BÀI TẬP SGK

### I. PHẦN CÂU HỎI. HS tự trả lời

### II. PHẦN BÀI TẬP

**Bài 1. Hướng dẫn.** Dựa vào sự biến thiên của hàm số.

Câu a. Tính  $\Delta'$  và chứng minh  $\Delta' \geq 0$ .

Ta có  $\Delta' = (a + 1)^2 - a(a + 2) = 1 > 0$ .

HS có thể chứng minh bằng cách : Tổng các hệ số bằng 0.

Câu b. Ta có  $S = x_1 + x_2 = 2 + \frac{2}{a}$ ;  $P = x_1 x_2 = 1 + \frac{2}{a}$

• Khảo sát hàm số S :

TXĐ :  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Ta có  $S' = -\frac{2}{a^2} < 0$ .

- Bảng biến thiên :

$a$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$S'$	-		-
$S$	2	$+\infty$	2

HS tự kết luận và tự vẽ đồ thị.

• Khảo sát hàm P:

TXĐ :  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Ta có  $P' = -\frac{2}{a^2} < 0$ .

- Bảng biến thiên :

$a$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$S'$	-		-
$S$	1	$+\infty$	1

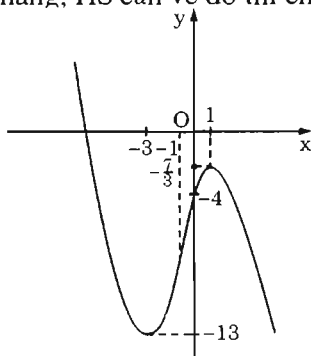
HS tự kết luận và tự vẽ đồ thị.

## Bài 2.

Câu a. Sử dụng phương pháp khảo sát hàm số :

Hoạt động của HS	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Xác định hàm số khi <math>a = 0</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> $y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4.$
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Tìm <math>y'</math> và các nghiệm của <math>y' = 0</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> $y' = -x^2 - 2x + 3 ;$ $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$
<p><b>Câu hỏi 3</b></p> <p>Tìm cực trị và lập bảng biến thiên của hàm số.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b></p> $y_{CT} = -13, y_{CD} = -\frac{7}{3}$ <p>HS tự lập bảng biến thiên</p>
<p><b>Câu hỏi 4</b></p> <p>Hãy tìm các điểm đặc biệt và vẽ đồ thị hàm số.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 4</b></p> <p>HS tự vẽ.</p>

Câu b. Để tính diện tích hình phẳng, HS cần vẽ đồ thị cho dễ hình dung.



Hướng dẫn. 
$$S = \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 4 \right) dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 4) dx + \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{3}x^3 - 3x \right) dx$$

Chú ý rằng  $y = f(x)$  là hàm số lẻ thì  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ .

Từ đó ta có  $S = \int_{-1}^1 (x^2 + 4)dx$

Đáp số.  $\frac{26}{3}$

**Bài 3. Hướng dẫn.** Sử dụng kiến thức tổng hợp của khảo sát hàm số và tích phân.

Câu a.

Hoạt động của HS	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Tìm mối quan hệ của a và b để đồ thị hàm số đi qua A.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p><math>a + b = 0</math></p>
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Tìm mối quan hệ của a và b để đồ thị hàm số đi qua B</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p><math>2a - b = 3</math>.</p>
<p><b>Câu hỏi 3</b></p> <p>Tìm a và b.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b></p> <p><math>a = 1, b = -1</math>.</p>

Câu b. Sử dụng phương pháp khảo sát hàm số :

Hoạt động của HS	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Xác định hàm số với a, b vừa tìm được.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p><math>y = x^3 + x^2 - x + 1</math>.</p>
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Tìm <math>y'</math> và các nghiệm của <math>y' = 0</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p>

<p><b>Câu hỏi 3</b></p> <p>Tìm cực trị và lập bảng biến thiên của hàm số.</p> <p><b>Câu hỏi 4</b></p> <p>Hãy tìm các điểm đặc biệt và vẽ đồ thị hàm số.</p>	$y' = 3x^2 + 2x - 1, \quad y' = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$ <p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b></p> $y_{CT} = \frac{22}{27} \cdot y_{CĐ} = 2$ <p>HS tự lập bảng biến thiên</p> <p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 4</b></p> <p>HS tự vẽ.</p>
---	--

Câu c. Áp dụng trực tiếp công thức tính thể tích khối tròn xoay.

$$V = \pi \int_0^1 (x^3 + x^2 - x + 1)^2 dx$$

Đáp số.  $\frac{134\pi}{105}$ .

**Bài 4. Hướng dẫn.** Sử dụng kiến thức tổng hợp của khảo sát hàm số và tích phân.

Câu a.

Hoạt động của HS	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Vận tốc có ý nghĩa gì ?</p> <p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Gia tốc có ý nghĩa gì ?</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> <p>Vận tốc là đạo hàm của hàm số:</p> <p>Ta có <math>v(t) = t^3 - 3t^2 + t - 3</math>.</p> <p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p>Gia tốc là đạo hàm cấp 2 của hàm số.</p> <p>Ta có <math>a(t) = 3t^2 - 6t + 1</math>.</p>

<b>Câu hỏi 3</b> Tìm các giá trị của các hàm số trên.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> HS tự tính.
--	---

Câu b. Sử dụng câu a.

$$v(t) = t^3 - 3t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 1)(t - 3) = 0 \text{ nên } v(t) = 0 \text{ khi } t = 3.$$

Đáp số.  $v(t) = 0$  khi  $t = 3$ .

**Bài 5. Hướng dẫn.** Sử dụng kiến thức tổng hợp của khảo sát hàm số và phương trình tiếp tuyến đã học ở lớp 11.

Câu a.

Hoạt động của HS	Hoạt động của HS
<b>Câu hỏi 1</b> Tìm $y'$ và các nghiệm của $y' = 0$ .	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b> $y' = 4x^3 + 2ax$
<b>Câu hỏi 2</b> a và b phải thỏa mãn hệ thức nào?	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b> $\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$
<b>Câu hỏi 3</b> Tìm a và b.	<b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b> $\begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$

Câu b. HS tự giải.

Câu c. *Hướng dẫn.*

Tìm x khi  $y = 1$  :  $x_0^4 - \frac{1}{2}x_0^2 + 1 = 1$



$$\Leftrightarrow x_0^4 - \frac{1}{2}x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 \left( x_0^2 - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Dựa vào công thức :  $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

*Đáp số.*

$$y = 1 ;$$

$$\bullet y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1 = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} ;$$

$$\bullet y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1 = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}.$$

**Bài 6. Hướng dẫn.** GV nên chữa kĩ câu a. Hướng dẫn câu b.

Câu a.

Hoạt động của HS	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Tìm <math>y'</math> và các nghiệm của <math>y' = 0</math>.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> $y = \frac{x-2}{x+1}.$ $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Tìm tiệm cận của hàm số :</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> <p>Tiệm cận đứng <math>x = -1</math> ;</p> <p>Tiệm cận ngang : <math>y = 1</math>.</p>
<p><b>Câu hỏi 3</b></p> <p>Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 3</b></p> <p>GV hướng dẫn HS tự làm.</p>

Câu b. *Hướng dẫn.*

Tính  $f'(a) = \frac{3}{(a+1)^2}$ .

Dựa vào công thức :  $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

Đáp số.  $y = \frac{3}{(a+1)^2}(x - a) + \frac{a-2}{a+1}$ .

**Bài 7.** *Hướng dẫn.* GV nên chữa kĩ câu a. Hướng dẫn câu b.

Câu a. HS tự khảo sát.

Câu b.

Hoạt động của HS	Hoạt động của HS
<p><b>Câu hỏi 1</b></p> <p>Hãy tìm giao điểm của hai đường cong.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 1</b></p> $\frac{2}{2-x} = x^2 + 1 \Leftrightarrow$ $2 = (x^2 + 1)(2 - x) \text{ với } x \neq 2$ $\Leftrightarrow x(-x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$
<p><b>Câu hỏi 2</b></p> <p>Viết phương trình tiếp tuyến.</p>	<p><b>Gợi ý trả lời câu hỏi 2</b></p> $f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2}$ $y = \frac{1}{2}x + 1, y = 2x.$

Câu c. *Hướng dẫn.*

Sử dụng trực tiếp công thức tính thể tích tròn xoay.

$$V = \pi \int_0^1 \left( \frac{2}{2-x} \right)^2 dx = 4\pi \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)^2}$$

Đáp số.  $2\pi$ .

**Bài 8. Hướng dẫn.** Sử dụng trực tiếp quy tắc tìm GTLN và GTNN.

Câu a. Khảo sát, tìm cực đại và cực tiểu của hàm số.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(-1) = 8, f(2) = -19, f(-2) = -3, f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{33}{2}$$

Đáp số. GTNN của hàm số là  $f(2) = -19$  ;

GTLN là  $f(-1) = 8$ .

Câu b. Hướng dẫn.  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [1; e]$  nên  $f(x)$  đồng biến.

Do đó GTNN là  $f(1) = 0$  ; GTLN là  $f(e) = e^2$

Câu c. Hướng dẫn.

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x),$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Ta có } f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{e}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$\text{Min} f(x) = f(0) = 0; \quad \text{Max } f(x) = f(1) = \frac{1}{e}.$$

Câu d. Hướng dẫn.

$$\text{Min} f(x) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2; \quad \text{Max } f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

**Bài 9. Hướng dẫn.** Sử dụng các phương pháp giải phương trình mũ và lôgarit.

Câu a. Đặt  $13^x = t$ .

Đáp số.  $x = 0$ .

Câu b. Hướng dẫn. Chia hai vế của phương trình cho  $6^x > 0$

$$\text{Đáp số. } x_1 = 0, x_2 = \log_3 \frac{3}{2}.$$

Câu c. Hướng dẫn. Đưa về phương trình tích:

$$\log_3(x - 2) \cdot (\log_5 x - 1) = 0$$

Đáp số  $\begin{cases} x = 3 \\ x = 5. \end{cases}$

Câu d. *Hướng dẫn.*  $t = \log_2 x$

Đáp số.  $x_1 = 4, x_2 = 8.$

**Bài 10.** *Hướng dẫn.* Sử dụng các phương pháp giải bất phương trình mũ và lôgarit.

Câu a. Chia cả tử số và mẫu số cho  $2^x$ . Đặt  $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$  ( $t > 0$ ),

Đáp số.  $x < 0$  hoặc  $x \geq 1.$

Câu b. *Hướng dẫn.* Chú ý điều kiện có nghiệm của lôgarit.

Đáp số  $-\sqrt{2} < x < -1$  hoặc  $1 < x < \sqrt{2}.$

Câu c. *Hướng dẫn.* Đặt  $t = \log x$

Đáp số  $0 < x \leq 10^{-4}$  hoặc  $x \geq 10.$

Câu d. *Hướng dẫn.* Đặt  $t = \log_2 x$

Đáp số  $0 < x < \frac{1}{2}$  hoặc  $x \geq 2.$

**Bài 11.** *Hướng dẫn.* Sử dụng các phương pháp tích phân từng phần

Câu a. Đặt  $u = \ln x$ ,  $dv = \frac{1}{x^2} dx$ .

Đáp số.  $\frac{4}{9}(5e^6 + 1).$

Câu b. *Hướng dẫn.* Đặt  $u = x$ ,  $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$

Đáp số  $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln 2.$

Câu c. *Hướng dẫn.* Đặt  $u = \pi - x$   $dv = \sin x dx$

Đáp số  $\pi.$

Câu d. *Hướng dẫn.* Đặt  $u = 2x + 3$ ,  $dv = e^{-x}dx$

Đáp số  $3e - 5$ .

**Bài 12.** *Hướng dẫn.* Sử dụng các phương pháp đổi biến số.

Câu a. *Hướng dẫn.* Đặt  $u = \cos(\frac{\pi}{3} - 4x) \Rightarrow du = 4 \sin(\frac{\pi}{3} - 4x)dx$ . Khi  $x = 0$

thì  $u = \frac{1}{2}$ . Khi  $x = \frac{\pi}{24}$  thì  $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Đáp số.  $\frac{1}{8} \ln 3$

Câu b. *Hướng dẫn.* Đặt  $x = \frac{3}{5} \tan t \Rightarrow dx = \frac{3dt}{5 \cos^2 t}$ . Khi  $x = \frac{\sqrt{3}}{5}$  thì  $t = \frac{\pi}{6}$ .

Khi  $x = \frac{3}{5}$  thì  $t = \frac{\pi}{4}$ .

Đáp số  $\frac{\pi}{180}$

Câu c. *Hướng dẫn.* Đặt  $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$ . Khi  $x = 0$  thì  $u = 1$ . Khi

$x = \frac{\pi}{2}$  thì  $u = 0$ .

Đáp số.  $\frac{2}{35}$

Câu d. *Hướng dẫn.*

Đặt  $u = \sqrt{1 + \tan x}$  hay  $u^2 = 1 + \tan x \Rightarrow 2u du = \frac{dx}{\cos^2 x}$

Khi  $x = -\frac{\pi}{4}$  thì  $u = 0$ . Khi  $x = \frac{\pi}{4}$  thì  $u = \sqrt{2}$ .

Đáp số  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

**Bài 13. Hướng dẫn.** Sử dụng các phương pháp tính diện tích hình phẳng.

Chú ý đến các công thức :  $S = \int_a^b |f(x)| dx$ ,  $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  và công thức cận trung gian để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối và các tìm giao điểm của hai đồ thị.

Câu a. *Hướng dẫn.*  $S = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx$ .

*Đáp số.* 6

Câu b. *Hướng dẫn.*  $S = - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$ .

*Đáp số*  $2(1 - \frac{1}{e})$ .

**Bài 14. Hướng dẫn.** Sử dụng các phương pháp tính thể tích khối tròn xoay.

Giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 8. \end{cases}$$

$$V = \pi \int_0^2 [(2x^2)^2 - (x^3)^2] dx = \pi \int_0^2 (4x^4 - x^6) dx = \pi \left( \frac{4}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_0^2 = \frac{256\pi}{35}.$$

**Bài 15. Hướng dẫn.** Sử dụng các phép toán về số phức.

Câu a. *Hướng dẫn.*  $x = \frac{(2 - 5i) + (4 + 7i)}{3 + 2i}$

*Đáp số.*  $x = \frac{22}{13} - \frac{6}{13}i$ .

Câu b. *Đáp số*  $x = -\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i$ .

Câu c. *Hướng dẫn.* Phương trình đã cho có  $\Delta' = 1 - 13 = 12i^2$

*Đáp số*  $x = 1 \pm 2\sqrt{3}i$ .

Câu d. *Hướng dẫn.* Đặt  $t = x^2$  ta có phương trình bậc hai :  $t^2 - t - 6 = 0$  với hai nghiệm là  $t = -2, t = 3$ .

*Đáp số.*  $x = \pm\sqrt{3}, x = \pm\sqrt{2}i$ .

**Bài 16.** *Hướng dẫn.* Sử dụng các tính chất của số phức, mô đun của số phức.

Câu a. *Hướng dẫn.*  $|z| < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 4$ .

*Đáp số.* Tập hợp điểm biểu diễn số phức là phần trong của hình tròn (không kể đường tròn) có tâm tại gốc toạ độ, bán kính 2.

Câu b.  $|z - i| \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ .

*Đáp số.* Hình tròn có tâm tại điểm  $I(0 ; 1)$ , bán kính 1.

Câu c. *Hướng dẫn.*  $\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} < 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 1$ .

*Đáp số.* Hình tròn có tâm tại điểm  $I(1 ; 1)$ , bán kính 1, không kể đường tròn.

## PHẦN ĐỀ TỔNG HỢP ÔN TẬP CUỐI NĂM

### Đề số 1

(Thời gian làm bài 90 phút)

**Phần I.** (Phần trắc nghiệm, gồm 4 câu, mỗi câu 1 điểm)

**Câu 1.** Hình phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = f_1(x)$ ;  $y = f_2(x)$ ;  $x = a$ ,  $x = b$ , với  $a < b$  có diện tích  $S$  được xác định bởi công thức:

A.  $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$

B.  $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$

C.  $S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx$

D.  $S = \left| \int_a^b f_2(x) - f_1(x) dx \right|$

**Câu 2.** Cho số phức  $z = 2 + 3i$ . Trong các số sau đây số nào là môđun của số phức

A.  $\sqrt{5}$

B.  $\sqrt{13}$

C.  $\sqrt{10}$

D. 5.

**Câu 3.** Cho (E):  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Trên (E) những điểm M nhìn 2 tiêu điểm dưới một góc vuông có tọa độ là nghiệm của hệ:

A.  $\begin{cases} \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

D. Cả ba câu trên đều sai.



**Câu 4.** Cho hình cầu (S) có thể tích là V. Gọi  $V_0$  là thể tích hình trụ ngoại tiếp hình cầu (S). Khi đó ta có:

A.  $V = \frac{V_0}{2}$

B.  $V = \frac{V_0}{3}$

C.  $V = \frac{2V_0}{3}$

D.  $V = \frac{3V_0}{5}$

**Phần II:** (Phần tự luận gồm 3 câu, mỗi câu 2 điểm).

**Câu 5.** Cho hàm số  $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x$ . Tìm tất cả các giá trị của x sao cho  $f''(x) = 0$ .

**Câu 6.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x} - 2}$ .

**Câu 7.** Cho tứ diện ABCD có A(2, 1, -1); B(3, 0, 1); C(2, -1, 3); D thuộc trục Oy. Tìm toạ độ của D, biết rằng  $V_{ABCD} = 5$ .

### **Đề số 2**

(Thời gian làm bài 90 phút)

**Phần I.** (Phần trắc nghiệm, gồm 4 câu, mỗi câu 1 điểm)

**Câu 1.** Trong các nguyên hàm dưới đây, nguyên hàm nào không phải là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x + 1$

A.  $F(x) = x^2 + x$

B.  $F(x) = x^2 + x + 1$

C.  $F(x) = x^2 + x + 2$

D.  $F(x) = 2x^2 + x + 1$ .

**Câu 2.** Cho hai điểm A(1 ; 1; 0) và B(3 ; 2 ; -1). Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là :

A.  $\sqrt{7}$

B.  $\sqrt{6}$

C.  $\sqrt{10}$

D. 2.

**Câu 3.** Cho hyperbol (H):  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$ . Điểm nào sau đây không thuộc (H)

A. (2 ;  $\sqrt{20}$ )

B. (-2 ; 0)

C. ( $\sqrt{20}$  ; 0)

D. ( $-\sqrt{20}$  ; 0).

**Câu 4.** Cho hình cầu (S) có phương trình  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 12$ . Mặt phẳng nào sau đây tiếp xúc với (S).

A.  $x + y - z + 3 = 0$

B.  $x + y + x + 3 = 0$

C.  $x + y + x + 3 = 0$

D.  $x - y + x + 3 = 0$

**Phần II:** (Phần tự luận gồm 2 câu, mỗi câu 3 điểm).

**Câu 5.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 + x^2 + 2mx + 1$ .

a) Khảo sát hàm số với  $m = 1$ .

b) Xác định  $m$  để hàm số có cực đại và cực tiểu.

**Câu 6.** Cho tứ diện ABCD có  $A(2, 1, -1)$ ;  $B(3, 0, 1)$ ;  $C(2, -1, 3)$ .

a) Xác định mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

b) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện trên.

### **Đề số 3**

(Thời gian làm bài 90 phút)

**Phần I.** (Phần trắc nghiệm, gồm 4 câu, mỗi câu 0,5 điểm)

**Câu 1.** Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là đạo hàm của hàm số  $f(x) = \sin x + \cos x$ .

A.  $f(x) = \sin x + \cos x$ .

B.  $f(x) = \sin x - \cos x$ .

C.  $f(x) = -\sin x + \cos x$ .

D.  $f(x) = -\sin x - \cos x$ .

**Câu 2.** Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là nguyên hàm của hàm số

$y = x + e^x$

A.  $1 + e^x$

B.  $x + e^x$

C.  $x^2 + e^x$

D.  $\frac{1}{2}x^2 + e^x$

**Câu 3.** Cho hai mặt phẳng (P) :  $x + y + z - 3 = 0$ ; (Q) :  $2x - y + 3z - 3 = 0$ . Điểm nào sau đây thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

A. (1 ; 1 ; 1)

B. (1 ; -1 ; 2)

C. (2 ; 1 ; 0)

D. (-2 ; 1 ; 0).

**Câu 4.** Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

A.  $x - y - 3z + 1 = 0$

B.  $x - y + 3z + 1 = 0$

C.  $x + y - 3z + 1 = 0$

D.  $-x - y - 3z + 1 = 0$

**Phần II:** (Phần tự luận gồm 2 câu, mỗi câu 4 điểm).

**Câu 5.** Cho hàm số  $f(x) = -\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{8}\cos 8x$ .

a) Giải phương trình  $f'(x) = 0$ .

b) Tính  $\int_0^{\pi} f(x) dx$

**Câu 6.** Cho hai đường thẳng có phương trình  $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$  và

$$\begin{cases} x - 2y - z + 1 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

a) Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng trên.

b) Tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

### Đề số 4

(Thời gian làm bài 90 phút)

**Phần I.** (Phần trắc nghiệm, gồm 4 câu, mỗi câu 1 điểm)

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ . Trong các đường thẳng sau đường nào là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

A.  $y = -1$

B.  $y = 1$

C.  $x = 1$

D.  $x = -1$ .

**Câu 2.** Cho đường thẳng có phương trình  $f(x) = 2x + 1$ . Đường thẳng này đi qua điểm nào sau đây:

A.  $(0 ; 0)$

B.  $(1 ; 2)$

C.  $(1 ; 3)$

D.  $(1 ; 0)$ .

**Câu 3.** Cho (E):  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Điểm nào sau đây là tiêu điểm của (E)

A.  $(0 ; 4)$

B.  $(0 ; 2)$

C.  $(0 ; 2\sqrt{3})$

D.  $(2\sqrt{3} ; 0)$

**Câu 4.** Cho hình cầu (S) có phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$ .

Mặt phẳng nào sau đây cắt mặt cầu theo một đường tròn có chu vi lớn nhất?

A.  $x + 2y + z - 1 = 0$

B.  $x + 2y - z - 1 = 0$

C.  $-x + 2y + z - 1 = 0$

D.  $x - 2y + z - 1 = 0$ .

**Phần II:** (Phần tự luận gồm 2 câu, mỗi câu 3 điểm).

**Câu 5.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ .

a) Khảo sát hàm số đã cho.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $x = 0$ ,  $x = 1$ , trục hoành và  $y = f(x)$ .

**Câu 6.** Cho Elip (E) có phương trình  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

a) Tìm tiêu điểm và phương sai của (E).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (E) biết tiếp tuyến đó đi qua A(4 ; 0).

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Đề số 1

#### Phần I : Trắc nghiệm

Câu	1	2	3	4
ĐS	C	B	A	B

#### Phần II : Tự luận

**Câu 5.** Ta có  $f''(x) = 2\cos 2x + 2\sin 2x$ .

Đáp số  $x = k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

**Câu 6.** Đặt  $\sqrt{e^x} = t$ , Ta có  $\sqrt{e^x + e^{-x}} - 2 = \frac{|t^2 - 1|}{t}$ .

**Câu 7.** Các bước thực hiện:

- Gọi D(x ; 0 ; z)

Viết phương trình mặt phẳng (ABC)

Tính khoảng cách từ D đến mp(ABC).

Tính diện tích tam giác ABC.

**Đề số 2**

**Phần I : Trắc nghiệm**

Câu	1	2	3	4
ĐS	D	B	A	A

**Phần II : Tự luận**

**Câu 5.** a) HS tự giải

b)  $y' = 3x^2 + 2x + 2m$ .

Ta có  $\Delta' = 1 - 6m$

Đáp số .  $m < \frac{1}{6}$ .

**Câu 6.** a) Mặt phẳng trung trực của AB đi qua trung điểm của AB và nhận  $\overline{AB}$  làm vectơ pháp tuyến.

b) Tâm mặt cầu là giao của đường thẳng đi qua điểm là giao của ba mặt phẳng trung trực của BC, CD và DB và vuông góc với mặt phẳng (BCD) và đường thẳng câu a.

### Đề số 3

#### Phần I : Trắc nghiệm

Câu	1	2	3	4
ĐS	C	D	C	A

#### Phần II : Tự luận

Câu 5. a) Ta có  $f(x) = \sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = (\sin x + \sin 5x) + (\sin 8x - \sin 2x)$

b) HS tự giải.

Câu 6. a) HS tự giải.

b) - Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua a và song song với b.

Lấy b' là hình chiếu của b trên (P).

Tìm giao điểm của b' và a tại A.

Viết phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

### Đề số 4

#### Phần I : Trắc nghiệm

Câu	1	2	3	4
ĐS	C	C	D	A

#### Phần II : Tự luận

Câu 5. a) HS tự giải.

b)  $S = \int_0^1 (x^3 + x^2 - 3x + 1) dx$

Câu 6. a) HS tự giải.

b) - Viết phương trình đường thẳng qua A :  $Ax + By + C = 0$

- Điều kiện tiếp xúc là :  $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$

# MỤC LỤC

Trang

## Chương III – NGUYÊN HÀM — TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Phần 1 – NHỮNG VẤN ĐỀ CỦA CHƯƠNG .....3

### Phần 2 – CÁC BÀI SOẠN

§1. Nguyên hàm.....5

§ 2. Tích phân.....22

§ 3. Ứng dụng của tích phân trong hình học.....46

Ôn tập chương III.....61

Một số đề tham khảo.....68

## Chương IV – SỐ PHỨC

Phần 1 – NHỮNG VẤN ĐỀ CỦA CHƯƠNG.....77

### Phần 2 – CÁC BÀI SOẠN

§1. Số phức.....79

§ 2. Cộng trừ và nhân số phức.....95

§ 3. Phép chia số phức.....104

§ 4. Phương trình bậc hai với hệ số thực.....114

Ôn tập chương IV.....123

Một số đề tham khảo.....129

Ôn tập cuối năm.....135

Phần đề tổng hợp ôn tập cuối năm.....150



*Thiết kế bài giảng Giải tích 12 – Tập hai*

TRẦN VINH

Nhà xuất bản Hà Nội

---

*Chịu trách nhiệm xuất bản:*

NGUYỄN KHẮC OÁNH

*Biên tập :*

PHẠM QUỐC TUẤN

*Vẽ bìa :*

TÀO THANH HUYỀN

*Trình bày :*

QUỲNH TRANG

*Sửa bản in :*

PHẠM QUỐC TUẤN

---

In 2.000 cuốn, khổ 17x24 cm,  
tại Công ty TNHH in Hà Anh  
Quyết định xuất bản số :  
127 – 2008/CXB/100 h TK – 05/HN.  
In xong và nộp lưu chiểu năm 2008

Sách liên kết với  
Công ty cổ phần In và Phát hành sách Việt Nam



INPHAVI

Phát hành tại Công ty cổ phần In và Phát hành sách Việt Nam

Địa chỉ : 178 - Đồng Cốc - Đồng Đa - Hà Nội

ĐT : (04) 5.115921 - Fax : (04) 5.115921

Thiết kế BCG giải tích 12 T2

Số m

0012

Số C

035



2026693

22.000 Đ

2  
0  
2

**GIÁ: 22.000đ**